16-17 YAZ MAT-I dersi (Çevre-End.-Elek.Elok) Vize sınavı 12.07.2017

S.1 $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+\log(16-x^2)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

S.2 **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)\cdot\ln(1+3x)}{(e^{2x}-1)\cdot Arc\tan x^2}=?$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}=?$

S.3 $f(x)=\dfrac{|\ln x|}{x-1}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğin cinsini belirtiniz.

S.4 $f(x)=\log_2 x$ fonksiyonunun tanımdan hareketle (limit yolundan) türevini bulunuz.

NOT: Limit alırken Hospital kuralını kullanılmayacaktır. Sorular ve şıkları eşit puanlıdır. Süre 70 dakikadır.

16–17 YAZ MAT–I Vize Çözümleri 12.07.2017

Soru 1: $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+\log(16-x^2)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz

$x^2-3x\geqslant 0$ ve $16-x^2>0$ olmalıdır.

$x^2-3x=x(x-3)\geqslant 0$ dan Önce $x(x-3)=0$ için kritik noktalar $x_1=0$ ve $x_2=3$ dür.

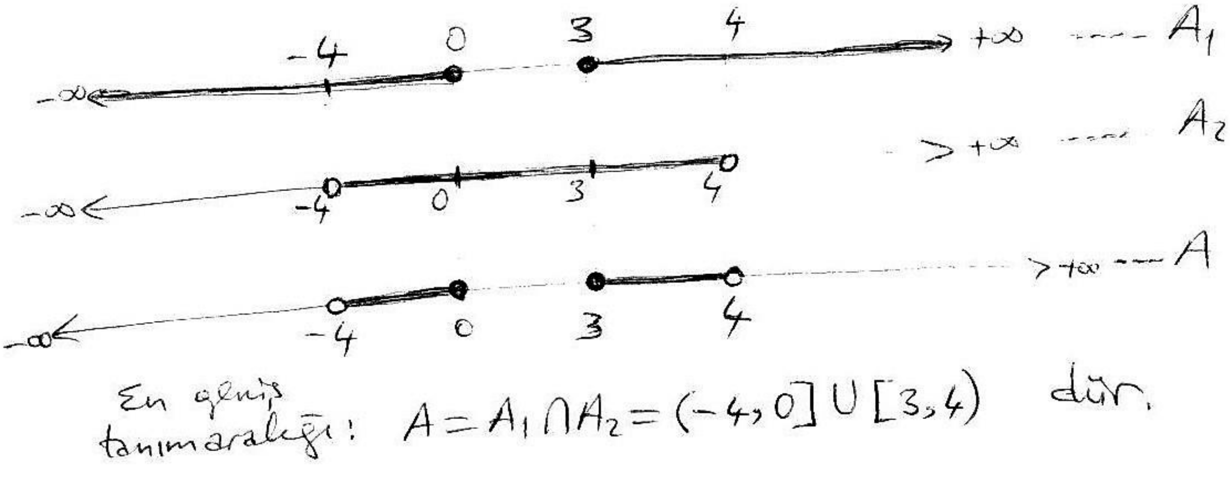
x		0		3	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$A_1=(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$ dür

$16-x^2>0$ dan $16-x^2=0\Rightarrow(4+x)(4-x)=0$ dan kritik noktalar $x=-4$, $x=4$ olup

x		-4		4	
$4+x$	$-$	0	$+$		$+$
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
$16-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$A_2=(-4,4)$ dür.



En geniş tanım aralığı: $A=A_1\cap A_2=(-4,0]\cup[3,4)$ dür.

16-17 YAZ MAT-I Vize Çözümleri 12.07.2017

Soru 2) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)\cdot \ln(1+3x)}{(e^{2x}-1)\cdot \text{Arctan}\, x^2} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x} = ?$

Çözüm a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 2x)\cdot \ln(1+3x)}{(e^{2x}-1)\cdot \text{Arctan}\, x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 x\cdot \ln(1+3x)}{(e^{2x}-1)\cdot \text{Arctan}\, x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x^2 \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 3x}{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2x \cdot \frac{\text{Arctan}\, x^2}{x^2}\cdot x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \overbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}}^{=1}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{Arctan}\, x^2}{x^2}}_{=1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \cancel{x^2}\cdot 3\cancel{x}}{\cancel{2x}\cdot \cancel{x^2}}$$

$$= \frac{\left(\overbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}^{=1}\right)^2 \cdot 1}{1\cdot 1} \cdot \frac{1\cdot 3}{1\cdot 1} = 3 \quad \text{bulunur.}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x+1)-1}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{x+1}\cdot 2x} = \left[\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-1}}}_{=e}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2} \,//$$

Not: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}\cdot(-2)}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} = \dfrac{-2}{1+0} = -2$ dir.

Yani $x\to\infty$ için pay ve payda aynı dereceden polinomlar ise baş katsayılarının oranı limiti verir.

16–16 YAZ MAT-I Vize Çözümleri 12.07.17

Soru 3) $f(x)=\dfrac{|\ln x|}{x-1}$ fo.nunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğin cinsini belirtiniz

Çözüm: $x_0=1$ de $f(1)=\dfrac{|\ln 1|}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ = tanımsız old. süreksiz

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}\frac{|\ln x|}{x-1}=\left\{\begin{matrix}x=1-p\\ p>0,\ p\to0\end{matrix}\right\}=\lim_{p\to0}\frac{|\ln(1-p)|}{(\cancel{1}-p)-\cancel{1}}=\lim_{p\to0}\frac{|\overbrace{\ln(1-p)}^{(-)}|}{-p}=$$

$$=\lim_{p\to0}\frac{-\ln(1-p)}{-p}=-\underbrace{\lim_{p\to0}\frac{\ln(1-p)}{-p}}_{=1\ (\text{öz. lim.})}=-1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}\frac{|\ln x|}{x-1}=\left\{\begin{matrix}x=1+p\\ p>0,\ p\to0\end{matrix}\right\}=\lim_{p\to0}\frac{|\overbrace{\ln(1+p)}^{(+)}|}{(\cancel{1}+p)-\cancel{1}}=\underbrace{\lim_{p\to0}\frac{\ln(1+p)}{p}}_{\text{özel limit}=1}=1$$

soldan limit -1; sağdan limit $+1$ olup $x_0=1$ de fo.nun anî (sonlu) sıçramalı süreksizliği vardır.

II. yol $|\ln x|=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1 \text{ ise}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\\ \ln x, & 1<x<+\infty \text{ ise}\end{cases}$ olup

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}\frac{|\ln x|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\ln x}{x-1}=-\underbrace{\lim_{x\to1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}}_{=1\ (\text{özel lim.})}=-1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}\frac{|\ln x|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\underbrace{\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}}_{=1\ (\text{öz. limit})}=1 \text{ dir.}$$

o halde $x_0=1$ de sonlu sıçramalı süreksizliği vardır.

16-17 YAZ MAT-I Vize (12.07.2017) Çözümleri

Soru 4: $f(x)=\log_2 x$ in türevini, türevin tanımından hareketle (limit yolundan) bulunuz

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2(x+\Delta x)-\log_2 x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_2\Big[\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}_{=e}\Big]=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\log_2 e=\frac{1}{x\ln 2}$$ bulunur.

II. yol:

$$f'(x)=\text{-----}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln 2}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

(logaritmada taban değiştirme ile)

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}}_{=1\ (\text{öz. lim})}=\frac{1}{x\cdot\ln 2}$$ bulunur