Дефиниции

Задачи

Лесни

Задача 1.1

По колко начина могат от 5 студенти да се изберат 3-ма за първо, второ и трето място?

Задача 1.2

Колко пароли с пет символа могат да се измислят, ако се използват само малки латински букви и цифри?

Задача 1.3

По колко начина от 12 учители може да се избере комисия от 6 души?

Задача 1.4 - записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че $\binom{n+1}{k} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n-p}{k-p}$

Задача 1.5

Колко са булевите вектори с n елемента, които имат точно k нули.

Задача 1.6

Имаме неограничено количество от топчета, които са n цвята. По колко начина можем да изберем комплект от k топчета като имаме право да повтаряме цветове и редът няма значение?

Задача 1.7 - записки на Ангел Димитриев

Колко са булевите вектори с дължина n, които започват и завършват с различен знак?

Задача 1.8 - записки на Ангел Димитриев

Колко са булевите вектори с дължина n, които имат четен брой единици?

Задача 1.9 - записки на Ангел Димитриев

Колко са естествените числа в интервала $[1000, 9999]$, които започват с 3 или завършват с 4.

Задача 1.10 - записки на Ангел Димитриев

Колко са естествените числа в интервала $[1000, 9999]$, които не започват с 3 и не завършват с 4.

Задача 1.11

Колко са трицифрените числа, които не завършват на 3?

Задача 1.12 - записки на Ангел Димитриев

Ако имаме 7 кашона всеки с различен строителен материал и 10-етажна сграда. По колко начина можем да наредим кашоните по етажите така, че на последния етаж да има поне два вида материали.

Задача 1.13

Колко пермутации има на числата от 1 до n, $n \geq 3$ така, че числата 1, 2 и 3 да бъдат в този ред(може да не са последователни, но е важно да се срещат в тази последователност).

Задача 1.14 - файл със задачи по комбинаторика

Колко булеви вектори с дължина n и k единици има, при които няма две съседни единици?

Задача 1.15 - файл със задачи по комбинаторика

Колко кръгови булеви вектори с дължина n и k единици има, при които няма две съседни единици(кръгов вектор е нормален вектор, при който първият и последният елемент са съседи)?

Задача 1.16

Да се докаже, че има по-малко от 350 прости числа по-малки или равни на 1000.

Задача 1.17

Колко са естествените числа в интервала $[1, 100]$, които не се делят на 2, 3 и 8.

Задача 1.18

Колко са решенията на уравнението $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, където $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$?

Задача 1.19

Колко са решенията на уравнението $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, където $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ и $x_1 \geq 2, x_2 \geq 10, x_3 \geq 1, x_4 > 2$?

Задача 1.20

Колко е коефициентът пред $x^{222}y^{354}z^{424}$ в израза $(x + y + z)^{1000}$.

Задача 1.21 - файл със задачи по комбинаторика

Задача 41

Задача 1.22 - задачи за самоподготовка по дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

Да се докаже, че ако $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 \leq m \leq n$, то

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Задача 1.23 - задачи за самоподготовка по дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

В множеството $\{\text{а}, \text{б}, \text{в}, ..., \text{ю}, \text{я}, 0, 1, ..., 8, 9\}$ съставено от тридесетте кирилски букви и десетте арабски цифри, е въведена частична строга наредба:

$$\text{а} < \text{б} < ... < \text{я}; 0 < 1 < ... < 9$$

Тази наредба е непълна, защото всяка буква е несравнима с всяка цифра. По колко начина дадената непълна строга наредба може да се разшири до пълна строга наредба?

Задача 1.24

Да се докаже, че $\binom{2n}{n}$ е четно за всяко $n \geq 1$.

Задача 1.25

Да се докаже с еквивалентни преобразувания(плюс индукция) и с комбинаторни разсъждения, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Задача 1.25

Да се докаже с еквивалентни преобразувания(плюс индукция) и с комбинаторни разсъждения, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Задача 1.26 - Kenneth H. Rosen

Да се докаже с комбинаторни разсъждения и с биномната формула на Нютон следното тъждество:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Задача 1.27 - Kenneth H. Rosen

Да се докаже с комбинаторни разсъждения следното тъждество:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Задача 1.28 - Kenneth H. Rosen

Да се докаже с комбинаторни разсъждения следното тъждество:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Hint: разгледайте броя начини да се избере комитет от n души и след това за този комитет да се избере лидер.

По-забавни

Задача 2.1

Колко са решенията на уравнението $x_1+x_2+x_3 = 11$, където $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ и $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$?

Задача 2.2

Колко е броя на деранжиментите на числата $1, 2, ..., n$(това са пермутациите, при които няма число което да си е на мястото, тоест число на позиция k не може да е равно на k)?

Задача 2.3 - домашна работа - КН - 2021

n души седят около кръгла маса. *Дискомфортът между двама души* е абсолютната разлика на височините им. *Общия дискомфорт* на масата е равен на сумата на дискомфортите между хората седящи на съседни места.

Нека означим височините на хората с $h_1, h_2, ..., h_n$, като $h_1 \leq h_2 \leq ... \leq h_n$. Колко е минималният общ дискомфорт, който може да се достигне при подходящо нареждане на хората около масата? Дайте пример за едно такова нареждане.

С други думи, ако наредим хората с пермутацията $p_1, p_2, ..., p_n$, то общият дискомфорт ще бъде $\sum_{i=1}^{n-1} |h_{p_i} - h_{p_{i+1}}| + |h_{p_1} - h_{p_n}|$.

Задача 2.4 - задачи за самоподготовка по дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

С помощта на цифрите 1, 2, 5, 8 и 9 са съставени всички възможни петцифрени числа с различни цифри. Намерете сбора и броя на тези числа.

Задача 2.5 - задачи за самоподготовка по дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 са съставени всички възможни шестцифрени числа с различни цифри. Тези числа са подредени във възходящ ред(най-малкото число е първо, а най-голямото — последно). Кое число се намира на 423 -то място?

Задача 2.6 - изпит-задачи - КН - 2021

Докажете с комбинаторни разсъждения, че за всеки цели положителни числа m и n е изпълнено:

$$\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = \begin{cases} 0 & \text{ако } m < n \\ \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2} \cdot \frac{(2n)!}{n!} & \text{ако } m = n \end{cases}$$

Задача 2.7 - задачи за самоподготовка по дискретни структури - 2017/2018 - Добромир Кралчев

Докажете комбинаторното тъждество

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + ... + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}$$

по три различни начина: с индукция, с двукратно броене и с биномната формула на Нютон.
Тази е много гадна, особено частта биномната формула. Индукцията пък е твърде много смятане и не си заслужава.

Решения