
UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS



Seminario de Control I

Proyecto final

Profesor:	Rodrigo Francisco Munguia Alcala
Nombre:	Sebastian Martínez Muñiz 217567225



10 de abril de 2023, Guadalajara

Contenido

Introducción al sistema	2
Modelado del sistema	3
Modelo no lineal	3
Puntos de equilibrio	5
Modelo lineal	7
Comparación del sistema lineal con el no lineal	8
Solución analítica del sistema	9
Análisis del sistema	12
Controlabilidad y Observabilidad	12
Estabilidad	13
Controlador	15
Ley de control $u = -k\mathbf{x}$	15
Observadores	17
Control Integral	20
Conclusiones	22
Apéndices	22
Codigo de Matlab general	22
Referencias	27
Contacto	27

Introducción al sistema

Todos los sistemas tienen un determinado comportamiento que está regido por las leyes físicas, no obstante, muchos de ellos son inestables por lo que es necesario alterarlos, ya sea desde un programa o una alteración física hacia el sistema para que de esta manera podamos alterar su comportamiento y llevarlo a una posición deseada, a esto se le conoce como control.

El objetivo de este proyecto es controlar el sistema ball and beam, el cual consta de una barra con un eje en una de las orillas y del otro está conectado a un servomotor el cual nos proporcionará la inclinación necesaria para que una bola que esta ubicada sobre la barra, se mueva según la inclinación de la barra para que esta quede en una posición, en este caso, debe de quedar en el centro.

El sistema consta de una bola que se mueve libremente a través de la barra según la inclinación de esta misma, la barra tiene un sensor que funciona en base a la corriente que pasa por ella, la bola, al ser metálica va a generar diferentes valores y haciendo una conversión, nosotros podemos saber cuál es la posición de la bola. Una de las puntas de la barra funciona como eje, mientras que el otro extremo está conectada a un servomotor que en nuestro caso funciona como el actuador, el cual nos sirve para darle a nuestra barra la inclinación necesaria para que la bola se pueda mover.

Las aplicaciones de este sistema en la vida real pueden ser variadas; puede ser algún sistema de estabilización o incluso controlar un brazo para que esté de una determinada inclinación o simplemente el estudio de los diferentes controladores como lo es el PID.

Modelado del sistema

Modelo no lineal

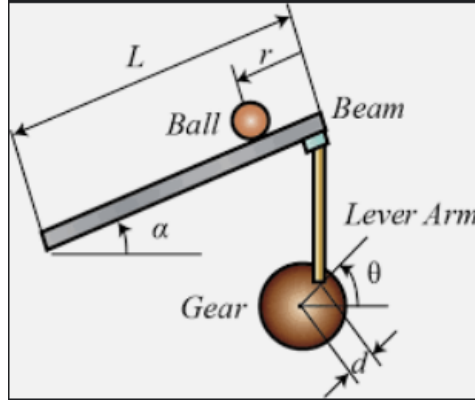


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre del sistema ball and beam

Para este caso se utilizará el metodo de *Newton* Donde la sumatoria de las fuerzas debe ser igual a 0, usando como referencia el diagrama de cuerpo libre del sistema (Figura 1) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\sum F = ma \quad (1)$$

Desglozando nuestra $\sum F$ obtenemos que la fuerza está dada por la fuerza de gravedad sobre un plano inclinado, es decir, $mg \sin(\alpha)$ menos la fuerza en la bola que esta dado por el rozamiento, usando la segunda ley de Newton se obtiene que es igual a la inercia rotacional multiplicada por la aceleración sobre el radio de la bola al cuadrado. Todo lo ya mencionado quedaría expresado de la siguiente forma:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg \sin \alpha - \frac{J \frac{d^2 r}{dt^2}}{R^2} \quad (2)$$

De la ecuación (2), donde α es el ángulo de inclinación de la barra, r es la posición de la esfera, R es el radio de la esfera, m es la masa de la esfera.

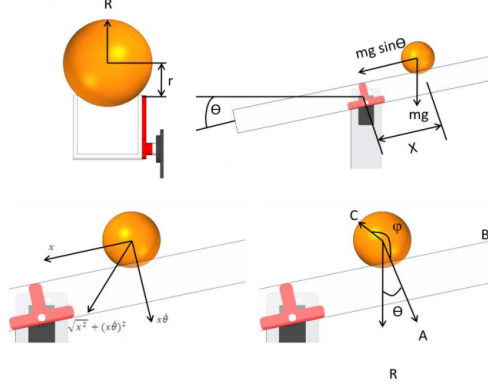


Figura 2: Relación de la esfera con respecto a θ

Como se puede observar en la ecuación (2), su comportamiento depende del ángulo de inclinación de la barra, pero a nosotros nos interesa darle una entrada de control a nuestro actuador, por lo que será necesario hacer una conexión entre ángulo de la barra con respecto al ángulo θ , dado que la relación entre ellas (Figura 2), se puede dar a conocer la siguiente representación:

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{L} \sin(\theta) \quad (3)$$

Donde d es el offset de la unión con la barra y L es el largo de la barra. Sustituyendo (3) en (2) obtenemos lo siguiente:

$$m\ddot{r} = mg \frac{d \sin(\theta)}{L} - \frac{J\ddot{r}}{R^2} \quad (4)$$

Antes de llevar la ecuación (4) al espacio de estados, analicemos el comportamiento del sistema. Si aumentamos la masa de tal manera que solo aumentamos la densidad de la bola, mantendríamos el mismo radio; para la segunda parte de la ecuación no será dominante por lo que todo dependerá de cierta inclinación proporcionada por nuestra entrada.

Suponiendo lo anterior, también podría variar nuestro largo de la barra y esta será cada vez más pequeña por lo que habría un equilibrio con las dos partes de la ecuación al punto de que esta sea 0, cosa que no nos serviría debido a que nuestra esfera no se desplazaría o se movería muy poco.

Dicho de otra forma podemos decir que los parámetros deben de estar en sincronía entre sí para que podamos tener una respuesta positiva al sistema. Una vez entendido nuestro sistema lo llevamos a nuestro espacio de estados. Como se puede observar a nosotros nos interesa saber la posición de la bola, por lo que nuestra matriz de estados estaría dado por r y su primera derivada. Por parte de nuestra entrada solo podemos manipular θ . Una vez dicho lo anterior nos queda el siguiente proceso:

$$x_1 = r$$

$$x_2 = \dot{r}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{r} = x_2 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = \frac{mgd \sin(\theta)}{L(\frac{J}{R^2} + m)} \quad (6)$$

Por lo que nuestro espacio de estados no lineal estaría dado por las ecuaciones (5) y (6)

Puntos de equilibrio

De el espacio de estados no lineal del sistema por la formula general $\dot{x} = f(x, u)$ un punto de equilibrio son aquellos puntos en los que los estados sean iguales a 0, es decir que cumplen con la siguiente forma $0 = f(x, u)$ por lo que volvimos a tomar nuestro espacio de estados no lineal y haciendolo 0

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{mgd \sin(\theta)}{L(\frac{J}{R^2} + m)}$$

Sobre el espacio del sistema de estados anterior, podemos decir que nuestra variable x_2 será 0, siempre y cuando su derivada sea 0, por lo que nos enfocaremos en la segunda ecuación. Nuestras constantes m , g , d , L y R , no pueden ser 0, ya que estas son las propiedades del sistema por lo que solo nos queda controlar la entrada θ , La única manera de que esto de 0 es buscando que el $\sin(\theta) = 0$ para ello obtenemos 3 puntos de equilibrio: 0, π , 2π , no obstante, para no forzar nuestro sistema, solo podemos usarlo de $-\pi/2$ a $\pi/2$ por lo que el unico punto de equilibrio que nos interesa es 0.

Cabe recalcar que este punto es solo para la segunda derivada debido a que en un sistema existen infinitos puntos de equilibrio, uno de ellos es cuando no tenemos un cambio en la velocidad, por ende no hay cambio en la posición, es decir, nosotros podemos poner la esfera en cualquier punto y este al no moverse sería una constante por lo que no hay cambio, por lo tanto este estaría definido como un punto de equilibrio pero a nosotros nos interesa que la esfera esté en el centro de la barra así que el punto de equilibrio estaría definido como:

$$\mathbf{x} = (0, 0) \quad (7)$$

Utilizando este punto de equilibrio como entrada, asignando los parametros dada la siguiente tabla, y usando el método de Euler, obtenemos la siguiente gráfica.

Radio	R	0.0127m
Masa	m	0.064kg
Offset	d	0.0254m
Largo barra	L	0.4255m
Gravedad	g	$9.81m/s^2$
Inercia rotacional	J	$\frac{2mR^2}{5}$

Tabla de parametros

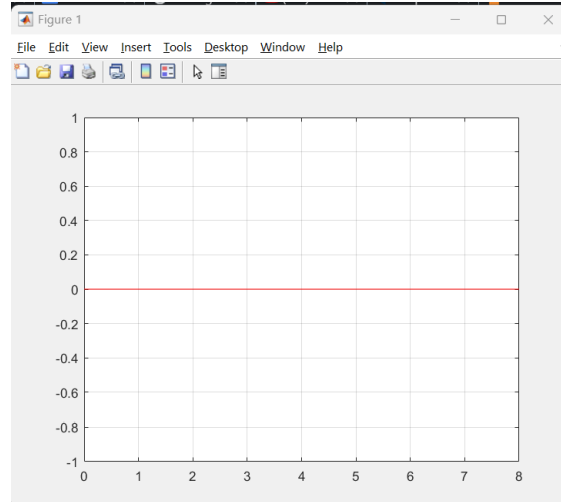


Figura 3: Simulación del punto de equilibrio en 0

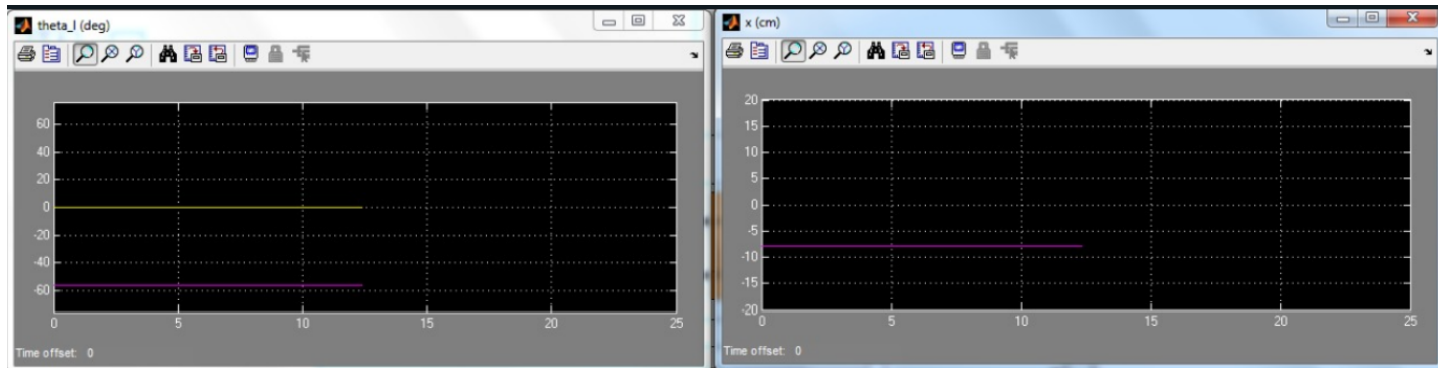


Figura 4: Punto de equilibrio en el sistema real

Modelo lineal

Para que nosotros podamos tener un modelo "linealizado", es necesario usar el Jacobiano. El Jacobiano es derivado de la Serie de Taylor truncado hasta el segundo terminado, dada la siguiente forma $A = \frac{\delta f_{ij}}{\delta x_j}$ nosotros somos capaces de calcular nuestra matriz A , y para el cálculo de la matriz B usaremos en lugar de las variables de estado, la entrada al sistema, en este caso θ .

Dearrollando nuestro Jacobiano quedaría de la siguiente manera:

$$A = \frac{\delta f_{ij}}{\delta x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_{11}}{\delta x_1} & \frac{\delta f_{12}}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f_{21}}{\delta x_2} & \frac{\delta f_{22}}{\delta x_2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz A obtenida en (??) se tiene que evaluar en el punto de equilibrio (7). En este caso nos quedó en terminos numericos, es decir, no tenemos esta variable por lo que la matriz A final es la ya obtenida.

$$B = \frac{\delta f_i}{\delta \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta \theta} \\ \frac{\delta f_2}{\delta \theta} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ mgd \frac{\cos(\theta)}{\frac{LJ}{R^2} + Lm} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sustituyendo los parámetros en la matriz B dada por (9) obtenemos lo siguiente.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ (9.81)(0.064)(0.0127) \frac{\cos(\theta)}{\frac{(0.4255)(4.129 \times 10^{-6})}{0.0127^2} + (0.4255)(0.064)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0159 \frac{\cos(\theta)}{0.0381} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nuestra matriz C quedaría exactamente igual, el sistema solo permite conocer la posición, por lo que este nunca cambiará.

Por lo que nuestro espacio de estados lineal de nuestro sistema dada la forma matricial $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, y $y = C\mathbf{x}$, y usando el teorema para angulos pequeños para linealizar nos quedaría de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Comparación del sistema lineal con el no lineal

En su gran mayoría los modelos son no lineales, lo cual los hace tener una mejor aproximación a la realidad, no obstante es muy difícil trabajar con ellos, por dicho motivo nosotros hacemos un proceso de linearización, el problema de ello es que el modelo lineal obtenido está alrededor de un punto de equilibrio, es decir, en una recta de su gráfica no lineal, en otras palabras, si nuestros valores salen de ese punto nuestro modelo linealizado se alejará demasiado del modelo no lineal y por el mismo motivo, este se aleja cada vez más de la realidad.

Para saber qué tan bueno es el modelo lineal, con respecto al no lineal, se graficarán por medio de un metodo numerico. En este caso será por el metodo de Euler. De esta manera veremos qué tan buena es nuestra linearización en torno a ese punto de equilibrio.

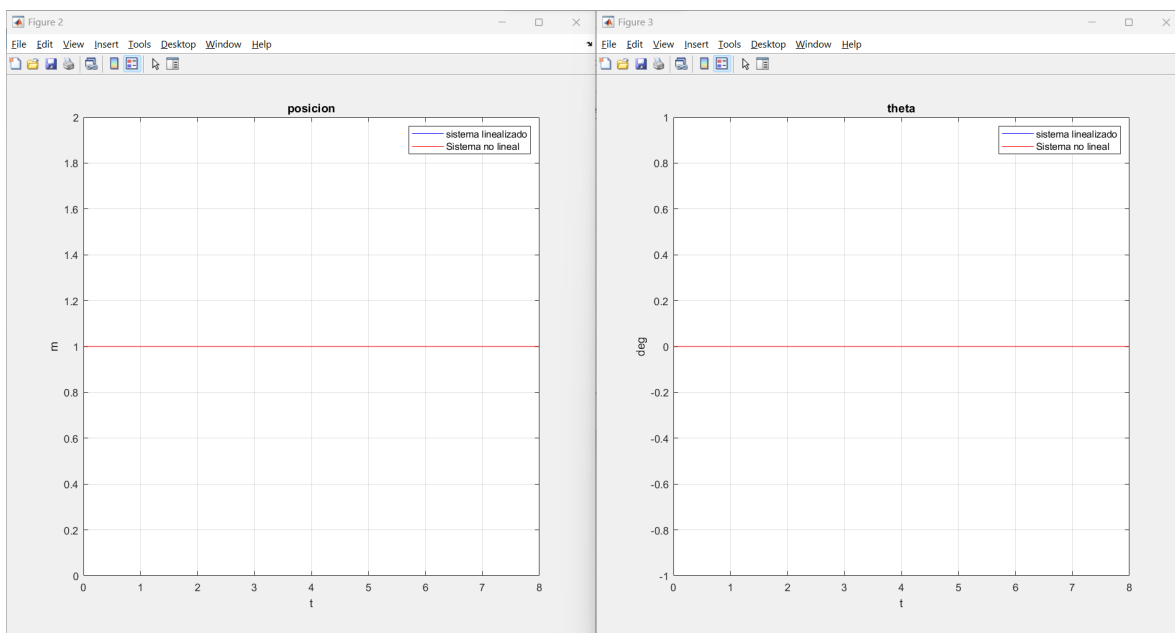


Figura 5: Posición y velocidad del sistema lineal vs no lineal

Como se puede ver en la figura anterior (5), nuestra posición y velocidad son exactamente la misma, por lo que se puede inferir que el cálculo del sistema linealizado es muy bueno, de lo contrario existiría alguna discrepancia entre los valores.

Solución analítica del sistema

Existen diferentes herramientas que nosotros podemos utilizar para conocer la respuesta de un sistema, una de ellas es la más utilizada en este proyecto, el cual se trata de un método numérico conocido como el método de integración de Euler. El otro método es un método analítico dada por la siguiente fórmula.

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\beta u(\tau)d\tau \quad (13)$$

Donde e^{At} , es la matriz exponencial, y τ sería nuestro período del tiempo Y x_0 son unas condiciones iniciales arbitrarias, para este caso se usará $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Además de una entrada constante $u = 1$.

Desarrollando nuestra fórmula nos quedaría de la siguiente manera.

$$x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} (1)(\tau)d\tau$$

Para el cálculo de la matriz exponencial se utilizará el teorema de Cayley Hamilton, la cual nos dice que la matriz exponencial $e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$, la cual en términos de los eigenvalores o valores característicos quedaría de la siguiente manera: $e^{\lambda_i t} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i$ del cual nos saldrá un sistema de ecuaciones a resolver.

En este cálculo se usarán los eigenvalores de la matriz A , el cálculo de dichos eigenvalores se encontrará más adelante en la sección de análisis del sistema en el apartado de estabilidad de este documento.

Debido a que los eigenvalores λ_1 y λ_2 son iguales a 0, tenemos la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} e^{0t} &= \beta_0 + \beta_1(0) \\ 1 &= \beta_0 = \beta_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Y sustituyendo en el teorema obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} e^{At} &= \beta_0 I + \beta_1 A \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

En dado caso de que se requiera sacar de manera inmediata, se puede hacer uso de Matlab, definir la matriz A y hacer uso de la función `expm(A)`, la cual te regresará la matriz exponencial, para nuestro caso te dará la matriz obtenida en la ecuación (15).

Para seguir con nuestra formula, multiplicamos la matriz exponencial por nuestro x_0 dandonos como resultado la siguiente ecuación.

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} (\tau) d\tau$$

Ahora resolvemos la segunda parte de la ecuación, pasamos a resolver la parte de la integral.

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183\tau \end{bmatrix} d\tau \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0.4183\tau(t-\tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4183(0.5\tau^3 - 0.33\tau^3) - 0.4183(-0.33\tau^3) \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.209\tau^3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 1 + 0.209\tau^3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

Al ser un sistema invariante en el tiempo, nuestra solución solo depende del periodo del nuestro.

A continuación, se muestran las graficas que nos da desde la solución analítica en comparación con la gráfica que nos da la simulación del sistema no lineal.

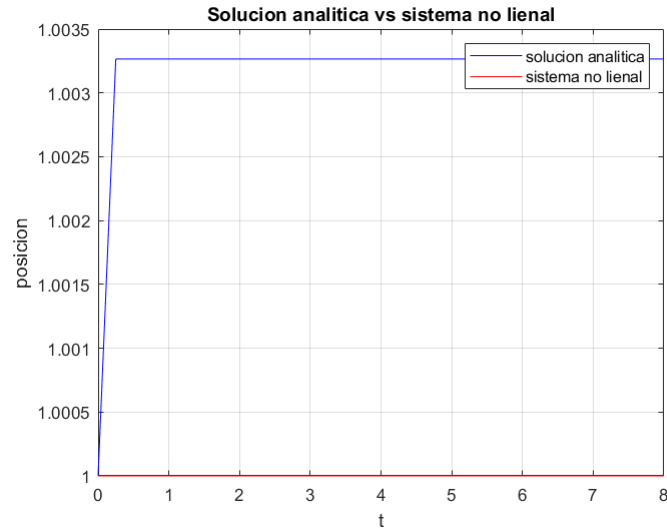


Figura 6: Gráfica de posición por solución analítica vs simulación del sistema no lineal

Como se puede ver en la Fig(6), no estamos libres de errores, no obstante, la simulación que tenemos es bastante buena. La gran diferencia que existe es que la solución analítica considera el transitorio, mientras que en la simulación del sistema no lineal, esto solo nos da el estacionario, además de que no considera bastante los decimales, cosa que en la solución analítica sí podemos observar.

Analisis del sistema

Controlabilidad y Observabilidad

Para que que nosotros podamos controlar un sistema debemos saber si un sistema se puede controlar, para ello hacemos uso de la controlabilidad la cual es una herramienta muy útil, si el sistema falla en esta etapa es imposible diseñar el control para que el mismo funcione.

La controlabilidad de un sistema depende directamente de sus matrices A y B . Se hace un arreglo de estas dos matrices, si de esta nueva matriz, (la cual llamaremos $ctrb$), sus columnas son linealmente independientes, es decir, que una columna no salga de la otra. Se dice que esta matriz tiene un rango completo por lo que el sistema se puede controlar, de lo contrario habría de modificar la matriz B para que esta se pueda pasar el test y de esta manera seguir con el control.

Debido a que nuestro sistema consta de solo dos variables de estado, usaremos la siguiente expresión y considerando que la entrada de θ es 0, esto es debido a que nos interesa cuando la barra no tiene cambios según la definición de puntos de equilibrio .

$$\begin{aligned} ctrb = [B \quad AB] &= \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ ctrb &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4183 \\ 0.4183 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Como se puede observar, nuestras columnas son linealmente independientes, ya que no existe constante que al multiplicar por la columna 1 sea igual a la columna 2, nuestra matriz $ctrb$ tiene un rango completo por lo que es posible generar una ley de control.

Para saber si nuestro sistema se puede observar realizamos un test de observabilidad en el cual se realiza un arreglo de la matriz C con la matriz A , la condición debe de cumplirse es que las filas sean linealmente independientes, es decir, de rango completo, si es así nuestro sistema es observable.

$$\begin{aligned} obsv = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ obsv &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Para este caso tenemos una matriz de rango completo, por lo que las filas de la matriz observan son linealmente independientes la una con la otra, dicho de otra forma podemos determinar que el sistema se puede observar.

Estabilidad

La estabilidad de un sistema por su definición en control, es obtener respuestas finitas a una entrada o entradas finitas, en otras palabras, podemos decir que nosotros obtenemos salidas acotadas a entradas acotadas, y esta puede ser estable por varias definiciones como lo es la estabilidad por Lyapunov, la cual indica estas se mantienen acotadas como lo muestra la siguiente imagen.

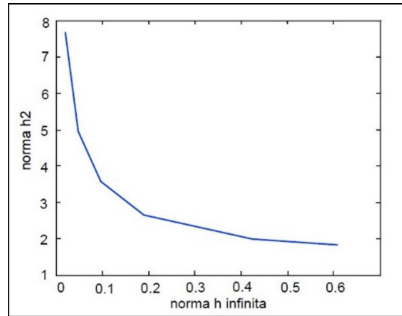


Figura 7: Gráfica de un sistema estable.

Otra definición derivada de la estabilidad por Lyapunov, llamada la Estabilidad asintótica, la cual consiste en que nuestra gráfica converga a 0, así como se muestra en la siguiente imagen.

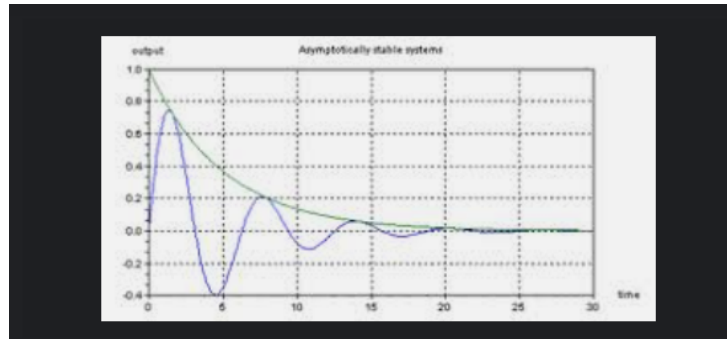


Figura 8: Ejemplo de estabilidad asintótica.

Graficamente lo vimos en la simulación de nuestro sistema en la Figura (3) en donde se puede ver que nuestro sistema converge a 0, aunque bien existe una manera de hacerlo analíticamente.

Para hacer el análisis de la estabilidad de nuestro sistema, lo haremos desde la representación en espacio de estados lineal, para ser más precisos con nuestra matriz A (ecuación 8), esto debido a que la estabilidad depende de los valores propios (eigenvalores) de la matriz A .

Para el cálculo de dichos eigenvalores, haremos uso de la siguiente fórmula:

$$\det(\lambda I - A) \quad (19)$$

Donde λ son los eigenvalores, I es la matriz identidad dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, y A es la matriz ya conocida.

Por lo que nuestro desarrollo del análisis de estabilidad nos quedaría de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda(\lambda) - (-1)(0) \\ & = \lambda^2 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Como se puede observar nosotros tenemos dos polos en 0, esto lo podemos decir que nuestro sistema es marginalmente estable con polos en el origen, podríamos determinar que el sistema oscila de no ser por nuestras condiciones iniciales, no obstante nosotros trataremos de controlar eso en la siguiente etapa.

Controlador

Ley de control $u = -k\mathbf{x}$

Como anteriormente se vió, nuestro sistema si es controlable por lo que nosotros podemos establecer una ley de control, para primer ley se usará la mas simple de ellas, la ley de control $U = -k\mathbf{x}$, para ello primero definiremos nuestros eigenvalores deseados, para este caso vamos a definir a $\lambda = -2$ y a $\lambda = -1$, de esta manera para que nuestro sistema sea estable.

Partiendo desde nuestros valores deseados pasaremos a desarrollar el polinomo para saber que es lo que estamos buscando. Para este caso buscamos que los eigenvalores se parezca a la siguiente expresión desarrollada.

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \quad (21)$$

Partiendo desde la premisa de que la ley de control k será igualada a nuestra entrada pues definimos la matriz $A_k = A - Bk$, donde k es un vector de 1×2 para que esta sea capaz de multiplicarse por nuestro veco B .

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4183 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \\ A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.4183k_1 & 0.4183k_2 \end{bmatrix} \\ A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4183k_1 & -0.4183k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Para que nosotros podamos determinar esas constantes k_1 y k_2 es necesario sacar sus eigenvalores con la formula dada en (??), en este caso se usará $A = A_k$, siguiendo la misma logica se desarrolla quedando la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} &\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4183k_1 & -0.4183k_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= 00 = ((\lambda)(\lambda - 0.4183k_2)) - ((-0.4183k_1)(1)) \\ &0 = \lambda^2 - 0.4183k_2\lambda + 0.4183k_1 \end{aligned} \quad (23)$$

Para que nosotros podamos saber los valores de esas k , igualamos a nuestra ecuación (21). quedando de la siguiente forma.

$$\lambda^2 - 0.4183k_2\lambda + 0.4183k_1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad (24)$$

Donde $-0.4183k_2 = 3$ y $0.4183k_1 = 2$ por lo que procedemos a encontrar esas constantes.

$$\begin{aligned}
0.4183k_2 &= 3 \\
k_2 &= \frac{3}{0.4183} \\
k_2 &= 7.172
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
0.4183k_1 &= 2 \\
k_1 &= \frac{2}{0.4183} \\
k_1 &= 4.781
\end{aligned} \tag{26}$$

Quedando nuestra constante k de la siguiente manera.

$$k = [k_1 \quad k_2] = [4.781 \quad 7.172] \tag{27}$$

Claro está que dichos valores deseados están definidos de manera arbitraria solo para explicar, de manera rapida y sencilla, no obstante la realidad funciona de una manera distinta.

Para hacer esto de la manera correcta es necesario hacer uso de otros metodos, uno de los más efectivos seria el determinar las ganancias \mathbf{k} por medio del lineal quadratic regulator o por sus siglas en ingles LQR. Este metodo nos ayuda a ubar las mejores ganancias del sistema.

Este proceso se realizará por medio de Matlab por el comando "lqr" el cual recibe como parametro el sistema en espacio de estados dado por la ecuación (11), recibe una matriz Q la cual será igual a C^TC y un escalar R el cual nos dirá cuánta acción de control le podemos dar, para este caso le dimos 0.4, es decir, que le dimos mas acción de control.

Para la matriz Q se realiza el siguiente cálculo.

$$Q = CC^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez empleado el comando "lqr" obtenemos la ganancia \mathbf{k} .

$$\mathbf{k} = [1.5811 \quad 2.7495] \tag{28}$$

Una vez obtenida nuestra ley de control solo nos queda generar la entrada a nuestro sistema y simular en el sistema no lineal (5, 6), con condición inicial en la posición distinta de 0, quedandonos de la siguiente manera.

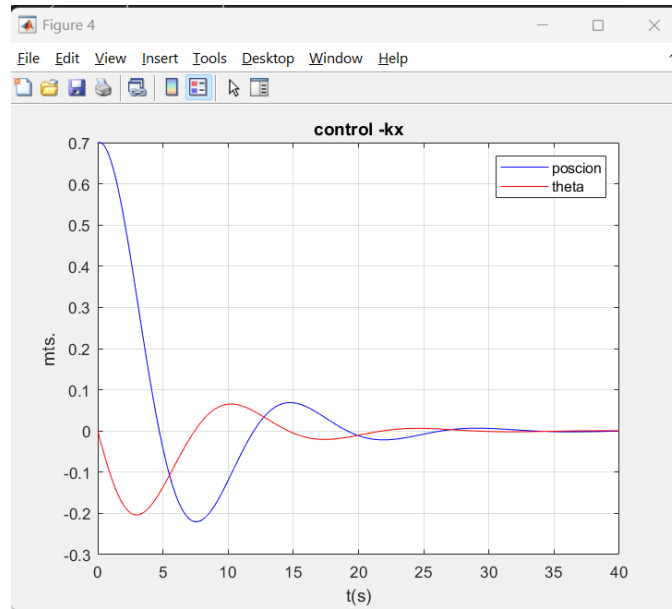


Figura 9: Simulación del sistema con ley de control $u = -k\mathbf{x}$.

Como se puede observar en la Figura 9 donde nuestra gráfica en azul representa la posición y la gráfica en rojo representa la velocidad, podemos observar que nuestra ley de control funciona aunque no del todo, esto debido a que analógicamente esta ley de control es controlador PD donde solo agregamos dos ganancias, una de ellas para disminuir nuestro error en estado estacionario (E_{ss}), y la otra sirve para evitar sobreimpulsos (overshot), en otras palabras es necesario generar una ley de control más compleja como lo es el control integral, el cual es análogo a la parte integral del PID, el cual su función es eliminar E_{ss} .

Observadores

Un sistema no siempre puede tener sensores, pero se puede tener observadores (también conocidos como estimadores), los cuales se encargan de determinar nuestras primeras derivadas de las variables de estado \dot{x} a partir de las mismas ecuaciones.

Para que nosotros seamos capaces de desarrollar un observador es necesario saber si el sistema es observable, este punto ya se planteó anteriormente en el análisis del sistema en controlabilidad y observabilidad, donde se puede ver por la ecuación (18) la cual consiste en una matriz de rango completo, es decir que sus filas son linealmente independientes, por lo que en otras palabras, estamos frente a un sistema observable, por lo que nosotros podemos ser capaces de estimar nuestras variables de estado.

Una vez mencionado lo anterior, ya solo queda hacer el cálculo, para ello haremos algo análogo a nuestra ley de control, en este caso haremos una ley de observación dada por:

$$x_{gorrito} = (A - LC) \quad (29)$$

Para ello pasamos a simplificar la expresión dentro de nuestros parentesis.

$$A_L = A - LC \quad (30)$$

Pasamos a desarrollar nuestra expresión.

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - L \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Como ya conocemos los eigenvalores de A , lo que se va a proceder a hacer es alejarlos del eje imaginario 1 unidad para la posición y dos para la velocidad para que este mismo sea más rápido. Es decir, nuestros puntos deseados serán $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Debido a que el controlador y el observador son cálculos similares, se pasará de largo el observador y simplemente se pondrá el resultado de nuestra L .

Se usará la propiedad de los transpuestos tal que:

$$(A - LC) = (A^T - C^T L^T) \quad (32)$$

Haciendo uso de Matlab, se usará el comando `place`, de la siguiente manera: $L^T = \text{place}(A^t, C^T, L_{\text{deseados}})$, quedándonos lo siguiente.

$$L = \begin{bmatrix} 7.0701 \\ 2.6146 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Claro está que estos valores son elegidos de manera arbitraria de igual manera que en el caso de la primera ley de control. Para este caso simplemente se define a L 4 veces mayor a nuestra ganancia \mathbf{k}^T (ecuación 28) para que este sea más rápido que nuestra ley de control, por lo que nuestra ganancia \mathbf{L} nos quedaría expresada de la siguiente manera.

$$L = \begin{bmatrix} 6.3244 \\ 10.998 \end{bmatrix}$$

No obstante nuestro observador funciona mejor si tiene una unidad menos en su segundo elemento como se muestra aquí:

$$L = \begin{bmatrix} 6.3244 \\ 9.998 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Solo nos queda aplicar nuestra L en el observador y asignar condiciones iniciales distintas de x_0 , para este caso se asignaran $\begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix}$ por lo que nuestras graficas quedan de la siguiente manera.

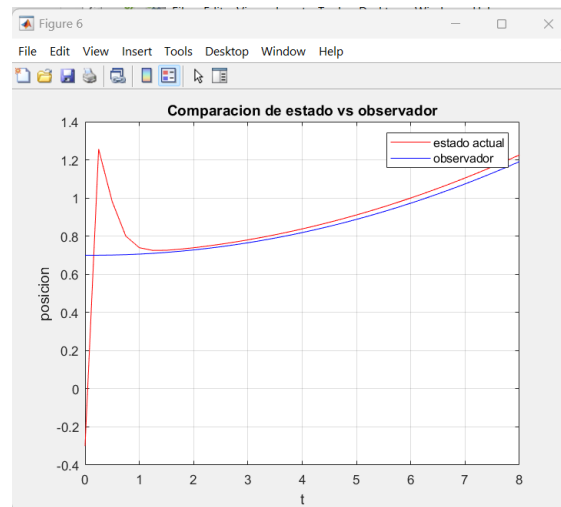


Figura 10: Comparacion del estado real con respecto a nuestro observador

Como se puede observar tenemos una aproximación regular con un error del 17 lo cual nos puede generar problemas más tarde.

Una vez conocido nuestro observador solo hace falta ver cómo se comporta con nuestra ley de control establecida en ecuación (27) obteniendo así la siguiente gráfica.

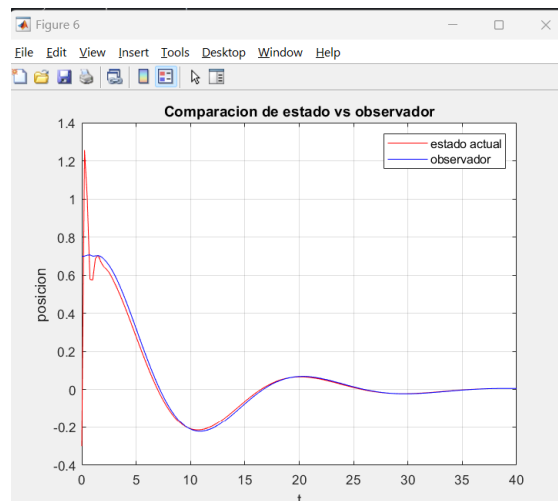


Figura 11: Comparación del estado real con respecto a nuestro observador adicionando el control $u = -kx$

Control Integral

Desde el punto de vista del controlador "PID", nosotros determinamos partes, una de ella proporcional a la cual nos ayuda a disminuir el E_{ss} , teniendo un componente D, la cual nos ayuda a controlar los sobreimpulsos, pero también tenemos una componente I la cual nos ayuda a eliminar el E_{ss} .

El control integral nos representaría la componente I de nuestro PID, claro que esta nueva ley de control se enfocará en todos los estados del sistema, para nuestro caso, la posición y la velocidad.

Como se vió en las gráficas de nuestra primera ley de control Fig(9), nuestra posición disminuye de manera considerable, pero nunca es 0, el propósito de nuestro control integral es eliminar ese error que existe para que de esta manera nuestra esfera este justo en el centro.

Otro punto importante de nuestro control integral es que este tiene mejoras significativas, ya este mismo tiene cualidades de control robusto el cual considera las perturbaciones haciendo que el resultado sea favorable.

Para que nosotros seamos capaces debemos conocer el E_{ss} el cual esta dado por la siguiente forma.

$$X_{ss} = -A_k^{-1} * B_v \quad (35)$$

Donde A_k Es la misma que nosotros usamos para definir nuestra primera ley de control (22), y B_v es una matriz de perturbaciones.

Solo nos queda retroalimentar nuestro error, por lo que la ley de control integral debería de quedar de la siguiente manera.

$$u = -k\mathbf{x} + r \quad (36)$$

La entrada anterior es especifica por la misma ley de control dada en ecuación (27) pero se le suma una referencia, dicha referencia puede ser cualquier tipo de señal, desde una constante hasta una función seno.

$$\frac{dx}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + b_v\mathbf{v} \quad (37)$$

La ecuación (37), nos indica un diferencial de tiempo la cual nos dará la solución en ese punto, este dato es necesario conocerlo para nosotros aplicar el método de Euler. Solo nos queda multiplicar ese $\frac{dx}{dt}$ por un diferencial de tiempo, o mejor dicho un periodo de muestreo.

Claro esta que este control integral, solo funcionará para nuestro sistema linealizado, para poderlo poner en nuestro sistema -que seria lo mejor-, ponerlo en el sistema no lineal, puesto que solo se usa la ecuación desde espacio de estado y la suma de nuestra referencia, y de nuestra matriz de perturbación se quedan exactamente igual.

Suponiendo que existe un error de 1.5cm y de 0.01 radianes, nuestro control integral quedaría de la siguiente manera.

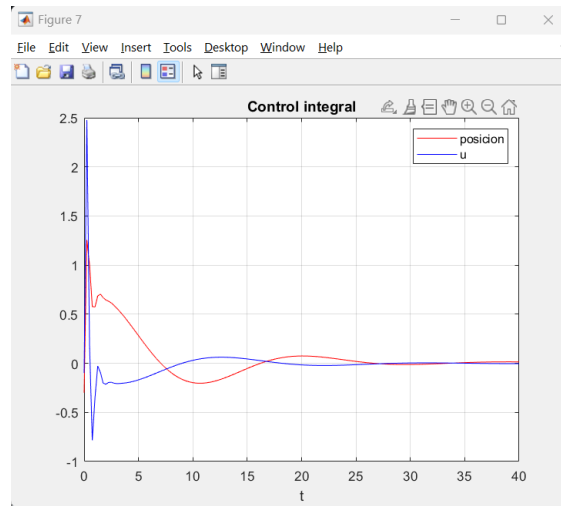


Figura 12: Respuesta del sistema frente al control integral adicionado con un observador

Conclusiones

El control se encuentra en todos los aparatos electronicos cotidianos, los sistemas diseñados por lo regular no hacen lo que nosotros queremos y muchas de las veces es más costoso manipular el sistema, razón por la que recurrimos a lo digital, código para dar mas ganancia a ciertas partes y de esa manera nosotros seamos capaces de modificar el comportamiento de nuestro sistema.

El espacio de estados es una herramienta útil para analizar un sistema así como una herramienta bastante poderosa para el control, ya que esta no le interesa si es un sistema lineal o no lineal, y la gran ventaja que tiene sobre otras herramientas es que el control por retroalimentacion de estados se enfoca en todo el comportamiento del sistema, de todos los estados por lo que le es mas fácil manipularlo.

El Espacio de estados es una rama de control bastante buena y útil, ya que ademas de ser facil entendimiento y de facil aplicación siempre y cuando se tenga las herraminetas necesarias.

Apéndices

Codigo de Matlab general

A continuación se anexa el codigo de Matlab, utilizado para la realización de este documento, cada parte del codigo tiene una función en especifico.

```
1      clear all
2      close all
3      clc
4
5      m_ball=0.064;
6      d_offset=0.0254;
7      R_ball=0.0127;
8      g=9.81;
9      L_beam=0.4255;
10     J=(2*m_ball*R_ball^2)/5;
11     theta=0;
12     u=0.12;
13     dt=0.25;
14
15
16     den=((L_beam*J)/(R_ball^2))+(L_beam*m_ball);
17     num=m_ball*g*d_offset;
18     x0=[0.7, 0]'; %se dan condiciones iniciales a nuestras variables de estado
19
20
21
22     %modelo no lineal del sistema
23     figure(1)
24     x_nonlinear_hist=[];
25     x=x0;
26     for t=0:dt:8
27         x_nonlinear_hist = [x_nonlinear_hist ; [t x' theta]];
28         dx_dt=[x(2); (m_ball*g*d_offset*sin(theta))/(L_beam*(J*R_ball^-2+m_ball))];
29         x = x + dx_dt*dt;
```

```

30 end
31
32 plot(x_nonlinear_hist(:,1),x_nonlinear_hist(:,2),'-b')
33 hold on
34 plot(x_nonlinear_hist(:,1),x_nonlinear_hist(:,3),'-r')
35 hold on
36 ylim([0 10])
37 grid on
38 title('Simulacion en puntos de equilibrio en sistema no lineal')
39 legend('poscion','theta')
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49 %modelo linealizado del sistema
50 A=[0,1;0,0];
51 B=[0;0.4183];
52 C=[1,0];
53 D=[0];
54
55 espacio_estados=ss(A,B,C,D);
56
57 %comparacion del modelo lineal contra el no lineal
58 figure(2)
59 x_lineal=x0;
60 x_lineal_matrix_hist=[];
61 for t=0:dt:8
62     x_lineal_matrix_hist = [x_lineal_matrix_hist ; [t x_lineal' theta]];
63     theta=0;
64     dx_dt=A*x_lineal+B*theta;
65     x_lineal=x_lineal+dx_dt*dt;
66 end
67 plot(x_lineal_matrix_hist(:,1),x_lineal_matrix_hist(:,2),'b')
68 hold on
69 plot(x_nonlinear_hist(:,1),x_nonlinear_hist(:,2),'r')
70 hold on
71 grid on
72 title('posicion')
73 legend('sistema linealizado','Sistema no lineal')
74 xlabel('t')
75 ylabel('mts')
76
77
78 figure (3)
79 plot(x_lineal_matrix_hist(:,1),x_lineal_matrix_hist(:,3),'b')
80 hold on
81 plot(x_nonlinear_hist(:,1),x_nonlinear_hist(:,3),'r')
82 hold on
83 grid on
84 title('theta')
85 legend('sistema linealizado','Sistema no lineal')
86 xlabel('t')
87 ylabel('rad')
88
89

```



```

90
91
92
93 %-----
94 %-----
95
96
97 %Se define nuestra primera ley de control
98 eigenvalores=eig(A);
99 valores_deseados=[-2.1866 -1];
100 %k=place(A,B,valores_deseados)
101 Q=C'*C;
102 R=[0.4];
103 [k,~,~]=lqr(espacio_estados,Q,R);
104 k
105
106 figure (4)
107 x_lineal_hist=[];
108 X=x0;
109 for t=0:dt:40
110     x_lineal_hist = [x_lineal_hist ; [t X' theta]];
111     u=-k*X;
112     dx_dt=[X(2); (m_ball*g*sin(u))/L_beam*(J/(R_ball^2)+m_ball)];
113     X=X+dx_dt*dt;
114 end
115
116 plot(x_lineal_hist(:,1),x_lineal_hist(:,2),'-b')
117 hold on
118 plot(x_lineal_hist(:,1),x_lineal_hist(:,3),'-r')
119 hold on
120 %ylim([0 10])
121 grid on
122 title('control -kx')
123 legend('poscion','theta')
124 xlabel('t(s)')
125 ylabel('mts.')
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136 figure(5)
137 x_solucion=x0;
138 x_solucion_hist=[];
139 for t=0:dt:8
140     x_solucion_hist=[x_solucion_hist ; [t, x_solucion']];
141     x_solucion=[1+0.209*dt^3;0];
142 end
143 plot(x_solucion_hist(:,1),x_solucion_hist(:,2),'b')
144 hold on
145 plot(x_nonlinear_hist(:,1),x_nonlinear_hist(:,2),'r')
146 hold on
147 grid on
148 title('Solucion analitica vs sistema no lienal')
149 legend('solucion analitica','sistema no lienal')

```

```

150 xlabel('t')
151 ylabel('posicion (m)')
152
153
154
155
156
157
158
159
160 %parte del codigo que define el observador
161
162
163 % Ldeseados=[-3;-3.5] %definimos los polos que nosotros queremos
164 % Ltraspuesto=place(transpose(A),transpose(C),Ldeseados)%definidmo por ...
    prodiedad de los trasnpuestos
165 % L=transpose(Ltraspuesto)%transponeos el resultado para obtenerl el vector ...
    fila que nosotros requerimos genereando asi la ley para generar nuestro ...
    observador o estimador.
166
167 L=[6.3244;9.998];
168
169 figure(6)
170 x_observador =[-0.3 -0.1]';
171 x_observador_hist=[];
172 x_observado_hist=[];
173 x_observado=x0;
174
175 for t=0:dt:40 %modificar a 8 si se requiere checar la convergencia, mover a 40 ...
    si se quiere ver con la entrada de control.
176     x_observado_hist=[x_observado_hist; t x_observado' u];
177     x_observador_hist = [x_observador_hist; t x_observador'];
178     %u=0.12;
179     u=-k*x_observador;
180
181     dx_dt=[x_observado(2); (m_ball*g*sin(u))/L.beam*(J/(R_ball^2)+m_ball)];
182     x_observado = x_observado + dx_dt*dt;
183     y=C*x_observado;
184
185     x_observador=x_observador+ (A*x_observador+B*u + L*(y - C*x_observador))*dt;
186 end
187
188 plot(x_observador_hist(:,1),x_observador_hist(:,2),'r')
189 hold on
190 plot(x_observado_hist(:,1),x_observado_hist(:,2),'b')
191 hold on
192 grid on
193 title('Comparacion de estado vs observador')
194 legend('estado actual','observador')
195 xlabel('t')
196 ylabel('posicion (m)')
197
198
199
200
201
202 %seccion de codigo encargada al control integral
203 %x_observado no es necesario graficar ya que solo se pretende usar nuestro
204 %observador
205

```

```

206 Bv=[-0.015;0.01];
207 x_ss=-inv(A-B*k)*Bv;
208
209 v=0.1;
210
211
212
213 figure(7)
214 x_observador =[-0.3 -0.1]';
215 x_observador_hist=[];
216 x_observado_hist=[];
217 x_observado=x0;
218
219 for t=0:dt:40 %modificar a 8 si se requiere checar la convergencia, mover a 40 ...
    si se quiere ver con la entrada de control.
220     x_observado_hist=[x_observado_hist; t x_observado' u];
221     x_observador_hist = [x_observador_hist; t x_observador' u];
222     %r=sin(t*0.1);
223     %r=-2;
224     r=0;
225     %u=0.12;
226     u=-k*x_observador+r;
227
228     dx_dt=[x_observado(2); (m_ball*g*sin(u))/L_beam*(J/(R_ball^2)+m_ball)]+Bv*v;
229     x_observado = x_observado + dx_dt*dt;
230     y=C*x_observado;
231
232     x_observador=x_observador+ (A*x_observador+B*u + L*(y - C*x_observador))*dt;
233 end
234
235 plot(x_observador_hist(:,1),x_observador_hist(:,2),'r')
236 hold on
237 plot(x_observado_hist(:,1),x_observador_hist(:,3),'b')
238 hold on
239 grid on
240 title('Control integral')
241 legend('posicion','u')
242 xlabel('t')

```

Referencias

Ogata, K. (2022). Modern Control Engineering (5th Edition) by Katsuhiko Ogata(2009-09-04). Pearson.

Diseño de un regulador lineal cuadrático (LQR) - MATLAB lqr - MathWorks América Latina. (s. f.). <https://la.mathworks.com/help/control/ref/lqr.html>

Contacto

Correo electronico institucional: sebastian.martinez5672@alumnos.udg.mx

