SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Ayrık İşlemsel Yapılar
HAFTA 7
Sayma

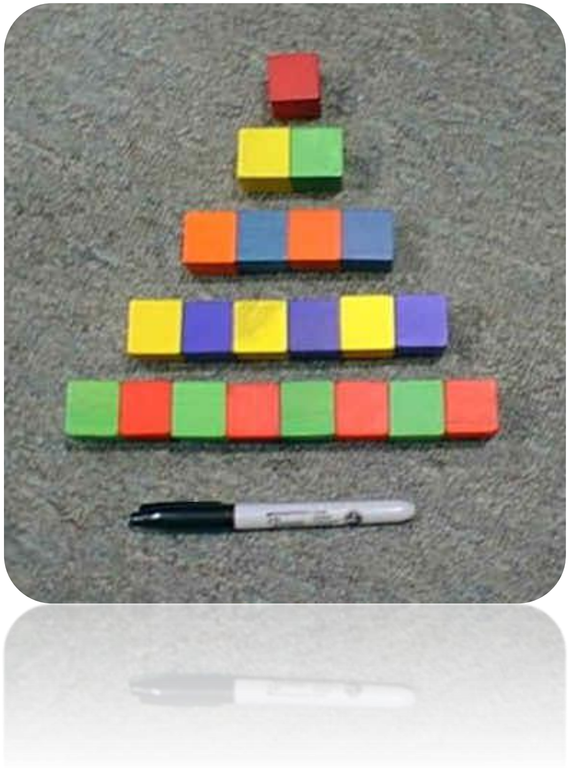
Doç. Dr. Nilüfer YURTAY
Dr. Öğretim Üyesi Gülüzar ÇİT

Konu & İçerik

- Sayma
  - Pigeonhole Prensibi
  - Çarpma Prensibi
    - Kombinasyon
    - Permutasyon
  - Toplama Prensibi
  - Ekleme-Çıkarma Prensibi
  - Yineleme Bağıntıları
- Kaynaklar

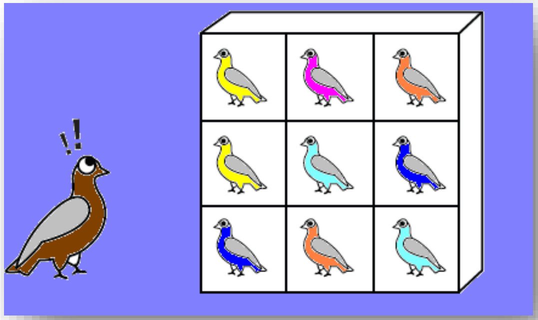
Sayma

- Çoğu kombinasyonel problem sayma gerektirmektedir. Problemde ele alınması gereken obje sayısı genellikle çok fazla olduğundan, geçerli obje kümesini listelemeden bunların sayısını bulmamız istenir



Sayma – Pigeonhole Prensibi

- İsmini güvercin yuvalarından alan bu prensibe göre yuva sayısından fazla güvercin varsa, ve bütün güvercinler bir yuvaya girecekse, en az bir yuvaya birden fazla güvercin girmek zorundadır.
- n ve m gibi iki doğal sayı için n > m için, eğer n adet güvercin m adet güvercin deliğine koyulacaksa bir güvercin deliğine birden fazla güvercin koyulmak zorudadır. Diğer bir söylem; m yuvaya, bir yuvaya bir güvercin düşecek şekilde en fazla m adet güvercin yerleştirilebilir, bir tane daha güvercin yerleştirilmesi ancak bir yuvanın tekrar kullanılması ile olur.



Sayma – Pigeonhole Prensibi…

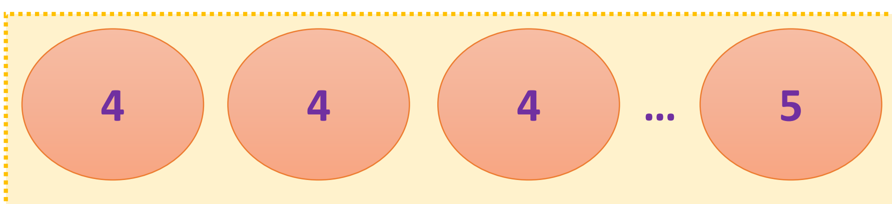
- Prensibi genelleştirirsek; eğer $k * n + 1$ veya daha fazla güvercin, n adet yuvaya yerleştirilecekse, en az bir yuvada k dan fazla güvercin olacaktır.

TEOREM: Eğer m güvercin n yuvaya yerleştirilecekse en az bir yuvadaki güvercin sayısı *k*'dan fazla olur. Burada, $k = taban\left[{}^{(m-1)}/_{n}\right]$'dir.c

Sayma – Pigeonhole Prensibi…

- **ÖRNEK:** 15 evli çift içerisinden kaç kişi seçilmelidir ki seçilenler içinde en az bir evli çift olsun?
  - $15 * 1 + 1 = 16$

- **ÖRNEK:** Bir sitede 18 adet oturma salonu ve bu salonlara asılan bir ankete cevap alınacak olsun. Cevaplanan anketin sonuçlarına ait duyuruyu salonlara asmak için seçilen bir salondan ankete cevap veren 5 kişilik bir grup oluşturulacaktır. Ankete en az kaç kişi cevap vermelidir ki bir bir salon seçilip bu grup oluşturulabilsin?
  - $k = 4 \Rightarrow k * n + 1 = 4 * 18 + 1 = 73$



Sayma – Pigeonhole Prensibi…

TEOREM

Eğer $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ (her p_i bir pozitif tamsayı) güvercin, n adet yuvaya yerleştirilecekse, ilk yuvada en az p_1 adet güvercin veya ikincide en az p_2 adet güvercin… veya n.cinde en az p_n adet güvercin bulunur.

- **ÖRNEK:** Bir çantada 6 adet kırmızı, 5 beyaz ve 7 mavi top vardır. Seçilen toplar içinden ya en az 3 kırmızı veya en az 4 beyaz veya en az 5 mavi top olması için kaç top seçilmelidir?
  - **1.YOL** $\Rightarrow n = 3, p_1 = 3, p_2 = 3, p_3 = 3 \Rightarrow m = (3 + 4 + 5) - 3 + 1 = 10$
  - **2.YOL** $\Rightarrow$ En fazla 2 kırmızı ve en fazla 3 beyaz ve en fazla 4 mavi top olması durumunda .9 top seçilir. Herhangi bir renk daha seçilirse $9 + 1 = 10$ top olur

Sayma – Çarpma Prensibi

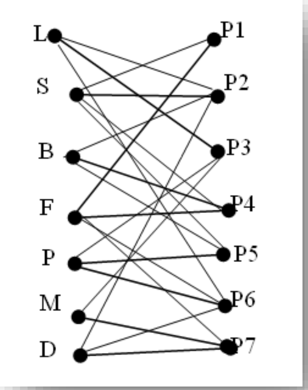
- Bir prosedürün ardışık *k* adımdan oluştuğunu varsayalım. Birinci adım n_1 farklı yol, ikinci adım n_2 farklı yolla yapılabilsin. Tüm prosedür, $n_1 . n_2 \; \ldots n_i \ldots n_k$ adet farklı yolla yapılabilir.

- **ÖRNEK:** Bir Japon arabası 6 farklı renkte, 3 farklı motorla, otomatik veya manuel vitesle araba üretilebiliyor. Kaç farklı model araba olabilir ?
  - $n_1 = 6, n_2 = 3, n_3 = 2 \Rightarrow 6.3.2 = 36$ farklı model

Sayma – Çarpma Prensibi…

- Şimdi uçuş problemine geri dönelim…
  - Birinci uçuşu ele alalım. 7 pilot içinden birini seçebiliriz, yani 7 farklı olasılık vardır. Bunların içinden bir tanesini seçip , ikinci uçuşa geçtiğimizde 6 farklı seçeneğiniz kalacaktır. Bu şekilde devam edersek olası eşlemelerin sayısı 7.6.5.4.3.2.1 olacaktır. Demek ki *n* adet uçuş ve *n* adet pilot varsa olası eşleme sayısı $n! = n.(n-1).(n-2)$…3.2.1 adettir.
  - Bu işleme **permütasyon** denir.

Libya	: P2, P3, P6
Singapur	: P1, P2, P4, P5
Brezilya	: P2, P4, P5
Fransa	: P1, P4, P6, P7
Peru	: P3, P5, P6
Macaristan	: P3, P7
Danimarka	: P2, P6, P7



Sayma – Çarpma Prensibi…

- *n* adet objenin farklı biçimlerde sıralanması işlemine , **permütasyon** denir.
  - *n* objenin içinden *r* objenin tekrarlanmadan seçilebilme sayısı *n* objenin *r* adet permütasyonu olup ,
    - $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ olacaktır.

  - **ÖRNEK:** 7 uçuştan 2 tanesinin iptal edilmesi durumunda olası görevlendirme sayısı;
    - $P(7{,}5) = 7.6.5.4.3$ olacaktır.

Sayma – Çarpma Prensibi…

- *n* adet nesneden oluşan bir kümenin *r*'li **tekrarlı** permütasyonlarının sayısı n^r dir.

- **ÖRNEK:** İngiliz alfabesindeki harflerden n uzunluğunda kaç adet kelime oluşturulabilir?
  - 26 adet harfin çarpma kuralına göre her biri tekrar kullanılabilir. Bu durumda 26^n tane n uzunlukta karakter oluşturulabilir.

Sayma – Çarpma Prensibi…

- Bazı problemlerde, verilen bir kümenin belli bir sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısı istenir. **n** elemanlı bir kümenin **r** elemanlı **kombinasyon**larının

  $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$ olarak bulunur.

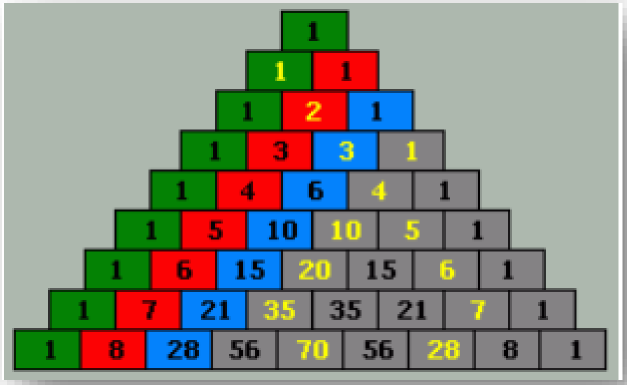
- **ÖRNEK:** $\{a, e, i, o, u\}$ harflerinden oluşan bir kümenin iki elemanlı alt kümelerinin sayısı nedir?
  - $C(5,2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$ olarak bulunur
- **ÖRNEK:** Kelebek koleksiyonu yapan bir kişinin defterinde 8 adet yer kalmış iken bu kişi elindeki 10 adet kelebeği kaç değişik şekilde yerleştirebilir.
  - $C(10,8) = \frac{10!}{8!2!} = 45$ farklı şekilde yerleştirebilir.

Sayma – Çarpma Prensibi…

TEOREM: r ve n, 1≤r ≤n olmak üzere tamsayılar ise
$C(n,r) = C(n-1,r-1) + C(n-1,r)$ dir.

TEOREM: r ve n, 1≤r ≤n olmak üzere tamsayılar ise $C(n,r) = C(n,n-r)$ dir.

n=0					**C(0,0)**				
n=1				**C(1,0)**		**C(1,1)**			
n=2			**C(2,0)**		**C(2,1)**		**C(2,2)**		
n=3		**C(3,0)**		**C(3,1)**		**C(3,2)**		**C(3,3)**	
n=4	**C(4,0)**		**C(4,1)**		**C(4,2)**		**C(4,3)**		**C(4,4)**



Sayma – Çarpma Prensibi…

- $C(n, r)$ sayıları **Binom sabitleri** olarak adlandırılır. $(x + y)^n$ in açılımında bu sabitler $x^{n-r}y^r$ nin katsayılarıdır.
- Buna göre $(x + y)^n$ in katsayıları **Pascal üçgeni**nin n. satırının katsayılarıdır.
- $(x + y)^n = \sum \binom{n}{n-r} x^{n-r}y^r$
- **ÖRNEK:** $(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^3 + \binom{3}{3}y^3$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^3 + y^3$$

Sayma – Çarpma Prensibi…

- k farklı gruba ait n adet nesne olsun. *n1* benzer nesnenin *n* adet lokasyona yerleştirilmesi $C(n, n1)$, *n2* adet benzer nesnenin *n-n1* adet lokasyona yerleştirilmesi $C(n-n1, n2)$, … . şekilde yerleştirilebilir. Devam edilerek çarpma kuralı uygulanırsa; $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n, n_1).C(n-n_1, n_2) \dots C(n-n_1-n_2-$

TEOREM: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$ olmak üzere

$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = {}^{n!}/_{(n_1)!.(n_2)!\dots(n_k)!}$ dir.

TEOREM: $(x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_i)^n$ açılımında $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ olmak üzere $(x_1)^{n_1}.(x_2)^{n_2} \dots (x_i)^{n_k}$ teriminin katsayısı için

$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = {}^{n!}/_{(n_1)!.(n_2)!\dots(n_k)!}$ olarak hesaplanır.

Sayma – Çarpma Prensibi…

- **ÖRNEK:** $(a+b+c+d)^{15}$ in açılımı için $a^3b^2c^6d^4$ teriminin katsayısı nedir?
  - 1. YOL: ${}^{15!}/_{3!.2!.6!.4!}$
  - 2. YOL: $(a+b+c+d)^{15}$

$$= \binom{15}{0}(a+b)^{15} + \binom{15}{1}(a+b)^{14}(c+d)^1 + \cdots + \binom{15}{15}(c+d)^{15}$$

$$= \cdots + \binom{\mathbf{15}}{\mathbf{10}}(a+b)^5(c+d)^{10} + \cdots$$

$$= \cdots + \binom{\mathbf{15}}{\mathbf{10}}\left[\ldots + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}a^3b^2.\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{4}}c^6d^4 + \cdots\right] + \cdots$$

$$\Rightarrow \binom{15}{10}.\binom{5}{2}.\binom{10}{4} = \frac{15!}{5!.10!}.\frac{5!}{2!.3!}.\frac{10!}{4!.6!} = {}^{15!}/_{3!.2!.6!.4!}$$

Sayma – Çarpma Prensibi…

- $P(n; n_1, n_2, \dots n_k) = {}^{(n!)}/_{(n_1!).(n_2!)\dots(n_k!)}$ dır.

- Burada $r \leq k$ üzere $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = r$ ise

  $P(n; n_1, n_2, \dots n_k) = {}^{P(n,r)}/_{(n_1!).(n_2!)\dots(n_k!)}$ dır.

Sayma – Çarpma Prensibi…

- **ÖRNEK:** "BİLGİSAYAR" kelimesinin harfleri kaç farklı şekilde dizilebilir.
  - "BİLGİSAYAR" kelimesi 10 elemanlı bir harf kümesi olup {B}, {İ,İ}, {L}, {G}, {S}, {A,A}, {Y}, {R} biçiminde 8 alt gruba bölünebilir.
  - 1. YOL: Genelleştirilmiş permütasyon formülü ile çözecek olursak
    - $^{(10!)}/_{(1!).(2!).(2!).(1!).(1!).(1!)} = 907200$ adet
  - 2. YOL: Kombinasyon ile çözecek olursak
    - $\binom{10}{1}.\binom{9}{2}.\binom{7}{1}.\binom{6}{1}.\binom{5}{1}.\binom{4}{2}.\binom{2}{1}.\binom{1}{1}$

    $= \frac{10!}{9!.1!}.\frac{9!}{7!.2!}.\frac{6!}{5!.1!}.\frac{5!}{4!.1!}.\frac{4!}{2!.2!}.\frac{2!}{1!.1!} = 907200$ adet

Sayma – Çarpma Prensibi…

- **n** elemanlı bir kümeden küme elemanlarının tekrarına izin veriliyorken **r** elemanlı **tekrarlı kombinasyon**ların sayısı
- $C(n+r-1,r)=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!.r!}$ olarak bulunur.

- **ÖRNEK:** 4 farklı çeşit kurabiyeden 6 tane kurabiye kaç farklı yolla seçilebilir?
  - $\binom{4+6-1}{6}=\binom{9}{6}=\frac{9!}{3!6!}=\frac{9.8.7.6!}{3.2.6!}=84$

Sayma – Çarpma Prensibi…

- **ÖRNEK:** $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ eşitliği için $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ olacak şekilde kaç tane tamsayı çözümü vardır?
  - $4 + 5 + 2 = 11 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 2$

    $0 + 6 + 5 = 11 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 5$

    …

    n=3 (çeşit), r=11 (tür) sayısı olacak şekilde tekrarlı kombinasyon sayısı

$\Rightarrow \binom{3+11-1}{11} = \frac{13.12}{2} = 78$ faklı tamsayı çözümü

Sayma – Çarpma Prensibi…

- Tekrarlı/tekrarsız permutasyon ve kombinasyon formülleri

Permutasyon	**Tekrar yok**	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
	Tekrar var	n^r
Kombinasyon	**Tekrar yok**	$\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$
	Tekrar var	$\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$

Sayma – Toplama Prensibi…

- **Toplama Prensibi**
  - Eleman sayıları $n_1, n_2, \ldots, n_k$ olan k adet küme olsun. Eğer bu kümelerin elemanları ayrık ise, yani hiçbir kümenin başka küme ile ortak elemanı yoksa, bu kümelerin birleşimleri ile oluşan kümenin eleman sayısı $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ dır.

- **ÖRNEK:** 1 ile 100 arasında çift veya 5 ile biten kaç sayı vardır?
  - 1-100 arasında 50 adet çift sayı vardır. 5 ile biten tüm sayılar tek sayı olup bunlar 15,25,35,45,55,65,75,85,95'tir ve toplam 10 tanedir. O halde, 1 ile 100 arasında çift veya 5 ile biten $10 + 50 = 60$ adet sayı vardır.

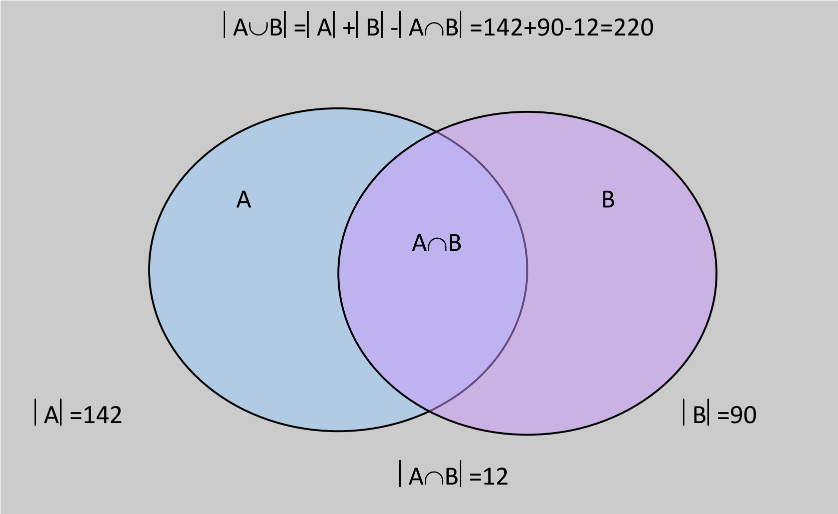
Sayma – Ekleme-Çıkarma Prensibi

- **ÖRNEK:** 1000'e kadar 7 ya da 11 ile bölünebilen kaç adet pozitif tamsayı vardır?
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$= \left|\frac{1000}{7}\right| + \left|\frac{1000}{11}\right| - \left|\frac{1000}{7.11}\right|$$

$$= 142 + 90 - 12$$

$$= 220$$



Sayma – Ekleme-Çıkarma Prensibi

- **ÖRNEK:** Ya 1 ile başlayan ya da 0 ile biten 8 bit uzunluklu ikili katarların sayısını bulunuz.
  - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

    $|A|$: 1 ile başlayan katar sayısı $\Rightarrow 1x_1x_2 \dots x_7 = 2^7 = 128$

    $|B|$: 0 ile biten katar sayısı $\Rightarrow x_0x_1 \dots x_6\, 0 = 2^7 = 128$

    $|A \cap B|$: 1 ile başlayıp 0 ile biten katar sayısı $\Rightarrow 1x_1x_2 \dots x_6\, 0 = 2^6 = 64$

    $|A \cup B| = 128 + 128 - 64 = 192$

Sayma – Yineleme Bağıntıları

- $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ şeklindeki serilerde a_r , belirli problemler için *r* bilgi değerine bağlı olan bir çözümdür. Hatta bazen a_r serinin daha önceki elemanına bağlı olarak ifade edilebilir.
- Örneğin 4,7,10,13,16,… şeklindeki dizide, $a_0 = 4$ ve ortak fark 3 'tür. Dolayısı ile, sıranın *r*. terimi a_r kendinden önceki *(r-1).* terime bağlı olarak $a_r = a_{r-1} + 3$ şeklinde ifade edilebilir.
- Bu şekilde ifade edilen bağıntılara **yineleme(recurrence) bağıntıları** denir.
- Örnek olarak verilen yineleme bağıntısının başlangıç koşulu $a_0 = 4$ dur. Başlangıç koşulu esas alınarak herhangi bir terim ardışıl olarak hesaplanabilir.
- Diğer bir yol ise yineleme bağıntısını çözerek r. terimin bulunmasıdır. Bu örnekte a_r=4+3r olarak bulunur. Diğer terimler bu çözümden hesaplanabilir.

Sayma – Yineleme Bağıntıları…

- **ÖRNEK:** a_n serisi için yineleme bağıntısı $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ biçiminde ve $n = 2,3,4, \ldots$ için tanımlanmış olsun. $a_0 = 3$ ve $a_1 = 5$ olduğunu varsayarak a_2 ve a_3 değerlerini bulalım.
  - $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

    $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$

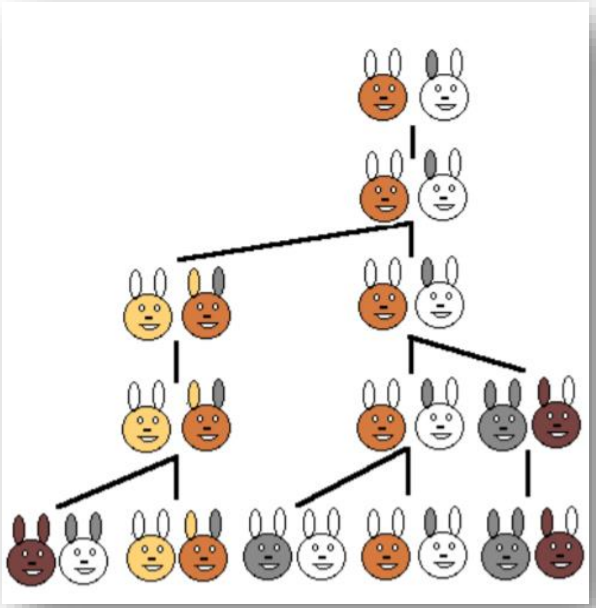
    $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$

Sayma – Yineleme Bağıntıları…

- **ÖRNEK:** a_n serisi için yineleme bağıntısı $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ biçiminde ve tüm negatif olmayan tamsayılar için tanımlanmış olsun. $a_n = 3n$, $a_n = 2^n$ ve $a_n = 5$ için yineleme bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.
  - $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n$ dir. Bundan dolayı a_n, $a_n = 3n$ için yineleme bağıntısıdır
  - $a_0 = 2^0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 2a_1 - a_0 = 3 \neq 2^n$ dir. Bundan dolayı a_n, $a_n = 2^n$ için yineleme bağıntısı değildir.
  - $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5$ dir. Bundan dolayı a_n, $a_n = 5$ için yineleme bağıntısıdır.

Sayma – Yineleme Bağıntıları…

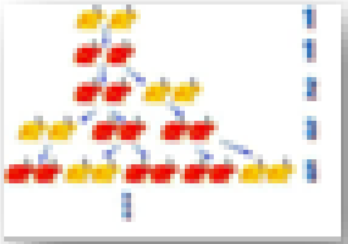
- "Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 1 yıl sonra dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?"



Sayma – Yineleme Bağıntıları…

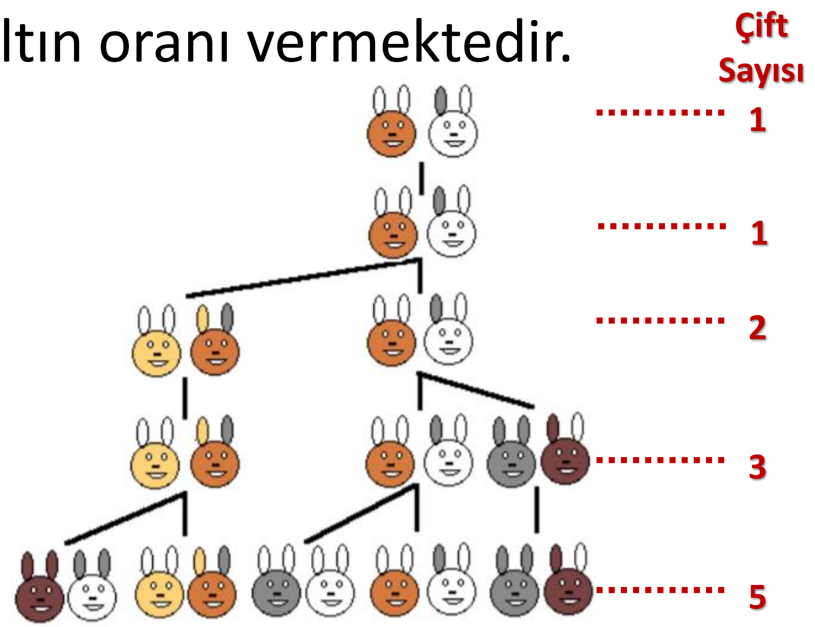
- "Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 1 yıl sonra dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?"

Ay	Genç çift sayısı	Yeni üreyen çift sayısı	Toplam çift sayısı
0	0	1	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8



Sayma – Yineleme Bağıntıları…

- Bu şekilde düşünüldüğü takdirde tavşan çiftleri aylara göre şu sıralamayı ortaya koymaktadır
  - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,144, 243,…
- Görüldüğü gibi ilk iki sayı hariç, her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamına eşittir.
- Bu sayıların arasındaki oran ise bize altın oranı vermektedir.

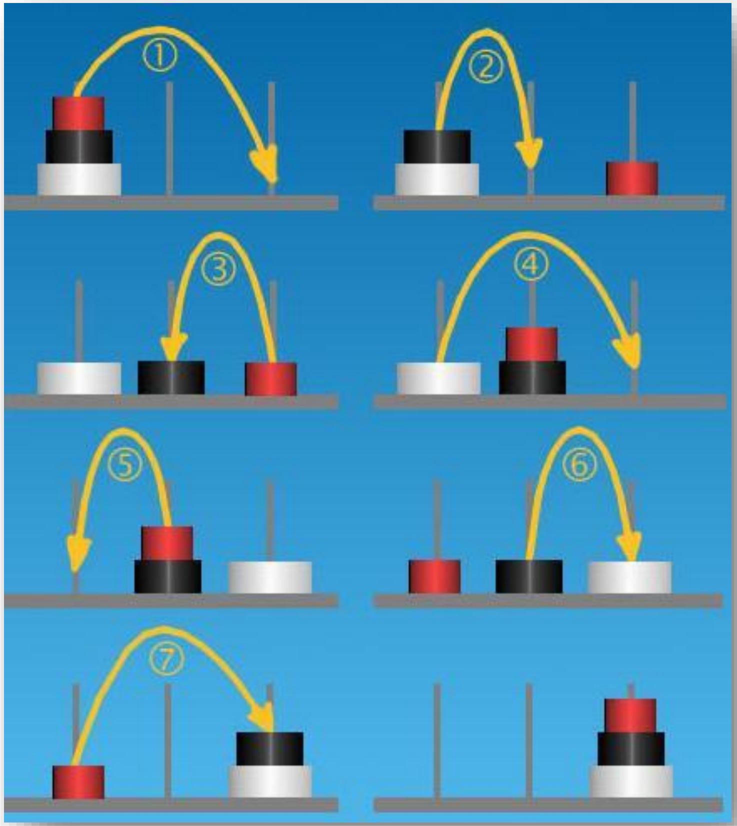


Sayma – Yineleme Bağıntıları…

- **Hanoi Kuleleri**
  - Bir matematik oyunu / bulmacadır.
  - Hanoi Kulesi oyunu, 1883 yılında Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından icat edilmiş ve piyasaya sürülmüştür.
  - Üç direk ve farklı boyutlarda disklerden oluşur
  - Bu diskleri dilediğiniz direğe aktarabilirsiniz.
  - Bulmaca bir direkte en küçük disk yukarıda olacak şekilde, küçükten büyüğe direk üstünde dizilmiş olarak başlar. Böylece konik bir şekil oluşmuş olur.

Sayma – Yineleme Bağıntıları…

- **Hanoi Kuleleri…**
  - Oyunun amacı tüm diskleri bir başka direğe aşağıdaki kurallar doğrultusunda taşımaktır:
    - Her hamlede sadece bir disk taşınabilir.
    - Her hamle en üstteki diski direkten alıp diğer bir direğe taşımaktan oluşur. Diğer direkte daha önceden diskler olabilir.
    - Hiç bir disk kendisinden küçük bir diskin üzerine koyulamaz.



Sayma – Yineleme Bağıntıları…

Hanoi Kuleleri…

- 1. direkteki n disk ile başlarsak, 3. direğe n-1 diski transfer ederiz. Ardından 1. direkteki en büyük diski 2. direğe transfer ederiz. Tekrar n-1 kez bu kez 3. direkteki diskleri 2. direğe taşırız. Bu işlemi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ biçiminde tanımlayabiliriz. Olayı iteratif bir yaklaşımla aşağıdaki gibi devam ettirirsek ilgili yineleme bağıntısı bulabiliriz.

$H_1 = 1$ dir

$H_n = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1$

$H_n = 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$

…

$H_n = 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1$

$H_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1$

Optimal Çözümler

3 disk = (2x2x2)-1 = 7 hareket

4 disk = (2x2x2x2)-1 = 15 hareket

5 disk = (2x2x2x2x2)-1 = 31 hareket

6 disk = (2x2x2x2x2x2)-1 = 63 hareket

7 disk = (2x2x2x2x2x2x2)-1 = 127 hareket

8 disk = (2x2x2x2x2x2x2x2)-1 = 255 hareket

Çalışma Soruları

- N elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısını bulmak için gerekli yineleme bağıntısını tanımlayın.
- $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ yineleme bağıntısının $a_0 = 2, a_1 = 5$ ve $a_2 = 15$ olmak üzere çözümünü bulunuz.

Kaynaklar

- F.Selçuk,N.Yurtay,N.Yumuşak,Ayrık İşlemsel Yapılar, Sakarya Kitabevi,2005.
- İ.Kara, Olasılık, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 2000.
- “Soyut Matematik”, S.Aktaş,H.Hacısalihoğlu,Z.Özel,A.Sabuncuoğlu, Gazi Ünv.Yayınları,1984,Ankara.
- “Applied Combinatorics”, Alan Tucker, John Wiley&Sons Inc, 1994.
- “Applications of Discrete Mathematics”, John G. Michaels, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Edition, 1991.
- “Discrete Mathematics”, Paul F. Dierker and William L.Voxman, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1986.
- “Discrete Mathematic and Its Applications”, Kenneth H. Rosen, McGraw-Hill International Editions, 5th Edition, 1999.
- “Discrete Mathematics”, Richard Johnson Baugh, Prentice Hall, Fifth Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics with Graph Theory” , Edgar G. Goodaire, Michael M. Parmenter, Prentice Hall, 2nd Edition, 2001.
- “Discrete Mathematics Using a Computer”, Cordelia Hall and John O’Donnell, Springer, 2000.
- “Discrete Mathematics with Combinatorics”, James A. Anderson, Prentice Hall, 2000.
- “Discrete and Combinatorial Mathematics”, Ralph P. Grimaldi, Addison-Wesley, 1998.
- “Discrete Mathematics”, John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, C. Vanden Eynden, Pearson Addison Wesley; 4th edition 2001.
- “Essence of Discrete Mathematics”, Neville Dean, Prentice Hall PTR, 1st Edition, 1996.
- “Mathematics:A Discrete Introduction”, Edvard R. Schneiderman, Brooks Cole; 1st edition, 2000.
- “Mathematics for Computer Science”, A.Arnold and I.Guessarian, Prentice Hall, 1996.
- “Theory and Problems of Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, Marc. L. Lipson, Shaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1997.
- “2000 Solved Problems in Discrete Mathematics”, Seymour Lipschuts, McGraw- Hill Trade, 1991.