2.3.6. Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \rightarrow (I)$ şeklindeki diferensiyel denklemlerdir. (*n=0* için denklem lineerdir, *n=1* için denklem değişkenlerine ayrılabilen denklemdir, bu yüzden $n \neq 0{,}1$ olmalıdır)

Çözüm için y^n yok edilerek Lineer diferansiyel denkleme dönüştürülür.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$
$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)y}{y^n} = Q(x)\frac{y^n}{y^n}$$

$$y'.y^{-n} + P(x).y.y^{-n} = Q(x) \rightarrow (II)$$
$$y'.y^{-n} + P(x).\mathbf{y^{1-n}} = Q(x)$$

$\mathbf{y^{1-n} = z}$ dersek (*z*, yeni bağımlı değişken olur.)

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n).y^{-n}.y'$$
$$y^{-n}.y' = \frac{z'}{1-n}$$

$z \; ve \; z' \; (II)'de$ yerine konulursa,

$$\frac{z'}{1-n} + P(x).z = Q(x)$$

$$z' + \underbrace{(1-n).P(x)}_{P(x)}.z = \underbrace{(1-n).Q(x)}_{Q(x)}$$

z' $\quad P(x) \quad Q(x) \rightarrow Lineer\ diferansiyel\ denklem$

Bu denklemin çözümünden $z = \varphi(x, C)$ bulunur. $z = y^{1-n} = \varphi(x, C)$ konulursa

$y = [\varphi(x, C)]^{\frac{1}{1-n}}$ Bernoulli Diferansiyel Denkleminin Genel Çözümüdür.

Örnek: $y' - \cot x . y = \cos x . y^2$ Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' - \cot x . y = \cos x . y^2 \to (I)$ dif. Denkleminin Bernoulli olduğu görülmektedir. O halde dif.denklemin terimleri y^2 *ye bölünerek* Lineer hale getirilebilir

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{\cot x . y}{y^2} = \frac{\cos x . y^2}{y^2}$$

$$y'.y^{-2} - \cot x . y^{-1} = \cos x \to (II)$$

$z = y^{-1}$ denilirse,

$z' = (-1).y^{-2}.y'$ ifadeleri *(II)* denkleminde yerine konulduğunda

$$-z' - \cot x . z = \cos x$$

$z' + \cot x . z = -\cos x \to Lineer\ Diferansiyel\ Denklem$ elde edilir.

Elde edilen dif.denklem Sabitlerin değişimi yöntemi ile çözülürse,

$$z' + \cot x . z = -\cos x \to (III)$$

$z' + \cot x . z = 0$ dif.denklemin homogen çözümü

z' + (cos x/sin x) . z = 0

dz/dx + (cos x/sin x) . z = 0

∫ dz/z + ∫ (cos x / sin x) dx = ∫ 0

$\ln z + \ln(\sin x) = \ln C$ => $\ln(z . \sin x) = \ln C$ => $z . \sin x = C$ den

$z = \frac{C}{\sin x}$ $olur. Burada\ C = C(x)\ kabul\ edildiğinde$

$z = \frac{C(x)}{\sin x} \to (IV)$ (III) dif. Denkleminin genel çözümü olsun.

Bu ifadeden aşağıdaki z' hesabedilerek

$$z' = \frac{C'(x) . \sin x - \cos x . C(x)}{\sin^2 x} = \frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} . C(x)$$

$z\ ve\ z', (III)'te$ yerine konulursa

$$z' + \cot x . z = -\cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} . C(x) + \frac{\cos x}{\sin x} . \frac{C(x)}{\sin x} = -\cos x$$

$$\frac{C'(x)}{\sin x} = -\cos x$$

$C'(x) = -\cos x . \sin x$

$\int C'(x) = -\int \cos x . \sin x . dx$

$\sin x = t, \cos x . dx = dt \to \int t . dt \to \frac{t^2}{2}$

$C(x) = -\frac{\sin^2 x}{2} + C$ elde edilir.

Bu C(*x*) ifadesi $z = \frac{C(x)}{\sin x}$ *(IV)* denkleminde yerine konulursa,

$$z = \frac{\left(-\frac{\sin^2 x}{2} + C\right)}{\sin x} = -\frac{\sin x}{2} + \frac{C}{\sin x}$$

olur. Buradan

$$z = y^{-1} \to z = \frac{1}{y} \to y = \frac{1}{z}$$

$$y = \frac{1}{\left(-\frac{\sin x}{2} + \frac{C}{\sin x}\right)} = \frac{2 \sin x}{-\sin^2 x + 2C} \to Genel\ Çözümü\ elde\ edilir.$$

Örnek: $x. y' - 4y = x^2 . \sqrt{y}$ Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $x. y' - 4y = x^2 . \sqrt{y}$ denklemini x e bölersek

$y' - \frac{4}{x} y = x. \sqrt{y}$ Bernoulli dif. Denklemi haline gelir. Bu denklemi $\sqrt{y}$ ye bölersek

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x} \frac{y}{\sqrt{y}} = x. \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$y' y^{-1/2} - \frac{4}{x} . y . y^{-1/2} = x$$

$$y' y^{-1/2} - \frac{4}{x} . y^{1/2} = x \to (I)$$

$z = y^{1/2}\ denilirse$ ve türevi alınırsa

$$z' = \frac{1}{2} . y^{-1/2} . y'$$

$2z' = y^{-1/2} . y'\ olur$. Bu iki ifade *(I)* denkleminde yerine konulursa,

$$2z' - \frac{4}{x}.z = x$$

$$z' - \frac{2}{x}.z = \frac{x}{2} \rightarrow Lineer\ Diferansiyel\ denklem\ haline\ gelmiştir.$$

$z = u.v$ *Dönüşümü ile çözersek;*

$z = u.v$
$z' = u'v + uv'$ yerine konulursa,

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2}$$

$$uv' + \left[u' - \frac{2}{x}u\right]v = \frac{x}{2}$$

$$\left[u' - \frac{2}{x}u\right] = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} - \frac{2}{x}dx = 0$$

$$\int \frac{du}{u} - \int \frac{2}{x}dx = \int 0$$

$$\ln u - 2\ln x = \ln C \Rightarrow \ln u = \ln C + 2\ln x$$

$$u = C.x^2$$

Kalan terimler,

$$uv' = \frac{x}{2} \rightarrow u\ yerine\ bulunan\ değer\ konulduğunda,$$

$$C.x^2v' = \frac{x}{2} \Rightarrow v' = \frac{1}{2C}.\frac{1}{x}$$

$$\int v' = \frac{1}{2C}.\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2C}\ln x + C_1$$

$z = u.v$ dönüşüm değerleri yerine konulduğunda
$$z = C.x^2\left(\frac{1}{2C}\ln x + C_1\right) = \frac{x^2\ln x}{2} + x^2.C$$

$z = y^{1/2}$ Olduğundan,

$y = z^2$ *olur.*

$$y = \left(\frac{x^2\ln x}{2} + x^2.C\right)^2 \rightarrow Bernoulli\ dif.denkleminin\ Genel\ Çözümü\ ortaya\ çıkar.$$

Soru1. $x^2y' + x^3y = x^4y^3$ $(dif.denklemin\ terimlerini\ x^2\ \ ye\ bölerek\ bakınız)$
Soru2. $y'.\cos x + \sin x.y = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

Soru3. $(x^2+1)y' + 2xy = x^2$ $(dif.denklemin\ terimlerini\ (x^2+1)\ e\ bölerek\ bakınız)$
Soru4. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{e^x}{x^2}$ denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.