Potencjał zespolony i odwzorowanie konforemne

Założenia

1. Ciecz nielepka $\mu = 0$
2. Ciecz nieściśliwa $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
3. Przepływ dwuwymiarowy $(U_x, U_y)(x, y)$, skrzydło ma nieskończoną długość w kierunku osi z
4. $\vec{U}_\infty = U\hat{x}$, rotacja w nieskończoności zerowa
   - Skoro tak, to z twierdzenia Kelvina bezwirowa i przy skrzydle
   - $\vec{u} = \nabla\phi$

Problem do rozwiązania w dwóch przypadkach

1. z założenia 2: $\Delta\phi = 0$ plus warunki brzegowe
2. z 2 i 3: $\vec{u} = \nabla \times (\Psi\hat{z})$
   - $\omega = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times (\Psi\hat{z})) = 0$
   - więc $\Delta\Psi = 0$, z warunkami brzegowymi, to alternatywne podejście do problemu

Strategia

Z prostego problemu typu przepływ wokół cylindra czy sfery przechodzimy do problemu skomplikowanego typu przepływ wokół naszego śmiechowego skrzydła

Opływ walca

Równania:

1. $\Delta\phi = 0$
2. $\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$ gdy $r = a$
3. $\nabla\phi \to U\hat{x}$ gdy $r \to \infty$

Pomijając proste wyprowadzenie.

$$\phi(r, \theta) = U(r + \frac{a^2}{r}) \cos\theta$$

Można też oczywiście policzyć funkcję prądu:

$$\Psi(r, \theta) = U(r - \frac{a^2}{r}) \sin\theta$$

Cyrkulacyjny opływ walca - wir liniowy

Wir ma prędkość i potencjał (uzyskany z superpozycji):

$$\vec{u} = -\frac{\gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$$

$$\phi(r,\theta) = U(r + a^2/r)\cos\theta - \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

Punkty stagnacji

Tam, gdzie zeruje się prędkość, mamy punkty stagnacji. W tym przypadku dla $r = a$ dostajemy $u_r = 0$, $u_\theta =$

Prawo Kutty-Żukowskiego

Dla dowolnego ciała jeśli mamy przepływ wirowy z cyrkulacją $Fx = 0$, $Fy = \rho U\gamma$

Potencjał zespolony

Nasze trzy równania

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
$$\nabla \times \vec{u} = 0$$
$$\vec{u} = (u, v)$$

$$\Delta\phi = 0$$
$$\Delta\Psi = 0$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Więc możemy zbudować funkcję analityczną - potencjał zespolony - postaci

$$w(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

gdzie $z = x + iy$

Oraz prędkość zespoloną

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Odwzorowania konforemne