Sapienza Università di Roma

**Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica**
**Dipartimento di Informatica**

# Automi Calcolabilità e Complessità

**Autore:**
Simone Lidonnici

2 ottobre 2024

# Indice

# 1

# Linguaggi regolari

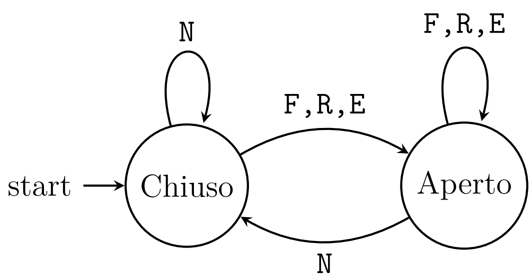
**Definizione di linguaggio**

Dato un **alfabeto** $\Sigma$, cioè un insieme di elementi, un **linguaggio** $\Sigma^*$ è l'insieme di tutte le strighe ottenibili usando l'alfabeto $\Sigma$.

## 1.1 Automi Deterministici a Stati Finiti (DFA)

Il modello usato per definire i **linguaggi regolari** è l'**automa a stati finiti**, cioè una macchina che permette tramite l'input di passare da uno stato ad un altro, che ha memoria limitata e gestione dell'input limitata, ma è molto semplice.
**Esempio:**
Una porta che si apre tramite dei sensori può essere descritta tramite un automa con due stati (Aperta e Chiusa) e quattro input dati dai sensori (`N, F, R, E`):

- `N`: se non ci sono persone da nessun lato della porta
- `F`: se c'è una persona davanti alla porta
- `R`: se c'è una persona dietro la porta
- `E`: se ci sono persone da entrambi i lati della porta

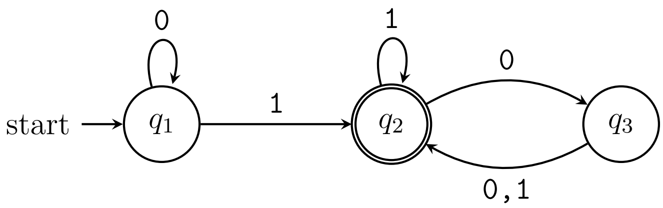


**Automa Deterministico a Stati Finiti (DFA)**

Un **DFA (Deterministic Finite Automaton)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ in cui:

- $Q$ è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma$ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la funzione di transizione degli stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di **stati accettanti** dell'automa

**Esempio:**
Preso il seguente DFA:




In questo caso:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta = $

| $\delta$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $q_1$ | $q_3$ | $q_2$ |
| 1 | $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

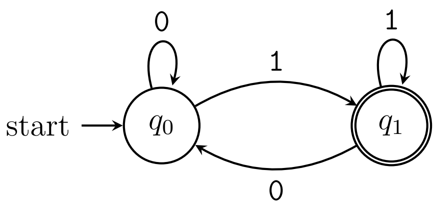
- $q_1$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_2\}$ è l'insieme degli stati accettanti

### Funzione di transizione estesa

Dato un DFA $D$, definiamo una **funzione di transizione estesa** $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x) \quad a \in \Sigma, x \in \Sigma^* \end{cases}$$

**Esempio:**
Preso il seguente DFA:



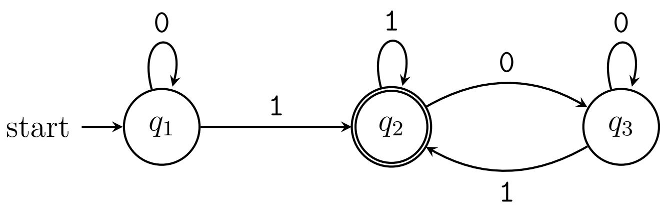

In questo DFA:

- $\delta^*(q_0, 011) = \delta^*(\delta(q_0, 0), 11) = \delta^*(q_0, 11) = \delta^*(\delta(q_0, 1), 1) = \delta^*(q_1, 1) = \delta^*(\delta(q_1, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_1, \varepsilon) = q_1$

### Linguaggio di un automa

Il **linguaggio di un DFA** $D$ è l'insieme delle stringhe in input che l'automa accetta, cioè quelle per cui l'automa termina in uno stato accettante $q_0 \in F$.
Ogni automa ha un solo linguaggio che si scrive $L(D) = \{x \in \Sigma^* | D \text{ accetta } x\}$. Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da una DFA se $\delta^*(q_0, x) = q \in F$

**Esempio:**
Preso il seguente DFA:




Il linguaggio di questa DFA è l'insieme di tutte le stringhe che finiscono con 1:

$$L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = y1 \land y \in \{0,1\}^*\}$$

### 1.1.1 Configurazione di un DFA

**Configurazione di un DFA**

Dato un DFA $D$, una **configurazione** di $D$ è una coppia $Q \times \Sigma^*$ che indica:

- lo stato attuale dell'automa
- l'input ancora da leggere

La configurazione iniziale è sempre $(q_0, x)$.

**Passo di computazione di un DFA**

Un **passo di computazione** è una relazione binaria con simbolo $\vdash_D$ per cui:

$$(q_1, ax) \vdash_D (q_2, x) \iff \delta(q_1, a) = q_2$$

La **chiusura per riflessione e transitività** di $\vdash_D$, scritta come $\vdash_D^*$, ha delle proprietà:

1. $(q_1, ax) \vdash_D (q_2, x) \implies (q_1, ax) \vdash_D^* (q_2, x)$
2. $\forall q, x \ (q, x) \vdash_D^* (q, x)$
3. $(q_1, abc) \vdash_D (q_2, bc) \vdash_D (q_3, c) \implies (q_1, abc) \vdash_D^* (q_3, c)$

Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da un DFA se:

$$\exists q \in F | (q_0, x) \vdash_D^* (q, \varepsilon)$$

## 1.2 Automi Non Deterministici a Stati Finiti (NFA)

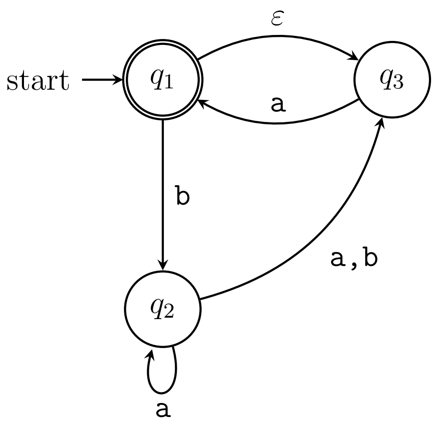
**Automa Non Deterministico a Stati Finiti (NFA)**

Un **NFA (Non-deterministic Finite Automaton)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ in cui:

- $Q$ è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma$ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ è la funzione di transizione degli stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di **stati accettanti** dell'automa

A differenza del DFA la funzione $\delta$ ha come uno dei parametri $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e come ritorno un insieme di stati, contenuto nell'insieme delle parti di $Q$, cioè $\mathcal{P}(Q)$. Inoltre per considerare una stringa accettata da un NFA basta che in uno dei rami della computazione la stringa venga accettata.

**Esempio:**
Preso il seguente NFA:




In questo caso:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $\delta =$

| $\delta$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| a | $\emptyset$ | $\{q_2, q_3\}$ | $q_1$ |
| b | $q_2$ | $q_3$ | $\emptyset$ |
| $\varepsilon$ | $q_3$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

- $q_1$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_1\}$ è l'insieme degli stati accettanti

### 1.2.1 Configurazione di un NFA

**Configurazione di un NFA**

Dato un NFA $N$, una **configurazione** di $N$ è una coppia $Q \times \Sigma_\varepsilon^*$ che indica:

- lo stato attuale dell'automa
- l'input ancora da leggere

La configurazione iniziale è sempre $(q_0, x)$.

**Passo di computazione di un NFA**

Un **passo di computazione** è una relazione binaria con simbolo $\vdash_N$ per cui:

$$(q_1, ax) \vdash_N (q_2, x) \iff q_2 \in \delta(q_1, a)$$

La **chiusura per simmetria e transitività** di $\vdash_N$, scritta come $\vdash_N^*$, ha delle proprietà:

1. $(q_1, ax) \vdash_N (q_2, x) \implies (q_1, ax) \vdash_N^* (q_2, x)$
2. $(q_1, abc) \vdash_N (q_2, bc) \vdash_N (q_3, c) \implies (q_1, abc) \vdash_N^* (q_3, c)$

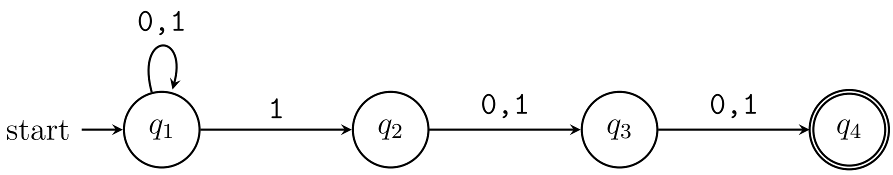
Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da un NFA se:

$$\exists q \in F | (q_0, x) \vdash_N^* (q, \varepsilon)$$

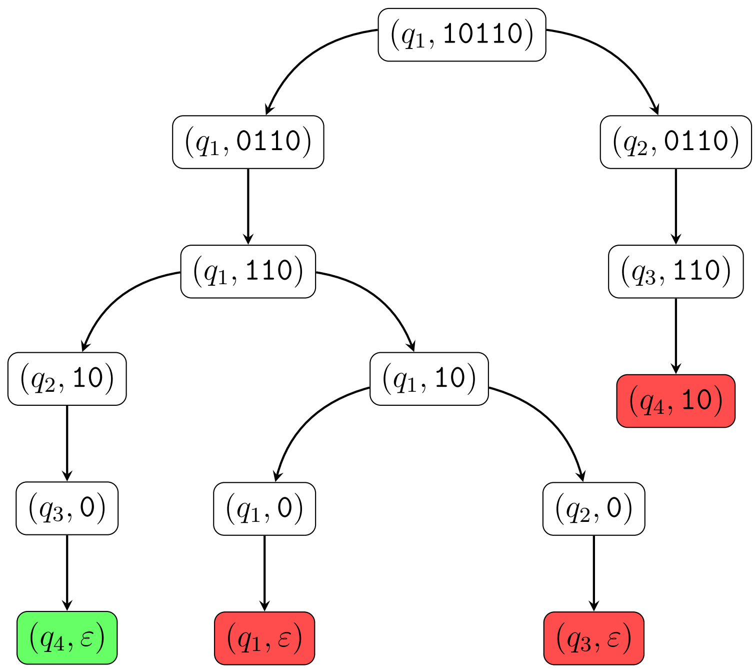
Oppure se:

$$x = y_1 \dots y_n \wedge \exists \underbrace{q_0 \dots q_n}_{\text{sequenza di stati}} | q_{i+1} = \delta(q_i, y_{i+1}) \wedge q_n \in F$$

**Esempio:**
Preso il seguente NFA:




Data la stringa 10110 la computazione sarà:




La stringa 10110 viene quindi accettata dal NFA.

## 1.3 Linguaggi regolari

**Insieme dei Linguaggi regolari**

Dato un alfabeto $\Sigma$, l'insieme dei **linguaggi regolari** di $\Sigma$, scritto come REG, è l'insieme dei linguaggi per cui esiste una DFA che li accetta:

$$\text{REG} = \{L \subseteq \Sigma^* | \exists D \; L(D) = L\}$$

### 1.3.1 Proprietà dei linguaggi regolari

I linguaggi sono insiemi di stringhe di un alfabeto $\Sigma$, quindi dati due linguaggi $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ possiamo definire le operazioni:

- **Unione:**
$$L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* | x \in L_1 \lor x \in L_2\}$$
- **Intersezione:**
$$L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* | x \in L_1 \land x \in L_2\}$$
- **Complemento:**
$$\neg L = \{x \in \Sigma^* | x \notin L\}$$
- **Concatenazione:**
$$L_1 \circ L_2 = \{xy \in \Sigma^* | x \in L_1 \land y \in L_2\}$$
- **Potenza:**
$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & n = 0 \\ L \circ L^{n-1} & n > 0 \end{cases}$$
- **Star di Kleene:**
$$L^* = \{x_1 \dots x_k \in \Sigma^* | x_i \in L\} = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

### 1.3.2 Chiusura dei linguaggi regolari

**Chiusura dell'unione in REG**

L'unione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$$

**Dimostrazioni:**

- **Tramite DFA:**
  Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:
  - $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(D_1) = L_1$
  - $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(D_2) = L_2$

  Creo il DFA $D_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:
  - $Q_0 = Q_1 \times Q_2 = \{(q_x, q_y) | q_x \in Q_1 \wedge q_y \in Q_2\}$
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $F_0 = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(q_x, q_y) | q_x \in F_1 \vee q_y \in F_2\}$
  - $\forall (q_x, q_y) \in Q_0, a \in \Sigma$:
  $$\delta((q_x, q_y), a) = (\delta_1(q_x, a), \delta_2(q_y, a))$$

  Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \vee x \in L_2$, quindi $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$.

- **Tramite NFA:**
  Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:
  - $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(N_1) = L_1$
  - $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(N_2) = L_2$

  Creo il NFA $N_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$per cui:
  - $Q_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
  - $q_0$ è un nuovo stato iniziale
  - $F_0 = F_1 \cup F_2$
  - $\forall q \in Q_0, a \in \Sigma$:
  $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

  Quindi $x \in L(N_0) \iff x \in L_1 \vee x \in L_2$, quindi $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$.

**Chiusura dell'intersezione in REG**

L'intersezione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$$

**Dimostrazione:**
Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:

- $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(D_1) = L_1$
- $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(D_2) = L_2$

Creo il DFA $D_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:

- $Q_0 = Q_1 \times Q_2 = \{(q_x, q_y) | q_x \in Q_1 \wedge q_y \in Q_2\}$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F_0 = F_1 \times F_2$
- $\forall (q_x, q_y) \in Q_0, a \in \Sigma$:
$$\delta((q_x, q_y), a) = (\delta_1(q_x, a), \delta_2(q_y, a))$$

Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \wedge x \in L_2$, quindi $L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$.

**Chiusura del complemento in REG**

Il complemento è chiuso in REG, cioè:

$$\forall L \in \text{REG} \implies \neg L \in \text{REG}$$

**Dimostrazione:**
Dato $L \in \text{REG}$, esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) | L(D) = L$.
Creo il DFA $D^* = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, uguale a $D$ ma con gli stati accettanti invertiti, quindi $x \in L(D^*) \iff x \notin L(D)$, quindi $\neg L \in \text{REG}$.

**Chiusura della concatenazione in REG**

La concatenazione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \circ L_2 \in \text{REG}$$

**Dimostrazione:**
Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:

- $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(N_1) = L_1$
- $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(N_2) = L_2$

Creo il NFA $N_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:

- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$
- $q_0 = q_1$

- $F_0 = F_2$
- $\forall q \in Q_0, a \in \Sigma$:

$$\delta_0(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \land a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup q_2 & q \in F_1 \land a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \circ L_2$, quindi $L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$.

**Chiusura di star in REG**

Star è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L \in \text{REG} \implies L^* \in \text{REG}$$

Dato $L \in \text{REG}$, esiste $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) | L(D) = L$.
Creo il NFA $N^* = (Q^*, \Sigma, \delta^*, q_0^*, F^*)$ in cui:

- $q_0^*$ è un nuovo stato iniziale
- $Q^* = Q \cup q_0^*$
- $F^* = F \cup q_0^*$
- $\forall q \in Q^*, a \in \Sigma$:

$$\delta^*(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & q \in Q - F \\ \delta(q,a) & q \in F \land a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup q_0 & q \in F \land a = \varepsilon \\ q_0 & q = q_0^* \land a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0^* \land a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Quindi $x \in L(N^*) \iff x \in L^*$, quindi $L^* \in \text{REG}$.

## 1.4 Equivalenza tra DFA e NFA

**Linguaggi accettati da DFA e NFA**

Sia $\mathcal{L}(\text{NFA})$ l'insieme dei linguaggi per cui esiste un NFA che li accetta e $\mathcal{L}(\text{DFA})$ l'insieme dei linguaggi per cui esiste un DFA che li accetta, allora:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) = \mathcal{L}(\text{DFA}) = \text{REG}$$

**Dimostrazione per doppia inclusione:**

1. $\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$:
   Dato un $L \in \mathcal{L}(DFA)$ allora esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L(D) = L$.
   Visto che NFA è una generalizzazione di DFA, allora è ovvio che:

$$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

2. $\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$:
   Dato un $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$ allora esiste $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$ tale che $L(N) = L$.
   Considero un DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0_D}, F_D)$, costrito partendo da $N$ in cui:

   - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
   - Dato $R \in Q_D$, definiamo l'**estensione** di $R$:

   $$E(R) = \left\{ q \in Q_N \,\middle|\, \begin{array}{c} q \text{ può essere raggiunto da uno stato } r \in R \\ \text{tramite solamente } \varepsilon\text{-archi} \end{array} \right\}$$

   - $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\})$
   - $F_D = \{R \in Q_D | R \cap F_N \neq \emptyset\}$
   - Dati $R \in Q_D$ e $a \in \Sigma$, $\delta_D$ è definita:

   $$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

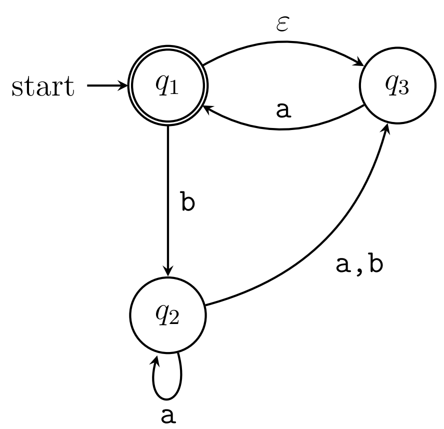
   Detto questo allora abbiamo che:

   $$w \in L(N) \iff w \in L(D)$$

   quindi:

   $$\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$$

**Esempio:**
Preso il seguente NFA:




Per costruire il DFA equivalente, che sarà definito:

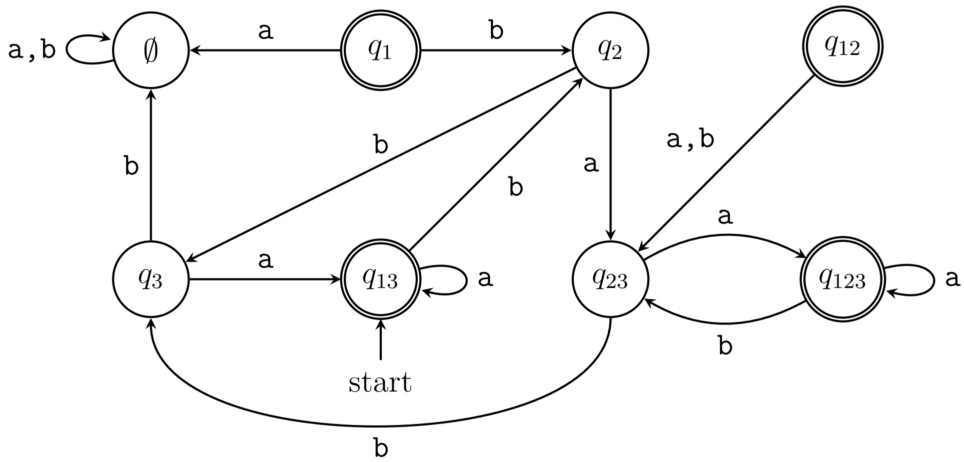
- $Q_D = \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
  che scriviamo in notazione semplificata:

  $$Q_D = \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}$$

- $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\}) = E(q_1) = \{q_1, q_3\} = q_{13}$
- $F_D = \{q_1, q_{12}, q_{13}, q_{123}\}$
- $\delta_D$ viene definita come scritto prima, per esempio:

- $\delta_D(q_1, a) = E(\delta_N(q_1, a)) = \emptyset$
- $\delta_D(q_1, b) = E(\delta_N(q_1, b)) = q_2$
- $\delta_D(q_2, a) = E(\delta_N(q_2, a)) = \{q_2, q_3\} = q_{23}$
- $\delta_D(q_2, b) = E(\delta_N(q_2, b)) = q_3$
- $\delta_D(q_{12}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) \cup E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2, q_3\} = q_{23}$
- $\delta_D(q_{13}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) \cup E(\delta_N(q_3, a)) = \{\emptyset, q_1, q_3\} = q_{13}$

Il DFA equivalente quindi è:




## 1.5 Espressioni regolari

**Definizione di espressione regolare**

Dato un alfabeto $\Sigma$, un'**espressione regolare** di $\Sigma$ è una stringa $r$ che rappresenta un linguaggio $L(r) \subseteq \Sigma^*$. L'insieme delle espressioni regolari di un alfabeto $\Sigma$, scritte come $\text{re}(\Sigma)$, è definito:

- $\emptyset \in \text{re}(\Sigma)$
- $\varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$
- $a \in \text{re}(\Sigma)\ \forall a \in \Sigma$
- $r_1, r_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies r_1 \cup r_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $r_1, r_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies r_1 \circ r_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $r \in \text{re}(\Sigma) \implies r^* \in \text{re}(\Sigma)$

**Esempio:**
Dato l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

- $0 \cup 1 = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
- $0^*10^* = \{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* = \{x1y | x, y \in \{0\}^*\}$

- $\Sigma^*1\Sigma^* = \Sigma^* \circ \{1\} \circ \Sigma^* = \{x1y | x, y \in \Sigma^*\}$
- $1^*\emptyset = \{1\}^* \circ \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset^* = \varepsilon$

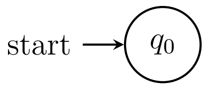
**Conversione da espressione regolare a NFA**

Date la classe dei linguaggi descritti da un'espressione regolare $\mathcal{L}(\text{re})$ e $\mathcal{L}(NFA)$:

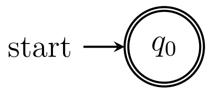
$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(NFA)$$

**Dimostrazione per induzione:**

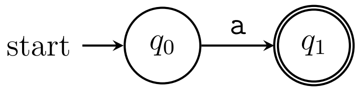
- Caso base:
  - $r = \emptyset \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\emptyset$:




    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(N_\emptyset)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(NFA)$
  - $r = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_\varepsilon$:




    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(N_\varepsilon)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(NFA)$
  - $r = a \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il NFA $N_a$:




    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(N_a)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(NFA)$

- Passo induttivo:
  - $r = r_1 \cup r_2$, allora abbiamo che:

$$L(r) = L(r_1) \cup L(r_2) = L(N_1) \cup L(N_2) \in \mathcal{L}(NFA)$$

  - $r = r_1 \circ r_2$, allora abbiamo che:

$$L(r) = L(r_1) \circ L(r_2) = L(N_1) \circ L(N_2) \in \mathcal{L}(NFA)$$

  - $r = r_1^*$, allora abbiamo che:

$$L(r) = L(r_1)^* = L(N_1)^* \in \mathcal{L}(NFA)$$

**Esempio:**

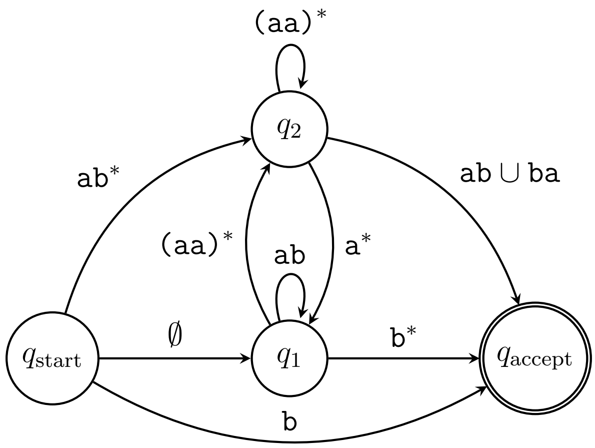
### 1.5.1 NFA generalizzati (GNFA)

**NFA generalizzato (GNFA)**

Un **GNFA (Generalized NFA)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ in cui:

- $|Q| \geq 2$ è l'insieme degli stati dell'automa
- $\Sigma$ è l'alfabeto dell'automa
- $q_{\text{start}} \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $q_{\text{accept}} \in Q$ è l'unico stato accettante dell'automa
- $\delta : (Q - q_{\text{accept}}) \times (Q - q_{\text{start}}) \to \text{re}(\Sigma)$ è la funzione di transizione degli stati in cui però:
  - $q_{\text{start}}$ ha solo archi uscenti
  - $q_{\text{accept}}$ ha solo archi entranti
  - Per ogni coppia di stati $(q_1, q_2)$, c'è esattamente un arco $q_1 \to q_2$ e un arco $q_2 \to q_1$, incluse le coppie $(q, q)$
  - Le etichette degli archi sono espressioni regolari

**Esempio:**




**Conversione da DFA a GNFA**

Date $\mathcal{L}(DFA)$ e $\mathcal{L}(GNFA)$ si ha che:

$$\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(GNFA)$$

**Dimostrazione:**
Dato $L \in \mathcal{L}(DFA)$, allora esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L(D) = L$.
Costruisco un GNFA $G = (Q_G, \Sigma, \delta_G, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ costruito da D in cui:

- $Q_G = Q \cup \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$
- $\delta_G(q_{\text{start}}, q_0) = \varepsilon$

- $\forall q \in F\ \delta_G(q, q_{\text{accept}}) = \varepsilon$
- Ogni transizione con etichette multiple in $D$ viene trasformata in un'etichetta con l'unione delle etichette multiple
- Per ogni coppia per cui non ci sia un arco in un verso o nell'altro in $D$ viene aggiunto un arco in $G$ con etichetta $\emptyset$

Quindi $x \in L(D) \implies x \in L(G)$, quindi $\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(GNFA)$.
**Esempio:**

### 1.5.2 Riduzione minimale di un GNFA

Dato un GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$, possiamo usare un'algoritmo per ottenere un GNFA $G'$ con solo due stati e per cui $L(G) = L(G')$:

**Algoritmo:** Riduzione minimale di un GNFA

```
def ReduceGNFA(G):
    if |Q|==2 :
        return G
    q = q ∈ Q − {q_start, q_accept}// scelto in modo casuale
    Q' = Q − q
    for q_i in Q' − {q_accept} :
        for q_j in Q' − {q_start} :
            δ'(q_i, q_j) = δ(q_i, q)δ(q, q) ∗ δ(q, q_j) ∪ δ(q_i, q_j)
    G' = (Q', Σ, δ', q_start, q_accept)
    return ReduceGNFA(G')
```

**Esempio:**

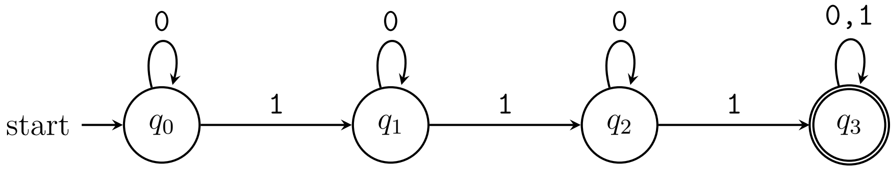
# E

# Esercizi

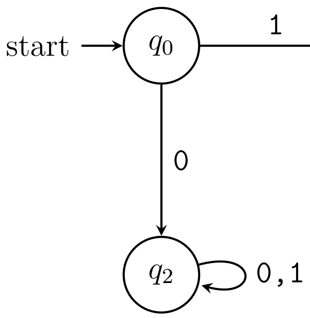
## E.1 Esercizi sui linguaggi regolari

### E.1.1 Costruire un DFA da un linguaggio

1. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | w_H(x) \geq 3\}$, per cui $w_H(x) = \{\text{numero di 1 in } x\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:




2. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 1y \wedge y \in 0,1^*\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:




3. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 0^n 1\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio: