Calcolo differenziale

1-Equazioni e disequazioni

1.1-Primo grado

1.1.1-Rette nel piano

$y = mx + q$

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \implies y = mx + m(y_1 - x_1)$

Se il punto P_1 è noto: $y = mx + q$

$m = tan(\theta)$

θ è l'angolo tra la retta e l'asse x

Una retta è caratterizzata dal fatto che il rapporto tra le coordinate di due punti è sempre costante e uguale ad m.

1.1.2-Equazione

$y = ax + b$

$ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$

$ax + b \geq 0$:

- Se a > 0 $\implies x \geq -\frac{b}{a}$
- Se a < 0 $\implies x \leq -\frac{b}{a}$

1.2-Secondo grado

$y = ax^2 + bx + c$

$ax^2 + bx + c = 0$:

- Se $b^2 - 4ac > 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4\mathrm{ac}}}{2a}$
- se $b^2 - 4ac < 0 \implies$ no soluzioni
- se $b^2 - 4ac = 0 \implies x = -\frac{b}{2a}$

$ax^2 + bx + c \geq 0$:

- se $a > 0 \implies x < x_1 \vee x > x_2 \implies x \in [-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty]$
- se $a < 0 \implies x_1 < x < x_2 \implies x \in [x_1; x_2]$

1.3-Modulo

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Definizione: |x| è la distanza di x da 0

$|x| \leq a \implies -a \leq x \leq a \implies x \in [-a; a]$

$|x| \geq a \implies x \leq -a \vee x \geq a \implies x \in [-\infty; -a] \cup [a; \infty]$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Esempio:

$|x-2| - 3 \leq 0 \implies |x-2| \leq 3 \implies -3 \leq x - 2 \leq 3 \implies -1 \leq x \leq 5$

$2|x^2 - x| > |x| => 2|x(x-1)| < |x| \implies 2|x-1| > 1 => |x-1| > \frac{1}{2} \implies x{-}1 < -\frac{1}{2} \vee x - 1 > \frac{1}{2} \implies x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2} \vee x \neq 0$

1.3.1-Disuguaglianza triangolare

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} -|x| < x < |x| \\ -|y| < y < |y| \end{cases} => -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| => |x+y| \leq |x| + |y|$$

2-Applicazioni

Le applicazioni associano ad ogni elemento dell'insieme A un'immagine nell'insieme B.

$\forall a \in A \rightarrow b = r(a)$ r è l'immagine dell'elemento

2.1-Applicazioni iniettive

Un’applicazione è iniettiva quando due elementi diversi in A hanno due immagini diverse.

$a1 \in A \neq a2 \in A => r(a1) \neq r(a2)$

Esempio:

$a \rightarrow a^2$ non è iniettiva perché r(1) = r(-1)

$a \rightarrow a+3$ è iniettiva

2.2-Applicazioni suriettive

Tutti gli elementi di B sono l’immagine di un elemento di A

$\forall b \in B \exists a \in A$ tale che $r(a) = b$

Biezione:

Due insiemi sono in biezione se esiste un’applicazione suriettiva e iniettiva tra i due.

3-Insiemi numerici

Un insieme è una collezione di elementi per cui è possibile determinare se un elemento appartiene o no all’insieme.

3.1-Interi N

N = interi: {0;1;2;…}

Considerando la classe degli insiemi che sono in biezione tra loro, questo ci permette di definire i numeri naturali, la cardinalità, cioè il numero di elementi in un insieme.

A = ∅→ 0 elementi

A = {∅}≈{0} → 1 elemento

A = {∅, {∅}} ≈{0 , 1} → 2 elementi

A = {∅, {∅}, {∅, {∅}}} → 3 elementi

> ≈ significa in biezione

3.2-Relativi Z

Z = relativi: {...;-2;-1;0;1;2;…}

Sono i numeri tali che -n +n = 0

3.3-Razionali Q

Q = razionali: $\{\frac{7}{12}; \frac{22}{67}; \frac{p}{q}\}$ con $p \in Z, q \in Z, q \neq 0$

3.4-Numeri reali R

R = reali: {$\sqrt{3}$;π;…}

R e Q sono campi ordinati, cioè se prendo una coppia di numeri posso sapere quale è maggiore dei due.

$\sqrt{2} \notin Q$

Dimostrazione per assurdo:

Suppongo che $\sqrt{2} \in Q \implies \exists n, m \in N$ t.c. $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, possiamo scegliere n e m primi tra loro (in Q ogni numero può essere scritto come frazione di due numeri primi tra loro) => $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \implies n^2 = 2m^2 \implies n^2$ è pari $\implies$ n è pari = $2k \implies (2k)^2 = 2m^2 \implies 2k^2 = m^2 \implies m^2$ è pari $\implies$ m è pari e questo è impossibile perché n e m non possono essere entrambi pari e primi tra loro $\implies \sqrt{2} \notin Q$

3.4.1-Definizioni:

Prendendo un insieme $A \subseteq R$

Limitato superiormente: A è limitato superiormente se $\exists x \in R$ t.c. $\forall y \in A \implies y < x$

Limitato inferiormente: A è limitato inferiormente se $\exists x \in R$ t.c. $\forall y \in A \implies y > x$

Limitato: se è limitato sia inferiormente che superiormente

Massimo: se A è limitato superiormente x_{max} è il massimo se $x_{max} \in A, \forall x \in A \implies x < x_{max}$

Minimo: se A è limitato inferiormente xmin è il minimo se $x_{min} \in A, \forall x \in A \implies x > x_{min}$

Maggiorante: ξ è un maggiorante di A se $\forall x \in A \implies x < \xi$

Minorante: ξ è un minorante di A se $\forall x \in A \implies x > \xi$

Estremo superiore: sup_A è il minimo dei maggioranti, se esite $x_{max} = sup_A$, se A non è limitato superiormente sup_A = + ∞

Estremo inferiore: inf_A è il massimo dei minoranti, se esite $x_{min} = inf_A$, se A non è limitato inferiormente inf_A = − ∞

Esempio:

A = [0,1)

x_{max} non esiste, sup_A = 1

x_{min} = 0 = inf_A

4-Funzioni elementari

4.1-Radicali

Teorema:

$\forall y \ \in \ R, y \ > \ 0 \implies \exists! x \ \in \ R, x \ > \ 0$ t.c. $x^n = y$

$x^n = y => x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{x}}$

$x^{\frac{n}{m}} \ = \ \sqrt[m]{x^n}$

Se $a > 1$ e $x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2$

Se $a < 1$ e $x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2$

4.2-Logaritmi

Teorema:

Sia $a > 0, a \neq 1, y > 0 \implies \exists! x \ \in \ R$ t.c. $ax = y$

$x = \log_a y$ e $a^{\log_a y} = y$

Esempio:

$\log_2 1 = 0$

$\log_a a^x = x$

Proprietà:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
   $a^{\log_a x \ + \ \log_a y} = a^{\log_a x} \ \cdot \ a^{\log_a y} = xy$
2. $\log_a x^y = y(\log_a x)$

4.3-Sommatoria

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + 1 = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$$

Esempi:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Dimostrazione:

Tesi:

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 – q^{n+1} \implies (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \implies$ togliamo il primo numero della sommatoria da quello di sinistra e l'ultimo da quello di destra $\implies 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k - q^{n-1} = 1 - q^{n+1}$

4.3.1-Coefficiente binomiale:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dimostrazioni per induzione:

Si può fare solo se la proposizione è vera $\forall x \in N$. P(n) è la proposizione.

Si esegue in due passi:

1. Verificare che P(n) è vera per n = 1
2. Supporre per ipotesi che P(n) sia vera e quindi P(n+1) sia vera

Esempio:

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1. $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(2)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \implies \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Esempio:

$(a+b)n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * a^{n-k} * b^k$

Dimostrazione:

1. $(a+b)1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a+b$
2. $(a+b)n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Tesi: $(a+b)(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$

$(a+b)n * (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} \implies$ tolgo il primo numero da quello a sinistra e l'ultimo da quello a destra $\implies a^{n+1} +$
$\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{k+1} = a^{n+1} +$
$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$

5-Funzioni reali

Definizione: dati due insiemi A e B, una funzione f con dominio A e codominio B è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa un solo elemento di B.

f: A → B, $\forall x \in A$ → $f(x) \in B$

Esempio:

Sia i il tasso di interesse annuale, versato mensilmente, e K(i) l'interesse maturato dopo un anno

- Dopo 1 mese = $1 + \frac{i}{12}$
- Dopo 2 mesi = $\left(1 + \frac{i}{12}\right)^2$}
- Dopo 12 mesi = $\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12}$

$f(i,n) = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n$

$A \backslash B = x \ \in \ A, x \ \notin \ B$

$A \cdot B = (x,y)$ t.c. $x \ \in \ A, y \ \in \ B$

5.1-Funzioni reali a variabile reale

$f : I \subseteq R \to R \implies x \in I \to f(x) \in R$

L'insieme dei punti R_2 definito da $g_f = (x, y)$ t.c. $x \in I, y = f(x) = (x, f(x)) \forall x \in I$ si chiama grafico di f

$\forall x \in I$ l'intersezione tra la retta $\overline{x} = x$ con il grafico della funzione è composta da un solo punto

Esempio:

$f : x \to x_2$

$f : R_1 \to R_2$ in cui R_1 è il dominio e R_2 è il codominio

grafico $= (x, x^2),\ x \in R$

$f : I \subseteq R \to R$

5.1.1-Proprietà di base

Una funzione è limitata superiormente se $\exists M \in R$ t.c. $f(x) \leq M \forall x \in I$

Una funzione è limitata inferiormente se $\exists N \in R$ t.c. $f(x) \geq N \forall x \in I$

Una funzione è limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente

Esempio:

$f : R \backslash \{0\} \to R$

$x \to \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{M \cdot M} \to \frac{1}{x} = M + 1 > M$

5.1.2-Proprietà di simmetria

f: $I \subseteq R \to R$, I sia simmetrico rispetto all'origine cioè $x \in I \to -x \in I$

f è pari se $\forall x \in I,\ f(x) = f(-x)$, in questo caso il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

f è dispari se $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$, in questo caso il grafico è simmetrico rispetto all'origine, cioè la retta y=x

5.2-Funzioni monotone

f è monotona crescente in I se $\forall x_1 \in I,\ x_2 \in I$ t.c. $x_1 \leq x_2 => f(x_1) \leq f(x_2)$

f è monotona crescente in I se $\forall x_1 \in I, x_2 \in I$ t.c. $x_1 \leq x_2 => f(x_1) \geq f(x_2)$

Esempio:

$f(x) = x^2$

è monotona crescente in [0;∞]

è monotona decrescente in [−∞;0]

5.3-Funzioni periodiche

f è una funzione periodica di periodo T se $\forall x \in I, x + kT \in I, k \in Z \implies f(x + kT) = f(x)$

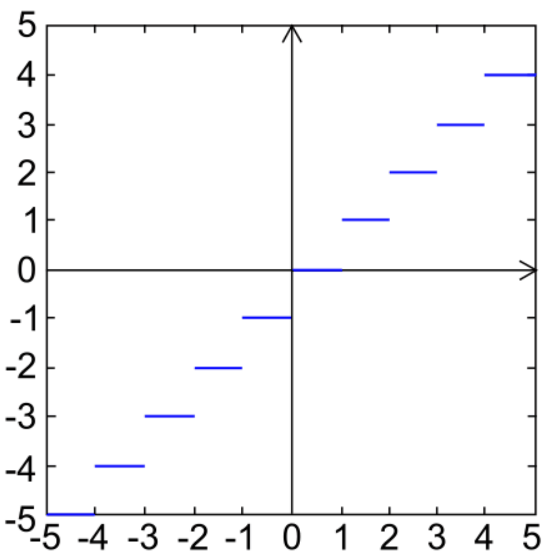
Esempi:

f(x) = sin(x) è 2π periodica

f(x) = tan(x) è π periodica

5.3.1-Parte intera di x

$f(x) = [x] = n \in Z$ t.c. $n \leq x, n + 1 > x$

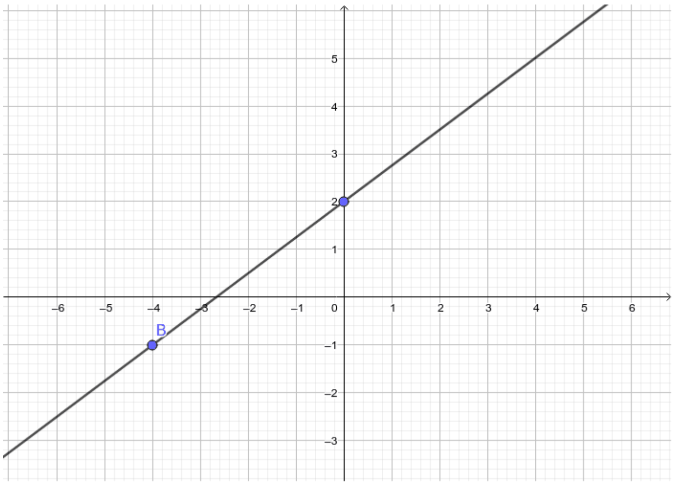


5.4-Funzioni elementari

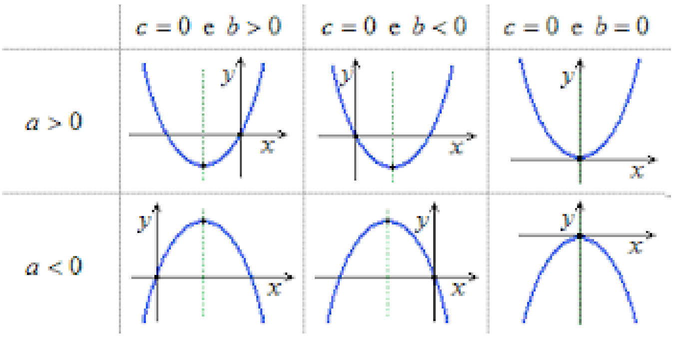
5.4.1-Potenza

f(x) = kx^a

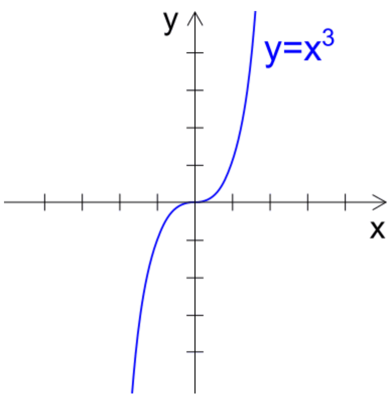
Se $a = 1 \implies f(x) = kx$



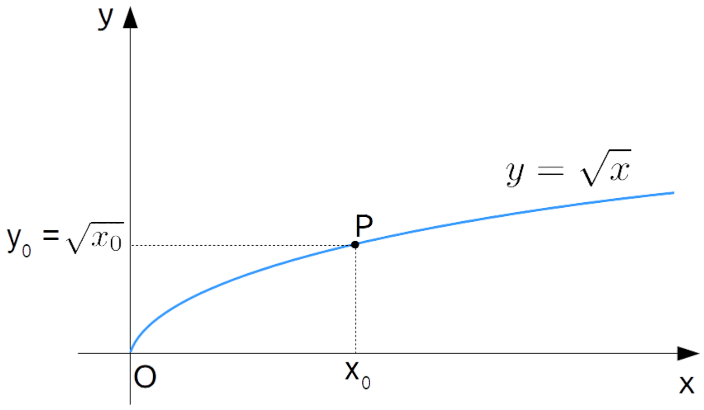
Se a = pari $\implies f(x) = kx^2$



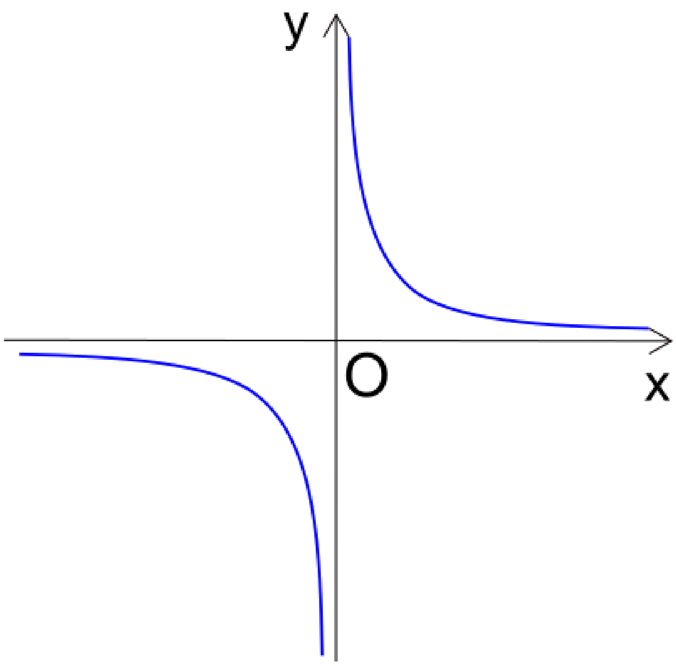
Se a = dispari $\implies f(x) = kx^3$



Se $a = \frac{1}{2} \implies f(x) = \sqrt{x}$



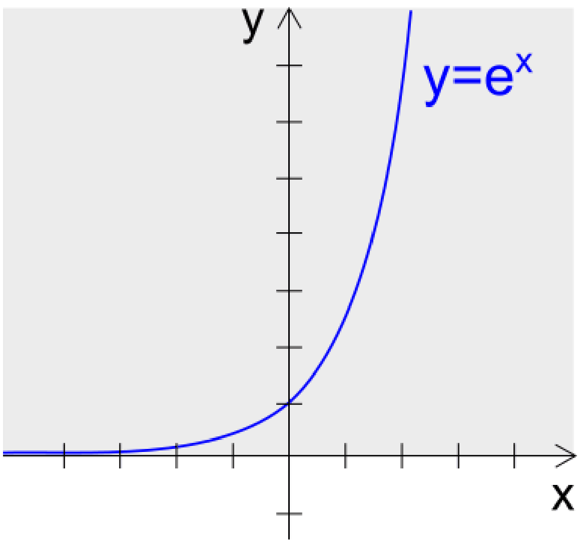
Se a = -1 $\implies$ $f(x) = \frac{1}{x}$



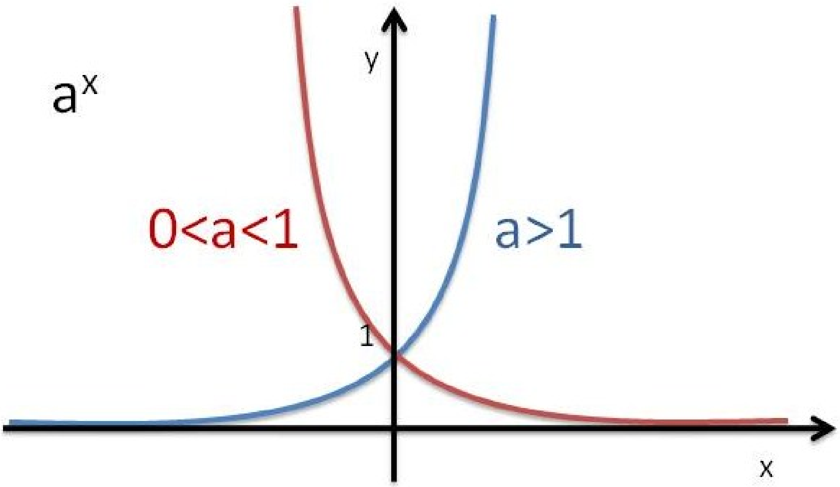
5.4.2-Esponenziali e logaritmiche

$f(x) = e^x$

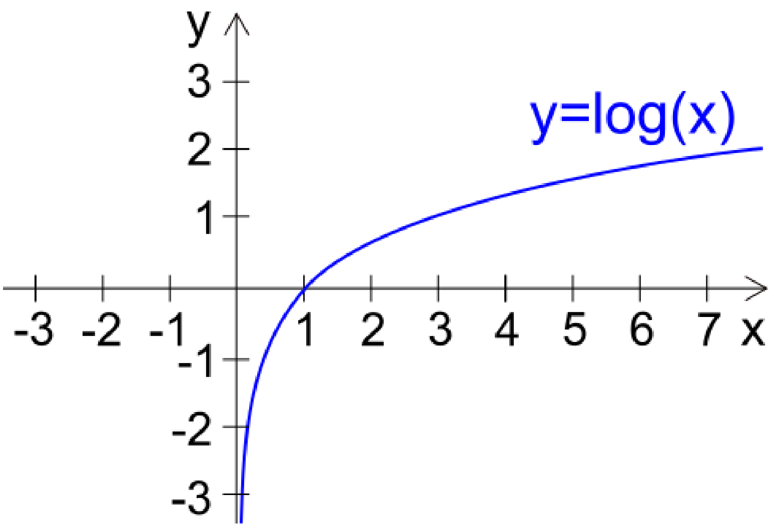
e = 2,71…



$f(x) = a^x$



$f(x) = log_a x = y$ t.c. $a^y = x$



5.4.3-Funzioni composte

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$f(x) = h(g(x)) = h_o g =$ h composto g

Necessario:

- $Im_g = y \ \in \ R$ t.c. $\exists x \ \in \ D_g$ cheverifica $g(x) \ = \ y$
- $Im_g \ \subseteq \ D_h$

Se in una funzione non viene esplicitato l'insieme di definizione, si considera come dominio il più grande insieme in R in cui è possibile calcolare la funzione.

La funzione neutra rispetto alla composizione è f(x) = x, scritta come I(x) = x

Esempio:

$f(x) = \sin(x)$

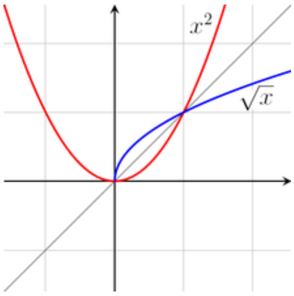
$h(x) = \frac{1}{x^2+4x+6}$

$f_o h = \sin\left(\frac{1}{x^2+4x+6}\right)$

$g_o h = \frac{1}{\sin^2(x)+4\sin(x)-6}$

5.4.4-Funzione inversa

La funzione inversa è la funzione che se composta con f(x) dà come risultato x.



Il grafico della funzione inversa è simmetrico rispetto alla retta y=x con la funzione.

$f_o f^{-1}(x) = x$ e $f^{-1}{}_o f(x) = x$

La funzione inversa esiste se f(x) è iniettiva.

Se f(x) è iniettiva:

$f : D_f \to R$

$f^{-1} : Im_f \to R$

$y = f(x) \to f^{-1}(y) = x$

Esempio:

$f(x) = x^2$

$D_f = [0; \infty) \implies$ restringiamo il dominio perché se no non è iniettiva

$Im_f = [0; \infty)$

$f^{-1} = \sqrt{x}$

$D_{f^{-1}} = [0; \infty) = Im_f$

$Im_{f^{-1}} = [0; \infty) = D_f$

Funzioni inverse trigonometriche:

f(x) = sin(x)

$D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \implies$ restringiamo il dominio per far si che sia iniettiva

$Im_f = [-1; 1]$

f: x → sin(x)

$f^{-1} : x \to y$ t.c. $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin y = x \implies y = \arcsin(x)$

f(x) = cos(x)

$D_f = [0; \pi] = \implies$ restringiamo il dominio per far si che sia iniettiva

$Im_f = [-1; 1]$

f: x → cos(x)

$f^{-1}: x \to y \text{ t.c. } y \in [0, \pi], \cos y = x \implies y = \arccos(x)$

f(x) = tan(x)

$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \implies$ restringiamo il dominio per far si che sia iniettiva

$Im_f = \mathbb{R}$

f: x → tan(x)

$f^{-1}: x \to y \text{ t.c. } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \tan y = x \implies y = \arctan(x)$

5.5-Operazioni sui grafici

f(x) → R

g(x) = f(x+h):

- se h > 0 la funzione si sposta a sinistra
- se h < 0 la funzione si sposta a destra

g(x) = f(x) + k:

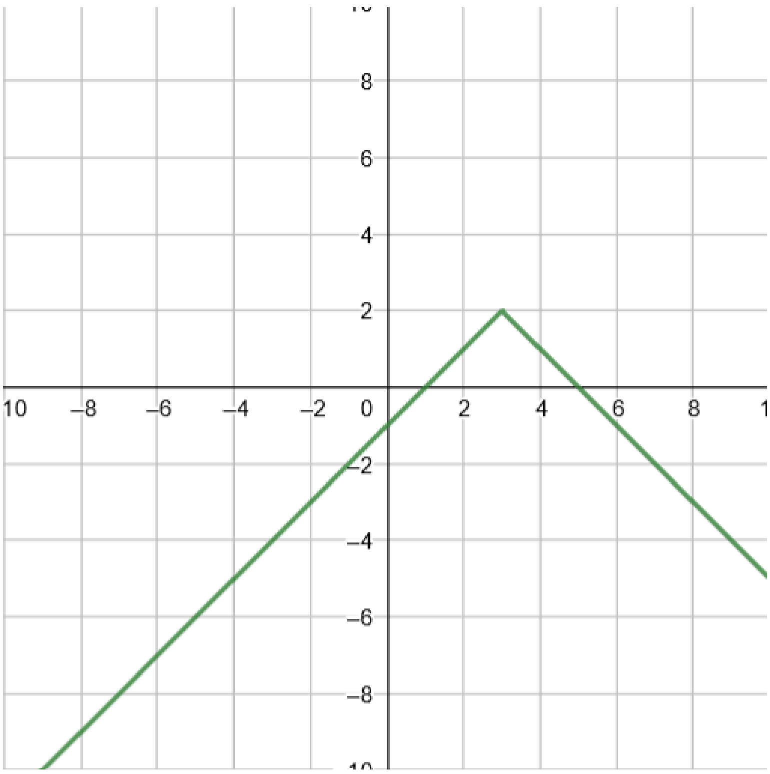
- se k > 0 la funzione si sposta in alto
- se k < 0 la funzione si sposta in basso

g(x) = -f(x):

- la funzione si ribalta verticalmente

Esempio:

f(x) = -|x-3|+2



6-Successioni

Una successione è una funzione con dominio N e codominio R.

f: N → R

$n \ \in \ N \to f(n) = a_n$

Esempio:

$a_n = \frac{1}{n} \implies n \geq 1 \to a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots$

Successione di Erone

$a_0 = 1$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \implies a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{17}{12}, a_3 = \sqrt{2}$

6.1-Proprietà elementali

Definizioni:

- una successione è limitata superiormente se esiste $M \in R$ t.c. $a_n \ \leq \ M \, \forall n \ \in \ N$
- una successione è limitata inferiormente se esiste $M \in R$ t.c. $a_n \ \geq \ M \, \forall n \ \in \ N$
- una successione è limitata se lo è sia superiormente che inferiormente

6.2-Limiti

Definizione:

Si dice che una successione converge a l con l $\in R$ o che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = n(\epsilon) \text{ t.c. } \forall n \geq N \implies |a_n - l| \leq \epsilon$$

Dimostrazione:

1.

$a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} = 0 \implies N = \frac{1}{\varepsilon} \implies \forall n \geq \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

2.

$a_n = (-1)^n$

non esiste nessun $l \in R$ t.c. $(-1)^n = l$

$(-1)^n$ è limitato ma non ammette limite

6.3-Successioni divergenti

Definizione:

- $(a_n)_{n \in N}$ diverge a +∞ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se: $\forall M > 0\ \exists N = N(M)$ t.c. $\forall n > N \implies a_n \geq M$
- $(a_n)_{n \in N}$ diverge a $-\infty$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +-\infty$ se: $\forall M > 0\ \exists N = N(M)$ t.c. $\forall n > N \implies a_n \leq -M$

Esempi:

1.

$a_n = n^2$

$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \implies \forall M > 0\ \exists N = \sqrt{M}$ t.c. $\forall n > \sqrt{M} \implies a_n \geq M$

2.

$a_n = (-2)^n$

è limitata ma non è divergente perché:

$$\lim_{n\to\infty}(-2)^n \neq +\infty \neq -\infty$$

6.4-Successioni monotone

Una successione è monotona crescente se $\forall n \in N \implies a_n \le a_{n+1}$

Una successione è monotona decrescente se $\forall n \in N \implies a_n \ge a_{n+1}$

Teorema:

Se $(a_n)_{n \in N}$ è una successione monotona e esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

- se è una successione limitata $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in R$
- se non è limitata $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ per le successioni monotone crescenti e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ per le successioni monotone decrescenti

7-Limiti

7.1-Definizione topologica di limite

Intorno:

Un intorno di $c \in R$ è un qualsiasi intervallo aperto che contiene c, $U_c = (a,b)$ t.c. $c \in (a,b)$

Intorno degli infiniti:

$U_{+\infty} = (a, +\infty)$

$U_{-\infty} = (-\infty, b)$

Limite:

dato $c \in R$ e dato $l \in R f(x) = l$ se $\forall U_l\ \exists U_c$ t.c. $\forall x \in U_c \implies f(x) \in U_l$

7.2-Algebra dei limiti

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = c$:

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ \text{non si può stabilire a priori} & c = 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ \text{forma indeterminata} & a = 1 \\ 0 & a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & a < 1 \end{cases}$$

7.3-Teoremi

7.3.1-Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \implies \exists N$ t.c. $\forall n > N, a_n > 0$

$\varepsilon = \frac{a}{2} < a \implies \exists N = N\left(\frac{a}{2}\right)$ t.c. $\forall n > N \implies a_n > a - \frac{a}{2} > 0$

7.3.2-Teorema del confronto

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ t.c. $a_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Se $a_n \geq b_n \implies \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$

7.3.3-Teorema dei carabinieri

7.4-Confronti e stime asintotiche

Prendendo due successioni $(a_n)_{n\in N}$ e $(b_n)_{n\in N}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\begin{cases}0 & (a_n)\text{ ha un ordine di infinito minore di }(b_n)\\ \infty & (a_n)\text{ ha un ordine di infinito maggiore di }(b_n)\\ l\in R; l\neq 0 & (a_n)\text{ ha un ordine di infinito uguale a }(b_n)\end{cases}$$

Se $a_n = n^\alpha$ e $b_n = n^\beta$ con $\alpha,\ \beta\ >\ 0$ allora:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta}=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-\beta}=\begin{cases}\infty & \alpha-\beta>0\\ 0 & \alpha-\beta<0\\ 1 & \alpha-\beta=0\end{cases}$$

Esempio:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+\sqrt{n}-n}{n^4+n^2+n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n^3}-\frac{n}{n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{n^2}{n^4}-\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4}=0\implies$$

raccogliamo gli esponenti più grandi

7.4.1-Unicità dei limiti

Se esiste $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$ con $x_0, l\in\mathbb{R}$ ed esistesse $l_1\neq l_2$ t.c. $\lim_{x\to x_0}f(x)\ =\ l_1,\ \lim_{x\to x_0}f(x)=l_2$ quindi $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=l_1=l_2$ che è assurdo

7.5-Ordini di infinito

$cost. < \log(x) < x^n < c^x < x! < x^x$

7.6-Proprietà per calcolare i limiti

7.6.1-Teorema del confronto:

$\lim_{x\to c}f(x)=l$

$\lim_{x\to c}g(x)=l$

Se $f(x)<h(x)<g(x)\implies\lim_{x\to c}h(x)=l$

Se $\lim_{x\to c}g(x)\ =\ 0$ e $|h(x)|\leq g(x)\implies\lim_{x\to c}h(x)=0$

7.6.2-Teorema della permanenza del segno:

Se $\lim_{x\to c}f(x)=l>0\implies\exists U_c$ t.c. $\forall x\in U_c\implies\ f(x)>0$

Se $f(x) > 0$ in $U_c \implies f(x) = l \geq 0$

7.6.3-Teorema del cambio di variabile:

Se $\lim_{x \to c} g(x) = k$ e $\lim_{x \to k} f(x) = l \implies \lim_{x \to c} f(g(x)) = l$

7.6.4-Algebra:

Se $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e $\lim_{x \to c} g(x) = k$:

- $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = l + k$
- $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = l \cdot k$
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{k}$

7.7-Continuità

Una funzione f definita in U è continua in $x_0 \in U$ se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Queste funzioni sono sempre continue:

- potenze: x^a
- esponenziali: e^x, a^x
- logaritmiche: $\log_a x$
- sin(x) e cos(x)

7.8-Limiti notevoli

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

7) $\lim_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

10) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

11) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{ax} = 1$

12) $\lim_{x\to0}x^r\lg_a x = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

13) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a x}{x^r} = 0 \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

14) $\lim_{x\to+\infty}x^r a^x = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

15) $\lim_{x\to-\infty}|x|^r a^x = \lim_{x\to-\infty}a^x \quad \forall a\in R^+-\{1\}, \forall r\in R^+$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r} = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall r\in R^+$

17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}a^x \quad \forall r\in R^+$

18) $\lim_{x\to-\infty}e^x x^r = 0 \quad \forall r\in R^+$

goniometrici

1) $\lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to0}\frac{sen\,ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to0}\frac{tg\,ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\,x}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\,ax}{bx} = \frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\,x}{x} = 1$

10) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\,ax}{bx} = \frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to0}\frac{senh\,x}{x} = 1$

12) $\lim_{x\to0}\frac{settsenh\,x}{x} = 1$

13) $\lim_{x\to0}\frac{tgh\,x}{x} = 1$

14) $\lim_{x\to0}\frac{settgh\,x}{x} = 1$

15) $\lim_{x\to0}\frac{x-sen\,x}{x^3} = \frac{1}{6}$

16) $\lim_{x\to0}\frac{x-arctg\,x}{x^3} = \frac{1}{3}$

7.9-Funzioni continue in un intervallo

7.9.1-Teorema di esistenza degli zeri

Sia f una funzione continua in [a, b]

Se $f(a)\cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

Corollario:

Se $f(a) \neq f(b) \implies \forall m \in [f(a), f(b)] \ \exists x_0 \in (a, b) \text{ t.c. } f(x_0) = m$

7.9.2-Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua in [a, b] allora esistono massimo e minimo di f in [a, b].

Il teorema non vale se:

1. L'intervallo è aperto:

   Esempio:

   f(x) = x in (0, 1)

   inf = 0 ma il minimo non esiste perché la funzione non è mai uguale a 0

   sup = 1 ma il massimo non esiste perché la funzione non è mai uguale a 1

2. L'intervallo non è limitato:

   Esempio:

   $f(x) = \frac{1}{x}$ in [1, + ∞)

   inf = 0 ma non esiste il massimo perché la funzione non è mai uguale a 0

   sup = 1 = massimo

3. La funzione non è continua:

   Esempio:

   $$f(x) = \begin{cases} x & (0, 1) \\ \frac{1}{2} & 0 \text{ o } 1 \end{cases}$$

   inf = 0 ma la funzione in 0 vale $\frac{1}{2}$ quindi non è mai uguale a 0

   sup = 1 ma la funzione in 1 vale $\frac{1}{2}$ quindi non è mai uguale a 1

Corollario:

Se f è continua in [a, b] allora $\forall l \in [min(f), max(f)] \ \exists x \in [a, b] \text{ t.c. } f(x) = l$

7.9.3-Funzioni monotone

Teorema:

Se f è una funzione continua e monotona in [a, b] allora $\forall c \in [a, b] \ \exists \lim_{x \to c^-} f(x), \exists \lim_{x \to c^+} f(x)$

Dimostrazione:

Se è monotona crescente $f(x_1) < f(x_2)$

Se è monotona decrescente $f(x_1) > f(x_2)$

λ = sup{ f(x), x < c } $\implies \lim_{x \to c^+} f(x)$ = λ

Γ = inf{f(x), x > c } $\implies \lim_{x \to c^-} f(x) = \Gamma$

7.9.4-Funzioni inverse

Teorema:

Se f è continua in [a,b], f è invertibile solo se è monotona in [a,b] e la funzione inversa è anch'essa continua e monotona.

Dimostrazione:

$x_1, x_2 \in [a, b]$

Se $f(x_1) \neq f(x_2) \implies f(x_1) > f(x_2)$ o $f(x_1) < f(x_2)$

f^{-1} è continua e monotona perché:

$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2) \implies f^{-1}(y_1) = x_1 < f^{-1}(y_2) = x_2$

8-Derivate

La derivata di una funzione in un punto è quanto cresce la funzione in quel punto. Per trovare la crescita media in un intervallo aggiungiamo un incremento h ad x.

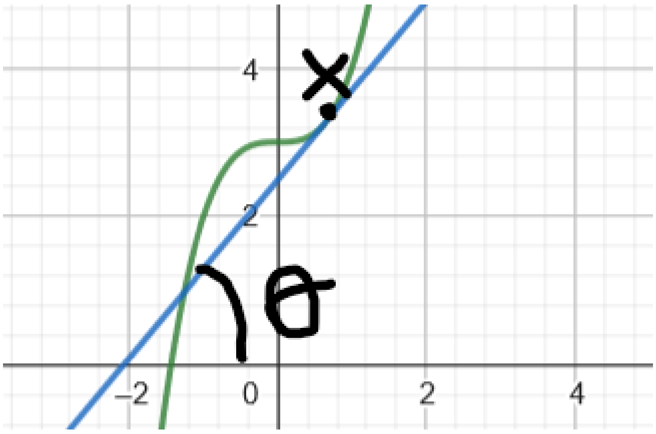
Crescita media = $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \tan(\theta)$

La tangente di θ è la retta passante tra i due punti.

Se facciamo tendere h a 0 abbiamo la crescita istantanea in un punto x.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = crescita istantanea = f'(x)

f'(x) è anch'essa la tangente di θ, che è l'angolo tra la retta limite e l'asse delle x.



Fissando un punto nel grafico $(x_0, f(x_0))$, la retta che passa per x e x_0 è detta retta limite e ha equazione:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

8.1-Punti di non derivabilità

f è derivabile in un intervallo A se $\forall x \in A \; \exists f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

8.1.1-Punto angoloso

x_0 è un punto angoloso se il limite destro e il limite sinistro sono diversi ma entrambi finiti.

$$\lim_{h \to x_0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \pm\infty \neq \lim_{h \to x_0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Esempio:

f(x) = |x|

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1 \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

f'(0) non esiste e 0 è un punto angoloso

8.1.2-Cuspide

x_0 è una cuspide se il limite destro e il limite sinistro sono diversi ma entrambi infiniti.

$$\lim_{h \to x_0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty \neq \lim_{h \to x_0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

8.1.3-Teorema

Se f è derivabile in x_0 allora è continua in quel punto.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \implies \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \implies \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \implies \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = 0 \implies f'(x_0) \cdot h = 0$

8.2-Algebra delle derivate

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

8.3-Derivate notevoli

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\sec(x)$	$\tan(x)\sec(x)$
$\csc(x)$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$-\cot(x)\csc(x)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\tan(x)\sec(x)$
$\frac{1}{\tan(x)}$	$-\csc^2(x)$
$\frac{1}{\sec(x)}$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{\csc(x)}$	$\cos(x)$
$\frac{1}{\cot(x)}$	$\sec^2(x)$
$\sin^n(x)$	$n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$
$\cos^n(x)$	$-n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$
$\tan^n(x)$	$n\sec^2(x)\tan^{n-1}(x)$
$e^{\sin(x)}$	$e^{\sin(x)}\cos(x)$
$e^{\cos(x)}$	$\sin(x)(-e^{\cos(x)})$
$e^{\tan(x)}$	$e^{\tan(x)}\sec^2(x)$
$\log(\sin(x))$	$\cot(x)$
$\log(\cos(x))$	$-\tan(x)$
$\log(\tan(x))$	$\csc(x)\sec(x)$
$\sin^x(x)$	$\sin^x(x)(x\cot(x)+\log(\sin(x)))$
$\cos^x(x)$	$\cos^x(x)(\log(\cos(x))-x\tan(x))$
$\cos^{\tan(x)}(x)$	$\cos^{\tan(x)}(x)(\sec^2(x)\log(\cos(x))-\tan^2(x))$

8.4-Definizioni

Massimo globale: M è il massimo globale di f se $\forall x \in A \implies f(x) \leq M = f(x_0) \implies x_0$ è punto di massimo globale

Minimo globale: m è il minimo globale di f se $\forall x \in A \implies f(x) \geq m = f(x_0) \implies x_0$ è punto di minimo globale

Massimo locale: M è un massimo locale di f in A se $\exists \delta > 0, x_0 \in D$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \leq f(x_0) = M \implies x_0$ è un punto di massimo locale

Minimo locale: m è un minimo locale di f in A se $\exists \delta > 0, x_0 \in D$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \geq f(x_0) = m \implies x_0$ è un punto di minimo locale

8.5-Teoremi

8.5.1-Teorema di Fermat

Se f è derivabile in (a,b) e $x_0 \in (a, b)$ è un punto estremale (massimo o minimo) allora $f'(x_0) = 0$.

Corollario:

Se f'(x) = 0 non è detto che x sia un punto estremante, ma se x è un punto estremante allora f'(x) = 0.

Dimostrazione:

x_0 è un punto di minimo locale quindi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) > f(x_0)$.

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

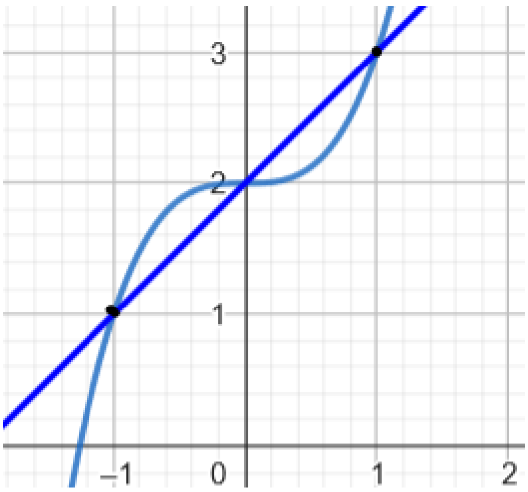
$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

Siccome x_0 è derivabile $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ non può essere diverso da $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \implies \lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0$

8.5.2-Teorema di Lagrange

Se f è continua e derivabile in (a,b) allora $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$= pendenza media

Dimostrazione:



La funzione che passa per (a,f(a)) e (b,f(b)) ha equazione:$y = f\left(a\right) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-a\right)$

$g\left(x\right) = f\left(x\right) - \left[f\left(a\right) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-a\right)\right]$

g(a) = 0

g(b) = 0

g è continua quindi g ha minimo e massimo in [a,b] per il Teorema di Weistrass

Se il massimo e il minimo sono interni e valgono $x_0 \in (a,b)$ allora $g'(x_0) = 0$ e $g'\left(x_0\right) = f'\left(x\right) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'\left(x_0\right) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Se max(g) e min(g) sono raggiunti agli estremi allora coincidono e g è costantemente uguale a 0

8.5.3-Teorema sulla monotonia

se f è crescente in (a,b) allora $f'(x_0) \geq 0$

se f è decrescente in (a,b) allora $f'(x0) \leq 0$

Dimostrazione:

Se f è crescente in (a,b) allora $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \implies f'\left(x_0\right) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$

Applichiamo lagrange quindi $\exists \overline{x} \in (x_1, x_2)\ \text{t.c.}\ f\left(\overline{x}\right) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Corollario:

se $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \implies f(x)$ è costante in (a,b)

8.5.4-Ricerca dei punti estremanti

f(x) in (a,b)

punto estremante: x_0 t.c. $f'(x_0) = 0$

Casi:

- se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un punto di massimo
- se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un punto di minimo
- se $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un punto di flesso ma non un punto estremante
- se $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ allora x_0 è un punto di flesso ma non un punto estremante

Esempio:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 4)$$

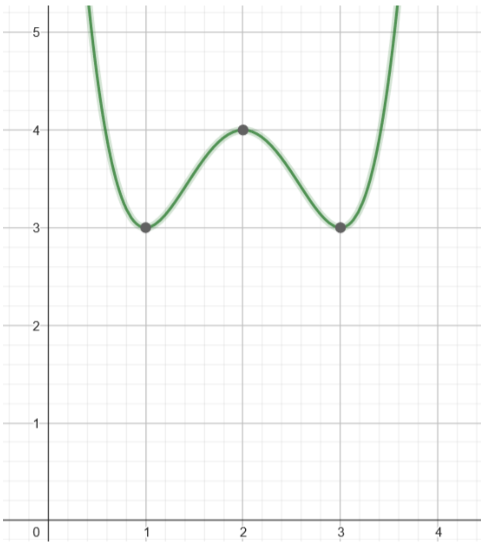
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$f'(x) = 0 \implies (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \implies x = 1, 2, 3$$

f(1) = 3

f(2) = 4

f(3) = 3



8.5.5-Teorema di De L'Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \implies \text{applichiamo lagrange} \implies$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \mathrm{sinx}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \mathrm{sinx}}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

8.6-Derivata seconda

f’’(x) = (f’(x))’

Interpretazione geometrica:

Quale è il semicerchio che approssima il grafico di f in x.

$$g\left(x\right)=r-\sqrt{\left(r^2-x^2\right)}\implies g''\left(x\right)=\left(r^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(r^2-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g\left(0\right)=0\implies g''\left(0\right)=\left(r^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}$$

$$f\left(0\right)=0=f'\left(0\right)\implies\frac{1}{r}=f''\left(0\right)$$

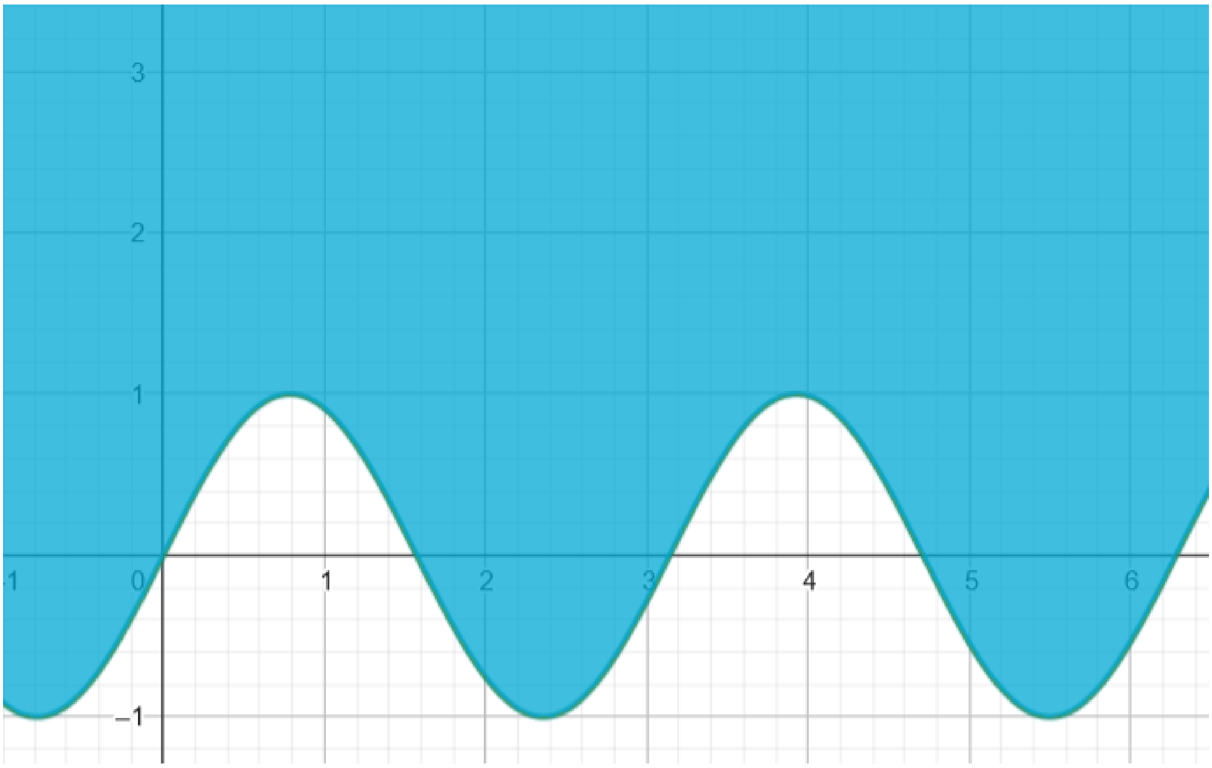
f’’(0) è la curvatura del grafico in 0, r è il raggio di curvatura.

In generale:

$\frac{1}{r(x)}=\frac{\left|f''(x)\right|}{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ è la curvatura del grafico in x

r(x) è il raggio di curvatura.

8.6.1-Concavità e convessità



> Epigrafico: parte del grafico sopra la funzione

Definizione:

f è convessa in A se $\forall x_1,\, x_2 \in A\ \forall t \in (0,1) \implies f(t \cdot x_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1)\ +\ (1-t)f(x_2)$

Cioè il grafico della funzione $\leq$ segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

f è concava in A se $\forall x_1,\, x_2 \in A\ \forall t \in (0,1) \implies f(t \cdot x_1 + (1-t)x_2) \geq t \cdot f(x_1)\ +\ (1-t)f(x_2)$

Cioè il grafico della funzione $\geq$ segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

8.6.2-Teoremi:

Se $f''(x)\ >\ 0\ \forall x \in A \implies f(x)$ è convessa e f'(x) è monotona crescente in A

Se $f''(x)\ <\ 0\ \forall x \in A \implies f(x)$ è concava e f'(x) è monotona decrescente in A

Se f è derivabile in (a, b):

- f è convessa se $\forall x_0 \in (a,b)$ la retta tangente a $(x_0, f(x_0))$ è sotto al grafico quindi $f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)\ +\ f(x_0)\ \forall x \in (a,b)$
- f è concava se$\forall x_0 \in (a,b)$ la retta tangente a $(x_0, f(x_0))$ è sopra al grafico quindi $f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0)\ +\ f(x_0)\ \forall x \in (a,b)$
- x_0 è un punto di flesso in cui cambia la concavità e $f''(x_0) = 0$ se f è convessa in (a, x_0) e concava in (x_0, b)

9-Studio di funzione

1. Trovare l'insieme di definizione (dominio)
2. Controllare se la funzione è pari o dispari
3. Controllare i punti in cui interseca gli assi
4. Calcolare i valori agli estremi del dominio (limiti e asintoti)
5. Vedere se ci sono punti di discontinuità o di non derivabilità
6. Calcolare la derivata prima e studio del segno
7. Determinare intervalli di monotonia e punti di massimo e minimo

8. Calcolare la derivata seconda e studio del segno
9. Determinare intervalli di concavità e convessità

9.1-Trovare la retta tangente a una funzione in un punto

$y = mx + q$ è la retta tangente a una funzione in un punto x_0 e si calcola:

$m = f'(x_0)$

$q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

9.2-Asintoto obliquo

$y = mx + q$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

$q = \lim_{x \to \infty} f(x) \ - \ mx$

10-Polinomio di Taylor

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

f è un "o piccolo" di g per $x \to x_0$

f(x) = o(g(x))

Il polinomio di Taylor è il polinomio che meglio approssima f(x) in x_0.

$f(x_0) = P(x_0)$

$f^k(x_0) = P^k(x_0)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(\frac{(x - x_0)^2}{2}) + ... + f^k(x_0)(\frac{(x - x_0)^k}{k!})$$

Teorema:

Se f è derivabile n volte in x_0 allora $f(x) \ = \ P(x) \ + \ [(x - x_0)^n]$ e

$f(x)$ = $P(x)$ + [$(x−x0)n$] e $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$

10.1-Resto di Lagrange

Se f è n+1 volte derivabile in x_0 allora $\exists c \in (x_0, x) \vee c \in (x, x_0)$ t.c. $f(x) = P(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

10.2-Metodo di Newton

Data una funzione f:

Risolvere $f(x_0) = 0$

$\exists a, b$ t.c. f è continua in [a,b]:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c$ t.c. $f(c) = 0$
2. f'(x) e f''(x) non cambiano segno in [a,b]

Caso 1:

$$f(a)f''(a) > 0 \implies \begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Caso 2:

$$f(b)f''(b) > 0 \implies \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Teorema:

$$x_n \to c \implies f(x_n) \to 0$$

11-Numeri complessi

I numeri complessi si scrivono secondo la formula:

z = a + bi

a è la parte reale = Re(z)

b è la parte immaginaria = Im(z)

Questi numeri si basano sul fatto che $i^2 = -1$

Numeri complessi utili:

Coniugato = $\overline{z}$ = a – bi

Modulo = |z| = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Inverso = $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - \mathrm{bi}}{a^2 + b^2}$

11.1.-Operazioni

Le operazioni si fanno considerando la i come una variabile ma ricordando che $i^2 = -1$.

Esempio:

Somma: 2 – 3i + 3 + 4i = 5 + i

Sottrazione: 3 – 9i – (2+ 5i) = 1 – 14i

Moltiplicazione: (2 + 3i)(4 – 2i) = 8 – 4i +12i – 6i^2 = 8 + 8i – 6(-1) = 14 + 8i

Divisione: $\frac{2+i}{5-i} = \frac{2+i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{10+2i+5i+i^2}{25-i^2} = \frac{10+7i-1}{25+1} = \frac{9}{26} + \frac{7i}{26}$

11.2-Equazioni con numeri complessi

Le equazioni con i numeri complessi del tipo $az^2 + bz + c = 0$ si risolvono comunque con la formula: $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\mathrm{ac}}}{2}$

Esempio:

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \implies z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^3 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$