SERMAYE BÜTÇELEME

Önümüzdeki üç yıllık planlama dönemi için beş projenin değerlendirilmesi yapılacaktır. Her projeye ait beklenen getiriler ile yıllık harcamalar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Önümüzdeki üç yıl boyunca uygulamaya konulacak projeleri belirleyin.

Proje	Harcamalar (milyon pb)/yıl			Getiri (milyon pb)
	1	2	3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Kullanılabilir fonlar (milyon pb)	25	25	25	

Problem her proje için bir “evet-hayır” kararına indirgenmiştir. Bu ikili değişkenleri şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$X_j=\begin{cases} 1, & j \ projesi \ seçilmişse \\ 0, & j \ projesi \ seçilmemişse \end{cases}$$

TPD modeli de bu durumda aşağıdaki gibi olur;

maks.z=$20X_1$+$40X_2$+$20X_3$+$15X_4$+$30X_5$

$5X_1+4X_2+3X_3+7X_4+8X_5 \leq 25$

$X_1+7X_2+9X_3+4X_4+6X_5 \leq 25$

$8X_1+10X_2+2X_3+X_4+10X_5 \leq 25$

X_1,X_2,X_3,X_4,X_5=(0,1)

Optimum tam sayılı çözüm (TORA’yla gerçekleştirilen) X_1 =X_2=X_3=X_4=1, X_5=0 ve z=95 milyon pb’dir. Çözümden, beşinci proje dışındaki tüm projelerin uygulanması gerektiği anlaşılmaktadır.

Sürekli doğrusal programlama çözümüyle TDP çözümünün karşılaştırılması ilginç sonuçlar verebilir. Sürekli doğrusal programlamada X_j =(0,1) yerine tüm j’ler için 0≤X_j≤1 yazılıp problem çözülürse, X_1=0.5789, X_2=X_3=X_4=1 ile X_5=0.7368 ve z=108.68 milyon pb elde edilir. Bu çözüm iki değişkenin kesirli değerler alması nedeniyle anlamsızdır. Bu değişkenler tam sayıya yuvarlatılmak istenirse, bu takdirde de X_1 = X_5= 1 yazmak gerekir. Bu da eşitsizliklerin sağlanamaması nedeniyle uygun değildir. Daha da önemlisi, X_j değişkeni “evet-hayır” şeklinde bir değişken olduğundan kesirli yazılamaz. Dolayısıyla da bu çözüm anlamsızdır.

SABİT ÖDEMELER PROBLEMİ

Üç telefon şirketinin uluslararası konuşmalar için uyguladığı ücret politikalarını inceleyelim. Metel şirketi ayda 16 pb sabit ücret ve buna ek olarak konuşmanın dakikası başına 0.25 pb talep etmektedir. Petel şirketi ayda 25 pb sabit ücret ve dakika başına 0.21 pb konuşma ücreti almaktadır. Betel'in aylık abone tutarı 18 pb, dakika başına konuşma ücreti ise 0.22 pb' dir. Ben ayda ortalama 200 dakikalık uluslararası görüşme yapmaktayım. Konuşma yapmadığımda aylık ödeme de yapmayacağıma ve telefon görüşmelerimi üç şirket arasında istediğim gibi paylaştırabileceğime göre, aylık telefon faturası ödemelerimi minimum kılacak şekilde bu üç şirketi nasıl kullanabilirim?

Bu problem TDP olmadan da çözülebilir. Ancak tam sayılı formülasyonu öğretmesi açısından yine de dikkate değerdir.

Şu tanımları yapalım;

x_1 = Metel'in aylık uluslararası konuşma süresi(dak)

x_2= Petel'in aylık uluslararası konuşma süresi(dak)

x_3= Betel'in aylık uluslararası konuşma süresi(dak)

x_1> 0 ise y_1 =1 ve x_1= 0 ise y_1 =0

x_2> 0 ise y_2 =1 ve x_2= 0 ise y_2 =0

x_3> 0 ise y_3 =1 ve x_3= 0 ise y_3 =0

x_j 'nin pozitif olması durumunda y_j 'nin 1'e eşit olmasını

x_j≤M , j=1,2,3

kısıtını kullanarak sağlayabiliriz. Buradaki M, x_j 'nin yapayının değerini sınırlandırmayacak ölçüde, yeterince büyük bir sayıdır. Ayda yaklaşık 200 dakikalık bir konuşma söz konusuysa, x_j ≤200 (tüm j'ler için), M=200 almak uygundur. Model tam olarak,

Min.z= 0.25x_1 + 0.21 x_2 + 0.22 x_3+ 16y_1 +25 y_2 +18y_3

x_1+ x_2+ x_3= 200

x_1≤200y_1

x_2≤200y_2

x_3≤200y_3

x_1, x_2, x_3 ≥0

y_1, y_2, y_3=(0,1) şeklinde olacaktır.

Formülasyona göre sadece y_j=1 olması halinde ve sadece x_j>0 iken j. ayın sabit ücreti z amaç fonksiyonunun bir parçası olacaktır. Optimumda x_j=0 ise bu durumda y_j 'nin katsayısının kesinlikle pozitif olması olgusuyla birlikte, z'nin minimizasyonu istendiği gibi y_j'yi sıfır olmaya zorlayacaktır.

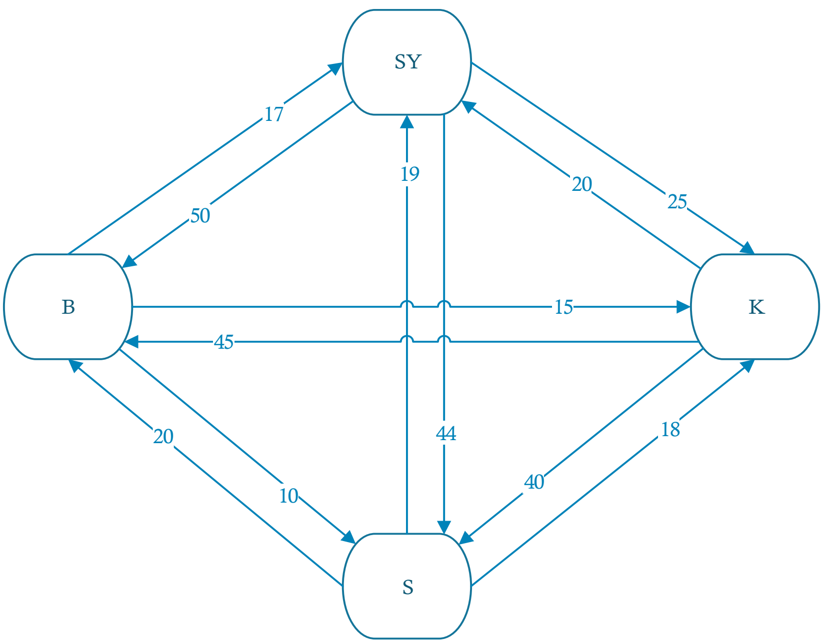
Optimum çözümde x_3=200 ve y_3=1 bulunmuş olup, kalan değişkenlerin değeri sıfırdır. Böylelikle Betel'in seçilmesinin uygun olacağı görülmektedir. x_3=200 olması (x_3 >0) nedeniyle y_3=1'dir. y_3' ün 1 olması bir bolluğun(artığın) işaretidir. Aslında y_1, y_2, y_3' ü kullanmanın ana nedeni aylık sabit ücreti açıklamaktır. Yani üç tane 0-1 tam sayılı değişken hastalıklı bir modeli analitik olarak kullanılabilir hale getirmiştir.

GEZGİN SATICI PROBLEMİ

Gökkuşağı firmasının günlük üretim programında Beyaz(B), Sarı(S), Kırmızı(K) ve Siyah(SY) boyaların üretimi yer almaktadır. Tüm boyaların üretimi aynı makinelerde gerçekleştiğinden, üretimin değiştirilmesi sırasında özel bir temizlik işlemi gereklidir. Aşağıdaki tablo, satırlarda belirtilen renkleri sütunlarda belirtilen renklerin izlemesi durumunda dakika cinsinden bu temizlik sürelerini vermektedir. Örneğin; beyaz renkten sonra sarı rengin üretimine geçilecekse sistemin temizlenme süresi 10 dakika olacaktır. Bir renk kendisini izleyemeyeceği için, buna karşılık gelen süre ∞ ile ifade edilmiştir. Toplam temizleme süresini minimum kılacak şekilde bu dört rengin günlük üretimindeki optimum sıralamayı belirleyin.

Mevcut Boya	Sonraki Boya			
	Beyaz	Sarı	Siyah	Kırmızı
Beyaz	∞	10	17	15
Sarı	20	∞	19	18
Siyah	50	44	∞	25
Kırmızı	45	40	20	∞

Problem Şekil 1 de özetlenmiştir. Her boya bir düğüm noktasıyla gösterilmiş ve yönlü bağlantılarla sonraki düğüme bağlanarak bağlantıların üzerlerine temizleme süreleri yazılmıştır. Böylelikle problem, bir düğümden başlayan ve öbür üç düğüme uğrayarak başlangıç düğümüne dönen en kısa yolun belirlenmesi problemine dönüşmüş olur. Bu tip problemler genelde gezgin satıcı probleminden türemiştir. Çünkü gezgin satıcı probleminde de bir şehirden yola çıkılıp sırasıyla tüm şehirlerin dolaşılması sırasında izlenecek en kısa yolun belirlenmesi problemiyle ilgilenilir. Yukarıdaki problemde bu durum başka sözcüklerle ifade edilmiştir.



ŞEKİL 1

Problemi, şebekenin altı [(4-1)!=3!=6] mümkün durumunu gözden geçirmek suretiyle ayrıntılı olarak çözebiliriz. Aşağıdaki tablodan anlaşıldığı gibi, B→ S→K→SY→B çevrimi optimum çevrimdir.

ÇEVRİM	TOPLAM TEMİZLİK SÜRESİ
B→ S→SY→K→B	10+19+25+45=99
B→ S→K→SY→B	**10+18+20+50=98**
B→ SY→S→K→B	17+44+18+45=124
B→ SY→K→S→B	17+25+40+20=102
B→ K→SY→S→B	15+20+44+20=99
B→ K→S→SY→B	15+40+19+50=124

Çevrimlerin hepsinin ayrıntılı biçimde incelenmesi sadece küçük problemlerde uygulanabilir. (örneğin; 11 düğümlü bir şebekede 10!= 3628800 çevrim vardır). Bu nedenle çok etkili bir formülasyona gereksinim vardır.

Eğer i düğümünden j düğümüne erişiliyorsa, x_{ij} =1, aksi halde sıfırdır. Gezgin satıcı probleminde de, çevrimin tamamlanabilmesi için i şehrinin sadece bir şehre bağlanması ve j şehrine sadece bir şehirden ulaşılması gerekli koşuldur. M, yeterince büyük bir sayı olmak üzere, Gökkuşağı problemini aşağıdaki gibi formülize edebiliriz:

$$\text{Min.}z=Mx_{BB}+10x_{BS}+17x_{BSY}+15x_{BK}+20x_{SB}+Mx_{SS}+19x_{SSY}+18x_{SK}+50x_{SYB}+44x_{SYS}+Mx_{SYSY}+25x_{SYK}$$
$$+45x_{KB}+40x_{KS}+20x_{KSY}+Mx_{KK}$$

$x_{BB}+x_{BS}+x_{BSY}+x_{BK}=1$

$x_{SB}+x_{SS}+x_{SSY}+x_{SK}=1$

$x_{SYB}+x_{SYS}+x_{SYSY}+x_{SYK}=1$

$x_{KB}+x_{KS}+x_{KSY}+x_{KK}=1$

$x_{BB}+x_{SB}+x_{SYB}+x_{KB}=1$

$x_{BS}+x_{SS}+x_{SYS}+x_{KS}=1$

$x_{BSY}+x_{SSY}+x_{SYSY}+x_{KSY}=1$

$x_{BK}+x_{SK}+x_{SYK}+x_{KK}=1$

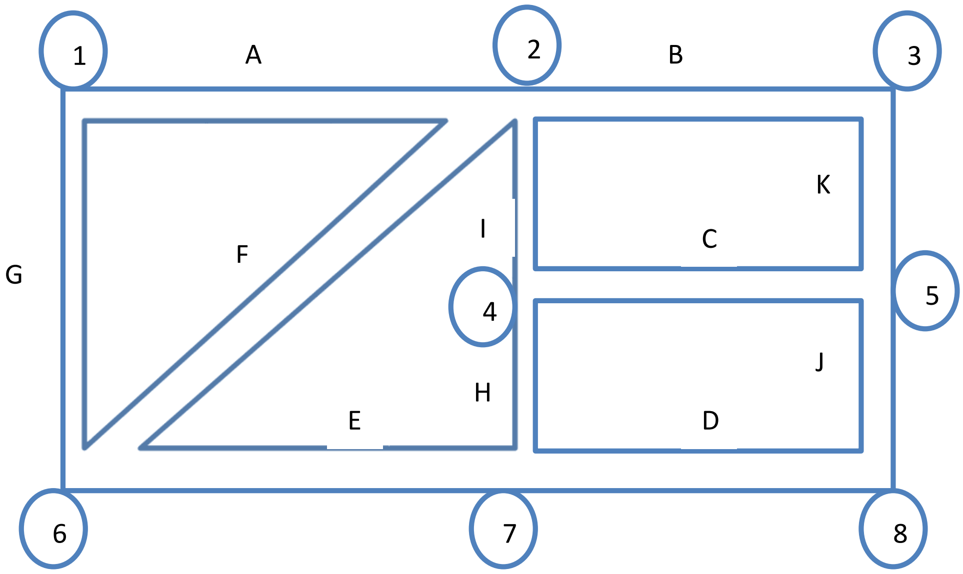
x_{ij}=(0,1), tüm i ve j'ler için

Çözüm kapalı bir çevrimdir(döngü)

Çözümün kapalı bir döngü olması gereksinimini saymazsak, formülasyon bir atama modelidir. Atama modelinin optimum çözümünün bir çevrim oluşturacağının garantisi yoktur. Çoğu kez, düğümlerin altkümelerini birbirine bağlayan alt çevrimler oluşmaktadır. Bundan dolayı da problemi çözmek için atama esaslı tam çözüm algoritmaları geliştirilmiştir. Bu algoritmalar karmaşıklıklarına ve hesaplamada ki etkililiklerine göre çeşitlenirler.

GÖZETİM PROBLEMİ

Bir üniversitede, kampüs güvenliğini sağlamak için kurulan güvenlik birimi kampüsün çeşitli yerlerine acil telefon hattı çekmek istemektedir. Kampüsün ana yollarının her birinde en az bir tane telefon bulunması koşuluyla minimum sayıda telefon bağlanması düşünülmektedir. Şekil 2 de kampüsün ana yolları görülmektedir.



ŞEKİL 2

Her telefonun, en az iki yola hizmet vermesini sağlayacak şekilde yolların kesişme noktalarına yerleştirilmesi mantıklıdır. Şekil 2'den, böyle bir yerleştirme için en az sekiz yer gerektiği görülmektedir.

Bir telefon j yerine yerleştirilmişse x_j=1

aksi halde x_j=0 (j=1,2,…,8) olsun.

Problemin kısıtı, 11 anayolun (A'dan K'ye) her biri üzerinde en az bir telefonun yerleştirilmiş olmasıdır. Dolayısıyla model şu şekilde olacaktır:

min.z= $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$

$x_1+x_2 \geq 1$ (A yolu)

$x_2+x_3 \geq 1$ (B yolu)

$x_4+x_5 \geq 1$ (C yolu)

$x_7+x_8 \geq 1$ (D yolu)

$x_6+x_7 \geq 1$ (E yolu)

$x_2+x_6 \geq 1$ (F yolu)

$x_1+x_6 \geq 1$ (G yolu)

x_4+x_7 ≥1 (H yolu)

x_2+x_4 ≥1 (I yolu)

x_5+x_8 ≥1 (J yolu)

x_2+x_5 ≥1 (K yolu)

x_j=(0,1) , j=1,2,…,8

Problemin TORA' la bulunan optimum çözümüne göre 1,2,5 ve 7 no' lu köşelere dört adet telefon yerleştirilmelidir.

Yukarıdaki model, gözetim problemi diye bilinen problemden türemiştir. Bu modelde ki tüm değişkenler 0-1 tam sayılıdır. Her kısıt için bütün sol taraf katsayıları 0 ya da 1'dir. Sağ tarafları da (≥1) şeklindedir. Amaç fonksiyonu her zaman c_1x_1 + c_2x_2+ … +c_nx_n 'yi minimum kılacak şekildedir. Burada tüm j=1,2,…,n'ler için c_j>0'dır. Mevcut örnekte tüm j'ler için c_j=1 'dir. Bununla birlikte eğer c_j, j yerindeki tesis maliyetini gösteriyorsa, bu durumda bu katsayıların 1'den başka değerler alabileceği de varsayılabilir.