

Дефиниции

Задачи

Лесни

Задача 1.1

Да се докаже, че броят на върховете от нечетна степен в граф е четно число.

Задача 1.2

Да се докаже, че във всеки граф има поне два върха с еднаква степен.

Задача 1.3 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека за всяко $v \in V$ е вярно, че $d(v) \geq 2$. Да се докаже, че в G има цикъл.

Задача 1.4 - Записки на Ангел Димитриев

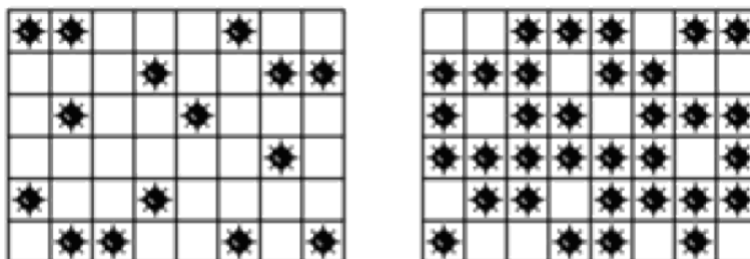
6 тенисисти играят в турнир (всеки срещу всеки). Да се докаже, че съществуват двама, за които е вярно, че всеки от останалите е загубил от поне един от двамата.

Задача 1.5 - Записки на Ангел Димитриев

Нека G е неориентиран граф и n е четно. Нека всички върхове са от степен $\frac{n}{2} + 1$. Да се докаже, че в G има цикъл с дължина 3.

Задача 1.5 - Домашно - Информатика - 2021/2022

Игралното поле на Minesweeper се състои от клетки. В някои клетки има мини. Останалите клетки са свободни. Допълнението на игрално поле се получава, като поставим мини в свободните клетки и премахнем мините от клетките, които дотогава са били заети.



Игрално поле и неговото допълнение.

Във всяка празна клетка записваме цяло неотрицателно число — броя на съседните клетки, заети от мини. (В клетките с мини не пишем числа.) Съседни са тези клетки, които притежават общ ръб или общ връх. Например всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има осем съседни клетки.

Забележителен факт е, че всяко игрално поле и неговото допълнение имат еднакъв сбор от числата, записани в клетките. Например за показаното тук игрално поле този сбор е 75.

2	4	*	*	*	4	*	*
*	*	*	7	*	*	6	4
*	8	*	*	7	*	*	*
*	*	*	*	*	*	8	*
4	*	*	7	*	*	*	*
*	3	3	*	*	5	*	3
2	2	2	2	2	2	1	*
1	*	2	2	*	3	3	3
3	3	3	*	3	3	*	*
3	3	2	1	2	3	2	*
2	*	*	2	2	*	2	*
2	*	*	2	2	*	2	*

Игралното поле и допълнението му имат еднакъв сбор (75).

Още по-интересно е, че това свойство важи за всяка релация на съседство между клетките.

- Разгледайте следната релация на съседство: две клетки са съседни само ако имат общ ръб. Така всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има четири съседни клетки. За разположението на мините от примера по-горе проверете, че равенството на сборовете важи и за тази релация на съседство.

- С теорията на графите докажете равенството на сборовете. Доказателството трябва да важи за всяко игрално поле и всяка симетрична релация на съседство между клетките.

Задача 1.2 - изпит - КН - 2019/2020

На петте острова Гренландия, Ирландия, Исландия, Мадагаскар и Ямайка има общо сто града — T_1, T_2, \dots, T_{100} . Между някои от градовете има едно или повече шосета, а между други двойки градове няма нито едно шосе. Градът T_1 се намира на остров Гренландия и е край на точно едно шосе. Градът T_{100} е край на точно три шосета, а всеки от другите градове е край на точно четири шосета. Вярно ли е, че T_1 и T_{100} се намират на един остров?

Очевидно може да има шосета само между два града на един и същи остров.

Задача 1.3 - изпит - КН - 2019/2020

В краен неориентиран граф без примки е избран неизолиран връх v_0 . Известно е, че има единствен най-дълъг прост път и той е с начало v_0 . Докажете, че краят му (различен от v_0) е от нечетна степен.

По-забавни

Задача 2.1 - Домашно - Информатика - 2021/2022

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека $|V| = n$. Полагаме

$$k(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in V, (u,v) \in E} d(u), \quad D = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v), \quad k = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} k(v)$$

- Да се докаже, че $D \leq K$.
- Да се предложи практическо тълкуване на неравенството.

Задача 2.2 - Изпит - КН - 2021/2022

Припомнете си алгоритъма на Дийкстра за намиране на най-къси пътища в тегловен граф с положителни тегла от връх s до всички останали

върхове. Може ли да получим от него алгоритъм за най-дълги пътища в тегловен граф с положителни тегла от връх s до всички останали върхове, ако обърнем неравенствата и заменим ∞ с $-\infty$ и заменим минимум с максимум? Става дума за следните промени.

1. Инициализираме стойностите на върховете не с ∞ , а с $-\infty$.
2. Проверката за край на алгоритъма става “ако извън множеството S няма връх със стойност, по-голяма от $-\infty$, край”. В алгоритъма на Дийкстра тази проверка е “ако извън множеството S няма връх със стойност, по-малка от ∞ , край”.
3. На всяка итерация избираме връх x , който да сложим в множеството от върхове S , като върхът с **максимална** стойност, който не е в S . В алгоритъма на Дийкстра избираме връх x , който да сложим в множеството от върхове S , като върхът с минимална стойност, който не е в S .
4. При разглеждането на върховете от списъка на съседство на x обръщаме посоката на неравенството така: за всеки връх y в списъка на съседство на x , ако стойността на y е **по-малка** от стойността на x плюс теглото на реброто (x, y) , присвояваме на стойността на y стойността на x плюс теглото на реброто (x, y) . В алгоритъма на Дийкстра това присвояване се случва, ако стойността на y е по-голяма от стойността на x плюс теглото на реброто (x, y) .

Решения