Makine Mühendisliği MAT-I Final Sınavı 25.12.17

1) a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$ limitini hesaplayınız. (15)

b) $f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x\le -1 \\ ax-b & , \quad -1<x<4 \\ 9 & , \quad x\ge 4 \end{cases}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır? (10)

2) a) $y(0)=-1$ olmak üzere $e^{xy}=x^2-y^3$ ile tanımlanan kapalı fonksiyonun $y'(0)$ türevini bulunuz. (15)

b) $y=x^{\arctan x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz. (10)

3) Aşağıdaki şıklardan **sadece birini** çözünüz. (20)

a) $f(x)=x^2+2x+3$ eğrisinin $y=\frac{x+2}{3}$ doğrusuna dik olan teğetinin denklemini bulunuz.

b) Yüzey alanı 24π olan kapalı bir dik silindirin hacmi en fazla ne kadardır?

4) $y=\frac{3x-1}{2x+4}$ eğrisinin grafiğini detayları ile birlikte çiziniz. (30)

NOT: Süre 80 dakikadır. Başarılar dileriz.

MAT-I Final Çözümleri 25.12.2017

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x+1)-x}{x\cdot\ln(x+1)}\right) \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}}$ (2)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{1\cdot\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}}$$ (6)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}} = \frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}} = \frac{-1}{2}$$ (6)

---

1) b) $f(x)=\begin{cases} 2, & x\leq -1 \\ ax-b, & -1<x<4 \\ 9, & x\geq 4 \end{cases}$ fonksiyonun sürekli olması

için $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ ve $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

olmalıdır. Burada $f(-1)=2$ ve $f(4)=9$ dur.

(4)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax-b)=-a-b \\ f(-1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=-a-b=2 \Rightarrow -a-b=2 \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(ax-b)=4a-b \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=9 \quad \text{ve } f(4)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow (4a-b)=9=9 \Rightarrow 4a-b=9 \quad \ldots(2)$$

(4)

(1) ve (2) den $\begin{array}{r} 4a-b=9 \\ -a-b=2 \\ \hline 5a=7 \end{array}$ $\Rightarrow \boxed{a=\frac{7}{5}}$ bunu (1) denkleminde

yerine yazarsak (2)

$-a-b=2 \Rightarrow -\frac{7}{5}-b=2 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-17}{5}}$

bulunur

MAT-I / Final / Çözümleri 25.12.2017

(2) a) $y(0)=-1$ olm. üzere $e^{xy}=x^2-y^3$ fon. nu. için $y'(0)=?$

(8)

$(1+x\cdot y')e^{xy}=2x-3y^2\cdot y' \Rightarrow (x\cdot e^{xy}+3y^2)y'=2x-y.e^{xy}$ den

$y'=\dfrac{2x-y.e^{xy}}{x.e^{xy}+3y^2}$ dir. $x_0=0$, $y_0=-1$ için

(7)

$$y'(x_0)=y'(0)=\frac{2x_0-y_0e^{x_0y_0}}{x_0e^{x_0y_0}+3y_0^2}=\frac{2.0-(-1)e^{0.(-1)}}{0.e^{0.(-1)}+3.(-1)^2}=\frac{0+1}{0+3}=\frac{1}{3}$$

---

(2) b) $y=x^{\text{Arctan}x}$ ise $y'=?$

(6)

$y=x^{\text{Arctan}x} \Rightarrow \ln y=\ln\left(x^{\text{Arctan}x}\right)=\text{Arctan}x.\ln x$

$\ln y=\text{Arctan}x.\ln x \Rightarrow (\ln y)'_x=(\text{Arctan}x.\ln x)'$ den

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}.\ln x+(\text{Arctan}x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{\text{Arctan}x}{x}$$ den

(4)

$$y'=y.\left(\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{\text{Arctan}x}{x}\right)=x^{\text{Arctan}x}\cdot\frac{x\ln x+(1+x^2)\text{Arctan}x}{x(1+x^2)}$$

$$\boxed{y'=\frac{x.\ln x+(1+x^2)\text{Arctan}x}{x.(1+x^2)}.\,x^{\text{Arctan}x}}$$ bulunur.

17–18 / MAT-I / Final 25.12.2017

(3) a) $f(x)=x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x+2$ (3)

(3) $y=\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$; $m=\dfrac{1}{3}$; $m_t\cdot m=-1 \Rightarrow m_t\cdot\dfrac{1}{3}=-1$

$m_t=-3$ dır. $m_t=f'(x_0)=2x_0+2=-3 \Rightarrow x_0=-\dfrac{5}{2}$

$y_0=f(x_0)=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+3=\dfrac{25}{4}-2\,\dfrac{5}{2}+3=\dfrac{25}{4}-2=\dfrac{17}{4}$ olup

$\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{17}{4}\right)$ noktasından geçen, eğimi $m_t=-3$ olan (3)

(4) teğet doğrunun denklemi $y-y_0=m_t(x-x_0) \Rightarrow y-\dfrac{17}{4}=-3\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ den

$4y-17=-12x-30 \Rightarrow \boxed{12x+4y+13=0}$ veya $y=-3x-\dfrac{13}{4}$

(3) $m_n\cdot m_t=-1 \Rightarrow m_n\cdot(-3)=-1 \Rightarrow m_n=+\dfrac{1}{3}$ olup

(4) $\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{17}{4}\right)$ den geçen eğimi $m_n=\dfrac{1}{3}$ olan normal doğrunun

denklemi $y-y_0=m_n(x-x_0) \Rightarrow y-\dfrac{17}{4}=\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ den

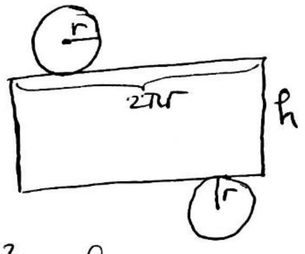
$3y-\dfrac{51}{4}=x+\dfrac{5}{2} \Rightarrow x-3y+\underset{(2)}{\dfrac{5}{2}}+\dfrac{51}{4}=0 \Rightarrow \boxed{x-3y+\dfrac{61}{4}=0}$

veya $4x-12y+61=0$ ya da $\boxed{y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{61}{12}}$

bulunur.

MAT-I / Final Çözümleri 25.12.2017

(3) b) Yüzey alanı : $S = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r h = 24\pi$



(2) Hacim $V = \pi r^2 \cdot h$ olup yüzey alanından

h yüksekliği r yarıçapı cinsinden

bulunursa ; $\cancel{\pi} r^2 + \cancel{\pi} r h = 12\cancel{\pi} \Rightarrow h = \frac{12 - r^2}{r}$ olup

(4) $V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{12 - r^2}{r} = \pi(12r - r^3)$ olup bunun türevi alınırsa

(4) $V'(r) = \pi \cdot (12 - 3r^2) = 3\pi(4 - r^2)$ den

(4) $V'(r) = 0 \Leftrightarrow 3\pi(4 - r^2) = 0 \Rightarrow 3\pi(2 + r)(2 - r) = 0$ dan

$r_1 = -2$ (anlamsız) ve $r_2 = 2$ dir.

(4) Türevin işaret tablosu ise

r		-2		2	
$V'(r)$	$-$	0	$+$	max	$-$

(2) $r = 2$ için hacim maksimum oluyor. $h = \frac{12 - 2^2}{2} = 4$ olup

Maksimum hacim: $V_{max} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$ br^3

bulunur

17–18 / MAT-I / Final

25.12.2017

(4) $y = \dfrac{3x-1}{2x+4}$

(2) 1° $T.A. = \mathbb{R}\setminus\{-2\} = (-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

(5) 2° $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{3x-1}{2x+4} = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\overbrace{3x-1}^{(-)}}{\underbrace{2x+4}_{(-)}} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\overbrace{3x-1}^{(-)}}{\underbrace{2x+4}_{(+)}} = -\infty$

$y = \dfrac{3}{2}$ Y.A. $\qquad x=-2$ D.A.

(5) 3° $y' = \dfrac{3(2x+4)-2(3x-1)}{(2x+4)^2} = \dfrac{14}{(2x+4)^2}$; $y'>0$ daima artan

ekstremum Yok!

(5) 4° $y'' = \dfrac{-14\cdot 2(2x+4)\cdot 2}{(2x+4)^4} = \dfrac{-7}{(x+2)^3}$; $f''(-2)=$ tanımsız. $x_0=-2$ nin öncesinde ve sonrasında $f''(x)$ işaret değiştirir. Fakat $x_0=-2$ de fonksiyon tanımsız old. $x_0=-2$ de B.Nok. Yok!

(2) 5° $x=0$ için $y = \dfrac{0-1}{0+4} = \dfrac{-1}{4}$; $y=0$ için $3x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

(6) 6°

x	$-\infty$ $\quad -2$		0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	
y''	$+$	$-$	$-$	$-$	
y	$\frac{3}{2}^{+} \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{1}{4} \nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{3}{2}^{-}$

konveks $\qquad$ konkav

7° Grafik! (5)