



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e  
Statistica  
Dipartimento di Informatica

# Progettazione di Algoritmi

**Autore:**  
Simone Lidonnici

25 settembre 2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria dei grafi</b>	<b>1</b>
1.1	Tipi di grafi . . . . .	1
1.1.1	Grafi diretti e non diretti . . . . .	1
1.1.2	Passeggiate e cammini . . . . .	1
1.1.3	Grafi connessi e fortemente connessi . . . . .	2
1.1.4	Grafi ciclici . . . . .	2
1.2	Rappresentare un grafo . . . . .	3
1.2.1	Matrici di adiacenza . . . . .	3
1.2.2	Liste di adiacenza . . . . .	3
1.3	Trovare il ciclo in un grafo . . . . .	4
1.4	DFS (Ricerca in profondità) . . . . .	5
1.4.1	DFS ottimizzata . . . . .	6
1.4.2	DFS ricorsiva . . . . .	7
1.4.3	DFS in grafi diretti . . . . .	7
1.4.4	Componenti e DFS con componenti . . . . .	8
1.5	Ordinare un grafo . . . . .	9
1.5.1	Trovare l'ordine topologico in grafi diretti . . . . .	9
1.5.2	Versione ottimizzata per trovare l'ordine topologico . . . . .	10
1.6	Intervalli di visita e tipi di archi . . . . .	11
1.6.1	Tipi di archi . . . . .	12
1.6.2	Algoritmo per controllare i tipi di archi . . . . .	13
1.7	Alberi di visita e cicli . . . . .	14
1.7.1	Grafi non diretti . . . . .	14
1.7.2	Grafi diretti . . . . .	14
1.7.3	Vettore dei padri . . . . .	15
1.8	Ponti . . . . .	16
1.8.1	Algoritmo per trovare i ponti . . . . .	17
1.9	Componenti fortemente connessi . . . . .	17
1.9.1	Contrazione di un componente . . . . .	18
1.9.2	Algoritmo per trovare i componenti . . . . .	19
1.9.3	Algoritmo di Tarjan . . . . .	20
1.10	BFS (Ricerca in ampiezza) . . . . .	22
1.10.1	Algoritmo della BFS . . . . .	22
1.10.2	Distanza fra insiemi di nodi . . . . .	23
1.10.3	Grafi pesati . . . . .	24
1.10.4	Calcolare distanze pesate (Dijkstra) . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Algoritmi Greedy</b>	<b>26</b>
2.1	Alberi di copertura . . . . .	28
2.1.1	Algoritmo di Kruskal . . . . .	28
2.2	Grafi con pesi negativi . . . . .	29
2.3	Algoritmo di Prim . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Algoritmi divide et impera</b>	<b>31</b>
3.1	Teorema principale . . . . .	31
3.2	Esercizi divide et impera . . . . .	32
3.2.1	Sottoarray di somma massima . . . . .	32
3.2.2	Valore singolo in un array . . . . .	33
3.3	Elemento maggioritario in un array . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Programmazione dinamica</b>	<b>35</b>
4.1	Esercizi di programmazione dinamica . . . . .	36
4.1.1	Ottimizzare lo spazio su un disco . . . . .	36
4.1.2	Cammini colorati su una scacchiera . . . . .	37
4.1.3	Ottimizzare il peso in uno zaino . . . . .	38
4.1.4	Cammino di peso massimo . . . . .	39

# 1

## Teoria dei grafi

### Definizione di Grafo

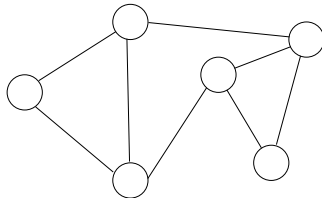
Un **grafo**  $G$  è una coppia  $(V, E)$  in cui  $V$  è un insieme di nodi e  $E$  un insieme di archi che collegano due nodi. Un grafo si dice **semplice** se:

- Non ha cappi, cioè nessun nodo è collegato con se stesso
- Ogni coppia di nodi è collegata da massimo un arco

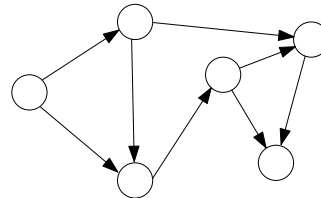
### 1.1 Tipi di grafi

#### 1.1.1 Grafi diretti e non diretti

I grafi possono essere di due tipologie in base a se gli archi sono **orientati**, cioè partono da un nodo e arrivano ad un altro senza essere percorribili al contrario. Se il grafo ha archi orientati si dice **diretto**.



Grafo non diretto



Grafo diretto

#### 1.1.2 Passeggiate e cammini

##### Nodi adiacenti

Due nodi collegati da un arco si dicono **adiacenti** (o vicini) e l'arco che li collega viene detto incidente. Per indicare che due nodi sono adiacenti scriviamo  $x \sim y$ .

Si definisce il grado di un nodo  $\deg(x)$  come il numero dei suoi nodi adiacenti, uguale al numero di archi incidenti.

**Definizione di passeggiata**

Una **passeggiata** su un grafo è una sequenza di archi e nodi:

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

In cui ogni arco  $e_i$  collega il nodo  $v_{i-1}$  al nodo  $v_i$ .

Un **cammino** è una passeggiata in cui non si ripetono i nodi.

**1.1.3 Grafi connessi e fortemente connessi****Definizione di grafo connesso**

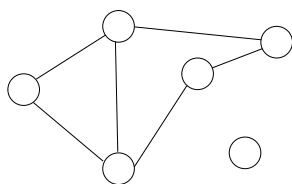
Un grafo  $G$  si dice **connesso** se per qualsiasi coppia di nodi esiste un cammino che li collega:

$$\forall v_i, v_j \in V(G) \exists \text{cammino} | v_1 \rightarrow v_j \vee v_j \rightarrow v_i$$

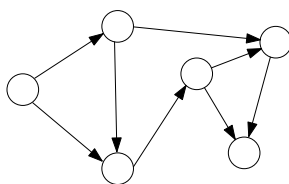
Un grafo  $G$  si dice **fortemente connesso** se per qualsiasi coppia di nodi esiste un cammino che li collega partendo da entrambi i nodi:

$$\forall v_i, v_j \in V(G) \exists \text{cammino} | v_1 \rightarrow v_j \wedge v_j \rightarrow v_i$$

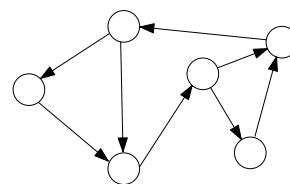
Nel caso di grafi non diretti ogni grafo connesso è anche fortemente connesso.



Grafo non connesso



Grafo connesso



Grafo fortemente connesso

Esiste un tipo specifico di passeggiata detta **passeggiata Euleriana** in cui si attraversano tutti i nodi una sola volta. Può esistere una passeggiata Euleriana in un grafo solo se il grafo è connesso e ci sono al massimo 2 nodi con grado dispari, che saranno inizio e fine.

**1.1.4 Grafi ciclici****Definizione di grafo ciclico**

Un grafo  $G$  è ciclico se esiste un sottogruppo connesso in cui ogni vertice ha grado  $\geq 2$ . Se nel grafo tutti i vertici hanno grado  $\geq 2$  allora il grafo è sicuramente ciclico.

$$\forall v \in V(G) \deg(v) \geq 2 \implies G \text{ ciclico}$$

In un grafo diretto se ogni nodo ha almeno un arco uscente allora il grafo è ciclico.

## 1.2 Rappresentare un grafo

### 1.2.1 Matrici di adiacenza

I grafi possono essere rappresentati con delle matrici di adiacenza in cui se  $v_i$  è adiacente a  $v_j$  la matrice conterrà 1 nella posizione  $(i, j)$  e nella posizione  $(j, i)$ :

	$v_1$	$\dots$	$v_i$	$\dots$	$v_j$	$\dots$	$v_n$
$v_1$	0						
$\dots$		0					
$v_i$			0		1		
$\dots$				0			
$v_j$			1		0		
$\dots$						0	
$v_n$							0

Costo per controllare se  $x$  è vicino di  $y$ :  $O(1)$

Spazio necessario per l'archiviazione:  $O(n^2)$

Nel caso di grafi diretti la matrice conterrà 1 nella posizione  $(i, j)$  se l'arco parte da  $i$  e arriva a  $j$  (non sarà più simmetrica).

### 1.2.2 Liste di adiacenza

Per rappresentare i grafi si può anche usare una lista di adiacenza in cui ogni nodo ha una lista contenente tutti i suoi vicini:

$$\begin{aligned}
 v_1.\text{neighbors} &= [\dots] \\
 &\dots \\
 v_n.\text{neighbors} &= [\dots]
 \end{aligned}$$

Nel caso di un grafo diretto, ogni nodo avrà due liste:

- $v_i.\text{neighbors\_out}$  che contiene i nodi collegati da archi uscenti da  $v_i$
- $v_i.\text{neighbors\_in}$  che contiene i nodi collegati da archi entranti in  $v_i$

Costo per controllare se  $x$  è vicino di  $y$ :  $O(n)$

Spazio necessario per l'archiviazione:  $O(n^2)$

Lunghezza della lista di vicini di un determinato nodo  $v_i$ :  $\deg(v_i)$

Grandezza totale delle liste:  $O(n) + O(\sum_{i=1}^n \deg(v_i)) = O(n + m)$

## 1.3 Trovare il ciclo in un grafo

Dato un grafo  $G$  in cui ogni vertice ha grado  $\geq 2$ , l'algoritmo per trovare il ciclo:

---

**Algoritmo:** Ricerca di un ciclo in un grafo  $G$

---

**Input:**

- $G$ : grafo

**Output:**

- $C$ : nodi che formano il ciclo

**def FindCiclo( $G$ ):**

$x=V[0]$

$C=[x]$

$current=x$

$next=x.neighbors[0]$

**while**  $next$  not in  $C$  : *// finchè non trovo un nodo già visitato*

$C.append(next)$

$current=next$

**if**  $current.neighbors[0] \neq C[-2]$  :

$next=current.neighbors[0]$

**else** :

$next=current.neighbors[1]$

**while**  $C[0] \neq next$  :

$C.pop(0)$

**return**  $C$

---

## 1.4 DFS (Ricerca in profondità)

La **DFS** (Depth first search) è un modo per visitare un grafo che consiste nel partire da un nodo e spostarsi in un vicino casuale non ancora visitato e nel caso tutti i vicini di un nodo siano già stati visitati ritornare al nodo precedente. Per implementare questo rollback si utilizza uno Stack. L'algoritmo ritorna tutti i nodi visitabili dal nodo di partenza, quindi nel caso di grafo non connesso, ritornerà solo i vertici nel sottografo contenente il nodo di partenza.

---

### Algoritmo: DFS

---

**Input:**

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS(G, x):
```

```
    Vis=set(x)
```

```
    Stack S=[x]
```

```
    while len(S)!=0 :
```

```
        y=S.top()
```

```
        if  $\exists z \text{ in } y.\text{neighbors} \mid z \notin \text{Vis}$  : //  $O(\deg(y) \cdot n)$ 
```

```
            Vis.add(z)
```

```
            S.push(z)
```

```
        else :
```

```
            S.pop()
```

```
    return Vis
```

---

### Dimostrazione per assurdo:

Supponiamo esista  $y \mid \exists \text{cammino } x \rightarrow y$  ma  $y \notin \text{Vis}$  e sia  $i$  un indice per cui  $v_i \in \text{Vis} \wedge v_{i+1} \notin \text{Vis}$ .

$v_i \in \text{Vis} \implies \begin{cases} v_i \text{ è stato inserito in } S \\ v_i \text{ è stato tolto da } S \end{cases} \implies \text{ogni vicino di } v_i \text{ è stato inserito in Vis} \implies v_{i+1} \text{ è stato inserito in Vis}$



### 1.4.1 DFS ottimizzata

L'algoritmo di base della DFS è poco ottimizzato per via del costo dell'if che richiede  $O(\deg(y) \cdot n)$ , per ottimizzarlo si cambia la struttura di Vis rendendolo un array lungo  $n$  in cui:

$$Vis[v] = \begin{cases} 0 & v \text{ non è stato visitato} \\ 1 & v \text{ è stato visitato} \end{cases}$$

Con questo cambiamento l'algoritmo diventa:

---

**Algoritmo:** DFS ottimizzata
 

---

**Input:**

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS_ott(G, x):
    Vis[x]=1
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        if Vis[y.neighbors[0]]==0 :
            z=y.neighbors[0]
            Vis[z]=1
            S.push(z)
        y.neighbors.remove(0)
        if len(y.neighbors)==0 and y==S.top() :
            S.pop()
    return Vis
```

---

Avendo tutto costo  $O(1)$  tranne il ciclo while con costo  $O(n + m)$ , l'algoritmo ha costo complessivo  $O(n + m)$ .

### 1.4.2 DFS ricorsiva

Della DFS si può fare anche una versione ricorsiva:

---

**Algoritmo: DFS ricorsiva**


---

**Input:**

- G: grafo
- x: nodo di partenza
- Vis: array nodi visitati

```
def DFS_ric(G, x, Vis):
    Vis[x]=1
    for y in x.neighbors :
        if Vis[y]==0 :
            DFS_ric(G, y, Vis)
    return Vis
```

---

Il costo di questo algoritmo è  $O(n + m)$ .

### 1.4.3 DFS in grafi diretti

Nel caso di grafi diretti bisogna cambiare l'algoritmo per controllare solo gli archi uscenti e non quelli entranti quando si cambia nodo:

---

**Algoritmo: DFS**


---

**Input:**

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS_dir(G, x):
    Vis[x]=1
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        if ∃ z in y.neighbors_out | Vis[z]==0 :
            Vis[z]=1
            S.push(z)
        else :
            S.pop()
    return Vis
```

---

### 1.4.4 Componenti e DFS con componenti

#### Definizione di componente

Un **componente** è l'insieme di nodi di un sottografo connesso, però non connesso al resto del grafo.

$$\begin{aligned} \text{Comp}[x] &= \text{nodi nello stesso componente che contiene } x \\ \text{Comp}[x] = \text{Comp}[y] &\iff x, y \text{ appartengono allo stesso sottografo} \end{aligned}$$

L'algoritmo che visita tutti i componenti è una modifica della DFS ricorsiva in cui:

$$\text{Comp}[v] = \begin{cases} 0 & v \text{ non è ancora stato visitato} \\ i & v \text{ è nel componente } i \end{cases}$$

Si aggiunge inoltre una funzione per cambiare componente in cui si trova il nodo corrente:

---

#### Algoritmo: DFS per trovare componenti

---

**Input:**

- G: grafo

**def CComp(G):**

```

    comp_count=0
    for x in V :
        if Comp[x]==0 :
            comp_count+=1
            DFS_ric_comp(G, x, Comp, comp_count)
    return Comp

```

**def DFS\_ric\_comp(G, x, Comp, comp\_count):**

```

    Comp[x]=comp_count
    for y in x.neighbors :
        if Comp[y]==0 :
            DFS_ric_comp(G, y, Comp, comp_count)
    return Comp

```

---

## 1.5 Ordinare un grafo

Un grafo diretto  $G$  ha un **ordine topologico** se esiste un ordine per cui ogni nodo ha archi uscenti che vanno solo verso nodi successivi nell'ordine e archi entranti solo da nodi precedenti nell'ordine. Inoltre:

$$G \text{ ciclico} \iff \nexists \text{ ordine topologico}$$

Corollario:

$$G \text{ non ciclico} \implies \exists v \in V \mid v \text{ non ha archi uscenti}$$

### 1.5.1 Trovare l'ordine topologico in grafi diretti

Per trovare l'ordine topologico in grafi diretti si usa un algoritmo:

---

**Algoritmo:** DFS per trovare l'ordine topologico in grafi diretti

---

**Input:**

- $G$ : grafo

**def DFS\_ord( $G$ ):**

```

    l=[]
    while len(G)!=0 : //  $O(n)$ 
        x=no_archi(G)
        l.insert(x,0)
        elimina(G,x)
    return l

```

**def no\_archi( $G$ ):** //  $O(n)$

```

    for v in V(G) :
        if len(v.neighbors_out)==0 :
            return v

```

**def elimina( $G,x$ ):** //  $O(m)$

```

    for e in E(G) :
        if x in e :
            E.remove(e)

```

---

Il ciclo while esegue  $n$  volte le funzioni no\_archi e elimina, quindi il costo dell'algoritmo sarà:  $O(n(n+m))$

### 1.5.2 Versione ottimizzata per trovare l'ordine topologico

Una versione ottimizzata dell'algoritmo per trovare l'ordine topologico:

---

**Algoritmo:** DFS ottimizzata per trovare l'ordine topologico in grafi diretti

---

**Input:**

- G: grafo

```
def ord_top(G):
```

```
    L=[]
```

```
    for v in V :
```

```
        if Vis[v]==0 :
```

```
            DFS_ord(G, v, Vis, L)
```

```
    return L
```

```
def DFS_ord(G, v, Vis, L):
```

```
    Vis[v]=1
```

```
    for w in v.neighbors_out :
```

```
        if Vis[w]==0 :
```

```
            DFS_ord(G, w, Vis, L)
```

```
    L.insert(v,0)
```

---

Questa versione ottimizzata dell'algoritmo ha costo  $O(n + m)$ .

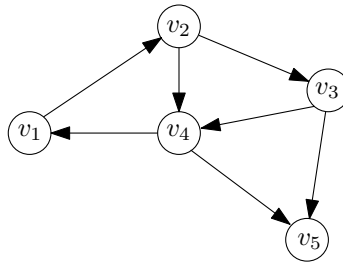
## 1.6 Intervalli di visita e tipi di archi

Dato un grafo  $G$  aggiungiamo un contatore  $C$  alla DFS, che parte da 1 e viene aumentato di uno ogni volta che si visita un nodo nuovo.

Ad ogni nodo  $v \in V$  associamo:

- $t(v)$ : valore di  $C$  quando  $v$  viene visitato per la prima volta
- $T(v)$ : valore di  $C$  quando  $v$  viene rimosso dallo Stack
- $\text{Int}(v) = [t(v), T(v)]$

**Esempio:**



Una possibile tabella contenente gli intervalli usando una DFS partendo da  $v_1$  è:

$v$	$t(v)$	$T(v)$
$v_1$	1	5
$v_2$	2	5
$v_3$	3	5
$v_4$	5	5
$v_5$	4	4

Dalla tabella e dal grafico possiamo osservare che:

- $t(v_i) \neq t(v_j) \forall i, j$
- $t(v_i) \leq T(v_i)$
- $t(v_i) = T(v_i) \iff v_i$  non ha archi uscenti e non è radice
- $v_i$  radice  $\iff \text{Int}(v_i) = [1, n]$  con  $G$  che ha  $n$  nodi

Inoltre confrontando gli intervalli tra due nodi  $v_1$  e  $v_2$  ci sono 3 possibilità:

- $\text{Int}(v_1) \subset \text{Int}(v_2)$
- $\text{Int}(v_1) \supset \text{Int}(v_2)$
- $\text{Int}(v_1) \cap \text{Int}(v_2) = \emptyset$

### 1.6.1 Tipi di archi

#### Albero di visita

Un **albero di visita** è un sottografo connesso e aciclico composto solo dagli archi che sono stati usati per raggiungere i vertici visitati. Nel caso di grafi diretti viene detto **arborescenza** ed è un'albero con tutti gli archi orientati dalla radice verso le foglie.

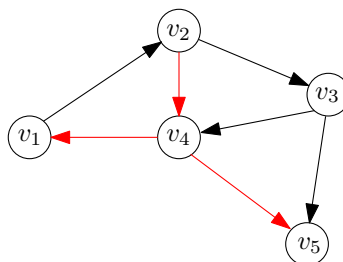
Preso un'arborescenza  $A$  creata tramite una DFS su un grafo  $G$ , ogni arco  $(v_i, v_j) \in E$  non in  $A$  può essere classificato in 3 categorie:

1. **Arco all'indietro**: se va da un discendente ad un antenato, cioè  $\text{Int}(v_i) \subset \text{Int}(v_j)$
2. **Arco in avanti**: se va da un antenato a un discendente, cioè  $\text{Int}(v_i) \supset \text{Int}(v_j)$
3. **Arco di attraversamento**: se i due nodi non hanno correlazioni, cioè  $\text{Int}(v_i) \cap \text{Int}(v_j) = \emptyset$

Nei grafi non diretti non essendoci differenza tra gli archi  $(v_i, v_j)$  e  $(v_j, v_i)$ , l'unico caso possibile è che sia un arco all'indietro perché:

$$t(v_i) < t(v_j) \implies \text{Int}(v_i) \subset \text{Int}(v_j)$$

**Esempio:**



Gli archi non presenti nell'arborescenza  $A$  sono  $(v_2, v_4)$ ,  $(v_4, v_1)$  e  $(v_4, v_5)$ . Questi archi sono classificati:

- $(v_2, v_4)$  è in avanti perché  $[2,5] \supset [4,5]$
- $(v_4, v_1)$  è indietro perché  $[5,5] \supset [1,5]$
- $(v_4, v_5)$  è di attraversamento perché  $[5,5] \cap [4,4] = \emptyset$

### 1.6.2 Algoritmo per controllare i tipi di archi

Per controllare i tipi di archi usiamo un algoritmo modificato della DFS che da in output 3 insiemi *Back*, *Forward* e *Cross* che contengono rispettivamente gli archi appartenenti alle tre categorie. Aggiungo un contatore  $C$  e anche due array  $t$  e  $T$  in cui segno gli intervalli dei vari nodi.

---

**Algoritmo:** DFS per classificare gli archi

---

**Input:**

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS_archi(G, x):
    C=1
    Vis[x]=1
    t[x]=1
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        while len(y.neighbors_out)!=0 :
            z=y.neighbors_out[0]
            y.neighbors_out.remove(0)
            if Vis[z]==0 :
                C+=1
                t[z]=C
                Vis[z]=1
                S.push(z)
                break
            if t[z]<t[y] and T[z]==0 :
                Back.add((y,z))
            elif t[z]<t[y] and T[z]!=0 :
                Cross.add((y,z))
            else :
                Forward.add((y,z))
        if y==S.top() :
            S.pop()
            T[y]=C
    return Back, Cross, Forward
```

---



## 1.7 Alberi di visita e cicli

### 1.7.1 Grafi non diretti

Dato un grafo non diretto  $G$  connesso con un albero di visita  $T$  generato da una DFS, allora:

$$\exists \text{ arco all'indietro} \iff G \text{ ciclico}$$

### 1.7.2 Grafi diretti

Dato un grafo diretto  $G$  con un'arborescenza  $T$  generata da una DFS, definiamo che:

- un nodo  $u$  è discendente di un altro nodo  $v$  se esiste un cammino  $v \rightarrow u$ , cioè  $\text{Int}(u) \subseteq \text{Int}(v)$
- un nodo  $v$  è antenato di un altro nodo  $u$  se un arco  $(u, v)$  è un arco all'indietro. Gli antenati di  $u$  sono tutti i nodi nel cammino radice  $\rightarrow u$

Anche in questo caso:

$$\exists \text{ arco all'indietro} \iff G \text{ ciclico}$$

#### Esempio:

Un pozzo universale è un nodo  $x$  per cui:

- $\nexists (x, y) \in E \forall y \in V(G)$
- $\exists (y, x) \in E \forall y \in V(G)$

Scrivere un algoritmo con costo  $O(n)$  per stabilire se esiste un pozzo universale avendo in input il grafo come matrice di adiacenza. La matrice se ci fosse un pozzo  $x$  sarebbe:

	$v_1$	...	$x$	...	$v_n$
$v_1$	0		1		
...		0	1		
$x$	0	0	0	0	0
...			1	0	
$v_n$			1		0

Il codice dell'algoritmo:

---

**Algoritmo:** Ricerca di un pozzo

---

**Input:**

- M: matrice di adiacenza del grafo

**def SearchPozzo(M):**

```

    pozzo=1
    for i in range(2,n) :
        if M[pozzo][i]==1 :
            pozzo=i
    for i in range(n) :
        if M[pozzo][i]==1 :
            return False
        if M[i][pozzo]==0 and i!=pozzo :
            return False
    return pozzo

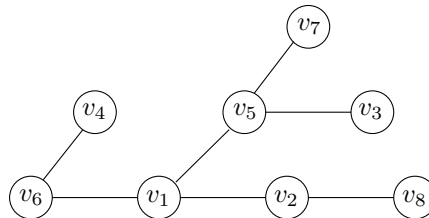
```

---

### 1.7.3 Vettore dei padri

Un modo di salvare un albero di visita è il vettore dei padri, cioè un vettore  $P$  in cui  $P[v]$  = nodo tramite cui si è arrivati a  $v$ . Per la radice  $P[v] = v$ .

**Esempio:**



n questo caso partendo da  $v_6$  il vettore dei padri sarebbe:

$$P = [6, 1, 5, 6, 1, 6, 5, 2]$$

Per trovare gli antenati di un nodo  $v$  si può usare un algoritmo con costo  $O(n)$ :

---

**Algoritmo:** Trovare gli antenati di un nodo  $v$

---

**def Ant(P, v):**

```

    A.add(v)
    while P[v] != v :
        A.add(P[v])
        v=P[v]
    return A

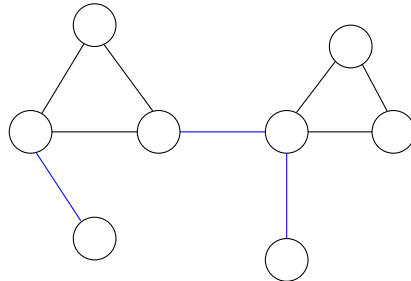
```

---

## 1.8 Ponti

### Definizione di ponte

Dato un grafo non diretto  $G$ , si dice **ponte** un arco che se tolto fa diventare il grafo non connesso:



Per controllare se un determinato arco  $(u, v)$  è un ponte lo elimino e controllo se esiste un altro cammino  $u \rightarrow v$ :

- esiste  $\implies (u, v)$  non ponte
- non esiste  $\implies (u, v)$  ponte

Se volessimo trovare tutti i ponti in un grafo controllando ogni arco il costo computazionale sarebbe  $O(m(n + m))$ .

Dato  $T$  l'albero di visita di una DFS su un grafo  $G$ :

$$(u, v) \text{ ponte} \iff \nexists \text{ arco all'indietro da } T_v \text{ a fuori } T_v$$

Dove  $T_v$  è l'insieme dei discendenti di  $v$ .

### 1.8.1 Algoritmo per trovare i ponti

Dato un grafo  $G$  per trovare tutti i ponti si usa un algoritmo che tiene segnato con  $Back[v]$  il punto più indietro che si può raggiungere da un determinato nodo  $v$ :

---

**Algoritmo:** DFS per trovare i ponti

---

```
def Ponti(G):
    C=0
    v=V[0]
    DFS_ponte(G, v, t, C, Back, P)
    Ponti=set()
    for v in V(G) :
        if Back[v]==t[v] and P[v]!=v :
            Ponti.add((P[v],v))
    return Ponti

def DFS_ponte(G, v, t, C, Back, P):
    C+=1
    t[v]=C
    Back[v]=t[v]
    for u in v.neighbors :
        if t[u]==0 :
            P[u]=v
            DFS_ponte(G, u, t, C, Back, P)
            Back[v]=min(Back[v],Back[u])
        elif u!=P[v] :
            Back[v]=min(Back[v],t[u])
```

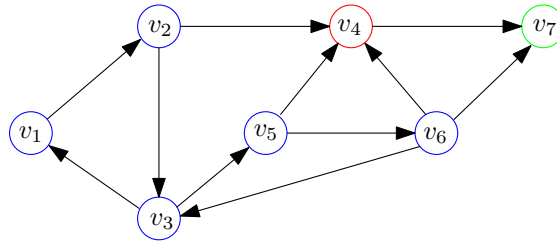
---

## 1.9 Componenti fortemente connessi

### Definizione di componente fortemente connesso

In un grafo  $G$  un **componente fortemente connesso** è un sottografo massimale (con massimo numero di nodi) fortemente connesso. Due componenti fortemente connessi non hanno nodi in comune. Un nodo singolo non facente parte di nessun componente è anch'esso un componente perché si può raggiungere da solo.

**Esempio:**



In questo caso possiamo dividere il grafo in 3 componenti fortemente connessi:

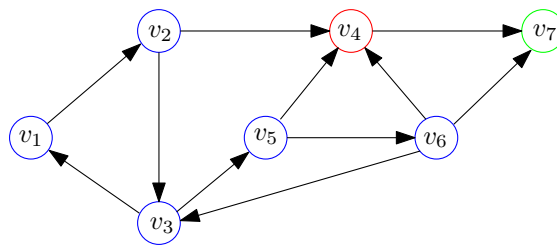
- $H_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$
- $H_2 = \{v_4\}$
- $H_3 = \{v_7\}$

### 1.9.1 Contrazione di un componente

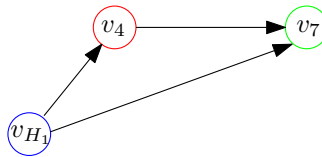
Preso un grafo diretto  $G$  e un componente fortemente connesso  $H$ , possiamo contrarre  $H$  in un solo nodo ottenendo un grafo  $G/V(H)$ . Il grafo dopo questo processo di contrazione conterrà:

- Nodi:  $(V(G) - V(H)) + v_H$
- Archi:
  - $\{(x, y) \in E(G) | x, y \notin V(H)\}$
  - $\{(v_i, v_H) \text{ se } \exists (v_i, x) \in E(G) | x \in V(H) \wedge v_i \notin V(H)\}$
  - $\{(v_H, v_i) \text{ se } \exists (x, v_i) \in E(G) | x \in V(H) \wedge v_i \notin V(H)\}$

**Esempio:**



In questo grafo se contraiamo il componente  $H_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\}$  il grafo  $G/V(H_1)$  diventa:



### 1.9.2 Algoritmo per trovare i componenti

Dato un grafo  $G$  con diverse componenti  $H_1, \dots, H_k$ , comprimendo un determinato componente  $H_i$ , nel grafo risultante  $G/V(H)$  avrò le componenti  $H'_1, \dots, H'_k$  tali che:

$$H'_j = \begin{cases} H_j & j \neq i \\ (H_i/V(H_i)) \cap v_{H_i} & i = j \end{cases}$$

Questo passaggio di contrazione viene applicato in un algoritmo ricorsivo per trovare tutti componenti:

---

**Algoritmo:** Trovare i componenti fortemente connessi in un grafo

---

```
def CompFort(G):
    if  $\nexists$  ciclo in G :
        | return { {v} | v  $\in$  V(G) } // insieme di insiemi
    else :
        | C=ciclo
        G=G/V(C)
         $H_1, \dots, H_k$ =CompFort(G)
        for i in range(k) :
            | if  $v_C \notin H_i$  : //  $v_C$  = nodo creato comprimendo C
            | |  $H'_i = H_i$ 
            else :
            | |  $H'_i = (H_i - \{v_C\}) \cup V(C)$ 
```

---

Il costo di questo algoritmo è  $O(n(n+m))$ .

### 1.9.3 Algoritmo di Tarjan

Dato un grafo  $G$  con componente fortemente connesso  $C$ , definiamo come  $C$ -radice il nodo  $v$  appartenente a  $C$  che è stato visitato per primo dalla DFS.

Preso  $v$  nodo  $C$ -radice di un componente  $C$  e definendo  $T(v)$  l'insieme dei discendenti di  $v$  nell'arborescenza  $T$  e  $C(v)$  il componente in cui si trova  $v$  allora:

1.  $C(v) \subseteq T(v)$
2. Prese  $v_1, \dots, v_k$  tutte le  $C$ -radici in  $T(v)$  allora  $T(v) = C(v_1) \cup \dots \cup C(v_k)$

Tramite queste proprietà possiamo usare un'altro algoritmo per trovare i componenti fortemente connessi:

---

**Algoritmo:** Trovare i componenti fortemente connessi in un grafo

---

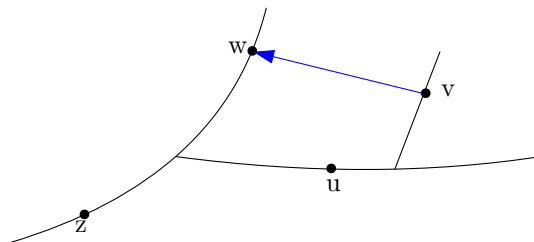
```
def SCC(G):
    Stack C=[]
    for v in V(G) | Vis[v]==0 :
        DFS_SCC(G, v, C, output)

def DFS_SCC(G, v, C, output):
    Vis[v]=1
    C.push(v)
    for u in v.neighbors_out | Vis[u]==0 :
        DFS_SCC(G, u, C, output)
    if v è C-radice : // vedremo dopo come si fa
        X=[]
        w=C.pop()
        X.append(w)
        while w!=v :
            w=C.pop()
            X.append(w)
        output.add(X)
    return output
```

---

Un nodo  $u$  non è  $C$ -radice se nella chiamata ricorsiva con radice  $u$  viene attraversato un arco  $(v, w)$  tale che  $w$  è stato già visitato ma il suo componente non ancora stabilito.

**Esempio:**



Se esiste  $(v, w)$  allora la  $C$ -radice  $z$  di  $C(w)$  deve essere un antenato di  $u$  e quindi  $z, u, v, w \in C(w)$ .

Per controllare se un nodo è una C-radice utilizziamo *back* per segnare il punto più indietro raggiungibile da un arco  $(v, w)$  in cui:

- $v$  un nodo dentro la chiamata di  $u$
- $w$  è un nodo già visitato ma con componente ancora non individuato

Inoltre utilizziamo un array  $CC$  in cui:

$$CC[u] = \begin{cases} 0 & \text{non visitato} \\ -t & \text{visitato al tempo } t \text{ ma con componente non identificato} \\ t & \text{componente a cui appartiene} \end{cases}$$

Date queste considerazioni possiamo riscrivere l'algoritmo precedente con costo  $O(n + m)$ :

---

**Algoritmo:** Algoritmo di Tarjan

---

**Input:**

- G: grafo
- u: nodo radice
- CC: array per segnare i componenti
- S: Stack
- cont\_n: contatore tempi di visita
- cont\_comp: contatore componenti

```
def DFS_SCC(G, u, CC, S, cont_n, cont_comp):
    cont_n+=1
    CC[u]=-cont_n
    S.push(u)
    back=cont_n
    for v in u.neighbors_out :
        if CC[v]==0 :
            b=DFS_SCC(G, v, CC, S, cont_n, cont_comp)
            back=min(b, back)
        elif CC[v]<0 :
            back=min(back,-CC[v])
    if back==CC[u] :
        cont_comp+=1
        w=S.pop()
        CC[w]=cont_comp
        while w!=u :
            w=S.pop()
            CC[w]=cont_comp
    return back
```

---

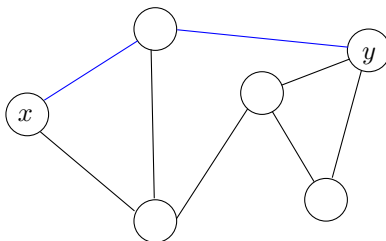


## 1.10 BFS (Ricerca in ampiezza)

### Distanza fra due nodi

La distanza fra due nodi  $x, y$  è definita come il minimo numero di archi in un cammino  $x \rightarrow y$  e si scrive  $\text{dist}(x, y)$ .

**Esempio:**



In questo caso  $\text{dist}(x, y) = 2$ .

### 1.10.1 Algoritmo della BFS

La BFS (breadth first search) è un metodo di visita di un grafo che consiste nel partire da un nodo e controllare prima tutti i nodi con distanza 1 (i vicini), poi tutti quelli con distanza 2 e così via. Con questo algoritmo siamo sicuri di sapere sempre la distanza minima di tutti i nodi dalla radice.

Viene implementato tramite un vettore dei padri inizializzato a -1 e usando un array Dist per segnare la distanza. Il costo dell'algoritmo è  $O(n + m)$ .

---

#### Algoritmo: BFS

---

```
def BFS(G, x):
    P[x]=x
    Queue Q
    Q.enqueue(x)
    while len(Q)!=0 :
        v=Q.dequeue()
        for w in v.neighbors :
            if P[w]==-1 :
                Q.enqueue(w)
                Dist[w]=Dist[v]+1
                P[w]=v
    return P, Dist
```

---

Dato un grafo  $G$  e due nodi  $x, y$  esiste sempre un nodo  $z$  vicino di  $y$  tale che:

$$\text{dist}(x, z) = \text{dist}(x, y) - 1$$

Se  $\text{dist}(x, y) = 1 \implies z = x$

**Esercizio esempio:**

Modificare la BFS per contare anche il numero di cammini possibili  $x \rightarrow y$  di lunghezza minima:

---

**Algoritmo:** Numero di cammini possibili tra due nodi di lunghezza minima

---

```
def BFS(G, x):
    nCamm[x]=1
    P[x]=x
    Queue Q
    Q.enqueue(x)
    while len(Q)!=0 :
        v.dequeue()
        for w in v.neighbors :
            if P[w]==-1 :
                Q.enqueue(w)
                Dist[w]=Dist[v]+1
                P[w]=v
                nCamm[w]=1
            elif Dist[v]==Dist[w]-1 :
                nCamm[w]+=nCamm[v]
    return P, Dist, nCamm
```

---

**1.10.2 Distanza fra insiemi di nodi**

Se vogliamo trovare la distanza minima tra due insiemi di nodi  $X$  e  $Y$  dobbiamo trovare il minimo tra tutte le distanze che comprendano un nodo di  $X$  e uno di  $Y$ .

Per fare ciò usiamo una versione modificata della BFS:

---

**Algoritmo:** Distanza tra insiemi di nodi

---

```
def BFS_set(G, X, Y):
    Queue Q
    for x in X :
        Q.enqueue(x)
        Dist[x]=0
    while len(Q)!=0 :
        v=Q.dequeue()
        for w in v.neighbors :
            if Dist[w]==-1 :
                Dist[w]=Dist[v]+1
                Q.enqueue(w)
    minimo=∞
    for y in Y :
        minimo=min(Dist[y],minimo)
    return minimo
```

---

### 1.10.3 Grafi pesati

#### Definizione di peso

Un **grafo pesato** è un grafo in cui ogni arco ha associato un numero detto **peso**. Il peso è definito:

$$w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Si definisce, al posto della distanza, il peso di un cammino scritto  $\text{dist}_w(x, y)$ , cioè la somma tra i pesi di tutti gli archi percorsi in quel cammino, e la distanza diventa quindi il cammino con peso minimo.

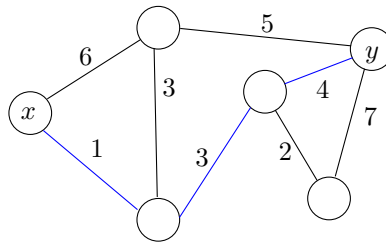
Dato un cammino  $P$  il suo peso sarà:

$$w(P) = \sum_{e \in P} w(e)$$

Presi due nodi qualsiasi  $x, y$  vale che:

1.  $\text{dist}_w(x, x) = 0$
2.  $\text{dist}_w(x, y) > 0 \iff x \neq y$
3.  $\text{dist}_w(x, y) \leq \text{dist}_w(x, z) + \text{dist}_w(z, y) \forall z \in V(G)$

**Esempio:**



In questo caso il cammino di peso minimo  $\text{dist}_w(x, y) = 1 + 3 + 4 = 8$ .

### 1.10.4 Calcolare distanze pesate (Dijkstra)

Un problema con i grafi pesati è quello di non poter calcolare la distanza pesata tra due nodi, neanche se vicini perché potrebbe esserci un cammino con più archi ma peso minore.

#### Peso minimo

Dato un grafo pesato  $G$  e un nodo  $x$ , scriviamo  $\alpha_i = w(x, v_i)$  per ogni nodo  $v_i$  vicino di  $x$ :

$$\min(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \alpha_i \iff \text{dist}_w(x, v_i) = \alpha_i$$

Questa regola può essere generalizzata anche per un insieme per cui è nota la distanza da  $x$ , cioè dato un insieme  $R$  di vertici per cui è nota la distanza da  $x$  e  $(u, v)$  l'arco che minimizza  $\text{dist}_w(x, u) + w(u, v)$  con  $e \in R \wedge v \notin R$  allora:

$$\text{dist}_w(x, v) = \text{dist}(x, u) + w(u, v)$$

In questo modo da un insieme  $R$  di nodi di cui è nota la distanza da un nodo  $x$ , si può sempre aggiungere a  $R$  un nodo vicino ad un qualsiasi nodo di  $R$ . Questo si può fare con un algoritmo chiamato Dijkstra:

---

**Algoritmo: Dijkstra**


---

```
def Dijkstra(G, x):
    R=set(x)
    while R!=V(G) :
        minimo=∞
        min_arco=None
        for (v,u) in E(G) | v in R and u not in R :
            if Dist[v]+w(v,u)<minimo :
                minimo=Dist[v]+w(v,u)
                min_arco=(v,u)
        R.add(min_arco.u)
        Dist[min_arco.u]=minimo
    return Dist
```

---

La complessità è  $O(n(n+m))$ , ma può essere ottimizzato usando un min heap  $H$  per memorizzare gli archi:

---

**Algoritmo: Dijkstra ottimizzato**


---

```
def Dijkstra(G, x):
    Dist[x]=0
    R=set(x)
    for v in V(G) :
        if v!=x :
            H.insert(v, key=∞)
        else :
            H.insert(v, key=0)
    while len(H)!=0 :
        v=H.extract_min()// elimina anche da H
        Dist[v]=H.key(v)
        for u in v.neighbors :
            if u in H and Dist[u]>Dist[v]+w(v,u) :
                Dist[u]=Dist[v]+w(v,u)
                H.update_key(u, Dist[u])
    return Dist
```

---

Il costo di questa versione ottimizzata è di  $O((n+m) \cdot \log n)$ .

# 2

## Algoritmi Greedy

### Definizione di algoritmo Greedy

Un algoritmo greedy è un algoritmo che partendo da una soluzione non ottimale (solitamente vuota) controlla tutti i possibili passi che si possono fare per estendere la soluzione e per ogni passo se è fattibile viene aggiunto alla soluzione. Alla fine la soluzione trovata sarà sicuramente possibile ma va dimostrato che è ottimale.

Per dimostrare che la soluzione trovata è anche ottimale:

1. Dimostrare che la soluzione trovata rispetti le caratteristiche previste
2. Dimostrare che ogni istanza della soluzione (soluzione dopo ogni iterazione) è contenuta nella soluzione ottimale:  
Supponendo che l'istanza  $\text{Sol}_k$  sia contenuta nella soluzione ottimale  $\text{Sol}^*$  bisogna dimostrare che anche l'istanza  $\text{Sol}_{k+1}$  sia contenuta in una soluzione ottimale. Di solito questa soluzione ottimale consiste in  $(\text{Sol}^* - x) \cup y | x \in \text{Sol}^* \wedge y \notin \text{Sol}^*$
3. Dimostrare che la soluzione output dell'algoritmo sia uguale alla soluzione ottimale che la contiene

### Esempio:

Dato un insieme  $I$  di intervalli  $I_1, \dots, I_n$  nella forma  $I_i = [a_i, b_i]$ , scrivere un algoritmo che trovi il numero massimo di intervalli disgiunti possibile.

Per farlo prima ordiniamo gli intervalli in base alla fine in modo crescente.

---

**Algoritmo:** Massimo numero di intervalli disgiunti

---

**Input:**

- $I$ : insieme di intervalli

```
def max_int_disj(I):  
    I.sort(key= lambda x:b:x)  
    Sol=set()  
    right_bound=-∞  
    for Int in I :  
        if Int[a]>right_bound :  
            Sol.add(Int)  
            right_bound=Int[b]  
    return Sol
```

---

**Dimostrazione:**

1. La soluzione contiene sicuramente intervalli disgiunti, quindi rispetta le condizioni
2. Supponiamo esista una soluzione ottimale  $\text{Sol}^*$  per cui  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$ :

- Caso base:  
 $\text{Sol}_0 = \emptyset \subset \text{Sol}^*$
- Ipotesi induttiva:  
Supponiamo sia vero per qualsiasi soluzione precedente a  $\text{Sol}_k$ , dobbiamo dimostrare che  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^* \implies \text{Sol}_{k+1} \subseteq \text{Sol}^*$
- Dimostrazione induttiva:

$$\text{Sol}_{k+1} = \begin{cases} \text{Sol}_k & \exists I_i \in \text{Sol}_k \mid I_{k+1} \cap I_i \neq \emptyset \\ \text{Sol}_k \cup I_{k+1} & \forall I_i \in \text{Sol}_k \implies I_i \cap I_{k+1} = \emptyset \end{cases}$$

Nel primo caso  $\text{Sol}_{k+1} = \text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$

Nel secondo caso se  $\text{Sol}_{k+1} \not\subseteq \text{Sol}^* \implies \exists I_j \in \text{Sol}^* \wedge I_j \notin \text{Sol}_k \mid I_j \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ , inoltre  $j > k+1$  perché se no  $I_j$  sarebbe già in  $\text{Sol}_k$  e quindi in  $\text{Sol}_{k+1}$ . Essendo  $j > k+1$  nell'algoritmo verrà preso prima  $I_{k+1}$  di  $I_j$  quindi  $(\text{Sol}^* - I_j) \cup I_{k+1}$  è una soluzione ottimale che contiene  $\text{Sol}_{k+1}$ .

3. Supponendo che l'output dell'algoritmo  $\text{Sol}_n$  sia diverso dalla soluzione ottimale  $\text{Sol}^*$  allora  $\exists I_i \in \text{Sol}^* \mid I_i \notin \text{Sol}_n$  ma per cui  $I_i \cap I_j = \emptyset \forall I_j \in \text{Sol}_n$  essendo  $\text{Sol}_n \subseteq \text{Sol}^*$ , ma allora alla  $i$ -esima iterazione, precedente alla fine dell'algoritmo,  $I_i$  dovrebbe essere in  $\text{Sol}_n$  quindi  $\text{Sol}_n = \text{Sol}^*$

## 2.1 Alberi di copertura

### Minimum Spanning Tree

Un **albero di copertura** in un grafo  $G$  è un sottografo  $T$  aciclico e tale che  $V(T) = V(G)$ . Si chiama **Minimum Spanning Tree (MST)** un albero di copertura con peso minimo. Un qualsiasi sottografo connesso che contiene tutti i nodi e ha peso minimo è sempre un MST.

### 2.1.1 Algoritmo di Kruskal

L'algoritmo di Kruskal permette, dato un grafo connesso, di ottenere l'MST. Per farlo dobbiamo ordinare gli archi per peso crescente.

---

**Algoritmo:** Algoritmo di Kruskal

---

```
def Kruskal(G):
    E.sort(key= w(e):e)
    Sol=set()
    for e in E(G) :
        if Sol ∪ e non contiene cicli :
            Sol.add(e)
```

---

**Dimostrazione:**

1.  $G$  è connesso quindi  $\forall v \in V(G)$  esiste almeno un arco che collega  $v$  preso dal ciclo, quindi  $V(\text{Sol}_m) = V(G)$ . Per lo stesso principio  $\text{Sol}_m$  è anche connesso, quindi  $\text{Sol}_m$  è un albero di copertura di  $G$ .
2. Supponiamo che esista una soluzione ottimale  $\text{Sol}^*$  per cui  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$ :
  - Caso base:  
 $\text{Sol}_0 = \emptyset \subset \text{Sol}^*$
  - Ipotesi induttiva:  
Supponiamo sia vero per qualsiasi soluzione precedente a  $\text{Sol}_k$ , dobbiamo dimostrare che  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^* \implies \text{Sol}_{k+1} \subseteq \text{Sol}^*$
  - Dimostrazione induttiva:

$$\text{Sol}_{k+1} = \begin{cases} \text{Sol}_k & \text{Sol}_k \cup e_{k+1} \text{ contiene cicli} \\ \text{Sol}_k + e_{k+1} & \text{Sol}_k \cup e_{k+1} \text{ non contiene cicli} \end{cases}$$

Nel primo caso  $\text{Sol}_{k+1} = \text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$

Nel secondo caso se  $\text{Sol}_{k+1} \not\subseteq \text{Sol}^* \implies \exists e_j \in \text{Sol}^* \wedge e_j \notin \text{Sol}_k | \text{Sol}^* \cup e_j$  è ciclico, ma visto che  $e_j \notin \text{Sol}_k$  ed essendo gli archi in ordine di peso, vuol dire che  $w(e_{k+1}) \leq w(e_j)$  e quindi  $(\text{Sol}^* - e_j) \cup e_{k+1}$  è una soluzione ottimale che contiene  $\text{Sol}_{k+1}$ .

3. Esiste quindi una soluzione  $\text{Sol}^*$  che contiene l'output dell'algoritmo  $\text{Sol}_m$  ed essendo  $\text{Sol}_m$  un albero di copertura allora  $\text{Sol}_m = \text{Sol}^*$ .

## 2.2 Grafi con pesi negativi

Se consideriamo un grafo pesato  $G$  con pesi anche negativi, cioè:

$$w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$$

Per trovare un sotto-grafo connesso  $H$  che contiene tutti i vertici con peso minimo dobbiamo modificare l'algoritmo precedente:

---

**Algoritmo:** Algoritmo di Kruskal con pesi negativi

---

```
def Kruskal_neg(G):
    E.sort(key= w(e):e)
    Sol={x ∈ E(G)|w(x) < 0}
    for (x,y) in E(G) :
        if ∄ cammino (x → y) in Sol :
            Sol.add((x,y))
    return Sol
```

---

## 2.3 Algoritmo di Prim

L'algoritmo di Prim permette, dato un grafo connesso, di ottenere l'MST. Per farlo dobbiamo ordinare gli archi per peso crescente.

---

**Algoritmo:** Algoritmo di Prim

---

```
def Prim(G):
    E.sort(key = e:w(e))
    x=V[0]
    Vis[x]=1
    Sol=set()
    while ∃ w | Vis[w]=0 :
        for (u,v) in E(G) : // verranno presi in ordine essendo ordinati
            if Vis[u]==1 and Vis[v]==0 :
                Sol.add((u,v))
                Vis[v]=1
                break
    return Sol
```

---

Il costo computazionale di questo algoritmo è  $O(nm)$ .



**Dimostrazione:**

1.  $G$  è connesso quindi  $\forall v \in V(G)$  esiste almeno un arco che collega  $v$  preso dal ciclo, quindi  $V(\text{Sol}_m) = V(G)$ . Per lo stesso principio  $\text{Sol}_m$  è anche connesso, quindi  $\text{Sol}_m$  è un albero di copertura di  $G$ .
2. Supponiamo che esista una soluzione ottimale  $\text{Sol}^*$  per cui  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$ :
  - Caso base:  
 $\text{Sol}_0 = \emptyset \subset \text{Sol}^*$
  - Ipotesi induttiva:  
Supponiamo sia vero per qualsiasi soluzione precedente a  $\text{Sol}_k$ , dobbiamo dimostrare che  $\text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^* \implies \text{Sol}_{k+1} \subseteq \text{Sol}^*$
  - Dimostrazione induttiva:

$$\text{Sol}_{k+1} = \begin{cases} \text{Sol}_k & \nexists v | \text{Vis}[v] = 0 \\ \text{Sol}_k + e_{k+1} & \exists e_{k+1} = (u, v) | \text{Vis}[v] = 0 \wedge \text{Vis}[u] = 1 \end{cases}$$

Nel primo caso  $\text{Sol}_{k+1} = \text{Sol}_k \subseteq \text{Sol}^*$

Nel secondo caso se  $\text{Sol}_{k+1} \not\subseteq \text{Sol}^* \implies \exists e_j \in \text{Sol}^* \wedge e_j \notin \text{Sol}_k | e_j = (x, v)$  per un qualche nodo  $x$ , ma visto che  $e_j \notin \text{Sol}_k$  ed essendo gli archi in ordine di peso, vuol dire che  $w(e_{k+1}) \leq w(e_j)$  e quindi  $(\text{Sol}^* - e_j) \cup e_{k+1}$  è una soluzione ottimale che contiene  $\text{Sol}_{k+1}$ .

3. Esiste quindi una soluzione  $\text{Sol}^*$  che contiene l'output dell'algoritmo  $\text{Sol}_m$  ed essendo  $\text{Sol}_m$  un albero di copertura allora  $\text{Sol}_m = \text{Sol}^*$ .

# 3

## Algoritmi divide et impera

Gli algoritmi divide et impera consistono nel dividere il problema totale in sotto-problemi che vengono risolti ricorsivamente. Per calcolare il costo computazionale di questi problemi si utilizzano le equazioni di ricorrenza.

### 3.1 Teorema principale

Data un'equazione di ricorrenza nella forma:

$$T = \begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

Con  $a \geq 1$  e  $b > 1$ .

Per risolverla ci sono vari casi:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n) & \text{se } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{se } f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \text{ e } a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n) \end{cases}$$

## 3.2 Esercizi divide et impera

### 3.2.1 Sottoarray di somma massima

Preso un array in input composto da numeri interi, trovare in  $\Theta(n \log n)$  il sottoarray di somma massima.

**Soluzione:**

---

**Algoritmo:** Sottoarray di somma massima

---

```
def max_subarray(A, a, b):
    if a==b :
        | return A[a],0
    m=(a+b)//2
    sx=max_subarray(A, a, m)
    dx=max_subarray(A, m+1, b)
    somma, pref, suff=0
    for i in range(m, a) :
        | somma+=A[i]
        | pref=max(pref, somma)
    somma=0
    for i in range(m+1, b) :
        | somma+=A[i]
        | suff=max(suff, somma)
    return max(sx, dx, pref+suff)
```

---

**Costo computazionale:**

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n \implies f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \implies T(n) = \Theta(n \log n)$$

### 3.2.2 Valore singolo in un array

Dato un array ordinato di lunghezza dispari in cui ogni valore compare 1 o 2 volte, trovare in  $\Theta(\log n)$  un valore che appare una sola volta.

**Soluzione:**

---

**Algoritmo:** Valore singolo in un array

---

```
def single(A, a, b):
    if a==b :
        | return A[a]
    m=(a+b)//2
    if A[m]!=A[m+1] and A[m]!=A[m-1] :
        | return A[m]
    // nei 4 casi vado sempre dove la parte rimanente da controllare è
    dispari
    if A[m]==A[m+1] :
        | if m%2!=0 :
        | | return single(A, a, m-1)
        | else :
        | | return single(A, m+2, b)
    elif A[m]==A[m-1] :
        | if m%2==0 :
        | | return single(A, a, m-2)
        | else :
        | | return single(A, m+1, b)
```

---

**Costo computazionale:**

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1 \implies f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \implies T(n) = \Theta(\log n)$$

### 3.3 Elemento maggioritario in un array

Dato un array trovare in  $\Theta(n \log n)$  un elemento che appare più di  $\frac{n}{2}$  volte all'interno dell'array.

**Soluzione:**

---

**Algoritmo:** Elemento maggioritario in un array

---

```
def major(A, a, b):
    if a==b :
        | return A[a]
    m=(a+b)//2
    sx=major(A, a, m)
    dx=major(A, m+1, b)
    count_sx, count_dx=0
    for i in range(a,b) :
        | if sx!=None and A[i]==sx :
        | | count_sx+=1
        | if dx!=None and A[i]==dx :
        | | count_dx+=1
    if count_sx>=m+1 :
        | return sx
    if count_dx>=m+1 :
        | return dx
    return None
```

---

**Costo computazionale:**

$$\begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) \\ T(1) = \Theta(1) \end{cases}$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n \implies f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \implies T(n) = \Theta(n \log n)$$

# 4

## Programmazione dinamica

La programmazione dinamica è un approccio algoritmico basato sulla risoluzione di un problema partendo da soluzioni dello stesso problema ma di dimensioni più piccole. A differenza dell'approccio divide et impera in cui il problema di solito si risolve tramite la ricorsione, nella programmazione dinamica si usano solitamente matrici per considerare tutti i casi possibili.

## 4.1 Esercizi di programmazione dinamica

### 4.1.1 Ottimizzare lo spazio su un disco

Dato un disco di capacità  $C$  e  $n$  file di dimensione  $s_1, \dots, s_n$ , trovare l'insieme di file che ottimizza lo spazio del disco (occupa più spazio possibile).

**Soluzione:**

Definiamo una matrice  $T$  di grandezza  $(n+1) \times (C+1)$  in cui:

- $T[k, \alpha]$  = capacità massima che si può riempire in un disco con capacità  $\alpha$  e usando i primi  $k$  file
- $T[0, \alpha] = 0 \forall \alpha$
- $T[k, 0] = 0 \forall k$

Gli altri valori della matrice verranno riempiti:

$$T[k, \alpha] = \begin{cases} \max(T[k-1, \alpha], T[k-1, \alpha - s_k] + s_k) & s_k \leq \alpha \\ T[k-1, \alpha] & s_k > \alpha \end{cases}$$

---

**Algoritmo:** Ottimizzare lo spazio su un disco

---

**Input:**

- C: capacità del disco
- S: insieme contenente i pesi dei file

**def DiskSpace(C, S):**

```

    n=len(S)
    T=(n+1)×(C+1) // inizializzata a 0
    for i in range(n) :
        for j in range(C) :
            if S[i]>C :
                T[i][j]=T[i-1][j]
            else :
                T[i][j]=max(T[i-1][j], T[i-1][j-S[i]]+S[i])
    maxS=T[n][C]
    Sol=set()
    for k in range(n,0,-1) :
        if T[k][maxS] != T[k-1][maxS] :
            Sol.add(S[k])
            maxS-=S[k]
    return Sol, T[n][C]
```

---

Il costo dell'algoritmo è  $O(nC)$  ma l'input è  $n \log(C)$  quindi l'algoritmo è esponenziale rispetto all'input.

### 4.1.2 Cammini colorati su una scacchiera

In una scacchiera  $n \times n$  in cui ogni casella è colorata di rosso o di blu, cioè:

$$C[i, j] = \begin{cases} \text{rosso} \\ \text{blu} \end{cases}$$

Una pedina che parte da  $(0,0)$  deve arrivare a  $(n,n)$  potendo attraversare solo caselle blu e potendosi muovere solo in basso o a destra. Si vuole sapere il numero di cammini possibili.

**Soluzione:**

Definiamo una matrice  $T$  di grandezza  $n \times n$  in cui:

- $T[i, j]$  = numero di cammini possibili da  $(0,0)$  a  $(i, j)$
- $T[0, j] = \begin{cases} 1 & T[0, j-1] = 1 \wedge C[0][j] = \text{blu} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $T[i, 0] = \begin{cases} 1 & T[i-1, 0] = 1 \wedge C[i][0] = \text{blu} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Gli altri valori della matrice verranno riempiti:

$$T[i, j] = T[i-1, j] + T[i, j-1]$$

---

**Algoritmo:** Cammini colorati su una scacchiera

---

```
def nCamm(C):
    n=len(C)
    T=n*n// inizializzata a 0
    if C[0][0]==rosso :
        | return 0
    else :
        | T[0][0]=1
    for j in range(n) : // riempie la prima riga
        | if T[0][j-1]==1 and [0][j]==blu :
        | | T[0][j]=1
        | else :
        | | T[0][j]=0
    for i in range(n) : // riempie la prima colonna
        | if T[i-1][0]==1 and [i][0]==blu :
        | | T[i][0]=1
        | else :
        | | T[i][0]=0
    for i in range(1,n) :
        | for j in range(1,n) :
        | | T[i][j]=T[i-1][j]+T[i][j-1]
    return T[n][n]
```

---



### 4.1.3 Ottimizzare il peso in uno zaino

Dato uno zaino di capacità  $C$  e  $n$  oggetti di peso  $p_1, \dots, p_n$  e valore  $v_1, \dots, v_n$ , trovare l'insieme di oggetti che massimizzano il valore senza superare la capacità dello zaino.

**Soluzione:**

Definiamo una matrice  $T$  di grandezza  $(n+1) \times (C+1)$  in cui:

- $T[k, \alpha]$  = valore massimo ottenibile in uno zaino di peso  $\alpha$  usando i primi  $k$  oggetti
- $T[0, \alpha] = 0 \forall \alpha$
- $T[k, 0] = 0 \forall k$

Gli altri valori della matrice verranno riempiti:

$$T[k, \alpha] = \begin{cases} \max(T[k-1, \alpha], T[k-1, \alpha - p_k] + v_k) & p_k \leq \alpha \\ T[k-1, \alpha] & p_k > \alpha \end{cases}$$

---

**Algoritmo:** Ottimizzare il peso in uno zaino

---

```
def OttZaino(C, P, V):
    n=len(P)
    T=(n+1)×(C+1)// inizializzata a 0
    for i in range(1,len(V)) :
        for j in range(1,C) :
            if P[i]>j :
                T[i][j]=T[i-1][j]
            else :
                T[i][j]=max(T[i-1][j],T[i-1][j-CP[i]]+V[i])
    col=C
    Sol=set()
    for k in range(n,2,-1) :
        if T[k][col]!=T[k-1][col] :
            Sol.add(k)
            col-=P[k]
    if T[1][col]!=0 :
        Sol.add(1)
    return Sol, T[n][C]
```

---

#### 4.1.4 Cammino di peso massimo

Dato un grafo  $G$  diretto e aciclico, trovare il peso massimo di un cammino  $x \rightarrow z$ .

**Soluzione:**

Definiamo una matrice  $T$  di grandezza  $(n+1) \times n$  in cui:

- $T[k, z] =$  peso massimo di un cammino  $x \rightarrow z$  passando per massimo  $k$  archi
- $T[0, z] = \begin{cases} 0 & z = x \\ \text{None} & z \neq x \end{cases}$

Gli altri valori della matrice verranno riempiti:

$$T[k, z] = \max(T[k-1, z], T[k-1, v_i] + w(v_i, z) \mid \forall (v_i, z) \in E(G))$$

---

**Algoritmo:** Cammino di peso massimo

---

```
def CammMax(G, x, z):
    n=len(V(G))
    T=(n+1)×n// inizializzata con None
    for v in V(G) :
        if v==z :
            T[0][v]=0
        else :
            T[0][v]=None
    for k in range(1,n-1) :
        for v in V(G) :
            T[k][v]=T[k-1][v]
            for u in v.neighbors_in :
                T[k][v]=max(T[k][v], T[k-1][u]+w(u,v))
    peso=T[n-1][z]
    Sol=set()
    for z!=x :
        if T[k][z]==T[k-1][z] :
            k-=1
            continue
        for u in z.neighbors_in :
            if T[k][z]==T[k-1][u]+w(u,v) :
                Sol.add((u,v))
                z=u
                k-=1
                break
    return Sol, peso
```

---