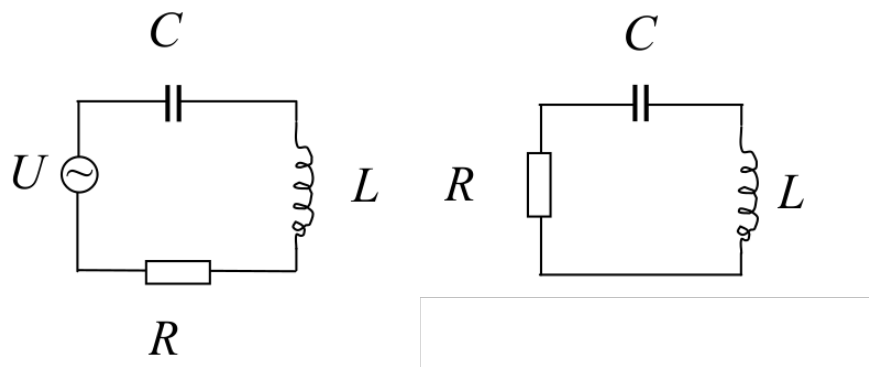


Розрахункова робота №3
Згасаючі або вимушені коливання

Варіант 4
Шкаліков Олег, ФІ-81



На малюнках зображено коливальний RLC контур, для якого відомі: власна колова частота $\Omega_0 = (LC)^{-1/2} = 235.7 \times 10^3 (c^{-1})$ за відсутності опору; опір $R = 2(\text{Ом})$; критичний опір $R_{crit} = 9.4(\text{Ом})$. Генератор створює змінну напругу $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos 2\pi\nu t$ з фіксованою амплітудою $\varepsilon_0 = 1(\text{В})$ та регульованою частотою $\nu = 30(\text{кГц})$. В подальшому позначимо $\omega \equiv 2\pi\nu$.

1. За відомими формулами знайти для контуру RLC індуктивність L , ємність C , коефіцієнт згасання, добротність Q .

Запишемо рівняння для контура без генератора:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$2\gamma = \frac{R}{L}, \quad \Omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \Omega_0^2 q = 0$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$$

$$D = 4\gamma^2 - 4\Omega_0^2 = 2\sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

Коливання швидко не згасають за умови $\gamma^2 - \Omega_0^2 < 0$, тобто комплексності дискримінанта. Отже:

$$D = 2i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$$

$$\lambda = \gamma \pm \omega$$

$$q(t) = e^{\gamma} (c_1 e^{\omega t} - c_2 e^{-\omega t})$$

R_{crit} за визначенням дорівнює опорі, за якого $D = 0$, отже:

$$D = 0 \Rightarrow \Omega_0 = \gamma \Rightarrow L = \frac{R_{crit}}{2\Omega_0} \simeq 20(\text{мкГн})$$

Тоді маємо, що:

$$C = \frac{1}{\Omega_0^2 L} \simeq 0.9(\text{мкФ}), \quad \gamma = \frac{R}{2L} \simeq 50149\left(\frac{\text{Ом}}{\text{Гн}}\right), \quad Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma} \simeq 2.35$$

2. Скласти диференціальне рівняння коливального контура з генератором.

Надалі, для зручності, перейдемо у комплексну площину.

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$L\dot{I} + RI + \frac{\int I dt}{C} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

3. З рівняння отримати вираз для $I_0 = I_0(\omega)$, тобто залежність амплітудного значення струму в контурі від частоти генератора.

Представимо розв'язок рівняння 1 у вигляді $I(\omega) = I_0 e^{i\omega t + i\varphi}$. Тоді:

$$-L\omega^2 I_0 e^{i\omega t + i\varphi} + i\omega R I_0 e^{i\omega t + i\varphi} + \frac{I_0 e^{i\omega t + i\varphi}}{C} = i\omega \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$L\omega I_0 e^{i\varphi} + R I_0 e^{i\varphi} + \frac{I_0 e^{i\varphi}}{i\omega C} = \varepsilon_0$$

$$I_0 = |I_0 e^{i\varphi}| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

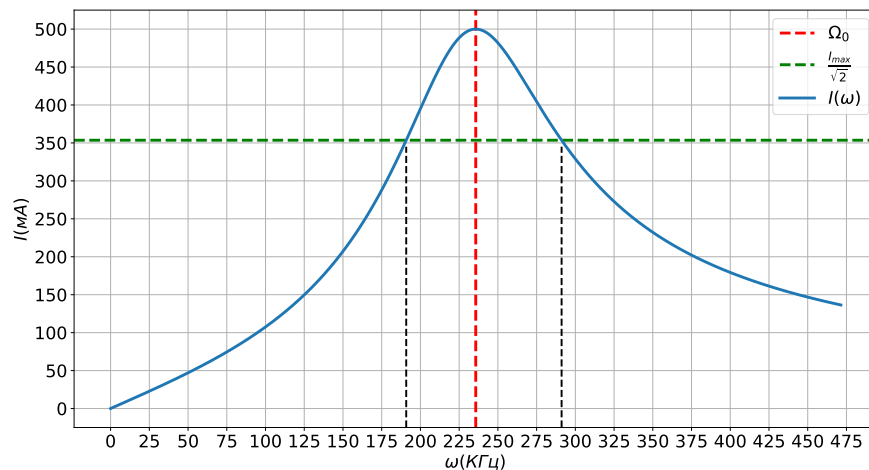
4. Отримати вираз та розрахувати значення резонансної колової частоти ω_{res} та максимальної амплітуди струму $I_{0max}(\omega_{res})$ в контурі.

$$\frac{dI_0}{d\omega} = -\frac{2\varepsilon_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)}{2 \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dI_0}{d\omega} = 0 \Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 \Rightarrow \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \Omega_0$$

$$I_o(\omega_{res}) = \frac{\varepsilon_0}{R} = 0.5(A)$$

5. В інтервалі $\omega \in [0, 2\Omega_0]$ задати 20 значень колової частоти генератора і побудувати графік $I_0 = I_0(\omega)$. Одиниці вимірювання підібрати таким чином, щоб ціна найменшої поділки на осях відповідала одиницям або десяткам. Вказати числові значення резонансної частоти та резонансної амплітуди струму.



6. За графіком знайти "експериментальне значення" добротності

$$Q_* = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega}$$

, де $\Delta\Omega$ визначається як різниця частот, при яких амплітуда струму дорівнює $I_{0max}/\sqrt{2}$. Визначити похибку $\eta = 100\% (Q - Q_*)/Q$.

З графіку визначимо $\Delta\Omega = 98 \times 10^3 (c^{-1})$, тоді:

$$Q_* \simeq 2.4, \eta \simeq 2.3\%$$

7. Розрахувати імпеданс контура на частоті ν .

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2L\pi\nu - \frac{1}{2\pi\nu C} \right)^2} \simeq 3(Ом)$$

8. Розрахувати зсув фази φ між струмом та напругою на генераторі (при частоті ν).

$$\varphi = \arctan \frac{Imz}{Rez} = \arctan \frac{2L\pi\nu - \frac{1}{2\pi\nu C}}{R} \simeq -0.81(\text{рад}) \simeq -46^\circ$$

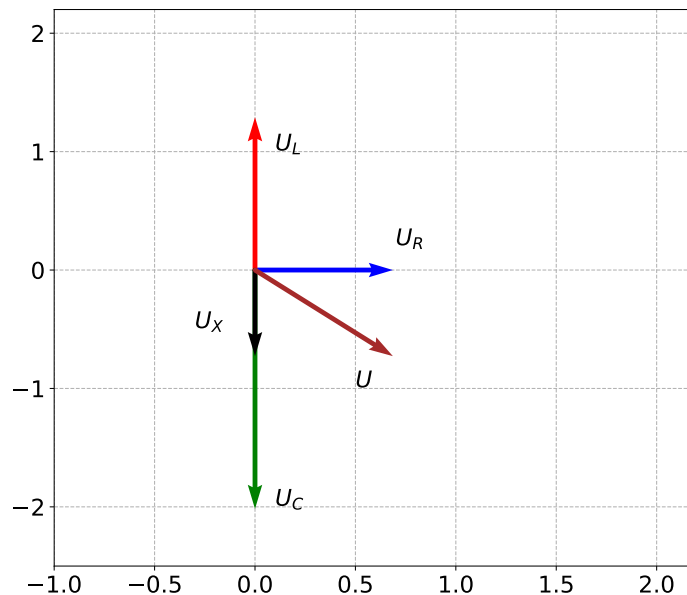
9. Розрахувати діючі значення I_g , ε_g струму та напруги і обчислити потужність, яку споживає контур:

$$\langle P \rangle = \varepsilon_g I_g \cos \varphi$$

$$I_g = \frac{I_{0max}}{\sqrt{2}} \simeq 0.35(\text{A}), \quad \varepsilon_g = \frac{\varepsilon_{0max}}{\sqrt{2}} \simeq 0.7(\text{В})$$

$$\langle P \rangle \simeq 0.17(\text{Вт})$$

10. Побудувати векторну діаграму кола на частоті ν та з'ясувати, яким навантаженням (ємнісним чи індуктивним) є коло генератора.



$U_L < U_C \Rightarrow$ розглянутий контур є ємнісним навантаженням.

11. З рівняння контура отримати вираз для залежності $\varepsilon_C(\omega)$ амплітуди напруги на конденсаторі від колової частоти генератора.

$$\varepsilon_C = |U_C| = |Z_C I_0| = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

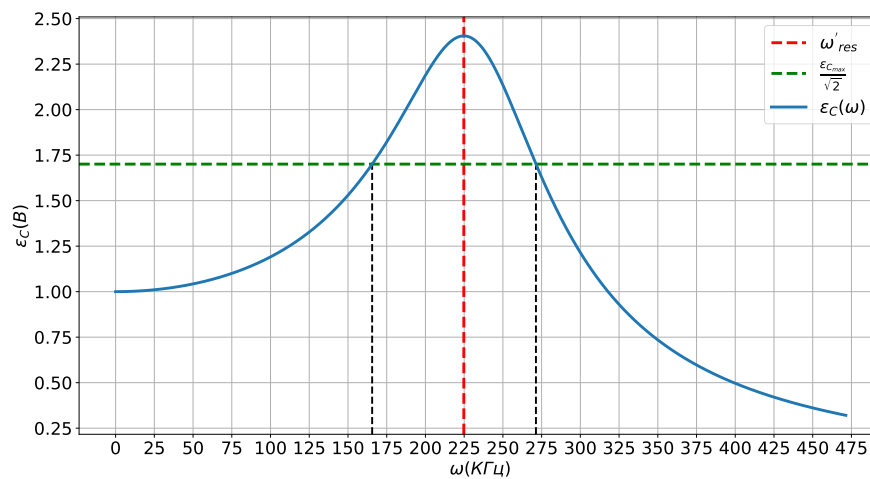
12. Отримати вираз та обчислити резонансну колову частоту ω'_{res} та резонансну амплітуду $\varepsilon_{C_{max}}(\omega'_{res})$ напруги на конденсаторі. Визначити, наскільки відсотків ω'_{res} відрізняється від власної частоти контура Ω_0 .

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_C}{d\omega} &= \frac{I'_0 \omega C - C I_0}{(\omega C)^2} = \frac{-\frac{\varepsilon_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right) (\omega C)}{\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}{(\omega C)^2} = \\ &= -\frac{\varepsilon_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right) (\omega C) + C\varepsilon_0 \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)}{(\omega C)^2 \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{d\varepsilon_C}{d\omega} = 0 &\Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L\omega + \frac{1}{\omega C}\right) + R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \\ L^2\omega^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2 + L^2\omega^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2} &= 2L^2\omega^2 + R^2 - \frac{2L}{C} = 0 \\ \Rightarrow \omega^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2 &\Rightarrow \omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\omega_{res} \simeq 225 \times 10^3 (c^{-1}), \quad \varepsilon_{C_{max}}(\omega'_{res}) = 2.4(B), \quad \eta \simeq 4.6\%$$

13. Побудувати амплітудну характеристику напруги на конденсаторі $\varepsilon_C = \varepsilon_C(\omega)$.



14. З графіка $\varepsilon_C(\omega)$ визначити добротність контура Q' . Знайти відносну похибку отриманого значення.

З графіку визначимо $\Delta\omega' = 105 \times 10^3(\text{с}^{-1})$, тоді:

$$Q'_* = \frac{\omega'_{res}}{\Delta\omega'} \simeq 2.4, \quad \eta = 2.3\%$$