

Çevre Müh. Lineer Cebir Bütünleme Sınav Soruları

11.06.2015

S. 1)	$2A - B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ ve $3A + 2B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$	eşitliklerini sağlayan A ve B matrislerini bulunuz.
S.2)	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$	lineer denklem sisteminin çözüm kümesini artırılmış matris yöntemiyle bulunuz.
S.3)	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$	lineer denklem sisteminin çözüm kümesini Cramer yöntemiyle bulunuz.
S.4)	$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$	denkleminin köklerini bulunuz.
S.5)	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$	matrisinin ek matrisini hesaplayınız.

NOT : Herhangi **dört soru**yu cevaplayınız. Süre 70 dakikadır. Başarılar. Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR.

Çevre Lm Ceb. Bütünleme (11.06.2015) Çözümleri

①

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \left. \begin{aligned} 2A - B &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4A - 2B &= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline 7A &= \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A - B &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = B \text{ den} \\ B &= \begin{bmatrix} 2+1 & 4-3 \\ -4+6 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ -x + y + 2z &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [A, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_1 + S_2 \\ S_1 + S_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}S_2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{-3S_2 + S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ y + z &= 2 \\ 2z &= 6 \Rightarrow \boxed{z=3} \end{aligned}$$

Buna L_2 de yerine yazarsak $y + 3 = 2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$ ve bunları birinci denkleme (L_1 de) yerine yazarsak $x + 2(-1) + 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow x = 9 - 2 + 2 = 9 \Rightarrow \boxed{x=2}$ bulunur.

$(2, -1, 3)$ sıralı 3-lü sistemin tek çözümü (çözüm elemanı) dir. Çöz. kümesi ise $C = \{(2, -1, 3)\}$ dir.

Çevre Lin Ceb. Bütünleme (11.06.2015) Çözümleri

(2)

(3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 - 2 - 3 - 1 - 8 = 6 - 16 = -10$$

(Sarrüs yöntemi ile)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 + 24 + 6 + 9 - 9 - 32 = 30 - 50 = -20$$

(yıldız yöntemi ile)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 18 - 9 + 24 - 3 - 36 = 58 - 48 = 10$$

(yıldız yöntemi ile)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 18 - 16 - 9 - 8 - 12 = 18 - 48 = -30 \quad \text{dup}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{-10} = -1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-10} = 3 \quad \text{dur.}$$

$(2, -1, 3)$ sistemin tek çözümü (çözüm elemanı) dir.

Sistemin çözüm kümesi ise $G = \{(2, -1, 3)\}$ dir.

Çevre Lin Ceb Büt (11.06.2015) Çözümleri - (3)

4)
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{2,3.\text{vef. sütunları 1. x ekle}} \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 0 & x \\ 2x+1 & x & x & 1 \\ 2x+1 & x & x & 0 \\ 2x+1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = (2x+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} -S_1+S_2 \\ -S_1+S_3 \\ -S_1+S_4 \end{matrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & x-1 & x & 1-x \\ 0 & x-1 & x & -x \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{1. \text{ sütuna göre açılım (merteye düşürme)}} \begin{vmatrix} x-1 & x & 1-x \\ x-1 & x & -x \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{K_2+K_1 \rightarrow K_1} \begin{vmatrix} x-1 & x & 1-x \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2x+1) \begin{vmatrix} x-1 & x & 1-x \\ x-1 & x & -x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2x+1)(x-1) \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 1 & x & -x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{3. \text{ satıra göre Laplace açılımı}} \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 1 & x & -x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2x+1)(2x-1) \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = -(2x+1)(2x-1)(-x-1+x)$$

$$= -(2x+1)(2x-1) \cdot (-1) = (2x+1)(2x-1) = 0 \quad \text{dan}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2}} \quad \text{dir.}$$

5)
$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = +(-7+1) = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -(-7+2) = +5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +(1-2) = -1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -(-14-3) = +17$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = +(-7-6) = -13, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & +1 \end{vmatrix} = -(+1-4) = -3$$

Çevre Lin Ceb. Büt (11.06.2015) Çözümleri

(4)

(5) soruya devam...

$$A_{31} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +(-2-3) = -5,$$

$$A_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-3) = +4 ; A_{33} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \quad \text{olup}$$

$$\varepsilon_k(A) = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -1 \\ 17 & -13 & -3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -6 & 17 & -5 \\ 5 & -13 & 4 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$