Calcolo delle Probabilità

- 1-Modello probabilistico
  - 1.1-Spazio eventi elementari
  - 1.2-Algebra degli eventi
  - 1.3-Probabilità
  - 1.4-Conseguenze degli assiomi
  - 1.5-Come costruire P
  - 1.6-Esempio finale
- 2-Calcolo combinatorio
  - 2.1-Principio fondamentale
  - 2.2-Permutazioni
  - 2.3-Coefficiente binomiale
  - 2.4-Multinomio
  - 2.5-Principio di inclusione esclusione
- 3-Modelli di estrazione da urna
  - 3.1-Estrazioni ordinate con rimpiazzo
  - 3.2-Estrazioni ordinate senza rimpiazzo
  - 3.3-Estrazioni non ordinate senza rimpiazzo
  - 3.4-Estrazioni non ordinate con rimpiazzo
- 4-Probabilità particolari
  - 4.1-Probabilità con valori tendenti ad infinito
  - 4.2-Spazi di probabilità prodotto
  - 4.3-Indipendenza
  - 4.4-Schema di Bernoulli
  - 4.5-Probabilità condizionata
  - 4.6-Probabilità totali
    - 4.6.1-Formula di Bayes
  - 4.7-Problema della rovina del giocatore
- 5-Variabili aleatorie
  - 5.1-Valore atteso
    - 5.1.1-Valore di attesa condizionato
  - 5.2-Varianza
  - 5.3-Variabili aleatorie indipendenti
    - 5.3.1-Somma di variabili aleatorie indipendenti
  - 5.4-Covarianza
  - 5.5-Distribuzione congiunta di variabili aleatorie
  - 5.6-Funzione di distribuzione
- 6-Variabili aleatorie celebri
  - 6.1-Variabile aleatoria certa
  - 6.2-Variabile aleatoria di Bernoulli
  - 6.3-Variabile aleatoria binomiale
  - 6.4-Variabile aleatoria geometrica
    - 6.4.1-Funzione di sopravvivenza
    - 6.4.2-Perdita di memoria
  - 6.5-Variabile aleatoria binomiale negativa
  - 6.6-Variabile aleatoria di Poisson
    - 6.6.1-Variabili indipendenti di Poisson
    - 6.6.2-Aprossimazione della binomiale tramite Poisson
  - 6.7-Variabile aleatoria multinomiale
- 7-Variabili aleatorie continue
  - 7.1-Densità di probabilità
    - 7.1.1-Condizione di normalizzazione
  - 7.2-Valore di attesa
  - 7.3-Varianza
  - 7.4-Somma di variabili aleatorie continue indipendenti
  - 7.5-Funzione di distribuzione per variabili aleatorie continue
    - 7.5.1-Funzione distribuzione per variabili uniformi

7.6-Calcolare la densità di variabile derivata da un'altra
7.7-Variabile aleatoria Gaussiana
7.7.1-Standardizzazione
7.7.2-Tavola integrale Gaussiano
8-Leggi varie sulle probabilità
8.1-Gioco equo
8.2-Legge dei grandi numeri
8.3-Teorema limite centrale
8.3.1-Applicazione del teorema
8.4-Simulare una variabile aleatoria arbitraria
8.5-Catene di Markov
8.5.1-Con punto di partenza noto
8.5.2-Con punto di partenza casuale
8.5.3-Probabilità stazionaria
8.5.4-Teorema ergodico per catene di Markov
8.5.4-Bilancio dettagliato
8.5.5-Montecarlo con catene di Markov

1-Modello probabilistico

Un modello probabilistico è formato da 3 cose:

- Spazio eventi elementari: Ω
- Algebra degli eventi: $\mathcal{A}$
- Probabilità: P

1.1-Spazio eventi elementari

Lo spazio eventi elementari o spazio campionario sono tutti i possibili risultati dell'esperimento e si indica con Ω.

$|\Omega|$= cardinalità dell'insieme, cioè numero di casi possibili

Esempi:

Lancio di una moneta: $\Omega = \{T, C\}$

Lancio di un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Compleanno di 25 persone: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{25}) \text{ con } \omega \in [1, 365]\}$

1.2-Algebra degli eventi

L'algebra degli eventi è una domanda binaria(con risposta solo vero o falso) sull'esito dell'esperimento. L'evento è un sottoinsieme di Ω e si indica con una lettera maiuscola.

$A \subset \Omega$

🔖 Dati $A, B \subset \Omega$ eventi:

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$
- $A^C (\text{complementare di A}) = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$

L'insieme di tutti gli eventi si indica con $\mathcal{A}$.

Esempi:

Lancio di una moneta: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$

Lancio di un dado a 4 facce:
$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2,$

1.3-Probabilità

La probabilità è una funzione che associa ad ogni evento $A \in \mathcal{A}$ un numero tra 0 e 1 che indica la probabilità di verificarsi dell'evento.

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

La funzione P deve seguire delle condizioni:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^C)$
- P è una funzione additiva

1.4-Conseguenze degli assiomi

Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono eventi disgiunti allora $A \cap B = \emptyset$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono eventi non disgiunti allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P è una funzione monotona rispetto all'inclusione di insiemi cioè se $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

1.5-Come costruire P

Dato uno spazio degli eventi Ω, scelgo $\mathcal{A}$ algebra di tutti i sottoinsiemi di Ω:

Per costruire P basta conoscere la probabilità degli eventi elementari.

Sia:

$$p : \Omega \to [0, 1] | \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Definisco:

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1] | P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

$p(w) = P(\{\omega\})$ con $\omega \in \Omega$

Se la probabilità degli eventi elementari è uniforme allora $p(\omega) = \text{cost.} = \frac{1}{|\Omega|}$ e $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Esempio:

Dado truccato

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(1) = p(2) = p(3) = 0.1$

$p(4) = p(5) = 0.2$

$p(6) = 0.3$

$P(\{3, 4\}) = 0.1 + 0.2$

1.6-Esempio finale

3 palle bianche e 2 palle nere, quale è la probabilità che la seconda estratta sia banca?

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1, \omega_2 \in [1, 5] \wedge \omega_1 \neq \omega_2\}$

$\Omega = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,1\},$
$\{3,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}\}$

$|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$

$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_2 \in [1,3]\}$
$A = \{\text{II}^\circ \text{ estratto bianco}\} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$
$|A| = 3 \cdot 4 = 12$
Probabilità uniforme $\implies P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{20}$

2-Calcolo combinatorio

2.1-Principio fondamentale

🔖 Dati 2 insiemi finiti non vuoti A e B si possono formare $|A| \cdot |B|$ coppie ordinate prendendo un elemento da A e uno da B.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Con k insiemi con la stessa cardinalità n:

$$|A \times ... \times Z| = n^k$$

Esempi:

k scatole e r palline, quanti modi ho di sistemare le palline nelle scatole?
$\forall i \in [1,r]\ \omega_i = \{\text{scatola dove sta la pallina i}\} = [1,k]$
modi di sistemare le palline = k^r

Lancio un dado 6 volte, quanto è la probabilità di almeno un 6?
$P(\text{almeno un } 6) = 1 - P(\text{almeno un } 6)^C = 1 - P(\text{nessun } 6)$
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_6) | \omega_i \in [1,6]\}$
$|\Omega| = 6^6$
$A = \{\text{nessun } 6\} = \{\omega \in \Omega | \omega_i \in [1,5], i \in [1,6]\}$
$|A| = 5^6$

2.2-Permutazioni

🔖 Sia S un insieme finito non vuoto, una permutazione è una scelta di un ordine tra gli elementi. Se $|S| = n$:

$$\varphi : S \to [1,n]$$

Il numero di permutazioni di S:

$$P_n = n!$$

Se ci sono delle ripetizioni $r_1, r_2, ..., r_k$ allora il numero delle permutazioni di S:

$$P_n = \frac{n!}{r_1! \cdot ... \cdot r_k!}$$

Esempio:

Numero di anagrammi della parola pippo
$P_n = \frac{n!}{r!} = \frac{5!}{3!}$

2.3-Coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale sono i modi di scegliere k oggetti su n totali non considerando l'ordine:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Teorema:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

2.4-Multinomio

Dati n elementi distinti che vanno divisi in k parti, ciascuna con $n_1, ..., n_k$ elementi, quindi tali che:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

I modi di dividerle sono:

$$\binom{n}{n_1, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot ... \cdot n_k!}$$

2.5-Principio di inclusione esclusione

Per trovare la probabilità dell'unione di due insiemi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Nel caso in cui dobbiamo trovare la probabilità dell'unione di n insiemi

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le j_1 < ... < j_i \le n} \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k}$$

Detto in modo più semplice dobbiamo sommare la probabilità degli insiemi singoli, sottrarre tutte le probabilità delle intersezioni di n insiemi in cui n è pari e aggiungere tutte le probabilità delle intersezioni di n insiemi in cui n è dispari.

3-Modelli di estrazione da urna

Ci sono diversi tipi di estrazione da urna:

1. Estrazioni ordinate con rimpiazzo
2. Estrazioni ordinate senza rimpiazzo
3. Estrazioni non ordinate senza rimpiazzo
4. Estrazioni non ordinate con rimpiazzo

3.1-Estrazioni ordinate con rimpiazzo

Date k estrazioni di n palline in cui conta l'ordine e rimettendo dentro le palline:

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_k) | \omega_i \in [1, n]\}$$

La cardinalità dell'insieme Ω:

3.2-Estrazioni ordinate senza rimpiazzo

Date k estrazioni di n palline in cui conta l'ordine e senza rimettere dentro le palline con $k \leq n$:

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_k) | \omega_i \in [1, n], \omega_i \neq \omega_j\}$$

La cardinalità dell'insieme Ω:

$$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio:

In un palazzo con 10 piani, 7 persone in ascensore, quale è la probabilità che scendano tutti a piani diversi?

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_7) | \omega_i \in [1, 10]\}$

$|\Omega| = 10^7$

$A = \{\text{scendono tutti a piani diversi}\} = \{\omega \in \Omega | \omega_i \neq \omega_j\}$

$|A| = \frac{10!}{(10-7)!}$

$P(A) = \frac{\frac{10!}{3!}}{10^7}$

3.3-Estrazioni non ordinate senza rimpiazzo

Date k estrazioni di n palline in cui non conta l'ordine e senza rimettere dentro le palline con $k \leq n$:

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_k) | i < j \implies \omega_i < \omega_j\}$$

La cardinalità dell'insieme Ω:

$$|\Omega| = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Esempi:

Disponiamo 10 palline in 4 scatole, calcolare la probabilità che nella scatola A ci siano 5 palline?

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_{10}) | \omega_i = [1, 4]\}$

$|\Omega| = 4^{10}$

$A = \{\omega \in \Omega | j = \{w_i = 1\} | |j| = 5\}$

$|A| = \binom{10}{5} \cdot 3^5$

$P = \frac{|\Omega|}{|A|} = \frac{4^{10}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}}$

Abbiamo 40 carte divise in 4 semi ognuno con carte da 1 a 10, 4 giocatori ricevono a testa 10 carte:

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_{10}) | \omega_i \neq \omega_j \wedge \omega_i \in [1, 40]\}$

$|\Omega| = \binom{40}{10}$

1-Quale è la probabilità io che abbia tutte le carte di denari?

$A = \{(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)\}$

$|A| = 1$

$P(A) = \frac{1}{\binom{10}{40}}$

2-Quale è la probabilità che io riceva il 7 di denari?

$A = \{\omega \in \Omega | (7, \omega_2, ..., \omega_{10})\}$

$|A| = \binom{39}{9}$

$P(A) = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = \frac{1}{4}$

3-Quale è la probabilità che io riceva tutti e 4 i 7?

$A = \{\omega \in \Omega | (7, 17, 27, 37, \omega_5, ..., \omega_{10})\}$

$|A| = \binom{36}{6}$

$P(A) = \frac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{10}}$

4-Quale è la probabilità che io riceva un solo 7?

$|A| = \binom{4}{1}\binom{36}{9}$

$P(A) = \frac{\binom{36}{9}}{\binom{40}{10}}$

5-Quale è la probabilità che i 4 giocatori ricevano un 7 a testa?

Descrivo i 4 giocatori con N,E,S e O.

$\Omega = \{(\omega_1^N, ..., \omega_{10}^N), (\omega_1^E, ..., \omega_{10}^E), (\omega_1^S, ..., \omega_{10}^S), (\omega_1^O, ..., \omega_{10}^O) | \omega_i \neq \omega_j \wedge \omega_i \in [1, 40]\}$

$|\Omega| = \binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$

$$A = \begin{Bmatrix} \text{N ha un 7} \\ \text{E ha un 7} \\ \text{S ha un 7} \\ \text{O ha un 7} \end{Bmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{\binom{4}{1}\binom{36}{9}}_{N} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}\binom{27}{9}}_{E} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}\binom{18}{9}}_{S} \cdot \underbrace{\binom{1}{1}\binom{9}{9}}_{O}$$

3.4-Estrazioni non ordinate con rimpiazzo

Se ho due eventi concatenati ma indistinguibili come il lancio di due dadi:

La cardinalità di Ω considerando n il numero di esiti possibili di un singolo evento:

$$|\Omega| = \frac{n^2 + n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Nel caso in cui ci siano k eventi concatenati, come k lanci di dadi o k estrazioni, con n esiti possibili la cardinalità di Ω:

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

Esempi:

Lancio di due dadi

$|\Omega| = \frac{6^2+6}{2} = \frac{42}{2} = 21 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \binom{7}{2}$

Lancio di 10 dadi

$|\Omega| = \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6}$

4-Probabilità particolari

4.1-Probabilità con valori tendenti ad infinito

La probabilità di una permutazione di n elementi con n tendente ad infinito:

$$\lim_{n\to\infty} P\begin{pmatrix}\text{presa una permutazione a caso tra quelle} \\ \text{possibili essa non abbia punti fissi}\end{pmatrix} = \frac{1}{e}$$

Esempio:

Ad una festa ci sono n invitati, ognuno con un ombrello, quale è la probabilità che al termine della festa riprendendo gli ombrelli a caso nessuno riprenda il proprio ombrello?

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n) | \omega_i \neq \omega_j \wedge \omega_i \in [1, n]\}$

$|\Omega| = n!$

$A = \{\omega \in \Omega | (\omega_1, ..., \omega_n) | \omega_i \neq i \ \forall i\}$

$P(A) = 1 - P(B)$

$B = \{\omega \in \Omega | \exists i | \omega_i = i\}$

$B_1 = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = 1\}$

$|B_1| = (n-1)! \implies P(B_1) = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$P(B_1 \cap ... \cap B_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$

$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$

$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$

$\lim_{n\to\infty} P(A) = \frac{1}{e}$

4.2-Spazi di probabilità prodotto

🔖 Siano (Ω_1, P_1) e (Ω_2, P_2) degli schemi probabilistici, lo spazio degli eventi elementari dei due eventi concatenati:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_i \in \Omega_i\}$$

Se gli eventi non si influenzano a vicenda la probabilità di una coppia di esiti è:

$$\begin{aligned} P(\{\omega\}) &= P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\}) \cdot P_2(\{\omega_2\}) \\ P(A \cap B) &= P_1(A) \cdot P_2(B) \qquad A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2 \end{aligned}$$

La somma delle probabilità di tutte le coppie di esiti deve sempre fare 1:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} P_1(\{\omega_1\}) \cdot \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} P_2(\{\omega_2\}) = 1$$

Se le probabilità P_1 e P_2 sono uniformi la probabilità prodotto:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega_1 \times \Omega_2|}$$

Esempio:

Lancio due dadi

$A = \{\text{somma} = 7\}$

$B = \{1^\circ \text{ dado} = 5\}$

Questi sono eventi indipendenti perché qualsiasi sia il risultato del primo dado si può sempre arrivare a 7 con il secondo dado.

4.3-Indipendenza

🔖 Un numero n di eventi $A_1, A_2, ..., A_n \subset \Omega$ sono indipendenti se:

1. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$
2. $\forall k | 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n \implies P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_k})$

4.4-Schema di Bernoulli

Preso un esperimento binario(cioè con solo due esiti, non necessariamente equiprobabili) ripetuto n volte:

$$\Omega = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1\}}_{\text{n volte}} = \{0,1\}^n$$

La probabilità dei due esiti si identifica:

$$P(\{1\}) = p$$
$$P(\{0\}) = 1 - p$$

$p \in [0,1]$ misura la non equiprobabilità degli esiti

La probabilità di n esiti concatenati:

Lo schema di Bernoulli viene definito con una coppia (n, p).

La probabilità che su n esiti k siano positivi(quindi n-k negativi):

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4.5-Probabilità condizionata

Dato uno schema probabilistico (Ω, P) e due eventi A, B la probabilità che si verifichi B sapendo che si è già verificato A:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se la probabilità è uniforme:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Dati k eventi $A_1, A_2, ..., A_k$ la probabilità che accadano tutti, ognuno dando per scontato il precedente:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_k|A_1 \cap ... \cap A_{k-1})$$
$$P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1 \cap ... \cap A_k)$$

In generale se fisso A come evento condizionante e considero la funzione:

$$B \to P(B|A)$$

Questa funzione è una probabilità sullo spazio di probabilità A.

Se P è una probabilità uniforme allora anche $P(B|A)$ è una probabilità uniforme su A.

Esempi:

Estraggo 2 palline da un'urna contenente 3 palle bianche e 2 nere, quale è la probabilità che la seconda sia bianca nel caso in cui la prima sia bianca e nel caso in cui la prima sia nera?

$P(2^\circ B|1^\circ B) = \frac{P(BB)}{P(1^\circ B)} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{1}{2}$

$P(2^\circ B|1^\circ N) = \frac{P(BB)}{P(1^\circ N)} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{3}{4}$

In un mazzo di 40 carte se ne danno 10 a testa tra 4 giocatori, quale è la probabilità che E e O abbiano uno 2 denari e l'altro 1 sapendo che N+S hanno 7 denari?

$P = 2\frac{\binom{3}{2}\binom{17}{8}}{\binom{20}{10}} = 2\frac{\binom{3}{1}\binom{17}{9}}{\binom{20}{10}}$

4.6-Probabilità totali

> 🔖 Dato uno schema probabilistico (Ω, P) con k partizioni $D_1, D_2, ..., D_k$:
>
> $$\Omega = \{\bigcup_{i=1}^{k} D_i | D_i \cap D_j = \emptyset\}$$
>
> La probabilità di un evento A condizionato dagli eventi D_i:
>
> $$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(D_i)P(A|D_i)$$

Esempio:

Lancio una moneta e in base al risultato $\begin{cases} T \implies \text{estrazione con 2B e 3N} \\ C \implies \text{estrazione con 1B e 2N} \end{cases}$, quale è la probabilità che esca una pallina bianca?

$P(B) = P(T) \cdot P(B|T) + P(C) \cdot P(B|C) = \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{11}{30}$

4.6.1-Formula di Bayes

> 🔖 Dato uno schema probabilistico (Ω, P) con k partizioni $D_1, D_2, ..., D_k$:
>
> $$\Omega = \{\bigcup_{i=1}^{k} D_i | D_i \cap D_j = \emptyset\}$$
>
> La probabilità di un preciso D_i dato l'esito dell'evento A condizionato dagli eventi D_i:
>
> $$P(D_i|A) = \frac{P(D_i)P(A|D_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(D_j)P(A|D_j)}$$

Esempio:

Lancio una moneta e in base al risultato $\begin{cases} T \implies \text{estrazione con 2B e 3N} \\ C \implies \text{estrazione con 1B e 2N} \end{cases}$, sapendo che è uscita una pallina bianca quale è la probabilità che sia uscito testa?

$P(T|B) = \frac{P(T \cap B)}{P(B)} = \frac{P(T)P(B|T)}{P(T)P(B|T)+P(C)P(B|C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{6}{11}$

4.7-Problema della rovina del giocatore

Dati due giocatori A, B con capitali iniziali a, b che giocano ad un gioco binario finchè uno dei due non finisce i soldi, in cui:

- A vince con probabilità p
- B vince con probabilità $1-p$

Chiamo S_n la somma che A ha vinto a B nei primi n lanci in cui:

$S_0 = 0$

$S_1 = \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{con prob } 1-p \end{cases}$

$S_{n+1} = S_n + \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{con prob } 1-p \end{cases}$

$S_n = \begin{cases} b \implies \text{rovina di B} \\ -a \implies \text{rovina di A} \end{cases}$

Chiamo rispettivamente $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ la probabilità che A e B perdano tutti i soldi nel momento in cui $S_n = x$.

Se le probabilità sono eque quindi $p = \frac{1}{2}$:

$$\alpha(x) = \frac{x+a}{a+b} \implies \alpha(0) = \frac{a}{a+b}$$
$$\beta(x) = \frac{x+b}{a+b} \implies \beta(0) = \frac{b}{a+b}$$

Se le probabilità non sono eque quindi $p \neq \frac{1}{2}$:

$$\alpha(x) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{x+b}}{1-(\frac{1-p}{p})^{b+a}} \implies \alpha(0) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{b}}{1-(\frac{1-p}{p})^{b+a}}$$
$$\beta(x) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{x+a}}{1-(\frac{1-p}{p})^{b+a}} \implies \beta(0) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{a}}{1-(\frac{1-p}{p})^{b+a}}$$

Visto che $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ la probabilità che il gioco duri all'infinito è 0.

5-Variabili aleatorie

Dato uno schema probabilistico (Ω, P) una variabile aleatoria X è una funzione su Ω a valori reali:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$X = \begin{cases} x_1 & \omega_1 = ... \\ ... \\ x_n & \omega_n = ... \end{cases}$$
$$Im(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$$

La probabilità P induce una probabilità μ_X su $Im(X)$ mediante(distribuzione):

$$\mu_X(\{\omega\}) = P(x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) = x)$$
$$\mu_X = P \circ X^{-1}$$

Nel caso di probabilità uniforme la distribuzione di X:

$$P(X = x) = \frac{|X = x|}{|\Omega|}$$

Preso un insieme $B \subset \mathbb{R}$:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \subset B\}$$

Esempi:

Variabile aleatoria binomiale

Facciamo n lanci di moneta in cui $p = P(T)$

$X = \text{numero di teste}$

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n) | \omega_i = [0, 1]\}$

$X(\omega) = \text{numero di 1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$

$Im(X) = \{0, 1, ..., n\}$

$\mu(\{k\}) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

5.1-Valore atteso

Data una variabile aleatoria X, il valore atteso, cioè la media del valore x:

$$E(X) = \sum_{x \in Im(X)} x P(x)$$

Il valore atteso è lineare cioè:

$$E(\alpha X) = \alpha E(X)$$

Prese due variabili aleatorie indipendenti X, Y:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Esempio:

$$X = \begin{cases} -1 & \omega = 1,2 \\ 0 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4 \\ 2 & \omega = 5,6 \end{cases}$$

Valore atteso:

$-1\frac{2}{6} + 0\frac{1}{6} + 1\frac{1}{6} + 2\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

5.1.1-Valore di attesa condizionato

Date due variabili aleatorie X, Y non indipendenti tra loro la probabilità condizionata:

$$P(y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Il valore di attesa condizionato è il valore di attesa calcolato usando la distribuzione condizionata:

$$E(Y|X = x) = \sum_{y \in Im(Y)} yP(y|X = x)$$

5.2-Varianza

Data una variabile aleatoria X, la varianza:

$$V(X) = \sum_{x \in Im(X)} [x - E(X)]^2 P(x)$$

Se $V(X) = 0$ allora X è costante.

Esempio:

$$X = \begin{cases} -3 & \omega = 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{cases}$$

$V(X) = [-3 - 0]^2 P(-3) + ... + [3 - 0]^2 P(3) = \frac{1}{6}((-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$

5.3-Variabili aleatorie indipendenti

Date due variabili aleatorie X, Y sono indipendenti se:

$$P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y) \qquad \forall x \in Im(X), \forall y \in Im(Y)$$

Se due variabili solo indipendenti:

Se prendo n variabili aleatorie $X_1, X_2, ..., X_n$ sono indipendenti se:

$$P(x_1 \cap ... \cap x_n) = P(x_1) \cdot ... \cdot P(x_n) \quad \forall x_i \in Im(X_i)$$

Esempio:

Schema di Bernoulli con n lanci

$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & i\text{-esimo lancio} = T \\ 0 & i\text{-esimo lancio} = C \end{cases}$

Tutte le X_i sono indipendenti quindi:

$X = \sum_{i=0}^{n} X_i$

$V(X) = \sum_{i=0}^{n} V(X_i) = np(1-p)$

5.3.1-Somma di variabili aleatorie indipendenti

Date due variabili aleatorie X, Y indipendenti la probabilità cha la variabile aleatoria di $Z = X + Y$ sia z:

$$P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x \in Im(X)} P(X = x)P(Y = z - x)$$

Esempio:

$X \backsim Bin(n, p)$
$Y \backsim Bin(m, p)$

$X + Y \backsim Bin(n + m, p)$

$P(X + Y = k) = \sum_{h=0}^{n} P(X = h)P(Y = k - h) = p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{n+m}{k}$

5.4-Covarianza

Date due variabili aleatorie X, Y:

$$\text{COV}(X, Y) = \begin{cases} 0 & X, Y \text{ indip.} \\ E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) & X, Y \text{ non indip.} \end{cases}$$
$$|\text{COV(X,Y)}| \le \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}$$

In cui:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} (xy) \cdot P(X = x \cap Y = y)$$

La varianza invece:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[\underbrace{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}_{\text{covarianza}}]$$

5.5-Distribuzione congiunta di variabili aleatorie

Date due variabili aleatorie non indipendenti X, Y:

$$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$
$$Im(X,Y) \subset Im(X) \times Im(Y) \subset \mathbb{R}^2$$

Scrivendo le due variabili aleatorie come:

$$X = \begin{cases} x_1 & \omega_{x_1} \\ x_2 & \omega_{x_2} \\ x_3 & \omega_{x_3} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} y_1 & \omega_{y_1} \\ y_2 & \omega_{y_2} \end{cases}$$

La distribuzione congiunta:

$$P(X=x, Y=y) = \frac{|X=x, Y=y|}{|\Omega|}$$

Possiamo rappresentare la distribuzione congiunta sotto forma di tabella:

	x_1	x_2	x_3	Dist Y
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	$P(x_3, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	$P(x_3, y_2)$	$P(y_2)$
Dist X	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	1

Dalla distribuzione congiunta posso calcolare le distribuzioni marginali(singole) di X e Y, sommando le righe per X e le colonne per Y:

$$P(X(\omega) = x) = \sum_{y \in Im(Y)} P(X(\omega) = x, Y(\omega) = y)$$
$$P(Y(\omega) = y) = \sum_{x \in Im(X)} P(Y(\omega) = y, X(\omega) = x)$$

Esempio:

Lancio di un dado

$$X = \begin{cases} -1 & \omega = 1,2 \\ 0 & \omega = 3,4 \\ 1 & \omega = 5,6 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -2 & \omega = 1,2,3 \\ 2 & \omega = 4,5,6 \end{cases}$$

Creo una tabella in cui in ogni casella scrivo la probabilità che X sia uguale alla colonna e Y uguale alla riga:

	-1	0	1	Dist X
-2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
Dist Y	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

Sapendo il risultato di X possiamo cambiare le probabilità del risultato di Y:

$$X = -1 \implies \begin{cases} P(Y = -2 | X = -1) = 1 \\ P(Y = 2 | X = -1) = 0 \end{cases}$$
$$X = 0 \implies \begin{cases} P(Y = -2 | X = 0) = \frac{1}{2} \\ P(Y = 2 | X = 0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$X = 1 \implies \begin{cases} P(Y = -2 | X = 1) = 0 \\ P(Y = 2 | X = 1) = 1 \end{cases}$$

Sapendo il risultato di Y possiamo cambiare le probabilità del risultato di X:

$$Y = -2 \implies \begin{cases} P(X=-1|Y=-2) = \frac{2}{3} \\ P(X=0|Y=-2) = \frac{1}{3} \\ P(X=-1|Y=-2) = 0 \end{cases}$$

$$Y = 2 \implies \begin{cases} P(X=-1|Y=2) = 0 \\ P(X=0|Y=2) = \frac{1}{3} \\ P(X=-1|Y=2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

5.6-Funzione di distribuzione

Data una variabile aleatoria X la funzione distribuzione è:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$F_X(b) = P(x \leq b) = \sum_{x \leq b} P(x)$$

6-Variabili aleatorie celebri

Ci sono diverse variabili aleatorie celebri:

1. Variabile aleatoria certa
2. Variabile aleatoria di Bernoulli
3. Variabile aleatoria binomiale
4. Variabile aleatoria geometrica
5. Variabile aleatoria binomiale negativa
6. Variabile aleatoria di Poissun
7. Variabile aleatoria multinomiale

6.1-Variabile aleatoria certa

Una variabile aleatoria certa è una variabile X in cui qualsiasi esito da un valore fisso:

$$X = n$$
$$|Im(X)| = 1$$

Il valore atteso:

$$E(X) = n$$

La varianza:

$$V(X) = 0$$

6.2-Variabile aleatoria di Bernoulli

🔖 Una variabile aleatoria di Bernoulli è una variabile X con risultati solo 0 o 1:

$$X \backsim Bern(p)$$
$$Im(X) = \{0, 1\}$$

Le probabilità di 0 e 1 sono definite da p:

$$P(1) = p$$
$$P(0) = 1 - p$$
$$p \in [0, 1]$$

Il valore atteso:

$$E(X) = p$$

La varianza:

$$V(X) = p(1-p) = p - p^2$$

6.3-Variabile aleatoria binomiale

🔖 Una variabile aleatoria binomiale è una variabile X che presa una stringa lunga $n$composta da 0 e 1 conta la quantità di 1:

$$X \backsim Bin(n, p)$$
$$Im(X) = \{0, ..., n\}$$
$$n \in \mathbb{N}$$

Le probabilità di 0 e 1 sono definite da p:

$$P(\{1\}) = p$$
$$P(\{0\}) = 1 - p$$
$$p \in [0, 1]$$

Le probabilità che esca k volte 1(distribuzione):

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Il valore atteso:

$$E(X) = np$$

La varianza:

$$V(X) = np(1-p) = np - np^2$$

6.4-Variabile aleatoria geometrica

🔖 Una variabile aleatoria geometrica è una variabile X che presa una stringa potenzialmente infinita composta da 0 e 1 conta quando appare il primo 1:

$$X \backsim Geom(p)$$
$$Im(X) = \{1, ..., +\infty\}$$

Le probabilità di 0 e 1 sono definite da p:

$$P(1) = p$$
$$P(0) = 1 - p$$
$$p \in [0, 1]$$

Le probabilità che 1 esca dopo k volte(distribuzione):

$$P(k) = p(1-p)^{k-1}$$

Il valore atteso:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

La varianza:

$$V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

6.4.1-Funzione di sopravvivenza

🔖 Data una variabile aleatoria geometrica X la probabilità che 1 non sia presente nei primi k numeri:

$$G(n) = P(x > k) = (1-p)^k$$

6.4.2-Perdita di memoria

🔖 Data una variabile aleatoria geometrica X la probabilità che 1 sia presente dopo $k + l$ numeri sapendo che nei primi k non c'era:

$$P(x = k + l | x > k) = P(l)$$

6.5-Variabile aleatoria binomiale negativa

Una variabile aleatoria binomiale negativa è una variabile X che presa una stringa potenzialmente infinita composta da 0 e 1 conta quando appare l'n-esimo 1:

$$X \backsim BinNeg(n,p)$$
$$Im(X) = \{n, ..., +\infty\}$$

Le probabilità di 0 e 1 sono definite da p:

$$P(1) = p$$
$$P(0) = 1 - p$$
$$p \in [0,1]$$

Le probabilità che 1 esca la n-esima volta dopo k volte(distribuzione):

$$P(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

Il valore atteso:

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

La varianza:

$$V(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

6.6-Variabile aleatoria di Poisson

Una variabile aleatoria di Poisson è una variabile X che conta quanti clienti arrivano in un intervallo dato λ tasso degli arrivi:

$$X \backsim Poisson(\lambda)$$
$$Im(X) = \{0, ..., +\infty\}$$

La probabilità che arrivino k persone:

$$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Il valore atteso:

$$E(X) = \lambda$$

La varianza:

$$V(X) = \lambda$$

6.6.1-Variabili indipendenti di Poisson

Date due variabili aleatorie di Poisson X_1, X_2:

$$X_1 \backsim Poisson(\lambda_1)$$
$$X_2 \backsim Poisson(\lambda_2)$$

La probabilità che $X_1 + X_2 = k$:

$$P(k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_1)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

Quindi possiamo scrivere $X_1 + X_2$ come:

$$X_1 + X_2 \backsim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$$

6.6.2-Aprossimazione della binomiale tramite Poisson

Una variabile aleatoria binomiale può essere approssimata ad con una variabile aleatoria di Poisson:

$$X \backsim Bin(n, p) \rightarrow X \backsim Poisson(\lambda = np)$$

6.7-Variabile aleatoria multinomiale

Una variabile aleatoria multinomiale è una variabile X che presa una stringa lunga $n$composta da $1, ..., k$ conta la quantità di tutti i numeri:

$$(X_1, ..., X_k) \backsim Multi(n, p_1, ..., p_k)$$
$$Im(X_i) = \{0, ..., n\}$$
$$n \in \mathbb{N}$$

Le probabilità di $1, ..., k$ sono definite da $p_1, ..., p_k$:

$$P(\{1\}) = p_1$$
$$P(\{i\}) = p_i$$
$$p_i \in [0, 1]$$

Le probabilità che esca n_1 volte 1, n_2 volte 2,..., n_k volte k(distribuzione congiunta):

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \cdot p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$$

Possiamo anche calcolare la distribuzione marginale di X_i:

$$P(n_i) = \binom{n}{n_i} p_i^{n_i}(1-p_i)^{n-n_i}$$

Se sappiamo che un determinato numero j è uscito n_j volte:

$$P(n_i|n_j) = \frac{P(n_i, n_j)}{P(n_j)}$$

7-Variabili aleatorie continue

Data una variabile aleatoria X, questa è continua se $Im(X) \subseteq \mathbb{R}$ con cardinalità infinita:

$$X \backsim Unif([a,b])$$

La probabilità che esca qualsiasi numero k(distribuzione):

$$P(k) = 0$$

7.1-Densità di probabilità

Presa una variabile aleatoria continua X la densità di probabilità è una funzione che definisce come è distribuita la probabilità nell'intervallo $[a,b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x) & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Per calcolare la probabilità in un intervallo $[c,d]$:

$$P(c < x < d) = \int_c^d f_X(x)dx$$

Esempio:

$X \backsim Unif([0,1])$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

$P(a < x < b) = \int_a^b f_X(x)dx = b - a$

7.1.1-Condizione di normalizzazione

La densità di probabilità nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ deve essere sempre 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = P(-\infty < x < +\infty) = 1$$

Quindi presa una variabile aleatoria continua uniforme in un intervallo $[a,b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

7.2-Valore di attesa

Presa una variabile aleatoria continua X con densità di probabilità $F_X(x)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

7.3-Varianza

Presa una variabile aleatoria continua X con densità di probabilità $F_X(x)$:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x)dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$

In cui:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$$

7.4-Somma di variabili aleatorie continue indipendenti

Date due variabili aleatorie continue indipendenti X, Y con densità F_X, F_Y, la densità della somma $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)dx$$

7.5-Funzione di distribuzione per variabili aleatorie continue

Data una variabile aleatoria continua X la funzione distribuzione:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$F_X(b) = P(x \leq b)$$

Per calcolare la probabilità che x sia compreso in un intervallo:

$$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Da questo possiamo dire che:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{F_X(x)}_{\text{funzione distribuzione}} = \underbrace{f_X(x)}_{\text{densità di probabilità}}$$

7.5.1-Funzione distribuzione per variabili uniformi

Data una variabile aleatoria continua uniforme X:

$$X \backsim Unif([0,1])$$

La funzione distribuzione:

$$F_X(k) = P(x \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & 0 \leq k \leq 1 \\ 1 & k > 1 \end{cases}$$

7.6-Calcolare la densità di variabile derivata da un’altra

Data una variabile aleatoria continua X con densità F_X e creo una seconda variabile Y:

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$Y = \varphi(X)$$

Per trovare la densità di Y devo calcolare:

$$F_Y(y) = F_X(\varphi^{-1}(y)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \Delta y$$

7.7-Variabile aleatoria Gaussiana

Una variabile aleatoria Gaussiana è una variabile X continua che misurata qualsiasi cosa controlla la distribuzione dovuta all'inaccuratezza dello strumento di misura:

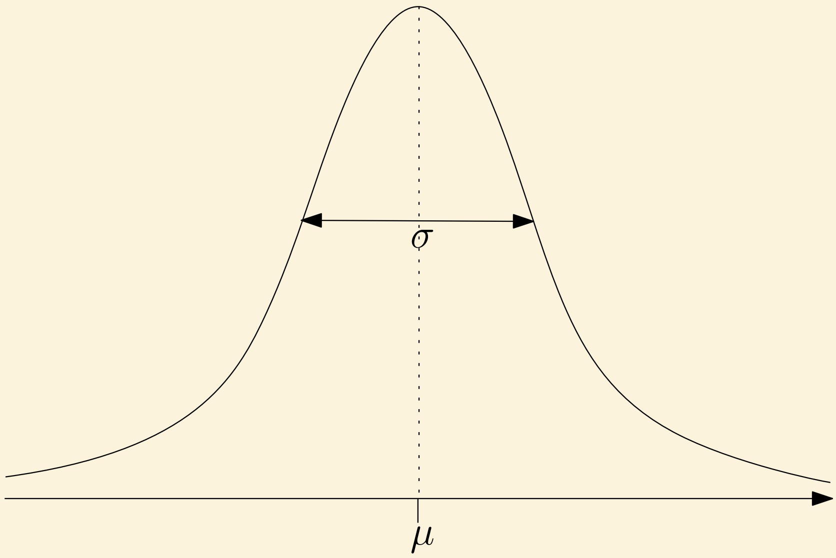
$$X \backsim W(\mu, \sigma^2)$$

In cui μ è il valore atteso e σ^2 è la varianza.

La densità è descritta:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Il grafico ha forma:



7.7.1-Standardizzazione

Tutte le variabili Gaussiane si riconducono alla variabile standard:

$$X \backsim W(\mu, \sigma^2)$$

Calcolando Z con la formula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \backsim W(0, 1)$$
$$X = \sigma Z + \mu$$

In questo modo possiamo calcolare gli integrali tramite la tabella su Z.

7.7.2-Tavola integrale Gaussiano

Se vogliamo calcolare la probabilità che il valore sia minore di un certo numero $z \geq 0$:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Il risultato dell'integrale è scritto su una tabella in base al valore di z.

Valori importanti:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6\overline{6}$$
$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.95$$
$$P(-3 \leq Z \leq 3) = 0.997$$

Nel caso in cui volessimo calcolare la probabilità che il valore sia maggiore di un certo numero $z \leq 0$ basta usare la simmetria:

$$P(Z > z) = P(Z < -z)$$

8-Leggi varie sulle probabilità

8.1-Gioco equo

Data una qualsiasi variabile aleatoria X, questa rappresenta un gioco equo se:

$$X \text{ equa} \iff E(X) = 0$$

Esempio:

Roulette in cui giochiamo solo su rosso o nero

Iniziamo giocando 1 e ogni volta che perdiamo raddoppiamo la puntata successiva, se vinciamo smettiamo

$$X = \begin{cases} 1 & P = 1 - \dfrac{1}{2^n} \\ -(2^n - 1) & P = \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$

$E(X) = (1 - \frac{1}{2^n}) - (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2^n} = 0$

8.2-Legge dei grandi numeri

Prese n variabili aleatorie indipendenti $X_1, X_2, ..., X_n$ con la stessa distribuzione e preso $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = E(X_i) \quad \forall i$$

Possiamo anche dire che presa una variabile aleatoria sempre positiva:

$$P(Y \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(Y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e conseguentemente:

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} V(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

8.3-Teorema limite centrale

Data una variabile aleatoria binomiale $S_n \backsim Bin(n,p)$, sapendo per la legge dei grandi numeri che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = p$$

è possibile ricondurre l'istogramma di $\frac{S_n}{n}$ ad una variabile aleatoria gaussiana:

$$\frac{S_n}{n} \to W(\mu = p, \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n})$$

Se invece prendiamo n variabili indipendenti $X_1, ..., X_n$ con $\mu = E(X_i)$ e $\sigma^2 = V(X_i)$ quindi:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$E(S_n) = n\mu$$
$$V(S_n) = n\sigma^2$$

A questo punto possiamo ricongiungere S_n a una gaussiana standard:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow{n \to +\infty} W(0,1)$$

8.3.1-Applicazione del teorema

Preso un qualsiasi esperimento lo eseguo un numero n di volte e ottengo un determinato numero di volte k diverso dal $E(X)$ un risultato posso calcolare quale è la probabilità che la differenza rispetto al valore atteso sia quella osservata:

$$S_n = \text{n}^\circ \text{ di volte ottenuto il risultato in } n \text{ esperimenti} \backsim Bin(n,p)$$
$$P(|S_n - E(S_n)| \geq k - E(S_n)$$

Usando il teorema limite centrale questa probabilità è uguale a:

$$P(\frac{|S_n - E(S_n)|}{\sqrt{V(S_n)}} \geq \frac{k - E(S_n)}{\sqrt{np(1-p)}})$$

In base al risultato devo scegliere se questa probabilità è accettabile o no.

Esempio:

10000 lanci di moneta con 5500 teste

$S_n = \#T \backsim Bin(10^4, \frac{1}{2})$

$P(|S_n - E(S_n)| \geq 500) = P(\frac{|S_n - E(S_n)|}{\sqrt{V(S_n)}} \geq \frac{500}{\sqrt{10^4 \cdot \frac{1}{4}}}) = P(W(0,1) \geq 10) \overset{\text{tavola}}{=} e^{-100}$

8.4-Simulare una variabile aleatoria arbitraria

Data una variabile aleatoria X e $U \backsim Unif([0,1])$:

$$\exists \varphi_X : [0,1] \to \mathbb{R} | X \backsim \varphi_X(u)$$

X e φ_X hanno la stessa distribuzione.

Per ottenere la variabile aleatoria φ_X dobbiamo fare il grafico della funzione di distribuzione F_X:

$$F_X = P(X < x)$$

Poi dobbiamo sviluppare dal grafico l'esito di φ_X.

Esempi:

$X \backsim Bern(p) = \begin{cases} 1 & P(1) = p \\ 0 & P(0) = (1-p) \end{cases}$

Questa variabile può essere generata tramite U:

$X = \begin{cases} 0 & 0 < U \leq 1-p \\ 1 & 1-p < U \leq p \end{cases}$

$X \backsim Poisson(\lambda)$

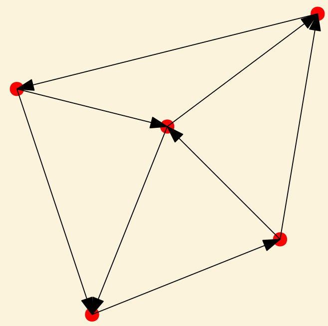
$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Questa variabile può essere costruita tramite U:

$$X = \begin{cases} 0 & 0 < U \leq e^{-\lambda} \\ 1 & e^{-\lambda} < U \leq e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ ... & \\ k & e^{-\lambda}(1+\lambda+...+\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}) < U \leq e^{-\lambda}(1+\lambda+...+\frac{\lambda^k}{k!}) \end{cases}$$

8.5-Catene di Markov

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$:



Partendo da un punto in ogni istante di tempo ci si sposta in base a delle probabilità in una delle frecce uscenti dal punto. Scriviamo:

$X_n =$ Posizione dopo n istanti di tempo

$p(x, y) =$ Probabilità che essendo sul punto x ci si sposti sul punto y

Avremo quindi che per ogni x:

$$\sum_{y \in V} p(x, y) = 1$$

La probabilità che da ogni punto i mi sposto in qualsiasi altro punto j si scrive come matrice in cui $a_{ij} = p(i, j)$:

$$P = \begin{vmatrix} p(1,1) & p(1,2) & ... & p(1,k) \\ p(2,1) & p(2,2) & ... & p(2,k) \\ ... & ... & ... & ... \\ p(k,1) & p(k,2) & ... & p(k,k) \end{vmatrix}$$

Per calcolare la probabilità facendo due o più passi:

$$P^n = \underbrace{P \cdot P \cdot ... \cdot P}_{n \text{ volte}}$$

8.5.1-Con punto di partenza noto

Dato un punto di partenza $x \in V$ la probabilità che la traiettoria segua esattamente un numero n di passi dati:

$$P_x(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = p(x, x_1)p(x_1, x_2)...p(x_{n-1}, x_n)$$

La probabilità che dopo un certo numero di passi n il punto di arrivo sia k:

$$P_x^n(k) = P^n(x, k)$$

Presa una funzione $f : V \to \mathbb{R}$ che indica il valore di ogni punto il valore di attesa di questa funzione:

$$E(f(X_n)) = \sum_{x_n \in V} P^n(x, x_n) f(x_n)$$

8.5.2-Con punto di partenza casuale

Dato un μ che definisce la probabilità del punto iniziale x:

$$X_0 = x_i \text{ con probabilità } \mu(x_i)$$

La probabilità che la traiettoria segua esattamente un numero n di passi dati:

$$P_\mu(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mu(x_0)p(x_0, x_1)...p(x_{n-1}, x_n)$$

La probabilità che dopo un certo numero di passi n il punto di arrivo sia k:

$$\mu_n(k) = P_\mu^n(k) = \sum_{x_0 \in V} \mu(x_0)P^n(x_0, k)$$

8.5.3-Probabilità stazionaria

Se esiste un μ per cui se $X_0 \backsim \mu$ allora anche $X_1 \backsim \mu$, in questi casi si dice che μ è una probabilità stazionaria per la catena di Markov.

Data una catena di Markov, cioè P:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Trovare una probabilità π stazionaria per P:

$$\pi = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1-\alpha) + q\beta & p\alpha + q(1-\beta) \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{cases} p = p(1-\alpha) + q\beta \\ q = p\alpha + q(1-\beta) \\ p + q = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} p = p(1-\alpha) + (1-p)\beta = 1 + p - \alpha p - \beta p \\ q = 1 - p \end{cases}$$

8.5.4-Teorema ergodico per catene di Markov

Se P è una probabilità **ergotica**, cioè se in n passi possiamo andare da ogni nodo a qualunque altro:

$$\exists n > 0 | P^n(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in V$$

Allora:

- $\exists!$ prob. stazionaria π
- $\forall \mu$ su $V \implies \lim_{n\to\infty} P^n = \pi$

8.5.4-Bilancio dettagliato

Data una catena di Markov P, π è una probabilità stazionaria per P se:

$$\pi(x) = \sum_{y \in V} \pi(y)p(y,x) \quad \forall x \in V$$

π soddisfa anche il bilancio dettagliato rispetto a P se:

$$\underbrace{\pi(x)p(x,y)}_{\text{flusso uscente}} = \underbrace{\pi(y)p(y,x)}_{\text{flusso entrante}} \quad \forall x, y \in V$$

8.5.5-Montecarlo con catene di Markov

Dato un $V = \{0,1\}^n$ fisso:

$$H : V \to R$$

La probabilità π su V:

$$\pi(w) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(w)}$$
$$w = (w_1, ..., w_n) \text{ con } w_i = \{0,1\}$$

In cui:

$$Z_\beta = \sum_{w \in V} e^{-\beta H(w)}$$