# Задачи

## Лесни

### Задача 1.1

Задачи 9 и 10 от упражнението за множества.

### Задача 1.2

Задача 11 от упражнението за множества.

### Задача 1.3

Задача 12 от упражнението за множества.

### Задача 1.4 - първо контролно на специалност информатика 2019/2020

Нека $A, B, C, D \subseteq X$. Докажете или опровергайте, че ако $\forall x \in X(x \in A \rightarrow x \in C \land x \in B)$, то $(B \cup C) \setminus B = \overline{\overline{C} \cap \overline{A}} \cap \overline{B}$

### Задача 1.5

Задача 25 от упражнението за множества.

### Задача 1.6

Задача 28 от упражнението за множества.

### Задача 1.7

Задача 29 от упражнението за множества.

### Задача 1.8

Докажете, че ако $C \cap B = \emptyset$, то $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle B$.

**Задача 1.9 - контролно на специалност компютърни науки 2016**

Разгледайте следните твърдения и формулирайте всяко твърдение на езика на предикатната логика. Образувайте и отрицанията на двете твърдения, като при това никъде във формулировката да не се среща знакът $\neg$.

- Всяко цяло число, кратно на 4, може да се представи като сума от квадратите на две цели числа.
- За всяко реално число $x \geq -1$ и за всяко естествено число $n$ е в сила неравенството $(1+x)^n \geq 1+nx$.

**Задача 1.10 - Kenneth H. Rosen**

Изкажете тези твърдения, използвайки предоставените предикати.

1. Всички лъвове са свирепи.
2. Някои лъвове не пият кафе.
3. Някои свирепи животни не пият кафе.

1. $P(x) \iff$ "$x$ е лъв"
2. $Q(x) \iff$ "$x$ е свирепо"
3. $R(x) \iff$ "$x$ пие кафе"

Нека също за пълнота множеството на всички животни да бъде $A$. Нека също и домейна на трите предиката да бъде $A$.

**Задача 1.11 - Задачи за самоподготовка по Дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев**

Да се докаже, че ако $A \subseteq B$, то $((C \cup A) \setminus B) \cap A = \emptyset$

### По-забавни

### Задача 2.1 - семестриално контролно на специалност компютърни науки 2016

Намерете множеството $X$ от системата като го изразите чрез множествата $A, B, C$ с помощта на сечение, обединение и разлика.

$$\begin{cases} C \cup X = (B \setminus A) \cup C \\ C \cap X = (A \cup B) \cap C \end{cases}$$

### Задача 2.2 - Задачи за самоподготовка по Дискретни структури - 2021/2022 - Добромир Кралчев

Преценете дали е вярно следното твърдение:

$$(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\})(\exists x \in A)(x \text{ е четно} \implies (\forall y \in A)(y \text{ е четно}))$$

## Решения

### Задача 2.1

Задачата има много по-красиво и адекватно решение от представеното тук. То може да се намери заедно с контролното. Това тук е с демонстрационни цели.

Трябва да определим еднозначно за всеки елемент $x$ от нашия свят дали е елемент на $X$ или не. Ще разбием този въпрос на $2^3 = 8$ случая според това дали $x$ принадлежи на някое от $A, B, C$

#### Случай 0 - $x \notin A, x \notin B, x \notin C$

Допускаме, че $x \in X$. Тогава $x \in C \cup X$, но $x \notin (B \setminus A) \cup C$, което е в противоречие с първото уравнение от условието. Следователно $x \notin X$. Следователно $X \subseteq (A \cup B \cup C)$.

**Случай 1 -** $x \notin A, x \notin B, x \in C$

Допускаме, че $x \in X$. Тогава $x \in C \cap X$, но $x \notin (A \cup B)$, следователно $x \notin (A \cup B) \cap C$, което е противоречие с второто уравнение от условието. Следователно $x \notin X$. Следователно $(C \setminus (A \cup B)) \cap X = \emptyset$.

**Случай 2 -** $x \notin A, x \in B, x \notin C$

Допускаме, че $x \notin X$. Следователно $x \notin C \cup X$, но $x \in B \setminus A$ и $x \in (B \setminus A) \cup C$, което е противоречие. Следователно $x \in X$, следователно $B \setminus (A \cup C) \subseteq X$.

**Случай 3 -** $x \notin A, x \in B, x \in C$

Допускаме, че $x \notin X$. Следователно $x \notin X \cap C$, но $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup B) \cap C$, което е противоречие. Следователно $x \in X$. Следователно $(B \cap C) \setminus A \subseteq X$.

**Случай 4 -** $x \in A, x \notin B, x \notin C$

Допускаме, че $x \in X$. Тогава $x \in C \cup X$, но $x \notin (B \setminus A)$ и $x \notin (B \setminus A) \cup C$, което е противоречие. Следователно $x \notin X$. Следователно $(A \setminus (B \cup C)) \cap X = \emptyset$.

**Случай 5 -** $x \in A, x \notin B, x \in C$

Допускаме, че $x \notin X$. Тогава $x \notin C \cap X$, но $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup B) \cap C$, което е противоречие. Следователно $x \in X$. Следователно $(A \cap C) \setminus B \subseteq X$.

**Случай 6 -** $x \in A, x \in B, x \notin C$

Допускаме, че $x \in X$. Следователно $x \in C \cup X$, но $x \notin (B \setminus A)$ и $x \notin (B \setminus A) \notin C$, което е противоречие. Следователно $x \notin X$, следователно $((A \cap B) \setminus C) \cap X = \emptyset$.

**Случай 7 -** $x \in A, x \in B, x \in C$

Допускаме, че $x \notin X$. Тогава $x \notin C \cap X$, но $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup B) \cap C$, което е противоречие. Следователно $x \in X$, следователно $A \cap B \cap C \subseteq X$.

Разглеждайки всички тези случаи и знаейки, че $X \subseteq A \cup B \cup C$, можем да заключим, че $X = (B \setminus (A \cup C)) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$.