IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

HİPOTEZ TESTİ - 2

İçerik

t Testi

t Dağılımı

Çift Yanlı t Testi

Tek Yanlı t Testi

t Dağılımı Özet

İki Normal Yığının Ortalamalarının Eşitlik Testi

t Testi

Önceki sunuda varyansın bilindiği, fakat beklentinin bilinmediği durumlar incelendi.

Hem beklentinin hem de varyansın bilinmediği durumlar da vardır.

Bu durumlarda **t Testi** uygulanır.

Hem beklentinin hem de varyansın bilinmediği durumda aşağıdaki sıfır hipotezini (H_0), alternatif hipotezine (H_1) karşı test edelim.

- $H_0: \mu = \mu_0$
- $H_1: \mu \neq \mu_0$

Burada σ^2 bilinmediği için sıfır hipotezi artık basit hipotez değildir.

t Testi

Önceki gibi sıfır hipotezini, örnek ortalaması $(\bar{X})$, μ_0'dan çok uzakta olduğunda reddetmek anlamlıdır.

Fakat varyansın bilinmediği durumda örnek ortalamasının μ_0'dan ne kadar uzakta olabileceği ise örnekten hesaplanacak varyansa bağlıdır.

t Testi

Artık varyans da bir bilinmeyen olduğu için, varyansı aşağıdaki örnek varyansı ile tahmin edebiliriz.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Bu durumda H_0'ı aşağıdaki T değeri büyük olduğunda reddetmek anlamlı olur.

$$T = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu_0)$$

t Testi

Hipotezi reddetmek için T'nin ne kadar büyük olacağını belirlemek gerekir.

T'nin ne kadar büyük olacağını belirlemek için H_0 doğru iken T'nin dağılımına bakmalıyız.

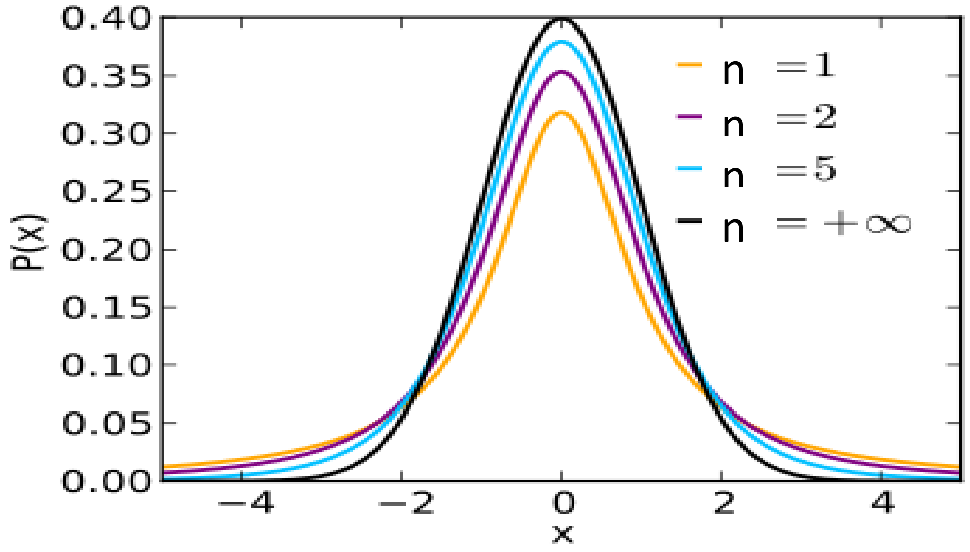
T istatistiği, $\mu = \mu_0$ olduğunda serbestlik derecesi $n - 1$ olan bir **t dağılımına** sahiptir.

t Dağılımı

Serbestlik derecesi n olan bir t dağılımı, sıfır etrafında simetrik ve standart normal dağılıma benzeyen bir eğriye sahiptir.

$$P(T_n \geq t_{\alpha,n}) = \alpha$$

Farklı α ve n değerleri için $t_{\alpha,n}$ değerlerini gösteren tablolar mevcuttur.



Bu şekil wikipedia.org'dan alınmıştır.

Çift Yanlı t Testi

$$P\big((T < -c) \cup (T > c)\big) = 2 \times P(T > c) = \alpha \ \rightarrow P(T > c) = \alpha/2$$

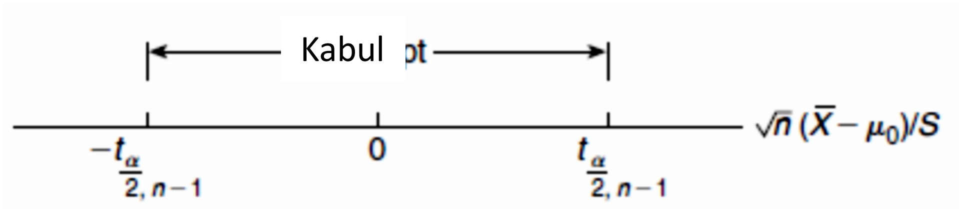
$$c = t_{\alpha/2,n-1}$$

Çift Yanlı t Testi

$H_0\!: \mu = \mu_0$

$H_1\!: \mu \neq \mu_0$

- $\frac{\alpha}{2}$ değerini kullanarak
- t tablosunda $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$'i bul.
- T'yi bul. $T = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu_0)$



Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}$ ise
- reddet, eğer $T > t_{\alpha/2,n-1}$ veya $T < -t_{\alpha/2,n-1}$ ise

t Tablosu

Örneğin, 10 elemanlı bir örnekte $\alpha = 0,05$ önem seviyesine karşılık gelen $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0,025,9} = 2,262$ olur.

	α											
n	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	15.890	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781

Örnek 1

Kolesterol seviyesi orta ve yüksek seviye olan hastalar arasından kolesterolü düşüren yeni bir ilacı test etmek için gönüllüler seçiliyor. 50 gönüllüye 1 ay boyunca ilaç veriliyor ve kolesterol değişimi gözleniyor. Eğer kolesterol düşümü ortalama 14,8 ve örnek standart sapması 6,4 ise bundan nasıl bir sonuç çıkartırız? 0,05 önem seviyesi için hesaplayarak inceleyiniz.

Örnek 1

Kolesterol düşümü olup olmadığını test edelim.

- $H_0 : \mu = 0$
- $H_1 : \mu \neq 0$

$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0,025,49} \cong 2{,}009$

$T = \frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{50}}{6{,}4}(14{,}8 - 0) = 16{,}352$

$16{,}352 > 2{,}009$ olduğu için sıfır hipotezi reddedilir. Karşı hipotez kabul edilir yani kolesterol düşümü olduğu söylenir.

Fakat hastaların kolesterol seviyelerinde meydana gelen düşmenin ilaç kaynaklı olup olmadığı kanıtlanmış değildir.

Örnek 2

Halk sağlığı müdürlüğü ortalama musluk suyu kullanımının ev başına günlük 350 litre olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 20 ev rastgele seçilmiş ve günlük su kullanımları aşağıdaki gibi kaydedilmiştir.

340	344	362	375	318
356	386	354	364	360
332	402	340	355	338
362	322	372	324	370

Bu veri iddia ile tutarlı mıdır?

Örnek 2

340	344	362	375	318
356	386	354	364	360
332	402	340	355	338
362	322	372	324	370

Verilerin ortalaması $353{,}8$ ve standart sapması $21{,}8478$

Örnek 2

Önem seviyesi $\alpha = 0{,}1$ olsun (Hata Tipi I olasılığı %10 olsun).

- $H_0: \mu = 350$
- $H_1: \mu \neq 350$

$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}05,\ 19} = 1{,}73$

$T = \frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{20}}{21{,}8478}(353{,}8 - 350) = 0{,}7778$

$-1{,}730 < 0{,}7778 < 1{,}730$ olduğu için sıfır hipotezi kabul edilir.

Veriler yetkilinin iddiası ile tutarlıdır.

Tek Yanlı t Testi

Hipotez test problemi:

- $H_0: \mu = \mu_0$ (veya $\mu \leq \mu_0$)
- $H_1: \mu > \mu_0$

Bu hipotez testi, varyans bilindiği durumdaki tek yanlı teste benzer.

- α değerini kullanarak
- t tablosunda $t_{\alpha,n-1}$'i bul.
- T'yi bul. $T = \frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $T \leq t_{\alpha,n-1}$ ise
- reddet, eğer $T > t_{\alpha,n-1}$ ise

Tek Yanlı t Testi

Hipotez test problemi:

- $H_0: \mu = \mu_0$ (veya $\mu \geq \mu_0$)
- $H_1: \mu < \mu_0$

- α değerini kullanarak
- t tablosunda $t_{\alpha,n-1}$ ‘ i bul.
- T’yi bul. $T = \frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{X} - \mu_0)$

Daha sonra H_0’ı;

- kabul et, eğer $T \geq -t_{\alpha,n-1}$ ise
- reddet, eğer $T < -t_{\alpha,n-1}$ ise

Örnek 3

Bir lastik üreticisi, ürettiği lastiklerin ortalama ömrünün 40000km'den fazla olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 12 adet lastik test edilmiş ve yaşam süreleri aşağıdaki gibi kaydedilmiştir. (Birim x1000km).

Lastik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yaşam Süresi	36,1	40,2	33,8	38,5	42	35,8	37	41	36,8	37,2	33	36

Üreticinin iddiasını %5 önem seviyesine göre test edin.

Örnek 3

Lastik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yaşam Süresi	36,1	40,2	33,8	38,5	42	35,8	37	41	36,8	37,2	33	36

Bu verilerin ortalaması 37,2833 ve standart sapması 2,7319.

Örnek 3

Önem seviyesi : %5

$H_0: \mu \leq 40$

$H_1: \mu > 40$

$t_{\alpha,n-1} = t_{0,05,\,11} = 1,796$

$T = \frac{\sqrt{n}}{s}(\bar{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{12}}{2,7319}(37,2833 - 40) = -3,4448$

$-3,4448 < 1,796$ olduğundan sıfır hipotezi kabul edilir.

Veriler üreticinin iddiası ile tutarsızdır.

Özet

Özet

Varyansın Bilinmediği Durum - t Testi		
$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	$T = \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu_0)$	
Çift Yanlı t Testi H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$	Tek Yanlı t Testi H_0: $\mu = \mu_0$ veya $(\mu \leq \mu_0)$ H_1: $\mu > \mu_0$	Tek Yanlı t Testi H_0: $\mu = \mu_0$ veya $(\mu \geq \mu_0)$ H_1: $\mu < \mu_0$
H_0 kabul: $-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}$	H_0 kabul: $T \leq t_{\alpha,n-1}$	H_0 kabul: $T \geq -t_{\alpha,n-1}$
H_0 ret: $T > t_{\alpha/2,n-1}$ veya $T < -t_{\alpha/2,n-1}$	H_0 ret: $T > t_{\alpha,n-1}$	H_0 ret: $T < -t_{\alpha,n-1}$

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

Bazen iki farklı yaklaşımın aynı sonucu verip vermediğine karar vermek isteriz.

Bu durumda iki normal yığının aynı ortalama değere sahip olması hipotezini test ederiz.

$X_1, X_2, \dots, X_n$, ortalaması (μ_x) bilinmeyen ama varyansı (σ_x^2) bilinen bir yığından n elemanlı rastgele seçilen örnek olsun.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, ortalaması (μ_y) bilinmeyen ama varyansı (σ_y^2) bilinen başka bir yığından m elemanlı rastgele seçilen örnek olsun.

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

X değerlerinin örnek ortalaması, μ_x'i tahmin etmek için kullanılabilir.

Y değerlerinin örnek ortalaması, μ_y'yi tahmin etmek için kullanılabilir.

Bu ortalamaların farkı ise, $\mu_x - \mu_y$*'yi* tahmin etmek için kullanılabilir.

Bu durumda $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ yazılabilir.

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

Hipotez test problemi:

- $H_0: \mu_x = \mu_y \ veya \ \mu_x - \mu_y = 0$
- $H_1: \mu_x \neq \mu_y \ veya \ \mu_x - \mu_y \neq 0$

Bu durumda H_0'ı;

- kabul et, eğer $-c \leq (\bar{X} - \bar{Y}) \leq c$ ise
- reddet, eğer $(\bar{X} - \bar{Y}) < -c$ veya $(\bar{X} - \bar{Y}) > c$ ise

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

α önem seviyesinde c değerini belirlemek için örnek ortalamalarının birbirlerinden uzaklığının hipotez doğru iken dağılımına bakmalıyız.

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$$

$$P\big((\bar{X} - \bar{Y} < -c) \cup (\bar{X} - \bar{Y} > c)\big)$$

$$= P\left(\left(Z < \frac{-c-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}}\right) \cup \left(Z > \frac{c-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}}\right)\right) = \alpha$$

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

$$P\left(\left(Z < \frac{-c}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\right) \cup \left(Z > \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\right)\right) = 2 \times P\left(Z > \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\right) = \alpha$$

$$P\left(Z > \frac{c}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\right) = \alpha/2 \Rightarrow c = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

Hipotez test problemi (Çift Yanlı):

$H_0: \mu_x = \mu_y$

$H_1: \mu_x \neq \mu_y$

- $1 - \frac{\alpha}{2}$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda $z_{\alpha/2}$'yi bul.
- Z'yi bul. $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$ ise
- reddet, eğer $Z > z_{\alpha/2}$ veya $Z < -z_{\alpha/2}$ ise

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

Hipotez test problemi (Tek Yanlı):

$H_0: \mu_x = \mu_y$ veya $(\mu_x \leq \mu_y)$

$H_1: \mu_x > \mu_y$

- $1-\alpha$ değerini kullanarak
- Standart Normal Dağılım tablosunda z_α'yi bul.
-
- Z'yi bul. $Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}}$

Daha sonra H_0'ı;

- kabul et, eğer $Z \leq z_\alpha$ ise
- reddet, eğer $Z > z_\alpha$ ise

Örnek 4

Araç lastiği üretmek için iki yeni yöntem geliştirilmiştir. Hangisinin daha iyi olduğuna karar vermek için birinci yöntemi kullanarak 10 lastik ve ikinci yöntemi kullanarak 8 lastik üretilmiştir.

Birinci yöntemle üretilen lastikler test edilmiş ve ömür ortalamaları 61550 km olarak hesaplanmıştır. Yaşam sürelerinin standart sapması 4000 km olan bir Normal dağılımla ifade edildiği biliniyor.

İkinci yöntemle üretilen lastikler ise test edilmiş ve ömür ortalamaları 60025 km olarak hesaplanmıştır. Yaşam sürelerinin standart sapması 6000 km olan bir Normal dağılımla ifade edildiği biliniyor.

Üretici bu testler sonucunda iki yöntemin eşdeğer olduğunu düşünüyorsa, üreticinin bu iddiasını %5 önem seviyesi için test edin?

Örnek 4

1000km birim ile;

Birinci metotla ortalama yaşam süresi 61,55 ve standart sapma 4.

İkinci metotla ortalama yaşam süresi 60,025 ve standart sapma 6.

Önem seviyesi %5.

- $H_0: \mu_x = \mu_y$
- $H_1: \mu_x \neq \mu_y$

$$z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} = \frac{61,55 - 60,025}{\sqrt{\frac{16}{10} + \frac{36}{8}}} = 0,6175$$

- $-1,96 < 0,6175 < 1,96$ için sıfır hipotezi kabul edilir.

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi

Özet

İki Normal Yığının Ortalamalarının Testi $Z = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$	
Çift Yanlı Test H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$	Tek Yanlı Test H_0: $\mu = \mu_0$ veya $(\mu \leq \mu_0)$ H_1: $\mu > \mu_0$
H_0 kabul: $-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}$	H_0 kabul: $Z \leq z_\alpha$
H_0 ret: $Z > z_{\alpha/2}$ veya $Z < -z_{\alpha/2}$	H_0 ret: $Z > z_\alpha$