16-17 YAZ MAT-I (Cev-End-E.E.) Final Soruları   27.07.2017

S.1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + \log \dfrac{5+x}{6-x}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.
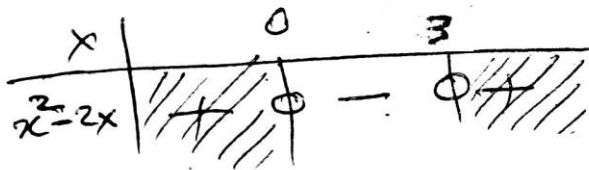
S.2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{\operatorname{Arctan} 3x^2}$ limitini **a)** Hospital'siz (özel limitlerden yararlanarak), **b)** Hospital ile hesaplayınız.

S.3) $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{a}$ fonksiyonunun türevini alınız ve sonucunuzu en sade biçimde yazınız $(a \in \mathbb{R}^+)$.

S.4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları ve varsa ekstremum noktalarını, konkav ve konveks olduğu aralıkları ve varsa büküm noktasını bulunuz.
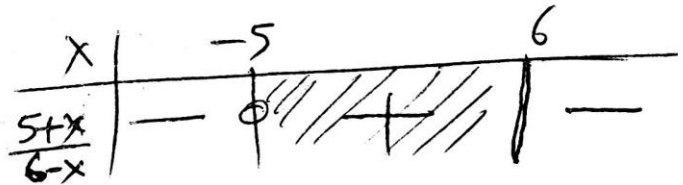
① $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} + \log \dfrac{5+x}{6-x}$ fo.nunun en geniş tanım aralığı?

$x^2 - 3x \geqslant 0$ olmalı $\Rightarrow$ $x(x-3) \geqslant 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & & 3 & \\ \hline x^2 - 2x & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$A_1 = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

$\dfrac{5+x}{6-x} > 0$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_3 = -5 \\ x_5 = 6 \end{array}$

$$\begin{array}{c|ccc} x & & -5 & & 6 & \\ \hline \dfrac{5+x}{6-x} & - & 0 & + & | & - \end{array}$$

$A_2 = (-5, 6)$

$A = A_1 \cap A_2 = (-5, 0] \cup [3, 6)$ dır.

2

(2) a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{Arctan\,3x^2} \overset{\%}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 2x}{Arctan\,3x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \cdot (2x)^2}{\dfrac{Arctan\,3x^2}{3x^2} \cdot 3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot 4x^2}{3x^2} \cdot \dfrac{\overbrace{\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2}^{=1}}{\underbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Arctan\,3x^2}{3x^2}}_{=1}}$

$= \dfrac{8}{3} \;\text{//} \qquad \text{bulunur.}$

---

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{Arctan\,3x^2} \overset{\%}{\underset{H\!s\!p}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{+(\sin 4x) \cdot 4}{\dfrac{(3x^2)'}{1+(3x^2)^2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cdot (1+9x^4) \cdot \sin 4x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{4(1+9x^4)}_{=4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{6x} \overset{\%}{\underset{H\!s\!p}{=}}$

$= 4 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\underbrace{\cos 4x}_{\to 1}}{6} = \dfrac{4 \cdot 4}{6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} \;\text{//} \quad \text{bulunur}$

③ $f(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ ise $f'(x) = ?$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \cdot \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + a^2 \cdot \frac{\frac{1}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \frac{a^2 - 2x^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 2 \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \cdot \frac{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{(a^2 - x^2)} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$
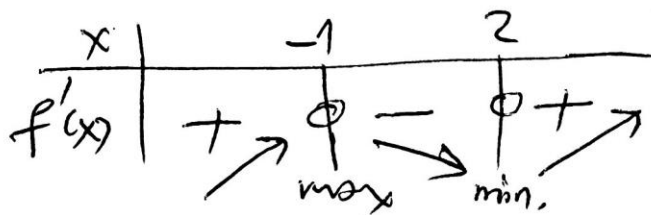
bulunur

4

④ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$

$f'(x) = 0 \iff 6(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 2$
kritik noktalar

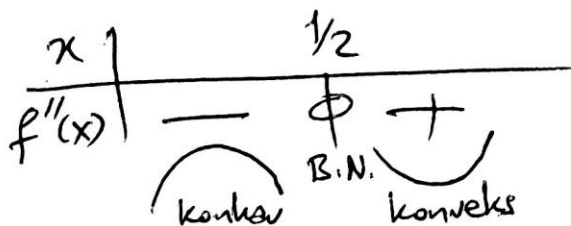$(-\infty, -1)$ ve $(2, \infty)$ aralıklarında artan $(-1, 2)$ de azalan

$x_1 = -1$ de max. $x_2 = 2$ de min. var

$f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7 \Rightarrow (-1, 7)$ max. noktası.

$f(2) = 16 - 12 - 24 = -20 \Rightarrow (2, -20)$ min. noktasıdır

$f''(x) = 6(2x - 1)$ olup

$f''(x) = 0 \iff x_3 = -\frac{1}{2}$ kritik nokta.

$x_3 = \frac{1}{2}$ de fo.nun Büküm noktası var

$(-\infty, \frac{1}{2})$ de konkav (tümsek)

$(\frac{1}{2}, \infty)$ da konveks (çukur)

$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} - 12 \frac{1}{2} = -\frac{13}{2} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, -\frac{13}{2})$ noktası büküm noktası.

5