02/01/2018

SAÜ TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
MATEMATİK I DERSİ FİNAL SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1) a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos 3x)}{(1-\cos 5x)} = ?$ (15)

b) $f(x)=\begin{cases} 3.(5)^x & , \; x<1 \\ 3b+4x & , \; x\geq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında sürekli olması için b ne olmalıdır? (10)

2) a) $y=\dfrac{x+\tan x}{x^2+\sin x}$ fonksiyonu veriliyor. $y'=?$ (15)

b) $\arctan y = x+y$ fonksiyonu veriliyor. $y'=?$ (10)

3) AŞAĞIDAKİ ŞIKLARDAN SADECE 1 (BİR) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ

a) Çevresi 120 cm olan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanının kenar uzunluklarını bulunuz. (20)

b) $y=x^3-5x+3$ eğrisinin
a) $y=-2x$ doğrusuna paralel
b) $y=\dfrac{-x}{7}$ doğrusuna dik

olan teğetlerinin denklemini yazınız. (20)

c) $y=x^2e^{-x}$ fonksiyonunun artan, azalan olduğu aralıkları, varsa maksimum, minimum noktalarını, teğet ya da çukur olduğu aralıkları bulunuz. (20)

4) $y=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ eğrisinin grafiğini detayları ile birlikte çiziniz. (30)

Süre: 80 Dakikadır

BAŞARILAR DİLERİZ

Tekno./Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

① a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-(-3\sin 3x)}{0-(-5.\sin 5x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 3x}{5.\sin 5x} =$

$= \dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}} \dfrac{3}{5}\lim \dfrac{3\cos 3x}{5.\cos 5x} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3.1}{5.1} = \dfrac{9}{25}$ // bulunur

---

① b) $f(x) = \begin{cases} 3(5)^x, & x<1 \text{ ise} \\ 3b+4x, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

$x_0 = 1$ de $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ ise fonksiyon $x_0=1$ de süreklidir. O halde bu üçlü eşitliği sağlayacak biçimde b'yi belirleyelim;

$f(1) = 3b+4\cdot 1 = 3b+4$ dır. (Bu aynı zamanda $f(1^+)$ dır da!)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3.(5)^x = 3.5^1 = 15 \,; \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3b+4x) = 3b+4 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 15 = 3b+4 \Rightarrow 3b = 11$

$\boxed{b = \dfrac{11}{3}}$ bulunur

---

② a) $y = \dfrac{x+\tan x}{x^2+\sin x} \Rightarrow y' = ?$

$y' = \dfrac{(1+\sec^2 x)\cdot(x^2+\sin x) - (2x+\cos x)(x+\tan x)}{(x^2+\sin x)^2}$ dır.

Tekno/Makina/MAT-I/Final

02.01.2018

(2) b) $\text{Arctan}\, y = x + y \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1 + y' \Rightarrow \frac{1}{1+y^2} \cdot y' - y' = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) y' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} + y^2)}{1+y^2} \cdot y' = 1 \Rightarrow \frac{-y^2}{1+y^2} y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{-y^2} \text{ den}$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{y^2}} \text{ bulunur.}$$

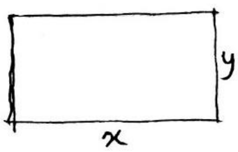
II. yol: $\text{Arctan}\, y = x + y \Rightarrow F(x,y) = \text{Arctan}\, y - x - y = 0$

için $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'} = -\frac{0-1-0}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = +\frac{1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} \text{ den}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{-y^2} = \boxed{-\frac{1+y^2}{y^2}} \text{ bulunur.}$$

---

(3) a)



$2(x+y) = 120 \Rightarrow x + y = 60$

$y = 60 - x$ olup

$$A = x \cdot y = x(60 - x) \text{ den } A(x) = 60x - x^2$$

$A'(x) = 60 - 2x$ ve $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 60 - 2x = 0 \Rightarrow x = 30$ dur.

x		30	
$A'(x)$	$+ \nearrow$	0 (max)	$- \searrow$

$x = 30$ için alan en büyüktür.

$y = 60 - x = 30$ dur.

Not: $x_0 = 30$ da max. olup olmadığı $A''(30)$ un işaretine bakılarak da karar verilebilir!

Tekno/Makina/MAT-I/ Final 02.01.2018

(3) b) i) $y = x^3 - 5x + 3$ eğrisinin $y = -2x$ doğrusuna paralel teğeti için teğet eğimi $m_t = -2$ olacağından $y' = -2$ olup

$y' = 3x^2 - 5$ den $3x^2 - 5 = -2 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$; $x_1 = -1, x_2 = 1$ olup

$x = -1$ için $y(-1) = (-1)^3 - 5.(-1) + 3 = 7 \Rightarrow (-1, 7)$ deki teğet aranıyor

$x = +1$ için $y(1) = 1^3 - 5.1 + 3 = 1 - 5 + 3 = -1 \Rightarrow (1, -1)$ deki teğet aranıyor.

teğet denklemi $y - y_0 = m_t(x - x_0)$ dan

$(-1, 7)$ için $y - 7 = -2(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 5}$

$(1, -1)$ için $y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 1}$ bulunur.

ii) $y = x^3 - 5x + 3$ eğrisinin $y = -\frac{x}{7}$ doğrusuna dik teğeti için

$m = -\frac{1}{7}$ olup $m . m_t = -1$ den $m_t = 7$ dir.

$y' = 3x^2 - 5 = 7$ den $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$ den $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

ve $y(-2) = (-2)^3 - 5.(-2) + 3 = 5$; $y(2) = 2^3 - 5.2 + 3 = 1$ olup

$(-2, 5)$ deki teğeti $y - 5 = 7(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = 7x + 19}$

$(2, 1)$ deki teğeti $y - 1 = 7(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 7x - 13}$ bulunur.

Tekno/Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

③ c) $y=x^2\cdot e^{-x} \Rightarrow y'=2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$

$$y''=(2-2x)\cdot e^{-x}+(2x-x^2)\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(2-4x+x^2)\cdot e^{-x}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow (2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)\cdot e^{-x}=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$$

$$y''=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+2)\cdot e^{-x}=\left[(x-2)^2-2\right]\cdot e^{-x}=0 \Rightarrow x_3=2-\sqrt{2},\ x_4=2+\sqrt{2}$$

x		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	B.N.	$\nearrow$	max	$\searrow$	B.N.	$\searrow$
	konveks		konveks		konkav		konkav		konveks

$(-\infty,0)$ ve $(2,\infty)$ aralıklarında azalan.

$(0,2)$ de artan.

$(-\infty,2-\sqrt{2})$ ve $(2+\sqrt{2},\infty)$ konveks.

$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ konkav.

Tekno/Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

(4) sorunun çözümüne devam.

Özel noktalar: $x=0$ için $y=\frac{3}{4}$ $y=0$ için $x=\mp\sqrt{3}$ olup

Eğri $(0,\frac{3}{4})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$ noktalarından geçer.

Ayrıca $x=1$ için $y=\frac{1^2-3}{2.1-4}=1$; $x=3$ için $y=\frac{3^2-3}{2.3-4}=3$ olup

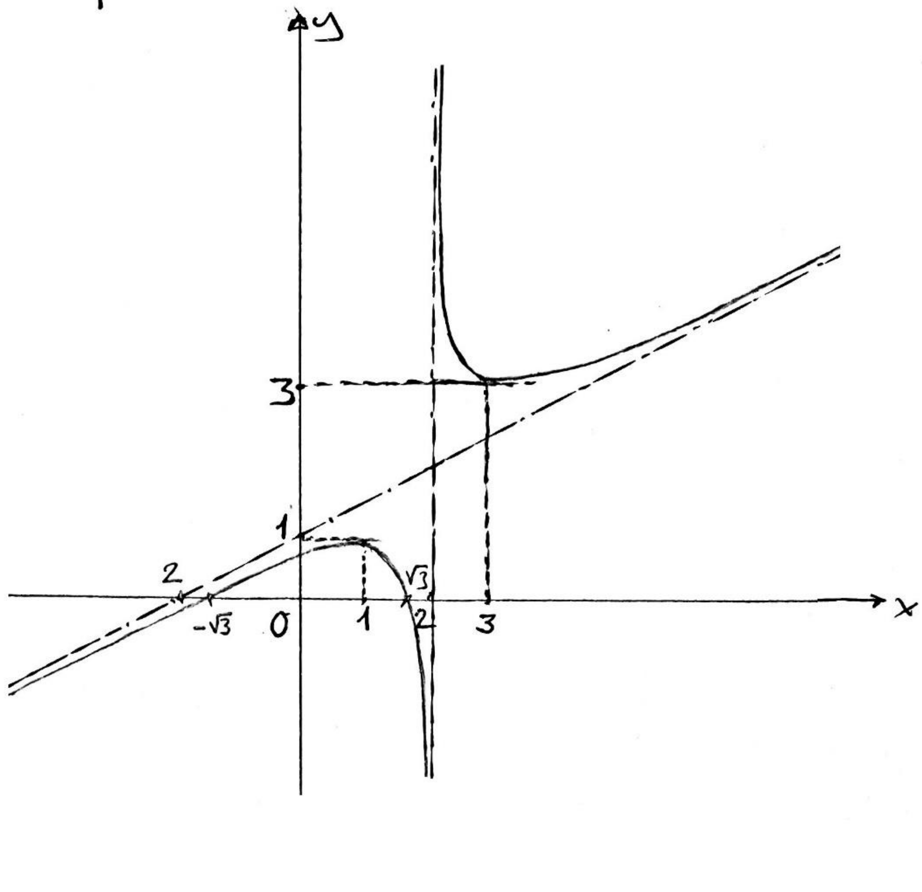
Eğri $(1,1)$ ve $(3,3)$ noktalarından da geçer. Bu noktalar belki ekstremum noktaları da olabilir (y' yü sıfır yaptığından). Buna y' nün işaret incelemesi sonucunda karar verilecek!

Tablo:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		2		3		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y''															
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1 max.	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3 min	$\nearrow$	$+\infty$

konkav   B.N. değil   konveks

grafik:



Tekno./Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

(1) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0-(-3\sin 3x)}{0-(-5.\sin 5x)}$ (2) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin 3x}{5.\sin 5x} =$ (5)

$= \dfrac{3}{5} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \dfrac{3}{5} \lim \dfrac{3\cos 3x}{5.\cos 5x} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3.1}{5.1} = \dfrac{9}{25}$ (2) (4) (2) bulunur

(1) b) $f(x) = \begin{cases} 3(5)^x, & x<1 \text{ ise} \\ 3b+4x, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

$x_0 = 1$ de $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ ise fonksiyon

(2) $x_0=1$ de süreklidir. O halde bu üçlü eşitliği sağlayacak biçimde b'yi belirleyelim;

(2) $f(1) = 3b+4.1 = 3b+4$ dür. (Bu aynı zamanda $f(1^+)$ dır da!)

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3.(5)^x = 3.5^1 = 15$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3b+4x) = 3b+4 = f(1)$

$\Rightarrow 15 = 3b+4 \Rightarrow 3b = 11$

$\boxed{b = \dfrac{11}{3}}$ (2) bulunur

(2) a) $y = \dfrac{x+\tan x}{x^2+\sin x} \Rightarrow y' = ?$

(15)

$y' = \dfrac{(1+\sec^2 x).(x^2+\sin x) - (2x+\cos x)(x+\tan x)}{(x^2+\sin x)^2}$ dır.

Tekno/Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

2 b) $\text{Arctan}\, y = x + y \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$\left\{ \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1 + y' \Rightarrow \frac{1}{1+y^2} \cdot y' - y' = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) y' = 1 \right\} \; 5$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{1} - (\cancel{1}+y^2)}{1+y^2} \cdot y' = 1 \Rightarrow \frac{-y^2}{1+y^2} y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{-y^2} \text{ den}$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{y^2}} \text{ bulunur.} \quad 5$$

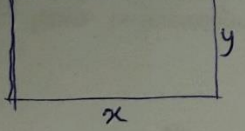
II. yol: $\text{Arctan}\, y = x + y \Rightarrow F(x,y) = \text{Arctan}\, y - x - y = 0$

$$\text{için } y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{0-1-0}{\frac{1}{1+y^2} - 1} = +\frac{1}{\frac{1}{1+y^2} - 1} \text{ den} \quad 5$$

$$y' = \frac{1}{\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - y^2}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{-y^2} = \boxed{-\frac{1+y^2}{y^2}} \text{ bulunur.} \quad 5$$

---

3 a)



$2(x+y) = 120 \Rightarrow x + y = 60$ olup $y = 60 - x$ 7

$A = x \cdot y = x(60-x)$ den $A(x) = 60x - x^2$

$A'(x) = 60 - 2x$ ve $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 60 - 2x = 0 \Rightarrow x = 30$ dur. 7

x		30	
$A'(x)$	$+ \nearrow$	0 max	$- \searrow$

$x = 30$ için alan en büyüktür.

$y = 60 - x = 30$ dur. 6

Not: $x_0 = 30$ da max. olup olmadığı $A''(30)$ un işaretine bakılarak da karar verilebilir!

Tekno/Makina/MAT-I/ Final 02.01.2018

3) b) i) $y=x^3-5x+3$ eğrisinin $y=-2x$ doğrusuna paralel teğeti için

2) teğet eğimi $m_t=-2$ olacağından $y'=-2$ olup

$y'=3x^2-5$ den $3x^2-5=-2 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1$; $x_1=-1$, $x_2=1$

4) olup $x=-1$ için $y(-1)=(-1)^3-5.(-1)+3=7 \Rightarrow (-1,7)$ deki teğet aranıyor

$x=+1$ için $y(1)=1^3-5.1+3=1-5+3=-1 \Rightarrow (1,-1)$ deki teğet aranıyor.

teğet denklemi $y-y_0=m_t(x-x_0)$ dan

4) $(-1,7)$ için $y-7=-2(x+1) \Rightarrow \boxed{y=-2x+5}$

$(1,-1)$ için $y+1=-2(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-2x+1}$ bulunur.

ii) $y=x^3-5x+3$ eğrisinin $y=-\frac{x}{7}$ doğrusuna dik teğeti için

2) $m=-\frac{1}{7}$ olup $m.m_t=-1$ den $m_t=7$ dir.

$y'=3x^2-5=7$ den $3x^2=12 \Rightarrow x^2=4$ den $x_1=-2$, $x_2=2$

4) ve $y(-2)=(-2)^3-5.(-2)+3=5$; $y(2)=2^3-5.2+3=1$ olup

4) $(-2,5)$ deki teğeti $y-5=7(x+2) \Rightarrow \boxed{y=7x+19}$

$(2,1)$ deki teğeti $y-1=7(x-2) \Rightarrow \boxed{y=7x-13}$ bulunur.

Tekno/Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

(3) c) $y = x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$ (3)

$y'' = (2-2x) \cdot e^{-x} + (2x - x^2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{-x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow (2x - x^2) e^{-x} = x(2-x) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,,\, x_2 = 2$ (3)

$y'' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x} = [(x-2)^2 - 2] \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x_3 = 2 - \sqrt{2} \,,\, x_4 = 2 + \sqrt{2}$ (3) (2)

x		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	$-$	$+$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	B.N.	$\nearrow$	max	$\searrow$	B.N.	$\searrow$
	konveks				konkav				konveks

(5)

$(-\infty, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında azalan. (2)

$(0,2)$ de artan.

$(-\infty, 2-\sqrt{2})$ ve $(2+\sqrt{2}, \infty)$ konveks. (2)

$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ konkav.

Tekno/Makine/MAT-I/Final 02.01.2018

(4) $y=\frac{x^2-3}{2x-4}$; $2x-4=0 \Rightarrow x=2$;
$T.A. = \mathbb{R}\setminus 2 = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ (2)

$\lim_{x\to 2^-} y=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+} y=-\infty$; $x=2$ D.A. (3)

$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2-3}{2x-4}=\mp\infty$ Y.A. Yok Eğik asimp. olabilir. (2)

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{2x^2-4x}=\frac{1}{2}$ eğim; $n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3}{2x-4}-\frac{1}{2}x\right]=1$

O halde $y=\frac{1}{2}x+1$ eğik asimptot. (3)

$$y'=\frac{2x(2x-4)-2(x^2-3)}{(2x-4)^2}=\frac{2x^2-8x+6}{(2x-4)^2}$$

$y'=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-8x+6}{(2x-4)^2}=\frac{(2x-2)(x-3)}{(2x-4)^2}=0 \Rightarrow$ $x_1=1$, $x_2=3$ (2) (3)
ve $x=2$ de payda sıfır (çift katlı kök)

$$y''=\frac{(4x-8)(2x-4)^{\cancel{2}}-(2x^2-8x+6).2\cancel{(2x-4)}.2}{(2x-4)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{(4x-8)(2x-4)-4(2x^2-8x+6)}{(2x-4)^3}$$

$$=\frac{\cancel{8x^2}-\cancel{32x}+32-(\cancel{8x^2}-\cancel{32x}+24)}{(2x-4)^3}=\frac{8}{(2x-4)^3}$$ olup (3)

$y''=0$ yapan $x\in\mathbb{R}$ yok $x=2$ ise paydayı sıfır yapan üç katlı kök. (işaret değiştirmeye etkisi olacak!)
$x=2$ de y'' nün işareti değişse bile fonksiyon $x=2$ de tanımsız old. için B.N. değil! Ancak y'' yü tanımsız yapan $x=2$ de paydanın kuvveti tek olduğundan işaret değişiminde etkisi olduğu için işaret tablosunda bu nokta gözönüne alınacak!

Tekno/Makina/MAT-I/Final 02.01.2018

(4) sorunun çözümüne devam.

Özel noktalar: $x=0$ için $y=\frac{3}{4}$ $y=0$ için $x=\mp\sqrt{3}$ olup

Eğri $(0,\frac{3}{4})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$ noktalarından geçer.

Ayrıca $x=1$ için $y=\frac{1^2-3}{2.1-4}=1$; $x=3$ için $y=\frac{3^2-3}{2.3-4}=3$ olup

(2) Eğri (1,1) ve (3,3) noktalarından da geçer. Bu noktalar belki ekstremum noktaları da olabilir (y' yü sıfır yaptığından). Buna y' nün işaret incelemesi sonucunda karar verilecek!

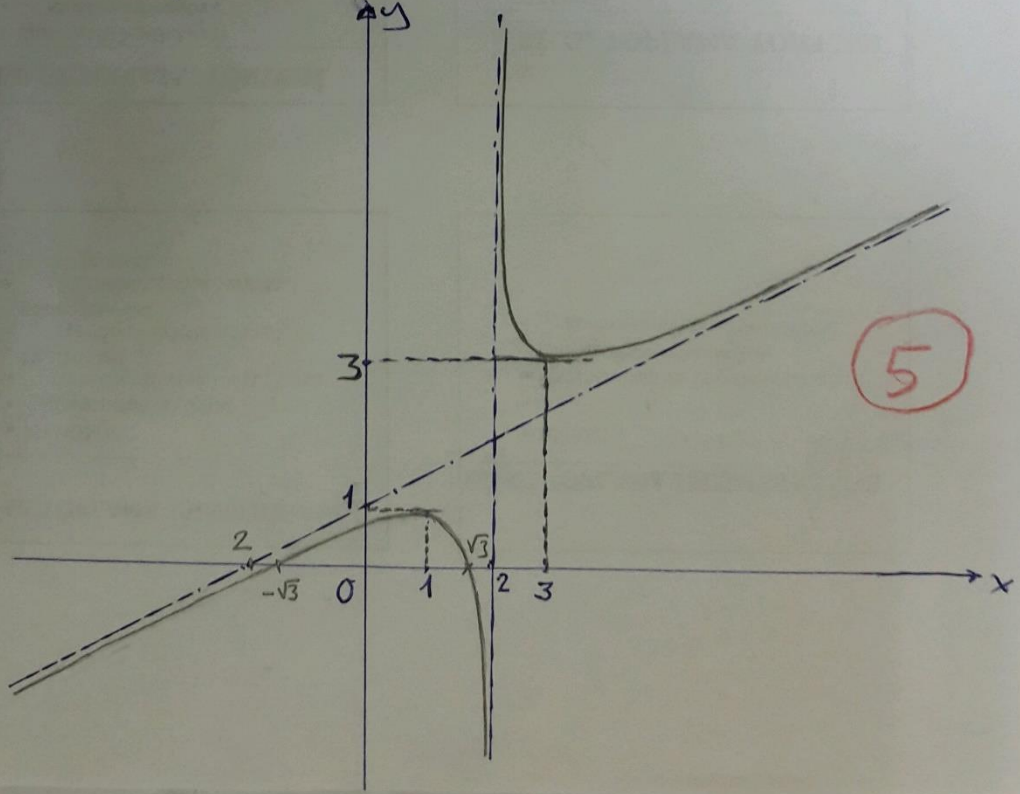
Tablo:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		2		3		$+\infty$
y'		+		+		+	0	−		−	‖	−	0	+	
y''											‖				
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1 max.	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3 min	↗	$+\infty$

(5)

konkav B.N. değil konveks

grafik:



(5)