c_n ler reel sabitler ol. üz

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ şeklindeki seriye $x-x_0$'a göre

kuvvet serisi denir. x_0 açılımın merkezidir.

Adi Nokta, Adi Nokta Civarında Seri Çözümler

2. mrt. homojen lineer

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

denk ele alalım. Burada a_0, a_1 ve a_2 katsayıları, x ekseninin bir J alt aralığında, ortak bir çarpana sahip olmayan analitik fonk lardır.

<u>Tanım</u> J aralığının bir x_0 noktasında (1) denkleminin $a_0(x_0) \neq 0$ ise, x_0 noktasına (1) denk bir adi noktası denir. Eğer x_0, (1) denk adi nok değilse ona (1) denk tekil (aykırı) noktası denir.

Eğer x_0 da $a_0(x_0) \neq 0$ ise a_0 ın J aralığındaki sürekliliği, tüm $x \in I \subset J$ ler için $a_0(\cancel{x_0}) \neq 0$ olan x_0 merkezli bir I alt aralığının varlığını gerektirir. (1) in her iki

Dolayısıyla böyle bir aralık üz. de

tarafını $a_0(x)$ ile bölersek

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

normal formunu elde ederiz

Burada $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$

fonkları x_0 da analitiktir. Dolayısıyla

bir adi noktada $p(x)$ ve $q(x)$ analitiktir.

Teorem (2) deki $p(x)$ ve $q(x)$, x_0 da

analitik ise x_0 (2) veya (1)'in bir adi

noktası olur.

Ör $x=0$, $(2x+1)y'' + y' + 2y = 0$ denk

bir adi noktasıdır $x=0$ için $2x+1 = 1 \neq 0$

dır Yada $y'' + \frac{1}{2x+1} y' + \frac{2}{2\cancel{x+1}} y = 0$

denk de $p(x) = \frac{1}{2x+1}$ ve $q(x) = \frac{2}{2x+1}$

fonkları Taylor serisine açılabilir olur $|x| < \frac{1}{2}$ için

yakınsaktırlar

(Analitik Çözümlerin Varlığı)

<u>Teorem</u> (2)

Eğer $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ x_0 da analitik ve

denk deki p ve q katsayıları yakınsak kuvvet serisi

ortak $|x - x_0| < R$ aralığında yakınsak kuvvet serisi

açılımlarına sahip iseler, (2) nin her çözümü

x_0 da analitiktir ve çözümlerin kuvvet serisine

...ılımı hiç olmazsa $|x-x_0|<R$ aralığında yakınsaklar.

Bu teorem, p ve q nun x_0 da analitik

...l. halinde (2) denkleminin

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$ biçiminde

çözümlere sahip old ifade eder.

Burada a_n ler bulunması gereken

sabitlerdir.

SERİLERLE ÇÖZME YÖNTEMİ

Serilerle çözme yöntemini çözümünü bildiğimiz metodlarla çözemediğimiz denklemler için kullanıyoruz.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

şeklindeki denklemde $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları sürekli olacaklar. Bu denklemde $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik ise x_0 noktası bu denklemin bir adi noktasıdır.

Bu fonksiyonların herhangi biri x_0 noktasında analitik değil ise x_0 noktası denklemin aykırı noktasıdır.

x_0 noktası denklemin aykırı noktası olmakla beraber

$(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2P(x)$

fonksiyonları analitik ise bu durumda x_0 noktası verilen denklemin düzgün aykırı noktasıdır. Bu şartların biri yada ikisi analitik değil ise, bu durumda $x=x_0$ noktası verilen denklemin düzgün olmayan aykırı noktasıdır.

Adi nokta komşuluğunda serilerle çözme.

$x=x_0$ noktası verilen denklemin bir adi noktası ise, bu durumda

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

şeklinde bir çözüm aranır. Dolayısıyla çözüm

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \equiv a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

biçimindedir. $x=x_0$ noktasında bir çözüm için ise $x-x_0=t$ denilerek $y=\sum a_nt^n$ biçiminde bir çözüm aranır.

Soru $(x^2-1)y''+xy'-y=0$; $x_0=0$ noktası komşuluğunda serilerle çözümünü bulunuz.

$P(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ve $Q(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}$ $\quad P(0)=0,\ Q(0)=1$ dir.

Dolayısıyla analitiktir $x_0=0$ noktası denklemin bir adi noktasıdır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Bunları denklemde yerine yazarak

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n + n a_n - a_n\right]x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 0$$

$$n^2-n+n-1 = (n-1)(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 0$$

$n \to n+2 \Rightarrow$ x'in kuvvetlerini dengelemek için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n-1)(n+1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}\right\}x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)(n+1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{n-1}{n+2}a_n \quad ; \quad n \geq 0$$ katsayılar arasındaki bağıntıyı veren indirgeme formülüdür.

$n=0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_0$

$n=1 \Rightarrow a_3 = 0 \cdot a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_3 = 0$

$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4}a_2$

$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{2}{5}a_3 \quad . \; a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$ olacağından a_3'ten sonra gelen bütün tek a_3 katsayısına bağlı olarak katsayılar sıfırdır.

$$\Rightarrow n = 2n-2 \Rightarrow a_{2n} = \frac{2n-3}{2n}a_{2n-2} \quad n \geq 1$$

$2.4.6 \ldots 2n$
$2.1 \; 2.2 \; 2.3 \quad 2.n$
$= 2^n(1.2.3 \ldots n)$

$$\Rightarrow a_{2n} = -\frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2.4.6 \ldots 2n}a_0 \quad , n \geq 1$$

$$= -\frac{1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n(1.2.3 \ldots n)}a_0 = \frac{(-1)\,3.5 \ldots (2n-3)}{2^n\, n!}a_0 \quad , n \geq 1$$

$$\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$$

$$\Rightarrow y = a_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1).3.5 \ldots (2n-3)}{2^n\, n!}x^{2n}\right) + a_1 x$$

aranan çözümdür.

Soru: $y''+xy'+2y=0$ denkleminin $x=0$ noktası kom
daki çözümünü bulunuz.

$P(x)=x$, $Q(x)=2$ $\quad P(0)=0$ olduğundan $x=0$ no
tası bir adi noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

Bunları denklemde yerine yazalım

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n\}x^n + (2a_2+2a_0) = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{1}{n+1}a_n$$

$n=0 \Rightarrow a_2=-a_0$, $\quad n=1 \Rightarrow a_3=-\frac{1}{2}a_1$

$n=2 \Rightarrow a_4=-\frac{1}{3}a_2=\frac{a_0}{3}$, $\quad n=3 \Rightarrow a_5=-\frac{a_3}{4}=\frac{a_1}{2\cdot 4}$

$n=4 \Rightarrow a_6=-\frac{a_4}{5}=-\frac{a_0}{3\cdot 5}$, $\quad n=5 \Rightarrow a_7=-\frac{a_5}{6}=-\frac{a_1}{2\cdot 4\cdot 6}$

$n=6 \Rightarrow a_8=-\frac{a_6}{7}=\frac{a_0}{3\cdot 5\cdot 7}$, $\quad n=7 \Rightarrow a_9=-\frac{a_7}{8}=\frac{a_1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$

$n=2n \Rightarrow a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$, $\quad n=2n+1 \Rightarrow a_{2n+1}=(-1)^n\frac{a_1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

$$\Rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y = a_0\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{3\cdot 5} + \frac{x^8}{3\cdot 5\cdot 7} - \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right]$$

Aranan çözümdür.

3- $y'' + xy' + (x^2-3)y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ noktası etrafındaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x = 0$ noktası adi noktadır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Bunları denklemde yerine yazalım.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2-3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$n \to n+2$ $\qquad$ $n \to n-2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Bu denklemde $n=0$ ve $n=1$ için ifadeleri yazacak olursak

$$(2a_2 - 3a_0) + (6a_3 - 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-3)a_n + a_{n-2}\right\} x^n = 0$$

$$\Rightarrow 2a_2 - 3a_0 = 0$$
$$6a_3 - 2a_1 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-3)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n \geq 3$$

$\Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} a_0, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1$ ve indirgeme bağıntısı

$$a_{n+2} = -\frac{(n-3)a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = -\frac{-a_2 + a_0}{12} = -\frac{-\frac{3}{2}a_0 + a_0}{12} = -\frac{a_0}{24}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = -\frac{a_1}{20}$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = -\frac{37}{720} a_0$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = -\frac{a_1}{180}$$

$$\Rightarrow y = a_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{180}x^7 + \cdots\right)$$

çözümüdür

Ör 7 $y'' - xy' + 2y = 0$ denk $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri ile elde ediniz.

$x=0$ adi nokta old. dan

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) - (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots)$$
$$+ (2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots) = 0$$

$$(2a_2 + 2a_0) + (6a_3 - a_1 + 2a_1)x + (12a_4 - 2a_2 + 2a_2)x^2 +$$
$$+ (20a_5 - 3a_3 + 2a_3)x^3 + \cdots = 0$$

$2a_2 + 2a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_0$

$6a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-1}{6} a_1$

$12a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$

$20a_5 - a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{20} a_3 = -\frac{1}{120} a_1$

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{-1}{120} a_1 x^5 + \cdots$$
$$= a_0(1 - x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{120} x^5 - \cdots\right)$$