Laplace Dönüşümü

Tanım: f , $\left[0,\infty\right]$aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\int_{0}^{\infty} e^{-sx} f\left(x\right)dx$ integrali yakınsak ise

$$F\left(s\right)=\int_{0}^{\infty} e^{-sx} f\left(x\right)dx \qquad (1)$$

fonksiyonuna f nin Laplace dönüşümü denir. Burada s, reel veya kompleks bir değişkendir. Genel olarak Laplace dönüşümü $L\left\{f\left(x\right)\right\}=F\left(s\right)$ şeklinde gösterilir.

Örnek. $L\left\{x\right\}=?\quad\left(x\geq 0, s>0\right)$

$L\left\{x\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}xdx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-sx}xdx$ Kısmi integrasyon yardımıyla $x=u, e^{-sx}dx=dv$ denirse $dx=du, -\frac{1}{s}e^{-sx}=v$ olup

$$L\left\{x\right\}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{xe^{-sx}}{s}-\frac{e^{-sx}}{s^2}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{be^{-sb}}{s}-\frac{e^{-sb}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2}$$

Örnek. $L\left\{\sin 5x\right\}=?\quad\left(s>0\right)$

$L\left\{\sin 5x\right\}=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\sin 5xdx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-sx}\sin 5xdx$ Kısmi integrasyon yardımıyla $u=e^{-sx}, \sin 5xdx=dv$ denirse $-se^{-sx}dx=du, -\frac{1}{5}\cos 5x=v$ olup

$$L\left\{\sin 5x\right\}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{5}\cos 5x\Big|_0^b-\frac{s}{5}\int_0^b e^{-sx}\cos 5xdx\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{e^{-sx}}{5}\cos 5x\Big|_0^b-\frac{s}{5}\left[\frac{e^{-sx}}{5}\sin 5x\Big|_0^b+\frac{s}{5}\int_0^b e^{-sx}\sin 5xdx\right]\right\}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{\left(-\frac{e^{-sb}}{5}\cos 5b+\frac{1}{5}\right)-\frac{s}{5}\left[\frac{e^{-sb}}{5}\sin 5b+\frac{s}{5}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\sin 5xdx}_{L\{\sin 5x\}}\right]\right\}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{\left(-\frac{e^{-sb}}{5}\cos 5b+\frac{1}{5}\right)-\frac{s}{5}\left[\frac{e^{-sb}}{5}\sin 5b+\frac{s}{5}\underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\sin 5x\,dx}_{L\{\sin 5x\}}\right]\right\}$$

$$\left(\frac{s^2+25}{25}\right)L\{\sin 5x\}=\lim_{b\to\infty}\left\{\left(\underbrace{-\frac{e^{-sb}}{5}\cos 5b}_{0}+\frac{1}{5}\right)-\underbrace{\frac{se^{-sb}}{25}\sin 5b}_{0}\right\}$$

$$L\{\sin 5x\}=\frac{5}{s^2+25}$$

Örnek. $L\{e^{ax}\}=?\quad (x\ge 0, s>a)$

$$L\{x\}=\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)x}dx\quad L\{x\}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}\right]_0^b$$

$$L\{x\}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)b}+\frac{1}{s-a}\right]=\frac{1}{s-a}$$

Buna göre temel elemanter fonksiyonlara ait Laplace dönüşümlerini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$L\{x^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}\,(s>0)$$

$$L\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}\,(s>a)$$

$$L\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}\,(s>a)$$

Tanım: f , $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer tüm $x>x_0$ lar için $|f(x)|\le Me^{\alpha x}$ olacak şekilde x_0, M ve α pozitif sabitleri var ise f fonksiyonuna α-üstel mertebedendir denir.

Örnek: $f(x)=\sin ax$ fonksiyonu α -üstel mertebedendir. Gerçekten,

$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\sin ax=\lim_{x\to\infty}\frac{|\sin ax|}{e^{\alpha x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha x}}=0$ olup yakınsaktır dolayısıyla α -üstel mertebedendir.

Teorem (Laplace Dönüşümünün Varlığı)

f , $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $x>x_0$ için α -üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu durumda $s>\alpha$ için $L\{f(x)\}$ mevcuttur.

Bu teoreme göre, koşulları sağlayan fonksiyonların Laplace dönüşümü vardır. Anca k koşulları sağlamayan bir fonksiyonun Laplace dönüşümü yoktur denilemez. Çünkü koşullar yeter koşullardır. Gerekli değildir. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli değildir ancak Laplace dönüşümü vardır. $\left[L\{f(x)\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right]$.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ.

i) c_1, c_2 keyfi sabitler ve f_1, f_2 de Laplace dönüşümü var olan iki fonksiyon olmak üzere $L\{c_1 f_1+c_2 f_2\}=c_1 L\{f_1\}+c_2 L\{f_2\}$ dir.

ii) $L\{f(x)\}=F(s)$ ise $L\{e^{ax} f(x)\}=F(s-a)$ dır.

iii) $L\{f(x)\}=F(s)$ ise $L\{f(ax)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ dır.

iv) $L\{f(x)\}=F(s)$ ise $L\{x^n f(x)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$ dır.

v) $L\{f(x)\}=F(s)$ ve $G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ f(x-a), & x>a\end{cases}$ ise $L\{G(x)\}=e^{-as}F(s)$ dir.

Örnek. $L\left\{\sin^2 3x\right\}=?$

$$L\left\{\sin^2 3x\right\}=L\left\{\frac{1-\cos 6x}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\{1\}-\frac{1}{2}L\{\cos 6x\}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+36}$$

Örnek. $L\left\{e^{-2x}\sin 5x\right\}=?$

$L\{\sin 5x\}=\dfrac{5}{s^2+25}$ olduğunu biliyoruz. Özellik (ii) yardımıyla $L\left\{e^{-2x}\sin 5x\right\}=\dfrac{5}{(s+2)^2+25}$ olur.

Örnek. $L\left\{x^2e^{-x}\right\}=?$

$L\left\{e^{-x}\right\}=\dfrac{1}{s+1}$ olduğunu biliyoruz. Özellik (iv) yardımıyla

$L\left\{x^2e^{-x}\right\}=(-1)^2\dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{1}{s+1}\right)=\dfrac{2}{(s+1)^3}$ elde edilir.

Örnek. $G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<3\\ x^3, & x>3\end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $L\{G(x)\}=?$

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ f(x-a), & x>a\end{cases}$ için $L\{G(x)\}=e^{-as}F(s)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $a=3,\ f(x-3)=x^3$ olup buradan $f(x)=x^3+9x^2+27x+27$ elde edilir.

$L\{f(x)\}=L\left\{x^3+9x^2+27x+27\right\}=\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{18}{s^3}+\dfrac{27}{s^2}+\dfrac{27}{s}$ dir.

Böylece $L\{G(x)\}=e^{-3s}\left(\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{18}{s^3}+\dfrac{27}{s^2}+\dfrac{27}{s}\right)$ elde edilir.

Alıştırmalar:

1) $L\left\{e^{5x}x^{3}\right\}=?$
2) $L\left\{x\cos 2x\right\}=?$
3) $L\left\{e^{-2x}\sin 5x\right\}=?$
4) $G(x)=\begin{cases}0, & 0<x<3\\ \sin(x-1), & x>3\end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $L\left\{G(x)\right\}=?$