Generation de graphes de flots efficaces et structures de reseaux optimisantes

November 9, 2021

1 Problematique du TIPE

On cherche a l'aide d'une etude en 2 temps a identifier des sous-structures minimisant le cout global de reseaux a flots solutions d'un probleme de distribution.

1.1 Definitions des objets manipules

Graphe de flot

DEFINITION - Graphe simple

On appelle **graphe simple** tout couple $G = (V, E)$ tel que

- V soit un **Ensemble de noeud**, de taille $|V| \in \mathbb{N}$
- E soit un **Ensemble d'arcs diriges**, avec $E \subset \mathscr{P}_2(V)$, de taille $|E| \leq |V|^2$

DEFINITION - Demande, Capacite, Fonction de cout

Etant donne un graphe simple $G = (V, E)$, on peut definir plusieurs attibuts sur les noeud et arcs de G, representes par des fonctions de E et de F :

- DEMANDE D'UN SOMMET -
$$b: \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{Z} \\ i & \mapsto & b(i) \end{array}$$
A tout sommet i de V, associe $b(i)$ la **demande de** i. Ainsi:
On dira que i est un noeud demandeur si $b(i) < 0$.
On dira que i est un noeud producteur / donneur si $b(i) > 0$.
On dira que i est un noeud de transition si $b(i) = 0$.
On doit aussi avoir (contrainte d'equilibre):
$$\sum_{i \in V} b(i) = 0$$
c'est a dire que la somme des demande et des productions est nulle.
- CAPACITE D'UN ARC -
$$u: \begin{array}{ccc} E & \to & \bar{\mathbb{N}} \\ (i, j) & \mapsto & u(i, j) \end{array}$$
A un arc (i, j) dans E, associe $u(i, j)$ la **capacite de l'arc** (i, j), c'est a dire la borne superieure du flot qui peut circuler dans l'arc (i, j)
- COUT D'UN ARC -
$$c: \begin{array}{ccc} E & \to & \bar{\mathbb{N}} \\ (i, j) & \mapsto & c(i, j) \end{array}$$
A un arc (i, j) dans E associe $c(i, j)$ le **cout par unite de flot de l'arc** (i, j)

DEFINITION - Flot sur un graphe G et Graphe de Flot

On associe a un graphe G une fonction

$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \bar{\mathbb{N}} \\ (i,j) & \mapsto & f(i,j) \end{array}$$

qui a l'arc (i,j) associe une certaine **quantitee de flot** $f(i,j) < u(i,j)$
Le couple (G,f) est alors appele **graphe de flot**

Fontion cout total ϕ

Pour $G = (V, E, c, u, b)$ et f un flot sur G on definit le **cout total de** G : $\phi(G,f)$, tel que

$$\phi: \quad G \quad \mapsto \quad \sum_{e \in E} c(e) \times f(e)$$

Flot admissible

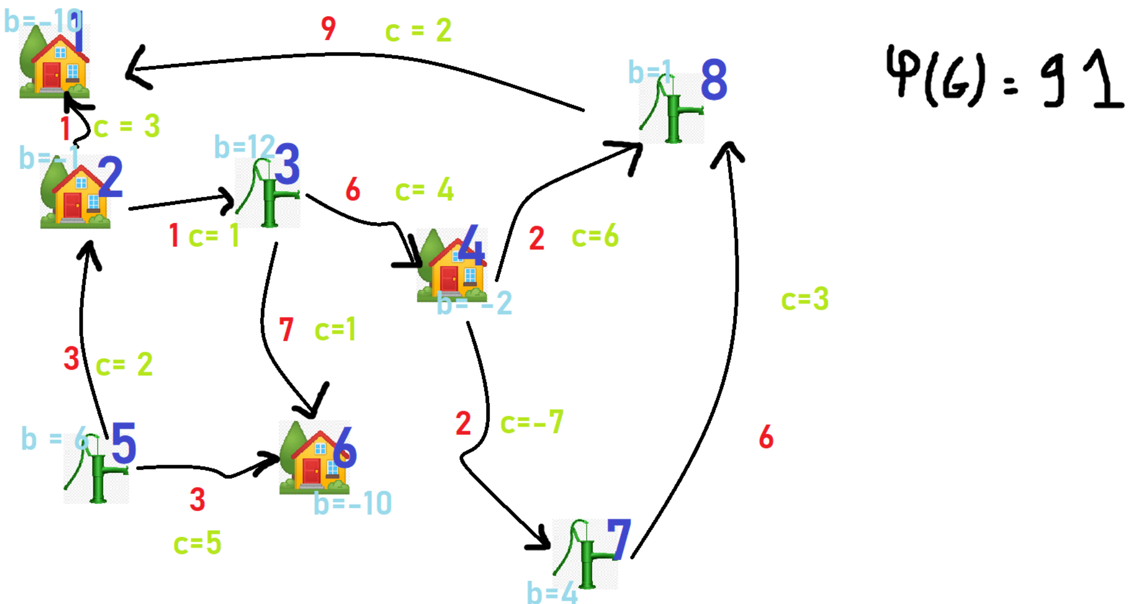
DEFINITION - Flot admissible

On dit qu'un flot f est admissible pour le graphe G si

$$\forall i \in E \quad \sum_{j \in V | (j,i) \in E} f(i,j) = \sum_{j \in V | (i,j) \in E} f(j,i) + b(i)$$

CAD la somme des flots entrants est egale a la somme des flots sortants et de la demande du sommet i

Figure 1: Voici un expl de graphe de flot, ou E est l'ensemble des entiers de 1 a 8 et V =... Le flot represente en rouge est admissible car la somme des flots entrants est egale a la somme de flots sortants plus la demande pour chaque sommet considere



1.2 Cadre du probleme

Dans ce TIPE, on definit une nouvelle classe de problemes portant sur les sous-structures des graphes de flots :

DEFINITION - Sous-structure, sous-structure de graphe de flot

Soit $G = (V, E, c, u, b)$ un graphe.
On appelle **sous structure de** G tout graphe $G' = (V', E', \tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{b})$ avec

- $V' \subset V$
- $E' \in \mathscr{P}(V')$

- $\tilde{c}$ telle que $\forall e \in E',\ \tilde{c} = c(e)$

Et ainsi, si (G, f)est un graphe de flot, alors on appelle **sous structure de** (G, f) tout graphe de flot (G', f') avec G' une sous structure de G et f' un flot quelconque sur G'.

Probleme de n - distribution sur un ensemble V

Soit P un plan, et $V = (v_i)_{i=1,2,...,n}$ un systeme de n points de P.
A chaque point v_i de V on associe un entier $b(v_i)$ tel que $\sum_i b(v_i) = 0$

Determiner un ensemble E et un flot admissible f sur $G = (V, E, b, u, c)$tels que, en posant

$$\forall (v_i, v_j) \in E \begin{cases} c(v_i, v_j) & = & \text{distance}(v_i, v_j) \\ u(v_i, v_j) & = & \infty \end{cases}$$

le cout total $\phi(G, f)$ soit minimal.

On dira alors qu'un **graphe de flot** (G, f)**est un** n**-graphe minimal** si (G, f)est solution d'un probleme de distribution sur V, l'ensemble des sommets de G.

Par extension, on appellera n**-graphe optimisable** ou simplement graphe optimisable, tout graphe munit d'un flot admissibe mais dontle cout total$\phi(G, f)$ n'est pas mimimal.

1.3 objectif global du TIPE

Le projet consiste a exhiber et decrire (si elles existent) , des sous structures communes dans la famille des graphes minimaux. En particulier, elle devront, une fois subsituees a une sous structure d'un graphe optimisable G, minimiser systematiquement le cout global de $(\tilde{G}, f)$, le graphe optimise.

CAD :

Pour $G = (V, E, c, u, b)$ un graphe optimisable et $G' = (V', E')$ une sous structure de G,
on cherche a savoir si il existe

$$H = (W, F) \text{ un graphe minimal avec}$$

$$H' = (W', F') \text{ une sous structure de } H$$

tel que

$$W' = V' \text{ et } \phi(\tilde{G}') < \phi(G),\ \tilde{G} = (V, (E \setminus E') \cup F')$$

On montre facilement qu'a tout graphe on peut associer un flot admissible (verifiant la condition X) et ainsi que le flot minimal existe toujours

Preuve : On pose $E = \mathscr{P}_2(V)$ *($G = (V, E)$est un graphe complet)* , $A = \{i \in V | b(i) \geq 0\}$, $B = \{i \in V | b(i) \leq 0\}$, et $j_0 \in B$.
En posant:

$$f : \begin{cases} \forall i \in A, & f(i, j_0) & = & b(i) \\ \forall i \in B, & f(j_0, i) & = & b(i) \\ \forall e \in E \setminus \{(i, j) | i \neq j_0 \text{ ou } j \neq j_0\}, & f(e) & = & 0 \end{cases}$$

le flot est admissible.

Ainsi, le probleme de distribution admet toujours une solution pour n'importe que ensemble de sommet E