2.3.2 Homojen Diferansiyel Denklemler
$F(x, y, y') = 0 \Longrightarrow F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0,\ (I)$ şekline getirilebilen diferansiyel denklemlerdir.
Bu hale getirebilmesi için denklemde, $x \longrightarrow \lambda\, x$, $y \longrightarrow \lambda\, y$, $y' = y'$ konulduğunda diferansiyel denklem değişmiyorsa **"Homojen Diferansiyel Denklemdir"**.

Diferansiyel denklem homojen ise $\left(F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0\right)$ şekline gelir ve çözüm için,

$\boldsymbol{\frac{y}{x} = u}$ ($u(x)$ şeklinde yeni bağımlı değişken olmak üzere), değişken dönüşümü yapılır.

$y = ux\ \ in\ x\ e\ göre\ \ türevi\ alınırsa\ \ \ y' = u + u'x$ olur.

Diferansiyel denklemde *((I)'de)* yerine konulur.

$F(u, u + u'x) = 0$ *(II)* çözülerek değişkenlerine ayrılabilen bir denklem elde edilir.

Buradan Genel Çözüm;

$u = \varphi(x, c)\ bulunur. Ve\ u = \frac{y}{x} = \varphi(x, c)\ den\ y = x\varphi(x, c)$ *(I)*'in Genel Çözümü elde edilir.

Örnek: $y' = \boldsymbol{\frac{x+y}{y-x}}$ (I) denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: (I) denkleminde, $x \longrightarrow \lambda\, x$, $y \longrightarrow \lambda\, y$, $y' = y'$ konulduğunda

$$y' = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda y - \lambda x} = \frac{\lambda(x + y)}{\lambda(x - y)} = \frac{(x + y)}{(y - x)}$$

Şeklinde diferansiyel denklem aynı kaldığından **homojendir.**

$\frac{y}{x}$ şekline gelmesi için denklem $x'e$ bölünür.

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1}$$

$\frac{y}{x} = u\ değişken\ dönüşümü\ ile, y = ux\ in\ türevi\ \ y' = u + u'x\ ifadeleri\ F(\frac{y}{x}, y')$ denkleminde yerine yazılır.

$$u + u'x = \frac{1 + u}{u - 1} \Longrightarrow u'x = \frac{1 + u}{u - 1} - u \Longrightarrow u'x = \frac{-u^2 + 2u + 1}{u - 1}$$

$\frac{du}{dx}x = \frac{-u^2+2u+1}{u-1}$ değişkenlerine ayrılabilen dif.denklem haline gelmiştir.

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{u-1}{-u^2+2u+1} du$ doğrudan integrali alınabilir.

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2u + 2}{-u^2 + 2u + 1} du$$

$lnx + lnC = -\frac{1}{2}\ln(-u^2 + 2u + 1)$ (keyfi sabit olarak sol tarafa lnC ilave edildi.)
$xC = (-u^2 + 2u + 1)^{-1/2}$ (sol taraf ln(xC) yapılarak ln ler kaldırıldı.)

Düzeltme işlemleri yapıldığında;

$$xC = \frac{1}{\sqrt{-u^2 + 2u + 1}}$$

$$x^2C^2 = \frac{1}{-u^2 + 2u + 1}$$

$$-u^2 + 2u + 1 = \frac{1}{x^2C^2} \Longrightarrow denkleminde\ u\ yerine\ \frac{y}{x}\ konulur.$$

Ve böylece

$$\boldsymbol{-\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{x^2C^2}}$$ **-x2 ile çarparsak**

$$\boldsymbol{y^2 - 2\,y - x^2 = -\frac{1}{C^2}}$$ **…..daha kısa bir sonuç elde ederiz.**

Genel çözümü elde edilir.

Ödev: aynı dif. denklemi x yerine y, y yerine x koyarak elde ettiğiniz şekliyle çözünüz.

2.3.3 Homojen Hale Gelebilen Diferansiyel Denklemler

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (I)$$

$c_1\ ve\ c_2$ sabit değerler nedeniyle denklem homojen değildir. Fakat homojen hale gelebilir. Çünkü *"Lineer"*dir.

$c_1\ ve\ c_2$ sabitlerini yok etmek için aşağıdaki değişken dönüşümü yapılır.

$$\boldsymbol{x = x_1 + h}$$
$$\boldsymbol{y = y_1 + k}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$$

Bu dönüşümün geçerli olabilmesi için $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ şartı sağlanmalıdır.

(I)'de değişken dönüşümü uygulanırsa,

$$y_1' = \frac{a_1(x_1 + h) + b_1(y_1 + k) + c_1}{a_2(x_1 + h) + b_2(y_1 + k) + c_2}$$

$$y_1' = \frac{a_1x_1 + a_1h + b_1y_1 + b_1k + c_1}{a_2x_2 + a_2h + b_2y_1 + b_2k + c_2} = \frac{(a_1x_1 + b_1y_1) + \overbrace{(a_1h + b_1k + c_1)}^{0}}{(a_2x_1 + b_2y_1) + \underbrace{(a_2h + b_2k + c_2)}_{\text{homojen olması için =0 olmalı}}}$$

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$
$a_2h + b_2k + c_2 = 0$
$a_1h + b_1k = -c_1$
$a_2h + b_2k = -c_2$, denklemlerinden h ve k sabitleri bulunur. Bu durumda denklem homojen diferansiyel denklem haline gelir.

$y_1' = \frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_2+b_2y_1}$ (II)homogen dif.denklemi çözüm için

$x_1 \quad e \quad bölünürse,$

$$y_1' = \frac{a_1 + b_1\frac{y_1}{x_1}}{a_2 + b_2\frac{y_1}{x_1}} \; elde \; edilir.$$

Burada $\frac{y_1}{x_1} = u$ dönüşümü yapılır.
$y_1 = ux_1 \Longrightarrow y_1' = u + u'x_1$ ifadeleri son denklemde yerine konulur.

$$u + u'x_1 = \frac{a_1 + b_1u}{a_2 + b_2u}$$

$$u'x_1 = \underbrace{\frac{a_1 + b_1u}{a_2 + b_2u}}_{f(u)} - u$$

Denklem değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem haline gelmiştir.
Buna göre Genel Çözüm,

$u = \varphi(x_1, C)$ *(III)* olarak bulunur.

$x = x_1 + h \Longrightarrow x_1 = x - h$
$y = y_1 + k \Longrightarrow y_1 = y - k$
$u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y - k}{x - h}$

ifadeleri *(III)'te* yerine konulursa,

$$\frac{y - k}{x - h} = \varphi(x - h, C)$$

$\boldsymbol{y = (x - h)\varphi(x - h, C) + k}$**, diferansiyel denklemin genel çözümüdür.**

Örnek: $(7x+3y-1)dx+(3x-y+1)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Diferansiyel denklem düzenlendiğinde

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{7x+3y-1}{3x-y+1}$$

Homojen hale gelebilen tip olduğu görülür.

$$y'=-\frac{7x+3y-1}{3x-y+1}$$

Bu diferansiyel denklemde

$$x=x_1+h \Longrightarrow x_1=x-h$$
$$y=y_1+k \Longrightarrow y_1=y-k$$

Dönüşümü yapıldığında

$$y'=-\frac{7(x_1+h)+3(y_1+k)-1}{3(x_1+h)-(y_1+k)+1}$$

$$y'=-\frac{7x_1+3y_1+(7h+3k-1)}{3x_1-y_1+(3h-k+1)}$$

$7h+3k-1=0$

$3h-\ k\ +\ 1=\ 0$ bu iki eşitliğin ortak çözümünden;

$$h=-\frac{1}{8},k=\frac{5}{8}$$

bulunur. Buradan geriye kalan ifade

$$y_1'=\frac{-7x_1-3y_1}{3x_1-y_1}$$

Homogen dif.denklem olacağından, terimler $x_1 \quad e \quad bölünerek$

$$y_1'=\frac{-7-3\frac{y_1}{x_1}}{3-\frac{y_1}{x_1}}$$

Haline gelir ve

$$\frac{y_1}{x_1}=u,y_1=ux_1 \Longrightarrow y_1'=u+u'x_1$$

Dönüşümü ile

$$u+u'x_1=\frac{-7-3u}{3-u}$$

$$u'x_1 = \frac{-7-3u}{3-u} - u$$

$\frac{du}{dx_1} x_1 = \frac{-7-3u-3u+u^2}{3-u} = \frac{(u^2-6u-7)}{3-u}$ => $\frac{3-u}{u^2-6u-7} du = \frac{dx_1}{x_1}$ değ.ayrılabilen olur.

$\int \frac{3-u}{u^2-6u-7} du = \int \frac{dx_1}{x_1}$ => $-\frac{1}{2} \int \frac{(3-u)(-2)}{u^2-6u-7} du = \int \frac{dx_1}{x_1}$

$-\frac{1}{2} \ln(-7-6u+u^2) = \ln x_1 + \ln C$ => $(-7-6u+u^2)^{-1/2} = Cx_1$

$Cx_1 = \frac{1}{\sqrt{-7-6u+u^2}}$ => $u^2 - 6u - 7 = \frac{1}{C^2 x_1^2} (III)$

u ya bağlı genel çözümü bulunur. Bu genel çözümde

$x_1 = x - h = x + 1/8$ $y_1 = y - k = y - 5/8$ konularak

$u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y-k}{x-h} = \frac{y-5/8}{x+1/8} = \frac{8y-5}{8x+1}$ Elde edilen u ve $x_1 = x - h = x + 1/8$ (III) te konularak

$\left(\frac{8y-5}{8x+1}\right)^2 - 6\left(\frac{8y-5}{8x+1}\right) - 7 = \frac{1}{C^2\left(x+\frac{1}{8}\right)^2}$ $(\mathbf{8x+1})$ ***karesi ile çarpılarak***

$$\mathbf{(8y-5)^2 - 6(8y-5)(8x+1) - 7(8x+1)^2 = \frac{1}{C^2} 64}$$

diferensiyel denklemin Genel Çözümü elde edilir.
(bu ifadede parantezler açılarak da x ve y li terimler açıkça görülebilir)

Ödev: aynı dif. denklemi x yerine y, y yerine x koyarak elde ettiğiniz şekliyle çözünüz.

2.3.4 Homojen Hale Gelebilen Olup Değişkenlerine Ayrılabilir Hale Gelebilen Diferansiyel Denklemler

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad (I)$$

(I) denklemi, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ şartı sağlanıyorsa $x = x_1 + h, y = y_1 + k$ dönüşümü ile Homojen Hale Gelebilen denklemdir.

Eğer $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ise homojen hale gelemez. Çünkü *h* ve *k* bulunamaz. Bu durumda,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = m'den$
$a_1 = ma_2$
$b_1 = mb_2$ ifadeleri aşağıdaki denklemde konulursa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(\overbrace{a_2x + b_2y}^{u,\ dersek}) + c_1}{(\underbrace{a_2x + b_2y}_{u}) + c_2} \quad (II)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m.u + c_1}{u + c_2}$$

$u = a_2x + b_2y$
$u' = a_2 + b_2y'$
$y' = \dfrac{u' - a_2}{b_2}$
(II) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{u' - a_2}{b_2} = \frac{m.u + c_1}{u + c_2} = f(u) denilirse;$$

$u' - a_2 = f(u).b_2$
$u' = f(u).b_2 + a_2$
$u' = \dfrac{du}{dx} = f(u).b_2 + a_2 \longrightarrow değişkenlerine\ ayrılabilir\ diferansiyel\ denklemdir.$

Bu denklem çözüldüğünde,
$\boldsymbol{u = \varphi(x, C)}$
$\boldsymbol{a_2x + b_2y = \varphi(x, C)}$
$\boldsymbol{y = [\varphi(x, C) - a_2x]/b_2} \longrightarrow$ ***Genel* Çözüm*ü* *elde edilir*.**

Örnek: $(2x + 2y - 1)dx - (3x + 3y - 8)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:
$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y-1}{3x+3y-8}$ (I) Homogen hale gelebilen tip olarak gözükmektedir. Ancak

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}$ Şeklinde bir ortak orana sahip olduklarından h ve k bulunamayacağından,

$a_1 = \frac{2}{3}a_2 \quad b_1 = \frac{2}{3}b_2$ oranlarına göre değişkenlerine ayrılabilen dif.denkleme dönüşür..

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2/3\,(3x + 3y) + (-1)}{(3x + 3y) + (-8)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x + y) - 1}{3(x + y) - 8}\ (II)$$

$u = x + y$ dönüşümü yapılırsa ve buradan elde edilen $u' = 1 + y'$ => $y' = u' - 1$ ifadeleri

(II) denkleminde yerine konulursa

$$y' = \frac{2(x + y) - 1}{3(x + y) - 8}$$
$$u' - 1 = \frac{2u - 1}{3u - 8}$$
$$u' = \frac{2u - 1}{3u - 8} + 1 = \frac{2u - 1 + 3u - 8}{3u - 8} = \frac{5u - 9}{3u - 8}$$
$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{5u - 9}{3u - 8}$$

Değişkenlerine ayrılabilen dif.denklemi ortaya çıkar. Doğrudan integrali alınabilir,

$\frac{3u-8}{5u-9}du = dx$ => $\int \frac{3u-8}{5u-9}du = \int dx$

$$\int \frac{\left({}^{3}/_{5}\right)\left({}^{5}/_{3}\right)(3u - 8)}{5u - 9}du = \int dx$$

$$\frac{3}{5}\int \left(\frac{5u - \frac{40}{3}}{5u - 9}\right)du = \int dx$$

$$\frac{3}{5}\int \left(\frac{5u - \frac{40}{3} - \frac{13}{3} + \frac{13}{3}}{5u - 9}\right)du = \int dx$$
$$\frac{3}{5}\int \left(\frac{5u - 9 - \frac{13}{3}}{5u - 9}\right)du = \int dx$$

$$\frac{3}{5}\int\left(\frac{5u-9}{5u-9}-\left(\frac{\frac{13}{3}}{5u-9}\right)\right)du=\int dx$$

$$\frac{1}{5}\int\left(3-\left(\frac{13}{5u-9}\right)\right)du=\int dx$$

$$\frac{1}{5}\left(3u-13.\frac{1}{5}\ln(5u-9)\right)=x+C$$

$$\frac{3}{5}u-\frac{13}{25}\ln(5u-9)=x+C$$

$$u=x+y$$

$$\frac{3}{5}(x+y)-\frac{13}{25}\ln(5(x+y)-9)=x+C$$

$\boldsymbol{\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{13}{25}\ln(5x+5y-9)=x+C\longrightarrow Genel}$ **Çözü$\boldsymbol{m}$ü elde edilir.**

Alıştırma soruları:
Soru 1. $(7x+3y-1)dx+(3x-y+1)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
Soru 2. $(x+y)dx+(3x+3y-4)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
Soru 3. $(3x-y-9)dx=(10-2x+2y)dy$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Ödev: 2 ve 3 nolu sorular ya da 1 ve 2 nolu soruları çözünüz.