НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. Ігоря СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Протокол до лабораторної роботи

ДИФРАКЦІЯ В ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРОМЕНЯХ ТА ПРИНЦИП НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Виконали студенти
групи ФІ-81

Кармазін А.О.
Корешков М.О.
Прохоренко О.С.
Шкаліков О.В.

Перевірив:
Долгошей В.Б.

Київ — 2020

Теоретична частина

Хвильова природа світла найбільш яскраво спостерігаєтьтся в явищі дифракції, тобто в явищі огинання світлом перешкод(екранів, отворів).

Розглянемо пучок паралельних монохроматичних променів з довжиною хвилі λ, що падають на щілину шириною b(рис. 1). Площину щілини можна розбити на ряд вузеньких паралельних смужок однакової ширини. Кожну з таких смужок будемо розглядати як джерело хвиль, причому фази і амлітуди всіх цих хвиль однакові, оскільки за нормального падіння площина щілини збігається з поверхнею хвилі. Для розрахунку інтенсивності в різних напрямках напишемо вираз хвилі, що посилає кожний елемент хвилі товщини dx, і підсумуємо дію всіх елементів. Амплітуда хвилі, зумовлена таким елементом, очевидно, пропорційна dx, а відповідне збурення дорівнює

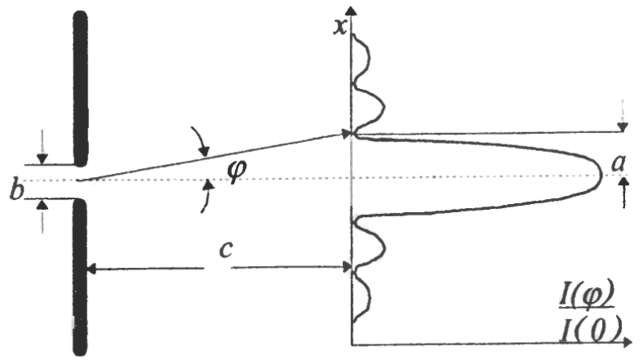

Рис. 1: Дифракція в паралельних променях

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \cdot e^{i\omega t}, \tag{1}$$

де ω - циклічна частота, A_0 - сумарна амплітуда хвилі, що посилає вся щілина. В напрямку спостереження всі елементарні хвилі будуть мати однакову фазу, і тому результуюча амплітуда буде $E = A_0$. Для хвиль, що розповсюджуються під кутом φ до напрямку спостереження, треба врахувати різницю фаз, яка характеризує хвилі, що приходять від різних елементів щілини. З геометричних міркувань зрозуміло, що різниця ходу для елементу, що знаходиться на відстані x від краю щілини, дорівнює $x \sin\varphi$. Відповідне елементарне світлове збурення

$$dE = \frac{A_0}{b} dx \cdot e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)}, \tag{2}$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число. Отже, результуюче збурення

$$E = \int\limits_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} dE = \int\limits_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{A_0}{b} dx \cdot e^{i(\omega t - kx\sin\varphi)} dx = A_0 \frac{\sin\left(\frac{bk}{2}\sin\varphi\right)}{\frac{bk}{2}\sin\varphi} e^{i\omega x}, \tag{3}$$

а інтенсивність у вказаному напрямку

$$I(\varphi) = I(0)\left[\frac{\sin\left(\frac{bk}{2}\sin\varphi\right)}{\frac{bk}{2}\sin\varphi}\right]^2 = I(0)\left[\frac{\sin u}{u}\right]^2,\ u = \frac{bk\sin\varphi}{2} \tag{4}$$

Формулу 4 називають формулою Кірхгоффа. З цієї формули видно, що за певних кутів спостереження φ_n, а саме

$$\sin\varphi_n = \frac{n\lambda}{b},\ n = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

інтенсивність дорівнює нулю, що відповідає темним смугам на екрані. Крім того, між мінімумами знаходяться максимуми. Їх положення визначається умовою рівності нулю похідної від 3:

$$\frac{d\left(\frac{\sin u}{u}\right)}{du} = 0, \tag{6}$$

де u - розв'язок трансцендентного рівняння

$$\tan u = u \tag{7}$$

для перших трьох максимумів буде:

$$\begin{gathered}\frac{bk}{2}\sin\varphi = 0,\ \frac{bk}{2}\sin\varphi = 1.43\pi,\ \frac{bk}{2}\sin\varphi = 2.46\pi \\ \frac{bk}{2}\sin\varphi = 3.47\pi,\ \frac{bk}{2}\sin\varphi = 4.47\pi\end{gathered} \tag{7A}$$

Величина інтенсивності в цих максимумах тим менша, чим більший номер максимуму. Відношення інтенсивностей наближено можна виразити рядом:

$$1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 : \cdots \tag{8}$$

Таким чином, за умов коли паралельний монохроматичний когерентний світловий промінь проходить через щілину, на екрані розташованому за щілиною виникає дифракційна картина з головними та додатковими максимумами.

Розглянемо тепер дифракцію від двох паралельних щілин. Дві дифракційні картини від кожної з щілин накладуться одна на одну. При цьому треба прийняти до уваги взаємну інтерференцію хвиль, що ідуть від першої та другої щілини. Очевидно, що в тих напрямках, куди ні одна з щілин не посилаж світла, не буде світла і при двох щілинах. Тобто, мінімуми інтенсивності залишаються на старих місцях Окрім того, з'являються нові мінімуми, оскільки існують напрямки, в яких коливання від відповідних точок двох щілин взаємно знищуються. Це напрямки, для яких різниця ходу від відповідних точок двох щілин становить $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\cdots$. Як видно з рис. 2 такі напрямки визначаються умовою

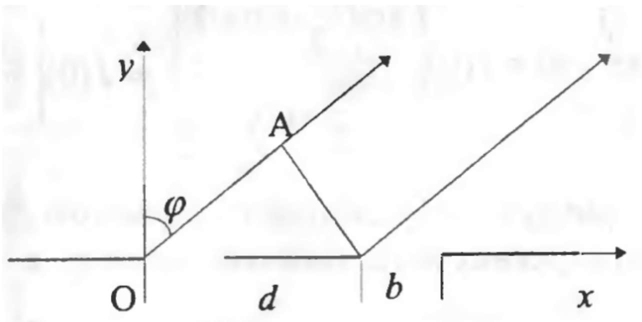

Рис. 2: Дифракція від двох щилин

$$OA = d\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \cdots \tag{9}$$

В напрямках, що визначаються умовами

$$d\cdot\sin\varphi = \lambda, 2\lambda, \cdots \tag{10}$$

дія щілин підсилюється, а отже в цих напрямках з'являються максимуми. Узагальнюючи вищесказане можна зробити висновок, що повна дифракційна картина від двох щілин визначається такими умовами:

$$\begin{gathered}\text{колишні мінімуми } b\cdot\sin\varphi = \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda, \cdots \\ \text{додаткові мінімуми } d\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\lambda,\ \frac{3}{2}\lambda,\ \frac{5}{2}\lambda\cdots \\ \text{головні максимуми } b\cdot\sin\varphi = 0,\ \lambda,\ 2\lambda, \cdots\end{gathered} \tag{11}$$

Міркування, наведені для двоз щілин, залишаються слушними для випадку N щілин, тобто дифракційної решітки - екрана з регулярною структурою, наприклад довгими і вузькими щілинами з паралельними краями. Додаткові мінімуми з'являються за рахунок інтерференції випромінювання від першої щілини з випромінюванням від другої, третьої і далі до $(N-1)$. Умова 11 перепишеться як:

$$\begin{aligned} \text{колишні мінімуми } b\cdot\sin\varphi =& \lambda,\ 2\lambda,\ 3\lambda,\cdots \\ \text{додаткові мінімуми } d\cdot\sin\varphi =& \frac{1}{N}\lambda,\ \frac{2}{N}\lambda,\cdots,\ \frac{N-1}{N}\lambda\cdots \\ \text{головні максимуми } b\cdot\sin\varphi =& 0,\ \lambda,\ 2\lambda,\cdots \end{aligned} \tag{12}$$

Отримаємо аналітичний вираз для розподілу інтенсивності від N щілин. Напруженість поля від першої щілини в напрямку φ описується формулою 3. Для хвиль, що дифрагують на другій, третій і далі щілині, напруженість буде відрізняться фазовим множником:

$$E_N(\varphi) = E_1(\varphi)\cdot e^{i(N-1)\delta},\ \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\varphi \tag{13}$$

Тоді, результуючі напруженість та інтенсивність від усіх щілин буде:

$$\begin{aligned} E_P(\varphi) &= E_1(\varphi)\left[1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \cdots + e^{i(N-1)\delta}\right] \\ I(\varphi) &= E\cdot E^* = I(\varphi)\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \end{aligned} \tag{14}$$

З 14 видно, що для напрямків, в яких різниця фаз $\frac{\delta}{2} = m\pi (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ інтенсивність випромінювання зростає у N^2 разів, тобто ці напрямки відповідають головним максимумами в дифракційній картині, як і витікає з умов 12. Ширина головних максимумів ε на половині висоти визначається з умови

$$\frac{\sin^2\frac{N\delta_{\frac{1}{2}}}{2}}{\sin^2\frac{\delta_{\frac{1}{2}}}{2}} = \frac{N^2}{2},$$

де $\delta_{\frac{1}{2}} = m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2}$ Рішення цього трансцендентного рівняння дає $\varepsilon = \frac{5.6}{N}$. Щільність дифракційної картини - відношення відстані між головними максимумами до Їх ширини - буде дорівнювати:

$$F = \frac{\Delta\delta}{\varepsilon} = 1.13N \tag{15}$$

Тобто різкість дифракційної картини пропорційна загальній кількості щілин(штрихів) дифракційної решітки.

Розглянемо тепер явище дифракції з точки зору кванотової механіки. Згідно з принципом невизначенности Гейзенберга неможливо одночасне точне визначення значень спряжених змінних, таких як координата x та імпульс p в один і той же момент часу, або в аналітичному вигляді

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{4\pi} \tag{16}$$

де Δx, Δp - похибки у визначенні координати та імпульсу, відповідно, $\hbar = 6.6262\cdot10^{-34}$ Дж $\cdot$ сек - стала Планка.

Розглянемо, для прикладу, сукупність фотонів, ймовірність знаходження яких у просторі описується функцією f_x, а розподіл імпульсів - функцією f_p d. Якщо фотони проходять крізь щілину завширшки d, то поперек щілини їх координата визначена з точністю

$$\Delta x = d \tag{17}$$

Густина ймовірності для відповідної компоненти імпульсу визначається розподілом інтенсивності в дифракційній картині. Справді, інтенсивність пропорційна кількості фотонів, що прийшли в задане місце протягом певного часу, отже, невизначенність імпульсу пропорційна відстані між мінімумами дифракційної картини, тобто

$$\Delta p_x = p_0 \sin\varphi, \tag{18}$$

де p_0 - початковий імпульс. Застосовуючи співвідношення Де-Бройля $p = \frac{h}{\lambda}$ і підставляючи відстань між мінімумами з формули 12 отримуємо

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi = \frac{h}{d} \tag{19}$$

Порівнюючи 17 та 19 бачимо, що користуючись щілиною для визначення координати фотона(локалізації його у просторі з точністю d), ми спотворюємо точність визначення імпульсу таким чином, що

$$\Delta x \Delta p = h$$

Отже, дифракція може розглядатися як один з проявів фундаментального принципу невизначенності 16.

Хід роботи

1. Виміряти координати максимумів та відстань від градки до екрана
2. Знайдіть період кожної з досліджуваних градок

Практична частина

У результаті виконання роботи, були отримані наступні дослідні дані(L(см) - відстань до лазера), x - координата відповідного максимуму

<table>
<tr><th>Градка</th><th>n</th><th>L(см)</th><th>x(см)</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td>1</td><td rowspan="6">66.5</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4.3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5.4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>1</td><td rowspan="2">21.2</td><td>3.7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3.8</td></tr>
</table>

Табл. 1: Дослідні дані

З формули 10 визначимо період градки:

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\varphi_n} = \frac{n\lambda}{\sin\arctan\frac{x_n}{L}}$$

Знаючи значення $\lambda = 632 * 10^{-9}$(м) отримаємо наступні значення періоду градки:

Градка	**n**	$\sin\varphi$	d**(мкм)**	$\langle d\rangle$**(мкм)**
1	1	0.017	0.38	0,385
	2	0.033	0.38	
	3	0.05	0.38	
	4	0.064	0.39	
	5	0.081	0.39	
	6	0.081	0.39	
2	1	0.172	0.04	0,054
	2	0.176	0.07	

Табл. 2: Результати обчислень

Висновки

Ми ознайомились з явищем дифракції за допомогою лазера та дифракційної градки. У результаті виконанання лабораторної роботи нами було обраховано періоди дифракційних градок. Знайдені числові значення наведені у таблиці 2.

Відповіді на контрольні питання

1. Принцип Гюйгенса-Френеля.

2. Що таке дифракція? Чим відрізняється дифракція Фраунгофера від дифракції Френеля? Критерій дифракції Фраунгофера.

3. Що таке дифракційна гратка і якими параметрами вона характеризується?

4. Як залежить ширина головного максимуму та інтенсивність від ширини щілини?

5. Як залежить ширина головного максимуму та інтенсивність від відстані між щілиною та екраном при сталій ширині щілини?