KARIŞIK SORULAR

① a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\sec x} = ?$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+\cos 2x - e^{3x}}{x.\sin 4x} = ?$

Çözüm. a) $k = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\sec x} \Rightarrow \ln k = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec x . \ln(\sin x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{1}{\sin x}.\cos x}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{0}{1} = 0$ olup $\ln k = 0 \Rightarrow k = e^0 = 1$ dir.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+\cos 2x - e^{3x}}{x.\sin 4x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 - 2.\sin 2x - 3.e^{3x}}{\sin 4x + 4x.\cos 4x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4.\cos 2x - 9.e^{3x}}{4.\cos 4x + 4.\cos 4x - 16x\sin 4x}$

$= \dfrac{-4-9}{4+4+0} = -13/8$

---

② a) $y^2.\tan x + x^3.\ln(y^2) - 2yx^2 = 0$ ile kapalı olarak verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun 1. mertebeden türevini $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ noktasında hesaplayınız.

b) $x = \sin^2 t$, $y = \arcsin t$ $(t\in\mathbb{R})$ ile parametrik olarak verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun 1. mertebeden türevini $t=\frac{\pi}{4}$ noktasında hesaplayınız.

Çözüm a) $y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{y^2.(1+\tan^2 x) + 3x^2.\ln(y^2) - 4xy}{2y.\tan x + x^3.\frac{1}{y^2}.2y - 2x^2}$

$$y'\Big|_{\left(\frac{\pi}{4},1\right)} = -\dfrac{1^2.(1+\tan^2\frac{\pi}{4}) + 3.\frac{\pi^2}{16}.\overbrace{\ln(1^2)}^{0} - 4.\frac{\pi}{4}.1}{2.1.\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{64}.\frac{2}{1} - 2.\frac{\pi^2}{16}}$$

$$= -\dfrac{2+0-\pi}{\underset{(32)}{\frac{2}{1}} + \frac{\pi^3}{32} - \underset{(4)}{\frac{\pi^2}{8}}} = \dfrac{\pi-2}{\frac{64+32\pi^3-4\pi^2}{32}} = \dfrac{32(\pi-2)}{64+32\pi^3-4\pi^2}$$

b) $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{2\sin t.\cos t} \Rightarrow y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\pi^2}{16}}} \cdot \dfrac{1}{2\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \dfrac{4}{\sqrt{16-\pi^2}}\cdot\dfrac{1}{1} = \dfrac{4}{\sqrt{16-\pi^2}}$

③ a) $y = x^2+1$ eğrisine $x=1$ noktasında çizilen teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

b) Alanı $64 cm^2$ olan bir karenin köşelerinden eşit alanlara sahip küçük kareler kesilip atılıyor. Kalan yüzey katlanarak bir kutu oluşturuluyor. Bu kutunun hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

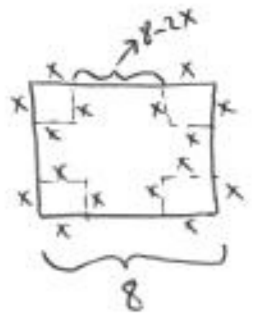
Çözüm a) $y' = 2x \quad y'|_{x=1} = 2.1 = 2 \qquad m = 2 \qquad x=1$ için $y = 1^2+1 = 2$

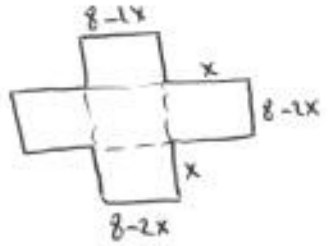
Teğetin denklemi $\quad y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$

Normalin denklemi $\quad y - y_0 = -\frac{1}{2}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

b)





$$V = (8-2x)^2 \cdot x = x(64 - 32x + 4x^2)$$
$$= 64x - 32x^2 + 4x^3 =: f(x)$$

$$f'(x) = 64 - 64x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 4(\underbrace{16 - 16x + 3x^2}_{0}) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/3 \end{array}$$

$$f''(x) = -64 + 24x$$

$$f''(4) = -64 + 24.4 = -64 + 96 > 0$$

$f''(\frac{4}{3}) = -64 + \cancel{24}^{8} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = -64 + 32 = -32 < 0$ old. dan $x = 4/3$ yerel max. nokta.

$$V_{max} = 64 \cdot \frac{4}{3} - 32 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \underset{(9)}{\frac{256}{3}} - 32 \cdot \underset{(3)}{\frac{16}{9}} + 4 \cdot \frac{64}{27} = \frac{9.256 - 32.48 + 4.64}{27}$$
$$= \frac{1024}{27}$$

④ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ eğrisinin,

a) Tanım kümesini bulunuz.

b) Asimptotlarını bulunuz.

c) Eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

d) Ekstramumlarını bulunuz. Bükeyliğini inceleyiniz.

e) İşaret tablosunu oluşturunuz.

f) Grafiğini çiziniz.

Çözüm a) $T.K = \mathbb{R}$ $\quad$ b) Düşey asimptot yok. (Payda sıfır olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ yok)

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ olduğundan $y=0$ yatay asimptot.

Payın derecesi paydadan küçük old. dan eğik-eğri asimptot yok

c) $x=0$ için $y=0$. $y=0$ için $x=0$. Eksenleri kestiği nokta sadece $(0,0)$dır.

d) $f'(x) = \dfrac{1.(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=0$ dan $x=\mp 1$ olur. → kritik noktalar.

$$f''(x) = \frac{-2x.(x^2+1)^2 - (1-x^2).2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} = \frac{\cancel{(x^2+1)}\left(-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)\right)}{\cancel{(x^2+1)^4}\ (x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow 2x(x^2-3)=0$$

$x_1=0$
$x_2=\sqrt{3}$
$x_3=-\sqrt{3}$

$f''(1) = \dfrac{2-6}{(1+1)^3} = \dfrac{-4}{8} = -1/2 < 0$ old. dan $x=1$ noktası yerel max. nokta.

$f''(-1) = \dfrac{2.(-1)+6}{(1+1)^3} = \dfrac{-2+6}{8} = 1/2 > 0$ " $x=-1$ " " min nokta.

$f''(x)>0$ olan yerlerde fonk. yukarı bükey
$f''(x)<0$ " " " aşağı bükey.

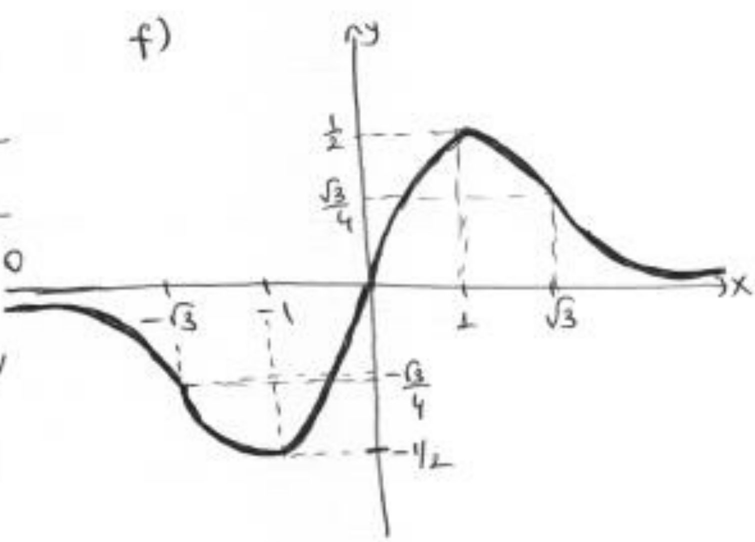
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

yukarı bükey   yukarı bükey
aşağı bükey.

e)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↘	$-\sqrt{3}/4$	↘	$-1/2$	↗	0	↗	$1/2$	↘	$\sqrt{3}/4$	↘	0

f)



Örnek. $f(x)=2x^{\frac{5}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}$ ise f nin artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz. Varsa ekstramumlarını bulunuz.

Çözüm. $f'(x)=2\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}+5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot x^{-1/3}(x+1)=\frac{10}{3}\cdot\frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$ olup

f fonk. $x=0$ da türevlenemez. Türevin kökü ise -1 dir.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$+$	
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	tanımsız 0	$\nearrow$	

Dolayısıyla $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ da artan, $(-1,0)$ da azalandır. $x=-1$ noktası yerel maksimum noktası, $x=0$ noktası da yerel minimum noktasıdır.

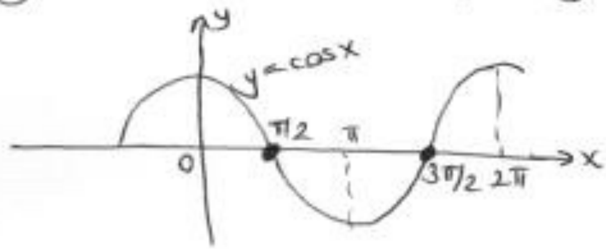
3 ve 0 değerleri ise, sırasıyla yerel maksimum ve yerel minimum değerleridir.

Örnek. $f(x)=(\sin x-\cos x)^2$ nin $0\leq x\leq \pi$ de artan ve azalan olduğu aralıkları ve ekstremum noktalarını bulunuz. Ayrıca bükeylik durumunu inceleyiniz ve varsa büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm. $f'(x)=2.(\sin x-\cos x).(+\cos x+\sin x)=2\underbrace{(\sin^2x-\cos^2x)}_{-\cos 2x}=-2\cos 2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow -2\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=0$; $0\leq x\leq\pi$ ise $0\leq 2x\leq 2\pi$

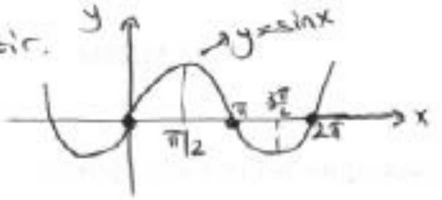
olur. $2x=t$ denirse, $\cos t=0$ olacak şekildeki $t\in[0,2\pi]$ ler aranıyor demektir. Kosinüs fonksiyonunun grafiğine bakıldığında, t nin alabileceği değerlerin $t=\frac{\pi}{2}$ ve $t=\frac{3\pi}{2}$ olduğu görülür. Böylece $x=\frac{\pi}{4}$ ve $x=\frac{3\pi}{4}$ noktalarında $f'(x)=0$ dır.



$f''(x) = -2.(-\sin 2x).2 = 4.\sin 2x$ olup $f''(x)=0$ dan $\sin 2x = 0$ 2

olur. $2x = t$ denirse, $\sin t = 0$ olacak şekildeki $t \in [0, 2\pi]$ ler aranıyor

demektir.



Sinüs fonksiyonunun grafiğine bakılırsa, t nin alabileceği değerlerin $t=0$, $t=\pi$ ve $t=2\pi$ olduğu görülür.

Böylece $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ ve $x=\pi$ noktalarında 2. türev 0 dır.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
y'		−	0		+		0	−	
y''			+		0		−		
y		↘	0 (yerel min değeri)	↗		↗	2 (yerel max değeri)	↘	

$x = \frac{\pi}{4}$ de yerel minimum, $x = 3\pi/4$ de yerel maksimum vardır.

Tabloya göre $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ de azalan, $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ de artandır.

$(0, \pi/2)$ de yukarı bükey, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ de aşağı bükeydir. $x = \frac{\pi}{2}$ noktası da büküm noktasıdır.

NOT. Yukarıdaki soruda işaret tablosu yaparken, en sağdaki "−" işaretlerinin nasıl geldiğine dikkat ediniz! $(3\pi/4, \pi/4)$ aralığında $f'(x) = -2.\cos 2x$ negatiftir. Buna sadece "−2" katsayısına bakarak karar vermedik. $\cos 2x$ bu aralıkta pozitif olduğu için $-2.\cos 2x < 0$ oldu. Benzer şekilde $y'' = 4.\sin 2x$ ifadesinde, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığında $\sin 2x < 0$ olduğu için, işaretini "−" yaptık.

Problemler

① $f(x) = \frac{16}{4+x^2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları ve f nin ekstremum noktalarını bulunuz.

② $f(x) = \sqrt{2+x^2} - \sqrt{1+x^2}$ nin artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

(L'HOSPITAL)

Örnek. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^4}{3x^2} = 5/3$

Örnek. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x = ?$ $(0.\infty)$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right).\tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-(1+\cot^2 x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Örnek. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = ?$ $(\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x+1}{(x-1).\ln x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1).\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

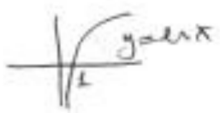
(L'Hospital ile Üstel Belirsizlikler) $(1^{\infty}, 0^0, \infty^0)$

Örnek. $\lim\limits_{x\to \infty} (x+e^{3x})^{\frac{1}{x}} = ?$ (∞^0)

$k = \lim\limits_{x\to\infty} (x+e^{3x})^{1/x}$ dersek, $\ln k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}.\ln(x+e^{3x}) = (0.\infty)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^{3x})}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+e^{3x}}.(1+3.e^{3x})}{1} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{9.e^{3x}}{1+3.e^{3x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9.\cancel{\beta}.e^{3x}}{3.\cancel{\beta}.e^{3x}} = 3$ olur. $\ln k = 3$ old. dan $k = e^3$ olur. Böylece limitin değeri e^3 tür.



Örnek. $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{(x-2)} = ?$

Çözüm. 0^0 belirsizliği mevcut. $k=\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{(x-2)} \Rightarrow \ln k = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-2).\ln(x-2)$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x-2}} \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+} -(x-2) = 0$$

$\ln k = 0 \Rightarrow k = e^0 = 1$

Örnek. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x = ?$

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x \Rightarrow \ln k = \lim_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{c}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{c}{x}}\cdot\left(-\frac{\cancel{c}}{\cancel{x^2}}\right)}{\frac{-\cancel{1}}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{1+\frac{c}{x}} = c \quad \text{Dolayısıyla } k = e^c \text{ yani}$$

limitin değeri e^c dir.

EKSTRAMUM PROBLEMLERİ

1) Toplamları 100 den iki sayının çarpımlarının maksimum olması için bu sayılar ne olmalıdır?

Çözüm. Sayılar x ve y olsun. $x+y=100$ dür. $x.y$ nin max. olmasını istiyoruz. Yani $x.(100-x)$ nin max. olması isteniyor.

$$f(x) = x(100-x) \Rightarrow f'(x) = 100 - x + x.(-1) = 100-2x = 0 \quad x=50.$$

$f''(x) = -2<0$ olup $f''(50)<0$ olduğundan $x=50$ noktası max. nokta.

Dolayısıyla aranan sayılar $x=y=50$ dir.

Örnek. (0,2) noktası, $x^2-y^2=7$ eğrisi üzerinde hangi nokta veya noktalara en yakın uzaklıktadır?

Çözüm. (x,y) noktası, $x^2-y^2=7$ eğrisi üzerinde (0,2) noktasına en yakın uzaklıkta olan nokta olsun. Bu uzaklığa d dersek, d nin en kısa olması, d^2 nin en kısa olmasını gerektirir. d^2 en kısa ise, d de en kısadır. $d=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$

$$d^2=x^2+(y-2)^2=7+y^2+(y-2)^2=\underbrace{y^2+7+(y-2)^2}_{f(y)}$$ nin (minimum değerini verecek olan noktalar) soruluyor.

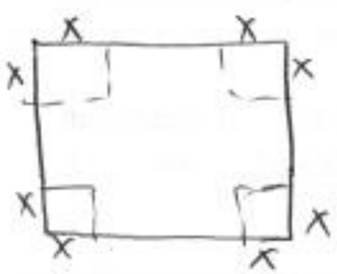
$$f'(y)=2y+2(y-2)=4y-4=0 \Rightarrow y=1.$$

$f''(y)=4$ olup $f''(1)=4>0$ old. dan $y=1$ de minimum var.

$x^2=y^2+7 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\mp\sqrt{8}$ yani aranan noktalar $(-\sqrt{8},1)$ ve $(\sqrt{8},1)$ dir. En yakın uzaklık $\sqrt{f(1)}=\sqrt{1+7+1}=3$ tür.

Örnek. Bir kenarı 30 cm olan bir kare biçimindeki bir kartonun köşelerinden aynı büyüklükte kareler kesilip atılarak üstü açık dikdörtgenler prizması biçiminde bir kutu yapılacaktır. Bu kutunun hacminin max. olması için kesilen parçaların uzunlukları ne olmalıdır?

Çözüm.



Kesilen parçanın uzunluğu x olsun $(0<x<30)$

Buna göre prizmanın hacmi

$$f(x)=(30-2x).(30-2x).x=900x-120x^2+4x^3$$

olur. $f'(x)=900-240x+12x^2=0 \Rightarrow x_1=15$, $x_2=5$

$$f''(x)=-240+24x$$

$f''(15)=-240+24.15>0$ ve $f''(5)=-240+120=-120<0$

olduğundan $x=5$ için maksimum vardır. Aranan max. hacimli kutunun kenarından 5cm kesilmeli ve kutunun hacmi $900.5-120.5^2+4.5^3=2000$ cm^3 olmalıdır.

Diferansiyel. $y=f(x)$ ve $y'=f'(x)$ fonksiyonları sürekli olsun. x bağımsız değişkenine pozitif olması gerekmeyen bir Δx artması ilave edilsin. Bu durumda y bağımlı değişkeninde ortaya çıkan artma Δy olur. Buradan,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\frac{f(\Delta x+x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=:\eta$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\eta$$

olur. Bu ifadeden $\Delta x\to 0$ için $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x)$ olduğundan $\eta\to 0$ olur. Öte yandan,

$\Delta y=f'(x).\Delta x+\eta\Delta x$ yazılabilir. Buradaki $f'(x)\Delta x$ ifadesine y nin diferansiyeli denir. $\Delta x=dx$ yazılarak bu diferansiyel $dy=f'(x)dx$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $\Delta y-dy=f'(x)\Delta x+\eta\Delta x-f'(x)\Delta x=\eta\Delta x$ olup, Δx in ve buna bağlı olarak η nın yeterince küçük olması durumunda $\Delta y-dy\cong 0$ yani $\Delta y\cong dy$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ dir.

Örnek. $u=\ln(x^2+x+2)$ ise $du=?$

Çözüm. $du=u'(x)dx=\frac{1}{x^2+x+2}.(2x+1)\,dx$

Örnek. $t=\cos u$ ise $dt=?$

$dt=-\sin u\,du$.

<u>Örnek</u>. $y=\sin(\cos x)$ ise $dy=?$

$y=\sin(\cos x) \Rightarrow y'=\cos(\cos x).(-\sin x) \Rightarrow dy=-\sin x.\cos(\cos x)dx$

<u>Örnek</u> Bir ~~kenarın~~ karenin alanı $9\ br^2$ den, $9{,}1\ br^2$ ye çıkarsa, bir kenarın yaklaşık olarak ne kadar değişeceğini diferansiyel yardımıyla bulunuz.

<u>Çözüm</u>. Karenin bir kenarının uzunluğu x olsun. Alan $y=x^2$ olur.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cong f'(x) \Rightarrow \Delta y \cong f'(x)\Delta x \Rightarrow 0.1 = 2x.\Delta x$$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{0.1}{2x}$ olup, $y=x^2=9$ ifadesinden x in 3 old. biliniyor. Yani

$\Delta x = \frac{0.1}{6} \cong 0.016$ olur.

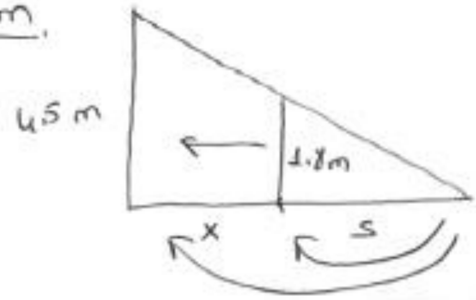
<u>Örnek</u> $\sqrt{70}$ sayısının yaklaşık değerini diferansiyel yardımıyla hesaplayınız.

$$f(x+\Delta x) \cong f(x)+f'(x).\Delta x, \quad x=64, \quad \Delta x=6, \quad f(x)=\sqrt{x}$$

$$\sqrt{70} \cong \sqrt{64}+\frac{1}{2\sqrt{64}}.6 \cong 8+\frac{3}{8}=\frac{67}{8}$$

Örnek. 1.8 m boyundaki bir adam, 4.5 m yükseklikte asılan bir sokak lambasından 2 m/sn hızla uzaklaşıyor. Adam lambadan (yerdeki izdüşümü olan noktadan) 9 m uzakta iken gölgesinin uzunluğundaki artma oranını bulunuz.

Çözüm.



Adam lambadan x m, gölgesi de s m uzaklıkta ise,

$$\frac{\cancel{1.8}^{\,2}}{\cancel{4.5}_{\,5}} = \frac{s}{s+x} \Rightarrow 5s = 2s + 2x$$

$3s = 2x$ dır.

$s = \frac{2}{3}x$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{2 olarak verilmiş}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 2\frac{ds}{dx} = 2 \cdot \frac{2}{3} = 4/3 \cong 1.3 \text{ m/sn bulunur.}$$

Buradan anlaşılacağı üzere, gölgenin uzunluğundaki artma oranı adamın bulunduğu yere bağlı değildir.

Örnek. $\sin 46°$ nin yaklaşık değerini diferansiyel yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm. $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$x = 45° = \frac{\pi}{4}$ radyan

$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$ radyan

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x = \sin 45 + \cos 45 . \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{3{,}14}{180} \cong 0.720$$

Örnek arctan 1.05 in yaklaşık değerini diferansiyel yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$x = 1$

$\Delta x = 0.05 \qquad f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$

$$\cong \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} + \frac{1}{1+1^2} . 0.05 = \frac{3{,}14}{4} + \frac{0.05}{2} = \frac{3{,}14 + 0{,}1}{4} \cong \frac{3.24}{4} \cong 0.81$$

Örnek. $x^2-(m+2)x+2-m=0$ denkleminde köklerin karelerinin toplamının max. olması için m ne olmalıdır?

Çözüm. Kökler x_1 ve x_2 olsun. $x_1^2+x_2^2$ nin maksimum olması isteniyor.

$\boxed{\text{Kökler toplamı } m+2 \text{ dir. Kökler çarpımı } 2-m \text{ dir.}}$

$x_1+x_2=m+2$. $\quad x_1^2+x_2^2=x_1^2+(m+2-x_1)^2$

$x_1 \cdot x_2 = 2-m$

$$f(x_1)=x_1^2+(m+2-x_1)^2 \Rightarrow f'(x_1)=2x_1+2(m+2-x_1).(-1)$$

$$\Rightarrow f'(x_1)=2x_1-2m-4+2x_1$$

$$=4x_1-2m-4$$

$$f'(x_1)=0 \Rightarrow 4x_1=2m+4 \Rightarrow 2x_1=m+2 \Rightarrow x_1=\frac{m+2}{2} \Rightarrow x_2=\frac{m+2}{2}$$

Ayrıca

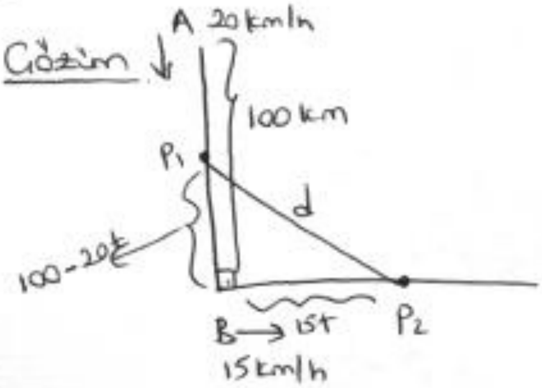
$$x_2=\frac{2-m}{x_1}=\frac{2-m}{\frac{m+2}{2}}=\frac{(2-m).2}{2+m} \text{ olduğundan } \frac{m+2}{2}=\frac{4-2m}{2+m} \Rightarrow$$

$$m^2+4m+4=8-4m \Rightarrow m^2+8m-4=0 \Rightarrow \Delta=64-4.1.(-4)=68$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-8\mp\sqrt{68}}{2} \text{ olmalıdır.}$$

Örnek. Bir gemi 20 km/h hızla güneye doğru, ikinci bir gemi de 15 km/h hızla güneydoğuya doğru seyrediyor. Belirli bir anda ikinci gemi, birinci geminin 100 km güneyindedir. Kaç saat sonra gemiler birbirine en yakın olur?

Çözüm.



Birinci gemi A, ikinci gemi B olsun. Başlangıçta $t=0$ alalım. t zaman sonra birinci geminin yerini P_1, ikinci geminin yerini de P_2 ile gösterelim. d nin en kısa olması isteniyor.

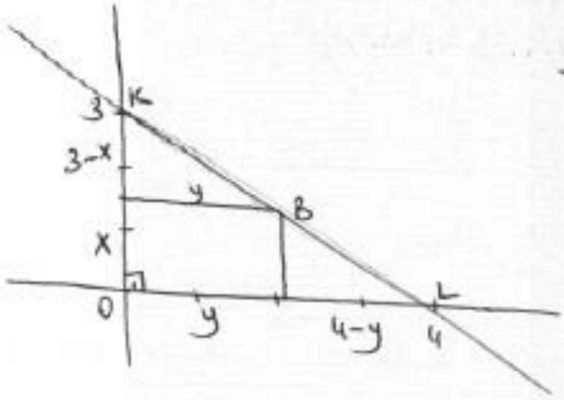
$$d=\sqrt{(100-20t)^2+(15t)^2} \qquad f(t)=(100-20t)^2+(15t)^2$$

$$f'(t)=2(100-20t)(-20)+2.15t.15$$

$$=2(-2000+400t+225t)=0 \Rightarrow t=\frac{16}{5} \text{ bulunur.}$$

Soru Denklemi $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ olan doğru, koordinat eksenlerini K(0,3) ve L(4,0) noktalarında kesiyor. B ∈ [KL] olmak üzere, (OKL) üçgensel bölgesinin içine iki köşesi orijin ve B noktası üzerinde olan bir dikdörtgen çiziliyor. Bu dikdörtgenin alanının maksimum (en büyük) değeri?

Çözüm



x.y nin max. olması isteniyor

$\frac{y}{4}=\frac{3-x}{3} \Rightarrow 3y=12-4x$

$\Rightarrow 3y+4x=12$

(zaten doğrunun denkleminden de görülüyor.)

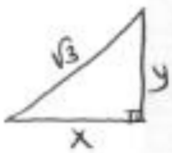
$f(x)=x.\left(\frac{12-4x}{3}\right)=\frac{1}{3}(12x-4x^2)$

$f'(x)=\frac{1}{3}.(12-8x) \Rightarrow f'(x)=0$ dan $\cancel{12}_{3}=\cancel{8}_{2}x \Rightarrow$ $x=3/2$ olur.

$x=3/2$ ise $3y+\cancel{4}^{2}.3/\cancel{2}=12 \Rightarrow 3y=12-6=6 \Rightarrow y=2.$

Alan $=x.y=\frac{3}{2}.2=3.$

Soru Hipotenüsü $\sqrt{3}$ br olan bir dik üçgen, dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel koninin hacmi en fazla kaç br^3 tür?



$V=\frac{\pi.x^2.h}{3}=\frac{\pi x^2.\sqrt{3-x^2}}{3}:=f(x)$

$x^2+y^2=3.$

$f'(x)=\frac{\pi}{3}.\left(2x.\sqrt{3-x^2}+x^2.\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3-x^2}}.(-\cancel{2}x)\right)$

$=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{3-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{2x(3-x^2)-x^3}{\sqrt{3-x^2}}\right)$

$f'(x)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{6x-2x^3-x^3}{\sqrt{3-x^2}}\right) \Rightarrow f'(x)=0$ dan $6x-3x^3=0$ yani $3x(2-x^2)=0$

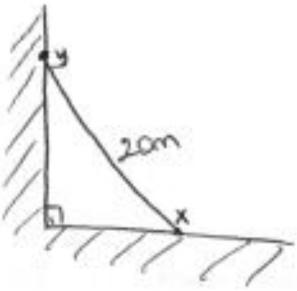
buradan $\cancel{x=0}$ veya $x=\sqrt{2}$ olur. $x=\sqrt{2} \Rightarrow 2+y^2=3 \Rightarrow y=1$

Olamaz (yarıçap 0 olamaz)

$V=\frac{\pi.(\sqrt{2})^2.1}{3}=\frac{2}{3}\pi\ br^3$ olur.

Örnek. Bir binanın duvarına 20m uzunluğunda bir direğin yaslandığını farzedelim. Direğin alt ucu binadan 2 m/sn hızla uzaklaştırılıyor. Direğin üst ucu yerden 12m yukarıda iken, duvardan aşağı doğru hangi hızla kaydığını hesaplayınız.

Çözüm.



Direğin üst ucunun binaya değdiği noktayı y ile, alt ucunun yere değdiği noktayı x ile gösterelim. x deki değişme oranı 2m/sn olarak verildiğinden $\frac{dx}{dt} = 2$ dir. Amacımız, $y = 12m$ olduğu andaki $\frac{dy}{dt}$ yi bulmaktır.

$x^2 + y^2 = 400 \Rightarrow 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$

$y = 12$ iken $x = 16$ dır. O halde $\frac{dy}{dt} = -\frac{16}{12} \cdot 2 = -\frac{8}{3}$ m/sn olur. Yani aşağı doğru 8/3 m/sn hızla kayar.

Örnek. Düzgün bir silindir olan bir su tankı $4 cm^3/s$ hızla dolmaktadır. Su seviyesinin yükselme hızını bulunuz.

Çözüm. Belli bir t zamanında suyun yüksekliği h olsun. Bizden istenen $\frac{dh}{dt}$ oranıdır. Silindirin dolu kısmının hacmi $V = \pi r^2 h$ dir. Zaman değiştiğinde h ve buna bağlı olarak V de değişeceğinden, $V(t) = V(h(t))$ yazılabilir.

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}$ olup, $V = \pi r^2 h$ old. dan $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$ ifadesi kullanılırsa,

$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$ olur. V nin zamana göre değişme oranı $4cm^3/s$ olarak verildiğinden, $4 = \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$ yani $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi r^2}$ cm/sn olur.