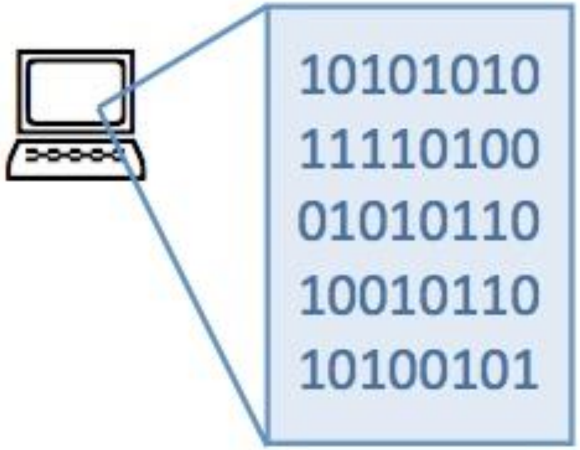
Bilgisayar Mühendisliğine Giriş -5. hafta

Sayı Sistemleri

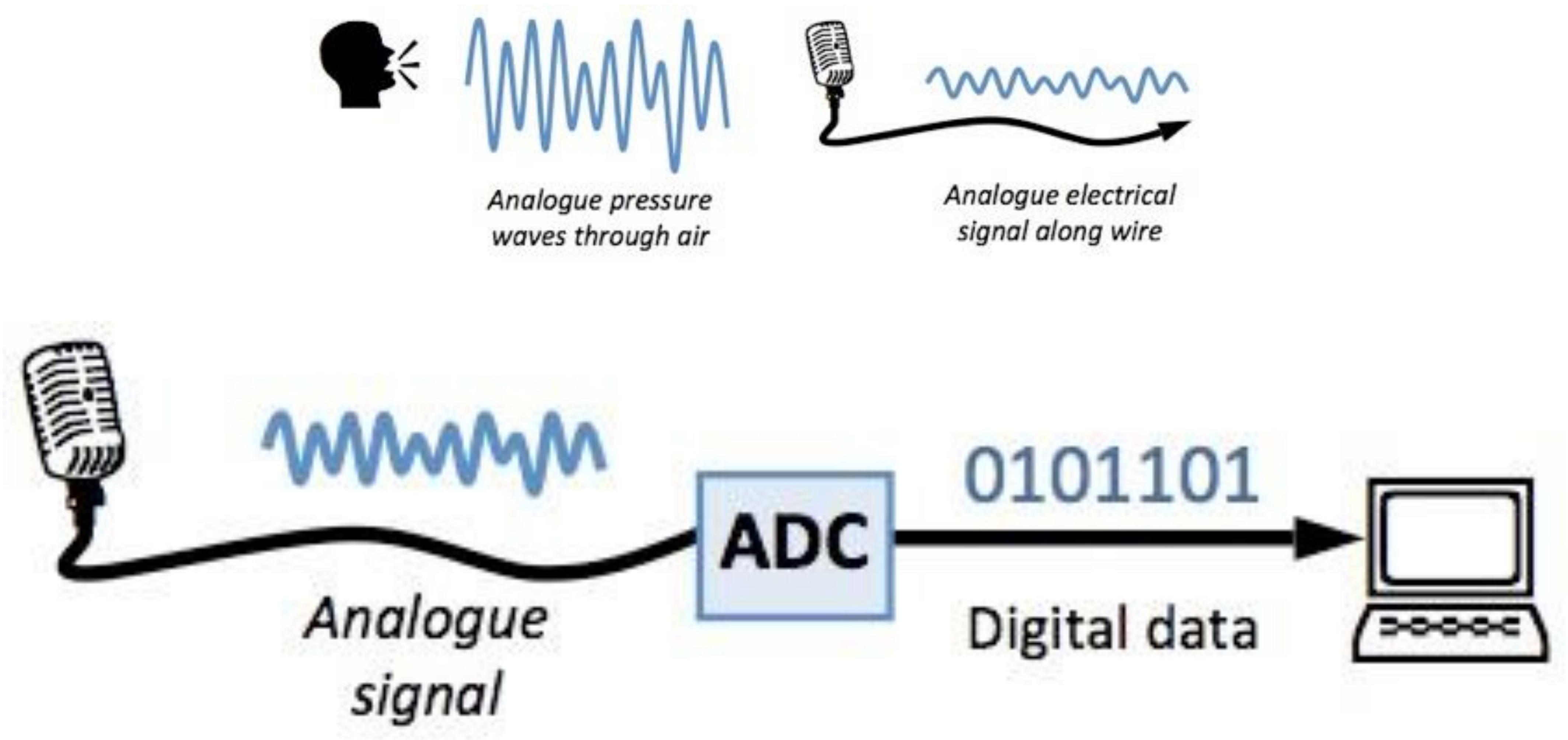
- Onluk, İkilik, Sekizlik ve Onaltılık sistemler
- Dönüşümler
- Tümleyen aritmetiği



Giriş

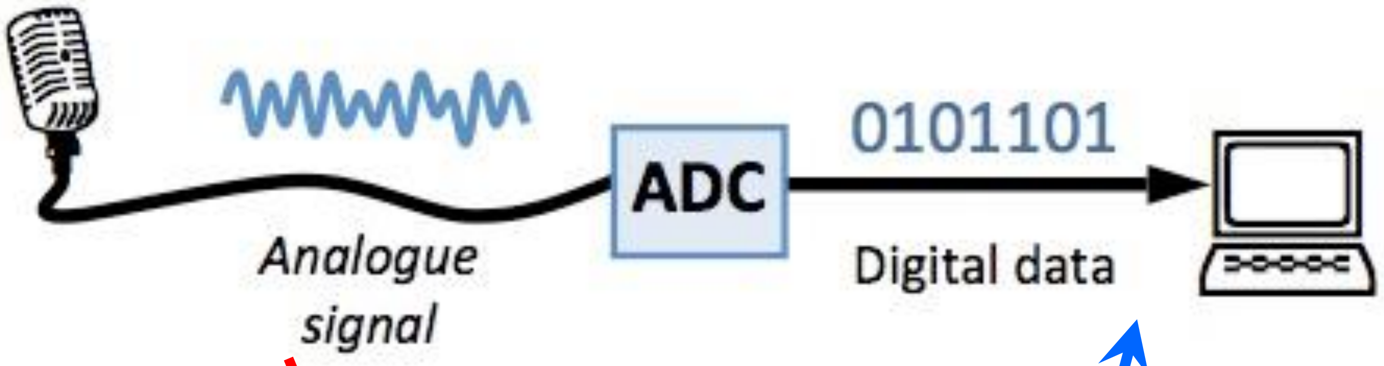
- Bilgisayar dış dünyadan verileri sayılar aracılığı ile kabul eder.
- Günümüz teknolojisinde bu işlem ikilik sayı sistemin ile gerçekleştirilir.
- İkilik sayı sistemindeki sayılarda 0 ve 1 olmak üzere iki farklı değerden oluştuğu için bilgisayar donanımında iki farklı gerilim seviyesi kullanılarak temsil edilir.
- İkilik sayı sisteminin yanında, sekizlik ve onaltılık gibi sayı sistemleri de programlamada kullanılmaktadır.

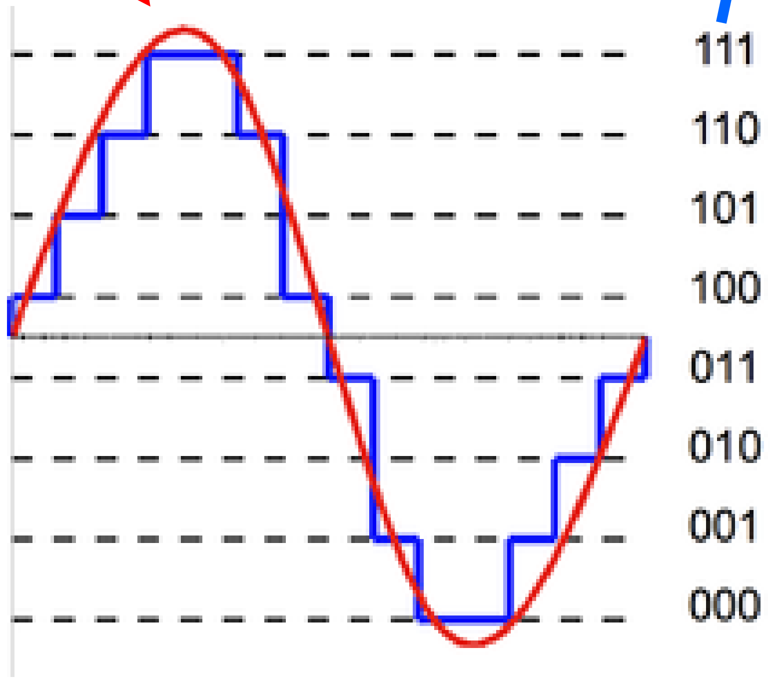
Sayısal verilere örnekler



http://www.igcseict.info/theory/0/anadig/

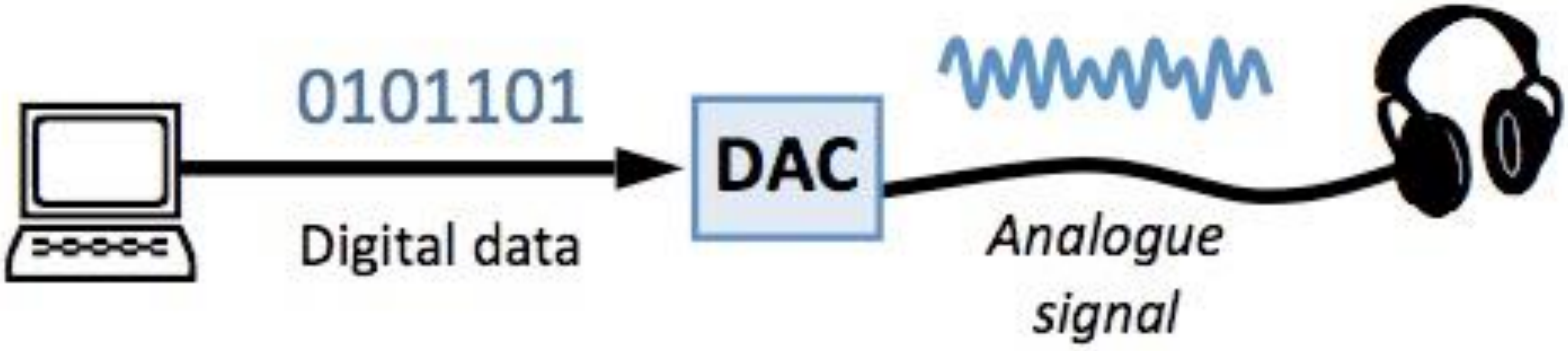
Sayısal verilere örnekler

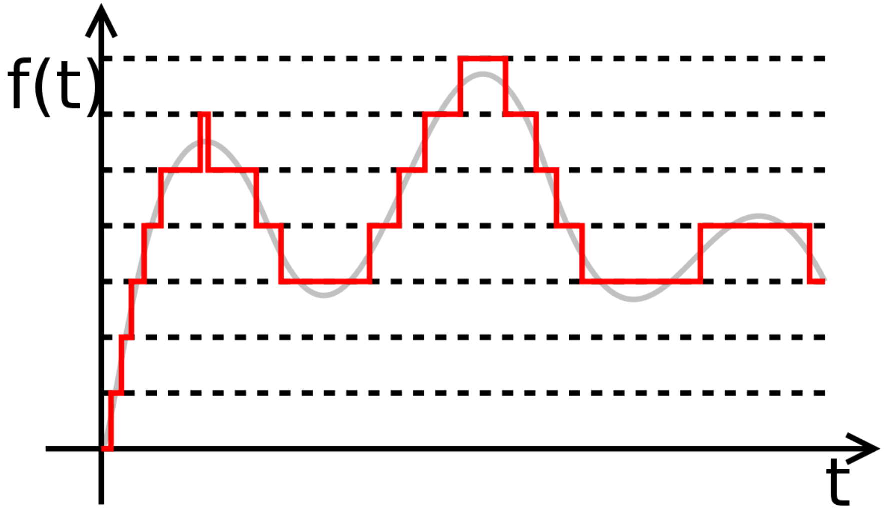




http://www.igcseict.info/theory/0/anadig/

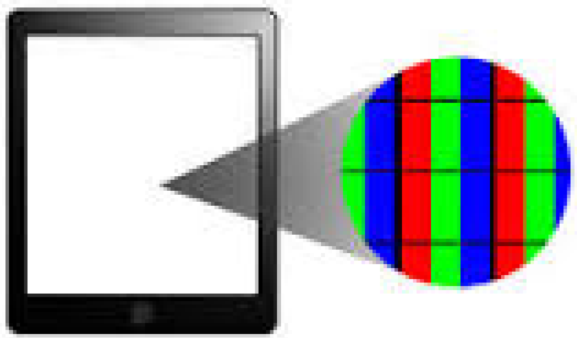
Sayısal verilere örnekler

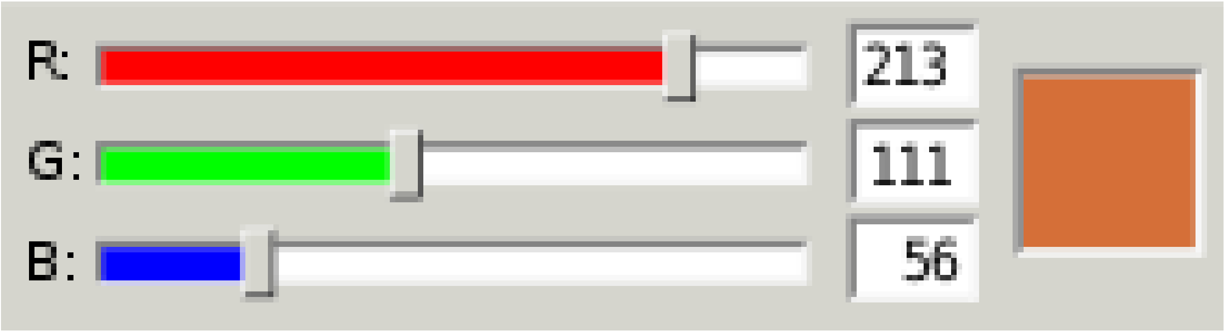




http://www.igcseict.info/theory/0/anadig/

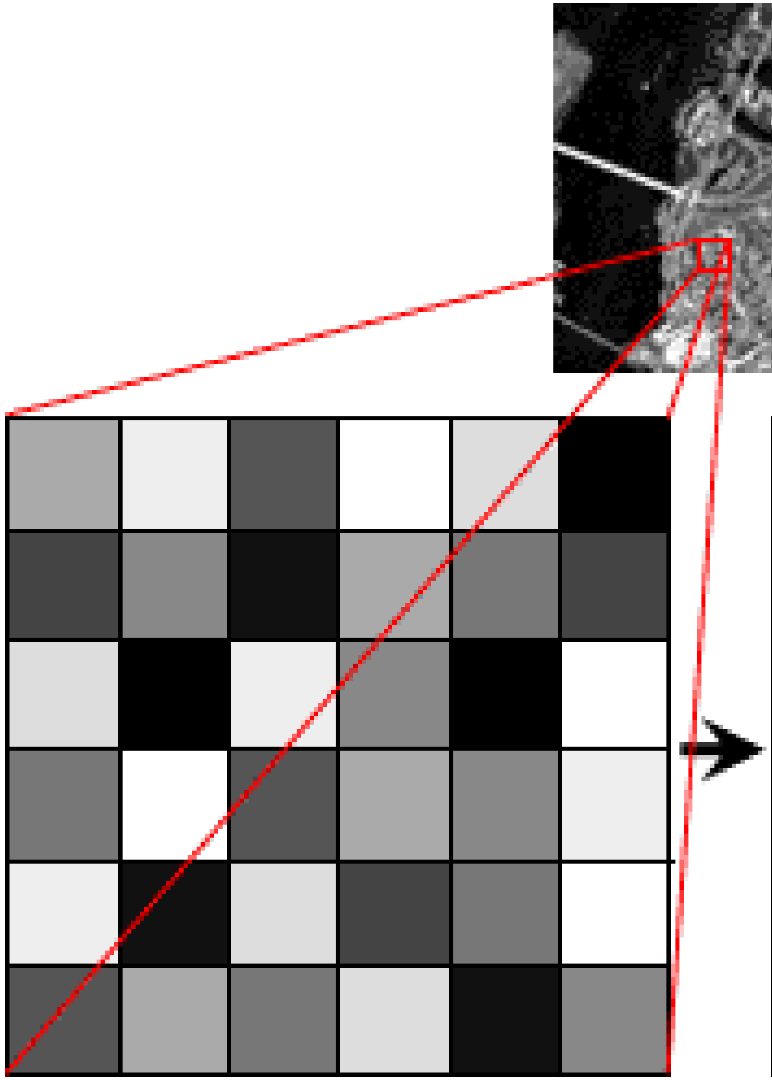
Sayısal verilere örnekler





- Görüntüyü oluşturan pikseller kırmızı, yeşil ve mavi bilşenlerinden oluşur. Genelde her bir bileşen 8 bitlik çözünürlüğe sahiptir. Yani herbir bileşen 0-255 arası toplam 256 değer alır. Dolayısıyla bir pikseli saklamak için 24 bitlik alan gerekir.

Sayısal verilere örnekler



170	238	85	255	221	0
68	136	17	170	119	68
221	0	238	136	0	255
119	255	85	170	136	238
238	17	221	68	119	255
85	170	119	221	17	136

Sayı sistemleri

Genel olarak bir S sayı sisteminin ifadesi:

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_2 R^2 + d_1 R^1 + d_0 R^0$$

Burada rakamlar ***d***, taban ***R*** ile gösterilir.

Virgüllü sayı:

$$S = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_2 R^2 + d_1 R^1 + d_0 R^0 ,\ \ d_1 R^{-1} + d_2{}^{-2} + d_3 R^{-3} + \ldots\ldots\ldots$$

Sayı sistemleri

Sık kullanılan bazı sayı sistemleri:

Onluk (Decimal) sistem

Genel ifade: **digit: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9**

$$Decimal = d_n 10^n + \ldots + d_3 10^3 + d_2 10^2 + d_1 10^1 + d_0 10^0,$$

$$d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2} + d_{-2} 10^{-3} + \ldots$$

Onluk (Decimal) sistem

Örnek: 2017,2018

$$2017{,}2018 = 2\times10^{3} + 0\times10^{2} + 1\times10^{1} + 7\times10^{0}$$

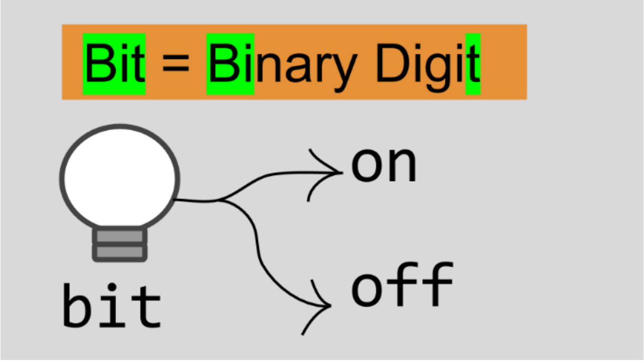
$$+ 2\times10^{-1} + 0\times10^{-2} + 1\times10^{-3} + 8\times10^{-4}$$

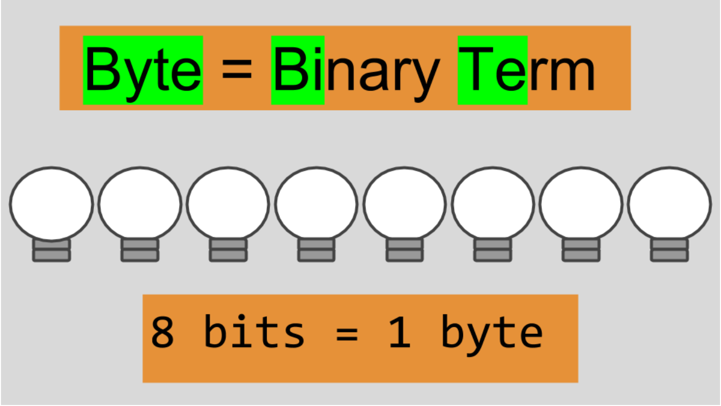
İkili (Binary) sayı sistemi

Genel ifade:

$$Binary = d_n 2^n + \ldots + d_3 2^3 + d_2 2^2 + d_1 2^1 + d_0 2^0,$$

$$d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + d_{-2} 2^{-3} + \ldots$$





10 tabanı	2 tabanı
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
...	...
65	01000001
66	01000010
67	01000011
...	...
254	11111110
255	11111111

8 bitlik sayılar
ve on
tabanındaki
karşılıkları

İkili (Binary) sayı sistemi

10111010

MSB
En önemli bit
(Most Significant Bit)

LSB
En önemsiz bit
(Most Significant Bit)

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$\begin{aligned}(1101)_2 &= 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0\\ &= 8+4+0+1\\ &= 13\end{aligned}$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary $\rightarrow$ Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: $(10110101)_2 = ?$

$$(10110101)_2$$

$$= 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$= 128 + 32 + 16 + 4 + 1$$

$$= 181$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: 8 bit ile ifade edilebilecek en büyük sayı nedir?

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek: 8 bit ile ifade edilebilecek en büyük sayı nedir?

$$(11111111)_2$$

$$= 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$$

$$= 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$= 255$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Binary → Decimal

İkilik sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(101.101)_2 = (?)_{10}$$

$$(101.101)_2 = 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 1/2 + 1/8$$

$$= 5.75$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(155)_{10} = (?)_2$$

İşlem	Bölüm	Kalan
$155/2$	77	1
$77/2$	38	1
$38/2$	19	0
$19/2$	9	1
$9/2$	4	1
$4/2$	2	0
$2/2$	1	0
1	$\rightarrow$	1

LSB

$$(10011011)_2$$

MSB

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek: $(7.625)_{10} = (?)_2$

İşlem	Bölüm	Kalan
$7/2$	3	1
$3/2$	1	1
1	$\rightarrow$	1

İşlem	Çarpım	Tam kısım
$0.625 \times 2 = 1.25$		1
$0.25 \times 2 = 0.50$		0
$0.50 \times 2 = 1.0$		1

MSB

LSB

$$(111.101)_2$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Decimal → Binary

Onluk sistemden ikilik sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(0.85)_{10} = (?)_2$$

İşlem	Çarpım	Tam kısım
$0.85 \times 2 =$	1.70	1
$0.70 \times 2 =$	1.40	1
$0.40 \times 2 =$	0.80	0
$0.80 \times 2 =$	1.60	1
$0.60 \times 2 =$	1.20	1

$$(0.85)_{10} = (11011)_2$$

İşlemler devam ettirilebilir.

İkili (Binary) sayı sistemi

Toplama:

$$
\begin{array}{r}
101 \\
+\ \ 11 \\
\hline
1000
\end{array}
$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Çıkarma:

$$
\begin{array}{r}
101 \\
-\ \ 11 \\
\hline
010
\end{array}
$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Çarpma

$$
\begin{array}{r}
101 \\
\times \quad 11 \\
\hline
101 \\
+101 \\
\hline
1111
\end{array}
$$

İkili (Binary) sayı sistemi

Bölme

1010	11
- 11	11
0100	
- 11	
001	

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

$$D = d_n 8^n + \ldots + d_3 8^3 + d_2 8^2 + d_1 8^1 + d_0 8^0,$$

$$d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + d_{-2} 8^{-3} + \ldots$$

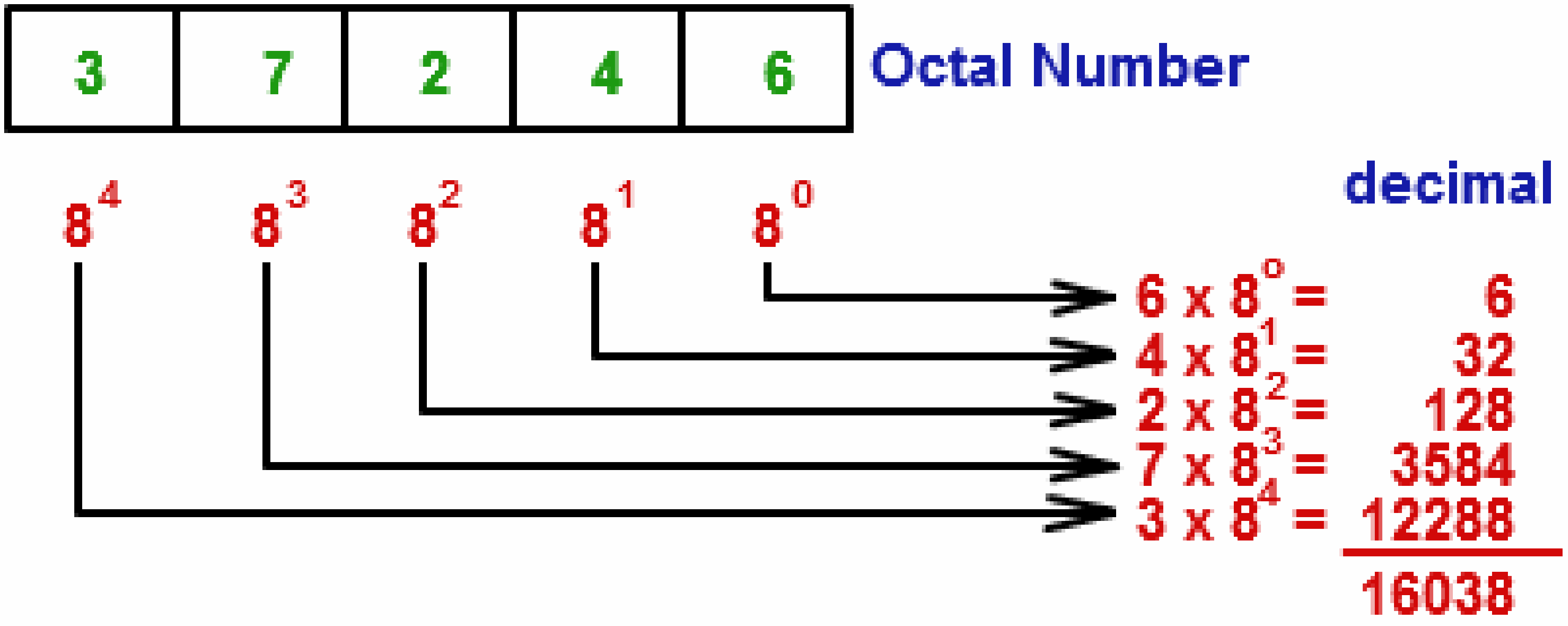
- Sekizli sayı sistemi, ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Geçmiş yıllarda, 12-bit, 24-bit veya 36-bit gibi 3 ile bölünebilen kelime uzunluğuna sahip bilgisayarlarda kullanılmıştır.
- Günümüzde, 16 bit, 32 bit veya 64 bit gibi kelime uzunluğu sekize bölünen bilgisayarlarda yerini onaltılık sayı sistemine bırakmıştır.

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Octal → Decimal

Sekizlik sistemden onluk sisteme dönüşüm

- $(37246)_8=(16038)_{10}$



http://calculator.tutorvista.com/octal-calculator.html

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Decimal → Octal

Onluk sistemden sekizlik sisteme dönüşüm

- $(37)_{10} = (45)_8$

$$
\begin{array}{r|l}
37 & 8 \\ \hline
-\ 32 & 4 \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

http://helpdev.com.br/2013/09/19/java-conversao-de-base-numerica-binario-decimal-octal-hexa/

Sekizli (Octal) Sayı Sistemi

Decimal → Octal

Onluk sistemden sekizlik sisteme dönüşüm

- $(333)_{10} = (515)_8$

$$
\begin{array}{r|l}
333 & 8 \\ \hline
-32 & 41 \\
13 & \\
-8 & \\ \hline
5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
41 & 8 \\ \hline
-40 & 5 \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

http://helpdev.com.br/2013/09/19/java-conversao-de-base-numerica-binario-decimal-octal-hexa/

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

$$H = d_n 16^n + \ldots + d_3 16^3 + d_2 16^2 + d_1 16^1 + d_0 16^0,$$

$$d_{-1} 16^{-1} + d_{-2} 16^{-2} + d_{-2} 16^{-3} + \ldots$$

- Sekizli sayı sistemi gibi ikili sayıları gösterimini basitleştirmek için kullanılır.
- Günümüz bilgisayar sistemlerinde yaygın olarak kullanılır.

- Örnekler:
  - Görüntü renk kodları
  - Adres kodları
  - Makine kodları vb..

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

- Onaltılık sistemde rakamlar:
  - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Decimal	0	1	…	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	…	9	A	B	C	D	E	F

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Decimal $\rightarrow$ Hexadecimal

Onluk sistemden onaltılık sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(333)_{10} = (?)_{16}$$

İşlem	Bölüm	Kalan
$333/16$	20	D
$20/16$	1	4
1	$\rightarrow$	1

LSB

$$(14D)_{16}$$

MSB

Onaltılık – Hexadecimal Sayı Sistemi

Hexadecimal→Decimal

Onaltılık sistemden onluk sisteme dönüşüm

Örnek:

$$(14D)_{16} = (?)_{10}$$

$$\begin{aligned}(14D)_{16} &= 1\times16^2 + 4\times16^1 + 13\times16^0 \\ &= 256 + 64 + 13 \\ &= 333\end{aligned}$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(11101)_2 = (?)_8$

$$(11101)_2 = (29)_{10}$$

$$(29)_{10} = (35)_8$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(11101)_2 = (?)_8$

$$(11|101)_2$$

$$(011)_2 \qquad (101)_2$$

$$(3)_8 \qquad (5)_8$$

$$(35)_8$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2574)_8 = (?)_2$

$$(2574)_8$$

$$(010 \quad 101 \quad 111 \quad 100)_2$$

$$(010101111100)_2$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(10111011111101)_2 = (?)_{16}$

$$(0010 \quad 1110 \quad 1111 \quad 1101)_2$$

$$(2)_{16} \quad (E)_{16} \quad (F)_{16} \quad (D)_{16}$$

$$(2EFD)_{16}$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(2FA5)_{16} = (?)_2$

$$(2FA5)_{16}$$

$$(0010 \quad 1111 \quad 1010 \quad 0101)_2$$

$$(0010111110100101)_2$$

Sistemler arası dönüşüm örnekleri

Örnek: $(F51A)_{16} = (?)_8$

$$(F51A)_{16} = (1111010100011010)_2$$

$$(001|111|010|100|011|010)_2$$

$$(172432)_8$$

Tümleyen aritmetiği

- Bilgisayarlarda çıkarma işlemini gerçekleştirmek için tümleyen aritmetiği kullanılır. M iki tabanında bir sayı, N bu sayının basamak adedi olmak üzere M sayısının 1 ve 2 tümleyeni aşağıdaki gibi belirlenir:

- 1 tümleyen aritmetiği

$$r = 2^N - (M)_2 - 1$$

- 2 tümleyen aritmetiği

$$r = 2^N - (M)_2$$

Tümleyen aritmetiği

- **Örnek:** 1010
- N=4
- 1 tümleyeni:

- 10000-1010-1=
- 1111-1010= 0101

(**bitlerin terslenmiş hali**)

Tümleyen aritmetiği

- **Örnek:** 1010
- N=4
- 2 tümleyeni:
-

  10000-1010=0110

- **(1 tümleyeni+1)**

1 tümleyeni

Sayı	1 tümleyeni

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$1111 \rightarrow 0000$$

$$1010 \rightarrow 0101$$

$$10100011 \rightarrow 01011100$$

Sayını her bir bitini tersleyerek 1 tümleyeni belirlenir

2 tümleyeni

Pratikte 2 tümleyenini hesaplamak için 1 tümleyeni hesaplanır ve sonuca 1 eklenir.

Sayı		1 tümleyeni		2 tümleyeni
1111	$\rightarrow$	0000	$\rightarrow$	0001
1010	$\rightarrow$	0101	$\rightarrow$	0110
1011	$\rightarrow$	0100	$\rightarrow$	0101

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- M-N işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- M-N=M+(-N)

Örnek:

$$\begin{array}{r} 1001 \\ -\ 0011 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{} \quad \begin{array}{c} \text{2 tümleyeni} \\ 1101 \end{array} \quad \xrightarrow{} \quad \begin{array}{r} 1001 \\ +\ 1101 \\ \hline 10110 \end{array} \quad \xrightarrow{} \quad 0110$$

Elde ihmal edilir

En yüksek değerli bitin 0 olması sayının pozitif gösterir

2 tümleyeni ile çıkarma işlemi

- M-N işlemini gerçekleştirmek için
- N sayısının negatifi ile M sayısı toplanır.
- M-N=M+(-N)

Örnek:

$$\begin{array}{r} 0011 \\ -\ 1001 \\ \hline \end{array} \rightarrow \overset{\text{2 tümleyeni}}{0111} \rightarrow \begin{array}{r} 0011 \\ +\ 0111 \\ \hline 1010 \end{array} \rightarrow 1010$$

En yüksek değerli bitin 1 olması sayının negatif olduğunu gösterir.
Bu değerin ne olduğunu öğrenmek için,
sayının tekrar 2 tümleyenini alırsak 0110 olduğu görülür venegatiftir
(-0110)

Elde yok. Bu durumda sayı negatif.

Örnekler

İşaretli sayı	Onluk değeri
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

İşaretli sayı	Onluk değeri
1000	-8
1001	-7
1010	-6
1011	-5
1100	-4
1101	-3
1110	-2
1111	-1

Negatif (1 ile başlayan sayılarda) sayının değerini anlamak için 2 tümleyenini alınıp önüne – işareti yazarız. Örneğin: 1101 sayısı onluk 13 sayısına karşılık gelirken, eğer bu işaretli sayı ise -0011=-3 sayısına karşılık gelmektedir.

Uygulamalar

```java
public static void main(String[] args) {

//örnek sayı tanımlamaları
int s1=1234;
System.out.println ("Decimal="+s1+"-> Binary="
        +Integer.toBinaryString(s1));
System.out.println ("Decimal="+s1+"-> Hexadecimal="
        +Integer.toHexString(s1));

//sayının değeri hexadecimal belirtilebilir
int s2=0xabc;
System.out.println ("s2="+s2);
//sayının değeri binary belirtilebilir
int s3=0b11111111;
 System.out.println ("s3="+s3);
```

- Dönüşüm örnekleri için Java ile yazılmış program

Uygulamalar

```java
System.out.println ("\n--- Toplama örneği ---");
int x=8;
int y= 3 ;
int z=x+y;

System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toBinaryString(x));
System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toBinaryString(y));
System.out.printf("\t+-------\n");
System.out.printf("\t%7s\n",Integer.toBinaryString(z));
```

Uygulamalar

Output - SayiSistemleri (run) | SayiSistemleri.java

```
run:
Onluk=1234-> İkilik=10011010010
Onluk=1234-> Onaltılık=0x4d2
s2=110235
s3=255

--- Toplama örneği ---
          1000
            11
       +------
          1011
```

Uygulamalar

```
System.out.println (
int x=8;
int y=-3;
int z=x+y;

System.out.printf("\
System.out.printf("\
System.out.printf("\
```

Sayıyı negatif yaparsak

```
--- Toplama örneği ---
      1000
11111111111111111111111111111101
+-------
       101
```

int veri tipi 32 bit olduğu için -3 sayısının karakter adedi 32. Bitleri tersleyip sayıya 1 ekledikten sonra:

```
00000000000000000000000000000010
                               1
+-----------------------------------------------
                              11
```

önüne negatif işaret konursa, sayının -(11)=-3 olduğu görülür.

Tekrar soruları

1- $(63)_{10}$ sayısının ikilik sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(111101)_2$

b) $(100001)_2$

c) $(111111)_2$

d) $(100000)_2$

Tekrar soruları

2- $(10101)_2$ sayısının onluk sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(11)_{10}$
b) $(21)_{10}$
c) $(25)_{10}$
d) $(15)_{10}$

Tekrar soruları

- 3-$(1011101101)_2$ sayısının onaltılık sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(2AB)_{16}$

b) $(5AB)_{16}$

c) $(74B)_{16}$

d) $(2EC)_{16}$

Tekrar soruları

4- $(A5F)_{16}$ sayısının ikilik sistemdeki karşılığı aşağıdakilerden hangisidir?

a) 101001011111

b) 100001011111

c) 100111011011

d)110001011111

Tekrar soruları

5- $(010101)_2$ sayısının <u>1 tümleyeni</u> aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(010101)_2$

b) $(101010)_2$

c) $(000111)_2$

d) $(110111)_2$

Tekrar soruları

6-$(010101)_2$ sayısının 2 tümleyeni aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(010101)_2$

b) $(101010)_2$

c) $(001011)_2$

d) $(101011)_2$

Tekrar soruları

7- $\begin{array}{r} 1010 \\ \times\ 101 \\ \hline \end{array}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(110010)_2$

b) $(100010)_2$

c) $(101010)_2$

d) $(10001)_2$

Tekrar soruları

8- C=1010-0011 yanda verilen 4 bitlik iki sayı üzerinde gerçekleştirilen çıkarma işleminin 2 tümleyeni kullanılarak toplama işlemi cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir

a) C=1101+0011
b) C=1010+1101
c) C=1010+0111
d) C=1010+1011