Nachlass Riemann 3

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859)

Untersuchung [illegible] ausgehen von der von Euler bemerkten Gleichung, dass das Product

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch

$\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden, welcher für das ganze complexe Grössengebiet gilt.

Durch Anwendung der Gleichung $\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\,dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$ erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}.$$

Betrachtet man nun das Integral $\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}$ von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man hat daher

$$2\sin \pi s\;\Pi(s-1)\,\zeta(s) = i\int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

das Integral in der eben angegebenen Bedeutung verstanden.

Diese Gleichung giebt nun den Werth der Function $\zeta(s)$ für jedes beliebige complexe s und zeigt, dass sie einwerthig und für alle endlichen Werthe von s, ausser 1, endlich ist, so wie auch, dass sie verschwindet, wenn s gleich einer negativen geraden Zahl ist.

Wenn der reelle Theil von s negativ ist, kann das Integral, statt positiv um das eben angegebene Grössengebiet, auch negativ um das Grössengebiet, welches sämmtliche übrigen complexen Grössen enthält, erstreckt werden, da das Integral durch Werthe mit unendlich grossem Modul dann unendlich klein ist. Im Innern dieses Gebiets aber wird die Function unter dem Integralzeichen nur unstetig, wenn x gleich einem ganzen Vielfachen von $\pm 2\pi i$ wird, und das Integral ist daher gleich der Summe der Integrale negativ um diese Werthe genommen. Das Integral um den Werth $n\,2\pi i$ aber ist $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; man erhält daher

$$2\sin \pi s\;\Pi(s-1)\,\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1} + i^{s-1}\right),$$

also eine Relation zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$, welche sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Function Π auch so ausdrücken lässt:

$$\Pi\!\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s)$$

bleibt ungeändert, wenn s in $1-s$ verwandelt wird.

Diese Eigenschaft der Function veranlasste mich, statt $\Pi\frac{s}{2}-1$ in dem allgemeinen Gliede der Reihe $\sum \frac{1}{n^s}$ einzuführen, wodurch man einen sehr bequemen Ausdruck der Function $\zeta(s)$ erhält. In der That hat man

$$\frac{1}{n^s}\,\Pi\!\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-nn\pi x}\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

also, wenn man

$$\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-nn\pi x}$$

setzt,

$$\Pi\!\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

oder da $2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\!\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)$ (Jacobi, Fund. S. 184)

$$= \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_0^1 \psi\!\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\right)dx.$$

Ich setze nun $s = \frac{1}{2} + ti$ und

$$\Pi\!\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s) = \xi(t),$$

so dass

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\!\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx$$

oder auch

$$= 4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx}\, x^{-\frac{1}{4}} \cos\!\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx.$$

Diese Function ist für alle endlichen Werthe von t endlich, und lässt sich nach Potenzen von t in eine sehr schnell convergirende Reihe entwickeln. Da für einen Werth von s, dessen reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, $\log \zeta(s) = -\sum \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ endlich bleibt, und von den Logarithmen der übrigen Factoren von $\xi(t)$ dasselbe gilt, so kann die Function $\xi(t)$ nur verschwinden, wenn der imaginäre Theil von t zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ liegt. Die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t) = 0$, deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist etwa $= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$; denn das Integral $\int d\log \xi(t)$, positiv um den Inbegriff der Werthe von t erstreckt, deren imaginärer Theil zwischen $\frac{1}{2}i$ und $-\frac{1}{2}i$ und deren reeller Theil zwischen 0 und T liegt, ist (bis auf einen Bruchtheil von der Ordnung der Grösse $\frac{1}{T}$) $= \left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right)i$; dieses Integral aber ist gleich der Anzahl der in diesem Gebiet liegenden Wurzeln von $\xi(t) = 0$, multiplicirt mit $2\pi i$. Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen;

Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird.

Ich habe mich [illegible] die Aufsuchung [illegible], nach einigen flüchtigen [illegible] vorläufig bei Seite gelassen, da sie für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

Bezeichnet man aber durch α jede Wurzel der Gleichung $\xi(\alpha) = 0$, so kann man $\log \xi(t)$ durch

$$\sum \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + \log \xi(0)$$

ausdrücken, denn da die Dichtigkeit der Wurzeln von der Grösse t mit t nur wie $\log \frac{t}{2\pi}$ wächst, so convergirt dieser Ausdruck und wird für ein unendliches t nur unendlich wie $t \log t$; er unterscheidet sich also von $\log \xi(t)$ um eine Function von t^2, die für ein endliches t stetig und endlich bleibt und, mit t^2 dividirt, für ein unendliches t unendlich klein wird. Dieser Unterschied ist folglich eine Constante, deren Werth, indem man $t = 0$ setzt, bestimmt werden kann.

$$\cancel{\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s}}$$

Mit diesen Hülfsmitteln lässt sich nun die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als x sind, ~~auf folgendem Wege~~ bestimmen.

Es sei $F(x)$, wenn x nicht gerade einer Primzahl gleich ist, gleich dieser Anzahl, wenn aber x eine Primzahl ist, um $\frac{1}{2}$ grösser, so dass für ein x, bei welchem $F(x)$ sich sprungweise ändert,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}.$$

Ersetzt man nun in

$$\log \zeta(s) = -\sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s}$$

$$p^{-s} = s \int_p^\infty x^{-s-1}\, dx, \quad p^{-2s} = s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1}\, dx$$

so erhält man

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)\, x^{-s-1}\, dx,$$

wenn man $F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$ durch $f(x)$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist gültig für jeden complexen Werth $a + bi$ von s, wenn $a > 1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s) = \int_0^\infty h(x)\, x^{-s}\, d \log x$$

gilt, so kann man mit Hülfe des Fourier'schen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfällt, wenn $h(x)$ reell ist und $g(a+bi) = g_1(b) + g_2(b)\, i$, in die beiden folgenden:

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x)\, x^{-a} \cos(b \log x)\, d \log x, \quad i\, g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x)\, x^{-a} \sin(b \log x)\, d \log x$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit $(\cos(b \log y) + \sin(b \log y)\, i)\, db$ und integrirt von $-\infty$ bis ∞, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourier'schen Satze $\pi\, h(y)\, y^{-a}$, also wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i\, y^a$ multiplicirt

$$2\pi i\, h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\, y^s\, ds,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt.

Das Integral stellt für einen Werth von y, bei welchem eine sprungweise Änderung der Function $h(y)$ stattfindet, den Mittelwerth aus den Werthen der Function h zu beiden Seiten des Sprunges dar. Bei der vorausgesetzten Bestimmungsweise der Function $f(x)$ besitzt diese dieselbe Eigenschaft und man hat daher völlig allgemein

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s}\, y^s\, ds.$$

Für $\log \zeta(s)$ kann man nun den früher gefundenen Ausdruck

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi \frac{s}{2} + \sum \log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0)$$

substituiren; die Integrale der einzelnen Glieder dieses Ausdrucks würden aber dann in's Unendliche ausgedehnt nicht convergiren, [illegible] eine Schwierigkeit, die sich [illegible] beseitigen lässt. Am [illegible] scheint es von der Gleichung

$$\frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} = -\int_0^\infty f(x) \log x\, x^{-s}\, d \log x$$

auszugehen und die einzelnen Glieder der linken Seite in die Form

$$\int_0^\infty h(x)\, x^{-s}\, d \log x$$

zu setzen.

Man findet, wenn der reelle Theil von s positiv und der reelle Theil [illegible] kleiner, aber ebenfalls positiv ist

$$\int_1^\infty x^{-s} \int_0^x \frac{x^{\beta}\, dx}{\log x}\, d \log x =$$

Man hat, wenn der reelle Theil von s positiv ~~ist~~ und der reelle Theil von β ~~größer~~ kleiner oder ebenfalls positiv ist.

$$\frac{\partial\,\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)}{\partial\beta} = \frac{1}{\beta-s}\,\frac{1}{\beta} = -\int_1^\infty x^{-s-1}\left(\int_1^x x^{\beta-1}\,dx\right)dx,$$

$$= -\int_1^\infty x^{-s-1}\,Li(x^\beta)\,dx$$

folglich

$$-\int_1^\infty x^{-s-1}\left(\int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx\right)dx = \frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right) + \text{Const.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ~~[illegible]~~ erhält um $\frac{2\pi i}{s}$ verschiedene Werthe, je nachdem die innere Integration von 0 bis x durch Werthe mit positivem oder negativem Arcus ~~[illegible]~~ geschieht. Im ersten Falle ~~wird~~ der Ausdruck links unendlich klein, wenn der Coefficient von i in dem Werthe von β positiv unendlich wird, im zweiten Falle findet dasselbe statt, wenn dieser negativ unendlich wird. Hieraus ist die Constante auf der rechten Seite zu bestimmen.

Ferner findet sich leicht aus

$$\Psi(s) = \int_0^1 \frac{1}{\log\frac{1}{z}} - \frac{z^s}{1-z}\,dz$$

20

$$\frac{\partial\,\frac{\log\Pi\frac{s}{2}}{s}}{\partial s} = \int_1^\infty x^{-s-1}\log x\left(\int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\log x}\right)dx$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung

$$\log y\; f(y) = -\frac{1}{2\pi i}\lim\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{\partial\,\frac{\log\xi(s)}{s}}{\partial s}\, y^s\, ds \quad \text{für } b=\infty$$

ergiebt sich $f(x) = Li(x) - \sum^{\alpha}\left(Li(x^{\frac12+\alpha i}) + Li(x^{\frac12-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\log x} + \log\xi(0)$, die positiv sind (oder einen positiven reellen Theil haben)

wenn in $\sum^{\alpha}$ für α sämmtliche Wurzeln der Gleichung $\xi(\alpha)=0$, ~~deren reeller Theil positiv ist~~ ihrer Grösse nach geordnet, gesetzt werden.

Es ist leicht zu zeigen, daß bei dieser Anordnung der Werth der Reihe $\sum^{\alpha}\left(Li(x^{\frac12+\alpha i}) + Li(x^{\frac12-\alpha i})\right)\log x$

mit dem ~~[illegible]~~ Grenzwerthe $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \frac{\partial\,\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac12)^2}{\alpha\alpha}\right)}{\partial s}\, y^s\, ds$ ~~für ein unendliches~~ bei unaufhörlichem Wachsen der Grösse b [illegible]

übereinstimmt, bei veränderter Anordnung aber jeden beliebigen reellen Werth erhalten kann.

Aus $f(x)$ ~~findet sich~~ erhält man $F(x)$ mittelst der durch Umkehrung der Relation $f x = \sum \frac{1}{n}F(x^{\frac1n})$ sich ergebenden Gleichung

$$f(x) = F(x) + \frac12 F(x^{\frac12}) + \frac13 F(x^{\frac13})$$

~~und Man erhält dadurch~~ ~~[illegible]~~

$$F(x) = \sum(-1)^{\mu}\,\frac{1}{m}\,f(x^{\frac1m})$$

worin für m der Reihe nach die Zahlen, die durch kein Quadrat theilbar sind zu setzen sind und μ die Anzahl der Primfactoren von m bezeichnet, und giebt die [illegible] Werth

Es ist daher die bekannte Näherungsformel ~~$F(x) = Li\,x$~~ ist also nur bis auf Grössen von der Ordnung der Grösse $x^{\frac12}$ richtig und giebt einen etwas zu grossen Werth; denn die nichtperiodischen Glieder in dem Ausdrucke von $F(x)$ sind, von Grössen, die mit x nicht in's Unendliche wachsen, abgesehen:

$$Li(x) - \frac12 Li(x^{\frac12}) - \frac13 Li(x^{\frac13}) - \frac15 Li(x^{\frac15}) + \frac16 Li(x^{\frac16}) - \frac17 Li(x^{\frac17}) + \cdots$$

und bis zu $x = 2$ Mill.

In der That hat sich bei der von Gauss und Goldschmidt vorgenommenen ~~[illegible]~~ und bis zu x = drei Millionen fortgesetzten Vergleichung von $Li(x)$ mit der Anzahl der Primzahlen unter x [illegible] diese Anzahl schon im ersten Hundert stets kleiner als $Li\,x$ ergeben, [illegible] von den periodischen Gliedern abhängige [illegible] Aber [illegible] die stellenweise Verdichtung und Verdünnung der Primzahlen hat schon bei den Zählungen die Aufmerksamkeit erregt, ohne dass jedoch hierin eine Gesetzmässigkeit bemerkt worden wäre.

~~[illegible] Mittel mit $Li\,x + \log\xi(0)$~~ Sollte jemand zu einer neuen Zählung der Primzahlen geneigt sein, so würde es interessant sein, den Einfluss der einzelnen periodischen Glieder [illegible] $\xi(\alpha)=0$ [illegible] $\frac{2\cos(\alpha\log x)\,x^{-\frac12}}{\log x}$ [illegible] zu verfolgen. Einen etwas regelmässigeren Gang als $F(x)$ würde $f(x)$ zeigen, welche sich schon im ersten Hundert [illegible] mit $Li(x) + \log\xi(0)$ sehr deutlich zu erkennen giebt.

Bei einer etwaigen neuen Zählung der Primzahlen würde es interessant sein, den Einfluss der einzelnen periodischen Glieder in dem Ausdrucke für die Dichtigkeit der Primzahlen zu verfolgen.

Meinen Dank für die Mittheilungen, welche

glaube ich Ew. [illegible] dadurch zu erkennen zu geben, daß ich von der mir gütigst ertheilten Erlaubniß baldigst Gebrauch mache durch
Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der [illegible]
den Gegenstand, welcher durch Ihr Interesse, welches Gewicht und Einfluß demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen
Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.