Ters Laplace Dönüşümü

Tanım: Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $L\{f(x)\}=F(s)$ olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise $f(x)$ e $F(s)$ nin Ters Laplace dönüşümü denir ve $L^{-1}\{F(s)\}=f(x)$ şeklinde gösterilir.

Ters Laplace dönüşümü hesaplanırken tablodan yararlanmak mümkündür. Ancak bu her zaman mümkün olamayabilir. Bu nedenle Laplace dönüşümü ile ilgili özellikler ters Laplace dönüşümü içinde uygulanabilir. Ayrıca ters Laplace dönüşümü hesaplanırken ilgili fonksiyon basit kesirlere ayrılarak veya tam kare şekline getirilerek sonuç elde edilebilir.

Örnek. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}=?$

$$\frac{s+4}{s^2+4s+8}=\frac{s+4}{(s+2)^2+4}=\frac{s+2+2}{(s+2)^2+(2)^2}=\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}+\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}+\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}=e^{-2x}\cos 2x+e^{-2x}\sin 2x$$

Örnek. $L^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^2\left(s^2-s-2\right)}\right\}=?$

$$\frac{8}{s^2\left(s^2-s-2\right)}=\frac{8}{s^2\left(s-2\right)\left(s+1\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-2}+\frac{D}{s+1}$$

$$A=-4,B=0,C=\frac{4}{3},D=\frac{8}{3}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2\left(s^2-s-2\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-4}{s}+\frac{\frac{4}{3}}{s-2}+\frac{\frac{8}{3}}{s+1}\right\}=-4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^2\left(s^2-s-2\right)}\right\}=-4+\frac{4}{3}e^{2x}+\frac{8}{3}e^{-x}$$

Örnek. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{\left(s-1\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=?$

$$\frac{2}{\left(s-1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{A}{\left(s-1\right)}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{\left(s-1\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{\left(s-1\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=e^x-\cos x-\sin x$$

Örnek. $L^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{6}{s^4}\right\}=?$

Laplace dönüşümü ile ilgili özelliklerden (v) dikkate alındığında verilen fonksiyonun ters

Laplace dönüşümünün $G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2\\ f(x-2), & x>2\end{cases}$ şeklinde olması gerektiği kolaylıkla

görülebilir. Burada $F(s)=\frac{6}{s^4}$ olup $L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\}=x^3$ olacaktır. Dolayısıyla

$f(x-2)=(x-2)^3$ ile $L^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{6}{s^4}\right\}=G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2\\ (x-2)^3, & x>2\end{cases}$ elde edilir.
