Endüstri Lineer Cebir Final Soruları 27.05.2015

S. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = X + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan X matrisini bulunuz.

S.2) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2x+3y-3z&=9 \\ -x+y+2z&=1 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözüm kümesini **artırılmış matris** yöntemiyle bulunuz.

S.3) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2x+3y-3z&=9 \\ -x+y+2z&=1 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözüm kümesini **Cramer yöntemi**yle bulunuz.

S.4) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ determinantının çarpım şeklinde eşitini bulunuz.

S.5) $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A matrisini bulmadan det(A) ve det(EK(A)) yı hesaplayınız.

S.6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini ve bunlara karşılık gelen öz vektörlerini bulunuz. Ayrıca Cayley-Hamilton teoremini bu problem için uygulayınız.

NOT: Herhangi **beş soru**yu çözünüz. Sorular eşit puanlıdır. Süre 70 dakikadır.

End. Lin. Ceb. Final (27.05.2015) Çözümleri (1)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & y+2 \\ z+3 & t-3 \end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x+2z = x-2 \\ 3x+4z = z+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 2z=-2 \Rightarrow \boxed{z=-1} \\ 3x+3z=3 \Rightarrow x-1=1 \\ \Rightarrow \boxed{x=2} \end{matrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} y+2t=y+2 \\ 3y+4t=t-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 2t=2 \Rightarrow \boxed{t=1} \\ 3y+3t=-3 \Rightarrow \boxed{y=-2} \end{matrix}$

olup $\boxed{X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$ dir.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} L_1 \dots & x+y+z=6 \\ L_2 \dots & y-5z=-3 \\ L_3 \dots & 13z=13 \end{matrix}\right\}$ L_3 den $\boxed{z=1}$ olup bunu L_2 de yerine yazmakla $y-5.1=-3$ den $\boxed{y=2}$ olup bulunanları L_1 de yerine yazmakla

$x+2+1=6 \Rightarrow \boxed{x=3}$ dür $(3,2,1)$ sistemin tek çözümüdür. Lin. denk. sisteminin çözüm kümesi de $Ç = \{(3,2,1)\}$.

(3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{matrix} = 6+2+3+3+3-4 = 17-4 = 13$

(Sarrus ile)

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36-3+9-3+\cancel{18}-\cancel{18} = 39$

(yıldız ile)

End. Lin. Cebir Final (27.05.2015) Çözümleri (2)

(3.) soruya devam...

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.8+18+2+9+3-24=50-24=26$$

(Yıldız yöntemiyle

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-9+12-(-18+2+9)=6+7=13$$

(yıldız yöntemiyle)

$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{39}{13}=3$, $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{26}{13}=2$, $z=\frac{13}{13}=1$ olup

(3,2,1) tek çözümdür. Çözüm kümesi ise $Ç=\{(3,2,1)\}$ dir.

(4)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \overset{\text{2.-3.-4. sütunları birinci sütuna ekle}}{=} \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} -S_1+S_2 \\ -S_1+S_3 \\ -S_1+S_4 \end{array} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \overset{\text{1. sütuna göre Laplace açılımı}}{=} (a+3b)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3b)\cdot(a-b)^3$$ bulunur.

End. Lin. Ceb. Final (27.05.2015) Çözümleri (3)

(5) $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \underbrace{\det(I_3)}_{1} \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$\det A = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$ dir. Öte yandan A^{-1} matrisinin determinantı ise ikinci satıra göre Laplace açılımı yapılırsa

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot [2 \cdot 2 - (-1)(-3)] = -2$$

olup

$$\det A = \frac{1}{\det(A^{-1})} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$ dir.

Ayrıca $A \cdot Ek(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$ olup iki yanın determinantı alınırsa

$$\det(A) \cdot \det(Ek(A)) = \begin{vmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{vmatrix}$$ dan

$$\det(A) \cdot \det(Ek(A)) = (\det(A))^3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = (\det(A))^3$$ dan

$$\det(Ek(A)) = \frac{(\det(A))^3}{\det A} = \frac{(-1/2)^3}{-1/2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

bulunur.

End. Lin. Cebir Final (27.05.2015) Çözümleri (4)

(6) $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$; $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+8$

$\lambda^2-6\lambda+8=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=2}, \boxed{\lambda_2=4}$

$\lambda \quad \lambda \qquad -2 \quad -4$

$\lambda_1=2$ için $(A-2I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3-2&1\\1&3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}x+y=0\\x+y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$ olup $y=1$ için $x=-1$

$\lambda_1=2$ öz değerine karşılık $x_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ öz vektörüdür.

$\lambda_2=4$ için $(A-4I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3-4&1\\1&3-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-x+y=0\\x-y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y$ ve özel olarak $y=1$ için $x=1$ dir.

$\lambda_2=4$ öz değerine karşılık $x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ özvektörü bulunur.

Cayley-Hamilton teoremine göre "Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar." Yani bu matris için

$\lambda^2-6\lambda+8=0 \Leftrightarrow A^2-6A+8I=0$ olmalıdır.

$A^2=\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&6\\6&10\end{bmatrix}$ olup

$A^2-6A+8I=\begin{bmatrix}10&6\\6&10\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10-18+8&6-6\\6-6&10-18+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

dır.