Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği MAT-I Final Sınavı 25.12.2017

1.) **a)** $\lim_{x\to 0^-}\left(1-2^x\right)^{\sin x} = ?$ **(15P)** **b)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında süreklilik durumunu inceleyiniz. **(10P)**

2.) **a)** $x+y=e^{x-y}$ olmak üzere $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$ **(15P)**

b) $f(x)=\arctan x+\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunun türevini en sade şekilde bulunuz. **(10P)**

3.) **AŞAĞIDAKİ ŞIKLARDAN YALNIZCA BİRİNİ CEVAPLANDIRINIZ**

a) Türevi $y'=(x-1)^2\left(x^2-6x+8\right)$ olan bir $y=f(x)$ fonksiyonunun artan-azalan olduğu, konkav- konveks olduğu aralıkları ve ekstremum ile büküm noktalarını bulunuz. **(20P)**

b) Hacmi 16 cm^3 olacak şekilde bir silindir kutu yapılmak isteniyor. En az malzeme kullanarak bu kutuyu yapmak için olması gereken silindir yüksekliği ve taban yarıçapı ne olmalıdır? Bulunuz. **(20P)**

4.) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ fonksiyonunun, gerekli tüm irdelemeleri yaparak (tanım kümesi, eksenleri kestiği noktalar, asimptotlar, birinci ve ikinci türevler ve değişim tablosu ile birlikte), grafiğini çiziniz. **(30P)**

NOT: Süre 90 dakikadır. **Başarılar dileriz.**

Elek-Elok / MAT-I / Final 25.12.2017

① a) $\lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\sin x} = ? = 0^0$ b.h. $y=(1-2^x)^{\sin x} \Rightarrow$

$\ln y = \sin x.\ln(1-2^x) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\ln y = \lim_{x\to 0^-}\sin x.\ln(1-2^x) \overset{0.(-\infty)}{=}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}} \underset{L'Hsp}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-2^x\ln 2}{1-2^x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2^x\ln 2}{-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{1-2^x}$$

$$= +\frac{2^0.\ln 2}{\cos 0}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{1-2^x} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}} (\ln 2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\cos x}{-2^x.\ln 2}$$

$$= (\ln 2)\cdot\frac{2\sin 0.\cos 0}{-2^0.\ln 2} = (\ln 2)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\ln y = \ln(\lim_{x\to 0^-} y) = 0$$ olup

$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\sin x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$ // bulunur

---

① b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ f.nunun $x_0=0$ noktasındaki süreklilik durumu?

$f(0)=0$, $x=0$ da f. tanımlı

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-\cancel{\sin x}}{\cos x}}{2\cancel{\sin x}.\cos x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{2\cos^2 x} = -1/2$$ olup

$x_0=0$ da $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0)$ olduğunda f. süreksizdir

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}{2\cancel{\sin x}.\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$ olup

$x_0=0$ da f.nun kaldırılabilir süreksizliği vardır.

E.E. / MAT-I / Final 25.12.2017

2) a) $x+y=e^{x-y} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=?$

$1+y'=(1-y')\cdot e^{x-y}$ dır. Bunun tekrar türevi alınırsa

$0+y''=(0-y'')\cdot e^{x-y}+(1-y')\cdot(1-y')\cdot e^{x-y}$ den

$y''=-y''\cdot e^{x-y}+(1-y')^2\cdot e^{x-y} \Rightarrow (1+e^{x-y})\cdot y''=(1-y')^2\cdot e^{x-y}$

$y''=\frac{(1-y')^2\cdot e^{x-y}}{1+e^{x-y}}$ olup burada y' yü yukarıdaki ilk eşitlikten çekersek

$1+y'=(1-y')\cdot e^{x-y} \Rightarrow (1+e^{x-y})\cdot y'=e^{x-y}-1 \Rightarrow y'=\frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}$

olup bunu ikinci türevde yerine yazmakla

$$y''=\frac{\left(1-\frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}\right)^2\cdot e^{x-y}}{1+e^{x-y}}=\frac{\left(1+\cancel{e^{x-y}}-\cancel{e^{x-y}}+1\right)^2\cdot e^{x-y}}{(1+e^{x-y})^2\cdot(1+e^{x-y})}=\frac{4\cdot e^{x-y}}{(e^{x-y}+1)^3}$$

---

2) b) $f(x)=\text{Arctan}x+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\text{Arctan}x+\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\cancel{x}+(1+\cancel{x})}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{1-x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{1-\cancel{x^2}+1+\cancel{x^2}}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2}{1-x^4}$ bulunur.

17-18/ E.E / MAT-I / Final　　　25.12.2017

③ a) $y' = (x-1)^2 \cdot (x^2-6x+8)$

$$y'' = 2(x-1)(x^2-6x+8) + (x-1)^2 \cdot (2x-6) = (x-1)\left[2x^2-12x+16+(x-1)(2x-6)\right]$$

$$y'' = (x-1)\cdot(2x^2-12x+16+2x^2-8x+6) = (x-1)(4x^2-20x+22)$$

$$y'' = 2(x-1)(2x^2-10x+11) = 0 \Rightarrow x_0 = 1,\quad x_{1,2} = \frac{+10 \mp \sqrt{100-88}}{2\cdot 2} = \frac{10 \mp \sqrt{12}}{4}$$

$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{5-\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$　y'' için kritik noktalar.

$y' = 0 \iff (x-1)^2 \cdot (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$ noktaları y' için kritik noktalar.

x		1		2		4	
y'	+	0	+	0	−	0	+
	↗		↗	max	↘	min	↗

$(-\infty, 2)$ ve $(4, +\infty)$ aralıklarında artan, $(2,4)$ de azalan.

$x=2$ apsisli noktada yerel max.; $x=4$ apsisli noktada yerel min. var.

x		1		$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$	
y''	−	0	+	0	−	0	+
	konkav	B.N	konveks	B.N	konkav	B.N.	konveks

$(-\infty, 1)$ ve $\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$ aralıklarında konkav

$\left(1, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$ ve $\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ aralıklarında konveks.

$x = 1, \frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ apsisli noktalarda büküm noktasına sahiptir.

Elek–Elok / MAT–I / Final 25.12.2017

(3) b) silindirin yüzey alanı: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

silindirin hacmi: $V = \pi r^2 \cdot h$ dır.

$V = 16 \text{ br}^3$ olarak verildiğine göre

$\pi r^2 h = 16$ dan $h = \dfrac{16}{\pi r^2}$ olup bunu yüzey alanı

formülünde yerine yazmakla

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$ dır. Bu yüzey

alanı fonu $S(r)$ nin r'ye göre türevi alınırsa

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{32}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 8)}{r^2}$$ olup

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(\pi r^3 - 2^3)}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{4}{r^2}\left(\sqrt[3]{\pi}\cdot r - 2\right)\underbrace{\left(\sqrt[3]{\pi^2}\cdot r^2 + \sqrt[3]{\pi}\, r + 4\right)}_{\Delta<0 \text{ reel kök yok.}} = 0$$

olup $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r_0 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dır.

türevin işaret tablosunda işaret, sadece $(\sqrt[3]{\pi}\, r - 2)$ çarpanına göre değişir. ikinci çarpan ve paydadaki r^2 daima pozitif olup

r	0		$2/\sqrt[3]{\pi}$	
$S'(r)$		$-$ ↘	0 min.	$+$ ↗

(veya $S''(r) = 4\pi + \dfrac{64}{r^3}$ den $S''(r_0) = S''\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$ dır. Yani

$r_0 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ de yerel minimum vardır.)

Böylece yükseklik de $$h = \frac{16}{\pi\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{16}{\pi \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{\pi^2}}} \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}}{\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}}$$

den $$h = \frac{\cancel{16}}{\cancel{\pi} \cdot \frac{\cancel{16}}{\cancel{\pi}}} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}}$$ br bulunur. Yani $h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}} = 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r_0$ dır!

E.E / MAT-I / Final

(4) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ in detaylı inceleme ile grafiği?

1° $T.A=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2° $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\overbrace{x^2+x+1}^{(+)}}{\underbrace{x-1}_{(-)}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\overbrace{x^2+x+1}^{(+)}}{\underbrace{x-1}_{(+)}}=+\infty$; $x=1$ Düşey asimp.

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$ olup eğik asimp. olabilir

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & x+2 \\ 2x+1 & \\ \underline{2x-2} & \\ 3 & \end{array} \Rightarrow y=x+2 \text{ eğik asimp.}$$

3° $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$; $x_{1,2}=1\mp\sqrt{3}$ ve $x_3=0$ (katlı kök) kritik noktalar

$f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$ $\quad x_1=x_2=x_3=1$ kritik nokta.

4° $x=0$ için $y=-1$, $y=0$ için x reel sayısı yok. (Yani Ox-eks.ni kesmez.)

$f(1-\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$, $f(1+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$

5°

y	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$		0		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−		−	‖	−	0	+	
$f''(x)$	−		−		−	‖	+		+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$3-2\sqrt{3}$ max.	↘	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$3+2\sqrt{3}$ min	↗	$+\infty$
	konkav						konveks			

6° grafik