IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

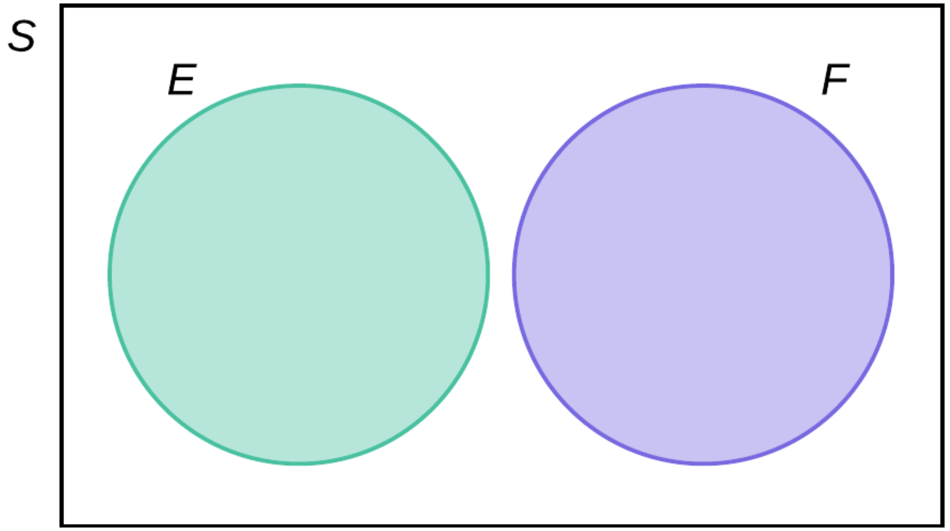
AYRIK OLAYLAR VE BAĞIMSIZ OLAYLAR

İçindekiler

Ayrık Olaylar

Aynı anda meydana gelmeyen olaylara **ayrık olaylar** denir.

Aşağıdaki Venn diyagramında yer alan E ve F olayları ayrık olaylardır.



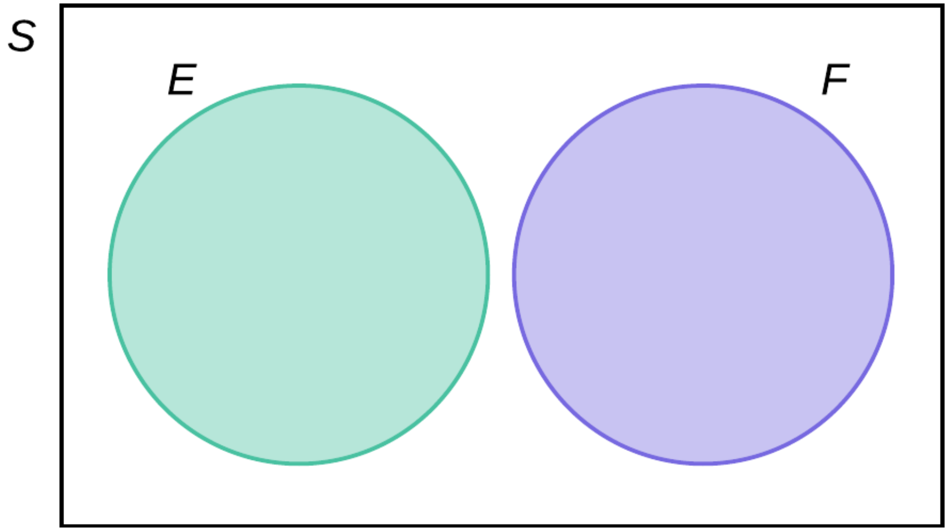
Ayrık Olaylar

Ayrık olayların küme kesişimi boş kümedir. Dolayısıyla;

$$P(E\ ve\ F) = 0$$

$$P(E\ veya\ F) = P(E) + P(F) - P(E\ ve\ F)$$

$$P(E\ veya\ F) = P(E) + P(F)$$



Bağımsız Olaylar

A ve B iki olay olsun. B olayının olduğunun bilinmesi, A olayının olma olasılığını etkilemiyorsa, bu iki olay **bağımsızdır**.

Bağımsız A ve B olayları için koşullu olasılık formülünden aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(AB) = P(A|B)P(B)$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Bağımsız Olaylar

Diğer bir deyişle $P(AB) = P(A)P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır denir.

A olayı B olayından bağımsız ise aynı şekilde B olayı da A olayından bağımsızdır.

Bağımsız olmayan olaylara **bağımlı olaylar** denir.

A ve B olayları bağımsız ise A ve B' olayları da bağımsızdır.

Bağımsız Olaylar

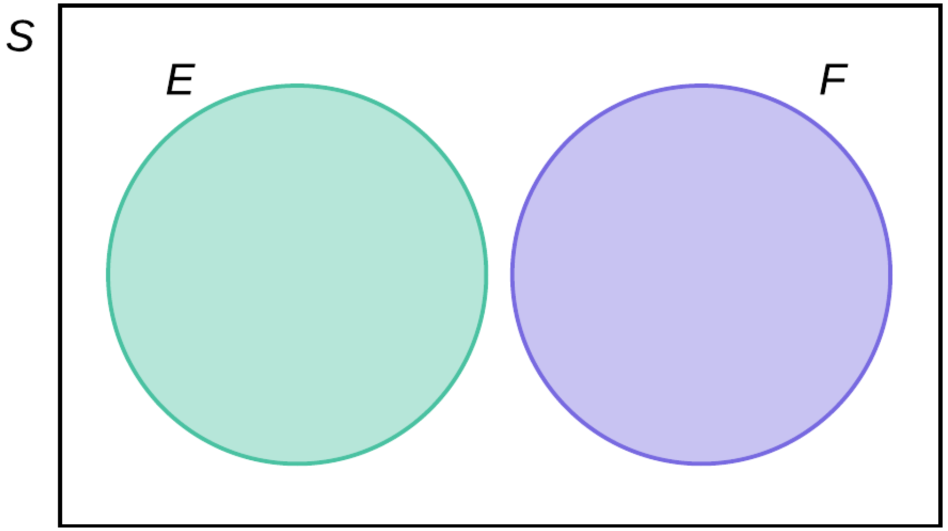
İki ayrık olay bağımsız mıdır?

$P(E|F) = P(E)$ ise bağımsız olduğu söylenmişti.

Peki öyle mi?

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = 0 \neq P(E)$$

E, F ayrık olayları bağımsız değildir.



Bağımsız Olaylar

3 adet olay da birbirinden bağımsız olabilir.

A, B ve C'nin 3 adet olay olduğunu düşünelim.

Bu olaylar aşağıdaki koşulları sağlıyorsa birbirinden bağımsızdır.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned}\right\} \text{İkili bağımsızlık}$$

3 adet olaydan daha çok sayıda olay da birbirinden bağımsız olabilir.

Örnek 1

52 kartlı bir desteden kart çekilsin. Çekilen kartın as olması olayı A, kupa olması olayı ise H ile gösterilsin.

A ve H olayları bağımsız mıdır?

Örnek 1

A: Çekilen kartın as olması

H: Çekilen kartın kupa olması

$A = \{Sinek\ As, Kupa\ As, Karo\ As, Maça\ As\}$

$H = \{Kupa\ As, Kupa\ 2, Kupa\ 3, \dots\}$

$P(AH) = \frac{1}{52}$

$P(A)P(H) = \frac{4}{52}\frac{13}{52} = \frac{1}{52}$

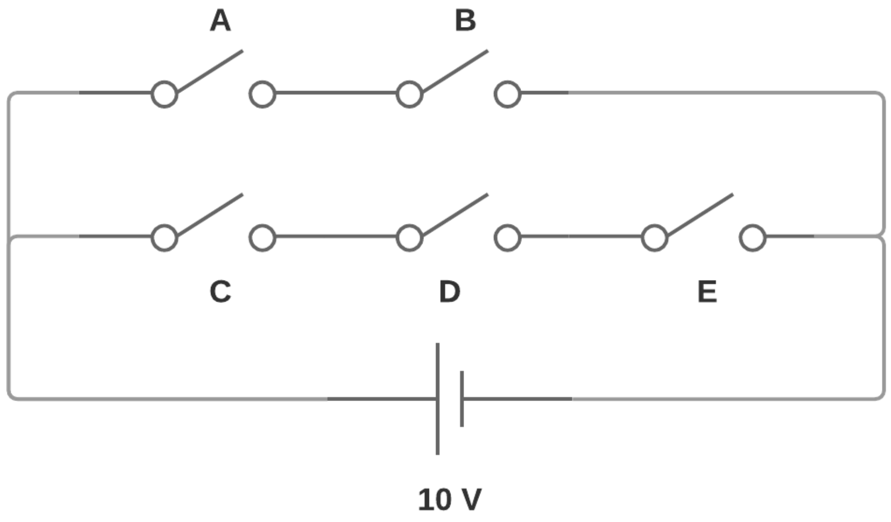
$P(AH) = P(A)P(H)$ olduğundan iki olay bağımsızdır.

Örnek 2

Aşağıdaki devrede tüm anahtarlar fonksiyonel olarak birbirinden bağımsızdır. Her bir anahtarın akım geçirme olasılığı p'dir.

A) Devrenin çalışma olasılığı nedir?

B) Devrenin çalıştığı biliniyorsa A ve B anahtarlarının kapalı olması, yani akım geçirmesi olasılığı nedir?



Örnek 2

A) Devrenin çalışma olasılığı nedir?

Ç: Devrenin çalışması olayı olsun.

A, B, C, D, E sırasıyla A, B, C, D, E anahtarlarının akım geçirme olayları olsun.

$$P(Ç') = \big(1 - P(AB)\big)\ ve\ \big(1 - P(CDE)\big)$$

$$P(Ç') = \big(1 - P(A)P(B)\big)\ ve\ \big(1 - P(C)P(D)P(E)\big)$$

$$P(Ç') = (1 - p^2)(1 - p^3)$$

Örnek 2

A) Devrenin çalışma olasılığı nedir?

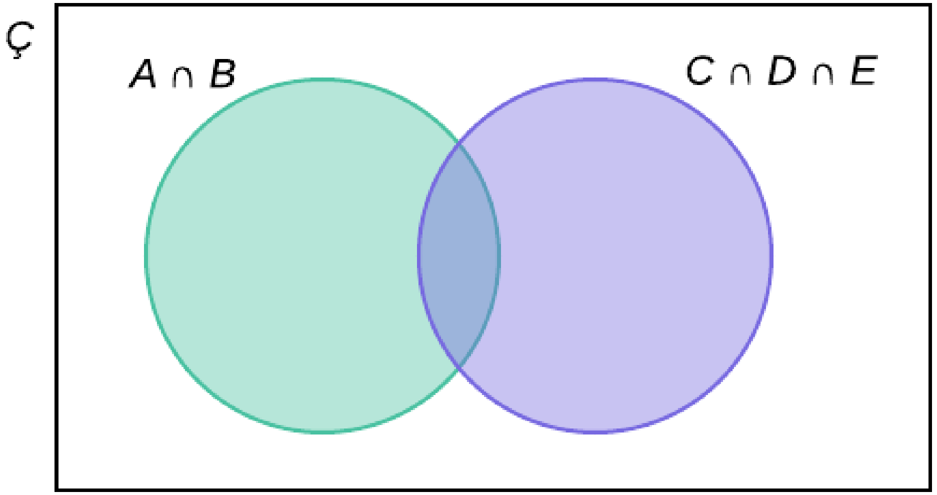
$$P(\text{Ç}) = 1 - P(\text{Ç}')$$

$$P(\text{Ç}) = 1 - (1 - p^2)(1 - p^3)$$

Örnek 2

B) Sistemin çalıştığı biliniyorsa A ve B anahtarlarının kapalı olması, yani akım geçirmesi olasılığı nedir?

$$P(AB|Ç) = \frac{P(A \cap B \cap Ç)}{P(Ç)} = \frac{P(A \cap B)}{P(Ç)} = \frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-p^3)}$$



Örnek 3

Bir hilesiz para iki kere atılsın.

E: 1. atışın tura olması

F: 2. atışın tura olması

G: 1. ve 2. atışın aynı olması

olayları olsun.

A) E ve F olayları bağımsız mıdır?

B) E ve G olayları bağımsız mıdır?

C) E, F ve G olaylarının üçü birden bağımsız mıdır?

Örnek 3

A) E ve F olayları bağımsız mıdır?

E: 1. atışın tura olması. $\rightarrow E = \{TY, TT\}$

F: 2. atışın tura olması. $\rightarrow F = \{YT, TT\}$

G: 1. ve 2. atışın aynı olması. $\rightarrow G = \{YY, TT\}$

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$

- $P(EF) = \frac{1}{4}$
- $P(E)P(F) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(EF) = P(E)P(F)$ Bağımsız

Örnek 3

B) E ve G olayları bağımsız mıdır?

E: 1. atışın tura olması. $\rightarrow E = \{TY, TT\}$

F: 2. atışın tura olması. $\rightarrow F = \{YT, TT\}$

G: 1. ve 2. atışın aynı olması. $\rightarrow G = \{YY, TT\}$

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$

- $P(EG) = \frac{1}{4}$
- $P(E)P(G) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(EG) = P(E)P(G)$ Bağımsız

Örnek 3

C) E, F ve G olaylarının üçü birden bağımsız mıdır?

E: 1. atışın tura olması. $\rightarrow E = \{TY, TT\}$

F: 2. atışın tura olması. $\rightarrow F = \{YT, TT\}$

G: 1. ve 2. atışın aynı olması. $\rightarrow G = \{YY, TT\}$

$S = \{YY, YT, TY, TT\}$

- $P(EFG) = \frac{1}{4}$
- $P(E)P(F)P(G) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $P(EFG) \neq P(E)P(F)P(G)$ Bağımsız değil.

Örnek 4

Bir sistemin her bir parçasının çalışma olasılığı p olarak verilmiştir. Bu sistem birbirinden bağımsız 5 parçadan oluşmaktadır. Sistemin çalışabilmesi için en az 2 parçasının çalışıyor olması gerekiyorsa, bu sistemin çalışıyor olma olasılığı nedir?

Örnek 4

Ç: Sistemin çalışıyor olma olayı olsun.

Ç1, Ç2, Ç3, Ç4, Ç5 sırasıyla 1, 2, 3, 4 ve 5. parçaların çalışıyor olma olayları olsun.

$P(\text{Ç}) = ?$

Tüm sistemin çalışmıyor olması en fazla 1 parçanın çalışıyor olması ile mümkündür. Bu durum iki şekilde oluşabilir.

- 5 parçanın tamamı çalışmaz

veya

- 1 parça çalışır ve diğer 4 parça çalışmaz

Örnek 4

$$P(Ç') = P(Ç1'Ç2'Ç3'Ç4'Ç5') + P(Ç1Ç2'Ç3'Ç4'Ç5') + P(Ç1'Ç2Ç3'Ç4'Ç5') + P(Ç1'Ç2'Ç3Ç4'Ç5') + P(Ç1'Ç2'Ç3'Ç4Ç5') + P(Ç1'Ç2'Ç3'Ç4'Ç5)$$

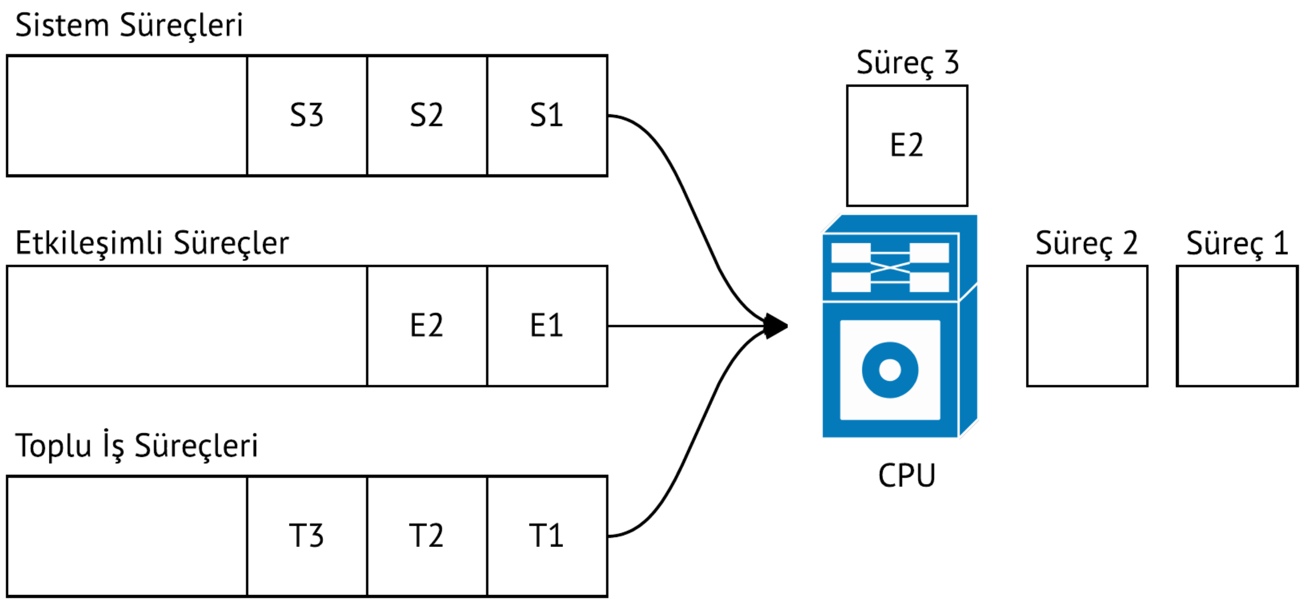
$$P(Ç') = (1-p)^5 + 5p(1-p)^4$$

Sistemin çalışıyor olması olasılığı

$$P(Ç) = 1 - P(Ç') = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4$$

Örnek 5

Bir CPU planlama algoritması 3 farklı kuyrukta bulunan süreçlerden çalıştırılacak olan süreci seçmektedir. 0,5 olasılıkla sistem süreçlerinden, 0,4 olasılıkla etkileşimli süreçlerden ve 0,1 olasılıkla toplu iş süreçlerinden seçim yapmaktadır. Yapılan seçimler birbirinden bağımsızdır. Bu durumda E2 sürecinin, 3. sırada seçilmesi olasılığı nedir?



Örnek 5

A: E2 sürecinin 3. sırada seçilmesi olayı olsun.

$$P(A) = P(S1E1E2) + P(T1E1E2) + P(E1S1E2) + P(E1T1E2)$$

$$P(A) = P(S1)P(E1)P(E2) + P(T1)P(E1)P(E2) +$$
$$P(E1)P(S1)P(E2) + P(E1)P(T1)P(E2)$$

$$P(A) = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}1 \times 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}4 +$$
$$0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}1 \times 0{,}4$$

$$P(A) = 0{,}192$$