Дефиниции

Композиция на функции

Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са функции. Тогава $g \circ f : A \to C$ е функция и $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Обратна функция

Нека $f : A \to B$ е функция Тогава обратната ѝ функция $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$, $f^{-1} : B \to A$.

Задачи

Лесни

Задача 1.1 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са функции.

A) $g(x) = 2x + 1$, $(g \circ f)(x) = 2x - 1$, $f = ?$

B) $f(x) = 3x - 1$, $(g \circ f)(x) = 6x + 5$, g е линейна функция, $g = ?$

Задача 1.2

Проверете дали следните функции са сюрекции и дали са инекции. Всички функции са с доймейн и кодомейн $\mathbb{R}$.

A) $f(x) = x$

B) $f(x) = -x$

C) $f(x) = 2x^6 - 8$

D) $f(x) = ln(x)$

E) $f(x) = x^3 - x^2$ (може да се докаже, че е сюрекция като се забележи, че $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ и че функцията е непрекъсната)

F) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ e^x - 1 & x > 0 \end{cases}$

Задача 1.3 - Задачи за самоподготовка по Дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

Разглеждаме функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Покажете с пример, че $f \cup g$ може и да не е функция
- Докажете, че $h = f \cap g$ е частична функция. Какво представлява дефиниционното множество на h? На колко е равно $h(x)$? Отговорете на тези въпроси в общия, а после - в частния случай $f(x) = x^3$ и $g(x) = |x^3|$.

Задача 1.4 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че $f : A \to B$ е биекция, тогава и само тогава, когато f^{-1} е тотална функция.

Задача 1.5 - семестриално контролно на КН 2021

Дадено е множество A и функция $h : A \to A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \to A$ и всяка функция $g : A \to A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$.

Задача 1.6 - изпит-задачи на КН 2021

Нека X и Y са произволни множества. Нека $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ и $i : Y \to Y$. Нека $\forall y \in Y : i(y) = y$. Нека $f \circ g = i$. Докажете или опровергайте, че f е сюрекция.

Задача 1.7 - Записки на Бойко Борисов

Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворява равенството $f(f(f(n))) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следва ли, че f е биекция?

Задача 1.8 - Записки на Ангел Димитриев

A) Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

- $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(h \circ f = h \circ g \implies f = g)$
- h е инективна

B) Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

- $(\forall f \in^A A)(\forall g \in^A A)(f \circ h = g \circ h \implies f = g)$
- h е сюрективна

Забележка: С $h \in^A A$ означаваме, че h е **тотална функция**, изобразяваща елементи на в елементи на A.

По-забавни

Задача 2.1 - Домашна работа на КН 2021

Нека S е крайно множество и $f : S \to S$ е биекция. С f^n означаваме $(n-1)$-кратната композиция на f със себе си. Индуктивната дефиниция е следната.

- $f^1(x) = f(x)$
- $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

A) Докажете, че $\exists n \in \mathbb{N}$, такава че $f^{-1} = f^n$, където f^{-1} е обратната функция на f.

B) Дайте пример за биекция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за която предното твърдение не е вярно.

Решения