Машинне навчання

- **ТЕМА:**
- **УЗАГАЛЬНЕНІ ВІРІШУВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ**
- **Лекція №3**

Узагальнені вирішувальні функції

Простір образів $x = \varphi(x), x \epsilon R^n$, В якому класи будуть лінійно-разділимі, називається спрямляючим простором, а відображення φ - спрямляючим відображенням. Для побудови спрямляючого відображення можна використовувати узагальнені вирішальні функції (УВФ) виду:

$$d(x) = w_1 * f_1(x) + \cdots + w_{l-1} * f_{l-1}(x),$$

де $f_i(x)$ - скалярні функції в R^n.

Окремим випадком УВФ є квадратичні функції, які R^2 мають вигляд:

$$d(x) = d(x_1, x_2) = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_1 x_2 + w_4 x_1 + w_5 x_2 + w_6$$

У загальному випадку в R^n квадратична вирішальна функція має вигляд:

$$d(x) = d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i + w_{n+1}$$

При цьому число компонент функції дорівнюватиме $l = C_{n+2}^{2}$.

Узагальненням квадратичних функцій є поліноміальні вирішальні функції, що складаються з компонентів виду:

$x_1^{S1} * x_2^{S2} * \dots * x_n^{Sn}, S_1 + \cdots + S_n$ – степінь монома.

За допомогою таких функцій можна описувати дуже складні класи.

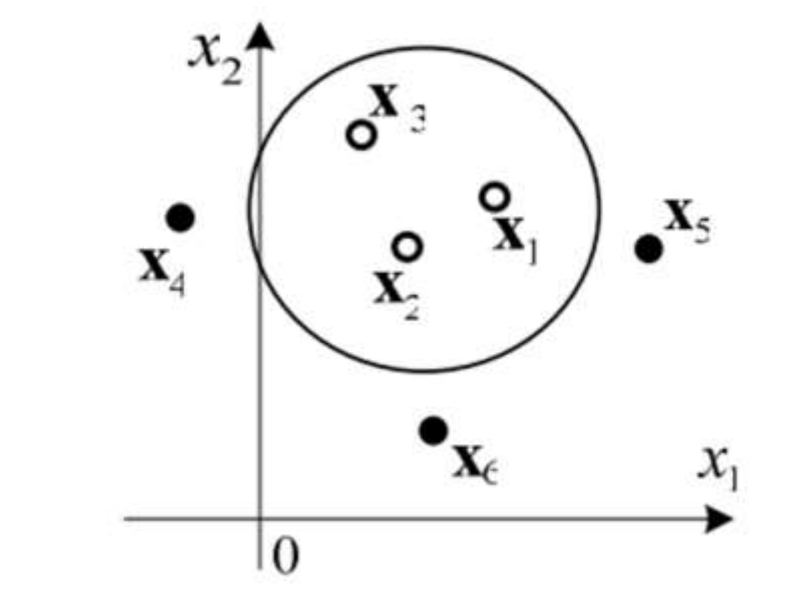


рис.1

На рис.1 зображені об'єкти $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, які можна віднести до різних класів w_1, w_2, розділивши їх за допомогою узагальненої вирішальної функції:

$$d(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 2,$$
$$d(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 + 8$$

або

$$d(x^*) = 1 * x_1^* + 1 * x_2^* + 0 * x_3^* - 2 * x_4^* - 6 * x_5^* + 8 * 1.$$

Спрямляются простір має більшу розмірність, ніж вихідний простір, що ускладнює побудову системи розпізнавання образів. Спостерігається відомий парадокс: щоб точніше описати образ потрібно використовувати вектори великої розмірності. З іншого боку, тимчасові витрати при обробці таких векторів в системі розпізнавання стають вельми значними.

Спрямляючий простір

Спрямляючий простір має більшу розмірність, ніж вихідний простір, що ускладнює побудову системи розпізнавання образів. Спостерігається відомий парадокс: *щоб точніше описати образ потрібно використовувати вектори великої розмірності*. З іншого боку, тимчасові витрати при обробці таких векторів в системі розпізнавання стають вельми значними.

Відомий американський математик *Річард Беллман* назвав цей феномен «прокляттям розмірності» (*curse of dimentionality*). Тому намагаються вибирати так УВФ, щоб розмірність спрямляючого простору була найменшою.

<u>Це завдання називається завданням зниження розмірності</u>.

Завдання зниження розмірності. Метод головних компонент

Завдання зниження розмірності можна розглядати як задачу вибору найбільш інформативних ознак образів. Точніше, за заданою вибіркою векторів, що належать різним лінійно роздільна класів, потрібно знайти такий підпростір R^P вихідного простору $R^n, p < n,$ щоб після обчислення проекцій $x' = p * r * n \epsilon R^P$ *векторов* $x \epsilon R^n$ на цей підпростір проекції класів залишалися лінійно роздільні. Причому бажано, щоб проекції класів якомога «далі» розташовувалися один від одного.

Напрямок проектування можна знайти, аналізуючи кореляцію ознак в класах або дисперсії розподілу ознак в класах. Знаходження напрямки проекції за допомогою аналізу кореляцій ознак реалізується в методі головних компонент (розкладання Карунена-Лоева або перетворення Хотеллінга).

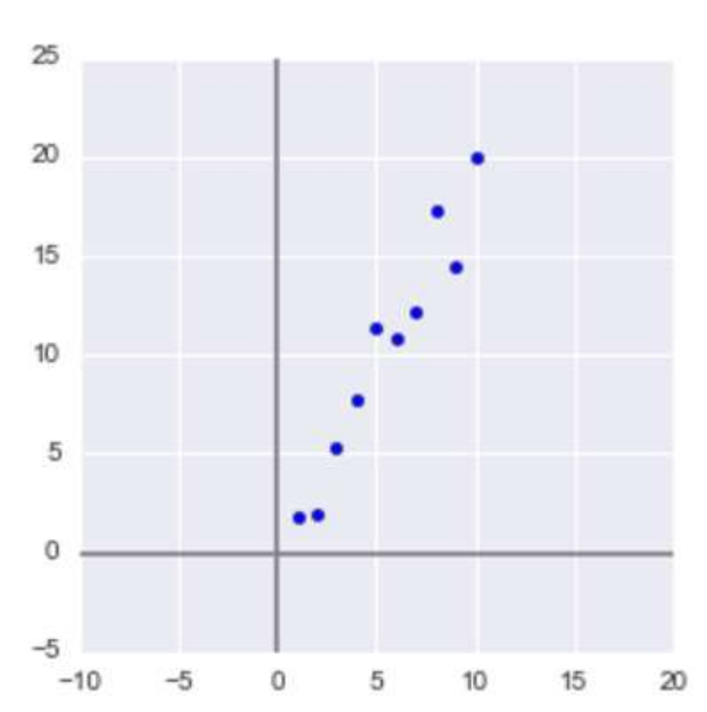
Кореляційний підхід в методі головних компонент

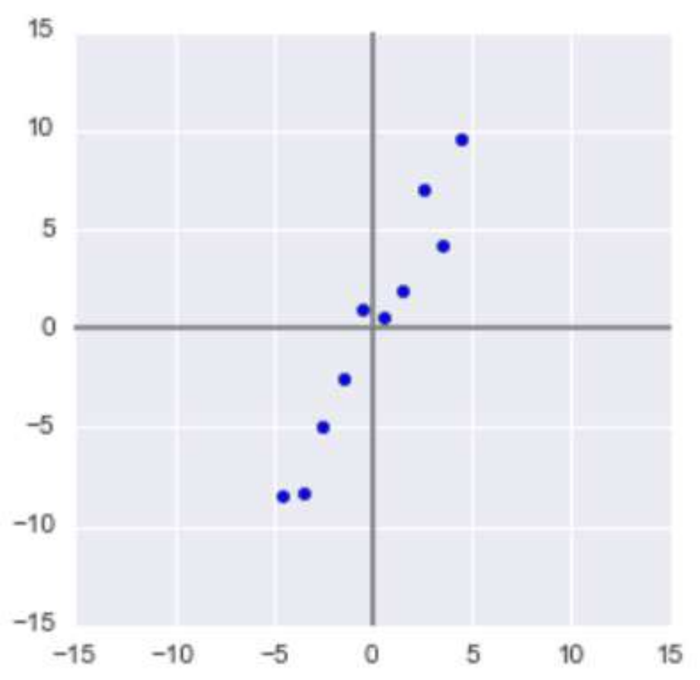
в цьому випадку розглядається кореляція між ознаками векторів-образів *X* навчальної вибірки.

- Для вирішення завдання зниження розмірності знаходяться такі лінійні комбінації ознак, які є слабо корельованими один з одним на векторах навчальної вибірки.
- Якщо вектори навчальної вибірки є центрованими (тобто уся вибірка має нульове математичне сподівання), то проаналізувати кореляцію ознак можна за допомогою автокореляційної матриці:

Додаткова інформація*
метод анализа главных компонент (PCA – principal component analysis)

Можна сказати, що математичне очікування - це «центр ваги» величини, а дисперсія - це її «розміри».

- 

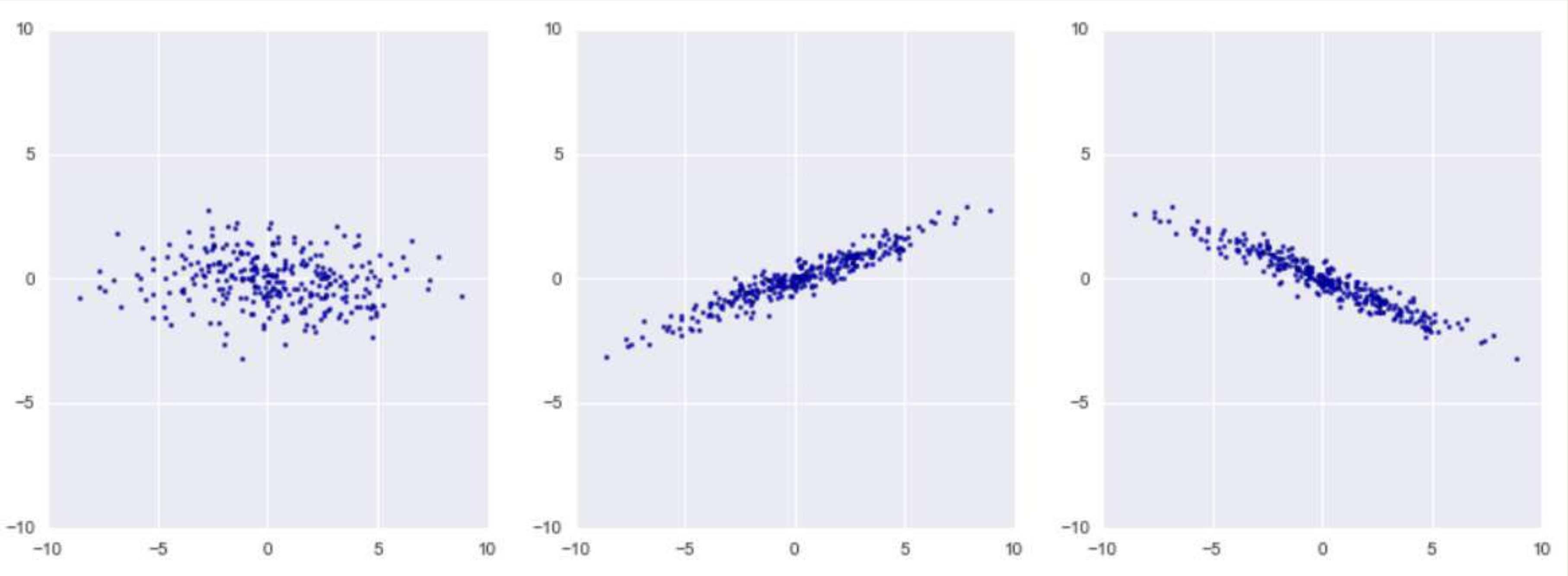


Додаткова інформація*
метод анализа главных компонент (PCA – principal component analysis)

- **Дисперсія** сильно залежить від порядків значень випадкової величини, тобто **чутлива до масштабування**. Тому якщо одиниці виміру ознак сильно розрізняються своїми порядками, вкрай рекомендується стандартизувати їх. У нашому випадку значення не сильно різняться в порядках, так що для простоти прикладу ми не будемо виконувати цю операцію.

- Додатково

Коварицiйна матриця*



Для опису форми випадкового вектора необхідна ковариационная матриця.
https://habr.com/ru/post/304214/
http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%B3%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D1%82

Власні вектори та власні числа*

Вла́сний ве́ктор (англ. *eigenvector*) квадратної матриці ***A*** (з **вла́сним зна́ченням** (англ. *eigenvalue*) — це ненульовий вектор, для якого виконується співвідношення

$$Av = \lambda v,$$

λ це певний скаляр, тобто дійсне або комплексне число.

Тобто, власні вектори матриці A — це ненульові вектори, які під дією лінійного перетворення, що задається матрицею A не міняють напрямку, але можуть змінювати довжину на коефіцієнт λ

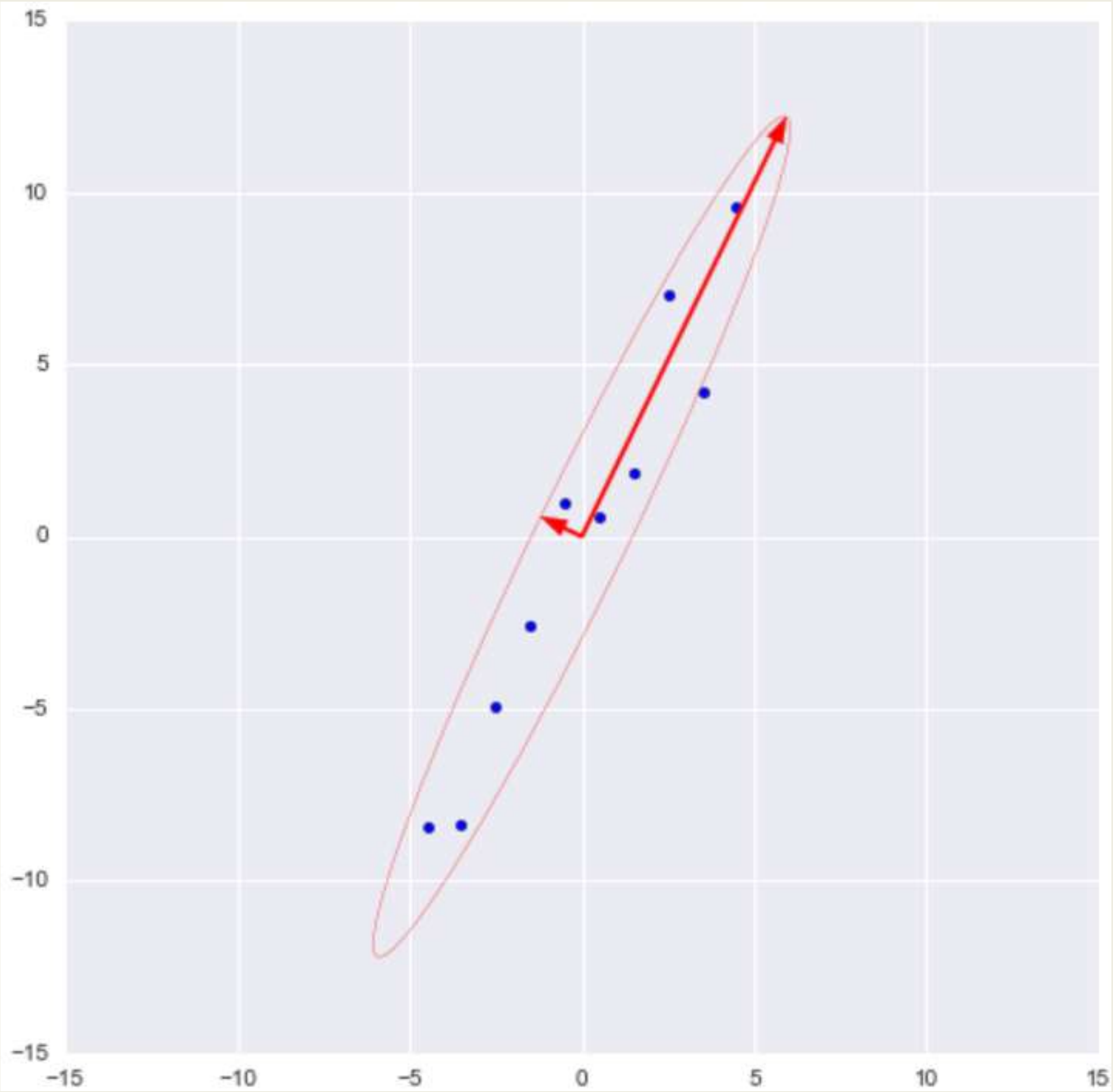
Матриця розмірами nxn має не більше n власних векторів, та власних значень, що відповідають їм.

- Посилання (Вікіпедія)

- Таким чином, напрямок максимальної дисперсії у проекції завжди збігається з айгенвектором, які мають максимальне власне значення, рівне величині цієї дисперсії.

- *В англійській мові власні значення та вектори іменуються **eigenvalues** і **eigenvectors** відповідно.*

- У бібліотеці numpy реалізована функція **numpy.linalg.eig (X)**, де X - квадратна матриця. Вона повертає 2 масиви - масив айгензначеній і масив айгенвекторов (вектори-стовпці). І вектори нормовані - їх довжина дорівнює 1. Якраз те, що треба. Ці два вектора задають новий базис для вибірки, такий що його осі збігаються з півосями аппроксимуючого еліпса вибірки.


15
10
5
0
−5
−10
−15
−15
−10
−5
0
5
10
15

Завдання зниження розмірності. Метод головних компонент

$$R(x) = x * x^T,$$

x - вектор-стовпець.

якщо матриця $R(x)$ є діагональною, то між окремими ознаками цього образу кореляції немає.

Аналогічно можна розглянути:

1) Автокореляційну матрицю векторів-образів в класі w_i:

$$R_i = \frac{1}{|w_i|} * \sum_{x \in w_i} R(x),$$

де $|w_i|$ - число образів в класі. w_i

2) Автокореляційну матрицю всієї навчальної вибірки

$$R = \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{m} R_i,$$

де m - число класів.

Необхідно знайти таке підпростір (наприклад, пряму), щоб автокореляційна матриця R' проекцій векторів-образів на нього була діагональною.

Будемо шукати проекції x' у вигляді:

$$x' = S * x,$$

де S- матриця, яка проецюється на підпростір.

Тоді

$$R' = \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{m} R_i' = S * R * S^T$$

Матриця R є:

- симетричною
- невід'ємною визначеною.

Тому матриця R буде мати невід'ємні власні значення.

Тому матриця R буде мати невід'ємні власні значення.

Матриця R' буде ма діагональний вид, якщо матрицю переходу S скласти з власних векторів матриць R.

Щоб вектор x' мав меншу розмірність, необхідно матрицю переходу S скласти з власних векторів матриці R, відповідних найбільшим власним значенням.

Такий вибір власних векторів гарантуватиме найменшу середньоквадратичне нев'язку між векторами вибірки і їх проекціями на вбрання підпростір, якщо вся вибірка буде мати математичне очікування.

Схема кореляційного підходу в методі головних компонент

1. Автокореляційні матриці в класах

$$R_i = \frac{1}{|w_i|} * \sum_{x \in w_i} R(x), R(x) = x * x^T$$

де $|w_i|$ - число образів в класі w_i.

2. Автокореляційна матриця всієї вибірки

$$R = \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{m} R_i,$$

де m - число класів.

3. Власні числа і власні вектори матриці R.
4. Проекціювання на підпростір

$$x' = S * x,$$

де $S = e^T$

e - власний вектор відповідає максимальному власному числу.

Лінійний дискримінант Фішера

- У методі головних компонент знаходиться таке різноманіття меншої розмірності, яке мінімізує середньоквадратичне відстань від усіх точок навчальної вибірки до цього різноманіття. Однак, якщо потрібно знизити розмірність простору ознак так, щоб вектори двох класів залишалися лінійно роздільні, то необхідно враховувати інші важливі характеристики, наприклад, дисперсії проекцій векторів в класах.

Розглянемо одну з схем зниження розмірності простору ознак, у якій аналізуються дисперсії класів. Припустимо, що є два класи $\omega_1 \, u \, \omega_2$ в просторі ознак, розмірність якого треба знизити.

Будемо шукати проекції векторів на пряму з напрямних вектором w, $\|w\| = 1$. Причому пряма, на яку здійснюється проекціювання вибіркових векторів, повинна бути такою, щоб відстань між середніми значеннями проекцій класів було максимальним, а повний розкид спроекцірованих вибіркових значень був мінімальним.

Пряма поекціювання, яка задовольнить цим вимогам, називається **лінійним дискримінантом Фішера.**

Перехід до нової системи координат, пов'язаної з прямою проекціювання, будемо виконувати за формулою $x' = w^T * x$.

Для знаходження прямої проекціювання - лінійного дискримінанту. Роналд Фішер запропонував використовувати наступну функцію критерію:

$$f(x) = \frac{|m'_1 - m'_2|^2}{S'^{\,2}_1 + S'^{\,2}_2}$$

де

$m'_i = \frac{1}{|w_i|}\sum_{x\epsilon w_i} x'$ - вибіркові математичні очікування проекцій векторів і-го ступеня, і = 1,2;

$S'^{\,2}_i = \sum_{x\epsilon w_i}(x' - m'_i)^2$ - розкид спроекційованих вибіркових значень всередині і-го ступеня, і = 1,2.

Величину $(S'^{\,2}_1 + S'^{\,2}_2)$ називають **повним розкидом спроекційованих вибіркових значень.**

Функція f (w) буде тим більше, чим більше відстань між середніми значеннями проекцій векторів в класах і чим менше повний розкид спроекційованих вибіркових значень. Т.ч., необхідно знайти вектор w, який максимізує функцію критерію f (w).

Схема побудови лінійного дискримінанту

1. Середнє значення векторів в класах i = 1,2

$$m_i' = \frac{1}{|w_i|} \sum_{x \epsilon w_i} x'$$

2. Матриці розкиду векторів в класах i = 1,2

$$S_i = \sum_{x \epsilon w_i} (x - m_i) * (x - m_i)^T$$

3. Матриця розкиду векторів всієї вибірки

$$S = S_1 + S_2$$

4. Вектор w

$$w = S^{-1} * (m_1 - m_2)$$

5. Нові координати проекціювання

$$x' = w^T * x$$

Практична частина (ПЗ№2)

Задачу зниження розмірності простору можна розглядати як задачу вибору найбільш інформативних ознак образів. Точніше, по заданій виборці векторів, які належать різним класам та є лінійно розділимими, необхідно знайти такий підпростір вихідного простору , , щоб після обчислення проекцій векторів на цей підпростір проекції класів залишались лінійно розділимими. Причому, бажано, щоб проекції класів «найвіддаленіше» розташовувалися один від одного. Напрямок проекціювання можливо знайти, якщо проаналізувати кореляцію ознак в класах або дисперсії розподілення ознак в класах.

Знаходження напрямку проекції за допомогою аналізу кореляцій ознак реалізується в *методі головних компонент* – одному з центральних методів факторного аналізу. В літературі такий підхід називають також розкладенням Каруенена-Лоева або перетворенням Хотеллінга.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Якщо вектори навчаючою вибірки є центрованими (тобто вибірка має нульове математичне очікування), то проаналізувати кореляцію ознак можливо за допомогою *автокореляційної матриці*

$$R(x) = x \cdot x^T , \tag{2.1}$$

де x — вектор-стовбець.

Якщо матриця $R(x)$ є діагональною, то це означає, що кореляція між окремими ознаками цього образу немає.

Аналогічно можна розглядати *автокореляційну матрицю векторів-образів в класі* ω_i:

$$R_i = \frac{1}{|\omega_i|} \sum_{x \in \omega_i} R(x), \tag{2.2}$$

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

де $|\omega_i|$ — число образів в класі ω_i.

Автокореляційна матриця всієї навчаючої вибірки:

$$R = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i \,, \tag{2.3}$$

де m — число класів.

Тоді необхідно знайти такий підпростір (наприклад, пряму) щоб автокореляційна матриця R' проекцій векторів-образів на нього була діагональною.

Необхідно відшукати проекції x' у вигляді

$$x' = S \cdot x \,, \tag{2.4}$$

де S — матриця проекціювання на підпростір. Тоді

$$R' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|\omega_i|}\sum_{x\in\omega_i} x'\cdot x'^T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{|\omega_i|}\sum_{x\in\omega_i} S\cdot x\cdot x^T\cdot S^T = S\cdot R\cdot S^T \,. \tag{2.5}$$

Схема кореляційного підходу в методі головних компонент

Крок 1. Визначити автокореляційні матриці в класах згідно формули:

$$R_i = \frac{1}{|\omega_i|} \sum_{x \in \omega_i} R(x),$$

де $|\omega_i|$ — число образів в класі ω_i,

$R(x) = x \cdot x^T$.

Крок 2. Визначити автокореляційні матрицю всієї вибірки:

$$R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} R_i \ ,$$

де m — число класів.

Крок 3. Визначити власні числа λ матриці R, як розв'язки рівняння:

$$R - \lambda \cdot E = 0 \qquad (2.6)$$

Власні вектори e відшукуються у відповідності до кожного власного числа, як розв'язок рівняння

$$(R - \lambda \cdot E) \cdot e = 0 . \qquad (2.7)$$

Крок 4. Виконати проекціювання на підпростір

$$x' = S \cdot x , \qquad (2.8)$$

де $S = e^T$, e — власний вектор, який відповідає максимальному власному числу.

Приклад

<u>Умови задачі:</u> задані двомірні образи-вектори:

$$x_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\quad 0\right)^T;\quad x_2 = (0;\quad 0)^T;\quad x_3 = (1;\quad 1)^T;\quad \in\quad X_1 \text{ та}$$

$$x_4 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\quad 0\right)^T;\quad x_5 = (-1;\quad -1)^T\quad \in\quad X_2,$$ які належать областям переваг X_1 та X_2 двох класів.

Необхідно понизити розмірність цих образів, тобто віднайти такий одновимірний підпростір R^1, проекції образів на яке залишаються відділимими, а класи – розділимими. Застосувати схему кореляційного підходу метода головних компонент.

Розв’язання:

1) знайдемо автокореляційні матриці образів в класах:

$$R_1 = \frac{1}{3}\left(x_1 \cdot x_1^T + x_2 \cdot x_2^T + x_3 \cdot x_3^T\right)$$

$$x_1 \cdot x_1^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 \cdot x_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 \cdot x_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(x_4 \cdot x_4^T + x_5 \cdot x_5^T\right)$$

$$x_4 \cdot x_4^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_5 \cdot x_5^T = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) знайдемо автокореляційну матрицю всієї вибірки:

$$R=\frac{1}{2}(R_1+R_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}\right)=\frac{5}{24}\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}$$

3) знайдемо власні значення та власні вектори матриці R.

Власні числа матриці R є розв'язком рівняння

$$R-\lambda\cdot E=0$$

$$\frac{5}{24}\begin{vmatrix}5&2\\2&2\end{vmatrix}-\lambda\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=0.$$

Для розв'язання даного рівняння введемо заміну $\lambda=\lambda'\cdot\frac{5}{24}$. Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{5}{24}\begin{vmatrix}5&2\\2&2\end{vmatrix}-\lambda'\cdot\frac{5}{24}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=0$$

$$\frac{5}{24}\left(\begin{vmatrix}5&2\\2&2\end{vmatrix}-\lambda'\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda'&2\\2&2-\lambda'\end{vmatrix}=0$$

$$(5-\lambda')\cdot(2-\lambda')-4=0$$

$$(\lambda')^2 - 7\lambda' + 6 = 0$$

$$\lambda_1' = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1' \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{24}$$

$$\lambda_2' = 6 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_2' \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{4}$$

Отже, $\lambda_1 = \frac{5}{24}$ та $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ - власні числа матриці R

Знайдемо власні вектори для кожного власного числа шляхом розв'язання рівняння $(R - \lambda \cdot E) \cdot e = 0$.

а) $\lambda_1 = \frac{5}{24}$

$$(R - \lambda_1 \cdot E) \cdot e_1 = 0$$

$$\left(\frac{5}{24}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{5}{24}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

б) $\lambda_2 = \frac{5}{4}$

$(R - \lambda_2 \cdot E) \cdot e_2 = 0;$

$$\left(\frac{5}{24}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} - \frac{5}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0; \qquad \frac{5}{24}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0;$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0; \qquad \begin{cases}-x_1 + 2x_2 = 0\\ 2x_1 - 4x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = 1\end{cases}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

4) В методі головних компонент проекціювання необхідно виконувати на той підпростір, яке «натягнуто» на власні вектори, які відповідають найбільшим власним значенням. Виконуючи проекціювання на підпростір, який «натягнуто» на вектор e_2, що відповідає максимальному власному числу $\lambda_2 = \frac{5}{4}$, отримаємо «нові» одновимірні вектори:

$x' = S \cdot x$, де $S = e_2^T$

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$$

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$x_3' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 3 \approx 1{,}34$$

$$x_4' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{3}{2}}\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}095$$

$$x_5' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-3) \approx -1{,}34$$

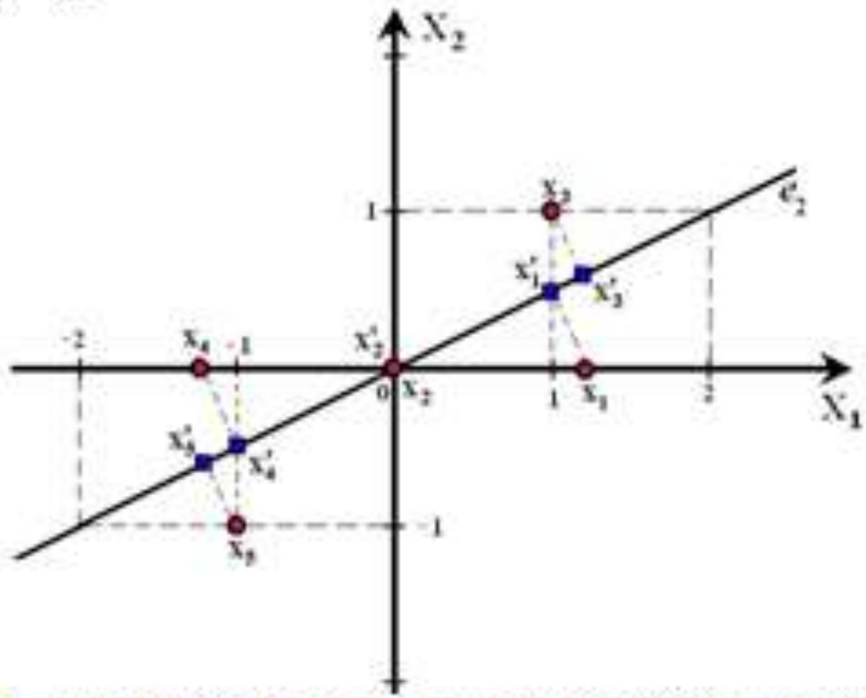


Рисунок 2.1 – Проекції образів на одновимірний підпростір

Python

- import sys
- import math
- from sympy import *
- import numpy as np
- import matplotlib.pyplot as plt
- from numpy import linalg as LA

Python

```
Out[2]: **** Symbol *****
         {1.25000000000000: 1, 0.208333333333333: 1}
        [(1.25000000000000, 1, [Matrix([
        [0.894427190999916],
        [0.447213595499958]])]), (0.208333333333333, 1, [Matrix([
        [-0.447213595499958],
        [ 0.894427190999916]])])]

        **** Space ****
         val_eig =  1.25     ind =  1


         ++++++++++++++++++++
         [[ 0.89442719 -0.4472136 ]
         [ 0.4472136   0.89442719]]
```

#Symbol result

A = Matrix(R)

#NymPy result

l = LA.eigvals(R) #собственные значения матрицы from numpy import linalg as LA

l1= LA.linalg.eig(R) #all

val = max(l); index = l.argmax(axis=0)