Дефиниции

Задачи

Лесни

Задача 1.1

Да се докаже, че броят на върховете от нечетна степен в граф е четно число.

Задача 1.2

Да се докаже, че във всеки граф има поне два върха с еднаква степен.

Задача 1.3 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека за всяко $v \in V$ е вярно, че $d(v) \geq 2$. Да се докаже, че в G има цикъл.

Задача 1.4 - Записки на Ангел Димитриев

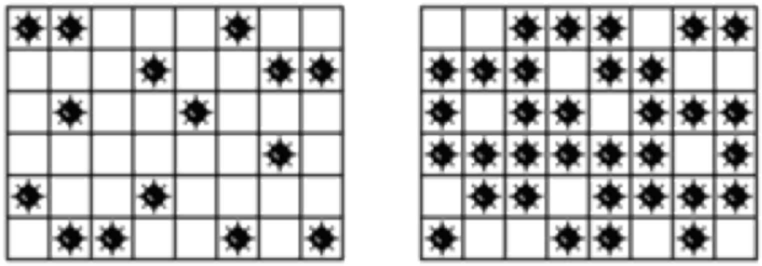
6 тенисисти играят в турнир (всеки срещу всеки). Да се докаже, че съществуват двама, за които е вярно, че всеки от останалите е загубил от поне един от двамата.

Задача 1.5 - Записки на Ангел Димитриев

Нека G е неориентиран граф и n е четно. Нека всички върхове са от степен $\frac{n}{2} + 1$. Да се докаже, че в G има цикъл с дължина 3.

Задача 1.5 - Домашно - Информатика - 2021/2022

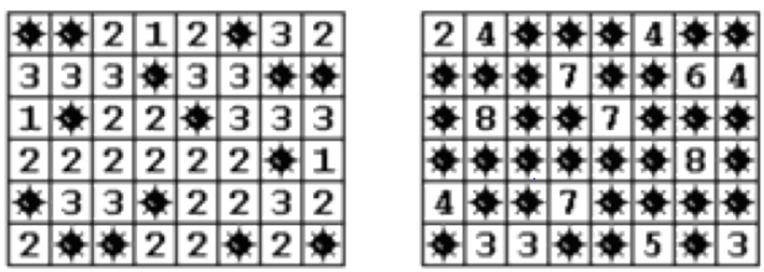
Игралното поле на Minesweeper се състои от клетки. В някои клетки има мини. Останалите клетки са свободни. Допълнението на игрално поле се получава, като поставим мини в свободните клетки и премахнем мините от клетките, които дотогава са били заети.



Игрално поле и неговото допълнение.

Във всяка празна клетка записваме цяло неотрицателно число — броя на съседните клетки, заети от мини. (В клетките с мини не пишем числа.) Съседни са тези клетки, които притежават общ ръб или общ връх. Например всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има осем съседни клетки.

Забележителен факт е, че всяко игрално поле и неговото допълнение имат еднакъв сбор от числата, записани в клетките. Например за показаното тук игрално поле този сбор е 75.



Игралното поле и допълнението му имат еднакъв сбор (75).

Още по -интересно е, че това свойство важи за всяка релация на съседство между клетките.

- Разгледайте следната релация на съседство: две клетки са съседни само ако имат общ ръб. Така всяка клетка, която не е по контура на игралното поле, има четири съседни клетки. За разположението на мините от примера по -горе проверете, че равенството на сборовете важи и за тази релация на съседство.

- С теорията на графите докажете равенството на сборовете. Доказателството трябва да важи за всяко игрално поле и всяка симетрична релация на съседство между клетките.

Задача 1.2 - изпит - КН - 2019/2020

На петте острова Гренландия, Ирландия, Исландия, Мадагаскар и Ямайка има общо сто града — $T_1, T_2, ..., T_{100}$. Между някои от градовете има едно или повече шосета, а между други двойки градове няма нито едно шосе. Градът T_1 се намира на остров Гренландияи е край на точно едно шосе. Градът T_{100} е край на точно точно три шосета, а всеки от другите градове е край на точно четири шосета. Вярно ли е, че T_1 и T_{100} се намират на един остров?

Очевидно може да има шосета само между два града на един и същи остров.

Задача 1.3 - изпит - КН - 2019/2020

В краен неориентиран граф без примки е избран неизолиран връх v_0. Известно е, че има единствен най-дълъг прост път и той е с начало v_0. Докажете, че краят му (различен от v_0) е от нечетна степен.

Задача 1.4 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че в граф с поне 6 върха има 3-клика или 3-антиклика.

Задача 1.5 - Записки на Ангел Димитриев

Да се премсетне броя на кликите и антикликите в K_n.

Задача 1.6 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че в дърво има поне два върха от степен 1.

Задача 1.7 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че G е дърво $\iff$ между всеки два върха има точно един път.

Задача 1.8 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $T =< V, E >$ е дърво. Нека за всяко $v \in V$ $d(v) \in \{1, 4\}$. Да се докаже, че $n \equiv 2(mod\, 3)$.

Задача 1.9 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $G =< V, E >$ е граф. Да се докаже, че броя на циклите в G е $\geq |E| - |V| + 1$.

Задача 1.10 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $G =< V, E >$ е двуделен граф и $|V| \geq 5$. Да се докаже, че $\overline{G}$ не е двуделен.

Задача 1.11 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че сумата на степените на върховете от двата дяла на двуделния граф са равни.

Задача 1.12 - Записки на Ангел Димитриев

Да се докаже, че двуделен граф с върхове, чиито степени са равни, има равни по-големина дялове.

Задача 1.13 - Записки на Ангел Димитриев

Нека $G =< V, E >$ е граф. Нека $|V|$ е нечетно и всички върхове са от една и съща степен. Да се докаже, че G не е двуделен.

Задача 1.13 - Изпит КН - 2020

Докажете или опровергайте, че съществува граф G с 51 върха, такъв че G и $\overline{G}$ са изоморфни.

Задача 1.14 - Изпит КН - 2020

Химик разполага с n вещества, които умее да превръща едно в друго с химични реакции. За всяко $i \in \{1, ..., n\}$ и за всяко $j \in \{1, ..., n\}$ е дадено $T(i, j)$ броят на начините за пряко превръщане на i-тото в j-тото вещество, където $T(i, j) \in \mathbb{N}$. Всички числа $T(i, j)$ се смятат за **дадени**.

Пряко превръщане означава превръщане, осъществено с помощта на точно една химична реакция. Съществуват обаче и косвени превръщания, всяко от които е поредица от две или повече химични реакции: едно вещество се превръща в друго с пряко превръщане, то се превръща в трето с пряко превръщане и така нататък до получаване на желаното крайно вещество.

Забележете, че при тези условия е възможно едно вещество да бъде превръщано в себе си, при това по няколко начина. Нещо повече: ако превърнем i-тото вещество в самото него и после пак превърнем i-тото вещество в самото него, това е косвено превръщане с две междинни реакции.

Отговорете на следния въпрос. При дадени l и m, където $l, m \in \{1, ..., n\}$, по колко начина можем да превърнем вещество номер l във вещество номер m чрез точно 100 междинни реакции?

По-забавни

Задача 2.1 - Домашно - Информатика - 2021/2022

Нека $G = (V, E)$ е граф. Нека $|V| = n$. Полагаме

$$k(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in V, (u,v) \in E} d(u), \qquad D = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v), \qquad k = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} k(v)$$

- Да се докаже, че $D \leq K$.
- Да се предложи практическо тълкуване на неравенството.

Задача 2.2 - Изпит - КН - 2021/2022

Припомнете си алгоритъма на Дийкстра за намиране на най-къси пътища в тегловен граф с положителни тегла от връх s до всички останали върхове. Може ли да получим от него алгоритъм за най-дълги пътища в тегловен граф с положителни тегла от връх s до всички останали върхове, ако обърнем неравенствата и заменим ∞ с $-\infty$ и заменим минимум с максимум? Става дума за следните промени.

1. Инициализираме стойностите на върховете не с ∞, а с $-\infty$.

2. Проверката за край на алгоритъма става "ако извън множеството S няма връх със стойност, поголяма от $-\infty$, край". В алгоритъма на Дийкстра тази проверка е "ако извън множеството S няма връх със стойност, по-малка от ∞, край".

3. На всяка итерация избираме връх x, който да сложим в множеството от върхове S, като върхът с **максимална** стойност, който не е в S. В алгоритъма на Дийкстра избираме връх x, който да сложим в множеството от върхове S, като върхът с минимална стойност, който не е в S.

4. При разглеждането на върховете от списъка на съседство на x обръщаме посоката на неравенството така: за всеки връх y в списъка на съседство на x, ако стойността на y е **по-малка** от стойността на x плюс теглото на реброто (x, y), присвояваваме на стойността на y стойността на x плюс теглото на реброто (x, y). В алгоритъма на Дийкстра това присвояване се случва, ако стойността на y е по-голяма от стойността на x плюс теглото на реброто (x, y).

Задача 2.3 - Записки на Ангел Димитриев

Да се преброят покриващите дървета в $K_{3,3}$.

Решения