Progettazione di Algoritmi

Simone Lidonnici

10 luglio 2024

Indice

1

Teoria dei grafi

Definizione di Grafo

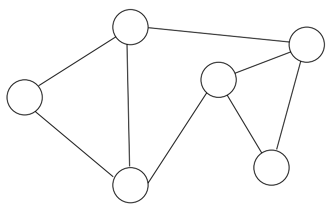
Un **grafo** G è una coppia (V, E) in cui V è un insieme di nodi e E un insieme di archi che collegano due nodi. Un grafo si dice **semplice** se:

- Non ha cappi, cioè nessun nodo è collegato con se stesso
- Ogni coppia di nodi è collegata da massimo un arco

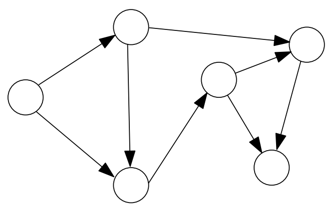
1.1 Tipi di grafi

1.1.1 Grafi diretti e non diretti

I grafi possono essere di due tipologie in base a se gli archi sono **orientati**, cioè partono da un nodo e arrivano ad un altro senza essere percorribili al contrario. Se il grafo ha archi orientati si dice **diretto**.



Grafo non diretto



Grafo diretto

1.1.2 Passeggiate e cammini

Nodi adiacenti

Due nodi collegati da un arco si dicono **adiacenti** (o vicini) e l'arco che li collega viene detto incidente. Per indicare che due nodi sono adiacenti scriviamo $x \backsim y$.
Si definisce il grado di un nodo $\deg(x)$ come il nomero dei suoi nodi adiacenti, uguale al numero di archi incidenti.

Definizione di passeggiata

Una **passeggiata** su un grafo è una sequenza di archi e nodi:

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

In cui ogni arco e_i collega il nodo v_{i-1} al nodo v_i.
Un **cammino** è una passeggiata in cui non si ripetono i nodi.

1.1.3 Grafi connessi e fortemente connessi

Definizione di grafo connesso

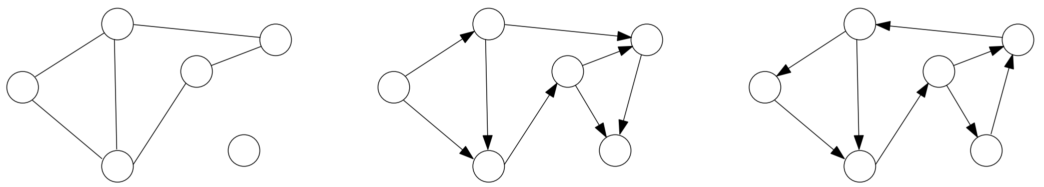
Un grafo G si dice **connesso** se per qualsiasi coppia di nodi esiste un cammino che li collega:

$$\forall v_i, v_j \in V(G) \exists \text{cammino} | v_1 \to v_j \lor v_j \to v_i$$

Un grafo G si dice **fortemente connesso** se per qualsiasi coppia di nodi esiste un cammino che li collega partendo da entrambi i nodi:

$$\forall v_i, v_j \in V(G) \exists \text{cammino} | v_1 \to v_j \land v_j \to v_i$$

Nel caso di grafi non diretti ogni grafo connesso è anche fortemente connesso.



Grafo non connesso Grafo connesso Grafo fortemente connesso

Esiste un tipo specifico di passeggiata detta **passeggiata Euleriana** in cui si attraversano tutti i nodi una sola volta. Può esistere una passeggiata Euleriana in un grafo solo se il grafo è connesso e ci sono al massimo 2 nodi con grado dispari, che saranno inizio e fine.

1.1.4 Grafi ciclici

Definizione di grafo ciclico

Un grafo G è ciclico se esiste un sottogrppo connesso in cui ogni vertice ha grado ≥ 2.
Se nel grafo tutti i vertici hanno grado ≥ 2 allora il grafo è sicuramente ciclico.

$$\forall v \in V(G) \deg(v) \geq 2 \implies G \text{ ciclico}$$

In un grafo diretto se ogni nodo ha almeno un arco uscente allora il grafo è ciclico.

1.2 Rappresentare un grafo

1.2.1 Matrici di adiacenza

I grafi possono essere rappresentati con delle matrici di adiacenza in cui se v_i è adiacente a v_j la matrice conterrà 1 nella posizione (i, j):

	v_1	...	v_j	...	v_n
v_1	0				
...					
v_i			1		
...					
v_n					0

Costo per controllare se x è vicino di y: $O(1)$
Spazio necessario per l'archiviazione: $O(n^2)$

1.2.2 Liste di adiacenza

Per rappresentare i grafi si può anche usare una lista di adiacenza in cui ogni nodo ha una lista contenente tutti i suoi vicini:

$$v_1.\text{neighbors} = [\dots]$$
$$\dots$$
$$v_n.\text{neighbors} = [\dots]$$

Nel caso di un grafo diretto, ogni nodo avrà due liste:

- v_i.neighbors_out che contiene i nodi collegati da archi uscenti da v_i
- v_i.neighbors_in che contiene i nodi collegati da archi entranti in v_i

Costo per controllare se x è vicino di y: $O(n)$
Spazio necessario per l'archiviazione: $O(n^2)$
Lunghezza della lista di vicini di un determinato nodo v_i: $\deg(v_i)$
Grandezza totale delle liste: $O(n) + O(\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)) = O(n + m)$

1.3 Trovare il ciclo in un grafo

Dato un grafo G in cui ogni vertice ha grado ≥ 2, l'algoritmo per trovare il ciclo:

Algoritmo: Ricerca di un ciclo in un grafo G

Input:

- G: grafo

Output:

- C: nodi che formano il ciclo

```
def FindCiclo(G):
    x=V[0]
    C=[x]
    current=x
    next=x.neighbors[0]
    while next not in C : // finchè non trovo un nodo già visitato
        C.append(next)
        current=next
        if current.neighbors[0]!=C[-2] :
            next=current.neighbors[0]
        else
            next=current.neighbors[1]
    while C[0]!=next :
        C.pop(0)
    return C
```

1.4 DFS (Ricerca in profondità)

La **DFS** (Depth first search) è un modo per visitare un grafo che consiste nel partire da un nodo e spostarsi in un vicino casuale non ancora visitato e nel caso tutti i vicini di un nodo siano già stati visitati ritornare al nodo precedente. Per implementare questo roll-back si utilizza uno Stack. L'algoritmo ritorna tutti i nodi visitabili dal nodo di partenza, quindi nel caso di grafo non connesso, ritornerà solo i vertici nel sottografo contenente il nodo di partenza.

Algoritmo: DFS

Input:

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS(G, x):
    Vis=set()
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        if ∃ z in y.neighbors | z ∉ Vis :  // O(deg(y) · n)
            Vis.add(z)
            S.push(z)
        else
            S.pop()
    return Vis
```

Dimostrazione per assurdo:
Supponiamo esista $y | \exists$cammino $x \to y$ ma $y \notin \text{Vis}$ e sia i un indice per cui $v_i \in \text{Vis} \land v_{i+1} \notin \text{Vis}$.

$v_i \in \text{Vis} \implies \begin{cases} v_i \text{ è stato inserito in } S \\ v_i \text{ è stato tolto da } S \end{cases} \implies$ ogni vicino di v_i è stato inserito in Vis $\implies v_{i+1}$ è stato inserito in Vis

1.4.1 DFS ottimizzata

L'algoritmo di base della DFS è poco ottimizzato per via del costo dell'if che richiede $O(\deg(y) \cdot n)$, per ottimizzarlo si cambia la struttura di Vis rendendolo un array lungo n in cui:

$$Vis[v] = \begin{cases} 0 & v \text{ non è stato visitato} \\ 1 & v \text{ è stato visitato} \end{cases}$$

Con questo cambiamento l'algoritmo diventa:

Algoritmo: DFS ottimizzata

Input:

- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS_ott(G, x):
    Vis[x]=1
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        if Vis[y.neighbors[0]]==1 :  // O(deg(y) · n)
            z=y.neighbors[0]
            Vis[z]=1
            S.push(z)
        y.neighbors.remove(0)
        if len(y.neighbors==0) :
            S.pop()
    return Vis
```

Avendo tutto costo $O(1)$ tranne il ciclo while con costo $O(n+m)$, l'algoritmo ha costo complessivo $O(n+m)$.

1.4.2 DFS ricorsiva

Della DFS si può fare anche una versione ricorsiva:

Algoritmo: DFS ricorsiva

Input:
- G: grafo
- x: nodo di partenza
- Vis: array nodi visitati

```
def DFS_ric(G, x):
    Vis[x]=1
    for y in x.neighbors :
        if Vis[y]==0 :
            DFS_ric(G, y, Vis)
    return Vis
```

Il costo di questo algoritmo è $O(n + m)$.

1.4.3 DFS in grafi diretti

Nel caso di grafi diretti bisogna cambiare l'algoritmo per controllare solo gli archi uscenti e non quelli entranti quando si cambia nodo:

Algoritmo: DFS

Input:
- G: grafo
- x: nodo di partenza

```
def DFS_dir(G, x):
    Vis[x]=1
    Stack S=[x]
    while len(S)!=0 :
        y=S.top()
        if ∃ z in y.neighbors_out | Vis[z]==0 :
            Vis[z]=1
            S.push(z)
        else
            S.pop()
    return Vis
```

1.4.4 Componenti e DFS con componenti

Definizione di componente

Un **componente** è l'insieme di nodi di un sottografo connesso, però non connesso al resto del grafo.

$$Comp[x] = \text{nodi nello stesso componente che contiene } x$$
$$Comp[x] = Comp[y] \iff x, y \text{ appartengono allo stesso sottografo}$$

L'algoritmo che visita tutti i componenti è una modifica della DFS ricorsiva in cui:

$$Comp[v] = \begin{cases} 0 & v \text{ non è ancora stato visitato} \\ i & v \text{è nel componente } i \end{cases}$$

Si aggiunge inoltre una funzione per cambiare componente in cui si trova il nodo corrente:

Algoritmo: DFS per trovare componenti

Input:
- G: grafo

```
def CComp(G):
    comp_count=0
    for x in V :
        if Comp[x]==0 :
            comp_count+=1
            DFS_ric_comp(G, x, Comp, comp_count)
    return Comp


def DFS_ric_comp(G, x, Comp, comp_count):
    Comp[x]=comp_count
    for y in x.neighbors :
        if Comp[y]==0 :
            DFS_ric_comp(G, y, Comp, comp_count)
    return Comp
```

1.5 Ordinare un grafo

Un grafo diretto G ha un **ordine topologico** se esiste un ordine per cui ogni nodo ha archi uscenti che vanno solo verso nodi successivi nell'ordine e archi entranti solo da nodi precedenti nell'ordine. Inoltre:

$$G \text{ ciclico} \iff \nexists \text{ ordine topologico}$$

Corollario:

$$G \text{ non ciclico} \implies \exists v \in V | v \text{ non ha archi uscenti}$$

1.5.1 Trovare l'ordine topologico in grafi diretti

Per trovare l'ordine topologico in grafi diretti si usa un'algoritmo:

Algoritmo: DFS per trovare l'ordine topologico in grafi diretti

Input:

- G: grafo

```
def DFS_ord(G):
    l=[]
    while len(G)!=0 :  // O(n)
        x=no_archi(G)
        l.insert(x,0)
        elimina(x)
    return l


def no_archi(G): // O(n)
    for v in V :
        if len(v.neighbors_out)==0 :
            return v


def elimina(x):  // O(m)
    for e in E :
        if x in e :
            E.remove(e)
```

Il ciclo while esegue n volte le funzioni no_archi e elimina, quindi il costo dell'algoritmo sarà: $O(n(n+m))$

1.5.2 Trovare l'ordine topologico in grafi non diretti

Per trovare l'ordine topologico in grafi non diretti si usa un'algoritmo:

Algoritmo: DFS per trovare l'ordine topologico in grafi non diretti

Input:

- G: grafo

```
def ord_top(G):
    L=[]
    for v in V :
        if Vis[v]==0 :
            DFS_ord(G, v, Vis, L)
    return L


def DFS_ord(G, v, Vis, L):
    Vis[v]=1
    for w in v.neighbors :
        if Vis[w]==0 :
            DFS_ord(G, w, Vis, L)
    L.insert(v,0)
```

1.6 Intervalli di visita e tipi di archi