Задачи

Лесни

Задача 1.1

Задача 1 от упражнението за релации.

Задача 1.2

Задача 2 от упражнението за релации.

Задача 1.3

Задача 12 от упражнението за релации.

Задача 1.4

Задача 5 от упражнението за релации.

Дадено е крайно непразно множество A и релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така: $\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \iff |X| \leq |Y|$. Да се изследва R за изучените свойства на релации.

Задача 1.5 - първо домашно КН 2021

Нека R е релация над $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ и $(a, b)R(c, d) \iff ad = bc$. Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

Задача 1.6

Нека R е релация над $2^{\mathbb{N}}$ и $(X, Y) \in R \iff X \setminus Y = \emptyset$. Да се изследва за изучените свойства на релациите.

Задача 1.7 - Записки на Ангел Димитриев

Нека R е релация над $\mathbb{Z}$ и $aRb \iff (a - b)$ се дели на три.

- Да се провери дали R е релация на еквивалентност.
- Да се намерят класовете на еквивалентност.

Задача 1.8

Нека R е релация над $\mathbb{R}$ и

$$xRy \iff x^6+e^{5x-8}+\frac{1}{1+e^{-x}}+sin(2x+3) = y^6+sin(2y+3)+\frac{1}{1+e^{-y}}+e^{5y-8}$$

Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

Задача 1.9 - Записки на Ангел Димитриев

Нека R е релация над $\mathbb{N}^+$ и $(a,b) \in R \iff \exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = \frac{a}{b}$

- Да се докаже, че R е релация на еквивалентност
- Да се намерят класовете на еквивалентност

Задача 1.10 - Записки на Ангел Димитриев

Нека R е релация над $S = \{0, 1, 2, ..., 32\}$ и

$$aRb \iff b - a \equiv 0(mod 3) \land a - b \geq 0.$$

- Да се докаже, че R е релация на частична наредба
- Да се намерят минималните и максималните елементи

Задача 1.11 - Kenneth H. Rosen

Нека $R_1, R_2 \in A \times A$ са релации на еквивалентност. Кои от следните конфигурации са със сигурност релации на еквивалентност?

- $R_1 \cup R_2$
- $R_1 \cap R_2$
- $R_1 \triangle R_2$

Задача 1.12 - Kenneth H. Rosen

Покажете кои са релациите на еквивалентност над множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Задача 1.13 - Kenneth H. Rosen

Дайте пример за частична наредба $R \subseteq A \times A$, за която:

- Има минимален елемент, но няма максимален
- Има максимален елемент, но няма минимален
- Няма нито минимален, нито максимален елемент

Задача 1.14 - Kenneth H. Rosen

Нека R е релация над $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ и

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff a+d = b+c$$

- Да се докаже, че R е релация на еквивалентност
- Да се намерят класовете на еквивалентност

Задача 1.15 - Kenneth H. Rosen

Релация $R \subseteq A \times A$ се нарича циркулярна, ако $\forall a,b,c \in A(aRb \wedge bRc \implies cRa)$. Докажете, че R е циркулярна и рефлексивна тогава и само тогава, когато е релация на еквивалентност.

Задача 1.16 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $R, P \in A \times A$. Докажете или опровегрaйте следните твърдения

1. Ако R е релация на еквивалентност, то $\overline{R}$(допълнението на релацията $\overline{R} = (A \times A) \setminus R$) е релация на еквивалентност - НЕ
2. Ако R и P са релации на еквивалентност, то $R \setminus P$ е релация на еквивалентност - НЕ
3. Ако R и P са релации на частична наредба, то $R \cup P$ е релация на частична наредба - НЕ
4. Ако R, P са релации на еквивалентност, то $R \cap P$ е релация на еквивалентност - ДА

5. Ако R е релация на частична наредба, то $R \cup R^{-1}$ е релация на еквивалентност - НЕ

6. Ако R е релация на частична наредба, то $R \cap R^{-1}$ е релация на еквивалентност - ДА

Задача 1.17 - Записки на Ангел Димитриев

Нека S_4 е множеството на всички пермутации на числата $\{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq S_4 \times S_4$ и

$$((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)) \in R \iff \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_1 + \beta_2 = \text{четно}$$

Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

По-забавни

Задача 2.1 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $FinSubs(\mathbb{N})$ е множеството от всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$. Нека R е релация над $FinSubs(\mathbb{N})$ и

$$(X, Y) \in R \iff \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y = 2t, t \in \mathbb{Z}$$

- Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.
- Да се намерят класовете на еквивалентност.

Дефиниция: композиция на релации

Нека $S \subseteq A \times B$ и $R \subseteq B \times C$ са релации. Тогава тяхната композиция $S \circ R = \{(a, c) \in A \times C | \exists b \in B : (a, b) \in S \wedge (b, c) \in R\}$.

Дефиниция: степенуване на релация

Нека $R \subseteq A \times A$ е релация. Дефинираме индуктивно понятието R^n:

- $R^1 = R$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

Задача 2.2.1 - Kenneth H. Rosen

Докажете, че операцията композиция е асоциативна. Тоест, докажете за прозволни релации $R_1 \subseteq A_1, \times A_2$, $R_2 \subseteq A_2, \times A_3$ и $R_3 \subseteq A_3, \times A_4$, че $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

Задача 2.2.2 - Kenneth H. Rosen

Докажете, че за произволна релация $R \subseteq A \times A$ е вярно, че $R^{n+1} = R \circ R^n$.

Задача 2.2 - Kenneth H. Rosen

Докажете, че за произволна симетрична релация $R \subseteq A \times A$, R^n също е симетрична за всяко $n \in \mathbb{N}^+$.

Решения