2.2. Diferensiyel Denklemler

$y = f(x)$'de $F(x, y, y', y'', ...) = 0$ veya $y = f(x, y', y'', ...)$ x ve y değişkenlerinin kendileri ve türevlerini içinde bulunduran denklemlerdir. *(Türevler; "Bağımlı değişkenin değişiminin bağımsız değişkenin değişimine oranı" olarak ifade edilirler.)*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Diferensiyel denklemler sürekli sistemlerin hareketlerinin ifade edilmesinde kullanılan denklemlerdir.

(Sürekli sistem örnekleri: Sürekli su gelen Barajda biriken su miktarı, Uzay araçlarının hareketleri, Tıbbî araçların çalışma sistemi, Petrol üretim tesislerinin çalışma sistemi, çimento gibi sürekli üretim sistemleri, Robotların çalışma sistemleri vs…)

2.2.1. Diferensiyel Denklem Türleri

Diferensiyel Denklem Problemleri, doğal olarak Türev Kavramı ile birlikte 17. yüzyılın sonlarında ortaya çıkmıştır. 18. yüzyıl için Adi Diferensiyel Denklemler Devri, 19. yüzyıl için Kısmi Diferensiyel Denklemler Devri, 20. yüzyıl için ise Sayısal Çözüm Yöntemleri Devri denilebilir.

Genelde fizik ve mühendislik problemlerini ifade etmek(modellemek) ve çözmek amacı ile başvurulan Diferensiyel Denklemler zamanla diğer bilimsel çalışma alanlarına örneğin; Fiziksel, Kimyasal, Biyolojik, Ekonomik ve Üretim problemlerine uygulanır hale gelmiştir.

Aşağıdaki bazı diferensiyel denklem türleri ve örnekleri verilmiştir.

Örnekler:

1) Serbest Düşme Hareketi: Diferensiyel Denklemlerin ilk defa kullanıldığı fiziksel olaylardan biridir. Bilindiği gibi t_0 anında u0 ilk hızı ile "düşey doğrultuda" fırlatılan bir küçük cismin, hava ile arasındaki sürtünme sıfır kabul edilirse ve g yer çekimi ivmesini gösteriyorsa herhangi bir t- anındaki hızı:

$$du/dt = -g \quad \Rightarrow \quad u = u_0 - g(t - t_0), \; t > t_0$$

biçiminde ifade edilebilir. Soldaki ifade 1. mertebeden lineer ve çok basit bir adi diferensiyel denklemdir. Sağdaki ifade ise bu denklemin çözümü yada entegrali adını alır. Dikkat edilirse çözüm ifadesinde entegrasyon işleminden gelen keyfi sabitin yerini $t = t_0$ da verilmiş olan ilk hız u_0 almıştır. Herhangi bir diferensiyel denklemin çözümünü bulmak en az bir entegrasyon işlemi gerektireceğine ve her entegrasyon işlemi bir keyfi sabit üreteceğine göre çözümün tek olabilmesi için bu keyfi sabitlerin belirlenmesini sağlayacak bazı ek şartlara ihtiyaç duyacağımız açıktır. Yukarıdaki problemde bu ek şart $t = t_0$ da $u = u_0$ olmalı biçiminde verilmiştir. O halde serbest düşme problemi:

$du/dt = -g$, $t = t_0$ *da* $u = u_0$, $t > t_0$

Serbest düşme hareketinde yol ile hız arasındaki ilişki de bir diferensiyel denklemle ifade edilebilir. Gerçekten de problemdeki küçük katı cisim bir düşey doğrultu üzerinde hareket ettiğine göre bir noktadaki hızını o noktadaki yer koordinatının (yani yüksekliğinin) zamanla değişimi olarak düşünülebilir. Cismin herhangi bir t anındaki yüksekliği s(t) ile gösterilirr ve $t = t_0$ da $s = s_0$ kabul edilirse yeni bir diferensiyel denklem elde edilir.

$ds/dt = u(t)$, $t = t_0$ *da* $s = s_0$, $t > t_0$

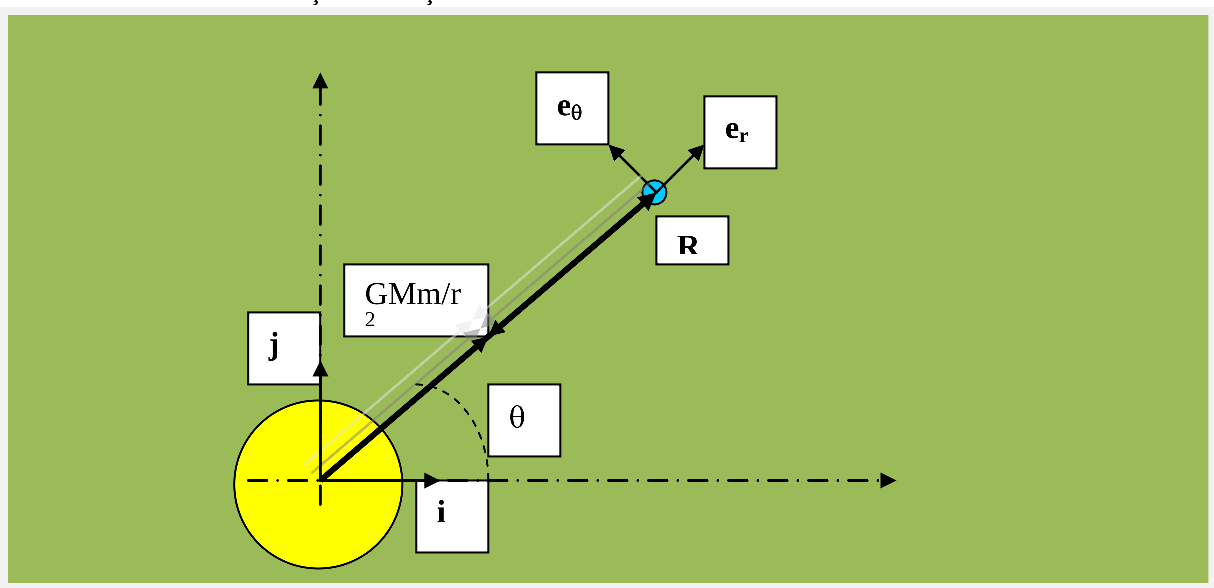
Görüldüğü gibi bu da 1. mertebeden lineer bir diferensiyel denklemdir. Bu denklemin türevi alınıp önceki denklemle birleştirilirse;

$d^2s/dt^2 = -g$, $t = t_0$ *da* $u = u_0$, $s = s_0$, $t > t_0$

elde edilir. **Bu ise 2. mertebeden lineer adi bir diferensiyel denklemdir. Son olarak şu şekilde yazılabilir.**

$\boldsymbol{s = s_0 + u_0(t - t_0) - (1/2)g(t - t_0)^2}$

2) İki Cisimli Kütlesel Çekim Problemi: KEPLER'in tamamen çok uzun ve hassas gözlemlerden çıkardığı gezegenlerin hareketleri ile ilgili kurallar NEWTON tarafından tek bir matematik modele dönüştürülmüştür.



Uzayda büyük bir M kütleli cisimle küçük bir m(<<M) kütleli cisim olsun. Bu cisimler arasındaki mesafe r(t) ile gösterilsin. Bu cisimlerin birbirine göre hareketini, daha doğrusu küçük cismin büyüğüne göre hareketini incelendiğinde, doğal olarak bu iki cisim her t için aynı düzlemde kalacaktır yani hareket düzlemseldir. O halde hareketin kartezyen koordinatlarını büyük cismin merkezine yerleştirelim ve birim vektörlerini **i** ve **j** olarak adlandırıldığında benzer biçimde hareketin yarı-kutupsal koordinatlarını da merkeze yerleştirerek birim vektörleri $\mathbf{e_r}$ ve $\mathbf{e_\theta}$ ile gösterilir. İki kütle arasındaki uzaklık r ile verildiğine göre bu,

Kartezyen sistemde $\boldsymbol{R} = rCos\theta\,\boldsymbol{i} + rSin\theta\,\boldsymbol{j}$, ***Yarı***-kutupsal sistemde $\boldsymbol{R} = r\,\boldsymbol{e_r}$ olarak ifade edilecektir. İncelenmek istenen büyüklükler bu denklemlerde görünen r = r(t) ve θ = θ(t) değerleridir. Bunları bulmak için uygulanacak kurallar ise NEWTON Hareket Kurallarıdır. Yani bir cismin ivmesi ile üzerine etkiyen kuvvet arasında

$$m\, d\boldsymbol{V}/dt = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

bağıntısı vardır ve uzayda başka hiçbir etki yokken iki cisim birbirini kütleleri çarpımı ile doğru aradaki uzaklığın karesi ile ters orantılı şiddetteki bir kuvvetle çekerler. Yani

$$F = GMm/r^2$$

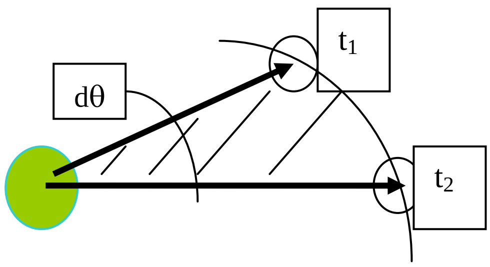
Bağıntısı geçerlidir. Burada G NEWTON Çekim Sabitini, F ise **F** kuvvetinin şiddetini belirtmektedir. Cisimler arasındaki çekim kuvveti **r** doğrultusunda verildiğine göre $m\, d\boldsymbol{V}/dt = \boldsymbol{F}$ denklemini bu doğrultuda yazmak yani $m\, d\boldsymbol{V}/dt$ bu doğrultudaki bileşenini belirlemek kolaylık sağlayacaktır. Bu amaçla ilk iş olarak yer vektörlerini birbiri ile ilişkilendirilir.

$$\boldsymbol{e_r} = Cos\theta\,\boldsymbol{i} + Sin\theta\,\boldsymbol{j}\ ,\ \boldsymbol{e_\theta} = -Sin\theta\,\boldsymbol{i} + Cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

Burada $d\boldsymbol{e_r}/d\theta = \boldsymbol{e_\theta}$ ve $d\boldsymbol{e_\theta}/d\theta = -\boldsymbol{e_r}$ dir.
Madem ki cismin yer vektörü $\boldsymbol{R} = r\,\boldsymbol{e_r}$ olarak verilmiştir, o halde bunun zamana göre türevleri bize önce hızı sonra ivmeyi verecektir. Bunlar hesaplanırsa,

$$\boldsymbol{V} = d\boldsymbol{R}/dt = (dr/dt)\,\boldsymbol{e_r} + r(d\boldsymbol{e_r}/dt) = (dr/dt)\,\boldsymbol{e_r} + r[(d\boldsymbol{e_r}/d\theta)(d\theta/dt)] = (dr/dt)\,\boldsymbol{e_r} + r\,(d\theta/dt)\,\boldsymbol{e_\theta}$$
$$\boldsymbol{a} = [d^2r/dt^2 - r(d\theta/dt)^2]\,\boldsymbol{e_r} + [rd^2\theta/dt^2 + 2(dr/dt)(d\theta/dt)]\,\boldsymbol{e_\theta}$$

Şu halde artık hareket denklemlerini yazılabilir.
$\boldsymbol{e_r}$: $d^2r/dt^2 - r(d\theta/dt)^2 = GM/r^2$
$\boldsymbol{e_\theta}$: $rd^2\theta/dt^2 + 2(dr/dt)(d\theta/dt) = 0$
Görüldüğü gibi r(t) ve θ(t) için yazılmış iki denklemli bir diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir. İkinci denklemin, k keyfi bir sabit olmak üzere,
$$d/dt[r^2d\theta/dt] = 0 \Rightarrow r^2d\theta/dt = k$$
şeklinde yazılabileceği görülmektedir. Bu sonucu daha iyi görmek için küçük bir şekil çizilirse m kütleli gezegenin herhangi iki t_1 ve t_2 anında ki konumlarını göz önüne alınır.



Şekilden görüldüğü üzere r(r dθ) gezegenin $k(dt) = k(t_2 - t_1)$ kadar zamanda uzayda taradığı alandır. Bu da 2. KEPLER Kuralıdır. “Bir gezegenin birim zamanda taradığı alan sabittir.”
Yukarıdaki iki denklemden ikincisi için bulduğumuz sonucu yani r(t) ile θ (t) arasındaki $r^2d\theta/dt = k$ ilişkisi ilk denklemde kullanılırsa,

$\boldsymbol{r^2d^2r/dt^2 - k/r = GM}$ ***İki kütle için Çekim*** **diferensiyel denklemi elde edilir.**

3) **<u>Popülasyonların Değişimi:</u>** Diferensiyel denklemlerin ilginç uygulama alanlarından biri belirli bir çevredeki belirli bir türün nüfus ya da popülasyon değişimini incelemedir. Herhangi bir canlı türüne ait toplam birey sayısını yani popülasyonu u(t) ile gösterirsek, incelenen zaman dilimi de hiçbir ölüm gerçekleşmeyecek kadar kısa tutulursa u'nun zamana göre değişimi $t = t_0$ anındaki $u = u_0$ değerinden başlayarak her an o andaki u değeri ile orantılı olacağına göre,

$(du/dt)/u = k_1$, $k_1 = lnu_0 \quad t \geq t_0$

yazılabilir. Bu 1. mertebeden basit bir diferensiyel denklemdir ve çözümü,

$du/u = k_1\, dt \Rightarrow \quad lnu = k_1\,(t\text{-}t_0) \Rightarrow \; u = e^{k_1(t-t_0)}$

şeklinde elde edilir.

4) $y' + y = \cos x$ 1. mertebe 1. dereceden adî diferensiyel denklem

5) $y'' + a.\sin y = 0$ 2. mertebe 1. dereceden Adî diferensiyel denklem *(Sarkacın diferensiyel denklemi)*

6) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g$ 2. mertebe 1. dereceden adî diferensiyel denklem *(Serbest düşen cismin hareketi denklemi)*

7) $y + x = 5$ diferensiyel denklem değil

8) $(y''')^2 = 0$ 3. mertebe 2. dereceden adî diferensiyel denklem

9) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$ 1.mertebe 1. dereceden kısmî türevli diferensiyel denklem

10) $Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ 2. mertebe 1. dereceden kısmî türevli diferensiyel denklem *(Laplace kısmî türevli diferensiyel denklem)*

11) $Z_{xx} - xy(Z_{xyy})^2 - Z_x = \dfrac{x}{\ln y}$ 3. mertebe 2. dereceden kısmî diferensiyel denklem.

- ***Mertebe:*** *Diferensiyel denklemdeki en yüksek türevli terimin mertebesi diferensiyel denklemin mertebesidir.*
- ***Derece:*** *En yüksek türevli terimin kuvveti diferensiyel denklemin derecesidir.*

Diferensiyel denklemlerin kullanılabilir hale getirilmesi için çözümlerinin yapılması gerekir. Bu amaçla çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu çözüm yöntemlerinin başlıcaları, Analitik Yöntemler ve Sayısal Çözüm Yöntemleridir. Diferensiyel denklemlerin çözümleri sonunda türevsiz doğrudan kullanılabilir çözüm fonksiyonları elde edilir.

2.2.2 Adi Diferensiyel Denklemler

$y = f(x)$ ye bağlı $F(x, y, y', y'', ...) = 0$ veya $y = f(x, y', y'', ...)$
Şeklinde yazılabilen tek bağımsız değişkenli türevsiz denklemlerdir.
Çözümlerinde türevli ifadelerden türevsiz denklemler elde etmek amaçlanır.

- ***Genel Çözüm:*** *Diferensiyel denklemin bütün çözümlerini içinde bulunduran çözümlerdir.*
  $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ $(C_1, C_2, ..., C_n,$ keyfî sabitler)
  Genel çözümde Diferensiyel denklemin mertebesi kadar keyfî sabit bulunur.

- ***Özel Çözüm:*** *Diferensiyel denklemin sağ taraf fonksiyonuna göre bulunan ve keyfî sabit içermeyen çözümleridir.*
  $y_ö = \varphi(x)$

- ***Tekil Çözümler:*** *Bazı diferensiyel denklemlerin çözümü sırasında doğrudan ortaya çıkan çözümlerdir.(Keyfî sabit içermezler)*
  $y_t = \varphi(x)$

Diferensiyel denklemlerin bir sistemin hareketlerini ifade edebilmesi için genel çözümünün elde edilmesi gerekir. Diğer çözümler sistemlerin bazı özel durumlarıyla ilgi bilgi verebilir.

2.3. 1.Mertebe-1.Dereceden Adi Diferensiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

1.Mertebe-1.Dereceden Adi diferensiyel denklemler $f(x, y, y') = Q(x)$ şeklindeki Diferensiyel denklemlerdir. Bu bölümde bu diferensiyel denklemlerin en çok bilinen ve kullanılan çözüm yöntemleri tanıtılacak ve örnek çözümler yapılacaktır.

2.3.1 Değişkenlerine Ayrılabilen Diferensiyel Denklemler

Diferensiyel denklemler çözülürken genellikle bu basit tipe dönüştürülmek istenir. Çünkü doğrudan çözümleri yapılabilen diferensiyel denklemlerdir. Bu diferensiyel denklemlerin genel şekli şöyledir:

$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ (x ve y ye bağlı ifadeler çarpım şeklinde ayrılmış olmalıdır)

Çözüm için diferensiyel denklemin terimleri $f_2(x)g_1(y)$ e bölünür,

$\dfrac{f_1(x)g_1(y)dx}{f_2(x)g_1(y)} + \dfrac{f_2(x)g_2(y)dy}{f_2(x)g_1(y)} = 0$ ve kısaltmalar yapıldıktan sonra

$\int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$ (1. mertebeden olduğu için bir tek C sabiti bulunur)

Genel Çözüm: $y = \varphi(x, C)$ şeklinde olmalıdır.

Örnek: $x(1 - y^2)dx + (1 + x^2)ydy = 0$ denkleminin Genel Çözümünü bulunuz.

Çözüm: Buradan görüleceği gibi diferensiyel denklemin terimleri f2(x) ve g1(y) ye bölünür;

$$\frac{x(1-y^2)}{(1+x^2)(1-y^2)}dx + \frac{(1+x^2)y}{(1+x^2)(1-y^2)}dy = 0$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)}dx + \int \frac{y}{(1-y^2)}dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + (-\frac{1}{2})\ln(1-y^2) = \ln C$$

$$\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \ln C$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \ln C \quad ==> \quad C = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-y^2}}$$

$$C^2 = \frac{1+x^2}{1-y^2} \quad => \quad 1 - y^2 = \frac{1+x^2}{C^2}$$

$$y = (1 - \frac{1+x^2}{C^2})^{1/2} = \frac{\sqrt{C^2 - 1 - x^2}}{C}$$

genel çözümü elde edilir.(eşitlikten sonra + - ilave edilmelidir.)

Kısaltmalar yapıldığında; şeklinde x e bağlı terimler dx , y ye bağlı şeklinde x e bağlı terimler dx , y ye bağlı terimler ise dy ile bir araya gelmiştir. Şimdi denklem doğrudan integrali alınacak hale gelmiştir.
Buradan İntegraller alınarak ifadeler düzeltilirse;
**C keyfi sabitleri alınan İntegral fonksiyonlarının türüne göre yazılabilir. Bu bize genel çözümün düzenlenmesinde kolaylık sağlar.

Ödev :..herkes en az 1 değişkenlerine ayrılabilen dif.denklem bularak çözecek.