Calcolo Differenziale

Simone Lidonnici

27 marzo 2024

Indice

1

Equazioni e Disequazioni

1.1 Primo grado

1.1.1 Equazioni

Equazione di una Retta

Una retta sul piano ha equazione di forma:

$$y = mx + q$$

Preso un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ possiamo calcolare m usando la formula:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = mx + m(y_1 - x_1)$$

m è anche uguale a $\tan(\theta)$ dove θ è l'angolo tra la retta e l'asse x.

Per risolvere un'equazione di primo grado:

$$y = mx + q \implies mx + q - y = 0 \implies x = -\frac{q - y}{a}$$

1.1.2 Disequazioni

Per risolvere invece una disequazione della forma:

$$ax + b \geq 0$$

dobbiamo distinguere due casi:

- Se $a > 0 \implies x \geq -\frac{b}{a}$
- Se $a < 0 \implies x \leq -\frac{b}{a}$

1.2 Secondo grado

1.2.1 Equazioni

Equazione di una parabola

Un'equazione di una parabola ha forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Per risolverla dobbiamo calcolare il determinante Δ tramite la formula quadratica:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In base ai 3 valori possibili del Δ la soluzione dell'equazione si trova in modo diverso:

- Se $\Delta > 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0 \implies x = \frac{-b}{2a}$
- Se $\Delta < 0 \implies$ non ci sono soluzioni

1.3 Modulo

Definizione di modulo

Il modulo, scritto $|x|$ indica la distanza di x dallo 0. Il modulo è uguale:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Il modulo ha una proprietà rispetto alla moltiplicazione:

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

Le disequazioni con il modulo si risolvono:

- $|x| \leq a \implies -a \leq x \leq a \implies x \in [-a, a]$
- $|x| \geq a \implies x \leq -a \vee x \geq a \implies x \in [-\infty, -a] \cup [a, \infty]$

Esempio:

$$|x-2| - 3 \leq 0 \implies |x-2| \leq -3 \implies -3 \leq x - 2 \leq 3 \implies -1 \leq x \leq 5$$

Disuguaglianza triangolare

La disuguaglianza triangolare dice che:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} -|x| < x < |x| \\ -|y| < y < |y| \end{cases} \implies -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \implies |x + y| \leq |x| + |y|$$

2

Applicazioni

Definizione di Applicazione

Le applicazioni associano ad ogni elemento di un insieme di partenza A un elemento dell'insieme di arrivo B.

$$f : \text{applicazione} \implies \forall a \in A \; \exists f(a) = b \in B$$

$f(b)$ si dice **Immagine** di b.

2.1 Tipi di applicazioni

Applicazioni iniettive

Un'applicazione è **iniettiva** quando non esisto due elementi distinti nell'insieme di partenza che hanno come immagine lo stesso elemento nell'insieme di arrivo.

$$\forall a_1, a_2 \in A \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Esempi:
$f(x) = x^2$ non è iniettiva perché $f(2) = f(-2) = 4$
$f(x) = x + 3$ è iniettiva

Applicazioni suriettive

Un'applicazione è **suriettiva** quando ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di almeno un elemento dell'insieme di partenza.

$$\forall b \in B \implies \exists a \in A | f(a) = b$$

Applicazioni biettive

Un'applicazione è biettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

3

Insiemi numerici

Naturali: $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ è un insieme creato considerando la classe degli insiemi che sono in biezione tra loro, questo ci permette di creare i numeri interi considerandone la cardinalità:

- $A = \emptyset \implies 0$ elementi
- $A = \{\emptyset\} \approx \{0\} \implies 1$ elementi
- $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \approx \{0, 1\} \implies 2$ elementi

$\approx$ significa che sono in biezione.

Interi: $\mathbb{Z}$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri tali che $-n + n = 0$.

Razionali: $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \{..., \frac{7}{10}, \frac{25}{2}, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri nella forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Reali: $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R} = \{.\pi, \sqrt{3}, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri che non si possono scrivere nella forma $\frac{p}{q}$.

3.1 Estremi di un insieme

Limitato

Un insieme A si dice **limitato superiormente** se:

$$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in A \; y < x$$

Un insieme A si dice **limitato inferiormente** se:

$$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in A \; y > x$$

Un insieme A si dice **limitato** se lo è sia superiormente che inferiormente.

Massimo e Minimo

Un insieme A limitato superiormente ha **massimo** se:

$$\exists x_{max} \in A | \forall y \in A \; y < x_{max}$$

Un insieme A limitato inferiormente ha **minimo** se:

$$\exists x_{min} \in A | \forall y \in A \; y > x_{min}$$

Maggioranti e Minoranti

Un **maggiorante** di un insieme A è un valore z tale che:

$$\forall y \in A \; y < z$$

Un **minorante** di un insieme A è un valore z tale che:

$$\forall y \in A \; y > z$$

Estremo superiore e inferiore

L'**estremo superiore** sup_A di un insieme A è il minimo dei maggioranti, in caso esista x_{max} allora $sup_A = x_{max}$, nel caso in cui A non sia limitato superiormente allora $sup_A = \infty$.
L'**estremo inferiore** inf_A di un insieme A è il massimo dei minoranti, in caso esista x_{min} allora $inf_A = x_{min}$, nel caso in cui A non sia limitato inferiormente allora $inf_A = -\infty$.

Esempio:
$A = [0, 1)$
x_{max} non esiste, ma $sup_A = 1$
$x_{min} = 0 = inf_A$

4

Funzioni elementari

4.1 Radicali

Unicità dei radicali

Per ogni valore y in $\mathbb{R}^+$ esiste un solo numero che elevato alla n fa y:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \ \exists! x \in \mathbb{R}^+ | x^n = y$$

Da questo possiamo dire anche che:
$x^n = y \implies x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{x}}$
$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

4.2 Logaritmi

Definizione di logaritmo

Un **logaritmo** è una funzione che dato un numero y e una base a calcola il valore x tale che $a^x = y$:

$$\log_a y = x \implies y = a^x$$

Anche per i logaritmi esiste il teorema di unicità cioè:

$$\forall a, y > 0, a \neq 1 \ \exists! x \in \mathbb{R} | a^x = y$$

Da questo possiamo dire anche che:
$a^{\log_a y} = y$

I logaritmi hanno diverse proprietà:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$

4.3 Sommatoria

Definizione di logaritmo

Una **sommatoria** è una funzione che dato un indice i e uno finale n somma tutti i valori dipendenti da questo insieme di indici:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

In una sommatoria è possibile variare il valore di questi indici modificando il contenuto della sommatoria, ad esempio:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

Esempi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

4.3.1 Coefficiente binomiale

Definizione di coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale** tra due numeri n e k è un valore:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Dove $n!$ è un fattoriale cioè:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 = \prod_{i=1}^{n} i$$

5

Funzioni reali

5.1 Funzioni reali a variabili reali

Definizione di funzione reale

Una **funzione reale** è una funzione che ha come insieme di partenza e arrivo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, cioè della forma:

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies x \in I \to f(x) \in \mathbb{R}$$

L'insieme dei punti di R^2 definiti come $(x, f(x))\forall x \in I$ si dice **grafico** della funzione f.

5.2 Proprietà delle funzioni reali

Limiti delle funzioni

Una funzione è **limitata superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R}|f(x) \leq M\forall x \in I$.
Una funzione è **limitata inferiormente** se $\exists N \in \mathbb{R}|f(x) \geq N\forall x \in I$.
Una funzione è **limitata** se lo è sia inferiormente che superiore.

Proprietà di simmetria

Una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con insieme I simmetrico rispetto all'origine cioè $x \in I \implies -x \in I$, è:

- f è **pari** se $\forall x \in I f(x) = f(-x)$, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'asse y
- f è **dispari** se $\forall x \in I f(-x) = -f(x)$, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'origine

5.3 Funzioni monotone

Definizione di funzione monotona

Una funzione f è **monotona** in un intervallo I se in quell'inervallo il grafico ha sempre lo stesso andamento (sale solo o scende solo), più precisamente è:

- **Monotona crescente** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ se $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- **Monotona decrescente** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ se $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Esempio:
$f(x) = x^2$
monotona crescente in $[0, \infty)$
monotona descrescente in $(-\infty, 0]$

5.4 Funzioni periodiche

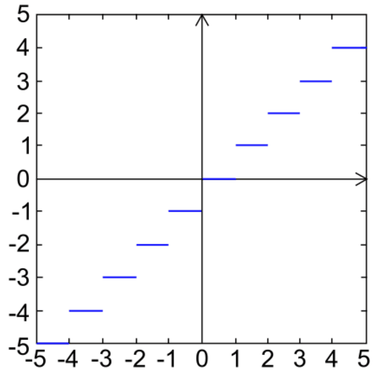
Una funzione f è periodica di periodo T se $\forall x \in I, k \in \mathbb{Z} f(x + kT) = f(x)$.
Esempi:
$f(x) = \sin(x)$ è 2π periodica
$f(x) = \tan(x)$ è 2π periodica

Parte intera di x

La funzione **parte intera di** x, scritta $[x]$ è la funzione:

$$f(x) = [x] = n \in \mathbb{Z} | n \leq x \wedge n + 1 \geq x$$

Grafico:



5.5 Composizione di funzioni

Comporre due funzioni

Una composizione di funzioni f e g, scritta $f \circ g$ è una funzione $h(x) = f(g(x))$. Per poter fare una composizione di funzioni è necessario che:

- $Im(g) = y \in \mathbb{R} | \exists x \in Dom(g) | g(x) = y$
- $Im(g) \subseteq Dom(f)$

La funzione neutra rispetto alla composizione è $Id(x) = x$.

Esempio:
$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$
$f \circ g = \sin(\dfrac{1}{x^2})$
$g \circ f = \dfrac{1}{\sin(x)^2}$

5.5.1 Funzione inversa

Definizione di funzione inversa

Data una funzione f, la **funzione inversa** rispetto ad f è la funzione, scritta come $f^{-1}(x)$ che composta con f da come risultato x, cioè:

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = x \; \forall x \in Dom(f)$$
$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = x \; \forall x \in Dom(f)$$

La funzione inversa esiste solo se f è iniettiva.

Esempio:
$f(x) = x^2$
$Dom(f) = [0, \infty) \implies$ restringiamo il dominio per renderla iniettiva
$f^{-1} = \sqrt{x}$

5.6 Operazioni su grafici

Preso il grafco di una funzione $f(x)$ possiamo modificare il grafico in diversi modi:

- $g(x) = f(x + h)$ in questo caso:
  - se $h > 0$ il grafico si sposta a sinistra
  - se $h < 0$ il grafico si sposta a destra
- $g(x) = f(x) + k$ in questo caso:
  - se $k > 0$ il grafico si sposta in alto
  - se $k < 0$ il grafico si sposta in basso
- $g(x) = -f(x)$ in questo caso:
  - la funzione si ribalta verticalmente

6

Successioni

Definizione di successione

Una **successione** è una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = a_n$$

Esempi:
$a_n = \frac{1}{n} \implies a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, ...$
Successione di Erone:
$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$
$a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{17}{12}, a_3 = \sqrt{2}$

6.1 Limiti

Definizione di limite

Una successione si dice che **converge** a $l \in \mathbb{R}$ o che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \mathbb{N} = n(\epsilon) | \forall n \geq \mathbb{N} \implies |a_n - l| \leq \epsilon$$

Successioni divergenti

Una successione a_n si dice **diverge** a ∞ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se:

$$\forall M > 0\ \exists N = N(M) | \forall n > N \implies a_n \geq M$$

Una successione a_n si dice **diverge** a $-\infty$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se:

$$\forall M > 0\ \exists N = N(M) | \forall n > N \implies a_n \leq M$$

Esempi:
$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \implies \forall M > 0\ \exists \mathbb{N} = \sqrt{M} | \forall n > \sqrt{M} \implies a_n \geq M$
$\lim_{n\to\infty} (-2)^n \neq \infty \neq -\infty$

6.2 Successioni monotone

Teorema sulle successioni monotone

Data una successione monotona a_n e esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$:

- se è una successione limitata $\lim_{n\to\infty} = l \in \mathbb{R}$
- se è una successione non limitata:
  - $\lim_{n\to\infty} = \infty$ se è monotona crescente
  - $\lim_{n\to\infty} = \infty$ se è monotona decrescente

7

Limiti