Parametry bezwymiarowe

Liczba Rosby'ego

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p - 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Jesteśmy w układzie nieinercjalnym, a jedyna siła masowa to siła Coriolisa $-2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u}$. Zakładamy też przepływ nieściśliwy $\nabla \cdot \vec{u} = 0$.

Kiedy siła Coriolisa jest istotna? Przy wystarczająco szybkiej rotacji. W przepływach geofizycznych zwykle interesują nas procesy quasistatyczne (nie termodynamicznie, a takie że $|\frac{\partial u}{\partial t}| << |(u \cdot \nabla)u|$.

> Ludzie od prognozy pogody by się ze mną oczywiście nie zgodzili - tam są potrzebne faktycznie te szybkie skale czasowe.

Zatem o znaczeniu siły coriolisa decyduje stosunek $|\frac{2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u}}{(u \cdot \nabla)u}|$. Więc musimy porównać $|\Omega|$ z czymś. Potrzebujemy więc skali prędkości.

> Gorzej jeżeli są pochodne - wtedy trzeba szacować zmiany wielkości w układzie.

Definiujemy: * L jako charakterystyczną odległość (niekoniecznie wielkość całego dostępnego obszaru). * Dla atmosfery na przykład 1000km. * Jeśli badamy pionową konwekcję w garnku (jeden wir konwekcyjny na garnek), to L to mniej więcej wysokość garnka. * W bardzo turbulentnej konwekcji musielibyśmy przyjąć mniejsze L. * Przepływ lepki wytwarzający warstwę graniczną daje dwie skale charakterystyczne: * grubość warstwy przepływu * grubość warstwy granicznej. * U jako charakterystyczną skalę prędkości. * Dla atmosfery $U \sim 20m/s$ - to typowa prędkość przepływu w skali 1000km. * Tornado miałoby $L \sim 100m$, $U \sim 300 - 400km/h \sim 100m/s$. * Ogólnie: $U \sim L$ (nieliniowo!)

Gdy już mamy skale:

$$|\frac{2\vec{\Omega} \times \vec{u}}{(u \cdot \nabla)u}| \sim |\frac{2\Omega U}{U\frac{U}{L}}| = |\frac{2\Omega L}{U}| = 1/R_o$$

Gdzie R_o nazywamy liczbą Rossby'ego. Im mniejsza, tym istotniejsza siła Coriolisa.

Umownie: przepływ jest **wielkoskalowy** gdy $R_o < 1$ (zależnie od skali U!) * dla Golfsztromu (prądu zatokowego) $L \sim 100km$, $U \sim 1m/s$, $R_o \sim 0.07$ - wielkoskalowy. * Atmosfera $L \sim 1000km$, $U \sim 20m/s$, $R_o \sim 0.14$ - mniej wielkoskalowa niż Golfsztrom.

Liczba Ekmana

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u} + \mu\nabla^2\vec{u}$$

$$E = |\frac{\mu\nabla^2\vec{u}}{2\vec{\Omega}\times\vec{u}}| \sim \frac{\nu}{2\Omega L^2}$$

Liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}}{\nu\nabla^2\vec{u}} \sim \frac{UL}{\nu}$$

Twierdzenie Kelvina i wirowość

Założenia: * Ciecz **nieściśliwa** ($\nabla\cdot\vec{u}$), **niejednorodna gęstość** ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$) * Układ obracający się ze stałą prędkością kątową $\vec{\Omega}$ * Siła odśrodkowa, jako potencjalna, zostaje wrzucona do ciśnienia

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

- C - krzywa materialna zamknięta
- A - dowolna powierzchnia rozpięta na C

Cyrkulacją, widzianą w układzie nieinercjalnym rotującym, wzdłuż C, nazywamy

$$\Gamma = \int_C \vec{u}d\vec{r} = \int\int_A \omega\cdot ndA$$

Chcemy znaleźć $\frac{d\Gamma}{dt}$, $\Gamma = \Gamma(t)$,

Wirowość absolutna

widziana z układu inercjalnego.

$$\omega_a = \nabla\times(u + \Omega\times r) = \omega + 2\Omega$$

Cyrkulacja absolutna

Równanie gwiazdka *:

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \int\int \vec{n}\cdot(...)dA$$

twierdzenie Kelvina

Założenia: 1. Ciecz jest barotropowa = $p = p(\rho)$ (ciśnienie u) funkcją gęstośći 2. $\nabla p = \frac{dp}{d\rho}\nabla\rho$ 3. Ciecz jest nielepka $\neq 0$ 4. siły masowe są potencjalne To: * cyrkulacja abolutna (cyrkulacja cyrkulacja prędkości mierzonej w układzie inercjalnym) wzdłuż krzywej materialnej, a zatem strumień wirowości przez powierzchnię materialną są stałe w czasie.

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = 0$$

Γ_a pozostaje stałe. Linie wirowości są liniami materialnymi.

Wnioski: 1. W układzie inercjalnym$\Gamma = \Gamma_a$ czyli * opisuje zmianę "zwykłej" cyrkulacji czyli strumienia wirowości. 2. W układzie obracającym się strumień γ może się zmieniać nawet, gdy prawa strona * jest zero. Wtedy:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\Omega\frac{dA_n}{dt}$$

(A_n - pole rzutu powierzchni A na płaszczyznę prostopadłą do $\vec{\Omega}$). Rys. 1 A_n, rośnie, czyli zmienia się w czasie, strumień wirowości maleje. Jeśli zmienia się A_n, to musi się pojawić wirowanie.

3. Fizyczne przyczyny zmiany Γ_0 to:
4. Niebarotropowy rozkład gęstości (np. baroklinowy)
5. dyfuzja wirowości na skutek lepkości
6. Niepotencjalne siły masowe (np. siła Lorentza)
7. Linie wirowości są liniami materialnymi jeśli r.h.s. * = 0

Dowód: R7

Spełnione są założenia twierdzenia Kelvina, zatem:

R8

Dostajemy równanie wirowości w cieczy idealnej. Zmiana ω wynika tylko z rozciągania (obecności gradientu prędkości wzdłuż $\vec{\omega}$)

Można to łatwo porównać z ewolucją długości linii materialnej w wyniku rozciągania R9

Jeśli z warunku początkowego $\omega \times dL$ implikuje że to jest dalej zero, to pokazaliśmy że linie wirowości są liniami materialnymi

. . . .

Dowolna pochodna $\omega \times dL$ jest zero, jeśli zaczęliśmy od zero; więc ono dalej będzie zero.

Zatem linie krzywe całkowe pola ω linie wirowości są liniami materialnymi.

Jeśli $\omega \times dL$ w $t = 0$ jest zero, to $\omega \times dL = 0$ dla każdego późniejszego czasu.

5. Rozciąganie linii wirowości absolutnej oznacza zwiększanie wartości $|\omega_a|$.

   Twierdzenie Kelwina powinno się państwu kojarzyć tak: przy spełnionych założeniach linie wirowości są liniami materialnymi, a strumień wirowości jest zachowany.

- TO SAMO CO FREEZE IN W MHD
- Twierdzenie Helmholtza (geometria różniczkowa)
- Tu zaniedbaliśmy lepkość, tam zaniedbujemy opór