11.10.2016
Salı

GAÜ METALÜRJİ MÜH. MAT I – I. KISA SINAV SORULARI

Soru. $f(x) = 2x^2 - 3|x| + 1$ fonksiyonu verilsin.

a) f nin tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz f tek midir? çift midir? (50p)

b) f nin 1-1 ve örten olup olmadığını belirleyiniz (40p)

c) f nin tersinir olup olmadığını belirleyiniz Eğer tersinir ise, $f^{-1}(x) = ?$ (10p)

Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK

Çözüm. a) $x \geq 0$ ise $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $x < 0$ ise $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ olup, her iki durumda da, f, polinom tipli bir fonksiyon olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. Dolayısıyla $D(f) = (-\infty, +\infty)$ dur.

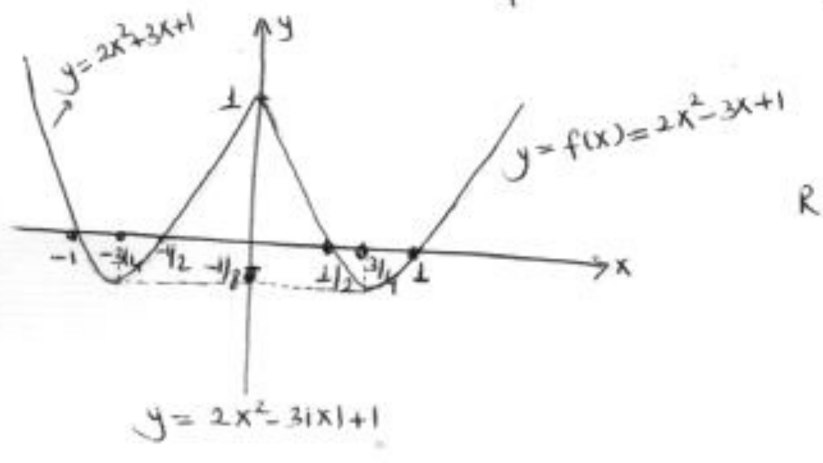
$f(-x) = 2(-x)^2 - 3|-x| + 1 = 2x^2 - 3x + 1 = f(x)$ olduğundan f fonksiyonu çifttir.

f nin görüntü kümesini belirleyebilmek için grafiğini çizelim.

f çift olduğundan, f nin grafiği y- eksenine göre simetriktir. Dolayısıyla $x \geq 0$ için çizim yapılır ve grafiğin y eksenine göre simetriği alınır.

$x \geq 0$ için $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ dir. $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2$ ve $x_2 = 1$ dir.

$x = 0$ için $f(x) = 1$ dir. Tepe noktasının apsisi $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \cdot 2} = 3/4$ ve ordinatı $y_0 = f(x_0) = f(3/4) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 1 = -1/8$ dir. Böylece aşağıdaki grafik elde edilir.



Dolayısıyla, görüntü kümesi

$R(f) = [-1/8, +\infty)$ olur.

b) f fonksiyonu 1-1 değildir çünkü $f(3) = f(-3) = 10$ olmasına rağmen $3 \neq -3$ tür.

f fonksiyonu örten midir? Yani her $y \in [-1/8, +\infty)$ için $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in (-\infty, +\infty)$ var mıdır?

$x \geq 0$ için $f(x) = y$ ise $2x^2 - 3x + 1 = y$ yani $2x^2 - 3x + 1 - y = 0$ olur. Buradan,

$$x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{9 + 8(y-1)}}{4} = \frac{3 \mp \sqrt{1+8y}}{4} \in (-\infty, +\infty) \text{ olur.}$$

$x < 0$ için $f(x) = y$ ise $2x^2 + 3x + 1 = y$ yani $2x^2 + 3x + 1 - y = 0$ olur. Buradan,

$$x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{9 - 4.2.(1-y)}}{4} = \frac{-3 \mp \sqrt{1+8y}}{4} \in (-\infty, +\infty) \text{ olur.}$$

Böylece f örtendir.

c) f örten fakat 1-1 olmadığından tersinir değildir.

12.10.2016
Çarşamba

SAÜ ÇEVRE MÜH. MAT I-I KISA SINAV SORULARI

Soru. $f(x)=\sqrt{x-1}-7$ ve $g(x)=x^2+4x+5$ fonksiyonları verilsin

a) fog fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz

b) fog fonksiyonu 1-1 midir? örten midir? tek midir? çift midir?

c) fog fonksiyonu tersinir midir? Tersinir ise, tersini bulunuz

Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK

Çözüm a) $(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+4x+5)=\sqrt{x^2+4x+5-1}-7=\sqrt{x^2+4x+4}-7=|x+2|-7$

olup her $x\in\mathbb{R}$ için $|x+2|-7$ tanımlı olduğundan $D(fog)=(-\infty,+\infty)$ dur.

Her $x\in\mathbb{R}$ için $|x+2|\geq 0$ yani $|x+2|-7\geq -7$ olduğundan $R(fog)=[-7,+\infty)$ dur.

b) $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(fog)(x_1)=(fog)(x_2)$ olsun. $|x_1+2|-7=|x_2+2|-7$ yani $|x_1+2|=|x_2+2|$ olur. Fakat bu eşitlik, $x_1=x_2$ olmasını gerektirmez çünkü örneğin, $x_1=-1$ ve $x_2=-3$ olsun. $|x_1+2|=|-1+2|=1$ ve $|x_2+2|=|-3+2|=1$ olur. Fakat $-1\neq-3$ tür. Dolayısıyla fog fonksiyonu 1-1 değildir.

Her $y\in[-7,+\infty)$ için $(fog)(x)=y$ olacak şekilde bir $x\in\mathbb{R}$ var mı?

$(fog)(x)=|x+2|-7=y \Rightarrow |x+2|=y+7 \rightarrow x+2=y+7 \Rightarrow x=y+5\in\mathbb{R}$

$\searrow -x-2=y+7 \Rightarrow -x=y+9 \Rightarrow x=-y-9\in\mathbb{R}$

olduğundan $(fog)(x)=|x+2|-7$ fonksiyonu örtendir

$$\left.\begin{aligned}(fog)(-x)&=|-x+2|-7=|-(x-2)|-7=|x-2|-7\\(fog)(x)&=|x+2|-7\\-(fog)(x)&=-|x+2|+7\end{aligned}\right\}$$ olup. örneğin $x=2$ için

$$\left.\begin{aligned}(fog)(-x)&=-7\\(fog)(x)&=-3\end{aligned}\right\}$$ yani $(fog)(-x)\neq$ $-(fog)(x)$ $(fog)(x)$

Dolayısıyla ne $(fog)(-x) = (fog)(x)$, ne de $(fog)(-x) = -(fog)(x)$ eşitliği sağlanır. Böylece fog ne tek, ne de çift fonksiyondur

c) f 1-1 olmadığından tersinir değildir.

SAÜ GIDA MÜH. MAT I – I. KISA SINAV_SORULARI

13.10.2016
Perşembe

Soru. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları, $f(x)=x^2$ ve

$$g(x)=\begin{cases} x-1, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$ olarak veriliyor.

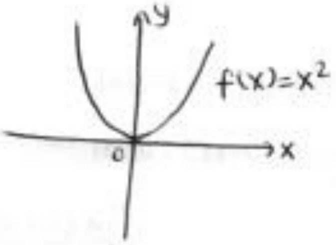
(a) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. g nin grafiğine bakarak, g nin görüntü kümesini belirleyiniz.

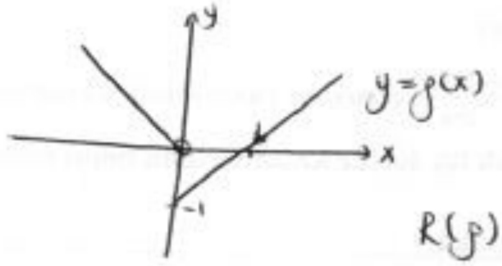
(b) gog fonksiyonu 1-1 midir?

(c) gof fonksiyonu örten midir?

Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK

Çözüm. (a)





$R(g)=[-1,+\infty)$

(b) $x\geq 1$ ise, $(gog)(x)=g(g(x))=g(x-1)=x-1-1=x-2$

$0\leq x<1$ ise, $(gog)(x)=g(g(x))=g(x-1)=-x+1$

$x<0$ ise, $(gog)(x)=g(g(x))=g(-x)=-x-1$
$(-x>0$ olur$)$

$$(gog)(x)=\begin{cases} x-2, & x\geq 1 \\ -x+1, & 0\leq x<1 \\ -x-1, & x<0 \end{cases}$$

$x_1=5$ ve $x_2=-4$ olsun $(gog)(5)=5-2=3$, $(gog)(-4)=-(-4)-1=4-1=3$ olur.

Yani $(gog)(5)=(gog)(-4)=3$ tür fakat $5\neq -4$ tür. Dolayısıyla gog fonksiyonu 1-1 değildir.

(c) $(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2)\overset{x^2\geq 0}{=}x^2-1$ $\quad gof:\mathbb{R}\to[-1,+\infty)$

Her $y\in[-1,+\infty)$ için $(gof)(x)=y$ o.ş. $x\in\mathbb{R}$ var mı? $\quad x^2-1=y \Rightarrow x^2=y+1$

$\Rightarrow x_1=\sqrt{y+1},\ x_2=-\sqrt{y+1}$ olur. $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ old. dan gof örtendir.

10.10.2016
Pzt.

— SAÜ TEKNOLOJİ FAKÜLTESİ İNŞAAT MÜH. MAT.I - I. KISA SINAV —

Soru. $f(x)=\sqrt{x+2}$ ve $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ fonksiyonları verilsin.

a) $f\circ g$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz

b) g fonksiyonunun 1-1 ve örten olup olmadığını, ayrıca g fonksiyonunun tek veya çift olup olmadığını inceleyiniz

c) g fonksiyonu tersinir midir? Varsa tersini bulunuz.

Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK

Çözüm. a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}+2}=\sqrt{\dfrac{x+2x-4}{x-2}}=\sqrt{\dfrac{3x-4}{x-2}}$ olup, $\dfrac{3x-4}{x-2}\geq 0$ olmalıdır.

$3x-4=0 \Rightarrow x=4/3$
$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$ … $4/3$	$4/3$ … 2	2 … $+\infty$
$3x-4$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{3x-4}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

$\Rightarrow D(f\circ g)=(-\infty,4/3]\cup(2,+\infty)$

b) g fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ olup, her $x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ için $g(x_1)=g(x_2)$ yani $\dfrac{x_1}{x_1-2}=\dfrac{x_2}{x_2-2}$ iken $\cancel{x_1x_2}-2x_1=\cancel{x_1x_2}-2x_2$ yani $x_1=x_2$ elde edildiğinden g fonksiyonu 1-1 dir. Öte yandan, her $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ için $g(x)\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ olduğu açıktır. Şimdi, her $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ için $g(x)=y$ olacak şekilde bir $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ var mıdır? $\dfrac{x}{x-2}=y \Rightarrow x=xy-2y \Rightarrow xy-x=2y \Rightarrow x(y-1)=2y \Rightarrow \underbrace{\dfrac{2y}{y-1}}_{\in\mathbb{R}\setminus\{2\}}=x$ olduğundan g örtendir. $x=3\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ olup $g(-x)=\dfrac{-x}{-x-2}$, $-g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$ ve $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ olmasına rağmen $g(-3)=\dfrac{-3}{-5}=\dfrac{3}{5}$, $-g(3)=\dfrac{-3}{1}=-3$, $g(3)=3$ ...

Yani $f(3) \neq f(-3)$ ve $f(-3) \neq -f(3)$ olduğundan fonksiyon ne çift, ne de tektir.

c) f 1-1 ve örten olduğundan tersinirdir. $f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$ dir.

$f(x) = \frac{x}{x-2} = y \Rightarrow \frac{y}{y-2} = x \Rightarrow y = xy - 2x \Rightarrow 2x = xy - y = y(x-1) \Rightarrow$

$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$ bulunur.