

## AUTOMATIQUE 2 TP GYROSCOPE

Étudiants: Gia Quoc Bao TRAN & Nicolas VALLET, ASI 2ème année

Professeur: Nacim MESLEM

Date : 12 Mai 2020

### I. Introduction:

Dans ce TP, nous expérimenterons la commande et l'estimation optimales, en concevant les contrôleurs et les observateurs en utilisant des méthodes d'optimalité. Nous verrons également l'effet de l'action intégrale pour rejeter les perturbations.

### II. Representation d'état du système:

Le système est déjà linéarisé. Pour obtenir la représentation de l'espace d'état du système, nous prenons la dérivée du vecteur d'état:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \\ \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \omega_4 + \frac{1}{I_C + I_D} T_2 \\ -1 \\ \frac{J_B + J_C}{I_D + K_A + K_B + K_C} T_1 \\ -J_D \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{J_B + J_C} & \frac{1}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46.8595 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.4627 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{J_B + J_C} & \frac{1}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 41.3223 \\ -24.3902 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et la sortie est:

$$y = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \leftrightarrow y = Cx + Du$$

Avec:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### III. Analyses du système:

#### 1. Stabilité:

Le système est composé d'un pôle triple en 0 et de deux pôles complexe conjugués égaux à  $0+19,9137i$  et  $0-19,9137i$ . Le système ne possède pas de zéro. Les pôles du système étant situés sur l'axe des imaginaires, dont certains avec une partie imaginaire non nulle, le système en boucle ouverte sera oscillant sans amortissement. La partie imaginaire des pôles est la vitesse angulaire de l'oscillation.

## 2. Analyse fréquentiel:

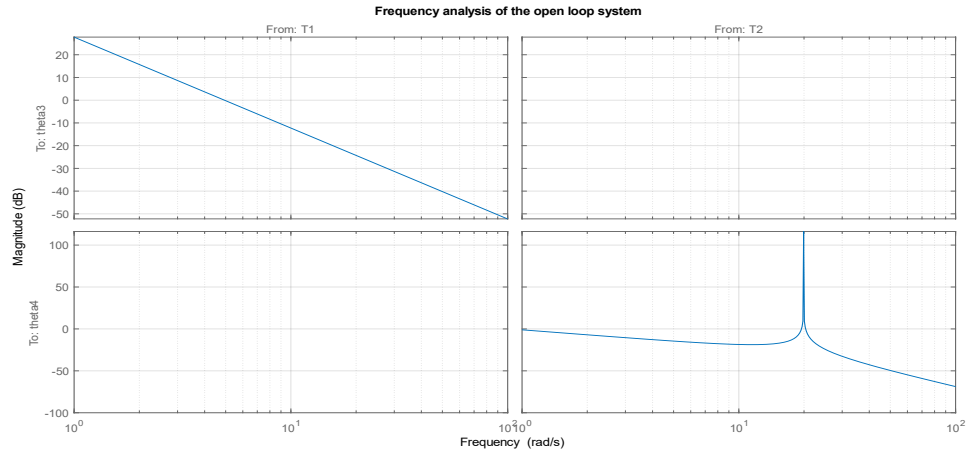


Figure 1. Analyse fréquentiel du system en boucle ouverte

La première sortie a une relation de premier ordre avec la première entrée. Il n'est pas affecté par la deuxième entrée. La deuxième sortie n'est pas affectée par la première entrée. Mais il y a une résonance à oméga d'environ 19,9 rad / s (si on l'agrandit pour voir). Cela correspond aux pôles imaginaires trouvés précédemment.

## 3. Réponse libre:

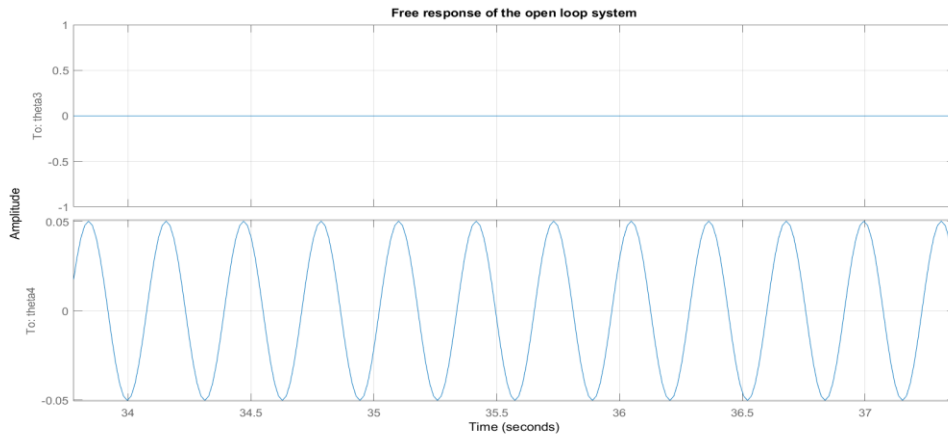


Figure 2. Analyse temporel du system en boucle ouverte

L'état initial est  $[0; 0; 0; 0; 1]$ , ce qui signifie que nous ne donnons une vitesse angulaire unitaire qu'au quatrième angle par rapport à l'équilibre (comme une collision). Nous avons 9,5 oscillations de 34 s à 37 s, donc fréquence d'oscillation =  $9,5 / 3$  Hz et  $\omega = 2\pi \cdot 9,5 / 3 = 19,9$  rad / s. Cela correspond aux pôles que nous avons trouvés plus tôt.

## 4. Commandabilité et Observabilité:

Nous avons calculé les matrices de contrôlabilité et d'observabilité du système à l'aide de MATLAB et obtenu leurs rangs qui sont tous deux 5.

Ceci est égal à l'ordre du système, il est donc à la fois commandable et observable.

Parce que le système lui-même n'est pas stable, être commandable et observable est nécessaire si nous voulons concevoir un LQR.

#### IV. Commande par retour d'états réels:

##### 1. Loi de commande:

Dans un premier temps, nous concevons un LQR sans observateur ni action intégrale. Comme les 2 états sont également importants, nous prenons la matrice Q:

$$Q = C^T C$$

Pour déterminer la matrice R, on effectue une suite de simulation sur simulink pour différentes matrices R jusqu'à trouver la matrice pour laquelle les deux actionneurs atteignent une valeur légèrement inférieure à leurs limites. On trouve, avec les caractéristiques suivantes pour la commande dans le cas d'un échelon de consigne de  $10^\circ$ :

$$R = \begin{bmatrix} 0.77 & 0 \\ 0 & 0.0034 \end{bmatrix}$$

Le gain d'état K est calculé à l'aide de la commande lqr et le gain de référence G est calculé en conséquence de manière à garantir un gain statique unitaire:

$$G = [C(-A + BK)^{-1}B]^{-1}$$

Les gains sont:

$$K = \begin{bmatrix} 1.1396 & -1.0931e-15 & 1.3575e-17 & 0.3057 & -4.9693e-17 \\ 9.3691e-15 & 17.1499 & 0.5514 & -1.2766e-15 & 0.7424 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1.1396 & -1.0931e-15 \\ 9.3691e-15 & -17.1499 \end{bmatrix}$$

De cette façon, la conception du LQR est plus intuitive que la méthode de placement des pôles.

Le système possède un pôle réel égal à  $-11,3936$ , deux paires de pôles complexes conjugués égaux à  $-3.7280 \pm 3.7280i$  et  $-5.6968 \pm 22.2243i$ , qui sont tous stables.

##### 2. Validation avec Simulink:

La réponse à un échelon correspondant:

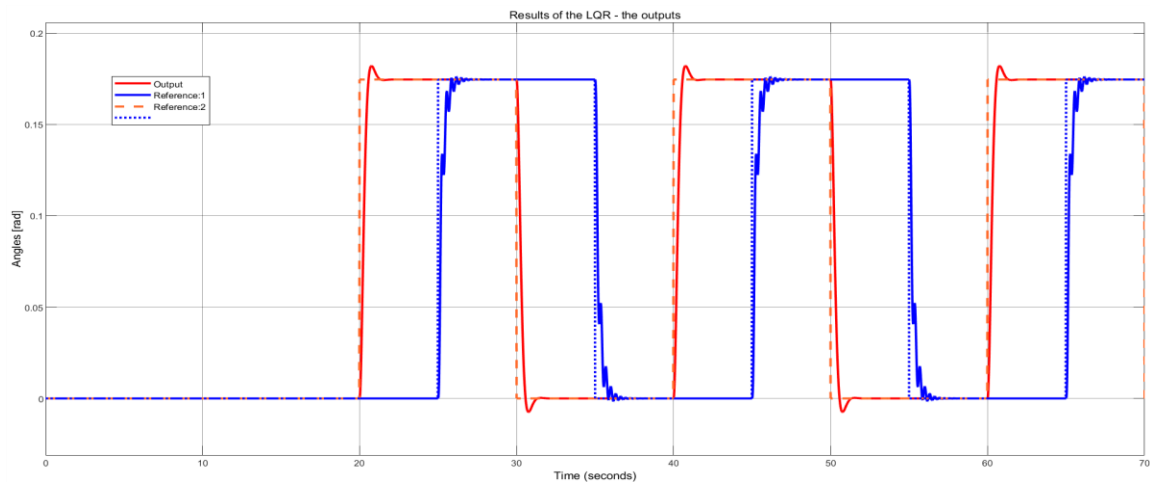


Figure 3. La sortie du système avec la commande par retour d'états

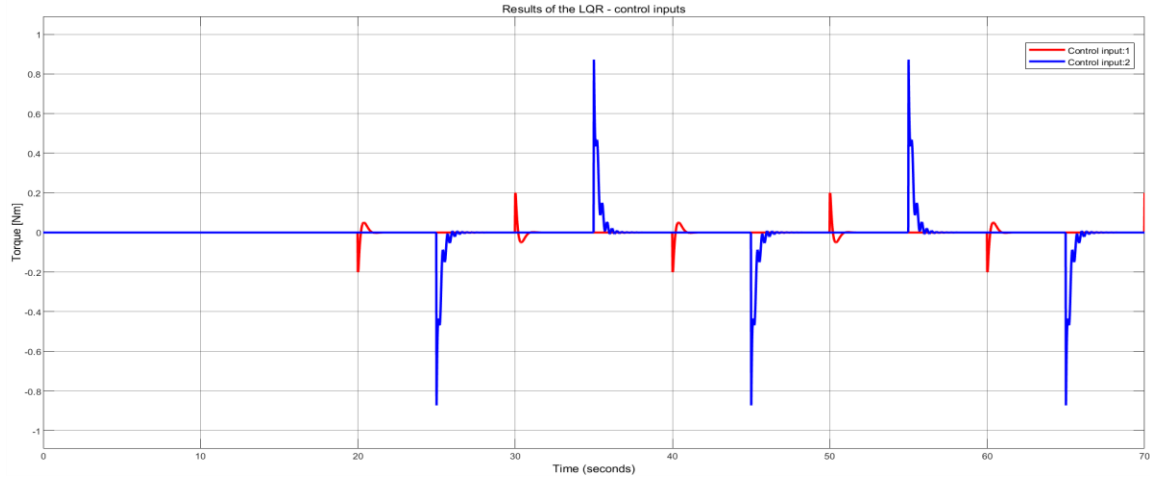


Figure 4. Le signal de commande du système avec la commande par retour d'états

On observe que l'asservissement des deux angles fonctionne, grâce au correcteur, l'angle  $\theta_4$  n'oscille plus indéfiniment, il converge vers 0. Le signal de contrôle est juste à la limite de saturation (il ne sature pas).

L'étude fréquentielle nous permet de voir que la consigne  $r\theta_3$  n'agit que sur  $\theta_3$  (le gain sur  $\theta_4$  est négligeable) de même  $r\theta_4$  n'agit que sur  $\theta_4$ . De plus, on observe que les deux asservissements possèdent un gain unitaire, sauf dans les hautes fréquences où le gain diminue légèrement, ce qui est le cas pour tout système physique. Le système en boucle fermée possède donc le comportement souhaité.

Mais en réalité, nous ne connaissons que la sortie mesurée au lieu de tous les états. Cela conduit à la nécessité de construire un observateur. Nous le ferons dans la prochaine partie.

## V. Commande par retour d'états estimés:

### 1. L'observateur:

Après des tests avec des valeurs différentes, nous implémentons un estimateur quadratique linéaire avec:

$$W = BB^T, V = 0.01I_2$$

Le choix des matrices de pondérations permet d'obtenir un observateur d'état faisant un compromis entre la qualité des capteurs (bruit lié aux capteurs, biais de mesure, etc.) et la qualité des actionneurs (perturbations d'entrée, frottement, etc.). Donc, si nous pensons que les actionneurs répondent rapidement et correctement, nous devrions donner plus de poids au  $W$ . Au contraire, si nous faisons confiance à nos capteurs, plus de poids doivent être donnés à  $V$ . Nous concevons un système d'espace d'état qui donne l'erreur d'estimation. La réponse libre donnée par ceci est (états initiaux = [0; 0; 0; 0; 1]):

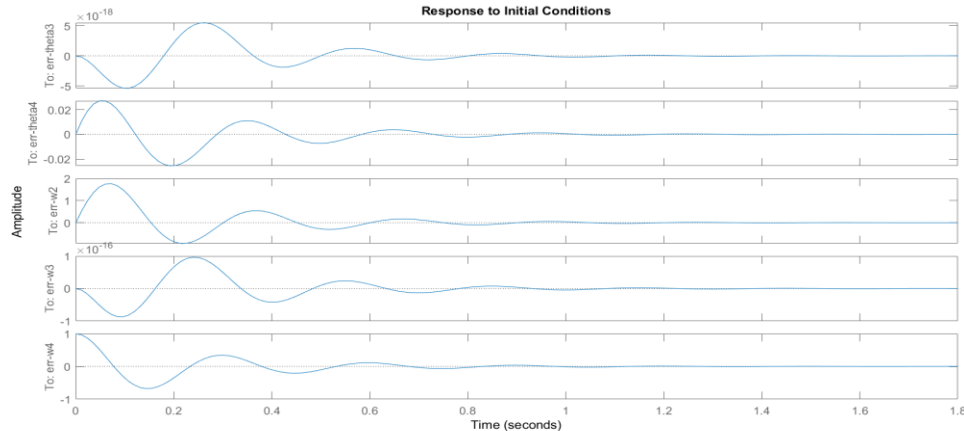


Figure 5. Réponse de l'observateur au conditions initiales

On observe que toutes les grandeurs estimées convergent vers 0, ce qui est bien le résultat attendu.

## 2. Validation avec Simulink:

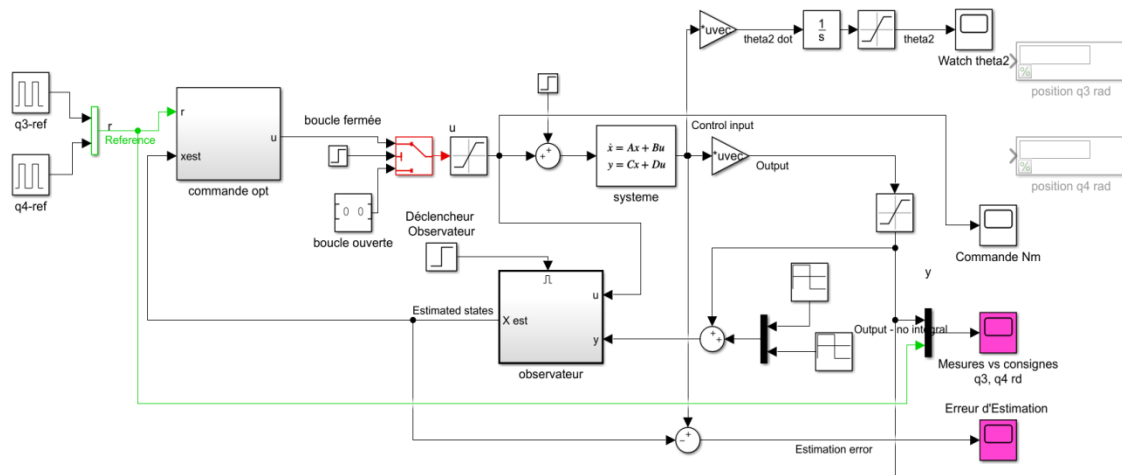


Figure 6. Le modèle Simulink pour le cas commande par retour d'états

Quelques remarques sur le modèle:

- Nous avons 5 contraintes sur les angles et les couples. Nous avons donc mis 5 blocs de saturation pour les modéliser. Pour obtenir  $\theta_2$ , on prend  $\dot{\theta}_2$ , puis son intégrale.
- Le déclencheur et le 'boucle ouverte/fermée' sont une stratégie pour bloquer l'asservissement et l'estimation le temps que le gyroscope atteigne la vitesse  $\Omega = 42 \text{ rad.s}^{-1}$  et qu'il passe en boucle fermée pour que l'asservissement en vitesse puisse commencer.
- Nous avons également modélisé les perturbations d'entrée et les bruits de mesure.

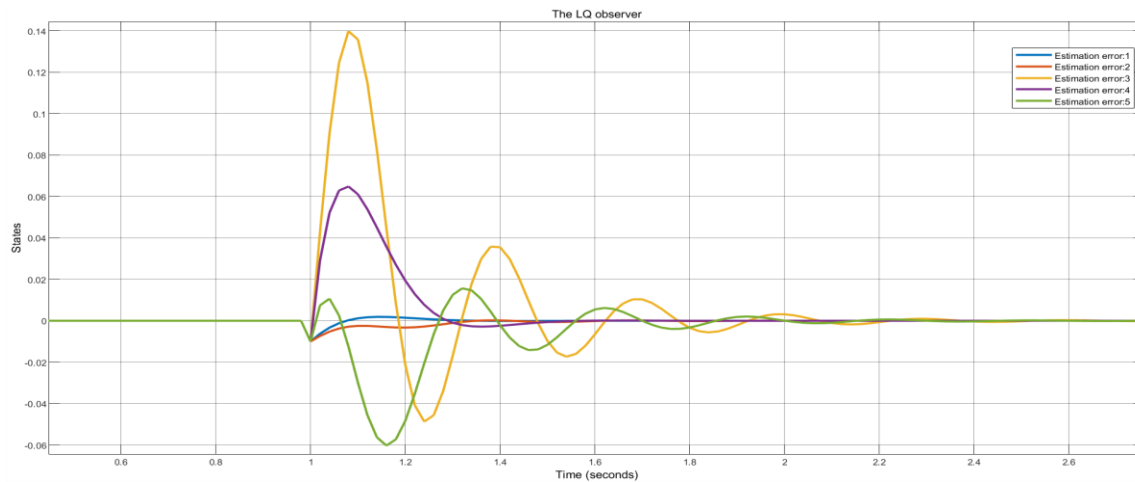


Figure 7. Simulation de l'estimation des états

C'est le résultat de l'observateur (dans ce cas nous n'avons aucune perturbation). Les erreurs d'estimation vont toutes à 0, ce qui est bien.

Lorsqu'on effectue une simulation de réponse à un échelon, on observe que l'erreur d'estimation de chaque état tend vers 0 en quelques secondes et les valeurs des sorties  $\theta_3$  et  $\theta_4$  convergent vers les valeurs de consignes. On peut en déduire que l'observateur et la commande sont bien calibrés. De plus, on observe que la commande ne sature pas.

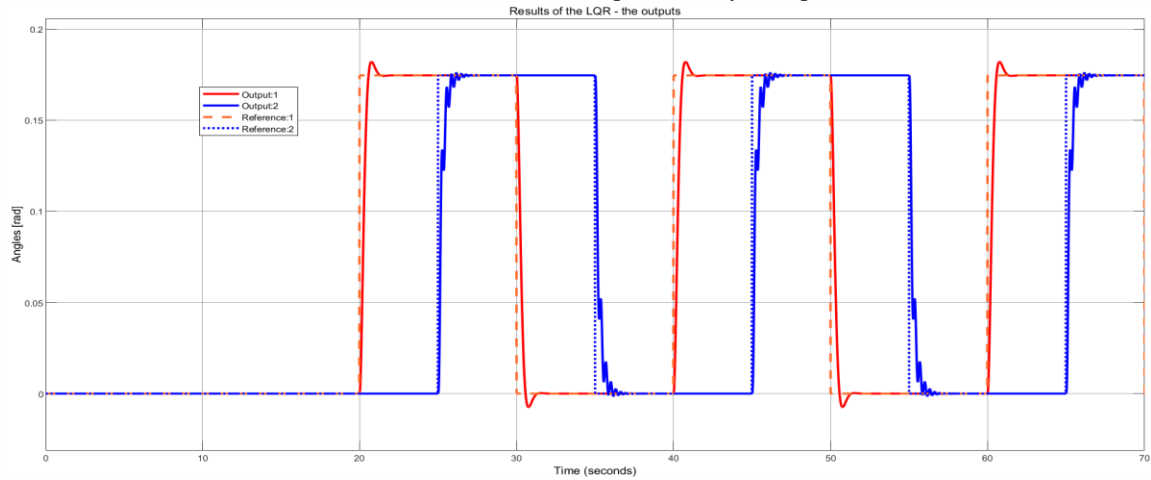


Figure 8. La sortie du système avec la commande par retour d'états observés

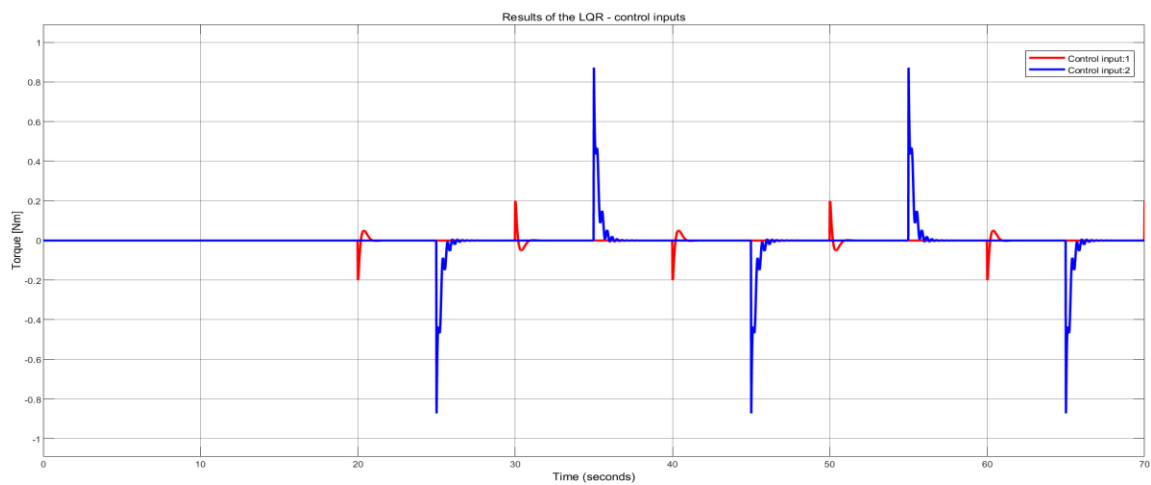


Figure 9. Le signal de commande du système avec la commande par retour d'états observés

On voit que comme précédemment, les réponses sont bons et le contrôle ne sature pas. Nous allons maintenant voir que l'estimation peut être affectée à la fois par des perturbations d'entrée et de sortie.

En cas de perturbation d'entrée (à 25 s):

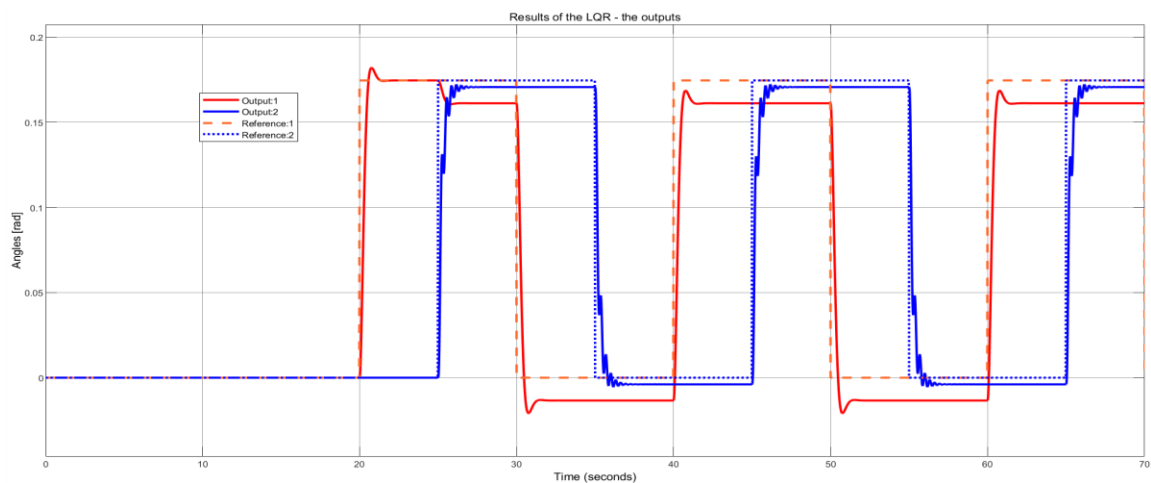


Figure 10. Effet de la perturbation d'entrée

La perturbation d'entrée affecte le système en boucle fermée dans le sens où elle provoque **une erreur en régime permanent non nulle**.

Dans le cas où nous avons une perturbation de sortie (bruit de mesure: cela affecte la sortie utilisé chez l'observateur):

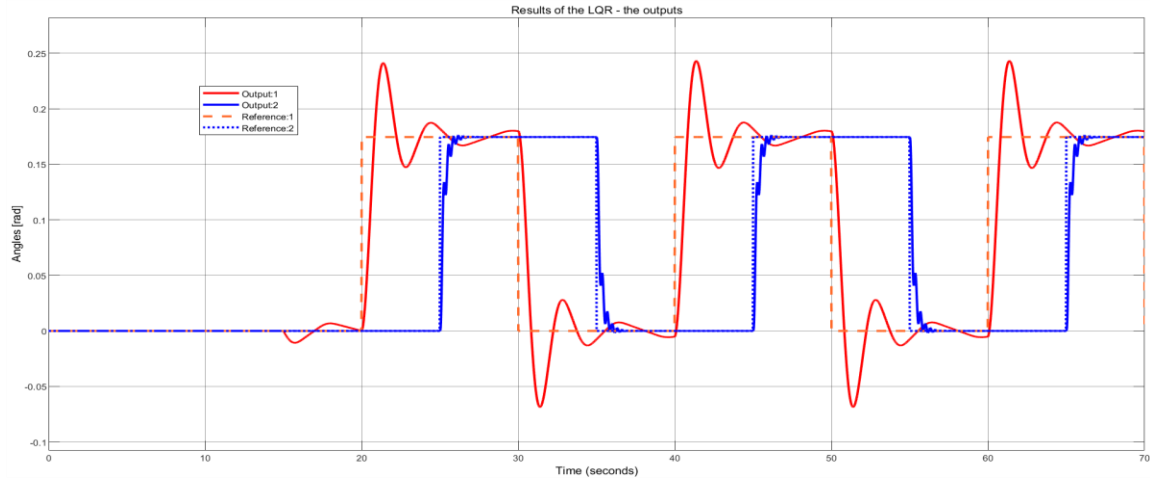


Figure 11. Effet de la perturbation de sortie

Cette perturbation de sortie affecte le système en boucle fermée dans le sens où elle provoque une **instabilité**: il y a de grandes oscillations dans la sortie.

Plus tard, nous verrons que nous pouvons améliorer cela en utilisant l'action intégrale.

### 3. Analyses de robustesse:

Analyser l'impact d'une variation de la vitesse  $\Omega$  (entre 30 et 50 rad/s) sur la sortie du système en boucle fermée avec observateur, nous étendons le système comme ceci:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ y = Cx \\ u = -K\hat{x} + Gr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} + BGr \\ \dot{\hat{x}} = LCx + (A - LC - BK)\hat{x} + BGr \\ sortie = y = Cx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BG \\ BG \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Avec ce système étendu, nous pouvons effectuer des analyses dans le domaine fréquentiel (en utilisant bodemag) et le domaine temporel (en utilisant step). Les résultats:

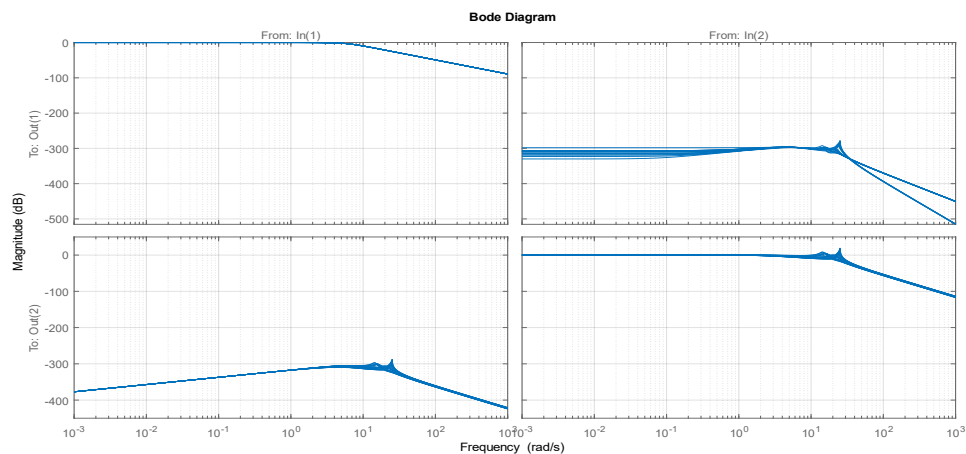


Figure 12. Analyse fréquentiel de robustesse

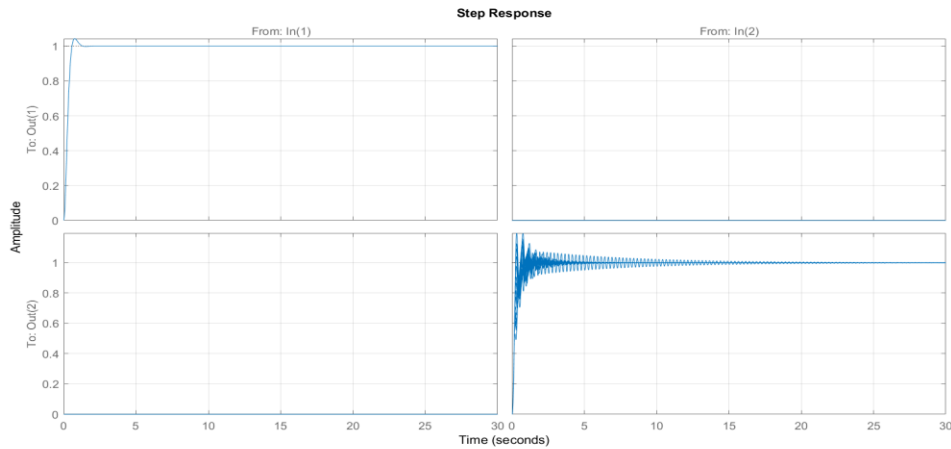


Figure 13. Analyse temporel de robustesse

On observe que la variation de la vitesse ne modifie pas le régime final de la réponse à un échelon (mais elle change le temps de réponse, c'est sûr parce que la loi de commande est statique). De même, dans la réponse fréquentielle, les diagrammes de Bode sont peu affectés par la variation de  $\Omega$ . La modélisation est assez robuste.

## VI. Commande par retour d'états estimés avec action intégrale:

### 1. Loi de commande:

Nous souhaitons étendre la représentation de l'espace d'états à:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} d; \quad y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}; \quad u = -\begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Et nous retrouverons les gains  $F$  et  $H$  correspondant à ce système étendu. Pour mettre l'accent sur le rejet des perturbations, nous ne donnons des poids unitaires qu'aux 2 derniers états (l'action intégrale).

### 2. Validation avec Simulink:

Nous avons ajouté une action intégrale au modèle:

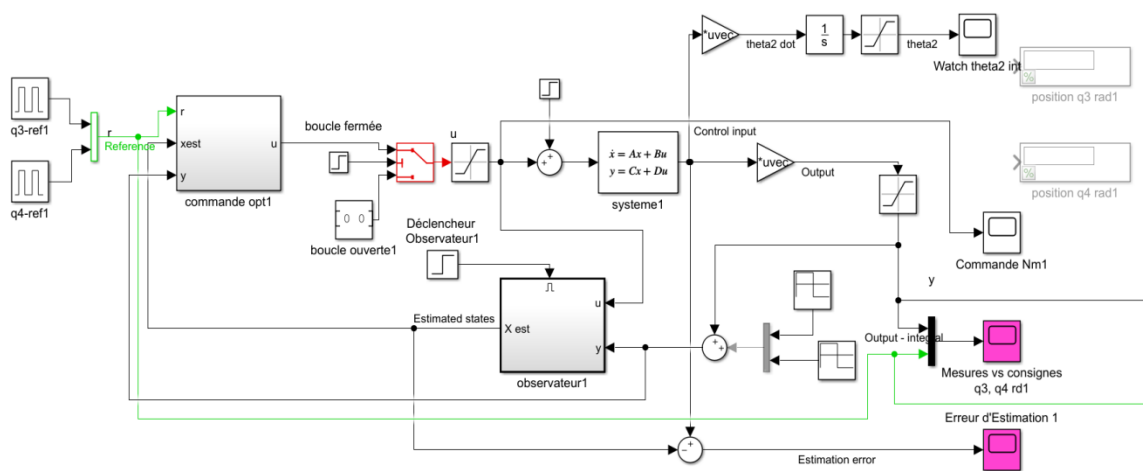


Figure 14. Le modèle Simulink pour le cas commande par retour d'états avec action intégrale

On voit que cette fois, le système contrôlé est capable de rejeter les perturbations d'entrée et de sortie.



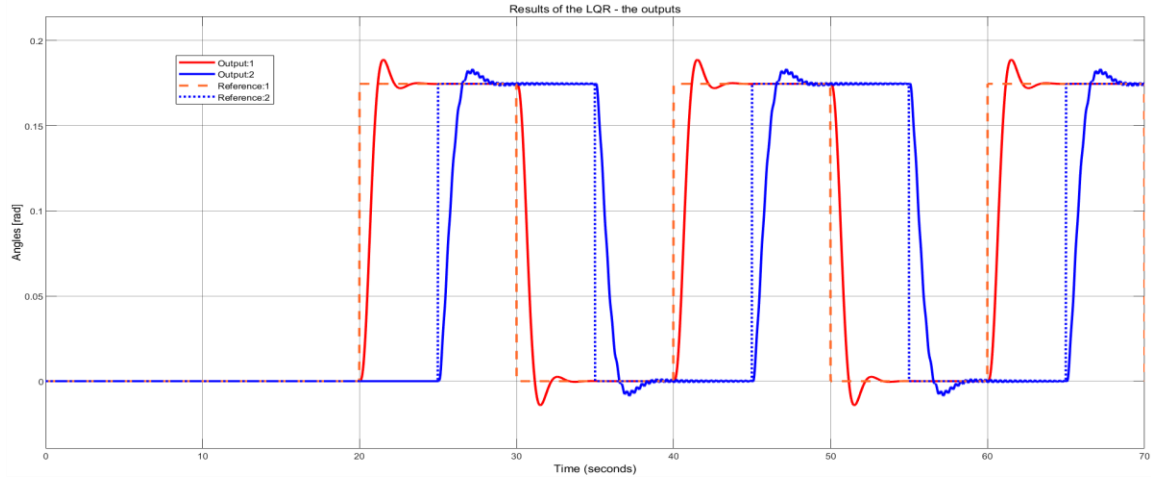


Figure 15. La sortie du système avec la commande par retour d'états observés avec action intégrale

Cette fois, le signal de contrôle est considérablement réduit, nous pouvons donc réduire la matrice  $R$  pour accélérer les réponses. Dans ce cas,  $R$  a été réduit de 1000 fois et maintenant le signal de commande est au point de saturation.

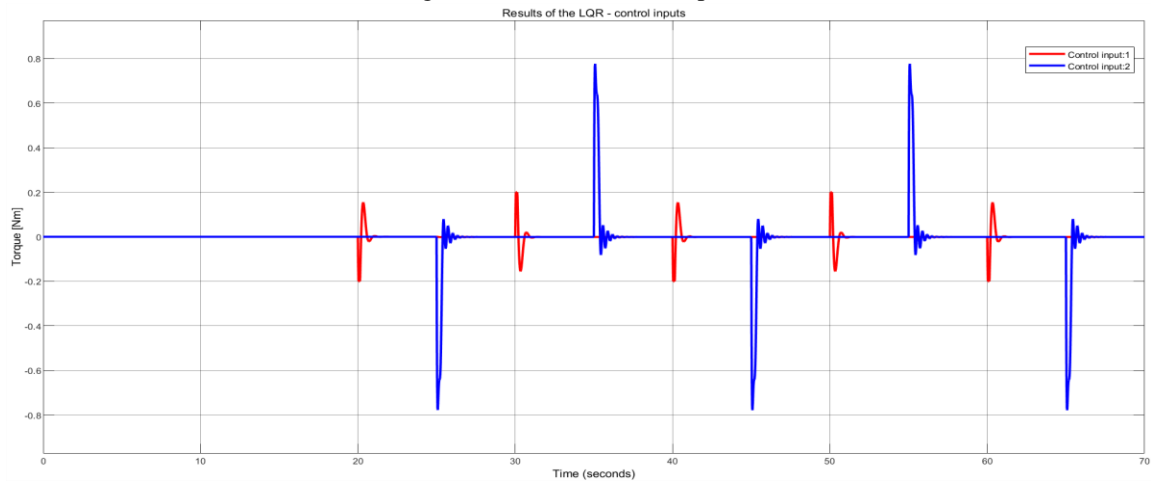


Figure 16. Le signal de commande du système avec la commande par retour d'états observés avec action intégrale

Pour démontrer l'effet de l'action intégrale, nous avons testé les deux cas avec les mêmes perturbations. Nous voyons que celui avec une action intégrale peut non seulement rejeter les perturbations mais il donne également des réponses beaucoup plus rapides avec un dépassement plus petit!

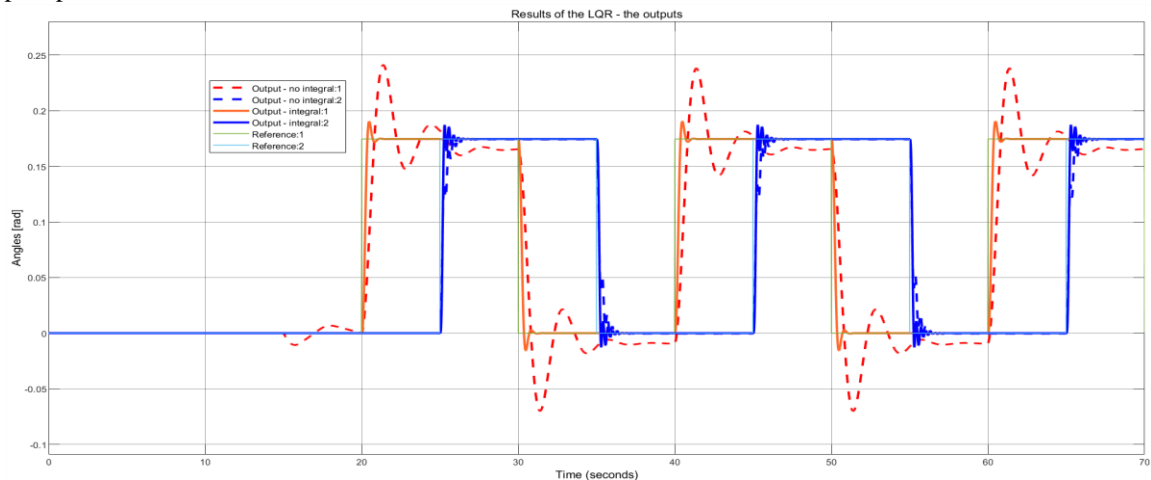


Figure 17. Comparaison entre le cas avec et sans action intégrale

### 3. Analyses de robustesse:

Analyser l'impact d'une variation de la vitesse  $\Omega$  (entre 30 et 50 rad/s) sur la sortie du système en boucle fermée avec observateur et action intégrale, nous étendons le système comme ceci:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ \dot{z} = r - y = r - Cx \\ y = Cx \\ u = -F\hat{x} - Hz \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax - BF\hat{x} - BHr \\ \hat{x} = LCx + (A - LC - BF)\hat{x} - BHr \\ \dot{z} = -Cx + r \\ \text{sortie} = y = Cx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF & -BH \\ LC & A - LC - BF & -BH \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

Avec ce système étendu, nous pouvons effectuer des analyses dans le domaine fréquentiel (bodemag) et le domaine temporel (step).

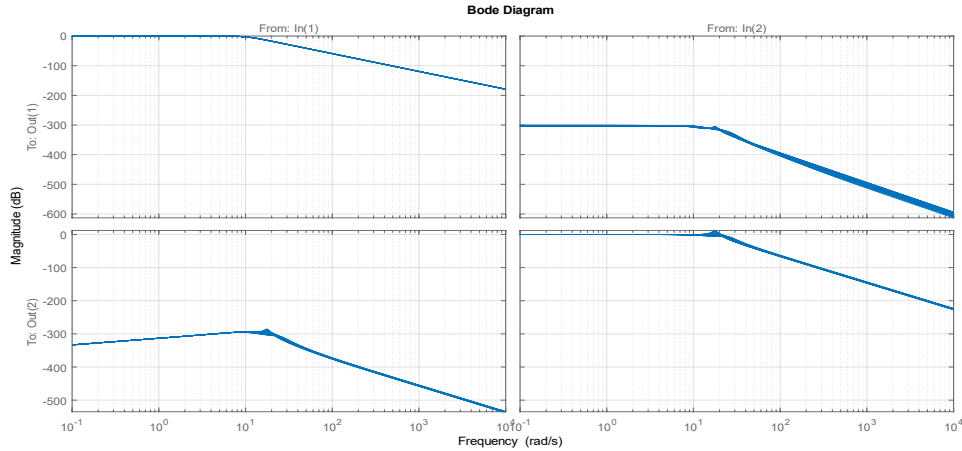


Figure 18. Analyse fréquentiel de robustesse (cas avec action intégrale)

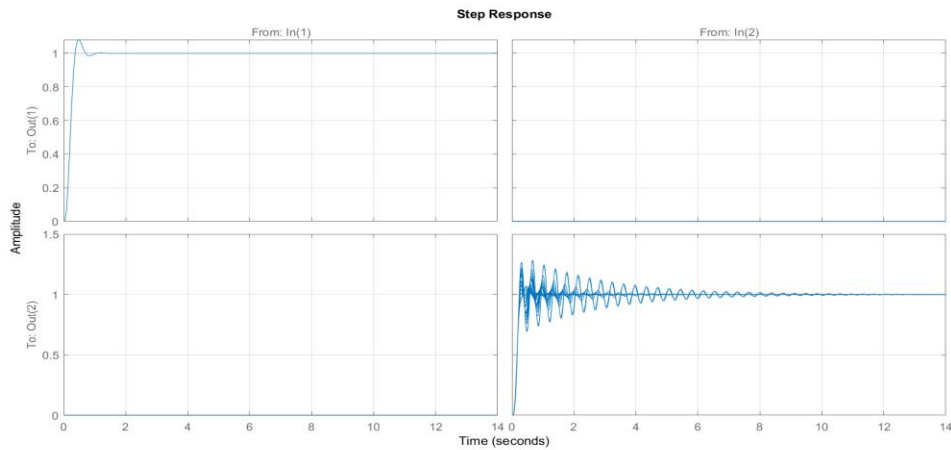


Figure 19. Analyse temporel de robustesse (cas avec action intégrale)

Comme précédemment, on observe que la variation de la vitesse ne modifie pas le régime final de la réponse à un échelon (mais elle change le temps de réponse, c'est sûr parce que la loi de commande est statique). De même, dans la réponse fréquentielle, les diagrammes de Bode sont peu affectés par la variation de  $\Omega$ . La modélisation est assez robuste. Par rapport au cas sans action intégrale, ce cas rejette mieux les perturbations, mais la robustesse n'est pas nettement augmentée. Parce que le contrôleur est toujours statique. Il ne change pas (s'adapte) en fonction du changement de  $\Omega$ .

### VII. Conclusion:

Après ce TP, nous comprenons mieux comment choisir les poids et concevoir des contrôleurs et des observateurs en utilisant des méthodes d'optimalité. Nous voyons également l'effet de l'action intégrale dans le rejet des perturbations.