İnşaat Müh. MATEMATİK-I dersi Final Sınav Soruları 12.01.2016

S.1) $f(x)=\sqrt{30+x-x^2}+\dfrac{1}{\log\dfrac{3x}{x+4}}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

S.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}{Arc\tan 2x^2\cdot\ln(1-x)}$ limitini hesaplayınız.

S.3) **a)** $\sqrt[3]{28}$ in yaklaşık bir değerini $\Delta y\approx dy$ yaklaşık hesaplama formülü ile bulunuz.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ limitini hesaplayınız. hesaplayınız.

S.4) $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun türevini türevin tanımından hareketle (limit yolundan) bulunuz.

S.5) Alt iki köşesi Ox-ekseni üzerinde ve üst iki köşesi de $y=12-x^2$ parabolü üzerinde olan dikdörtgenlerden, en büyük alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulunuz. (Birinci mertebe türevin işareti incelenmelidir, veya ikinci meretebeden türevin işaretine bakılmalıdır).

S.6) $f(x)=x\cos x$ fonksiyonunun n-inci mertebeden $f^{(n)}(x)$ türevini bulunuz. $f^{(2n)}(0)$ ve $f^{(2n+1)}(0)$ türev değerini hesaplayınız.

S.7) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ fonksiyonunun artan-azalan olduğu aralıkları, konkav-konveks olduğu aralıkları ve (varsa) ekstremum ve büküm noktalarını bulunuz.

NOT : Herhangi **altı soruyu** çözünüz. Hesap makinası kullanılmayacaktır. Cevap kağıdının sayfalarını ilk sayfanın arkasından itibaren 1 den 7 ye kadar numaralandırınız. Her soruyu o soruya ait sayfaya çözünüz. Çözmeyeceğiniz bir soruya ait sayfayı taşan sorularınız olursa kullanabilirsiniz. Kağıdınızı teslim ederken çözmediğiniz soru hangisi ise ilk sayfadaki not kutucuklarından o soruya ait not kutucuğuna bir çarpı işareti atarak belirtiniz. Süre 75 dakikadır.

İnşaat / MAT-I / Final (12.01.2016) Çözümleri

① $f(x)=\sqrt{30+x-x^2}+\dfrac{1}{\log\frac{3x}{x+4}}$ fo.nunun en geniş T. A. = ?

$30+x-x^2 \geqslant 0$ olmalı $\Rightarrow (5+x)(6-x)\geqslant 0 \Rightarrow x_1=-5\ ,\ x_2=6$ olup

x		-5		6	
$30+x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$A_1=[-5,6]$ dır.

$-5\leq x\leq 6$

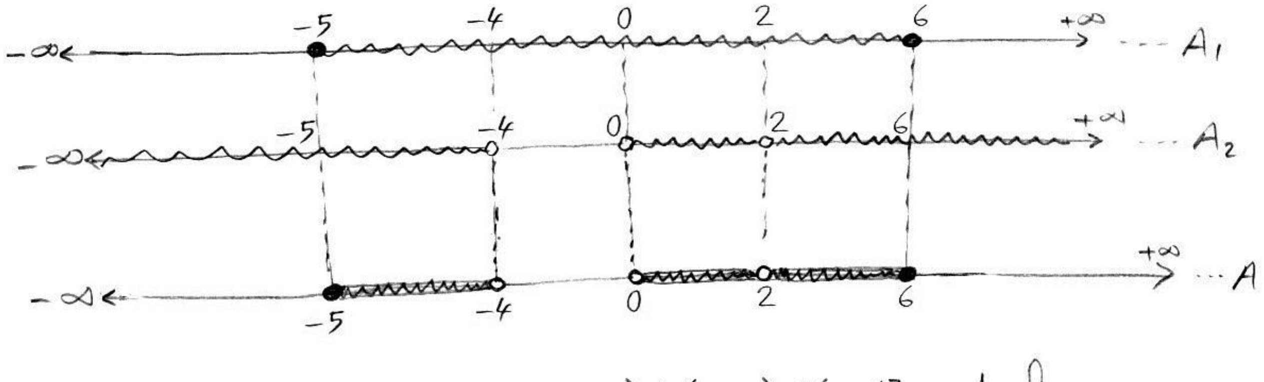
$\dfrac{3x}{x+4}>0$ olmalı ve $\dfrac{3x}{x+4}\neq 1$ olmalı. $3x=0 \Rightarrow x_3=0\ ,\ x_4=-4$ ve

$\dfrac{3x}{x+4}\neq 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{x+4}=1 \Rightarrow 3x=x+4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x_5=2$ için payda sıfır oluyor.

	$-\infty$		-4		0		2		$+\infty$
$\frac{3x}{x+4}>0$ ve $\frac{3x}{x+4}\neq 1$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

$-\infty<x<-4 \qquad 0<x<2 \qquad 2<x<+\infty$

$A_2=(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$



$A=A_1\cap A_2=[-5,-4)\cup(0,2)\cup(2,6]$ bulunur.

İnşaat/MAT-I/Final (12.01.2016) Çözümleri

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}{\operatorname{Arctan}2x^2\cdot\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot(3x)^2\cdot\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot x}{\frac{\operatorname{Arctan}2x^2}{2x^2}\cdot 2x^2\cdot\frac{\ln(1-x)}{-x}\cdot(-x)}=$$

$$=\frac{\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}_{=1\text{ (öz. lim.)}}\Big)^2\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x}}_{=\frac{1}{2}\text{ (öz. lim.)}}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan}2x^2}{2x^2}}_{=1\text{ (öz. lim.)}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}}_{=1\text{ (öz. lim.)}}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9\cancel{x^2}\cdot\cancel{x}}{2\cancel{x^2}\cdot(-\cancel{x})}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot 1}\cdot\frac{9\cdot 1}{2\cdot(-1)}=\underline{-\frac{9}{4}}$$

dür.

---

③ a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\left(x^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$

$\Delta y\approx dy \iff f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x$, hatta x yerine x_0

yazarak $\quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\sqrt[3]{x_0+\Delta x}-\sqrt[3]{x_0}\approx\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot\Delta x$ olup Burada

$x=x_0=27$ ve $\Delta x=1$ yerlerine yazılırsa

$\sqrt[3]{27+1}-\sqrt[3]{27}\approx\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{27^2}}\cdot 1\Rightarrow\sqrt[3]{28}-3\approx\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{27^2}}$

$\sqrt[3]{28}\approx 3+\frac{1}{3\cdot 9}=\frac{81+1}{27}=\frac{82}{27}\approx 3,\overline{037}$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 82 & 27 \\ \hline -81 & 3{,}037037037\ldots \\ 100 & \\ -81 & \\ 190 & \\ -189 & \\ 1 & \end{array}$$

---

③ b) $\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}=?$ $\quad x_0=0$ civarında $3x-1<0$ ve $3x+1>0$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\overset{(-)}{3x-1}|-|\overset{(+)}{3x+1}|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(3x-1)-(3x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x+\cancel{1}-3x-\cancel{1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-6\cancel{x}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(-6)=\underline{-6}$$ bulunur.

İnşaat / MAT-I / Final (12.01.2016) Çözümleri

④ $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)\cdot\cos x - \cos(x+\Delta x)\cdot \sin x}{[\cos(x+\Delta x)\cdot \cos x]\cdot \Delta x} =$$

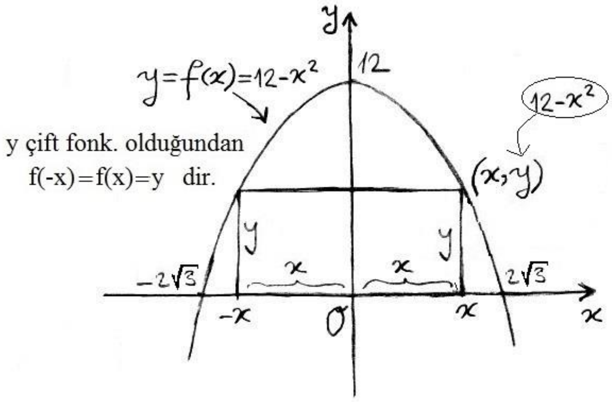
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin[(\cancel{x}+\Delta x)-\cancel{x}]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x \cdot \cos x}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \text{ dır.}$$

---

⑤ $\text{Alan} = 2x\cdot y \Rightarrow \text{Alan} = f(x) = 2x\cdot(12-x^2)$



$f'(x) = 2\cdot(12-x^2) + 2x\cdot(-2x)$

$f'(x) = 2\cdot(12-x^2-2x^2) =$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(12-3x^2)=0$

$6\cdot(4-x^2) = 0 \Rightarrow 6\cdot(2+x)(2-x)=0 \Rightarrow x_1=-2,\ \boxed{x_2=2}$
(anlamsız)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
		↘		↗		↗	max	↘	

Burada x bir uzunluk gösterdiğinden negatif olamaz veya sıfır olamaz. O bakımdan $x_1=-2$ nin anlamsızdır, sadece türevin işaretini incelemekte kullanılır. $x=2$ de max. vardır. Sonuç olarak bir kenarı $2x=4$ br, diğer kenarı $y=12-2^2=8$ br dir.

İnşaat/MAT-I/Final (12.01.2016) Çözümleri

(6) $f(x) = \underbrace{x}_{v} . \underbrace{\cos x}_{u} \Rightarrow v = x,\ v' = 1,\ v'' = v''' = \dots = v^{(n)} = 0,\ n \geq 2$ için

$u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}),\ u'' = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$

$u''' = -\sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),\ \dots,\ u^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ her $n \in \mathbb{N}$ için

Leibniz formülüne göre bu problem için

$(u.v)^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} . v^{(0)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)} . v' + 0 + 0 + \dots + 0$ dan

$f^{(n)}(x) = (x . \cos x)^{(n)} = 1. \underbrace{x}_{v^{(0)}} . \underbrace{\cos(x + n . \frac{\pi}{2})}_{u^{(n)}} + n . \underbrace{1}_{v'} . \underbrace{\cos(x + (n-1)\frac{\pi}{2})}_{u^{(n-1)}} + 0$ olup

$\boxed{f^{(n)}(x) = x . \cos(x + n . \frac{\pi}{2}) + n . \cos\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right)},\ \forall n \geq 1$ için.

Bu n. mertebeden türev formülünde n yerine 2n ve x yerine sıfır yazmakla

$f^{(2n)}(0) = 0 . \cos\left(0 + 2n . \frac{\pi}{2}\right) + (2n) . \cos\left(0 + \frac{2n-1}{2}\pi\right)$ den

$f^{(2n)}(0) = 2n . \cos \frac{2n-1}{2}\pi = 2n \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2n\cos\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = 2n . \underbrace{\sin n\pi}_{=0} = 0$

Şimdi de n. mertebeden türev formülünde n yerine 2n+1 ve x=0 yazmakla

$f^{(2n+1)}(0) = 0 . \cos\left(0 + \frac{2n+1}{2}\pi\right) + (2n+1) \cos\left(0 + \frac{\cancel{(2n+1)} - \cancel{1}}{2}\pi\right)$ den

$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1) . \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} = (-1)^n . (2n+1)$, (her $n \in \mathbb{N}$ için) bulunur.

Yani $f'(0) = (-1)^0 . (2.0+1) = 1$, $f''(0) = 2.1. \sin(1.\pi) = 0$, $f'''(0) = (-1)^1 (2.1+1) = -3$,

$f^{iv}(0) = 2.2.\sin(2\pi) = 0$; $f^{v}(0) = f^{(2.2+1)}(0) = (-1)^2 . (2.2+1) = 5$, $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = (-1)^3 . (2.3+1) = -7$

$f^{(8)}(0) = 0$, $f^{(9)}(0) = (-1)^4 . (2.4+1) = 9$, $\dots$ $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n+1)$ dir.

İnşaat / MAT-I / Final (12.01.2016) Çözümleri

(7) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ fo.nu için

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+\cancel{x}+\cancel{1}-x^2-\cancel{x}-\cancel{1}}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

olup $\boxed{f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}}$ dır. Bunun tekrar türevi alınırsa

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1)-2(x^2+2x)}{(x+1)^3} \text{ den}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{2x}+\cancel{2x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}}{(x+1)^3} \text{ den } \boxed{f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}} \text{ bulunur.}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=-2$ dir. Ayrıca paydayı sıfır yapan değer $(x+1)^2=0 \Rightarrow x_3=-1$ (çift kat kök) için payda sıfır, yani $f'(x)$ türevi tanımsızdır. Buna göre $f'(x)$ türevinin işareti

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	

Yani $(-\infty,-2)$ ve $(0,+\infty)$ aralıklarında artan, $(-2,-1)\cup(-1,0)$ da azalan

$x=-2$ de max. var. $x=0$ da minimum var.

Öte yandan $f''(x)=0$ yapan $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ yok. fakat $f''(-1)=$ tanımsız

Yani $x=-1$ $f''(x)$ in paydasının üç kat (tek adette) köküdür.

Türevin işaret tablosu

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
		konkav (tümsek)		konveks (çukur)	

$x=-1$ civarında $f''(x)$ işaret değiştiriyor. Fakat $x=-1$ de fo. tanımsız old. bu nokta B.N. değil

$(-\infty,-1)$ de fo. tümsek, $(-1,\infty)$ da fo. çukurdur.

NOT: Çözümlerde işlem hatası varsa lütfen bildiriniz. (12.01.2016).

İkinci sorunun çözümünde, soruyu yanlış aktardığımızı görüp düzeltilmesini sağlayan İnşaat Mühendisliği Bölümü öğrencimiz **Elif Zeynep KOÇ**'a teşekkür ederiz. (13.01.2016).

Beşinci sorunun çöçzümünde daha önce Alan =x.y olarak alınmış, buna göre çözüm yapılmış, daha sonra Alan =2x.y olarak düzeltilmiştir. Her iki durumda da sorunun çözümünde ve ekstremum incelemesinde fark yoktur. Zira alanın maksimum olduğu değerlerde alanın yarısı da maksimumdur. Ancak soruyu Alan=2x.y olarak ele almak daha uygundur. (16.01.2016).

Yedinci soruda birinci türevin köklerinden birisindeki işaret hatası düzeltilmiş, buna göre türevin işaret tablosu ve artan-azalan olduğu aralıklar yeniden düzenlenmiş, sınav sorularının cevapları buna göre değerlendirilmiştir. (17.01.2016).