2.3.5. Lineer Diferansiyel Denklemler

$y' + P(x)y = Q(x) \rightarrow (I)$ Şeklindeki denklemler Lineer Diferansiyel Denklemlerdir. Bu denklemlerin genel çözümlerini bulmak için 2 farklı yöntem gösterilecektir.
1.Çözüm yolu: $u = u(x), v = v(x)$*yeni bağımlı değişkenler olmak üzere* $y = u.v$ *dönüşümü ile,*

$y = u.v$
$y' = u'v + uv'$

y ve y' İfadeleri *(I)* denkleminde yerine konulursa,

$u'v + uv' + P(x).uv = Q(x)$
$uv' + [u' + P(x).u]v = Q(x) \rightarrow (II)$

u ve *v*'yi öyle seçelim ki, $[u' + P(x).u] = 0$ olsun.

$u' + P(x).u = 0 \rightarrow$ Değişkenlerine ayrılabilir denklem

$$\frac{du}{dx} + P(x).u = 0$$

$\frac{du}{u} + P(x)dx = 0$ => $\int \frac{du}{u} + \int P(x)dx = \int 0$

$\ln u + \int P(x)dx = \ln C$ => $\ln u - \ln C = -\int P(x)dx$
$u = C.e^{-\int P(x)dx}$

(II) denkleminden kalan terimler,

$uv' = Q(x)$ Burada *u* yerine üstte bulunan ifade konulur.

$C.e^{-\int P(x)dx}v' = Q(x)$

$v' = \frac{Q(x)}{C.e^{-\int P(x)dx}}$ => $\int v' = \int \frac{1}{C} \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx$

$$v = \int \frac{1}{C} e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1$$

u ve *v*'yi, $y = u.v$'de yerine koyarsak,

$$y = C.e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int \frac{1}{C} e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1\right\}$$
$$y = e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C.C_1\right\}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1\right\}$$
Lineer diferansiyel denkleminin Genel Çözümüdür.

2.Çözüm Yolu: *Sabitlerin Değişimi Yöntemi ile,*

Eğer bir diferansiyel denklemin sağ tarafsız, homojen kısmı bulunabilirse bu çözümdeki *C* keyfî sabitleri *C(x)* değişkeni olarak kabul edilirse homojen çözüm yardımıyla diferansiyel denklemin genel çözümü elde edilebilir.

$$\underbrace{y' + P(x)y}_{\text{Homojen kısım}} = Q(x) \rightarrow (I)$$

Homojen Kısmın Çözümü:

$y' + P(x)y = 0 \rightarrow değişkenlerine\ ayrılabilir\ diferansiyel\ denklem$
Doğrudan çözülürse,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx = \int 0$$

$$\ln y + \int P(x)dx = \ln C$$

$$\ln y - \ln C = -\int P(x)dx$$

$$\ln \frac{y}{C} = -\int P(x)dx$$

$y = C.e^{-\int P(x)dx} \rightarrow (II)$ (Homojen kısmın çözümü)

Homojen kısmın çözümünde C yerine *C(x)* alındığında, $y = C(x).e^{-\int P(x)dx} \rightarrow (III)$ denkleminde *C(x)*bulunabilirse diferansiyel denklemin genel çözümüdür. O halde *(III)* denklemi diferansiyel denklemi sağlamalıdır. *y* ve y' *(I)* denkleminde yerine konulur.

$y = C(x).e^{-\int P(x)dx} \rightarrow (III)$
$y' = C'(x).e^{-\int P(x)dx} + (-1).C(x).P(x).e^{-\int P(x)dx}$ *(I)*'de yerine konulduğunda,

$$C'(x).e^{-\int P(x)dx} - C(x).P(x).e^{-\int P(x)dx} + P(x).C(x).e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$
$$C'(x).e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$
$$C'(x) = e^{\int P(x)dx}.Q(x) \rightarrow değişkenlerine\ ayrılabilir\ diferansiyel\ denklem$$

$$C(x) = \int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1$$

(III)'te yerine konulursa,

$$y = e^{-\int P(x)dx}.\left\{\int e^{\int P(x)dx}.Q(x)dx + C_1\right\}$$

Lineer diferansiyel denklemin Genel Çözümüdür.

Örnek: $y' + xy = x$ Lineer diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' + xy = x \rightarrow (I)$

$P(x) = x, Q(x) = x$ olmak üzere diferensiyel denklem Lineer Dif.Denklemdir.

1.Yöntem ile çözüm: *(*$y = u.v$ *dönüşümü ile)*

$y = u.v$ => $y' = u'v + uv'$ *(I)*'de yerine konulursa,

$u'v + uv' + xu.v = x$
$uv' + [u' + x.u]v = x \rightarrow (II)$

$u' + x.u = 0 \rightarrow değişkenlerine\ ayrılabilir\ diferansiyel\ denklem$

$\frac{du}{dx} + x.u = 0$

$\frac{du}{u} + xdx = 0 \rightarrow \int \frac{du}{u} + \int xdx = \int 0$

$\ln u + \frac{x^2}{2} = \ln C$ => $\ln u - \ln C = -\frac{x^2}{2}$

$\ln \frac{u}{C} = -\frac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{C} = e^{-x^2/2}$ den

$u = C.e^{-x^2/2}$

Şimdi (II)'den kalan terimleri ele alırsak;

$u.v' = x$

$C.e^{-x^2/2}.v' = x$

$v' = \frac{x}{C.e^{-x^2/2}}$ => $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{C}.\frac{x}{e^{-x^2/2}}$ => $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{C}.e^{x^2/2}.x$ => $dv = \frac{1}{C}.e^{x^2/2}.x.dx$

$dv = \frac{1}{C}.\int e^{x^2/2}.x.dx \rightarrow t = \frac{x^2}{2}, dt = x.dx$

$dv = \frac{1}{C}\int e^t dt$ => $v = \frac{1}{C}(e^t + C_1) = \frac{1}{C}\left(e^{x^2/2} + C_1\right)$

$v = \frac{1}{C}e^{x^2/2} + C_1$ bulunur.

Bulunan u , v ifadeleri $y = u.v$ de yerine konulursa,

$y = C.e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{C}e^{x^2/2} + C_1\right) = 1 + C.C_1.e^{-x^2/2} \rightarrow C.C_1 = C\ olarak\ yazılabilir.$

$\boldsymbol{y = 1 + C.e^{-x^2/2} \rightarrow denklemin\ Genel}$ **Çözümüdür.**

2. Yöntem ile çözüm: *(Sabitlerin değişimi yöntemi ile)*

$y' + xy = x \rightarrow (I)$ Lineer dif.denkleminin öncelikle Homogen kısmının çözümünü bulalım:

$\frac{dy}{dx} + xy = 0$ şeklindeki homogen kısım değişkenlerine ayrılabilen olduğundan doğrudan çözülebilir

$\int \frac{dy}{y} + \int xdx = \int 0$

$\ln y + \frac{x^2}{2} = \ln C$ şeklinde İntegraller alınıp düzeltildiğinde

$\ln \frac{y}{C} = -\frac{x^2}{2}$

$y = C.e^{-x^2/2} \rightarrow homojen\ kısmın$ çözümü bulunur.

Bu çözümde *C* yerine *C(x)* konularak

$y = C(x).e^{-x^2/2} \to (II)$, *(I)*'in genel çözümü olsun. O halde bu ifade diferansiyel denklemi sağlamalıdır. Buna göre

$y = C(x).e^{-x^2/2} \;=>\; y' = C'(x).e^{-x^2/2} + C(x).(-x).e^{-x^2/2}$
$y' = C'(x).e^{-x^2/2} - C(x).x.e^{-x^2/2}$

Şeklinde (II) deki y ve elde edilen y' ifadeleri

$y' + xy = x \to (I)$ de yerlerine konulursa

$C'(x).e^{-x^2/2} - C(x).x.e^{-x^2/2} + x.C(x).e^{-x^2/2} = x$

$C'(x).e^{-x^2/2} = x \;\; => C'(x) = \frac{x}{e^{-x^2/2}}$

$C'(x) = xe^{x^2/2}$ değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem çözülerek

$\int C'(x) = \int xe^{x^2/2}\,dx$
$C(x) = e^{x^2/2} + C_1$ şeklinde aranan C(x) ifadesi bulunur.

Bu ifade *(II)* denkleminde yerine konulursa,

$y = \left(e^{x^2/2} + C_1\right).e^{-x^2/2}$ Ve çarpma, düzeltme işlemleri yapılırsa,

$y = 1 + C.e^{-x^2/2} \to$ Lineer diferansiyel denklemin Genel Çözümüdür.