# Przestrzeń wymiarowa

Możemy zdefiniować **przestrzeń wymiarową** $\Pi$ - zbiór elementów {A, B, C} - metry, kilogramy, sekundy lub ich liczbowe przeskalowania - z następującą algebrą:

1. Każdym dwóm elementom (A, B) należącym do $\Pi$ przyporządkowany jest element ab też w $\Pi$ zwany ich iloczynem. Działanie mnożenia jest przy tym:
2. Symetryczne AB = BA
3. (AB)C = A(BC)
4. Istnieje element rozwiązujący $\forall_{A,B\in\Pi}\exists_X AX = B$
5. W przestrzeni $\Pi$ określone jest działanie potęgowania:

$$\forall_{A\in\Pi}\forall_{a\in R}A^a \in \Pi$$

Działanie to ma następujące własności:

$$A^{a+b} = A^a A^b$$

$$(A^a)^b = A^{ab}$$

$$(AB)^a = A^a B^a$$

$$A^0 = 1 = Q \in R_+$$

Zatem liczby rzeczywiste dodatnie stanowią podprzestrzeń wielkości bezwymiarowych.

3. Istnieje element jednostkowy

$$AI = IA = A$$

# Analiza wymiarowa

Przestrzeń wymiarowa $\Pi$ ma własności przestrzeni wektorowej, gdzie mnożenie wielkości wymiarowych to działanie składania wektorów. Dlatego analogicznie do pojęcia niezależności liniowej wektorów wprowadzamy pojęcie **niezależności wymiarowej** *wielkości wymiarowych.*

Def. wielkości $A_1, A_2, ...., A_n \in \Pi$ są wymiarowo niezależne (np. kg, m, s) jeżeli

$$A_1^{a_1} A_2^{a_2} A_3^{a_3} ... A_n^{a_n} = Q \in R_+ \implies a_1 = a_2 = ...a_n = 0$$

(analogia do $\lambda_1 v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda_n v_n = 0$ z mnożeniem zastępującym dodawanie i potęgowaniem zastępującym mnożenie)

To mówi tyle, że z wielkości wymiarowo niezależnych nie da się utworzyć wielkości bezwymiarowej Q przy $a_i \neq 0$.

### Baza tej przestrzeni

W przestrzeni Π można wyznaczyć maksymalną liczbę wymiarowo niezależnych elementów $X_j, j = 1, 2, ...$, które tworzą **bazę** dla Π. Każdy element A można przedstawić jednoznacznie jako $Q \prod_{j=1}^{n} X_j^{a_j}$

W przestrzeni wymiarowej można oczywiście wyznaczyć wiele różnych baz, wśród nich wyróżniają się bazy w postaci układów jednostek podstawowych *(jako **ortogonalne**)*, np. * trójwymiarowy układ podstawowy cgs * wielowymiarowy układ międzynarodowy SI * układ MKS

Można tworzyć dowolne bazy na podstawie układu jednostek podstawowych. Niech elementy wymiarowe $A_i$ będą kandydatami na utworzenie bazy w przestrzeni Π z układem jednostek podstawowych $X_i$. Należy dowieść, że są one wymiarowo niezależne.

Zapiszmy $A_i$ w bazie $X_i$: $A_i = Q_i \prod_{j=1}^{n} X_j^{a_{ij}}$

W przestrzeniach wektorowych przejście $e_i' = B_{ij} e_j$ wymaga nieosobliwości tego przekstrzałcenia, więc $\det B_{ij} \neq 0$.

Zatem aby $A_i$ były bazą dla Π, wystarczy by $\det a_{ij} \neq 0$.

## przykład

- N - moc
- D - średnica układu
- $\mu$ - współczynnik lepkości

Sprawdźmy czy mogą tworzyć bazę dla Π. Zapiszmy je w cgs.

- [N] = [F * v] = [m * a * v] = $g * cm/s * cm/s^2 = g * cm^2 * s^-3 = x_1^2$ x_2^1 x_3^{-3}$
- $[D] = [cm] = x_1^1 x_2^0 x_3^0$ *$[\mu] = cm^-1gs = x_1^{-1} * x_2^1 x_3^{-1}$

Stąd macierz $a_{ij}$ ma postać (po wpisaniu powyższych w rzędy)

```
[[2  1 -3]
 [1  0  0]
 [-1 1 -1]]
```

$\det a_{ij} = 2 \neq 0$ Zatem powyższe wielkości mogą tworzyć bazę dla Π.

**Związek między bazami**

Niech $X_i$, $Y_i$ będą dwiema bazami w przestrzeni $\Pi$. Związek między nimi wyraża się:

$$X_i = \xi_i \prod_{j=1}^{n} Y_j^{a_{ij}}$$

Wielkość wymiarowa A w bazie $X_i$ przybiera postać:

$$A = Q\Pi_{i=1}^{n} X_i^{b_i}$$

Więc w bazie $Y_i$:

$$A = Q\Pi_{i=1}^{n}(\xi_i \prod_{j=1}^{n} Y_j^{a_{ij}})^{b_i}$$

**Przykład: zmiana układu jednostek CGS na MKS**

Niech $Y_i$ stanowią bazę w MKS, $X_i$ w cgs. Niech:

$X_1 = g$ (masa) $X_2 = cm$ $X_3 = s$

$Y_1 = kg$ (siła) $Y_2 = m$ $Y_3 = s$

Wyrażając $X_i$ przez $Y_i$ dostajemy mnożniki $\xi_1 = (9.81e3)^{-1}, \xi_2 = 1e-2, \xi_3 = 1$

*(przez 9.81e-3 rozmiem* $9.81 * 10^{-3}$*)* ### Twierdzenie Buckinghama Zmianę bazy w przestrzeni $\Pi$ można potraktować jako **dualne przekształcenie wymiarowe**.

$$\Gamma : A \to B, B = \Gamma A$$

Nazwiemy go przekształceniem podstawowym w przestrzeni wymiarowej $\Pi$. Własności:

1. $\forall_{Q \in R_+} \Gamma Q = Q$
2. $\forall_{A,B \in \Pi} \Gamma(AB) = \Gamma(A)\Gamma(B)$
3. $\forall_{\alpha \in R} \Gamma(A^a) = (\Gamma(A))^a$

Wśród zbioru przekształceń $\Gamma$ istotne znaczenie ma przekształcenie jednorodne postaci $\Gamma A = kA$, $k \in R_+$. Dotyczy ono zmiany skal poszczególnych wielkości bazowych.

Spodziewamy się z fizyki, że postać praw fizycznych musi pozostawać niezmieniona przy zmianie układu jednostek pomiarowych. Zasada ta uniezależniająca relacje fizyczne od konwencji wyboru jednostek nakłada na postać związków funkcyjnych określone ograniczenia - postulaty:

1. **postulat niezmienniczości wymiarowej**:

- dla każdej funkcji wymiarowej $\phi$ zależnej od m argumentów wymiarowych $A_i$ i dla każdego przekształcenia podstawowego $\Gamma$ w $\Pi$ musi zachodzić zależność
  $$\phi(\Gamma A_1, \Gamma A_2 ... \Gamma A_m) = \Gamma \phi(A_1, A_2, ... A_m)$$
  Funkcje które to spełniają nazywają się **wymiarowo niezmienniczymi**. *(wszystkie fizycznie sensowne funkcje)*.

  Bazując na tym postulacie można wyznaczyć ogólną postać $\phi$ - różną w przypadku gdy liczba argumentów $A_i$ jest

  1. mniejsza lub równa wymiarowi przestrzeni n
     1. Aby funkcja wymiarowa $\phi$ zależna od m argumentów wymiarowo niezależnych $A_i$ była wymiarowo niezmiennicza, konieczne i wystarczające jest żeby miała ona następującą postać.
        $$\phi(A_1, A_2, ... A_m) = \psi A_1^{f_1} A_2^{f_2} ... A_m^{f_m}, f_i \in R, \psi \in R_+$$
  2. gdy jest ona większa
     1. Tw. Buckinghama - aby funkcja wymiarowa $\psi$ zależna od m argumentów wymiarowych $A_i$ (m>n) była wymiarowo niezmiennicza, konieczne i wystarczające jest aby
        $$(\phi(A_1, A_2, ... A_n, A_{n+1}, ... A_m)) = \psi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{m-n}) A_1^{f_1} A_2^{f^1}$$
        gdzie argumenty $A_1, A_2, A_n$ są wymiarowo niezależne i mogą tworzyć bazę przestrzeni $\Pi$, a $\pi_i$ są wielkościami bezwymiarowymi. Chcąc określić wielkości bezwymiarowe $\Pi_i$ funkcję $\phi$ przedstawiamy następująco:
        $$\phi(A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_m) = \phi(A_1, A_2, ..., A_n, P_1, P_2, ..., P_{m-n})$$
        Argumenty $P_i$ jako wymiarowo zależne mogą być przedstawione w bazie A_i następująco:
        $$P_i = Q_i \prod_{j=1}^{n} A_j^{r_{ij}} \implies Q_i = \frac{P_i}{\prod_{j=1}^{n} A_j^{r_{ij}}}$$

Otrzymaliśmy zasadę tworzenia wielkości bezwymiarowych.

$$Q_i = \frac{P_i}{\prod_{j=1}^{n} A_j^{r_{ij}}}$$

2. **Postulat jednorodności wymiarowej**. Dla wszystkich funkcji wymiarowych $\phi$ i dla wszystkich mnożników skalarnych $\xi_i$ musi być spełniona następująca zależność:

$$\phi(\xi_1 A_1, \xi_2 A_2, ..., \xi_n A_n) = \xi\phi(A_1, A_2, ...A_n)$$

Funkcje wymiarowe o tej własności noszą nazwę wymiarowo jednorodnych.

Postulat niezmienniczości wymiarowej wyraża fakt niezmienniczości praw fizycznych przy zmianach skali argumentów wymiarowych. Zmiana skal argumentów powoduje zmianę skali funkcji wymiarowej, nie zmieniając jej postaci.

### Po co to wszystko - modelowanie dynamiczne.

Mamy zjawisko w atmosferze. Skalujemy odpowiednio, sprowadzając wartości fizyczne do wielkości bezwymiarowych, i możemy zrobić analog takiegoż w laboratorium.

Modelowanie dynamiczne rozumiane jest jako zmiana badania interesującego nas w naturze na badanie jego wzorca w warunkach laboratoryjnych. Modelowanie to opiera się na pojęciu podobieństwa dynamicznego zjawiska. Def. Zjawiska są dynamicznie podobne, jeżeli z danych charakteryzujących jedno z nich można można otrzymać dane charakteryzujące inne przez proste przeliczenie skali.

Twierdzenie: warunkiem koniecznym i dostatecznym podobieństwa dynamicznego dwóch zjawisk jest równość wszystkich wielkości bezwymiarowych $\Pi_i; \Pi_i', i = 1, ..., m - n$, gdzie $\Pi_i$ określają rzeczywistość, a $\Pi_i'$ model.

## Przykład 1

Posługując się analizą wymiarową określić drogę swobodnego spadku ciała w próżni. Przed spadkiem ciało pozostawało w spoczynku.

Mamy trzy parametry: $[g] = m/s^2$, $[m] = kg$, $[t] = s$. 3 jednostki niezależne, 3 wielkości wymiarowe, $m = n$.

Niezależność wybranych wielkości

```
[[1 0 -2],
 [0 1  0],
 [0 0  1]]
```

wyznacznik wynosi 1.

Droga $d = \phi g^a m^b t^c$. a=1, b = 0, c = 2

## Przykład 2

Kula o średnicy D i cieple właściwym C porusza się z prędkością v w cieczy o przewodności cieplnej k. Różnica temperatur wnętrza kuli i cieczy wynosi $\theta$ stopni. Znaleźć formułę opisującą szybkość wymiany ciepła kuli z cieczą U.

[D] = m, [C] = kg/(m s^2 K), [v] = m/s, [k] = m kg/(s^3 K), [theta] = K

[U] = m^2 kg / s^2

mamy 5 wielkości, więc weźmiemy twierdzenie Buckinghama:

wybieramy D, C, v, theta wybieramy jako bazę.

$$a_{ij}$$

```
   m s kg K
D  1 0 0  0
C -1-2 1 -1
v  1-1 0  0
th 0 0 0  1
```

m = 5, n = 4 $U = \phi\Pi = D^a C^b v^c th^d$

$\Pi$ wyznaczymy w oparciu o rozkład w bazie wielkości k.

$$k = \Pi D^{a'} C^{b'} v^{c'} \theta^{d'}$$

skąd $a' = 1, b' = 1, c' = 1, d' = 0$, $\Pi = \frac{k}{DCv}$

$$m^2 kg^1 s^- 2 = m^{a-b+c} kg^b s^{-2b-c} K^{-b+d}$$

a-b+c = 2 b = 1 -2b-c = 2 -b + d = 0

d = b = 1 c = 0 a = 3

$U = \psi(\frac{k}{DCv}) D^3 C\theta$

wyniki mogą być różne w zależności od tego jaką przyjęliśmy bazę.

$$\Gamma = \Gamma(\frac{r}{\sqrt{\omega t}})$$

wielkości: [x]=m, [t]=s, [ni] = m^2/s

$$\Gamma = \phi(\frac{x}{\sqrt{\omega t}}) t^n \nu^m$$
$$n = 0, m = 1$$