Calcolo Integrale

1-Serie numeriche

Definizione:

Le **serie numeriche** sono successioni il cui il valore n-esimo è la somma di tutti i valori precedenti della successione.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, ...\}$$

Esempi:

$$a_k = k \implies S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{k+1} \implies S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1} = +\infty \implies S_n \backsimeq \log_2 n = +\infty$$

1.1-Tipi di serie

1.1.1-Serie convergenti e divergenti

Data la successione a_k, S_n può:

- **Convergere** se la successione S_n delle somme parziali della successione a_k è uguale ad un numero finito.

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = l$$

  Esempio:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \implies \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

- **Divergere** se la successione S_n delle somme parziali della successione a_k è uguale a $\pm\infty$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$$

  Esempio:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n \implies \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

- **Non convergere né divergere** se la successione S_n delle somme parziali della successione a_k non è uguale ad un numero finito ma anche $\neq \pm\infty$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \nexists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

  Esempio:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se n è pari} \\ 0 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Non è convergente

1.1.2-Serie geometriche

Una **serie geometrica** è una serie in cui k è l'esponente di un numero reale.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Dimostrazione:

$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \implies q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1} \implies q \cdot S_n - S_n = q^{n+1} - 1 \implies (q-1)S_n = q^{n+1} - 1$

Casi:

Se $a_k = q^k$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{q=0} \\ n+1 & q=1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & q \neq 0,1 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} 0 & -1<q<1 \\ \infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1<q<1 \\ \infty & q \geq 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$$

Esempio:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3*2^k}{5^{k+2}} = 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k+2}} = \frac{3}{25}\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{5})^k = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}$

1.1.3-Serie armoniche

Le serie armoniche sono serie in cui k è al denominatore della successione ed è elevato ad un numero naturale.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

Casi:

- Se $a > 1 \Rightarrow$ converge
- Se $0 < a \leq 1 \Rightarrow$ diverge

Esempi:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n^2} < \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos^2 k}{k^2} < \infty$

1.2-Teoremi

1.2.1-Ordini di infinito

$(\log k)^a_{(a>0)} < k^b_{(b>0)} < A^k_{(k>1)} < k! < k^k$

1.2.2-Teorema condizione necessaria

Se $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to l \Rightarrow a_k \to 0$

Dimostrazione:

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n \Rightarrow S_n - S_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n \to 0$$

Esempio:

$a_k = \frac{1}{k+1} \to 0$ ma $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \to \infty$

1.2.3-Teorema serie a termini positivi

Se $a_k \geq 0 \; \forall k \Rightarrow S_n = \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge a } \infty \end{cases}$

Se $a_k \geq 0$ e $a_k \not\to 0 \Rightarrow S_n \to \infty$

Se $S_n < \infty \implies a_k \to 0$

Dimostrazione:

$$\forall n \implies S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

Esempio:

$a_k = \frac{1}{2^k} \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} \to 2$

1.2.4-Teorema del confronto

Se $0 < a_k < b_k$:

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
- Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Esempi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\tfrac{1}{k^2}) < \tfrac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\tfrac{1}{k^2}) < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\tfrac{1}{k^2}) \implies a_k \to 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\tfrac{1}{k^2}) = \infty$$

1.2.5-Teorema del confronto asintotico

Se $0 < a_k, 0 < b_k$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$:

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Esempio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sin(\tfrac{1}{3^k}) \Rightarrow b_k = \tfrac{2^k}{3^k} \implies \tfrac{a_k}{b_k} = \frac{2^k \sin(\frac{1}{3^k})}{\frac{2^k}{3^k}} = \frac{\sin(\frac{1}{3^k})}{\frac{1}{3^k}} \to 1$$

1.2.6-Teorema della radice e del rapporto

Sia $a_k \geq 0$:

- Radice: $L = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k}$
- Rapporto: $L = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Se $\begin{cases} 0 \leq L < 1 & \text{converge} \\ L > 1 & \text{diverge} \\ L = 1 & \text{non si sa} \end{cases}$

Esempi:

$a_k = \frac{1}{k!}$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1!)}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{(k+1)k!} \to 0 \implies \text{converge}$

$a_k = k(\frac{2}{3})^k$

$\sqrt[k]{k(\frac{2}{3})^k} = \sqrt[k]{k}(\frac{2}{3}) \to \frac{2}{3} < 1 \implies \text{converge}$

1.2.7-Formula di Stirling

$\lim_{k \to \infty} \frac{k!}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}} = 1$

1.2.8-Criterio di Leibnitz

Se $a_k = (-1)^k b^k$ e:

- $b_k > 0$
- b_k decresce
- $b_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b^k < \infty$$

1.2.9-Teorema convergenza assoluta

Si dice che una serie converge o converge assolutamente se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \begin{cases} < \infty & \text{converge} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \\ = \infty & \text{diverge} \end{cases}$$

Se una serie converge assolutamente allora converge

1.2.10-Diagramma di flusso

https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/f5ab6174-b266-4035-9ea2-f304b15d3d30/Diagramma_di_flusso_serie.pdf

1.3-Serie di Taylor

1.3.1-Polinomio di Taylor

Il **Polinomio di Taylor** $T_n(f(x);x_0)$ è un polinomio di grado $\leq n$ che approssima la funzione $f(x)$ nel punto x_0

$$T_n(f(x);x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Da cui:

$$f(x) = T_n(f(x);x_0) + o((x-x_0)^n)$$

In cui $o((x-x_0)^n)$ è una quantità tale che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$$

oppure:

$$o((x-x_0)^n) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in (x, x_0)$

Esempio:

$f(x) = e^x$

$T_n(e^x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^k(0)}{k!}(x-0)^k$

$f^k(0) = e^0 = 1 \ \forall k$

$T_n(e^x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot x^k}{k!} \implies e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

Una **Serie di Taylor** è il Polinomio di Taylor $T_n(f(x);x_0)$ con $n \to \infty$ e coincide perfettamente con $f(x_0)$

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} T_n(f(x);x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

1.3.2-Serie di Taylor notevoli

$\forall x \in \mathbb{R}:$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

$\forall x \in (-1, 1):$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$

$arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$

1.3.3-Calcolo delle derivate e Principio di sostituzione

Anche per le Serie di Taylor vale il **Principio di sostituzione**, quindi se dovessimo calcolare la Serie di Taylor di e^{x^2} basterebbe sostitutire $x^2 = y$

$$e^{x^2} = e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

> Per calcolare la derivata k-esima nel punto $x_0 = 0$ basta moltiplicare a_k con k!
>
> $$f^k(0) = a_k \cdot k!$$

Esempio:

$f(x) = x^3 \sin(x^3) = y \sin(y)$

$f(x) = y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^3)^{2k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!}$

$x^3 \sin(x^3) = \frac{x^6}{1!} - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{18}}{5!} - \dots \implies \frac{1}{1!} = a_6, -\frac{1}{3!} = a_{12}, \frac{1}{5!} = a_{18}$

Calcolando le derivate nel punto 0:

$f'(0) = a_1 \cdot 1! = 0 \cdot 1! = 0$

$f^6(0) = a_6 \cdot 6! = \frac{1}{1!} \cdot 6! = 6!$

$f^{12}(0) = a_{12} \cdot 12! = -\frac{1}{3!} \cdot 12! = -\frac{12!}{3!}$

$f^{18}(0) = a_{18} \cdot 18! = \frac{1}{5!} \cdot 18! = \frac{18!}{5!}$

1.4-Serie di potenze

> Una serie di potenze è formata da:
>
> - Coefficiente: $a_k \subseteq \mathbb{R}$
> - Centro: $x_0 \in \mathbb{R}$
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Esempi:

$1) e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$a_k = \frac{1}{k!}$

$x_0 = 0$

$2) e^{3x} = \sum \frac{(3x)^k}{k!}$

$a_k = \frac{3^k}{k!}$

$x_0 = 0$

$3) e^{3x-5} = \sum \frac{(3x-5)^k}{k!} = \sum \frac{(3(x-\frac{5}{3}))^k}{k!} = \sum \frac{3^k}{k!}(x-\frac{5}{3})^k$

$a_k = \frac{3^k}{k!}$

$x_0 = \frac{5}{3}$

$4) \cos(4x) = \sum \frac{(-1)^k (4x)^{2k}}{(2k)!} = \sum \frac{(-1)^k 4^{2k}}{(2k)!} x^{2k}$

$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se k dispari} \\ \frac{(-1)^k 4^{2k}}{(2k)!} & \text{se k pari} \end{cases}$

$x_0 = 0$

1.4.1-Insieme di convergenza

Data una serie di potenze:

$E = \{x | \text{ la serie converge}\}$

$x_0 \in E$ e vale $a_0 \implies E \not= \emptyset$

$\exists R \in [0, +\infty]$ t.c. $\begin{cases} |x - x_0| < R \implies \text{la serie converge} \\ |x - x_0| > R \implies \text{le serie diverge} \\ |x - x_0| = R \implies \text{bisogna studiarli singolarmente} \end{cases}$

Casi:

$E = \begin{cases} x_0 & \text{se } R = 0 \\ (x_0 - R, x_0 + R) & \text{se } R = l \\ \mathbb{R} & \text{se } R = \infty \end{cases}$

$|x - x_0| = R \implies \begin{cases} x_1 = x_0 + R \implies \sum a_k R^k \\ x_2 = x_0 - R \implies \sum (-1)^k a_k R^k \end{cases}$

Calcolare il raggio di convergenza:

$L = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

$R = \begin{cases} 0 & L = \infty \\ \frac{1}{L} & L < \infty \\ \infty & L = 0 \end{cases}$

Esempio:

$\sum \frac{(2x-5)^k}{k+1} = \sum \frac{2^k}{k+1}(x - \frac{5}{2})^k \implies L = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k+1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k+1}} = 2 \implies R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$

La serie $\begin{cases} \text{coverge} & \forall x \text{ t.c. } |x - \frac{5}{2}| < \frac{1}{2} \\ \text{non converge} & \forall x \text{ t.c. } |x - \frac{5}{2}| > \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_1 = x_0 + R = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

$x_2 = x_0 - R = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

$\sum \frac{(2x-5)^k}{k+1} = \text{con } x_1 \implies \sum \frac{(6-5)^k}{k+1} = \sum \frac{(1)^k}{k+1} \implies \text{diverge}$

$\sum \frac{(2x-5)^k}{k+1} = \text{con } x_2 \implies \sum \frac{(4-5)^k}{k+1} = \sum \frac{(-1)^k}{k+1} \implies \text{converge con Leibnitz}$

$E = [2,3)$

Esempio:

$\sum \frac{(y^2-1)^{2k}}{k+1} \implies x = (y^2-1)^2 \implies x^k = ((y^2-1)^2)^k = (y^2-1)^{2k} \implies \sum \frac{x^k}{k+1}$

$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$

$R = \frac{1}{L} = 1 \implies \begin{cases} x_1 = 0 + R = 1 \\ x_2 = 0 - R = -1 \end{cases}$

$\sum \frac{x^k}{k+1} \implies \text{con } x_1 \implies \sum \frac{1}{k+1} \implies \text{diverge}$

$\sum \frac{x^k}{k+1} \implies \text{con } x_2 \implies \sum \frac{(-1)^k}{k+1} \implies \text{converge}$

$E_x = [-1,1) \implies -1 \leq (y^2-1)^2 < 1 \implies 0 < y^2 < 2 \implies -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$

$E_y = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \backslash \{0\}$

1.4.2-Teorema infinita derivabilità

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ è derivabile infinite volte in E

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$

$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$

$f^h(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)...(k-h+1) a_k (x-x_0)^{k-h}$

$f^k(x) = k! a_k$

Esempio:

$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)}$

$a_k = \frac{1}{k(k-1)}$

$x_0 = 0$

$L = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k-1)}{(k+1)k} = 1 \implies R = 1$

$x_1 = 1 \implies \sum \frac{1}{k(k-1)} \implies \text{converge}$

$x_2 = -1 \implies \sum \frac{(-1)^k}{k(k-1)} \implies \text{converge}$

$E = [-1,1]$

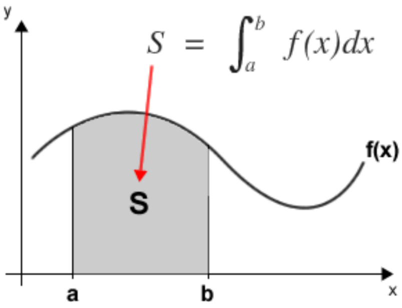
$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)}$

$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2}$

$f'''(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} (k-2) x^{k-3}$

2-Integrali

Un integrale di una funzione è l'area compresa tra l'asse delle x e la funzione in un intervallo **chiuso e limitato** [a,b].



2.1-Approssimazione con i rettangoli

L'area può essere approssimata tra l'area con altezza il minimo di f(x) e l'area con altezza il massimo di f(x).

$(b-a) \cdot min(f(x)) \leq Area \leq (b-a) \cdot max(f(x))$

Per approssimare ancora meglio si divide l'area in 2^n parti uguali con intervalli $[a_k, b_k]$

$a_k = a + k\frac{b-a}{2^n}$

$b_k = a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}$

$\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \frac{b-a}{2^n} \leq Area \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k \frac{b-a}{2^n}$

Con $n \to \infty$ le due sommatorie tenderanno allo stesso numero, cioè il valore dell'area.

Definizione di integrale:

$f[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

Se $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \frac{b-a}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k \frac{b-a}{2^n} = L \in \mathbb{R} \implies$ f è integrabile in $[a,b]$

Con:

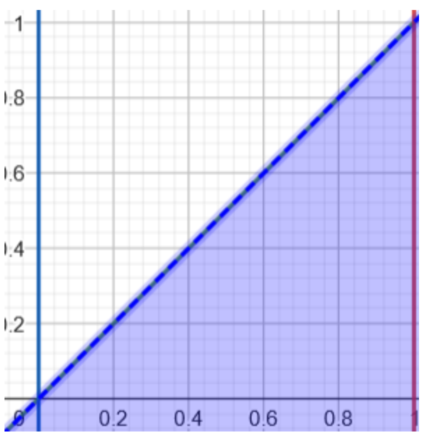
$a_k = a + k\frac{b-a}{2^n}$

$b_k = a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}$

L'integrale definito di f(x) in $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = L$$

Esempio:



$a = 0$

$b = 1$

$a_k = 0 + \frac{k \cdot 1}{2^n} = \frac{k}{2^n}$

$b_k = 0 + \frac{(k+1) \cdot 1}{2^n} = \frac{k+1}{2^n}$

$\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \frac{b-a}{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2^n-1)(2^n)}{2} = \frac{1}{2}$

$\sum_{k=0}^{2^n-1} b_k \frac{b-a}{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k+1 = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2^n)(2^n+1)}{2} = \frac{1}{2}$

$Area = \frac{1}{2}$

> Da ricordare che:
>
> $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2.2-Proprietà degli integrali

2.2.1-Linearità dell'integrale

L'integrale di una somma tra due funzioni è uguale alla somma degli integrali delle due funzioni.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

L'integrale di una costante moltiplicata per una funzione è uguale alla costante moltiplicata per l'integrale della funzione.

$$\int_a^b (k \cdot f(x))dx = k \int_a^b f(x)dx$$

2.2.2-Additività dell'integrale

L'integrale di un intervallo può essere calcolato come la somma dell'integrale di due intervalli più piccoli.

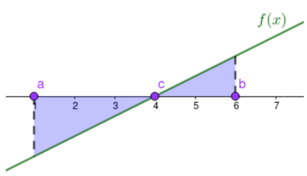
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Una funzione non continua può essere integrabile in un intervallo purché abbia un numero finito di cambi di monotonia e un numero finito di discontinuità.

2.2.3-Integrale assoluto

$$| \int_a^b f(x)dx | \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Nel caso una funzione abbia anche valori negativi basta calcolare l'integrale della parte positiva e sottrarre l'integrale della parte negativa.



2.2.4-Monotonia dell'integrale

Se una funzione è sempre maggiore di un'altra in un intervallo allora anche il suo integrale sarà maggiore dell'integrale dell'altra funzione.

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

2.2.5-Inversione dell'intervallo

Invertendo gli estremi di un integrale si ottiene l'opposto dell'integrale.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2.3-Teorema fondamentale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \ \text{ con } t \in [a, b]$$

Quindi:

Se devo calcolare $\int_a^b f(x)dx$ devo trovare una funzione:

$$F : \begin{cases} F'(x) = f(x) & \forall x \\ F(a) = 0 \end{cases} \implies \int_a^b f(x)dx = F(b)$$

2.3.1-Definizioni

- Una funzione $G(t)$ tale che $G'(t) = f(t)$ si chiama **primitiva** di $f(t)$
- Tutte le primitive di $f(t)$ sono della forma $H(t) = G(t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

2.4-Tipi di integrazione

2.4.1-Integrali notevoli

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$sin(x)$	$-cos(x) + c$
$cos(x)$	$sin(x) + c$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tg(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x) + c$
e^x	$e^x + c$
α^x	$\frac{\alpha^x}{ln(\alpha)} + c$
$\frac{1}{x}$	$ln(\|x\|) + c$

Esempi:

$\int_2^3 [\cos(x) + x^3]dx = \sin(x)|_2^3 + \frac{x^4}{4}|_2^3 = \sin(3) - \sin(2) + \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \sin(3) - \sin(2) + \frac{65}{4}$
$\int_{-6}^{-3} \frac{1}{x}dx = \log(|x|)|_{-6}^{-3} = \log(|-3|) - \log(|-6|) = -\log(2)$
$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$

2.4.2-Integrali per sostituzione

Per risolvere integrali del tipo:

$$\int_1^4 e^{3x}dx$$

Possiamo sostituire $y = 3x$ e $dy = 3dx$ e moltiplicare gli estremi facendolo diventare:

$$\int_4^{12} e^y \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int_4^{12} e^y = \frac{1}{3}e^y$$

> Se $y = g(x) \implies dy = g'(x)dx$ e $[a_y, b_y] = [g(a_x), g(b_x)]$

Riportando y al suo valore originale:

$$\int_1^4 e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Esempi:

$\int_2^3 e^{x^2}dx \implies \begin{cases} y = x^2 \\ dy = 2xdx \end{cases} \implies \int_4^9 e^y \frac{dy}{2} = \frac{e^y}{2}|_4^9 = \frac{e^9 - e^4}{2}$

$\int_0^\pi \sin(5x)dx \implies \begin{cases} y = 5x \\ dy = 5dx \end{cases} \implies \int_0^{5\pi} \sin(y)\frac{dy}{5} = \frac{1}{5}\int_0^{5\pi} \sin(y)dy = -\cos(5x)|_0^\pi = -(-1+0) = 1$

2.4.3-Integrale per parti

Per risolvere integrali del tipo:

$$\int_a^b xe^x$$

Possiamo usare la formula:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

In questo caso possiamo scegliere $f'(x)$ e $g(x)$ a piacimento ma un caso è migliore dell'altro:

$\int_a^b xe^x dx = \begin{cases} f'(x) = x & f(x) = \frac{x^2}{2} \\ g(x) = e^x & g'(x) = e^x \end{cases} \implies \frac{x^2}{2}e^x|_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{2}e^x dx$

$\int_a^b xe^x dx = \begin{cases} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{cases} \implies xe^x|_a^b - \int_a^b e^x dx = xe^x|_a^b - e^x|_a^b = (x-1)e^x|_a^b$

Regole per scegliere $f'(x)$ e $g(x)$:

- Derivare il polinomio
- Integrare le funzioni ($e^x, \sin(x), \cos(x)$)

Esempio:

$\int x^2e^{3x} = \begin{cases} f'(x) = e^{3x} & f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x^2 & g'(x) = 2x \end{cases} \implies \frac{x^2}{3}e^3x - \frac{2}{3}\int xe^{3x} \implies \begin{cases} f'(x) = e^3x & f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{cases} \implies$
$\frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}) = e^3x(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27})$

Funzioni trigonometriche e e^x:

$\int e^x\cos(x) = \begin{cases} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = \cos(x) & g'(x) = -\sin(x) \end{cases} \implies e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x) = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) -$
$\int e^x\cos(x) \implies \int e^x\cos(x) = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x) \implies \int e^x\cos(x) = \frac{e^x(\cos(x)+\sin(x))}{2}$

> Se si ha e^x e una funzione trigonometrica va derivata la funzione trigonometrica e integrata e^x

Funzioni trigonometriche quadrate:

$\int\cos^2(x) = \begin{cases} f'(x) = \cos(x) & f(x) = \sin(x) \\ g(x) = \cos(x) & g'(x) = -\sin(x) \end{cases} \implies \sin(x)\cos(x) + \int\sin^2(x) = \sin(x)\cos(x) + \int 1 -$
$\cos^2(x) = \sin(x)\cos(x) + x - \int\cos^2(x) \implies \int\cos^2(x) = \sin(x)\cos(x) + x - \int\cos^2(x) \implies \int\cos^2(x) =$
$\frac{\sin(x)\cos(x)+x}{2}$

Polinomio e logaritmo:

$\int x^n\ln(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

2.4.4-Integrale di polinomi per funzioni(versione rapida)

Per calcolare un integrale del tipo:

$$\int P_n(x)e^x dx$$

in cui $P_n(x)$ è un generico polinomio di grado n, secondo la formula della derivata di un prodotto vale che:

$$[Q_n(x)e^x]' = Q_n'(x)e^x + Q_n(x)e^x = e^x(Q_n(x) + Q_n'(x))$$

Se poniamo $P_n(x) = Q_n(x) + Q_n'(x)$ possiamo dire che la derivata di un polinomio per e^x è uguale alla somma del polinomio e la sua derivata, anch'essi moltiplicati per e^x.

Quindi sapendo che $[Q_n(x)e^x]' = P_n(x)e^x$ possiamo dire che:

$$\int P_n(x)e^x dx = Q_n(x)e^x$$

Per un generico polinomio di grado 2 per esempio avremo $P_2(x) = Q_2(x) + Q_2'(x)$ quindi essendo:

$$P_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta$$
$$Q_2(x) = ax^2 + bx + c$$
$$Q_2'(x) = 2ax + b$$

Avremo $P_2(x) = ax^2 + (2a+b)x + b + c$.

Per trovare $Q_2(x)$ basta risolvere il sistema ponendo i coefficienti di $P_2(x)$ uguali ai coefficienti della funzione $Q_2(x) + Q_2'(x)$:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = 2a + b \\ \delta = b + c \end{cases}$$

Trovando a, b e c possiamo trovare $Q_2(x)$.

Esempio:

$\int(x^3-3x^2+8x-11)e^x dx \implies x^3-3x^3+8x-11=Q_3(x)+Q_3'(x) \implies$
$\begin{cases} Q_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ Q_3'(x)=3ax^2+2bx+c \end{cases} \implies x^3-3x^3+8x-11=ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c+d \implies$
$\begin{cases} 1=a & a=1 \\ -3=3a+b & b=-6 \\ 8=2b+c & c=20 \\ -11=c+d & d=-31 \end{cases} \implies$
$\implies \int(x^3-3x^2+8x-11)e^x dx=(x^3-6x^2+20x-31)e^x$

2.4.5-Studio di funzione tramite integrali

Se abbiamo una funzione che non sappiamo integrare come:

$$F(t)=\int_a^t f(x)$$

Possiamo comunque dire che:

- $F(a)=0\ \forall a$
- $F'(t)=f(t)$
- $F(t)=$ indefinita

Crescenza e decrescenza:

Possiamo sapere se $F(t)$ è crescente o decrescente studiando la sua derivata prima quindi:

$$F(t)=\begin{cases} \text{crescente} & \text{quando } f(t)>0 \\ \text{decrescente} & \text{quando } f(t)<0 \end{cases}$$

Ricordandoci che $F(a)=0$ possiamo sapere dove è positiva e dove negativa.

Pari e dispari:

L'integrale di una funzione pari è dispari e viceversa quindi calcolando $f(x)$ possiamo sapere anche $F(t)$:

$$F(t)=\begin{cases} \text{pari} & \text{se } f(x) \text{ dispari} \\ \text{dispari} & \text{se } f(x) \text{ pari} \end{cases}$$

> Possiamo dire se $F(t)$ è pari o dispari solo se l'integrale parte da 0
>
> Se $f(x)$ è dispari e l'intervallo è simmetrico $\implies \int_{-a}^{a} f(x)=0$
>
> Se $f(x)$ è pari e l'intervallo è simmetrico $\implies \int_{-a}^{a} f(x)=2\int_0^a f(x)$

Limiti:

Funzione crescente:

Se $F(t)$ è crescente $\exists \lim\limits_{t\to\infty} F(t)=\begin{cases} \infty \\ l\in\mathbb{R} \end{cases}$

Se esiste $G(t)\geq F(t)$ con $\lim_{t\to\infty} G(t)=l \implies \lim_{t\to 0} F(t)=l$

Se esiste $G(t)\leq F(t)$ con $\lim_{t\to\infty} G(t)=\infty \implies \lim_{t\to 0} F(t)=\infty$

Funzione decrescente:

Se $F(t)$ è decrescente $\exists \lim\limits_{t\to\infty} F(t)=\begin{cases} -\infty \\ l\in\mathbb{R} \end{cases}$

Se esiste $G(t)\leq F(t)$ con $\lim_{t\to\infty} G(t)=l \implies \lim_{t\to 0} F(t)=l$

Se esiste $G(t) \geq F(t)$ con $\lim_{t\to\infty} G(t) = -\infty \implies \lim_{t\to 0} F(t) = -\infty$

2.4.6-Integrali di funzioni razionali

Se abbiamo una funzione come:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{x^2 + bx + c}$$

In base al segno del Δ possiamo usare tre formule:

$$\int_0^t \frac{1}{x^2+bx+c} = \begin{cases} -\frac{1}{x-x_1} & \Delta = 0 \\ \frac{1}{x_1-x_2} \cdot \ln(|\frac{x-x_1}{x-x_2}|) & \Delta > 0 \text{ e } x_1 > x_2 \\ \frac{2}{\sqrt{-b^2+4c}} \cdot \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{-b^2+4c}}) & \Delta < 0 \end{cases}$$

3-Equazioni differenziali

Sono equazioni la cui soluzione non è un numero reale ma una funzione e nell'equazione appare almeno una volta la derivata della funzione incognita.

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine massimo della derivata dell'incognita $y(t)$.

Esempi:

$y'(t) = 2t \implies y(t) = t^2 + c$

$y''(t)\cos(y'(t)) + [e^{y(t)}]''' = t^2 \ \forall t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

Se la derivata di ordine massima può essere divisa dalle altre si dicono equazioni differenziali in forma normale.

Esempio:

$y''(t) + 2y(t) = 0$

3.1-Sigle

- E.D.O. = equazione differenziale ordinaria(ad un incognita)
- 2^o O = 2^o ordine
- F.N. = forma normale(la derivata massima è divisa dalle altre)
- L. = lineare(la derivata non è elevata a qualche esponente)
- O./N.O. = omogenea/non omogenea(quando l'equazione è uguale a 0)

Esempi:

$y'(t) + y(t) = e^t = E.D.O.\ 1^oO.\ L.\ N.O.\ F.N.$

3.2-Problema di Cauchy

Quando si risolve un'equazione differenziale del tipo:

Ogni funzione della forma $y(t) = \frac{3}{2}t^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$ è soluzione

Per decidere quale tra le possibili soluzioni si sceglie il valore che deve assumere in un punto specifico. In una equazione di ordine n ci sono n parametri arbitrari e per sceglierne solo una bisogna mettere n condizioni partendo dalla soluzione fino alla derivata (n-1)-esima.

Il sistema creato da queste condizioni si chiama problema di Cauchy

Esempio:

$y''(t) = t \implies y'(t) = \frac{t^2}{2} + c \implies y''(t) = \frac{t^3}{6} + ct + d$

$$\begin{cases} y''(t) = t \\ y(2) = 8 \\ y'(2) = -5 \end{cases} \implies y(t) = \frac{t^3}{6} + ct + d \implies \begin{cases} y(2) = \frac{2^3}{6} + 2c + d = 8 \\ y'(2) = \frac{2^2}{2} + c = -5 \end{cases} \implies \begin{cases} c = -7 \\ d = \frac{62}{3} \end{cases} \implies y(t) = \frac{t^3}{6} - 7t + \frac{62}{3}$$

1.2.1-Ordine 1 e 2

Il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinaria di ordine 1 o 2.

Ordine 1:

$$\begin{cases} F(t, y(t), y'(t)) = 0 & \text{Equazione del problema}(\infty \text{ soluzioni}) \\ y(t_0) = y_0 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

Ordine 2:

$$\begin{cases} F(t, y(t), y'(t), y''(t)) = 0 & \text{Equazione del problema}(\infty \text{ soluzioni}) \\ y(t_0) = y_0 & \text{condizione iniziale 1} \\ y'(t_0) = y_1 & \text{condizione iniziale 2} \end{cases}$$

Tutti i problemi di Cauchy hanno una sola soluzione.

Esempi:

$\begin{cases} y'(t) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \implies$ non è un problema di Cauchy e non ha soluzioni

$\begin{cases} y'(t) = 2 \\ y'(t) = 2 \end{cases} \implies$ non è un problema di Cauchy e ha infinite soluzioni

$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 2 \end{cases} \implies$ è un problema di Cauchy con una sola soluzione

1.3-Equazioni senza calcoli

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Senza fare calcoli io posso sapere quanto valgono $y'(0)$ e $y''(0)$

$y'(0) = e^{y(0)} = e^2$

$y''(0) = [y'(0)]' = [e^{y(0)}]' = y'(0)e^{y(0)} = e^{2y(0)} = e^4$

Sapendo poi la derivata seconda possiamo calcolare tutte le derivate k-esime:

$y^{(k)}(t) = (k-1)e^{ky(t)}$

1.4-Problemi reali

Gravità:

$$\begin{cases} y''(t) = g & \text{accelerazione} = g = 9,8m/s^2 \\ y(0) = 0 & \text{spazio iniziale} \\ y'(0) = 0 & \text{velocità iniziale} \end{cases} \implies y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

1.5-Equazioni lineari di ordine 1

1.5.1-Equazioni omogenee a variabili separabili

Per risolvere un’equazione differenziale come:

Se $g(y_0) = 0 \implies y(t) = y_0$

Se $g(y_0) \neq 0$ allora dobbiamo calcolare due integrali uguali tra loro:

$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$

$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}$

$G(y(t)) = F(t) - F(t_0) + G(y_0) \implies y(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(y_0))$ con G^{-1} funzione inversa di G

Esempio:

$\begin{cases} y'(t) = te^{t^2} \cdot e^{-y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \implies g(y_0) = g(0) = 1$

$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{t_0}^{t} se^{s^2}ds = \frac{1}{2}e^{t^2}$

$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{e^{-s}} = \int^{t} e^{s}ds = e^{t}$

$e^{y(t)} = \frac{1}{2}e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t_0^2} + e^{y_0} \implies e^{y(t)} = \frac{1}{2}e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{0} + e^{0} = \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2} \implies y(t) = \log(\frac{1}{2}(e^{t^2} + 1))$

1.5.2-Equazioni non omogenee

Per risolvere equazioni come:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Trovo l'equazione omogenea associata:

$y_0'(t) = a(t)y_0(t)$

Le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$

Dove:

$y_0(t)$ è una soluzione generica dell'equazione omogenea associata

> $y_0(t) = C \cdot e^{A(t)}$con $C \in \mathbb{R} =$ soluzione generica dell'equazione omogenea
> $A(t) = \int^{t} a(t)dt$

$\overline{y}(t) = C(t)e^{A(t)} \implies \overline{y}'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} - a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t) \implies C'(t) = b(t)e^{-A(t)} \implies C(t) = \int^{t} b(t)e^{-A(t)}$

$\overline{y}(t) = (\int^{t} b(s)e^{-A(s)}ds)e^{A(t)}$

> $y(t) = [C + B(t)]e^{A(t)}$ con $C \in \mathbb{R} =$ soluzione generica dell'equazione
> $B(t) = \int^{t} b(t)e^{-A(t)}dt$
> $A(t) = \int^{t} a(t)dt$

Se invece della soluzione generica vogliamo una soluzione relativa ad un problema di Cauchy specifico:

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è:

$$y(t) = [y_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)e^{-A(t)}dt]e^{A(t)}$$
$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Esempio:

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t) + te^{3t^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(t) = [2 + \int_0^t te^{3t^2} e^{-A(t)} dt] e^{A(t)} \implies A(t) = \int_0^t tdt = \frac{t^2}{2} \implies$$

$$y(t) = [2 + \int_0^t te^{3t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt] e^{\frac{t^2}{2}} = [2 + \int_0^t te^{\frac{5t^2}{2}} dt] e^{\frac{t^2}{2}} = \begin{cases} z = \frac{5t^2}{2} \\ dz = 5tdt \end{cases} \implies$$

$$y(t) = [2 + \frac{1}{5} \int_0^t e^z dz] e^{\frac{t^2}{2}} = [2 + \frac{1}{5} e^{\frac{5t^2}{2}} - \frac{1}{5}] e^{\frac{t^2}{2}} = \frac{9}{5} e^{\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{5} e^{\frac{5t^2}{2}}$$

1.5.3-Esercizi su equazioni lineari di ordine 1

1:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) + e^t \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Avendo $y'(0)$ posso calcolare quanto vale $y(0)$

$$y'(0) = 6y(0) + e^0 \implies -1 = 6y(0) + 1 \implies 6y(0) = -2 \implies y(0) = -\frac{1}{3}$$

Ora posso scrivere una soluzione di Cauchy al problema:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) + e^t \\ y(0) = -\frac{1}{3} \end{cases} \implies \text{ha una sola soluzione}$$

2:

$$\begin{cases} y'(t) = 6\cos(y(t)) + 5e^t \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Possiamo calcolare $y(0)$

$$y'(0) = 6\cos(y(0)) + 5e^0 \implies -6 = 6\cos(y(0)) \implies \cos(y(0)) = -1 \implies y(0) = \pi + 2k\pi$$

Scrivendo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 6\cos(y(t)) + e^t \\ y(0) = \pi + 2k\pi \end{cases} \implies \text{ha infinite soluzioni}$$

1.6-Equazioni lineari di ordine 2

1.6.1-Equazioni non omogenee

Un'equazione differenziale di ordine 2 è scritta nella forma:

$$\begin{cases} y''(t) + Ay'(t) + By(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione:

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$$

$$\begin{cases} y''_0(t) + Ay'(t) + By(t) = 0 & \text{equazione omogenea associata} \\ \overline{y}''(t) + A\overline{y}'(t) + B\overline{y}(t) = f(t) & \text{soluzione particolare} \end{cases}$$

1.6.2-Equazioni omogenee

Data un'equazione differenziale di secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Le soluzioni dipendono dalle soluzioni dell'equazione:

La soluzione di questa equazione è della forma:

$$y_0(t) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} & \lambda_1 \in \mathbb{R} \neq \lambda_2 \\ (C + Dt)e^{\lambda t} & \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ [C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t)]e^{\alpha t} & \lambda = \alpha \pm i\beta \in C \end{cases}$$

Per trovare C e D tali che la funzione assuma i valori del problema di Cauchy bisogna risolvere un sistema:

Esempio:

$y_0''(t) + 3y_0'(t) + 2y_0(t) = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1, -2 \implies y_0(t) = Ce^{-t} + De^{-2t}$

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \implies P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \implies \lambda = 1, 2 \implies y_0(t) = Ce^t + De^{2t}$$

$$\begin{cases} Ce^0 + De^0 = 0 \\ Ce^0 + 2De^{2\cdot 0} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \implies y(t) = 0$$

1.6.3-Soluzione particolare

Devo cercare una soluzione particolare simile ad $f(t)$, cioè della forma $\overline{y}(t) = Qf(t)$.

$$\text{Casi:} \begin{cases} e^{Qt} \\ \cos(Qt)/\sin(Qt) \\ \text{Polinomio di grado n} \end{cases}$$

Se questa soluzione particolare è anche soluzione dell'equazione omogenea associata, allora bisogna porre $\overline{y}(t) = Qtf(t)$, se anche questa dovesse esserlo allora $\overline{y}(t) = Qt^2 f(t)$, e così via.

Poi calcolo $\overline{y}'(t)$ e $\overline{y}''(t)$ e li sostituisco nell'equazione iniziale e controllo quale Q fa diventare l'equazione uguale ad $f(t)$.

Una volta trovato Q e $\overline{y}(t)$ per trovare C e D risolvo il sistema per i punti $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$.

Se $f(t) = g(t) + h(t) \implies \overline{y} = Qt^x g(t) + Pt^x h(t)$

Esempio:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$y_0''(t) - 3y_0'(t) + 2y_0(t) = 0 \implies P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \implies \lambda = 1, 2 \implies y_0(t) = Ce^t + De^{2t}$

$f(t) \neq Ce^t + De^{2t}\ \forall C, D \implies \begin{cases} \overline{y}(t) = Qe^{3t} \\ \overline{y}'(t) = 3Qe^{3t} \\ \overline{y}''(t) = 9Qe^{3t} \end{cases} \implies 9Qe^{3t} - 3(3Qe^{3t}) + 2(Qe^{3t}) = 2e^{3t} \implies Q =$
$1 \implies \overline{y}(t) = e^{3t}$

$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Ce^t + De^{2t} + e^{3t}$

$\begin{cases} y(0) = Ce^0 + De^{2\cdot 0} + e^{3\cdot 0} = 0 \\ y'(0) = Ce^0 + 2De^{2\cdot 0} + 3e^{3\cdot 0} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$

$y(t) = e^t - e^{2t} + e^{3t}$