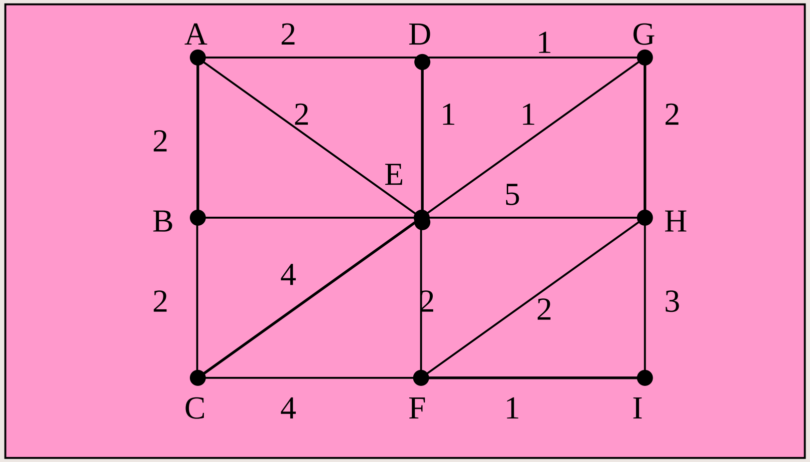
Ağırlıklı Graflar

Çoğunlukla graflar objeler arasındaki ilişkileri, bağlantıları tanımlamak için kullanıldığında her bir kenara bir sayı atanır. Örneğin, bir graf şehirler arası yolları gösteren bir graf ise, kenarların üzerine mesafeler yazılır. Bir ağırlıklı graf (Weighted graph) her bir kenarına ağırlık (weight) denilen bir sayının atıldığı bir graftır. Bir yolun ağırlığı ise o yol üzerindeki kenarların ağırlıklarının toplamıdır.

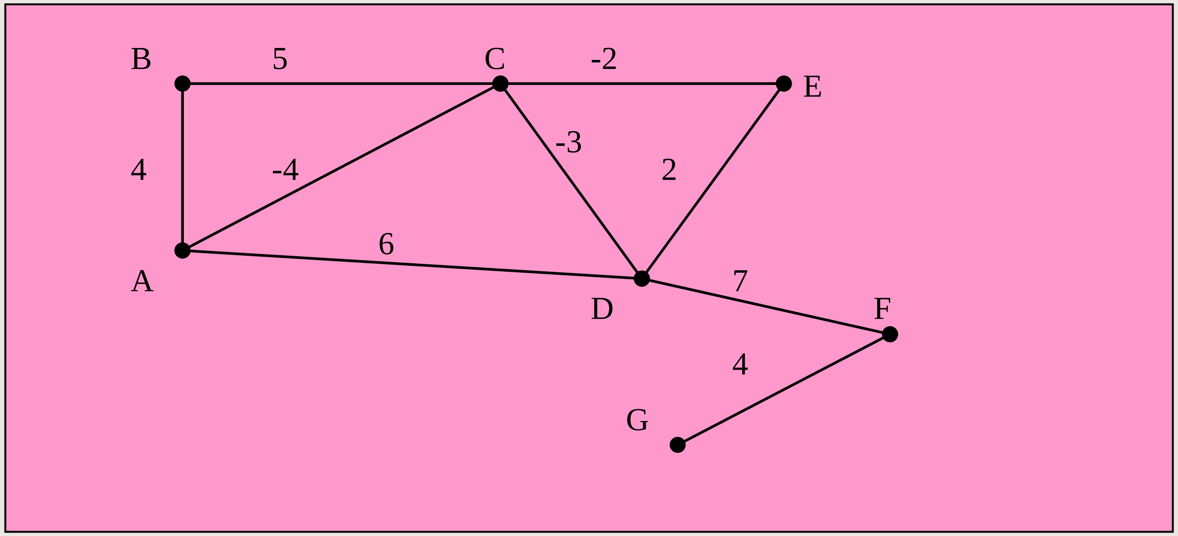
Ağırlıklı Graflar



Şekil de bir ağırlıklı graf örneği verilmiştir. AEHI yolunun ağırlığı 2+5+3=10 dur. CFEDG yolu ise 4+2+1+1=8 ağırlığındadır.

Ağırlıklı Graflar

Şekil deki grafı ele alalım. ABCDE yolunun ağırlığı 4+5-3+2=8 dir. ABCEDAC yolu ise 4+5-2+2+6-4=11 ağırlığındadır. Görüldüğü gibi ABCEDAC döngüsü tekrarlandıkça ağırlık giderek azalacaktır. Sonuç olarak ADC ve DCE düğümleri arasında en küçük ağırlıklı yol yoktur.



Ağırlıklı Graflar- Dijkstra Algoritması

G, birden fazla düğümü olan, tüm ağırlıkları pozitif olan, bir ağırlıklı graf olsun. Algoritma S düğümünden, G deki diğer bir düğüme en kısa yolu ve uzaklığı bulur. Algoritmada P sabit etiketli düğümler kümesini gösterir. A düğümünün önceli P de A yı etiketlemek için kullanılan düğümdür. W(U,V), U ve V düğümleri arasındaki kenarın ağırlığıdır U,V arasında kenar yoksa W(U,V) = ∞ yazılır.

Adım 1 (S düğümünü etiketle)

(a)S' e 0 etiketini ver S in önceli yok olsun

(b)P ={S}

Adım 2 (Düğümleri etiketle)

P de olmayan (geçici olabilir) her bir V düğümüne W(S,V) etiketini ata ve V nin önceli de S olsun

Adım 3 (P'yi genişlet gözden geçir.)

Repeat

Adım 3.1: (Başka etiketi sabit yap.)

P' de olmayan en küçük etiketli U düğümünü P' ye ekle. (Böyle birden fazla düğüm varsa keyfi olarak birini seç.)

Adım 3.2: (Geçici etiketleri revize et.)

P' de olmayan U' ya komşu olan her X düğümü için, X' in eski etiketi ile U' nun etiketi ve W(U,X)' in toplamından hangisi küçük ise X' in etiketini onunla değiştir. Eğer X' in etiketi değişmiş ise U' nun düğümünü X' in önceli yap.

until (P' de G' deki tüm düğümler var.)

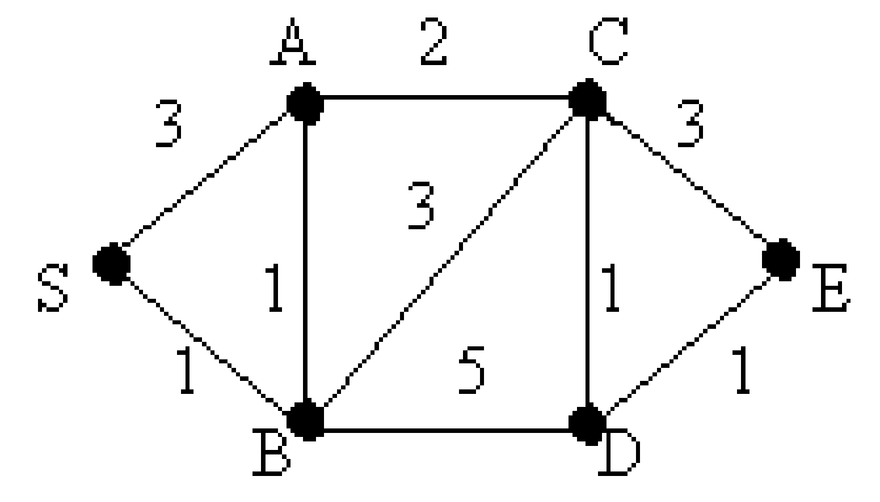
Adım 4 (Mesafeleri ve en kısa yolu bul).

Bir Y düğümü üzerindeki etiket S düğümüne uzaklığı göstermektedir. Eğer Y' nin etiketi ∞ ise yol yok demektir. Aksi halde S' den Y' ye yol Y' nin önceli,

öncelinin önceli vb. , Y' den S' e doğru ters sırada izlenerek elde edilir.

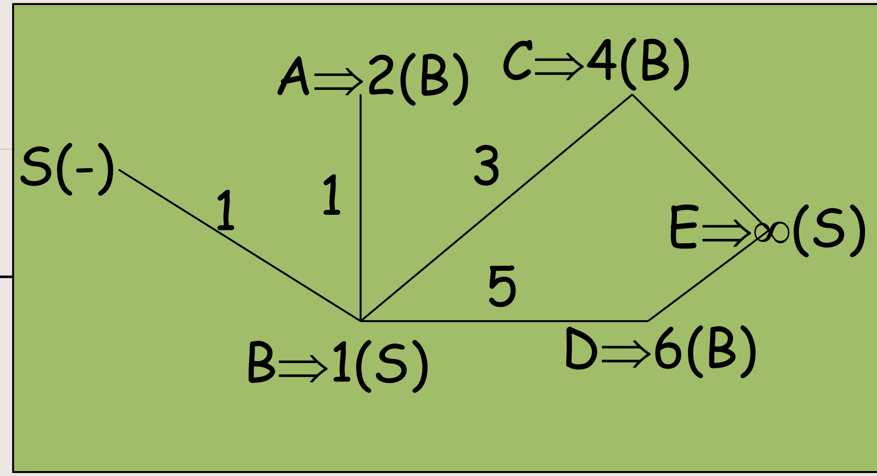
Ağırlıklı Graflar- Dijkstra Algoritması

Şekildeki grafa Dijkstra algoritmasını uygulayarak S düğümünden E düğümüne en kısa yolu bulunuz.

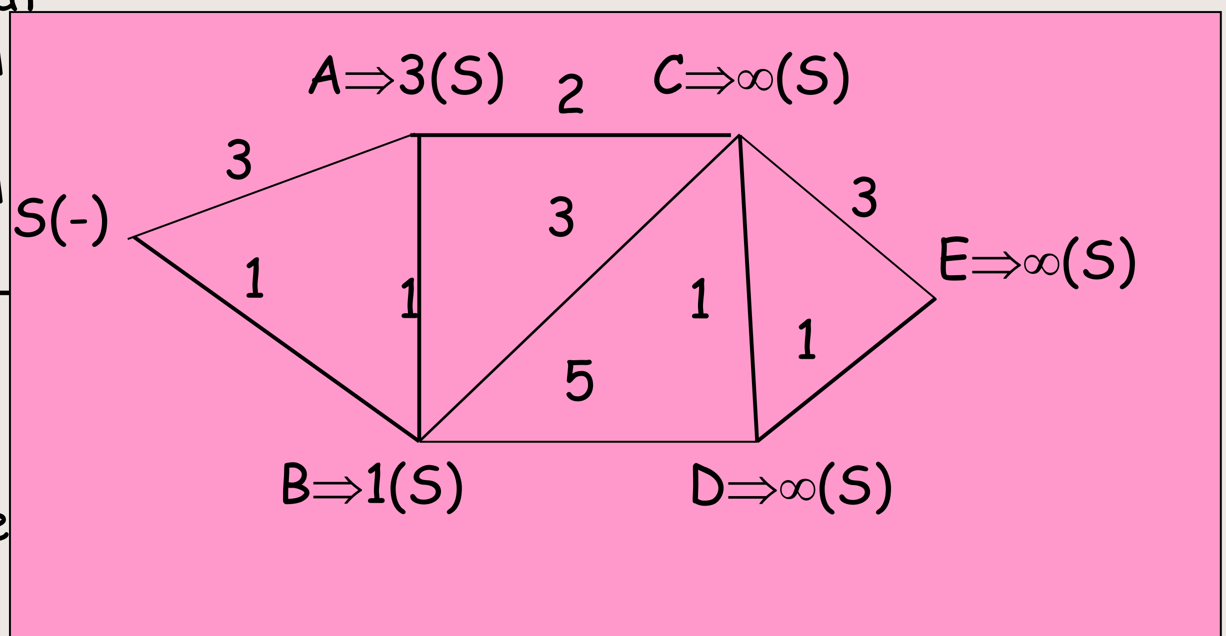


Adım 1: S' in etiketi 0 ve P={S}

Adım 2: P' de olmayan
A→3(S), B→1(S), C–
D→∞(S),E → ∞(S)



Adım 3: (1)
repeat
Adım
P={S,B}
Adım
Düğüm X
A
C
D
until P' de

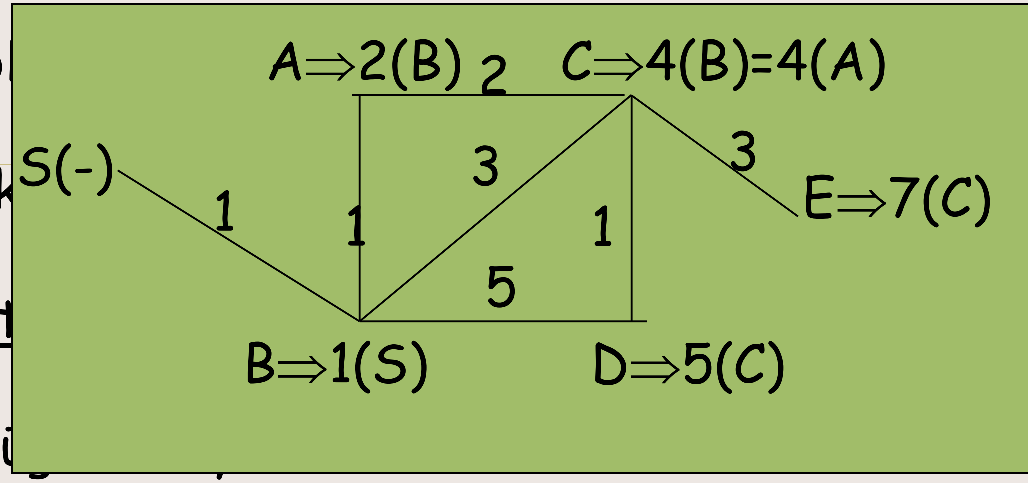


Adım 3: (2)

Adım 3.1: P′ de ol

P={S,B,A}

Adım 3.2: A′ ya k



-

Düğüm X	eski et
C	

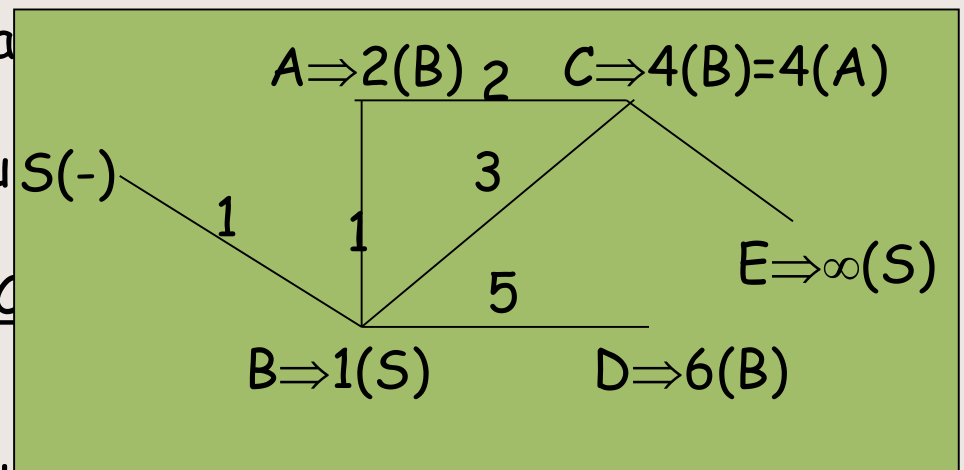
until P′ de tüm dü

Adım 3: (3)

Adım 3.1: P′ de olmaya

P={S,B,A,C}

Adım 3.2: C′ ye komşu



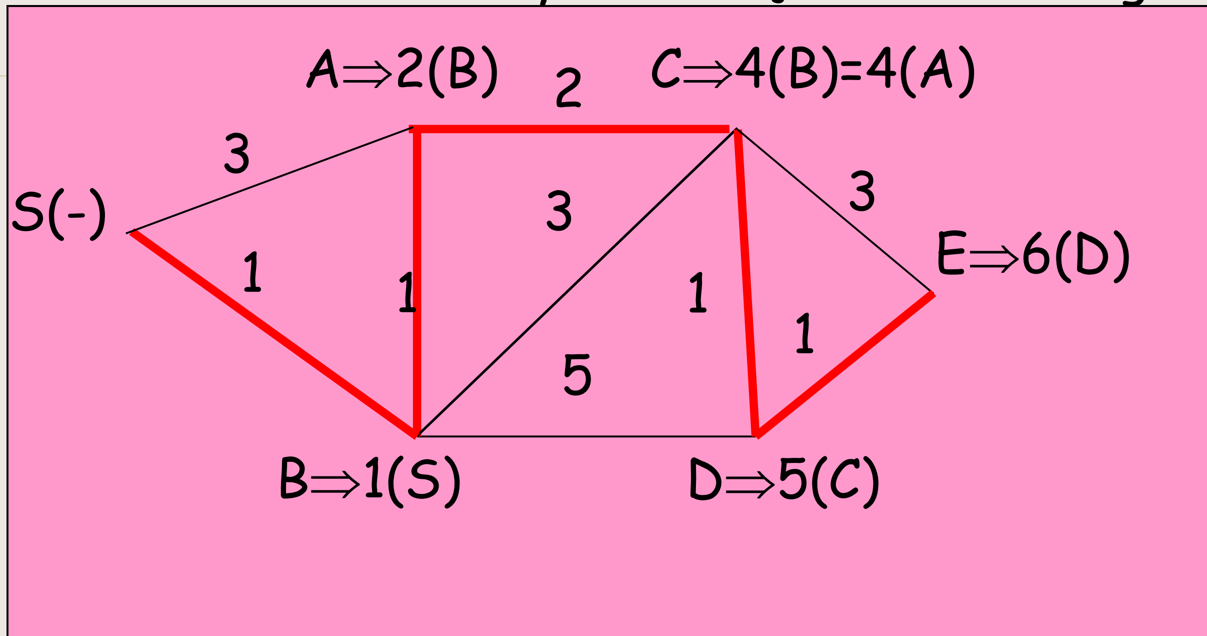
-

Düğüm X	eski etiket	C
D	6	
E	∞	

until P′ de tüm düğümler yok

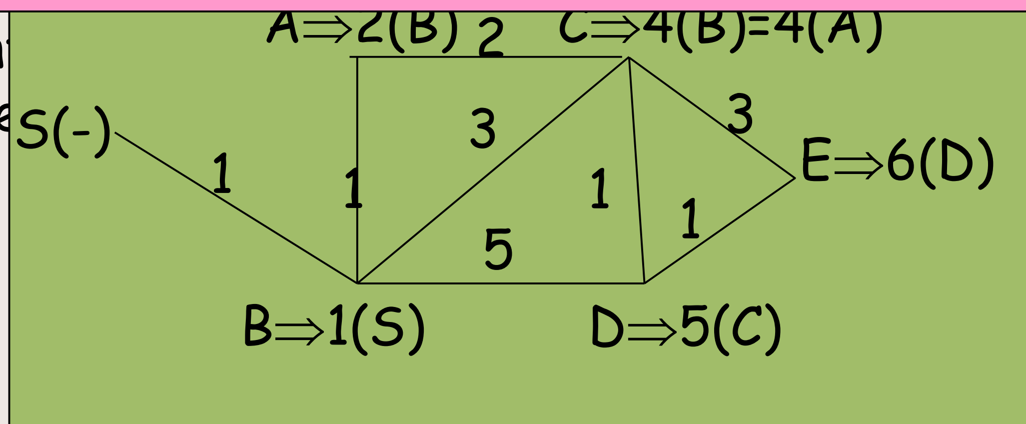
Adım 3: (4)

Adım 3.1: P’ de olmayan en küçük etiketli düğüm D,



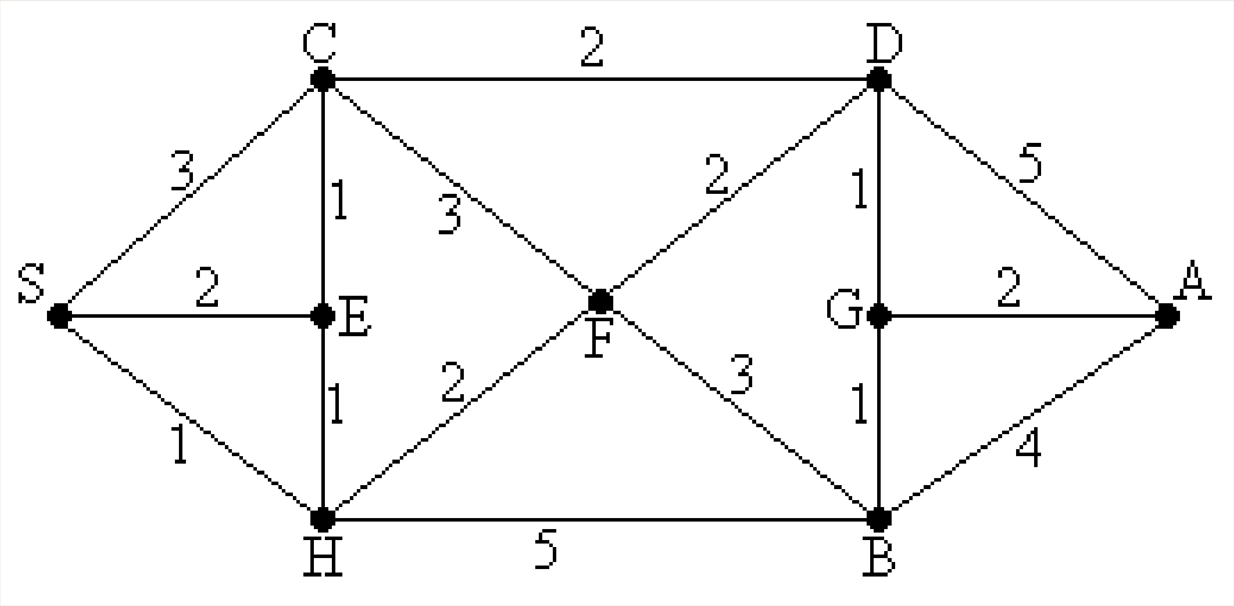
un

P e



Ağırlıklı Graflar- Dijkstra Algoritması ÖDEV SORUSU

Şekildeki grafta S' den A' ya en kısa yolu bulunuz.



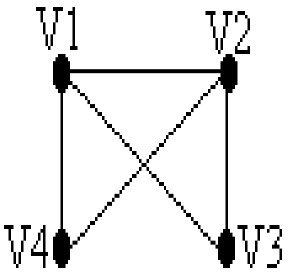
Ağırlıklı Graflar

Teorem

Bir G grafının $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ etiketli n düğümü ve komşuluk matrisi de A olsun. V_i ve V_j düğümleri arsındaki m uzunluklu yolların sayısı A^m matrisinin i,j. elemanına eşittir.

Ağırlıklı Graflar

Örnek



$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

2 uzunluklu yolların sayısı için $A*A=A^2$ matrisini hesaplayalım.

$$A^2=\begin{bmatrix}3&2&1&1\\2&3&1&1\\1&1&2&2\\1&1&2&2\end{bmatrix}$$

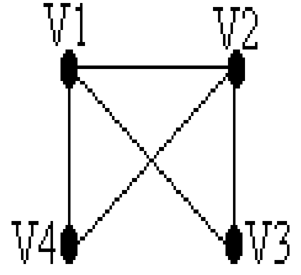
3,4 elemanının 2 olması V3 ile V4 arasında iki uzunluklu iki yol var demektir; V_3 V_2 V_4 ve V_3 V_1 V_4.

Benzer şekilde 1,3 elemanının 1 olması V_1'den V_3'e 2 uzunluklu bir yol yani V_1, V_2, V_3 yolu var demektir. m=3 için A^3 hesaplanırsa;

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Biçiminde elde edilir. 1,2 elemanı 5 olduğuna göre V_1'den V_2'ye 3 uzunluklu 5 yol var.

(1) V_1,V_2,V_1,V_2 (2) V_1,V_2,V_4,V_2
(3) V_1,V_2,V_3,V_2 (4) V_1,V_3,V_1,V_2
(5) V_1,V_4,V_1,V_2



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$