Introduzione agli Algoritmi

Simone Lidonnici

11 aprile 2024

Indice

1

Notazione asintotica

1.1 Tipi di notazione asintotica

La notazione asintotica serve per valutare l'efficienza di un algoritmo con una formula matematica e permette di confrontare il tasso di crescita di una funzione rispetto ad un'altra. In informatica si usa per stimare quanto aumenta il tempo di un algoritmo al crescere della grandezza dell'input. Ci sono tre tipi di notazioni asintotiche:

- **O grande**
- Ω (**Omega**)
- Θ (**Theta**)

1.1.1 O grande

Definizione di O grande

Date due funzioni $f(n), g(n) \geq 0$ si dice che $f(n)$ è in $O(g(n))$ se:

$$\exists c, n_0 | f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0$$

Esempio:
$f(n) = 3n + 3$
$f(n) = O(n^2)$ perché con $c = 6 \implies cn^2 \geq 3n + 3 \ \forall n \geq 1$

1.1.2 Omega

Definizione di Ω

Date due funzioni $f(n), g(n) \geq 0$ si dice che $f(n)$ è in Ω(g(n)) se:

$$\exists c, n_0 | f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0$$

Esempio:
$f(n) = 2n^2 + 3$
$f(n) = \Omega(n)$ perché $f(n) \geq n \ \forall n \geq 1$

1.1.3 Theta

Definizione di Θ

Date due funzioni $f(n), g(n) \geq 0$ si dice che $f(n)$ è in $\Theta(g(n))$ se:

$$\exists c_1, c_2, n | c_1 \cdot g(n) \geq f(n) \geq c_2 \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0$$

Esempio:
$f(n) = \log_a n = \Theta(\log_b n) \ \forall a, b > 0$
Dimostrazione:
$\log_a n = \log_b n \cdot \log_a b = \log_b n \cdot c$

1.2 Algebra della notazione asintotica

1.2.1 Gerarchia

$c = O(\log(n))$
$log(n) = O(\sqrt{n})$
$\sqrt{n} = O(n^k)$
$n^k = O(a^n)$
$a^n = O(n!)$
$n! = O(n^n)$
Data una funzione $f(n)$, esistono infinite funzioni $g(n)$ per cui $f(n) = O(g(n))$ e infinite funzioni $h(n)$ per cui $f(n) = \Omega(h(n))$
Possiamo comparare facilmente due funzioni usando i limiti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} k > 0 \implies f(n) = \Theta(g(n)) \\ +\infty \implies f(n) = \Omega(g(n)) \\ 0 \implies f(n) = O(g(n)) \end{cases}$$

Regola sulle costanti moltiplicative

Per ogni $k > 0$ se $f(n) = O(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n) = O(g(n))$
Questa regola vale solo se k non è all'esponente.
Dimostrazione:
$\exists c, n_0 | f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \implies k \cdot f(n) \leq k \cdot c \cdot g(n) \implies k \cdot f(n) = O(g(n))$

Regola sulla commutatività con la somma

Se $f(n) = O(g(n)) \land d(n) = O(h(n)) \implies f(n) + d(n) = O(g(n) + h(n)) = O(\max(g(n), h(n)))$
Dimostrazione:
$f(n) = O(g(n)) \implies \exists c_1, n_1 | f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$
$d(n) = O(h(n)) \implies \exists c_2, n_2 — d(n) \leq c_2 \cdot h(n)$
$f(n) + d(n) \leq c_1 \cdot g(n) + c_2 \cdot h(n) \implies c = \max(c_1, c_2) \implies f(n) + d(n) \leq c \cdot g(n) + c \cdot h(n) \implies f(n) + d(n) = O(g(n) + h(n))$

Regola sulla commutatività col prodotto

Se $f(n) = O(g(n)) \land d(n) = O(h(n)) \implies f(n) \cdot d(n) = O(g(n) \cdot h(n))$
Dimostrazione:
$f(n) = O(g(n)) \implies \exists c_1, n_1 | f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$
$d(n) = O(h(n)) \implies \exists c_2, n_2 — d(n) \leq c_2 \cdot h(n)$
$f(n) \cdot d(n) \leq c_1 \cdot g(n) \cdot c_2 \cdot h(n) \implies c = \max(c_1, c_2) \implies f(n) \cdot d(n) \leq$
$c \cdot g(n) \cdot c \cdot h(n) \implies f(n) \cdot d(n) = O(g(n) \cdot h(n))$

1.2.2 Sommatorie notevoli

Questa è una lista contenente la maggior parte delle sommatorie notevoli utili per questo cosro:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \theta(n^2) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^c = \theta(n^{c+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \theta(2^n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \begin{cases} \frac{c^{n+1}-1}{c-1} & c > 1 \\ 1 & c \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = \theta(n2^n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} ic^i = \theta(nc^n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \log i = \theta(\log n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \log^c i = \theta(n \log^c n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} = \theta(\log n)$$

2

Costo computazionale

Possiamo calcolare il costo computazionale di un algoritmo usando il criterio del costo uniforme. Il costo computazionale è una funzione monotona crescente al crescere della dimensione dell'input. Visto che viene utilizzata la notazione asintotica il costo computazionale è calcolabile solo asintoticamente(cioè con input abbastanza grandi). Il costo di un algoritmo è la somma di tutte le istruzioni che lo compongono. Alcuni algoritmi potrebbero avere tempi di esecuzioni diversi in base all'input, in questi casi devo calcolare a parità di dimensione di input il caso peggiore e il caso migliore. Se voglio scrivere il tempo di esecuzione a prescindere dall'input devo considerare il caso peggiore.

2.1 Costo delle istruzioni

Ogni tipo di istruzione ha un costo computazionale diverso in base a come viene eseguita.

2.1.1 Istruzioni elementari

Le istruzioni elementari hanno costo $\Theta(1)$ e sono:

- Operazioni aritmetiche
- Lettura di un valore da una variabile
- Assegnazione di un valore
- Condizione logica su un numero costante di operandi
- Stampa di un valore

Nel caso di codici con `if` il costo è il costo della verifica della condizione sommato al amsimo tra il caso vero e il caso falso.

2.1.2 Istruzioni iterative

Nel caso di cicli `for` o `while` il costo è pari alla somma del costo di ciascuna iterazione (contando anche la verifica della condizione). Ci sono due casi:

- Se il costo di ogni iterazione è uguale allora basta moltiplicare il costo di una iterazione per il numero di cicli
- Se il costo delle iterazioni è diverso allora bisogna sommare il costo delle iterazioni

Esempi:

Algoritmo: Massimo di un vettore di n numeri

```
def Trova_max(A):
    n=len(A)
    max=A[0]
    for i in range(1,n) :  // n − 1 iterazioni
        if A[i]>max :
            max=A[i]
    return max
```

$T(n) = (n-1) \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$

Algoritmo: Somma dei primi n numeri interi

```
def Somma(n):
    somma=0
    for i in range(1,n+1) :  // n iterazioni
        somma+=i
    return somma
```

$T(n) = n \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$

Algoritmo: Valutazione di un polinomio

```
def Calcolo_poliniomio(A,c):
    somma=A[0]
    for i in range(len(A)) : // n iterazioni
        potenza=1
        for j in range(i) :  // i iterazioni
            potenza=c*potenza
        somma+=A[i]*potenza
    return somma
```

$$T(n) = n\Theta(i) = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i) = \Theta(n^2)$$

2.1.3 Calcolo del costo computazionale

Nel caso in cui il caso peggiore ed il caso migliore hanno la stessa formula allora il costo computazionale è tale formula e si utilizza la notazione Θ. Nel caso invece le due formule sono diverse allora il costo computazionale si può scrivere con la notazione O della formula che identifica il caso peggiore oppure posso calcolare il costo medio.

2.2 Tempi di esecuzione

Il tempo di esecuzione è calcolato moltiplicando il numero n di dati per il costo dell'algoritmo e dividendolo per il numero di operazioni al secondo.

$$T(n) = \frac{\text{algoritmo}(n)}{\text{operazioni}/s}$$

Esempio:
10^9 opeazioni al secondo e $n = 10^6$:

- $O(n) = \frac{10^6}{10^9} = 10^{-3}s$
- $O(n \log n) = \frac{10^6 \cdot \log(10^6)}{10^9} = 2 \cdot 10^{-2}s$
- $O(n^2) = \frac{(10^6)^2}{10^9} = 10^3 s$

3

Algoritmi di Ricerca

Uno dei problemi principali dell'informatica è la ricerca di un elemento in un insieme di dati e per fare ciò si utilizza un algoritmo di ricerca.
L'algoritmo contiene:

- **Input**: un array di n elementi e un valore da trovare
- **Output**: un indice i tale che A[i]=valore o un valore None se il valore non è presente

3.1 Ricerca sequenziale

Questo algoritmo di ricerca scorre tutti i valori dell'array uno ad uno e li confronta con il valore, fermandosi quando lo si trova:

Algoritmo: Ricerca sequenziale

```
def cerca_v(A,v):
    i=0
    while i<len(A) :
        if A[i]==v :
            return i
    return None
```

Caso peggiore: $T(n) = \Theta(n)$
Caso migliore: $T(n) = \Theta(1)$
Costo medio:
Visto che il caso migliore e peggiore hanno due formule diverse per calcolare il costo medio usiamo l'ipotesi che v si possa trovare in tutte le posizioni con la stessa possibilità, quindi la probabilità che v si trovi nella posizione i è $\frac{1}{n}$

Costo medio $= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

Possiamo anche usare un'altra formula:

Costo medio$=\sum_{i=0}^{n} i \cdot \frac{\text{numero di permutazioni in cui v è nel punto i}}{\text{numero di permutazioni totali}} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n+1}{2}$

3.2 Ricerca binaria

Questo algoritmo controlla l'elemento centrale dell'array (l'array deve essere ordinato) e lo confronta con il valore, se è più grande controlla la metà superiore, se è minore controlla la metà inferiore, ripetendo il procedimento:

Algoritmo: Ricerca binaria

```
def ricerca_binaria(A,v):
    a=0
    b=len(A)-1
    m=(a+b)/2
    while A[m]!=v :
        if A[m]>v :
            b=m-1
        else
            a=m-1
        if a>b :
            return -1
        m=(a+b)/2
    return m
```

Caso peggiore: $T(n) = \Theta(\log n)$
Caso migliore: $T(n) = \Theta(1)$
Costo medio:
Visto che il caso migliore e peggiore hanno due formule diverse per calcolare il costo medio usiamo l'ipotesi che v si possa trovare in tutte le posizioni con la stessa possibilità.
Dopo i iterazioni sono state controllate 2^{i-1} posizioni, quindi la probabilità che il valore sia in una di queste è $\frac{2^{i-1}}{n}$.

$$\text{Costo medio}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\log n} i \cdot 2^{i-1} \implies \frac{1}{n}(\log n - 1)2^{\log n} + 1 = \log n + \frac{1}{n} - 1$$

4

Ricorsione

Un algoritmo è ricorsivo quando:

- è espresso in termini di se stesso
- la soluzione del problema è data dalla risoluzione di sotto-problemi di grandezza minore combinati insieme
- la successione dei sotto-problemi deve infine convergere ad un caso base che termina la ricorsione

Esempi:

Algoritmo: Fattoriale

```
def fattoriale(n):
    if n==0 :
        return 1
    return n*(fattoriale(n-1))
```

Algoritmo: Ricerca binaria ricorsiva

```
def ricerca_bin(A,v,i_min=0,i_max=len(A)):
    if i_min>i_max :
        return None
    m=(i_min+i_max)/2
    if A[m]==v :
        return m
    elif A[m]>v :
        return ricerca_binaria(A,v,i_min,m-1)
    else
        return ricerca_binaria(A,v,m+1,i_max)
```

4.1 Iterazione vs Ricorsione

In diversi casi potrebbe essere migliore un tipo di algoritmo invece di un altro:

- **Ricorsivo**: se la formulazione della soluzione è aderente al problema stesso e quella iterativa è più complicata
- **Iterativo**: se la soluzione iterativa è evidente o se l'efficienza è importante

Questa distinzione si ha perché ogni funzione ha bisogno di una certa quantità di memoria e le funzioni ricorsive ne richiedono di più.
Esempio:

Algoritmo: Fibonacci iterativo

```
def fib(n):
    if n≤1 :
        return n
    fib1=1
    fib2=0
    for i in range(2,n+1) :
        fib2=fib1
        fib1+=fib2
    return fib1
```

$T(n) = \Theta(n)$

Algoritmo: Fibonacci ricorsivo

```
def fib(n):
    if n≤1 :
        return n
    return fib(n-1)+fib(n-2)
```

Il numero di chiamate della funzione cresce molto velocemente perché molti calcoli vengono ripetuti più di una volta e quando si arriva al caso base ci sono una catena di chiamate ancora aperte. Per risolvere questo problema di dimensione n bisogna risolvere 2 sotto-problemi di dimensione $n-1$ e $n-2$.
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(n)$
il costo è quindi esponenziale ma per calcolarlo bisogna usare le equazioni di ricorrenza.

5

Equazioni di ricorrenza

5.1 Scrittura di un'equazione di ricorrenza

Per calcolare il costo computazionale di un algoritmo ricorsivo ci si ritrova a dover risolvere una funzione ricorsiva, questa funzione si chiama equazione di ricorrenza.
Esempio:

Algoritmo: Fattoriale ricorsivo

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return 1
    return n*fact(n-1)
```

Il costo computazionale di questo algoritmo è:

$$T = \begin{cases} T(n) = T(n-1) + \Theta(1) \\ T(0) = \Theta(1) \end{cases}$$

La parte generale deve essere composta dalla somma del costo computazionale non ricorsivo e dalla parte ricorsiva, ci deve inoltre essere almeno un caso base.
Per calcolare il costo computazionale di una equazione di ricorrenza ci sono 4 metodi:

- Metodo iterativo
- Metodo dell'albero
- Metodo di sostituzione
- Metodo principale

5.2 Metodo iterativo

Nel metodo iterativo si sviluppa l'equazione di ricorrenza per far si che sia una somma di termini dipendenti dal caso generico e dal caso base.
Esempio:

$$T = \begin{cases} T(n) = T(n-1) + \Theta(1) \\ T(0) = \Theta(1) \end{cases}$$

Se sviluppiamo $T(n)$ come somma dei suoi sotto-termini:
$T(n) = T(n-1) + \Theta(1) = T(n-2) + 2 \cdot \Theta(1) = T(n-k) + k \cdot \Theta(1)$

La ricorsione continua finché $n-k=1 \implies k=n-1$ e l'equazione quindi diventerà:
$T(n) = T(n-k) + k \cdot \Theta(1) = T(n-n+1) + (n-1) \cdot \Theta(1) = T(1) + (n-1) \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$

5.2.1 Caso particolare: sequanza di Fibonacci

Equazione di ricorrenza dell'n-esimo numero di Fibonacci:

$$T = \begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Se sviluppiamo l'equazione:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) = T(n-2) + 2T(n-3) + T(n-3) + 3\Theta(1) = ...$
Visto che non si può generalizzare il problema, cerchiamo di calcolare il costo O e il costo Ω
Costo O:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) \leq T(n-1) + T(n-1) + \Theta(1) = T_1(n)$
Quindi $T_1(n)$:

$$T_1 = \begin{cases} T_1(n) = 2T_1(n-1) + \Theta(1) \\ T_1(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Sviluppando $T_1(n)$:
$T_1(n) = 2T_1(n-1) + \Theta(1) = 2[2T_1(n-2) + \Theta(1)] + \Theta(1)$
Caso base $= n-k=1 \implies k=n-1$
Generalizzando:

$$T_1(n) = 2^k T_1(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta(1) = 2^{n-1} T_1(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \Theta(1) = \Theta(2^n) + (2^{n-1}-1)\Theta(1) = \Theta(2^n)$$

Quindi visto che $T(n) \leq T_1(n) = \Theta(2^n) \implies T(n) = O(2^n)$
Costo Ω:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) \geq T(n-2) + T(n-2) + \Theta(1) = T_2(n)$
Quindi $T_2(n)$:

$$T_2 = \begin{cases} T_2(n) = 2T_2(n-2) + \Theta(1) \\ T_2(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Sviluppando $T_2(n)$:
$T_2(n) = 2T_2(n-2) + \Theta(1) = 2[2T_2(n-4) + \Theta(1)] + \Theta(1)$
Caso base $= n-2k=1 \implies k=\frac{n}{2}$
Generalizzando:

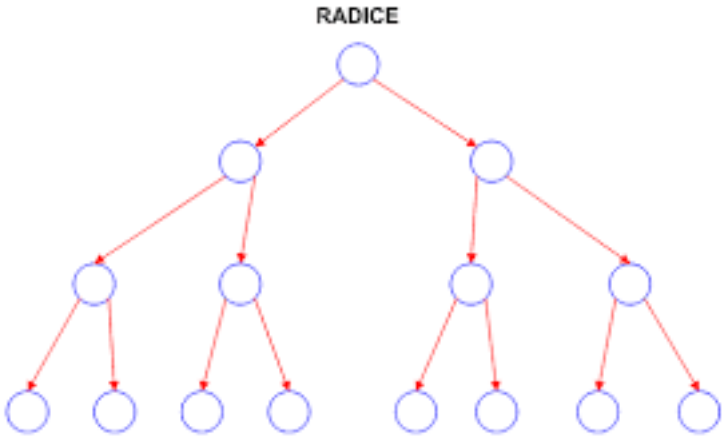
$$T_2(n) = 2^k T_2(n-2k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \Theta(1) = 2^{\frac{n}{2}} T_2(1) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2^i \Theta(1) = \Theta(2^{\frac{n}{2}}) + (2^{\frac{n}{2}}-1)\Theta(1) = \Theta(2^{\frac{n}{2}}) = \Theta(\sqrt{2^n})$$

Quindi visto che $T(n) \geq T_2(n) = \Theta(\sqrt{2^n}) \implies T(n) = \Omega(\sqrt{2^n})$
Costo finale:

$$\sqrt{2^n} \leq T(n) \leq 2^n$$

5.3 Metodo dell'albero

Nel metodo dell'albero si rappresenta graficamente lo sviluppo del costo computazionale attraverso un albero binario per calcolarlo più facilmente.
Un albero binario completo di altezza h è un albero in cui tutti i nodi hanno due figli tranne quelli nel livello h che non hanno figli (i nodi nell'ultimo livello si chiamano foglie).



Questo è un albero binario

Il numero di nodi nell'ultimo livello (foglie) è 2^h

Il numero di nodi all'interno dell'albero è $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$

Esempio:

$$T = \begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Il costo di ogni livello é:

Livello	n° nodi	Costo per nodo	Contributo per livello
0	2^0	$\Theta(n^2)$	$2^0 \cdot \Theta(n^2)$
1	2^1	$\Theta((\frac{n}{2})^2)$	$2^1 \cdot \Theta((\frac{n}{2})^2)$
2	2^2	$\Theta((\frac{n}{4})^2)$	$2^2 \cdot \Theta((\frac{n}{4})^2)$
...	...	...	...
$h = \log n$	$2^{\log n}$	$\Theta((\frac{n}{2^{\log n}})^2)$	$2^{\log n} \cdot \Theta((\frac{n}{2^{\log n}})^2)$

Quindi il costo totale dell'albero e quindi dell'equazione è:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log n} 2^k \Theta((\frac{n}{2^k})^2) = \sum_{k=0}^{\log n} \frac{2^k}{2^{2k}} \Theta(n^2) = \Theta(n^2) \sum_{k=0}^{\log n} \frac{1}{2^k} = \Theta(n^2)$$

5.4 Metodo di sostituzione

Nel metodo di sostituzione si ipotizza una soluzione e poi si dimostra per induzione.
Esempio:

$$T = \begin{cases} T(n) = T(n-1) + \Theta(1) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Ipotizziamo la soluzione:
$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + c \cdot \Theta(1) \\ T(1) = d \end{cases}$
Con c e d valori casuali per cui l'equazione funziona.
Ipotizziamo che la soluzione sia $\Theta(n)$ quindi dobbiamo dimostrare che sia $O(n)$ e $\Omega(n)$.

Dimostrare O:
Ipotizziamo $T(n) = O(n) \implies T(n) \leq k \cdot n$ dove k è una costante da determinare.

1. Caso base $(n = 1)$: $\begin{cases} T(1) = d \\ T(1) \leq k \end{cases} \implies k \geq d$
2. Ipotesi induttiva: $T(m) \leq km \; \forall m < n$
3. Dimostrazione:
   $T(n) = T(n-1) + c \cdot \Theta(1) \implies T(n-1) \leq k(n-1) \implies T(n) \leq k(n-1) + c \implies$
   $T(n) \leq kn - k + c \implies kn - k + c \leq kn \implies c \leq k$
   Quindi:
   $T(n) = O(n) \; \forall k \geq c$

Dimostrare Ω:
Ipotizziamo $T(n) = \Omega(n) \implies T(n) \geq hn$ dove h è una costante da determinare.

1. Caso base $(n = 1)$: $\begin{cases} T(1) = d \\ T(1) \geq h \end{cases} \implies d \geq h$
2. Ipotesi induttiva: $T(m) \geq hm \; \forall m < n$
3. Dimostrazione:
   $T(n) = T(n-1) + c \cdot \Theta(1) \implies T(n-1) \geq h(n-1) \implies T(n) \geq h(n-1) + c \implies$
   $T(n) \geq hn - h + c \implies hn - h + c \geq hn \implies c \geq h$
   Quindi:
   $T(n) = \Omega(n) \; \forall h \leq c$

5.5 Metodo principale

Nel metodo principale è un teorema che permette di risolvere le equazioni di ricorrenza.
Funziona solo se $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Teorema principale

Dati $a \geq 1$ e $b > 1$ una funzione di ricorrenza scritta come:

$$T = \begin{cases} T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Ha diverse formule risolutive in base a $f(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n) & \text{se } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{se } f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \text{ e } a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) \end{cases}$$

Con $\epsilon > 0$ e $c < 1$.

Esempio caso 1:
$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + \Theta(n)$
$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$
$f(n) = n^{\log_3 9-\epsilon}$ con $\epsilon = 1 \implies T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$

Esempio caso 2:
$T(n) = T(\frac{2}{3}n) + \Theta(1)$
$n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$
$f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \implies T(n) = \Theta(\log n)$

Esempio caso 3:
$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + \Theta(n \log n)$
$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0,7}$
$f(n) = \Omega(n^{n^{\log_4 3+\epsilon}})$ con $\epsilon = 0,2$ e $a \cdot f(\frac{n}{b}) = 3\Theta(\frac{n}{4} \log \frac{n}{4}) = \frac{3}{4}(n \log n - n \log 4) \leq c \cdot n \log n$ con $c = \frac{3}{4} \implies T(n) = \Theta(n \log n)$

6

Algoritmi di Sorting

Un **algoritmo di sorting** è un algoritmo che presa un array di elementi non ordinato lo ritorna in modo ordinato.
Vengono divisi in semplici:

- **Insertion sort**
- **Selection sort**
- **Bubble sort**

e complessi:

- **Merge sort**
- **Heap sort**
- **Quick sort**

6.1 Insertion sort

L'insertion sort estrae un elemento di indice i dall'array spostando verso destra tutti gli elementi maggiori per inserirlo nel posto giusto. Questo processo viene rpetuto per ogni elemento.

Algoritmo: Insertion sort

```
def insertion_sort(A):
    for j in range(1,len(A)) :
        x=A[j]
        i=j-1
        while i≥0 and A[i]>x :
            A[i+1]=A[i]
            i-=1
        A[i+1]=x
    return A
```

Costo computazionale:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{n-1}(\Theta(1) + t_j\Theta(1) + \Theta(1)) + \Theta(1)$$

Per ogni ciclo $1 < t_j < j$ quindi:

- Caso migliore: $T(n) = (n-1)\Theta(1) = \Theta(n)$
- Caso peggiore: $T(n) = \sum_{j=1}^{n-1}(\Theta(1) + \Theta(j)) = \Theta(n^2)$

6.2 Selection sort

Il selection sort cerca il minimo all'interno dell'array, mettendolo in prima posizione per poi cercare il nuovo minore escludendo il primo per metterlo in seconda posizione e così via per ogni elemento.

Algoritmo: Selection sort

```
def selection_sort(A):
    for i in range(len(A)-1) :
        m=i
        for j in range(i+1,len(A)) :
            if A[j]<A[m] :
                m=j
        A[m],A[i]=A[i],A[m]
    return A
```

Costo computazionale:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2}(\Theta(1) + (n-i)\Theta(1) + \Theta(1)) + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

6.3 Bubble sort

Il bubble sort confronta da destra verso sinistra ogni coppia di valori, scambiandoli se non sono ordinati, questo processo viene eseguito tante volte quanti sono gli elementi dell'array.

Algoritmo: Bubble sort

```
def bubble_sort(A):
    for i in range(len(A)) :
        for j in range(len(A)-1,i,-1) :
            if A[j]<A[-1] :
                A[j],A[j-1]=A[j-1],A[j]
    return A
```

Costo computazionale:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1}(\Theta(1) + (n-i)\Theta(1) + \Theta(1)) + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

6.4 Alberi di decisioni

Per stabilire un limite al costo computazionale sotto il quale non si può andare si usa uno strumento chiamato albero di decisione. Per algoritmi di ordinamento basati su confronti è un albero binario che rappresenta tutti i possibili confronti: i nodi interni rappresentano un confronto e i figli i possibili esiti del confronto.
Con un numero generico n di elementi, il numero delle foglie deve avere tutte le permutazioni possibili quindi $n!$.
Il numero massimo di foglie di un albero binario è 2^h quindi:
$2^h \geq n! \implies h \geq \log(n!) = \Theta(n \log n)$
Con questo possiamo dire che il miglior algoritmo di sorting basato su confronti avrà costo: $\Omega(nlogn)$

6.5 Merge sort

Il merge sort uilizza un algoritmo ricorsivo secondo una tecnica chiamata *divide et impera*, che consiste nel dividere il problema generale in sotto-problemi più piccoli che vengono risolti ricorsivamente e poi tutte le soluzioni vengono combinate.

Algoritmo: Merge sort

```
def merge_sort(A,id_inizio,id_fine):
    if id_inizio<id_fine :
        id_medio=(id_inizio-id_fine)/2
        merge_sort(A,id_inizio,id_medio)
        merge_sort(A, id_medio+1,id_fine)
        Fondi(A,id_inizio,id_medio,id_fine)
    return A
```

Costo computazionale:

$$T(n) = \Theta(1) + 2T(\frac{n}{2}) + S(n)$$

$S(n)$ è il costo di **Fondi** che è una funzione che sfrutta il fatto che le due sottosequenze sono ordinate, quindi il minimo sarà il più piccolo tra i due minimi e si continua eliminando di volta in volta i minimi usati.

Algoritmo: Fondi

```
def Fondi(A,id_inizio,id_medio,id_fine):
    i,j=id_medio,id_medio+1
    B=[]
    while i≤id_medio and j≤id_fine :
        if A[i]≤A[j] :
            B.append(A[i])
            i+=1
        else
            B.append(A[j])
            j+=1
    while i≤id_medio :
        B.append(A[i])
        i+=1
    while j≤id_fine :
        B.append(A[j])
        j+=1
    for i in range(len(B)) :
        A[id_inizio+i]=B[i]
    return B
```

Costo computazionale:
$S(n) = \Theta(n)$
Quindi il costo computazionale del merge sort in totale è un'equazione di ricorrenza:

$$T = \begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases} \quad = \Theta(n \log n)$$

6.6 Quick sort

Il quick sort è un algoritmo che unisce i vantaggi di ordinare senza un array di appoggio e anche quelli del merge sort.
Nella sequenza si sceglie un pivot e viene divisa la sequenza in due gruppi, uno con tutti gli elementi maggiori del pivot e uno con tutti quelli minori o uguali.
Nonostante abbia un tempo massimo di $\Theta(n^2)$ nella media il tempo di esecuzione è $\Theta(n \log n)$.

Algoritmo: Quick sort

```
def quick_sort(A,id_inizio,id_fine):
    if id_inizio<id_fine :
        id_medio=Partizione(A,id_inizio,id_fine)
        quick_sort(A,idi_inizio,id_medio)
        quick_sort(A,id_medio+1,id_fine)
    return A
```

Costo computazionale:
$T(n) = T(k) + T(n-k) + S(n)$
In cui $S(n)$ è il costo di **Partiziona**:

Algoritmo: Partiziona

```
def Partiziona(A,id_inizio,id_fine):
    pivot=A[id_fine]
    i=id_inizio-1
    for j in range(id_inizio,id_fine) :
        if A[j]≤pivot :
            i+=1
            A[i],A[j]=A[j],A[i]
    A[i+1],A[id_fine]=A[id_fine],A[i+1]
    return i+1
```

Costo computazionale:
$S(n) = \Theta(n)$
Quindi il costo toale del quick sort corrisponde all'equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} T(k) + T(n-k) + \Theta(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

- Caso migliore: $k = \frac{n}{2} \implies T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$
- Caso peggiore: $k = 1 \implies T(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$
- Caso medio: $T(k) = \frac{1}{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1} T(k) + T(n-k)) + \Theta(n) = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$

6.7 Heap sort

L'heap sort ordina il loco come il selection sort ma ha bisogno di una precisa struttura dati che deve essere mantenuta per far funzionare l'algoritmo. L'algoritmo preleva il massimo e mette l'ultimo valore dell'array al suo posto.

6.7.1 Struttura dati Heap

Un heap è un albero binario in cui tutti i livelli sono pieni tranne l'ultimo livello in cui i nodi sono tutti a sinistra.
Per memorizzare un heap si utilizza un array con elementi pari al numero di nodi e viene riempito con i valori di ogni livello da destra verso sinistra. Ogni elemento $A[i]$ ha il figlio sinistro all'elemento $A[2i+1]$ e il figlio destro all'elemento $A[2i+2]$. Il padre di un nodo si trova all'elemento $A[(i-1)/2]$ (si arrotonda per difetto nel caso di indici non interi).
L'heap ha delle proprità specifiche:

- Essendo un albero binario con tutti i livelli pieni l'altezza è $\log n$
- Ogni elemento è minore del proprio padre

6.7.2 Funzioni ausilirie dell'heap sort

L'algoritmo dell'heap sort utilizza due funzioni ausilarie:

- Funzione Heapify
- Funzione Buildheap

Heapify:
La funzione Heapify mantiene la proprietà di heap dell'albero(figli maggiori dei padri), partendo da un array in cui solo la radice può essere più piccola(perchè è stata scambiata con l'ultimo valore) dei figli mentre i sotto alberi sono corretti. Il risultato è un array in cui è di nuovo presente la proprietà di heap.

Algoritmo: Heapify

```
def Heapify(A):
    L=2*i+1// indice del figlio sinistro
    R=2*i+2// indice del figlio destro
    id_max=i
    if L<heap_size and A[L]>A[i] :
        id_max=L
    if R≤heap_size and A[R]>A[id_max] :
        id_max=R
    if id_max!=i :
        A[i],A[id_max]=A[id_max],A[i]
        Heapify(A,id_max,heap_size)
    return A
```

Costo computazionale:
$T(n) = T(n') + \Theta(1)$
In cui n' è il numero di nodi del sottoalbero con più nodi.
Caso peggiore:
$n' = \frac{2}{3}n \implies T(n) = T(\frac{2}{3}n) + \Theta(1) = \Theta \log n$

Buildheap:
La funzione buildheap prende un qualsiasi array disordinato e lo trasforma in un array con la proprietà di heap.

Algoritmo: Buildheap

```
def Buildheap(A,i,heap_size):
    for i in reversed(range(len(A)/2)) :
        Heapify(A,i,len(A))
    return A
```

Costo computazionale:
$T(n) = O(n)$

6.8 Algoritmo completo dell'heap sort

Trasforma un array di dimensione n in un heap tramite Buildheap, scambia la radice con il nodo all'indice n-1 e poi viene richiamato Heapify sull'array di n-1 elementi e così via fino alla fine di tutti gli n elementi.

Algoritmo: Heap sort

```
def heap_sort(A):
    Buildheap(A,len(A))
    for x in reversed(range(1,len(A))) :
        A[0],A[x]=A[x],A[0]
        Heapify(A,0,x)
    return A
```

Costo computazionale:
$T(n) = O(n) + n(O(\log n)) = O(n \log n)$

6.9 Algoritmi di ordinamento con costo lineare

Abbiamo visto che un algoritmo di ordinamento basato su confronti non può avere un costo computazionale minore di $\Omega(n \log n)$.
Esistono però algoritmi di ordinamento non basati su contronti che quindi possono avere costo $\Theta(n)$.

6.9.1 Counting sort

Il counting sort funziona seguendo l'ipotesi che ciascuno degli elementi ha un valore compreso in un intervallo $[0, k]$, quindi il costo computazionale è $\Theta(n+k)$ e se $k = O(n)$ allora l'algoritmo ha un costo computazionale $\Theta(n)$.
Il counting sort usa un array ausiliario di lunghezza $k + 1$ in cui viene scritto per ogni indice quante volte quel numero è compreso nell'array iniziale. Poi viene sovrascritto l'array iniziale scrivendo ogni indice quante volte è indicato nell'array ausiliario.

Algoritmo: Counting sort

```
def counting_sort(A):
    k=max(A)
    n=len(A)
    C=[0 for i in range(k+1)]
    for j in range(n) :
        C[A[j]]+=1
    j=0
    for i in range(k) :
        while C[i]>0 :
            A[j]=i
            j+=1
            C[i]-=i
    return A
```

Costo computazionale:

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(k) \sum_{i=0}^{k} C[i]\Theta(1) = \Theta(n+k)$$

Una variazione del counting sort è uno in cui viene fatta una seconda passata all'array ausiliario e ai valori degli indici vengono sommati i valori dell'indice prima in modo che ogni indice indichi l'ultimo posto dove va scritto il valore di quel determinato indice.

Algoritmo: Counting sort con dati satellite

```
def counting_sort(A):
    k=max(A)
    n=len(A)
    C=[0 for i in range(k+1)]
    B=[0 for i in range(n)]
    for j in range(n) :
        C[A[j]]+=1
    for i in range(1,k) :
        C[i]+=C[i-1]
    for j in range(n,-1,-1) :
        B[C[A[j]]]=A[j]
        C[A[j]]-=1
    return B
```

6.9.2 Bucket sort

Il bucket sort si basa sull'ipotesi che gli elementi siano distribuiti in modo uniforme nell'intervallo $[1, k]$.
Mette i valori dell'array in dei bucket che poi vengono sortati e poi copiati sull'array.

Algoritmo: Bucket sort

```
def bucket_sort(A,k,n):
    for i in range(1,n) :
        B.append(A[i])
    for i in range(1,n) :
        insertion_sort(B[i])
    for i in range(1,n) :
        B+=B[i]
    for i in range(n) :
        A[i]=B[i]
    return A
```

7

Strutture dati

Una struttura dati è composta da:

- Un modo sistematico di organizzare i dati
- Un insieme di operatori che permettono di manipolare i dati

Le strutture possono essere:

- Lineari o non lineari: se esiste una sequenzializzazione
- Statiche o dinamiche: se possono cambiare dimensione nel tempo

Una struttura dati serve per memorizzare un insieme dinamico, cioè in cui gli elementi possono cambiare in base agli algoritmi che li utilizzano.

7.1 Insiemi dinamici

Gli insiemi dinamici possono avere elementi complessi e contenere multipli dati elementari, per questo di solito contengono:

- Una chiave: che serve per distinguere gli elementi tra loro quando si manipola l'insieme (di solito fanno parte di un insieme ordinato come numeri o lettere)
- Dati satellite: che sono relativi ad un elemento ma non vengono usati dagli algoritmi

Le operazioni svolte su un insieme dinamico si dividono in due categorie:

- Operazioni di interrogazione
- Operazioni di manipolazione

Esempi di operazioni di interrogazione sono:

- **Search**: cerca un determinato elemento con chiave k
- **Min/Max**: cerca l'elemento con chiave massimo o minima
- **Predecessor/Successor**: cerca l'elemento che precede o succede una determinato elemento con chiave k

Esempi di operazioni di manipolazione sono:

- **Insert**: inserisce un elemento con chiave k
- **Delete**: elimina un elemento con chiave k

7.2 Array

Un array è una struttura dati statica, anche se in alcuni linguaggi sembra possibile variare la dimensione, ma solo perché viene usata una struttura dati dinamica che simula gli array.
Il costo computazional delle operazioni in base a se l'array è ordinato o no:

Struttura	Search(A,k)	Min(A)/Max(A)	Predecessor(A,k) Successor(A,k)	Insert(A,k)	Delete(A,k)
Array non ordinato	$O(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Array ordinato	$O(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

7.3 Liste puntate

Un puntatore è una variabile che ha come valore un indirizzo di memoria. Il nome di una variabile fa riferimento ad un valore in modo diretto mentre un puntatore in modo indiretto.
Ogni elemento della lista è composto da due campi:

- Key: contiene l'informazione (scritto come `p->key`)
- Next: contiene il puntatore al prossimo elemento della lista (scritto come `p->next`)

Le liste puntate hanno delle proprietà:

- L'accesso avviene ad un'estremità della lista attraverso un puntatore alla testa della lista
- È permesso solo un accesso sequenziale agli elementi (implica costo $\Theta(n)$ per qualsiasi accesso ad un elemento)

7.3.1 Search nelle liste puntate

Algoritmo: Ricerca di un elemento con chiave k in una lista puntata

Input:

- p: puntatore alla testa della lista
- k: chiave dell'elemento da cercare

```
def search(p,k):
    p_corr=p
    while p_corr!=None and p_corr->key!=k :
        p_corr=p_corr->next
    return p_corr
```

Costo computazionale:
$T(n) = O(n)$

7.3.2 Insert nelle liste puntate

Algoritmo: Inserimento di un elemento k in testa alla lista puntata

Input:

- p: puntatore alla testa della lista
- k: elemento da inserire

```
def insert(p,k):
    if k!=None :
        k->next=p
    p=k
    return p
```

Costo computazionale:
$T(n) = \Theta(1)$

Algoritmo: Inserimento di un elemento k dopo un elemento d

Input:

- p: puntatore alla testa della lista
- k: elemento da inserire
- d: elemento precedente a k

```
def insert(p,k,d):
    if d!=None :
        k->next=d->next
        d->next=k
    return p
```

Costo computazionale:
$T(n) = \Theta(1)$

7.3.3 Delete nelle liste puntate

Algoritmo: Eliminare un elemento k dalla lista puntata

Input:

- p: puntatore alla testa della lista
- k: elemento da eliminare

```
def delete(p,k):
    if k!=None :
        if k==p :
            p=p->next
            return p
        p_corr=p
        while p_corr->next!=k :
            p_corr=p_corr->next
        p_corr->next=k->next
    return p
```

Costo computazionale:
$T(n) = O(n)$

La funzione delete può anche essere scritta in modo ricorsivo:

Algoritmo: Eliminare un elemento k dalla lista puntata in modo ricorsivo

Input:

- p: puntatore alla testa della lista
- k: elemento da eliminare

```
def delete(p,k):
    if k==p :
        p=p->next
    else
        p->next=delete(p->next,k)
    return p
```

7.3.4 Liste doppiamente puntate

Per facilitare alcune operazioni si può organizzare la lista facendo in modo che ad ogni elemento sia possibile accedere sia dall'elemento prima che da quello dopo, aggiungendo un campo prev che punta all'elemento precedente.
La differenza di costo per le operazioni tra lista puntata singola e doppia:

Struttura	Search(A,k)	Min(A)/Max(A)	Predecessor(A,k)	Insert(A,k)	Delete(A,k)
Lista semplice	$O(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Lista doppia	$O(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$

7.4 Pile

Una pila è una struttura dati che ha un comportamento **LIFO (Last In First Out)**, cioè gli elementi vengono prelevati in ordine inverso rispetto a come vengono inseriti.
Su una pila si possono compiere solo due operazioni, l'inserimento (Push) e l'estrazione(Pop), non è possibile scandire gli elementi né eliminare elementi senza il Pop. Le operazioni di Push e Pop operano sullo stesso puntatore, quello dell'ultimo elemento.
Push:

Algoritmo: Push di un elemento e in una pila

Input:

- top: puntatore alla testa della pila
- e: elemento da inserire

```
def push(top,e):
    e->next=top
    top=e
    return top
```

Pop:

Algoritmo: Pop del primo elemento di una pila

Input:

- top: puntatore alla testa della pila

```
def pop(top):
    if top==None :
        return None
    e=top
    top=e->next
    e->next=None
    return e,top
```

7.5 Code