Çevre Müh. Lineer Cebir Final Sınav Soruları 27.05.2015

S. 1)	$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ise $A+2X=BX$ eşitliğini sağlayan X matrisini bulunuz.
S.2)	$\left.\begin{aligned}x+y+z&=6\\ 2x+3y-3z&=9\\ -x+y+2z&=1\end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözüm kümesini **artırılmış matris** yöntemiyle bulunuz.
S.3)	$\left.\begin{aligned}x+y+z&=6\\ 2x+3y-3z&=9\\ -x+y+2z&=1\end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözüm kümesini **Cramer yöntemi**yle bulunuz.
S.4)	$\begin{vmatrix}a & b & b & b\\ b & a & b & b\\ b & b & a & b\\ b & b & b & a\end{vmatrix}$ Determinantının çarpım şeklinde eşitini bulunuz.
S.5)	$\left.\begin{aligned}x+2y-3z&=k\\ 2x+6y-11z&=2\\ x-2y+7z&=1\end{aligned}\right\}$ lineer denklem sisteminin çözümünü k ya göre irdeleyiniz.

NOT : Herhangi **dört soru**yu cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 60 dakikadır.

Çevre - LinCeb - Final (27.05.15) Çözümleri

1

(1) $A+2B=BX \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ den

$\begin{bmatrix} 2x+2 & 2y+1 \\ 2z & 2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 2x+4z & 2y+4t \end{bmatrix} \Rightarrow$ $2x+2=x \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$2z=2x+4z \Rightarrow 2x+2z=0 \Rightarrow x+z=0$ $\boxed{z=+2}$

$2y+1=y \Rightarrow y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

$2t-1=2y+4t \Rightarrow 2y+2t=-1 \Rightarrow 2.(-1)+2t=-1 \Rightarrow 2t=1 \Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{2}}$ olup

$\boxed{X=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}}$ bulunur.

(2) $[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{S_1+S_3}{\overset{-2S_1+S_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \overset{-2S_2+S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right]$ den

$L_1 \cdots\ x+y+z=6$
$L_2 \cdots\ y-5z=-3$
$L_3 \cdots\ 13z=13 \rightarrow \boxed{z=1}$

Bunu L_2 de yerine konulursa $y-5.1=-3 \Rightarrow \boxed{y=2}$

L_1 den $x+2+1=6$ dan $\boxed{x=3}$ olup

Lineer denklem sisteminin tek çözümü $(3,2,1)$ dir.

Çözüm kümesi ise $Ç=\{(3,2,1)\}$ dir.

(3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{matrix} = 6+2+3-(-3-3+4) = 11-(-2) = 13$

(Sarrus ile)

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36+9-3-(3-\cancel{18}+\cancel{18}) = 45-3-3 = 39$

(yıldız yöntemi ile)

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18+18+2+9+3-24 = 50-24 = 26$

Çevre Lin. Cebir Final (27.05.2015) Çözümleri ②

③ soruya devam ...

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-9+12+18-9-2 = 33-20 = 13$$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{13} = 1$ olup

$(3,2,1)$ sistemin tek çözümü, çözüm kümesi de $Ç = \{(3,2,1)\}$ dir.

④ 2, 3. ve 4. sütunlar 1. ye eklenirse

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} =$$

birinci sütuna göre Laplace açılımı

$$\underset{\substack{-S_1+S_4}}{\overset{\substack{-S_1+S_2 \\ -S_1+S_3}}{=}} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)\cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3b)\cdot 1 \cdot (a-b)^3 = (a+3b)\cdot(a-b)^3 \; // \text{ bulunur.}$$

⑤
$$[A,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & k \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right] \underset{-S_1+S_3}{\overset{-2S_1+S_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & k \\ 0 & 2 & -5 & 2-2k \\ 0 & -4 & 10 & 1-k \end{array}\right] \overset{2S_2+S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & k \\ 0 & 2 & -5 & 2-2k \\ 0 & 0 & 0 & 5-5k \end{array}\right]$$

olup eğer $5-5k=0$ ise yani $\boxed{k=1}$ ise sistemin (sonsuz) çözümü vardır. ($\text{rank}A = \text{rank}(A,B)$ dir.)

Eğer $5-5k \neq 0$ ise yani $k \neq 1$ ise son satır $0.x+0.y+0.z = 5-5k \neq 0$ olup (anlamsız denklem) sistem çözümsüzdür. Yani $\text{rank}A \neq \text{rank}(A,B)$ dir.

NOT: Çözümlerde işlem hatası varsa lütfen bildiriniz. (27.05.2015).