Sapienza
Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica
Dipartimento di Informatica

Calcolo Differenziale

Autore:
Simone Lidonnici

7 settembre 2024

Indice

1
Equazioni e Disequazioni

1.1 Primo grado

1.1.1 Equazioni

Equazione di una Retta

Una retta sul piano ha equazione di forma:

$$y = mx + q$$

Preso un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ possiamo calcolare m usando la formula:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \implies y = mx + m(y_1 - x_1)$$

m è anche uguale a $\tan(\theta)$ dove θ è l'angolo tra la retta e l'asse x.

Per risolvere un'equazione di primo grado:

$$y = mx + q \implies mx + q - y = 0 \implies x = -\frac{q - y}{a}$$

1.1.2 Disequazioni

Per risolvere invece una disequazione della forma:

$$ax + b \geq 0$$

dobbiamo distinguere due casi:

- Se $a > 0 \implies x \geq -\frac{b}{a}$
- Se $a < 0 \implies x \leq -\frac{b}{a}$

1.2 Secondo grado

1.2.1 Equazioni

Equazione di una parabola

Un'equazione di una parabola ha forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Per risolverla dobbiamo calcolare il determinante Δ tramite la formula quadratica:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

In base ai 3 valori possibili del Δ la soluzione dell'equazione si trova in modo diverso:

- Se $\Delta > 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Se $\Delta = 0 \implies x = \frac{-b}{2a}$
- Se $\Delta < 0 \implies$ non ci sono soluzioni

1.3 Modulo

Definizione di modulo

Il modulo, scritto $|x|$ indica la distanza di x dallo 0. Il modulo è uguale:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Il modulo ha una proprietà rispetto alla moltiplicazione:

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

Le disequazioni con il modulo si risolvono:

- $|x| \leq a \implies -a \leq x \leq a \implies x \in [-a, a]$
- $|x| \geq a \implies x \leq -a \vee x \geq a \implies x \in [-\infty, -a] \cup [a, \infty]$

Esempio: $|x-2| - 3 \leq 0 \implies |x-2| \leq -3 \implies -3 \leq x-2 \leq 3 \implies -1 \leq x \leq 5$

Disuguaglianza triangolare

La disuguaglianza triangolare dice che:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} -|x| < x < |x| \\ -|y| < y < |y| \end{cases} \implies -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \implies |x + y| \leq |x| + |y|$$

2

Applicazioni

Definizione di Applicazione

Le applicazioni associano ad ogni elemento di un insieme di partenza A un elemento dell'insieme di arrivo B.

$$f : \text{applicazione} \implies \forall a \in A \; \exists f(a) = b \in B$$

$f(b)$ si dice **Immagine** di b.

2.1 Tipi di applicazioni

Applicazioni iniettive

Un'applicazione è **iniettiva** quando non esisto due elementi distinti nell'insieme di partenza che hanno come immagine lo stesso elemento nell'insieme di arrivo.

$$\forall a_1, a_2 \in A \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Esempi:
$f(x) = x^2$ non è iniettiva perché $f(2) = f(-2) = 4$
$f(x) = x + 3$ è iniettiva

Applicazioni suriettive

Un'applicazione è **suriettiva** quando ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di almeno un elemento dell'insieme di partenza.

$$\forall b \in B \implies \exists a \in A | f(a) = b$$

Applicazioni biettive

Un'applicazione è **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

3
Insiemi numerici

Naturali: $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ è un insieme creato considerando la classe degli insiemi che sono in biezione tra loro, questo ci permette di creare i numeri interi considerandone la cardinalità:

- $A = \emptyset \implies$ 0 elementi
- $A = \{\emptyset\} \approx \{0\} \implies$ 1 elementi
- $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \approx \{0, 1\} \implies$ 2 elementi

$\approx$ significa che sono in biezione.

Interi: $\mathbb{Z}$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri tali che $-n + n = 0$.

Razionali: $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} = \{..., \frac{7}{10}, \frac{25}{2}, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri nella forma $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Reali: $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R} = \{.\pi, \sqrt{3}, ...\}$ è un insieme contenente tutti i numeri che non si possono scrivere nella forma $\frac{p}{q}$.

3.1 Estremi di un insieme

Limitato

Un insieme A si dice **limitato superiormente** se:

$$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in A \ y < x$$

Un insieme A si dice **limitato inferiormente** se:

$$\exists x \in \mathbb{R} | \forall y \in A \ y > x$$

Un insieme A si dice **limitato** se lo è sia superiormente che inferiormente.

Massimo e Minimo

Un insieme A limitato superiormente ha **massimo** se:

$$\exists x_{max} \in A | \forall y \in A \ y < x_{max}$$

Un insieme A limitato inferiormente ha **minimo** se:

$$\exists x_{min} \in A | \forall y \in A \ y > x_{min}$$

Maggioranti e Minoranti

Un **maggiorante** di un insieme A è un valore z tale che:

$$\forall y \in A \ y < z$$

Un **minorante** di un insieme A è un valore z tale che:

$$\forall y \in A \ y > z$$

Estremo superiore e inferiore

L'**estremo superiore** sup_A di un insieme A è il minimo dei maggioranti, in caso esista x_{max} allora $sup_A = x_{max}$, nel caso in cui A non sia limitato superiormente allora $sup_A = \infty$.
L'**estremo inferiore** inf_A di un insieme A è il massimo dei minoranti, in caso esista x_{min} allora $inf_A = x_{min}$, nel caso in cui A non sia limitato inferiormente allora $inf_A = -\infty$.

Esempio:
$A = [0, 1)$
x_{max} non esiste, ma $sup_A = 1$
$x_{min} = 0 = inf_A$

4

Funzioni elementari

4.1 Radicali

Unicità dei radicali

Per ogni valore y in $\mathbb{R}^+$ esiste un solo numero che elevato alla n fa y:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \ \exists! x \in \mathbb{R}^+ | x^n = y$$

Da questo possiamo dire anche che:
$x^n = y \implies x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{x}}$
$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

4.2 Logaritmi

Definizione di logaritmo

Un **logaritmo** è una funzione che dato un numero y e una base a calcola il valore x tale che $a^x = y$:

$$\log_a y = x \implies y = a^x$$

Anche per i logaritmi esiste il teorema di unicità cioè:

$$\forall a, y > 0, a \neq 1 \ \exists! x \in \mathbb{R} | a^x = y$$

Da questo possiamo dire anche che:
$a^{\log_a y} = y$

I logaritmi hanno diverse proprietà:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$

4.3 Sommatoria

Definizione di logaritmo

Una **sommatoria** è una funzione che dato un indice i e uno finale n somma tutti i valori dipendenti da questo insieme di indici:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

In una sommatoria è possibile variare il valore di questi indici modificando il contenuto della sommatoria, ad esempio:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

Esempi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

4.3.1 Coefficiente binomiale

Definizione di coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale** tra due numeri n e k è un valore:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Dove $n!$ è un fattoriale cioè:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 = \prod_{i=1}^{n} i$$

5

Funzioni reali

5.1 Funzioni reali a variabili reali

Definizione di funzione reale

Una **funzione reale** è una funzione che ha come insieme di partenza e arrivo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, cioè della forma:

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies x \in I \to f(x) \in \mathbb{R}$$

L'insieme dei punti di R^2 definiti come $(x, f(x)) \forall x \in I$ si dice **grafico** della funzione f.

5.2 Proprietà delle funzioni reali

Limiti delle funzioni

Una funzione è **limitata superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R} | f(x) \leq M \forall x \in I$.
Una funzione è **limitata inferiormente** se $\exists N \in \mathbb{R} | f(x) \geq N \forall x \in I$.
Una funzione è **limitata** se lo è sia inferiormente che superiore.

Proprietà di simmetria

Una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con insieme I simmetrico rispetto all'origine cioè $x \in I \implies -x \in I$, è:

- f è **pari** se $\forall x \in I f(x) = f(-x)$, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'asse y
- f è **dispari** se $\forall x \in I f(-x) = -f(x)$, cioè il grafico è simmetrico rispetto all'origine

5.3 Funzioni monotone

Definizione di funzione monotona

Una funzione f è **monotona** in un intervallo I se in quell'inervallo il grafico ha sempre lo stesso andamento (sale solo o scende solo), più precisamente è:

- **Monotona crescente** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ se $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- **Monotona decrescente** in I se $\forall x_1, x_2 \in I$ se $x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Esempio:
$f(x) = x^2$
monotona crescente in $[0, \infty)$
monotona descrescente in $(-\infty, 0]$

5.4 Funzioni periodiche

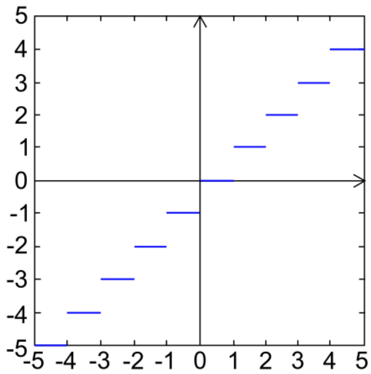
Una funzione f è periodica di periodo T se $\forall x \in I, k \in \mathbb{Z} f(x + kT) = f(x)$.
Esempi:
$f(x) = \sin(x)$ è 2π periodica
$f(x) = \tan(x)$ è 2π periodica

Parte intera di x

La funzione **parte intera di** x, scritta $[x]$ è la funzione:

$$f(x) = [x] = n \in \mathbb{Z} | n \leq x \wedge n + 1 \geq x$$

Grafico:



5.5 Composizione di funzioni

Comporre due funzioni

Una composizione di funzioni f e g, scritta $f \circ g$ è una funzione $h(x) = f(g(x))$. Per poter fare una composizione di funzioni è necessario che:

- $Im(g) = y \in \mathbb{R} | \exists x \in Dom(g) | g(x) = y$
- $Im(g) \subseteq Dom(f)$

La funzione neutra rispetto alla composizione è $Id(x) = x$.

Esempio:
$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$
$f \circ g = \sin(\frac{1}{x^2})$
$g \circ f = \frac{1}{\sin(x)^2}$

5.5.1 Funzione inversa

Definizione di funzione inversa

Data una funzione f, la **funzione inversa** rispetto ad f è la funzione, scritta come $f^{-1}(x)$ che composta con f da come risultato x, cioè:

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = x \; \forall x \in Dom(f)$$
$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = x \; \forall x \in Dom(f)$$

La funzione inversa esiste solo se f è iniettiva.

Esempio:
$f(x) = x^2$
$Dom(f) = [0, \infty) \implies$ restringiamo il dominio per renderla iniettiva
$f^{-1} = \sqrt{x}$

5.6 Operazioni su grafici

Preso il grafco di una funzione $f(x)$ possiamo modificare il grafico in diversi modi:

- $g(x) = f(x + h)$ in questo caso:
  - se $h > 0$ il grafico si sposta a sinistra
  - se $h < 0$ il grafico si sposta a destra
- $g(x) = f(x) + k$ in questo caso:
  - se $k > 0$ il grafico si sposta in alto
  - se $k < 0$ il grafico si sposta in basso
- $g(x) = -f(x)$ in questo caso:
  - la funzione si ribalta verticalmente

6

Successioni

Definizione di successione

Una **successione** è una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \; f(n) = a_n$$

Esempi:
$a_n = \frac{1}{n} \implies a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, ...$
Successione di Erone:
$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$
$a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{17}{12}, a_3 = \sqrt{2}$

6.1 Limiti

Definizione di limite

Una successione si dice che **converge** a $l \in \mathbb{R}$ o che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \mathbb{N} = n(\epsilon) | \forall n \geq \mathbb{N} \implies |a_n - l| \leq \epsilon$$

Successioni divergenti

Una successione a_n si dice **diverge** a ∞ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se:

$$\forall M > 0 \; \exists N = N(M) | \forall n > N \implies a_n \geq M$$

Una successione a_n si dice **diverge** a $-\infty$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ se:

$$\forall M > 0 \; \exists N = N(M) | \forall n > N \implies a_n \leq M$$

Esempio:
$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \implies \forall M > 0 \; \exists \mathbb{N} = \sqrt{M} | \forall n > \sqrt{M} \implies a_n \geq M$
$\lim_{n\to\infty} (-2)^n \neq \infty \neq -\infty$

6.2 Successioni monotone

Teorema sulle successioni monotone

Data una successione monotona a_n e esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$:

- se è una successione limitata $\lim_{n\to\infty} = l \in \mathbb{R}$
- se è una successione non limitata:
  - $\lim_{n\to\infty} = \infty$ se è monotona crescente
  - $\lim_{n\to\infty} = \infty$ se è monotona decrescente

7
Limiti

7.1 Definizione topologica di limite

Intorno

Un **Intorno** di un valore $c \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto che contiene c:

$$U_c = (a, b) | c \in (a, b)$$

Nel caso degli infiniti:
$U_\infty = (a, \infty)\ \forall a \in \mathbb{R}$
$U_{-\infty} = (-\infty, b)\ \forall b \in \mathbb{R}$

Data la definizione di intorno possiamo dare un'altra definizione di funzione:

$$\forall c, l \in \mathbb{R}\ f(c) = l \text{ se } \forall U_l\ \exists U_c | \forall x \in U_c\ f(x) \in U_l$$

7.2 Algebra dei limiti

Nei limiti abbiamo molti casi noti:

- $\lim_{n\to+\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ \text{forma indeterminata} & a = 1 \\ 0 & a < 1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & a < 1 \end{cases}$

Presi due limiti $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = ab$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Presi due limiti $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ con $b \in \mathbb{R}$:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} +\infty & b > 0 \\ \text{Non definibile a priori} & b = 0 \\ -\infty & b < 0 \end{cases}$

7.3 Teoremi sui limiti

Teorema della permanenza del segno

Dato un limite positivo o negativo, sicuramente da un determinato valore di n in poi la funzione sarà sempre dello stesso segno del limite:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0 \implies \exists N | \forall n > N \; a_n > 0$$

Teorema del confronto

Date due successioni con limiti non infiniti $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, allora possiamo dire che:

$$a_n \geq b_n \; \forall n \implies a \geq b$$

Unicità dei limiti

Se un limite ha valore $l \in \mathbb{R}$, questo è l'unico limite e non possono esisterne altri:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \implies \nexists l' \neq l | \lim_{x\to+\infty} f(x) = l'$$

7.4 Confronti e stime asintotiche

Date due successioni con limiti infiniti $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & a_n \text{ ha un ordine di infinito minore di } b_n \\ +\infty & a_n \text{ ha un ordine di infinito maggiore di } b_n \\ l \in \mathbb{R} & a_n \text{ ha un ordine di infinito uguale a } b_n \end{cases}$$

Nel caso in cui $a_n = n^\alpha, b_n = n^\beta$ con $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha-\beta < 0 \\ +\infty & \alpha-\beta > 0 \\ 1 & \alpha-\beta = 0 \end{cases}$$

Ordini di infinito

Per sapere quale ordine di infinito è più grande di un altro possiamo seguire questo ordine:

$$c \in \mathbb{R} < \log(n) < n^a < a^n < n! < n^n$$

7.5 Continuità

Definizione di funzione continua

Una funzione f è **continua** in un punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Queste funzioni sono sempre continue:

- Potenze:x^a
- Esponenziali: e^x, a^x
- Logaritmiche: $log_a x$
- $\sin(x)$ e $\cos(x)$

7.5.1 Teoremi sulla continuità

Teorema di esistenza degli zeri

Data una funzione continua f in $[a, b]$:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a, b) | f(x_0) = 0$$

Corollario:

$$f(a) \neq f(b) \implies \exists m \in [f(a), f(b)] | \exists x_0 \in (a, b) | f(x_0) = m$$

Teorema di Weierstrass

Data una funzione continua f in $[a, b]$ allora esistono minimo e massimo di f in $[a, b]$.
Corollario:

$$\forall l \in [min(f), max(f)] \exists x \in [a, b] | f(x) = l$$

Il teorema non vale se:

1. L'intervallo è aperto
2. L'intervallo non è limitato

Esempi:
$f(x) = x$ in $(0, 1)$
$inf_f = 0$ ma il minimo non esiste
$sup_f = 1$ ma il massimo non esiste

$f(x) = \frac{1}{2}$ in $[1, +\infty)$
$inf_f = 0$ ma il minimo non esiste
$sup_f = 1 = x_{max}$

Funzioni inverse continue

Una funzione f è invertibile solo se continua e monotona, la sua inversa sarà anch'essa continua e monotona.
Dimostrazione:
Presi due $x_1, x_2 \in [a, b]$
Se $f(x_1) \neq f(x_2) \implies f(x_1) > f(x_2) \vee f(x_1) < f(x_2)$
f^{-1} è quindi continua e monotona perché:
$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2) \implies f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(x_2)$

8

Derivate

Definizione di derivata

La **derivata** di una funzione in un punto indica quanto cresce la funzione in quel punto. Per trovare la crescita media in un intervallo aggiungiamo un incremento h ad x:

$$\text{Crescita media} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \tan\theta$$

Dove θ è l'angolo tra la retta passante per i punti $(x, x+h)$ e l'asse delle x.
Facendo tendere h a 0 otteniamo la crescita istantanea, l'effettiva derivata in un punto x, scritta come $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

8.1 Punti di non deriavbilità

Una funzione f è **derivabile** in un intervallo $[a, b]$ solo se:

$$\forall x \in [a,b]\ \exists f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivabilità implica continuità

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora è anche continua in quel punto.
Dimostrazione:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \implies \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \implies \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0 \implies$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = 0 \implies f'(x_0)\cdot h = 0$

Ci sono diversi punti in una funzione in cui questa può essere non derivabile.

8.1.1 Tipi di punti di non derivabilità

Punti angolosi

Un punto x_0 è un **punto angoloso** in una funzione f se il limite destro e sinistro sono diversi ma entrambi finiti:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to x_0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1\in\mathbb{R}\\ \lim_{h\to x_0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\} l_1\neq l_2$$

Esempio:
$f(x)=|x|$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1\\ \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1\end{aligned}\right\} \implies f'(0) \text{ non esiste e } x_0=0 \text{ è un punto angoloso}$$

Cuspide

Un punto x_0 è un **punto angoloso** in una funzione f se il limite destro e sinistro sono diversi e entrambi infiniti:

$$\lim_{h\to x_0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$$
$$\lim_{h\to x_0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$$

8.2 Algebra delle derivate

1. $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$
2. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
3. $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
4. $[\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$
5. $[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

8.3 Massimi e minimi

Massimo e minimo globale

Un punto x_0 è un **massimo globale** per f se:

$$\forall x \in Dom(f)\ f(x) \leq f(x_0)$$

Un punto x_0 è un **minimo globale** per f se:

$$\forall x \in Dom(f)\ f(x) \geq f(x_0)$$

Massimo e minimo locale

Un punto x_0 è un **massimo locale** per f in un intervallo $[a, b]$ se:

$$\exists \delta > 0 | \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\ f(x) \leq f(x_0)$$

Un punto x_0 è un **minimo locale** per f in un intervallo $[a, b]$ se:

$$\exists \delta > 0 | \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\ f(x) \geq f(x_0)$$

8.3.1 Ricerca dei punti estremali

Quando ricerchiamo dei **punti estremali**, cioè punti per cui $f'(x_0) = 0$, ci sono 4 casi possibili:

1. $f'(x) > 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ se $x > x_0 \implies x_0$ massimo
2. $f'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ se $x > x_0 \implies x_0$ minimo
3. $f'(x) > 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ se $x > x_0 \implies x_0$ punto di flesso ma non estremale
4. $f'(x) < 0$ se $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ se $x > x_0 \implies x_0$ punto di flesso ma non estremale

Esempio:
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11 - 4)$
$f'(x) = 0 \implies (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \implies x = 1, 2, 3$

8.4 Teoremi sulle derivate

Teorema di Fermat

Data una funzione f derivabile in un intervallo $[a,b]$ con un punto $x_0 \in [a,b]$ punto estremale (massimo o minimo) allora $f'(x_0) = 0$.
Corollario:
$f'(x_0) = 0 \not\Longrightarrow x_0$ punto estremale.
Dimostrazione:
x_0 è un punto di minimo locale quindi $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \implies f(x) > f(x_0)$
$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$
$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$
x_0 derivabile $\implies \lim\limits_{h \to 0^+} = \lim\limits_{h \to 0^-} \implies \lim\limits_{h \to 0^\pm} = 0$

Teorema di Lagrange

Data una funzione f derivabile in un intervallo $[a,b]$ allora:

$$\exists x_0 \in [a,b] | f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{pendenza media}$$

Dimostrazione:
La funzione che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ha equazione
$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
Scriviamo $g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)]$, allora abbiamo:

- $g(a) = 0$
- $g(b) = 0$

g è continua quindi ha minimo e massimo in $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass
Il minimo $x_0 \in (a,b) \implies g'(x_0) = 0$, ma
$g'(x_0) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \implies f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema di De L'Hopital

Date due funzioni $f(x), g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dimostrazione:
Sappiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \implies$ applicando Lagrange
$\implies \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

8.5 Derivata seconda

Definizione di derivata seconda

Data una funzione f la **derivata seconda** è $f''(x) = [f'(x)]'$.
La derivata seconda ha un'interpretazione geometrica, cioè il semicerchio che approssima meglio il grafico di f in x:

$$g(x) = r - \sqrt{(r^2 - x^2)} \implies g''(x) = (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$g(0) = 0 \implies g''(0)(r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}$$

Dove $g''(0)$ è la curvatura del grafico e r il raggio di curvatura.

8.5.1 Concavità e convessità

Definizione di concavità e convessità

La derivata seconda in base al segno ci dà informazioni sul grafico della funzione, in particolare:

- f è convessa in $[a, b]$ se:
  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \forall t \in (0, 1)\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$
  Cioè il grafico della funzione è sotto il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, (x_2))$
- f è concava in $[a, b]$ se:
  $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \forall t \in (0, 1)\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$
  Cioè il grafico della funzione è sopra il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, (x_2))$

La derivata seconda ha diversi teoremi che la riguardano:

1. $f'(x) > 0 \forall x \in [a, b] \implies f(x)$ convessa e $f'(x)$ monotona crescente in $[a, b]$

2. $f'(x) < 0 \forall x \in [a, b] \implies f(x)$ convessa e $f'(x)$ monotona decrescente in $[a, b]$
3. Un punto x_0 si dice punto di flesso se $f''(x_0) = 0$ e f è convessa in (a, x_0) e concava in (x_0, b)

9
Studio di funzione

9.1 Ordine delle operazioni

Per studiare una funzione bisogna seguire dei passi precisi:

1. Trovare l'insieme di definizione (Dominio)
2. Controllare se la funzione è pari o dispari
3. Controllare i punti di intersezione con gli assi
4. Calcolare i valori estremi del dominio (limiti e asintoti)
5. Vedere se ci sono punti di discontinuità o di non derivabilità
6. Calcolare la derivata prima e eseguirne lo studio del segno
7. Determinare intervalli di monotonia e punti di massimo e minimo
8. Calcolare la derivata seconda e eseguirne lo studio del segno
9. Determinare intervalli di concavità e convessità

9.2 Trovare la retta tangente a una funzione in un punto

Data una funzione f ed un punto x_0, la retta tangente alla funzione in quel punto ha formula $y = mx + q$ in cui:

- $m = f'(x_0)$
- $q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Esempio:
$f(x) = x^2 \quad x_0 = 5$
$f'(x) = 2x$
$m = 2x_0 = 10$
$q = x_0^2 - 2x_0 \cdot x_0 = 25 - 50 = -25$
Retta tangente: $y = 10x - 25$

9.3 Asintoto obliquo

Per trovare l'asintoto obliquo di una funzione f dobbiamo trovare l'equazione $y = mx + q$ in cui:

- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $q = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx$

10

Polinomio di Taylor

Il **polinomio di Taylor** è il polinomio che approssima meglio una funzione f in un punto x_0.

$$f(x_0) = P(x_0)$$
$$\underbrace{f^k(x_0)}_{\text{Derivata k-esima}} = P^k(x_0)$$

In cui:

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(\frac{(x-x_0)^2}{2})+...+f^k(x_0)(\frac{(x-x_0)^k}{k!})$$

Resto di Lagrange

Data una funzione f che è $n+1$ volte derivabile allora:

$$\exists c \in (x_0, x) \vee c \in (x, x_0) | f(x) = P(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1!)}(x-x_0)^{n+1}$$

10.1 Metodo di Newton

Il metodo di Newton è una serie di procedimenti che permette, data una funzione f continua in $[a, b]$ di trovare quel valore x_0 per cui $f(x_0) = 0$.
Ci sono due casi possibili:

1. $f(a)f''(a) > 0 \implies \begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

2. $f(b)f''(b) > 0 \implies \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Andando avanti avremo che $x_n \to x_0$ e $f(x_n) \to 0$

11

Numeri complessi

Definizione di numero complesso

Un numero complesso è un numero scritto nella forma:

$$z = a + bi$$

In cui a è la **parte reale**, scritta come $Re(z)$ e b è la **parte immaginaria** scritta come $Im(z)$ (da non confondere con l'immagine di una funzione).

I numeri complessi si basano sul fatto che $i^2 = -1$, cioè $i = \sqrt{-1}$.
Preso un qualsiasi numero complesso possiamo calcolare diversi altri numeri complessi ad esso collegati:

- Coniugato: $\overline{z} = a - bi$
- Modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Inverso: $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Esempio:
$z = 5 + 6i$
Allora avremo:

- $\overline{z} = 5 - 6i$
- $|z| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$
- $z^{-1} = \frac{5-6i}{25+36} = \frac{5}{61} - \frac{6}{61}i$

11.1 Operazioni con numeri complessi

Le operazioni con numeri complessi si eseguono considerando i come una variabile ma ricordando che $i^2 = -1$.
Esempi:

- Somma: $(2 - 3i) + (3 + 4i) = 5 + 1$
- Moltiplicazione: $(2 + 3i)(4 - 2i) = -6i^2 + 12i - 4i + 8 = 14 + 8i$
- Divisione: $\frac{2+i}{5-i} = \frac{2+i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{10+2i+5i+i^2}{25-i^2} = \frac{10+7i-1}{25+1} = \frac{9}{26} + \frac{7i}{26}$

11.2 Equazioni con numeri complessi

Le equazioni con numeri complessi del tipo $az^2 + bz + c = 0$ si risolvono sempre con la formula quadratica:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solo che questa volta si possono risolvere anche se abbiamo $\Delta < 0$.

Esempio:

$z^2 + 2z + 3 = 0 \implies z = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^3\cdot(-1)}}{2} = \frac{-2\pm 2i\sqrt{2}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$