Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Automi Calcolabilità e Complessità

Autore:
Simone Lidonnici

16 ottobre 2024

Indice

1

Linguaggi regolari

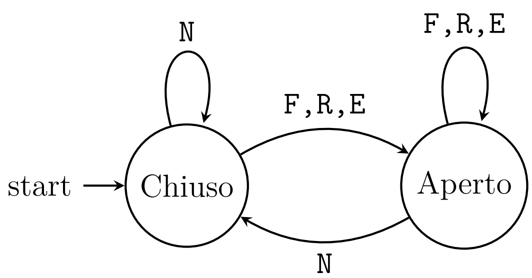
Definizione di linguaggio

Dato un **alfabeto** Σ, cioè un insieme di elementi, un **linguaggio** Σ^* è l'insieme di tutte le strighe ottenibili usando l'alfabeto Σ.

1.1 Automi Deterministici a Stati Finiti (DFA)

Il modello usato per definire i **linguaggi regolari** è l'**automa a stati finiti**, cioè una macchina che permette tramite l'input di passare da uno stato ad un altro, che ha memoria limitata e gestione dell'input limitata, ma è molto semplice.
Esempio:
Una porta che si apre tramite dei sensori può essere descritta tramite un automa con due stati (Aperta e Chiusa) e quattro input dati dai sensori (`N, F, R, E`):

- `N`: se non ci sono persone da nessun lato della porta
- `F`: se c'è una persona davanti alla porta
- `R`: se c'è una persona dietro la porta
- `E`: se ci sono persone da entrambi i lati della porta

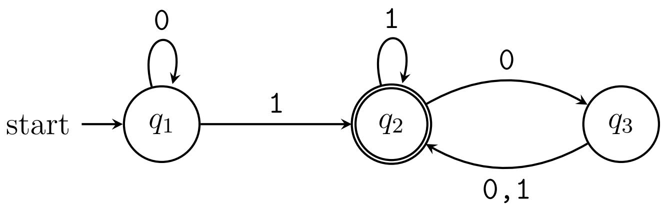


Automa Deterministico a Stati Finiti (DFA)

Un **DFA (Deterministic Finite Automaton)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ in cui:

- Q è l'insieme degli stati dell'automa
- Σ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la funzione di transizione degli stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di **stati accettanti** dell'automa

Esempio:
Preso il seguente DFA:



In questo caso:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta =$

δ	q_1	q_2	q_3
0	q_1	q_3	q_2
1	q_2	q_2	q_2

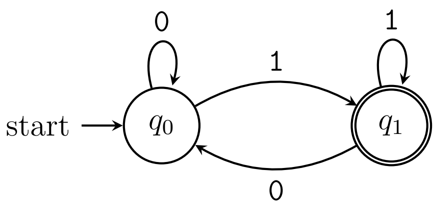
- q_1 è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_2\}$ è l'insieme degli stati accettanti

Funzione di transizione estesa

Dato un DFA D, definiamo una **funzione di transizione estesa** $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} \delta^*(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) = q \\ \delta^*(q, ax) = \delta^*(\delta(q, a), x) \quad a \in \Sigma, x \in \Sigma^* \end{cases}$$

Esempio:
Preso il seguente DFA:



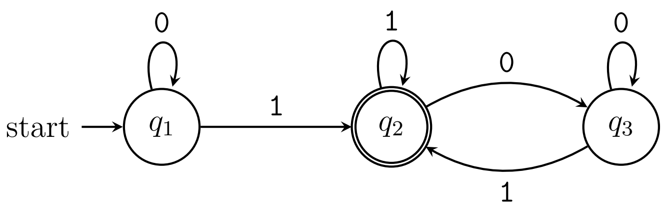
In questo DFA:

- $\delta^*(q_0, 011) = \delta^*(\delta(q_0, 0), 11) = \delta^*(q_0, 11) = \delta^*(\delta(q_0, 1), 1) = \delta^*(q_1, 1) = \delta^*(\delta(q_1, 1), \varepsilon) = \delta^*(q_1, \varepsilon) = q_1$

Linguaggio di un automa

Il **linguaggio di un DFA** D è l'insieme delle stringhe in input che l'automa accetta, cioè quelle per cui l'automa termina in uno stato accettante $q_0 \in F$.
Ogni automa ha un solo linguaggio che si scrive $L(D) = \{x \in \Sigma^* | D \text{ accetta } x\}$. Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da una DFA se $\delta^*(q_0, x) = q \in F$

Esempio:
Preso il seguente DFA:



Il linguaggio di questa DFA è l'insieme di tutte le stringhe che finiscono con 1:

$$L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = y1 \wedge y \in \{0,1\}^*\}$$

1.1.1 Configurazione di un DFA

Configurazione di un DFA

Dato un DFA D, una **configurazione** di D è una coppia $Q \times \Sigma^*$ che indica:

- lo stato attuale dell'automa
- l'input ancora da leggere

La configurazione iniziale è sempre (q_0, x).

Passo di computazione di un DFA

Un **passo di computazione** è una relazione binaria con simbolo $\vdash_D$ per cui:

$$(q_1, ax) \vdash_D (q_2, x) \iff \delta(q_1, a) = q_2$$

La **chiusura per riflessione e transitività** di $\vdash_D$, scritta come $\vdash_D^*$, ha delle proprietà:

1. $(q_1, ax) \vdash_D (q_2, x) \implies (q_1, ax) \vdash_D^* (q_2, x)$
2. $\forall q, x \ (q, x) \vdash_D^* (q, x)$
3. $(q_1, abc) \vdash_D (q_2, bc) \vdash_D (q_3, c) \implies (q_1, abc) \vdash_D^* (q_3, c)$

Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da un DFA se:

$$\exists q \in F | (q_0, x) \vdash_D^* (q, \varepsilon)$$

1.2 Automi Non Deterministici a Stati Finiti (NFA)

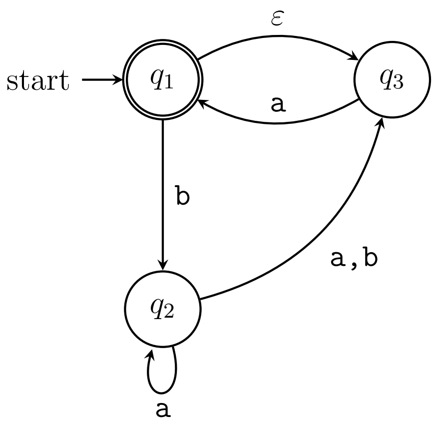
Automa Non Deterministico a Stati Finiti (NFA)

Un **NFA (Non-deterministic Finite Automaton)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ in cui:

- Q è l'insieme degli stati dell'automa
- Σ è l'alfabeto dell'automa
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ è la funzione di transizione degli stati
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di **stati accettanti** dell'automa

A differenza del DFA la funzione δ ha come uno dei parametri $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e come ritorno un insieme di stati, contenuto nell'insieme delle parti di Q, cioè $\mathcal{P}(Q)$. Inoltre per considerare una stringa accettata da un NFA basta che in uno dei rami della computazione la stringa venga accettata.

Esempio:
Preso il seguente NFA:



In questo caso:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{\texttt{a},\texttt{b}\}$
- $\delta =$

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	q_1
b	q_2	q_3	$\emptyset$
ε	q_3	$\emptyset$	$\emptyset$

- q_1 è lo stato iniziale dell'automa
- $F = \{q_1\}$ è l'insieme degli stati accettanti

1.2.1 Configurazione di un NFA

Configurazione di un NFA

Dato un NFA N, una **configurazione** di N è una coppia $Q \times \Sigma_\varepsilon^*$ che indica:

- lo stato attuale dell'automa
- l'input ancora da leggere

La configurazione iniziale è sempre (q_0, x).

Passo di computazione di un NFA

Un **passo di computazione** è una relazione binaria con simbolo $\vdash_N$ per cui:

$$(q_1, ax) \vdash_N (q_2, x) \iff q_2 \in \delta(q_1, a)$$

La **chiusura per simmetria e transitività** di $\vdash_N$, scritta come $\vdash_N^*$, ha delle proprietà:

1. $(q_1, ax) \vdash_N (q_2, x) \implies (q_1, ax) \vdash_N^* (q_2, x)$
2. $(q_1, abc) \vdash_N (q_2, bc) \vdash_N (q_3, c) \implies (q_1, abc) \vdash_N^* (q_3, c)$

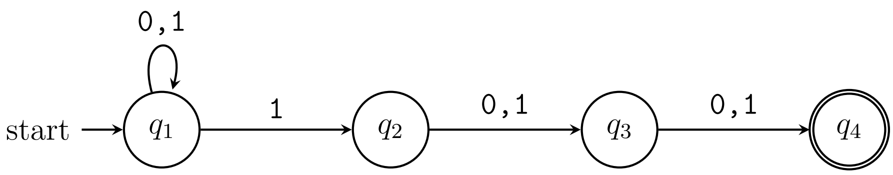
Una stringa $x \in \Sigma^*$ sarà accettata da un NFA se:

$$\exists q \in F | (q_0, x) \vdash_N^* (q, \varepsilon)$$

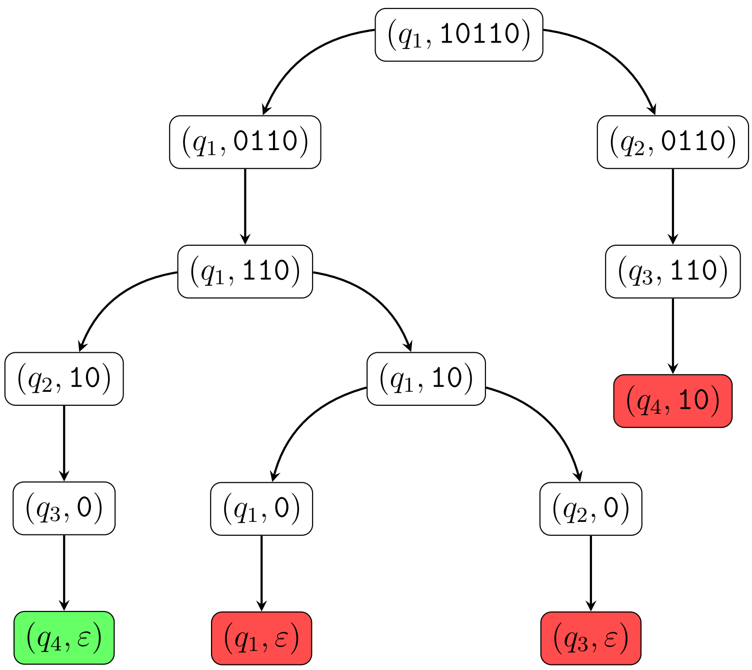
Oppure se:

$$x = y_1 \dots y_n \wedge \exists \underbrace{q_0 \dots q_n}_{\text{sequenza di stati}} | q_{i+1} = \delta(q_i, y_{i+1}) \wedge q_n \in F$$

Esempio:
Preso il seguente NFA:



Data la stringa `10110` la computazione sarà:



La stringa `10110` viene quindi accettata dal NFA.

1.3 Linguaggi regolari

Insieme dei Linguaggi regolari

Dato un alfabeto Σ, l'insieme dei **linguaggi regolari** di Σ, scritto come REG, è l'insieme dei linguaggi per cui esiste una DFA che li accetta:

$$\text{REG} = \{L \subseteq \Sigma^* | \exists D \; L(D) = L\}$$

1.3.1 Proprietà dei linguaggi regolari

I linguaggi sono insiemi di stringhe di un alfabeto Σ, quindi dati due linguaggi $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ possiamo definire le operazioni:

- **Unione:**
$$L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* | x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$
- **Intersezione:**
$$L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* | x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$
- **Complemento:**
$$\neg L = \{x \in \Sigma^* | x \notin L\}$$
- **Concatenazione:**
$$L_1 \circ L_2 = \{xy \in \Sigma^* | x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$
- **Potenza:**
$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & n = 0 \\ L \circ L^{n-1} & n > 0 \end{cases}$$
- **Star di Kleene:**
$$L^* = \{x_1 \dots x_k \in \Sigma^* | x_i \in L\} = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

1.3.2 Chiusura dei linguaggi regolari

Chiusura dell'unione in REG

L'unione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazioni:

- **Tramite DFA:**
  Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:
  - $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(D_1) = L_1$
  - $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(D_2) = L_2$

  Creo il DFA $D_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:
  - $Q_0 = Q_1 \times Q_2 = \{(q_x, q_y) | q_x \in Q_1 \wedge q_y \in Q_2\}$
  - $q_0 = (q_1, q_2)$
  - $F_0 = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) = \{(q_x, q_y) | q_x \in F_1 \vee q_y \in F_2\}$
  - $\forall (q_x, q_y) \in Q_0, a \in \Sigma$:

  $$\delta((q_x, q_y), a) = (\delta_1(q_x, a), \delta_2(q_y, a))$$

  Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \vee x \in L_2$, quindi $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$.

- **Tramite NFA:**
  Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:
  - $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(N_1) = L_1$
  - $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(N_2) = L_2$

  Creo il NFA $N_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$per cui:
  - $Q_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
  - q_0 è un nuovo stato iniziale
  - $F_0 = F_1 \cup F_2$
  - $\forall q \in Q_0, a \in \Sigma$:

  $$\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q, a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

  Quindi $x \in L(N_0) \iff x \in L_1 \vee x \in L_2$, quindi $L_1 \cup L_2 \in \text{REG}$.

Chiusura dell'intersezione in REG

L'intersezione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione:
Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:

- $D_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(D_1) = L_1$
- $D_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(D_2) = L_2$

Creo il DFA $D_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:

- $Q_0 = Q_1 \times Q_2 = \{(q_x, q_y) | q_x \in Q_1 \land q_y \in Q_2\}$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F_0 = F_1 \times F_2$
- $\forall (q_x, q_y) \in Q_0, a \in \Sigma$:
$$\delta((q_x, q_y), a) = (\delta_1(q_x, a), \delta_2(q_y, a))$$

Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \land x \in L_2$, quindi $L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$.

Chiusura del complemento in REG

Il complemento è chiuso in REG, cioè:

$$\forall L \in \text{REG} \implies \neg L \in \text{REG}$$

Dimostrazione:
Dato $L \in \text{REG}$, esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) | L(D) = L$.
Creo il DFA $D^* = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, uguale a D ma con gli stati accettanti invertiti, quindi $x \in L(D^*) \iff x \notin L(D)$, quindi $\neg L \in \text{REG}$.

Chiusura della concatenazione in REG

La concatenazione è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \circ L_2 \in \text{REG}$$

Dimostrazione:
Dati $L_1, L_2 \in \text{REG}$, allora esistono:

- $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) | L(N_1) = L_1$
- $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2) | L(N_2) = L_2$

Creo il NFA $N_0 = (Q_0, \Sigma, \delta_0, q_0, F_0)$ per cui:

- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$
- $q_0 = q_1$

- $F_0 = F_2$
- $\forall q \in Q_0, a \in \Sigma$:

$$\delta_0(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \land a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup q_2 & q \in F_1 \land a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \end{cases}$$

Quindi $x \in L(D_0) \iff x \in L_1 \circ L_2$, quindi $L_1 \cap L_2 \in \text{REG}$.

Chiusura di star in REG

Star è chiusa in REG, cioè:

$$\forall L \in \text{REG} \implies L^* \in \text{REG}$$

Dato $L \in \text{REG}$, esiste $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) | L(D) = L$.
Creo il NFA $N^* = (Q^*, \Sigma, \delta^*, q_0^*, F^*)$ in cui:

- q_0^* è un nuovo stato iniziale
- $Q^* = Q \cup q_0^*$
- $F^* = F \cup q_0^*$
- $\forall q \in Q^*, a \in \Sigma$:

$$\delta^*(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & q \in Q - F \\ \delta(q,a) & q \in F \land a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup q_0 & q \in F \land a = \varepsilon \\ q_0 & q = q_0^* \land a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0^* \land a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Quindi $x \in L(N^*) \iff x \in L^*$, quindi $L^* \in \text{REG}$.

1.4 Equivalenza tra DFA e NFA

Linguaggi accettati da DFA e NFA

Sia $\mathcal{L}(\text{NFA})$ l'insieme dei linguaggi per cui esiste un NFA che li accetta e $\mathcal{L}(\text{DFA})$ l'insieme dei linguaggi per cui esiste un DFA che li accetta, allora:

$$\mathcal{L}(\text{NFA}) = \mathcal{L}(\text{DFA}) = \text{REG}$$

Dimostrazione per doppia inclusione:

1. $\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$:
   Dato un $L \in \mathcal{L}(DFA)$ allora esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L(D) = L$.
   Visto che NFA è una generalizzazione di DFA, allora è ovvio che:

   $$\mathcal{L}(\text{DFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{NFA})$$

2. $\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$:
   Dato un $L \in \mathcal{L}(\text{NFA})$ allora esiste $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$ tale che $L(N) = L$.
   Considero un DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{0_D}, F_D)$, costrito partendo da N in cui:

   - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
   - Dato $R \in Q_D$, definiamo l'**estensione** di R:

   $$E(R) = \left\{ q \in Q_N \,\middle|\, \begin{array}{c} q \text{ può essere raggiunto da uno stato } r \in R \\ \text{tramite solamente } \varepsilon\text{-archi} \end{array} \right\}$$

   - $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\})$
   - $F_D = \{R \in Q_D | R \cap F_N \neq \emptyset\}$
   - Dati $R \in Q_D$ e $a \in \Sigma$, δ_D è definita:

   $$\delta_D(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\delta_N(r, a))$$

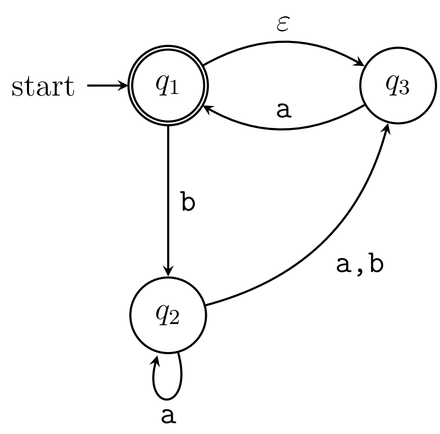
   Detto questo allora abbiamo che:

   $$w \in L(N) \iff w \in L(D)$$

   quindi:

   $$\mathcal{L}(\text{NFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{DFA})$$

Esempio:
Preso il seguente NFA:



Per costruire il DFA equivalente, che sarà definito:

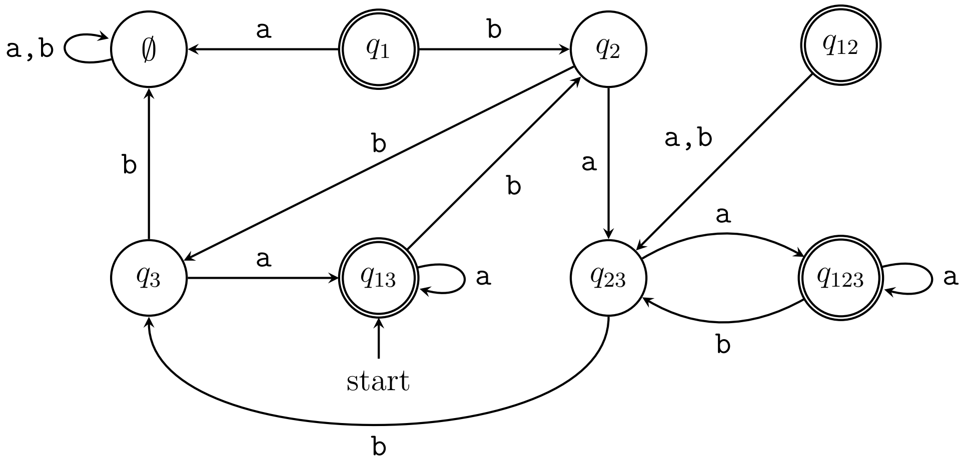
- $Q_D = \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$
  che scriviamo in notazione semplificata:

$$Q_D = \{\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}$$

- $q_{0_D} = E(\{q_{0_N}\}) = E(q_1) = \{q_1, q_3\} = q_{13}$
- $F_D = \{q_1, q_{12}, q_{13}, q_{123}\}$
- δ_D viene definita come scritto prima, per esempio:

- $\delta_D(q_1, a) = E(\delta_N(q_1, a)) = \emptyset$
- $\delta_D(q_1, b) = E(\delta_N(q_1, b)) = q_2$
- $\delta_D(q_2, a) = E(\delta_N(q_2, a)) = \{q_2, q_3\} = q_{23}$
- $\delta_D(q_2, b) = E(\delta_N(q_2, b)) = q_3$
- $\delta_D(q_{12}, b) = E(\delta_N(q_1, b)) \cup E(\delta_N(q_2, b)) = \{q_2, q_3\} = q_{23}$
- $\delta_D(q_{13}, a) = E(\delta_N(q_1, a)) \cup E(\delta_N(q_3, a)) = \{\emptyset, q_1, q_3\} = q_{13}$

Il DFA equivalente quindi è:



1.5 Espressioni regolari

Definizione di espressione regolare

Dato un alfabeto Σ, un'**espressione regolare** di Σ è una stringa r che rappresenta un linguaggio $L(r) \subseteq \Sigma^*$. L'insieme delle espressioni regolari di un alfabeto Σ, scritte come $\text{re}(\Sigma)$, è definito:

- $\emptyset \in \text{re}(\Sigma)$
- $\varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$
- $a \in \text{re}(\Sigma)\ \forall a \in \Sigma$
- $r_1, r_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies r_1 \cup r_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $r_1, r_2 \in \text{re}(\Sigma) \implies r_1 \circ r_2 \in \text{re}(\Sigma)$
- $r \in \text{re}(\Sigma) \implies r^* \in \text{re}(\Sigma)$

Esempio:
Dato l'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

- $0 \cup 1 = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
- $0^*10^* = \{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* = \{x1y | x, y \in \{0\}^*\}$

- $\Sigma^*1\Sigma^* = \Sigma^* \circ \{1\} \circ \Sigma^* = \{x1y | x, y \in \Sigma^*\}$
- $1^*\emptyset = \{1\}^* \circ \emptyset = \emptyset$
- $\emptyset^* = \varepsilon$

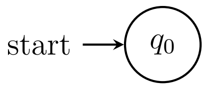
Conversione da espressione regolare a DFA

Date la classe dei linguaggi descritti da un'espressione regolare $\mathcal{L}(\text{re})$ e $\mathcal{L}(DFA)$:

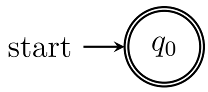
$$\mathcal{L}(\text{re}) \subseteq \mathcal{L}(DFA)$$

Dimostrazione per induzione:

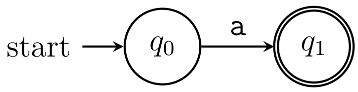
- Caso base:
  - $r = \emptyset \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il DFA $D_\emptyset$:

    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(D_\emptyset)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(DFA)$
  - $r = \varepsilon \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il DFA D_ε:

    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(D_\varepsilon)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(DFA)$
  - $r = a \in \text{re}(\Sigma)$, definiamo il DFA D_a:

    in cui $x \in L(r) \iff x \in L(D_a)$ quindi $L(r) \in \mathcal{L}(DFA)$
- Passo induttivo:
  - $r = r_1 \cup r_2$, allora abbiamo che:

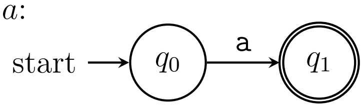
    $$L(r) = L(r_1) \cup L(r_2) = L(D_1) \cup L(D_2) \in \mathcal{L}(DFA)$$
  - $r = r_1 \circ r_2$, allora abbiamo che:

    $$L(r) = L(r_1) \circ L(r_2) = L(D_1) \circ L(D_2) \in \mathcal{L}(DFA)$$
  - $r = r_1^*$, allora abbiamo che:

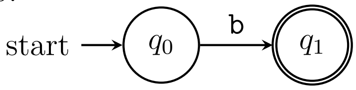
    $$L(r) = L(r_1)^* = L(D_1)^* \in \mathcal{L}(DFA)$$

Esempio:
Data l'espressione regolare $(a \cup ab)^*$, il NFA corrispondente a tale espressione creata partendo dai sotto-componenti:

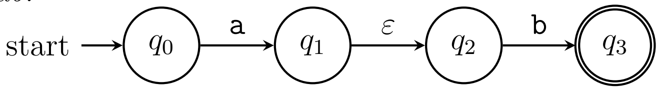
- a:



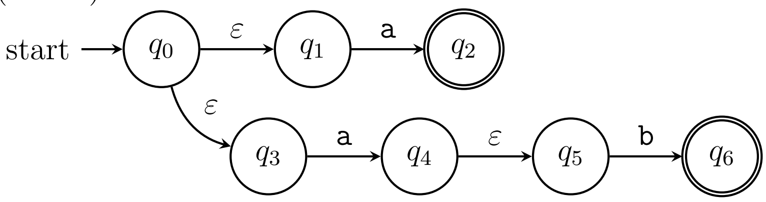
- b:



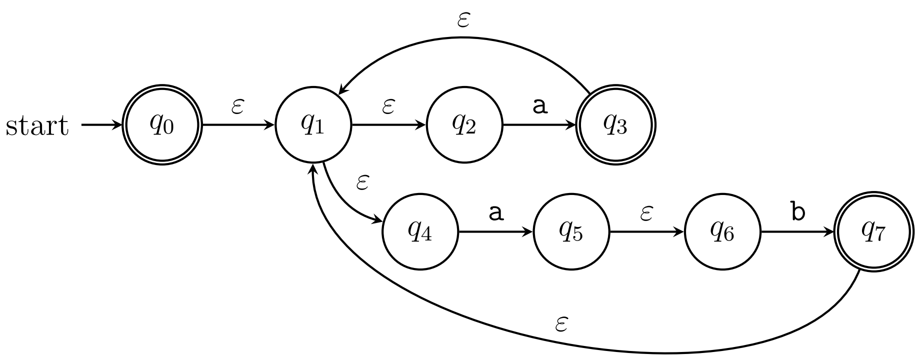
- ab:



- $(a \cup ab)$:



- $(a \cup ab)^*$:



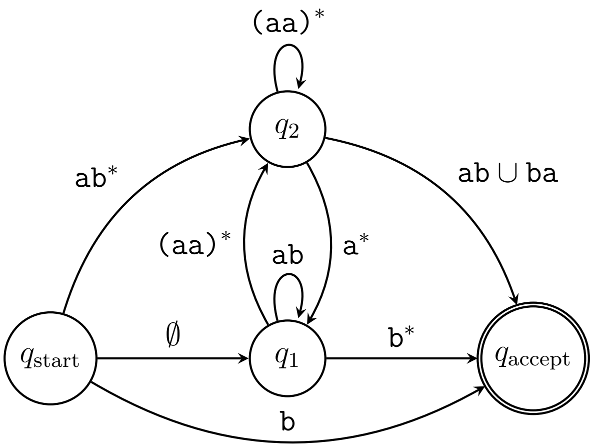
1.5.1 NFA generalizzati (GNFA)

NFA generalizzato (GNFA)

Un **GNFA (Generalized NFA)** è una tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ in cui:

- $|Q| \geq 2$ è l'insieme degli stati dell'automa
- Σ è l'alfabeto dell'automa
- $q_{\text{start}} \in Q$ è lo stato iniziale dell'automa
- $q_{\text{accept}} \in Q$ è l'unico stato accettante dell'automa
- $\delta : (Q - q_{\text{accept}}) \times (Q - q_{\text{start}}) \to \text{re}(\Sigma)$ è la funzione di transizione degli stati in cui però:
  - q_{start} ha solo archi uscenti
  - q_{accept} ha solo archi entranti
  - Per ogni coppia di stati (q_1, q_2), c'è esattamente un arco $q_1 \to q_2$ e un arco $q_2 \to q_1$, incluse le coppie (q, q)
  - Le etichette degli archi sono espressioni regolari

Esempio:



Conversione da DFA a GNFA

Date $\mathcal{L}(DFA)$ e $\mathcal{L}(GNFA)$ si ha che:

$$\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(GNFA)$$

Dimostrazione:
Dato $L \in \mathcal{L}(DFA)$, allora esiste $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L(D) = L$.
Costruisco un GNFA $G = (Q_G, \Sigma, \delta_G, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$ costruito da D in cui:

- $Q_G = Q \cup \{q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}\}$
- $\delta_G(q_{\text{start}}, q_0) = \varepsilon$

- $\forall q \in F\ \delta_G(q, q_{\text{accept}}) = \varepsilon$
- Ogni transizione con etichette multiple in D viene trasformata in un'etichetta con l'unione delle etichette multiple
- Per ogni coppia per cui non ci sia un arco in un verso o nell'altro in D viene aggiunto un arco in G con etichetta $\emptyset$

Quindi $x \in L(D) \implies x \in L(G)$, quindi $\mathcal{L}(DFA) \subseteq \mathcal{L}(GNFA)$.

1.5.2 Riduzione minimale di un GNFA

Dato un GNFA $G = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{accept}})$, possiamo usare un'algoritmo per ottenere un GNFA G' con solo due stati (equivalente quindi ad un'espressione regolare) e per cui $L(G) = L(G')$:

Algoritmo: Riduzione minimale di un GNFA

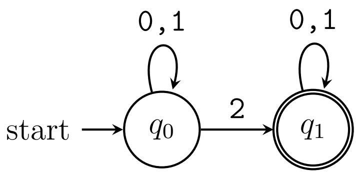
```
def ReduceGNFA(G):
    if |Q|==2 :
        return G
    q = q ∈ Q − {q_start, q_accept}// scelto in modo casuale
    Q' = Q − q
    for q_i in Q' − {q_accept} :
        for q_j in Q' − {q_start} :
            δ'(q_i, q_j) = δ(q_i, q)δ(q, q) ∗ δ(q, q_j) ∪ δ(q_i, q_j)
    G' = (Q', Σ, δ', q_start, q_accept)
    return ReduceGNFA(G')
```

Dimostrazione per induzione:
Induzione in base al numero degli stati k

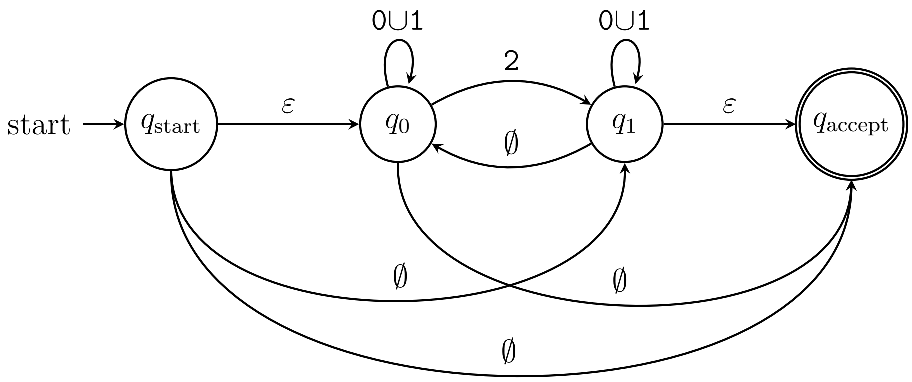
- Caso base:
  $k = 2 \implies G' = G \implies L(G') = L(G)$
- Caso induttivo:
  Assumo che per un G_k sia vero che $L(G_k) = L(G)$
- Passo induttivo:
  Dato $G_{k-1} = G_k - \{q_r\}$ si ha che se G_k accetta una stringa x, allora esiste una serie di stati $q_{\text{start}} q_1 \dots q_{\text{accept}}$ in cui abbiamo due casi:
  - $q_r \notin q_{\text{start}} q_1 \dots q_{\text{accept}}$ allora se $x \in L(G_k) \implies x \in L(G_{k-1})$
  - $q_r \in q_{\text{start}} q_1 \dots q_{\text{accept}}$ allora gli stati q_i e q_j vicini allo stato rimosso saranno collegati da una nuova espressione regolare che per cui $\delta'(q_i, q_j) = \delta(q_i, q_r)\delta(q_r, q_r) * \delta(q_r, q_j)$ per cui $x \in L(G_k) \implies x \in L(G_{k-1})$

  Allora se $x \in L(G_{k+1})$ allora per ogni coppia (q_i, q_j) l'etichetta rappresenterà tutti i cammini tra q_i e q_j anche in G_k quindi $x \in L(G_{k-1}) \implies x \in L(G_k)$. Quindi alla fine si ha che $L(G) = L(G_k) = L(G_{k-1})$

Esempio:
Dato il seguente DFA:

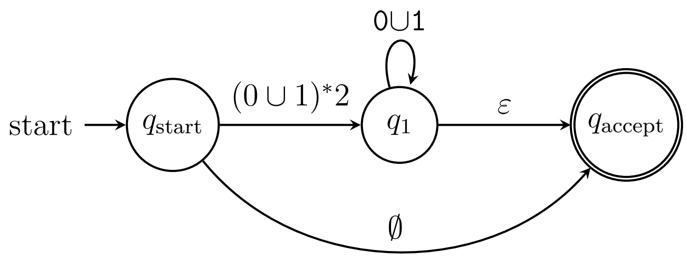


Il GNFA equivalente sarà:



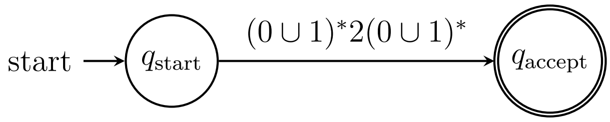
Rimuovendo lo stato q_0 e ricalcolando le transizioni:

- $\delta'(q_{\text{start}}, q_1) = \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_1) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_1) = \varepsilon(0 \cup 1) * 2 \cup \emptyset = (0 \cup 1)^*2$
- $\delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \delta(q_{\text{start}}, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \varepsilon(0 \cup 1)^*\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- $\delta'(q_1, q_1) = \delta(q_1, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_1) \cup \delta(q_1, q_1) = \emptyset(0 \cup 1)^*2 \cup (0 \cup 1) = 0 \cup 1$
- $\delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \delta(q_1, q_0)\delta(q_0, q_0)^*\delta(q_0, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_1, q_{\text{accept}}) = \emptyset(0 \cup 1)^*\emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon$



Rimuovendo anche lo stato q_1 e ricalcolando l'ultima transizione:

$$\delta'(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) = \delta(q_{\text{start}}, q_1)\delta(q_1, q_1)^*\delta(q_1, q_{\text{accept}}) \cup \delta(q_{\text{start}}, q_{\text{accept}}) =$$
$$(0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*\varepsilon \cup \emptyset = (0 \cup 1)^*2(0 \cup 1)^*$$



Conversione da GNFA a espressione regolare

Dati $\mathcal{L}(\text{GNFA})$ e $\mathcal{L}(\text{re})$ si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{GNFA}) \subseteq \mathcal{L}(\text{re})$$

Equivalenza nella classe dei linguaggi regolari

Per un alfabeto Σ:

$$\text{REG} = \mathcal{L}(\text{DFA}) = \mathcal{L}(\text{NFA}) = \mathcal{L}(\text{GNFA}) = \mathcal{L}(\text{re})$$

1.6 Pumping Lemma

Preso un linguaggio L, ad esempio:

$$L = \{0^n1^n | n \geq 0\}$$

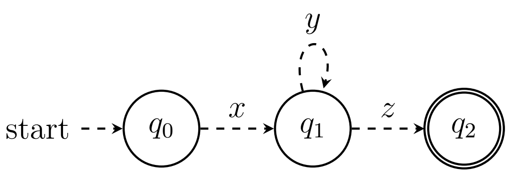
Questo linguaggio avrebbe bisogno di un automa ad infiniti stati per poter sapere il numero di 0 e 1, quindi impossibile con un DFA, NFA o GNFA.

Pumping Lemma

Dato un linguaggio $L \in \text{REG}$, allora esiste un DFA D con p stati tale che $L(D) = L$. $\forall w \in L$, con $|w| \geq p$, è ovvio che alcuni stati devono ripetersi e dividendo $w = xyz$ con x, y, z sottostringhe di w si ha che:

- $xy^kz \in L \ \forall k \geq 0$
- $|y| > 0$
- $|xy| < p$

Graficamente, con le freccie tratteggiate che indicano che in mezzo possono esserci altri stati:



Dimostrazione:
Dato $L \in \text{REG}$ e il DFA D per cui $L(D) = L$, consideriamo $p = |Q|$ e $w = w_1 \dots w_n$, con $n \geq p$, allora esiste una sequenza di stati $q_1 \dots q_{n+1}$ in cui:

$$\delta(q_k, w_k) = q_{k+1} \quad \forall k$$

La sequenza è lunga $n + 1 \geq p + 1$ perciò tra i primi $p + 1$ stati ci deve essere almeno uno stato ripetuto. Siano q_i e q_j le due occorrenze di questo stato ripetuto, con $i < j \leq p + 1$. Dividiamo la stringa in:

- $x = w_1 \dots w_{i-1} \implies \delta^*(q_1, x) = q_i$
- $y = w_i \dots w_{j-1} \implies \delta^*(q_i, y) = q_j = q_i$
- $z = w_j \dots w_n \implies \delta^*(q_j, z) = q_{n+1} \in F$

Quindi $\delta(q_1, xy^k z) = q_{n+1} \in F \implies xy^k z \in L$.
Inoltre sapendo che $i \neq j \implies |y| > 0$ e $j \leq p + 1 \implies |xy| \leq p$.

1.6.1 Dimostrazione di non regolarità tramite pumping lemma

Il pumping lemma viene usato per dimostrare che una linguaggio non è regolare, per farlo basta trovare una stringa che non possa essere scomposta secondo il pumping lemma.
Esempio:
Dato il linguaggio:

$$L = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$$

Preso un valore p del pumping lemma, scelgo la stringa $w = 0^p 1^p$ con quindi $|w| = 2p > p$, visto che $|xy| < p \implies y$ è composta da solo 0, questo vuol dire che con indice $i = 2$:

$$xy^2 z = 0^q 1^p \; q > p \implies xy^2 z \notin L$$

Quindi il linguaggio non è regolare.

2

Linguaggi acontestuali

2.1 Grammatiche acontestuali

Grammatica acontestuale (CFG)

Una **CFG (Context-free Grammar)** è una tupla (V, Σ, R, S) in cui:

- V è l'insieme delle **variabili**
- Σ è l'insieme dei **terminali** per cui $V \cap \Sigma = \emptyset$
- R è l'insieme delle **regole** nella forma $R : V \to (V \cup \Sigma)^*$
- S è la variabile iniziale della grammatica

Esempio:
Data la grammatica $G = (\{A, B\}, \{0, 1, \#\}, R, A)$ in cui R ha le seguenti regole:

- $A \to 0A1$
- $A \to B$
- $B \to \#$

Le regole possono essere scritte in modo contratto nel caso in cui una variabile A abbia diverse regole $A \to X_1, A \to X_2, \dots, A \to X_n$, scrivendo $A \to X_1|X_2|\dots|X_n$. Nel caso sopra per esempio avremmo potuto scrivere $A \to 0A1|B$.

Produzione e derivazione

Data una grammatica $G = (V, \Sigma, R, S)$, u, v, w stringhe di variabili o terminali ed esiste una regola $A \to w$, allora la stringa uAv **produce** la stringa uwv, scritto come:

$$uAv \Rightarrow uwv$$

Se invece esistono un insieme di stringhe $u_1, \dots, u_k$ tale che:

$$u \Rightarrow u_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_k \Rightarrow v$$

allora la stringa u **deriva** v, scritto come:

$$u \overset{*}{\Rightarrow} v$$

Esempio:
Data la grammatica con le regole:

$$E \to E + E|E \cdot E|(E)|0|\dots|9$$

Possiamo derivare la stringa:

$$E \Rightarrow E \cdot E \Rightarrow (E) \cdot E \Rightarrow (E + E) \cdot E \Rightarrow (3 + 4) \cdot 5$$

Linguaggio di una grammatica

Data una grammatica $G = (V, \Sigma, R, S)$, il linguaggio generato da G è l'insieme delle stringhe che si possono derivare da S:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* | S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

Esempio:
Data la CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ con le regole:

$$S \to \varepsilon|aSb|SS$$

allora:

- $S \Rightarrow aSb \Rightarrow a\varepsilon b = ab \implies ab \in L(G)$
- $S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbaSb \Rightarrow a\varepsilon ba\varepsilon b = abab \implies abab \in L(G)$

Classe dei linguaggi acontestuali

Dato un alfabeto Σ, la **classe dei linguaggi acontestuali** di Σ, scritta come CFL, è l'insieme dei linguaggi per cui esiste una grammatica che li accetta:

$$\text{CFL} = \{L \subseteq \Sigma^* | \exists CFGG\ L(G) = L\}$$

2.1.1 Grammatiche ambigue

Data una CFG G e una stringa w è possibile che esistano più derivazioni di w, cioè passaggi diversi che portano alla stringa w.
Esempio:
Data la CFG con regole:

$$E \to E + E|E \cdot E|a$$

la stringa $a + a \cdot a$ può essere derivata in due modi:

1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E \cdot E \Rightarrow a + a \cdot a$
2. $E \Rightarrow E \cdot E \Rightarrow E + E \cdot E \Rightarrow a + a \cdot a$

Derivazione a sinistra e grammatica ambigua

Data una CFG G e una stringa w, una **derivazione a sinistra** è una derivazione $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ in cui ad ogni passo viene sostituita la variabile più a sinistra. Questo tipo di derivazione diminuisce le derivazioni multiple, ma ci sono comunque alcuni casi in cui può esistere più di una derivazione per una stringa.
Se una grammatica ha almeno una stringa con derivazioni a sinistra multiple allora la grammatica si dice **ambigua**.

2.2 Forma normale di una grammatica

Forma normale di una grammatica

Una CFG G è in **forma normale (CNF)** se tutte le regole sono della forma:

$$A \to BC$$
$$A \to a$$
$$S \to \varepsilon$$

in cui $A \in V, a \in \Sigma$ e $B, C \in V - \{S\}$

Trasformazione di una CFG in forma normale

Data una CFG G è sempre possibile trasformarla in una CFG G' in forma normale per cui:

$$L(G) = L(G')$$

Dimostrazione:
Data una CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$, la CFG G' in forma normale si ottiene con i passaggi:

1. Aggiungo una variabile iniziale S_0 e una regola $S_0 \to S$
2. Elimino le ε-regole, cioè quelle nella forma $A \to \varepsilon$ con $A \neq S_0$ e per ogni regola contente A nella parte destra aggiungo una regola con quella occorrenza eliminata. Se più di una A è presente nella parte destra allora aggiungo una regola per ogni combinazione di occorrenze eliminate.
   Per esempio se elimino la regola $A \to \varepsilon$ e esiste la regola $B \to uAvAw$ allora aggiungerò le regole $B \to uvAw|uAvw|avw$
3. Elimino le regole unitarie, cioè nella forma $A \to B$ e per ogni regola della forma $B \to u$ in cui u è una stringa di variabili e terminali, aggiungo una regola $A \to u$
4. Per ogni regola $A \to v_1v_2 \dots v_k$ in cui v è una variabile o terminale singolo e $k \geq 3$, creo

una serie di variabili $A_1, \dots, A_{k-2}$ per cui:

$$\begin{gathered}A \to v_1A_1 \\ A_1 \to v_2A_2 \\ \dots \\ A_{k-1} \to v_{k-1}v_k\end{gathered}$$

ed elimino la regola $A \to v_1v_2 \dots v_k$

5. Per ogni regola nella forma $A \to aB$ oppure $A \to Ba$, si crea una nuova variabile U e la regola $U \to a$ e si sostituisce la regola $A \to aB$ con $A \to UB$ oppure la regola $A \to Ba$ con $A \to BU$

Esempio:
Data la CFG con stato iniziale S e regole:

$$\begin{aligned}&S \to ASA|aB \\ &A \to B|S \\ &B \to b|\varepsilon\end{aligned}$$

Per ceare la CFG in forma normale corrispondente seguo i passaggi:

1. Aggiungo la variabile iniziale S_0 e la regola $S_0 \to S$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S_0 \to S} \\ &S \to ASA|aB \\ &A \to B|S \\ &B \to b|\varepsilon\end{aligned}$$

2. Elimino le ε-regole:

   2.1 Elimino $B \to \varepsilon$:

$$\begin{aligned}&S_0 \to S \\ &S \to ASA|aB|\boldsymbol{a} \\ &A \to B|S|\boldsymbol{\varepsilon} \\ &B \to b|\cancel{\varepsilon}\end{aligned}$$

   2.2 Elimino $A \to \varepsilon$:

$$\begin{aligned}&S_0 \to S \\ &S \to ASA|aB|a|\boldsymbol{AS}|\boldsymbol{SA}|\boldsymbol{S} \\ &A \to B|S|\cancel{\varepsilon} \\ &B \to b\end{aligned}$$

3. Elimino le regole unitarie:

3.1 Elimino $S \to S$ e $S_0 \to S$:

$$\begin{aligned}
&S_0 \to \cancel{S}|\boldsymbol{ASA}|\boldsymbol{aB}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{AS}|\boldsymbol{SA}\\
&S \to ASA|aB|a|AS|SA|\cancel{S}\\
&A \to B|S\\
&B \to b
\end{aligned}$$

3.2 Elimino $A \to B$ e $A \to S$:

$$\begin{aligned}
&S_0 \to ASA|aB|a|AS|SA\\
&S \to ASA|aB|a|AS|SA\\
&A \to \cancel{B}|\cancel{S}|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{ASA}|\boldsymbol{aB}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{AS}|\boldsymbol{SA}\\
&B \to b
\end{aligned}$$

4. Separo le regole con tre o più elementi a destra e le divido in regole con due elementi a destra:

$$\begin{aligned}
&S_0 \to \cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA\\
&S \to \cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA\\
&A \to b|\cancel{ASA}|\boldsymbol{AC}|aB|a|AS|SA\\
&\boldsymbol{C \to SA}\\
&B \to b
\end{aligned}$$

5. Converto le regole con due elementi a destra di cui almeno uno un terminale:

$$\begin{aligned}
&S_0 \to AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA\\
&S \to AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA\\
&A \to b|AC|\cancel{aB}|\boldsymbol{UB}|a|AS|SA\\
&C \to SA\\
&\boldsymbol{U \to a}\\
&B \to b
\end{aligned}$$

2.3 Automi a Pila

Automa a Pila (PDA)

Un **PDA (Push-Down Automata)** è una tupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ in cui:

- Q è l'insieme degli stati dell'automa
- Σ è l'alfabeto dell'automa
- Γ è l'alfabeto della pila (stack)
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ è la funzione di transizione per cui se $(q_2, c) \in \delta(q_1, a, b)$ allora:
  l'automa legge un simbolo $a \in \Sigma_\varepsilon$ e se in cima allo stack c'è $b \in \Gamma_\varepsilon$ passa dallo stato q_1 a q_2 e sostituisce b con c. Viene scritto come $a; b \to c$
- q_0 è lo stato iniziale
- F è l'insieme degli stati accettanti

Un PDA tramite la funzione δ, se $(q_2, c) \in \delta(q_1, a, b)$ ci sono diversi casi:

- $a, b \neq \varepsilon, c = \varepsilon$ $(a; b \to \varepsilon)$: l'automa legge a e se in cima allo stack c'è b passa dallo stato q_1 allo stato q_2 e rimuove b dallo stack (pop)
- $a, c \neq \varepsilon, b = \varepsilon$ $(a; \varepsilon \to c)$: l'automa legge a e passa dallo stato q_1 allo stato q_2 e aggiunge c allo stack (push)
- $a \neq \varepsilon, b, c \neq \varepsilon$ $(a; \varepsilon \to \varepsilon)$: l'automa legge a e passa dallo stato q_1 allo stato q_2 senza modificare lo stack

Una stringa $w = w_1 \dots w_k$ è accettata da un PDA se esiste una serie di stati $q_0 \dots q_{k+1}$ e una serie di stringhe $s_1 \dots s_n$ per cui:

- $s_0 = \varepsilon$ (pila vuota)
- $\forall i (q_{i+1}, a) \in \delta(q_i, w_i, b)$ con $s_i = bt$ e $s_{i+1} = at$
- $q_{k+1} \in F$

Passo di computazione di un PDA

Un **passo di computazione** è una relazione binaria con simbolo $\vdash_P$ per cui:

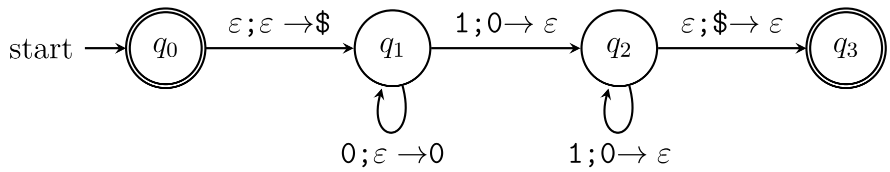
$$(q_1, ax, by) \vdash_P (q_2, x, cy) \iff (q_2, c) \in \delta(q_1, a, b)$$

La **chiusura transitiva** di $\vdash_P$, scritta come $\vdash_P^*$ definisce la transizione estesa per cui:

$$L(P) = \{w \in \Sigma^* | (q_0, w, \varepsilon) \vdash_P^* (q, \varepsilon, y) \land q \in F\}$$

Questa definizione sarebbe equivalente se sostituissimo (q, ε, y) con $(q, \varepsilon, \varepsilon)$, perchè è sempre possibile svuotare lo stack senza cambiare il linguaggio.

Esempio:
Dato il linguaggio $L = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$, il PDA equivalente è:



Linguaggi accettati da PDA

Dato un alfabeto Σ, definiamo l'insieme dei linguaggi accettati da un PDA come:

$$\mathcal{L}(PDA) = \{L \subseteq \Sigma^* | \exists PDAP\ L(P) = L\}$$

2.4 Equivalenza tra CFG e PDA

Conversione da CFG a PDA

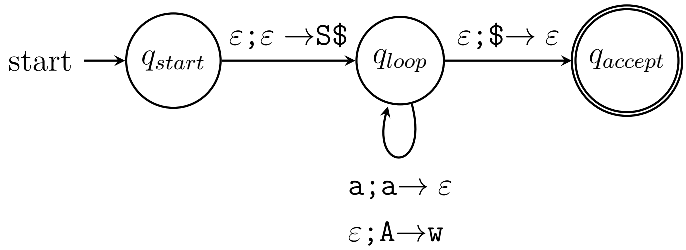
Date le due classi di linguaggi CFL e $\mathcal{L}$(PDA), si ha che:

$$\text{CFL} \subseteq \mathcal{L}(\text{PDA})$$

Dimostrazione:
Dato un linguaggio $L \in$ CFL, esiste una grammatica $G = (V, \Sigma, R, S) | L(G) = L$.
Costruiamo un PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, F)$ tale che:

- $Q = (q_{start}, q_{loop}, q_{accept}) \cup E$, per cui E sono gli stati aggiunti per far si che δ esegua un push o un pop di un solo simbolo alla volta
- $\Gamma = V \cup \Sigma$
- $F = q_{accept}$
- δ è una funzione per cui:
  - $\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = (q_{loop}, S\$)$
  - $\forall A \in V\ \delta(q_{loop}, \varepsilon, A) = \{(q_{loop}, w) | (A \to w) \in R \wedge u \in \Gamma^*\}$
  - $\forall a \in \Sigma\ \delta(q_{loop}, a, a) = (q_{loop}, \varepsilon)$
  - $\delta(q_{lopp}, \varepsilon, \$) = (q_{accept}, \varepsilon)$

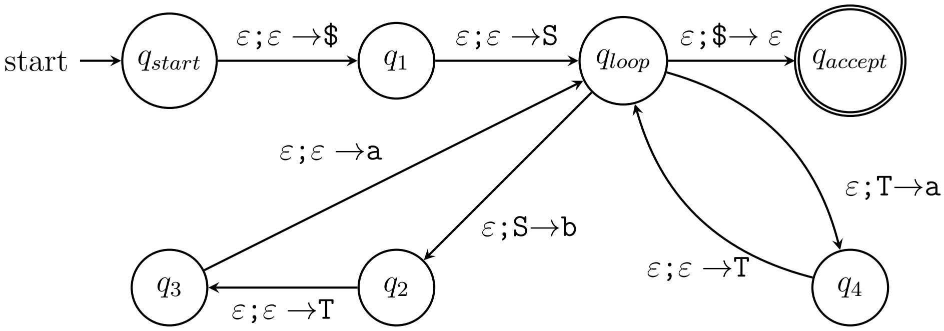
Graficamente un PDA schematizzato secondo queste regole:



Esempio:
Data la grammatica G con regole:

$$S \to aTb|b$$
$$T \to Ta|\varepsilon$$

Il PDA associato sarà:



Conversione da PDA a CFG

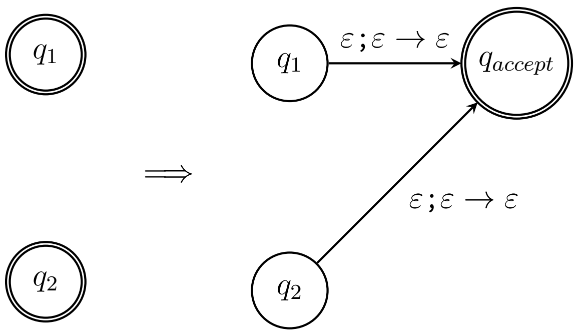
Date le due classi di linguaggi CFL e $\mathcal{L}$(PDA), si ha che:

$$\mathcal{L}(\text{PDA}) \subseteq \text{CFL}$$

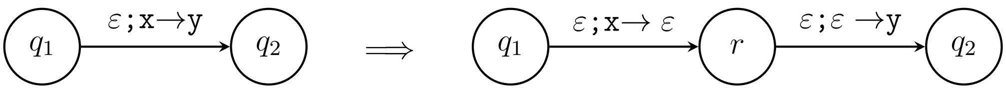
Dimostrazione:
Dato un linguaggio $L \in \mathcal{L}(\text{PDA})$, esiste un PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)|L(P) = L$.
Costruiamo un PDA $P' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, q_{accept})$ scritto in **forma canonica** per cui:

- Il PDA inizia e finisce la computazione con la pila vuota, quindi con:

- Ha un solo stato accettante, quindi:



- Il PDA esegue solo un push o pop alla volta (non contemporaneamente), quindi:



Definiamo la variabile $A_{p,q}$ come la variabile che deriva tutte le stringe generabili passando dallo stato p allo stato q, per cui:

- $\forall p \in Q'$:
$$(A_{p,p} \to \varepsilon) \in R$$
- $\forall p, q, r \in Q'$:
$$(A_{p,q} \to A_{p,r}A_{r,q}) \in R$$
- $\forall p, q, r, s \in Q', u \in \Gamma, a, b \in \Sigma_\varepsilon$:
$$(A_{p,q} \to aA_{r,s}b) \in R \iff (r, u) \in \delta'(p, a, \varepsilon) \land (q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u)$$

2.5 Chiusura dei linguaggi acontestuali

Chiusura dell'unione in CFL

L'unione è chiusa in CFL, cioè:

$$\forall L_1, \ldots, L_k \in \text{CFL} \implies \bigcup_{i=1}^{k} L_i \in \text{CFL}$$

Dimostrazione:
Dati $L_1, \ldots, L_k \in \text{CFL}$, allora esistono le CFG $G_1, \ldots, G_k$ per cui
$G_i = (V_i, \Sigma_i, R_i, S_i) | L(G_i) = L_i$.
Creo la CFG $G = (V, \Sigma, R, S)$ in cui:

- S è un nuovo stato iniziale
- $V = \bigcup_{i=0}^{k} V_i \cup \{S\}$
- $\Sigma = \bigcup_{i=0}^{k} \Sigma_i$
- $R = \bigcup_{i=0}^{k} R_i \cup \{S \to S_j | j \in [1, k]\}$

Presa una strina $w \in \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, allora $\exists j | w \in L_j$, ma visto che esiste $(S \to S_j) \in R$ allora:

$$w \in L_j \implies S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies S \Rightarrow S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies w \in L(G)$$

Data invece $w \in L(G)$, le uniche regole applicabili su S sono $\{S \to S_j | j \in [1, k]\}$, allora:

$$w \in L(G) \implies \exists j | S \Rightarrow S_j \overset{*}{\Rightarrow} w \implies w \in L_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} L_i$$

Quindi:

$$L_1 \cup \cdots \cup L_k = L(G_1) \cup \cdots \cup L(G_k) = L(G) \in \text{CFL}$$

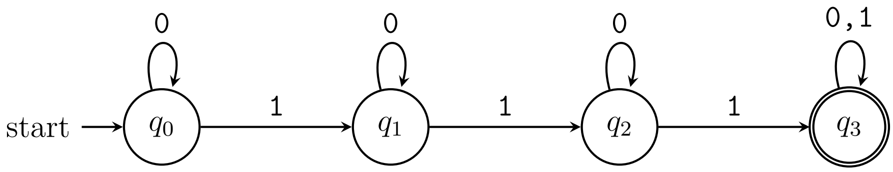
E

Esercizi

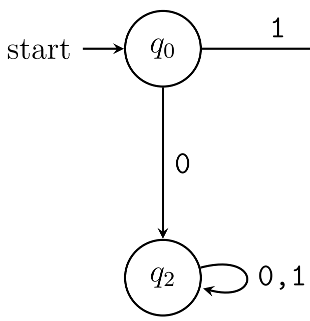
E.1 Esercizi sui linguaggi regolari

E.1.1 Costruire un automa da un linguaggio

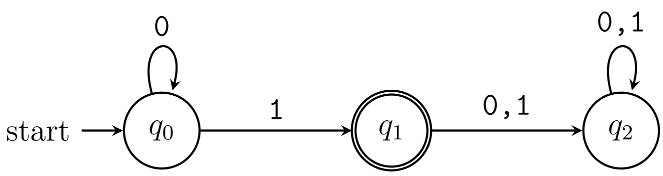
1. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | w_H(x) \geq 3\}$, per cui $w_H(x) = \{\text{numero di 1 in } x\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



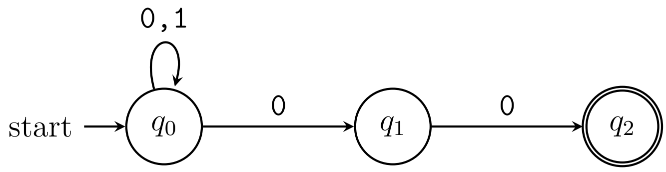
2. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 1y \wedge y \in 0,1^*\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



3. Dato un linguaggio $L(D) = \{x \in \{0,1\}^* | x = 0^n 1\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:



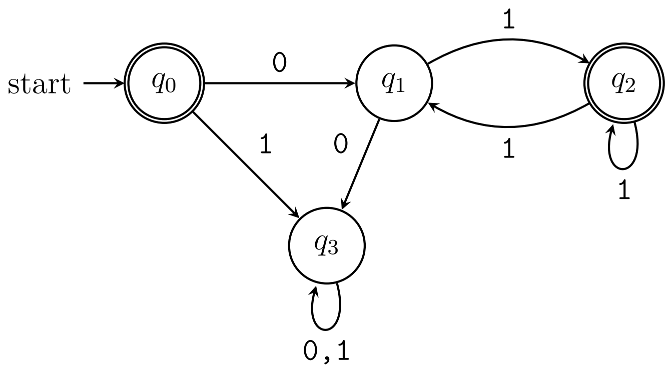
4. Dato un linguaggio $L = \{w \in \{0,1\}^* | w = x00 \; x \in \{0,1\}^*\}$, costruire un NFA che accetta questo linguaggio:



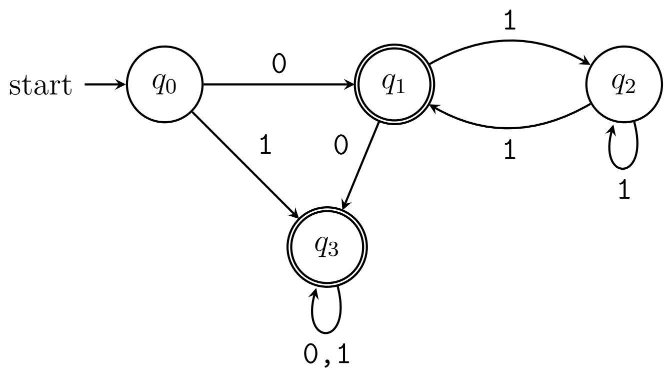
Dimostrazione per induzione:

- Caso base: $w = 00 \implies w \in L$
- Passo induttivo: $w = w'00$ $w = \{0, 1\}^*$
  $w \in L$ perchè $\forall w'$ c'è sempre un ramo di computazione che si trova nello stato q_0. Quindi leggendo 00 alla fine arriva nello stato q_2, quindi $w \in L$.

5. Dato un linguaggio $L = \{w \in \{0, 1\}^* | w \notin (01^+)^*\}$, costruire un DFA che accetta questo linguaggio:
   Posso creare un DFA che accetta il linguaggio complementare $\neg L = \{w \in (01^+)^*\}$:

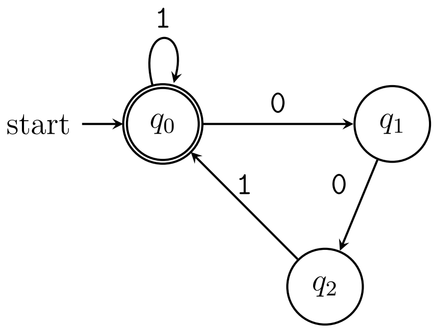


Quindi il DFA che accetta il linguaggio iniziale è quello con gli stati accettanti invertiti rispetto a quello sopra:



E.1.2 Costruire un automa da un'espressione regolare

1. Data l'espressione regolare $r = 1^*(001^+)^*$ costruire il DFA equivalente a r:



E.1.3 Dimostrare che un linguaggio non è regolare

1. Dimostrare che il linguaggio

$$L = \{ww^R | w \in \{0, 1\}^*\}$$

dove w^R è w rovesciata ($w = 100 \implies w^R = 001$) non è regolare:
Presa la stringa $w = 0^p110^p \in L$ con $|w| \geq p$ e $|xy| < p$ allora y contiene solo 0.
Scrivo $w = 0^k0^l0^m110^p$ con:

- $x = 0^k$ $k \geq 0$
- $y = 0^l$ $l > 0$
- $z = 0^m110^p$
- $k + l + m = p$

Con $i = 2$ la stringa $xy^2z = 0^k0^{2l}0^m110^p \implies k + 2l + m > p \implies xy^2z \notin L \implies L$ non è regolare.

2. Dimostrare che il linguaggio

$$L = \{1^{n^2} | n \geq 0\}$$

non è regolare:
Presa la stringa $w = 1^{p^2}$ con $|w| > p$ e $|xy| < p$.
Scrivo $w = 1^k1^l1^{p^2-k-l}$ con:

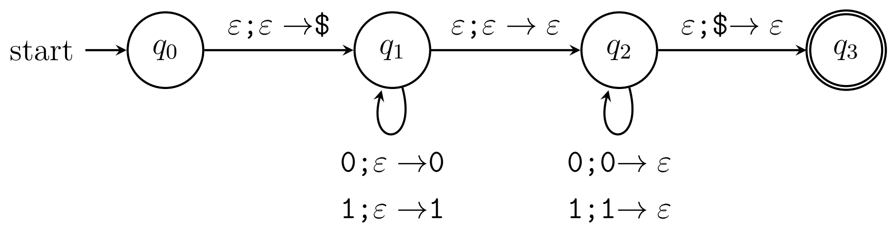
- $x = 1^k$ $k \geq 0$
- $y = 1^l$ $l > 0$
- $z = 1^{p^2-l-k}$
- $k + l \leq p$

Con $i = 2$ la stringa $xy^2z = 1^k1^{2l}1^{p^2-l-k} = 1^{p^2+l} \implies p^2 < |xy^2z| < (p+1)^2 \implies xy^2z \notin L \implies L$ non è regolare.

E.2 Esercizi sui linguaggi acontestuali

E.2.1 Costruire un'automa da un linguaggio acontestuale

1. Dato il linguaggio $L = \{ww^R | w \in \Sigma^*\}$ costruire il PDA associato:


start
q_0
ε;ε →$
q_1
ε;ε → ε
q_2
ε;$→ ε
q_3
0;ε →0
1;ε →1
0;0→ ε
1;1→ ε