Adi Diferensiyel Denklemlerim Laplace Dönüşümü ile Çözümü

Teorem. $f(x)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli, α üstel mertebeden ve $f'(x)$ $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. Bu durumda $s>\alpha$ için $L\{f'(x)\}=sL\{f(x)\}-f(0)$ dır.

İspat. $L\{f'(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}f'(x)dx$ Kısmi integrasyon yardımıyla

$u=e^{-sx}$, $f'(x)dx=dv$ denirse $-se^{-sx}dx=du$, $f(x)=v$ olup

$$L\{f'(x)\}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}f'(x)dx=\lim_{b\to\infty}\left[e^{-sx}f(x)\Big|_0^b-s\int_0^b e^{-sx}f(x)dx\right]$$

$$L\{f'(x)\}=-f(0)+\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=sL\{f(x)\}-f(0)$$

Benzer şekilde $L\{f''(x)\}=s^2L\{f(x)\}-sf(0)-f'(0)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu şekilde devam edilirse

$L\{y^{(n)}(x)\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-...-y^{(n-1)}(0)$ olacaktır. $\left(L\{y(x)\}=Y(s)\right)$.

Dolayısıyla Laplace dönüşümü sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemlerinin çözümünde kolaylık sağlar. Bu şekildeki bir probleme ilişkin denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa bir cebirsel denklem elde edilir. Bu denklemde bilinmeyen $Y(s)$ ler olacaktır. Şimdi bunu ikinci mertebeden genel bir denkleme uygulayalım.

$a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$
$y(0)=c_1, y'(0)=c_2$ başlangıç değer problemini ele alalım ve genel çözümü için Laplace dönüşümünden yararlanalım.

$$L\{a_2y''+a_1y'+a_0y\}=L\{f(x)\}$$

$$a_2L\{y''\}+a_1L\{y'\}+a_0L\{y\}=L\{f(x)\}$$

$$a_2\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+a_1\left[sY(s)-y(0)\right]+a_0Y(s)=F(s)$$

$$a_2\left[s^2Y(s)-sc_1-c_2\right]+a_1\left[sY(s)-c_1\right]+a_0Y(s)=F(s)$$

$$\left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)Y(s)-\left(a_2c_1\right)s-\left(a_2c_2+a_1c_1\right)=F(s)$$

şeklinde bilinmeyenin $Y(s)$ olduğu cebirsel denklem elde edilmiş olur. Buradan $Y(s)$;

$$Y(s)=\frac{\left(a_2c_1\right)s+\left(a_2c_2+a_1c_1\right)+F(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}$$

olarak bulunur. Ters Laplace dönüşümü ile de problemin genel çözümü elde edilmiş olur.

Örnek. $\begin{array}{l} y'-5y=e^{5x} \\ y(0)=0 \end{array}$ başlangıç değer probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y'-5y\}=L\left\{e^{5x}\right\}$$

$$L\{y'\}-5L\{y\}=L\left\{e^{5x}\right\}$$

$$\left[sY(s)-y(0)\right]-5Y(s)=\frac{1}{s-5}$$

$$[s-5]Y(s)=\frac{1}{s-5}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-5)^2}\Rightarrow L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\}$$

$y(x) = xe^{5x}$

Örnek. $y'' - y' - 2y = 4x^2 \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$ başlangıç değer probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y'' - y' - 2y\} = 4L\{x^2\}$$

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}$$

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - \left[sY(s) - y(0)\right] - 2Y(s) = 4\frac{2}{s^3}$$

$$\left[s^2Y(s) - s - 4\right] - \left[sY(s) - 1\right] - 2Y(s) = 4\frac{2}{s^3}$$

$$\left[s^2 - s - 2\right]Y(s) - [s+3] = \frac{8}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s^3\left(s^2 - s - 2\right)} + \frac{s+3}{s^2 - s - 2}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3\left(s^2 - s - 2\right)} + \frac{s+3}{s^2 - s - 2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3\left(s^2 - s - 2\right)} + \frac{s+3}{s^2 - s - 2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3\left(s^2 - s - 2\right)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2 - s - 2}\right\}$$

$$\frac{8}{s^3\left(s^2 - s - 2\right)} = \frac{8}{s^3(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s-2} \text{ ile}$$

$A=-3, B=2, C=-4, D=\frac{8}{3}, E=\frac{1}{3}$ olup

$$L^{-1}\left\{\frac{8}{s^3\left(s^2-s-2\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{-4}{s^3}+\frac{\frac{8}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}\right\}$$

$$=-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}+\frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$-3+2x-2x^2+\frac{8}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$$

Benzer şekilde

$$\frac{s+3}{s^2-s-2}=\frac{s+3}{(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}=\frac{-\frac{2}{3}}{s+1}+\frac{\frac{5}{3}}{s-2}$$

$L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}\right\}=\frac{-2}{3}e^{-x}+\frac{5}{3}e^{2x}$ olup, genel çözüm

$y(x)=-3+2x-2x^2+2e^{-x}+2e^{2x}$ şeklinde elde edilmiş olur.

Örnek. $y'''-5y''+7y'-3y=20\sin x \quad y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=-2$ başlangıç değer probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y'''-5y''+7y'-3y\}=20L\{\sin x\}$$

$$L\{y'''\}-5L\{y''\}+7L\{y'\}-3L\{y\}=20L\{\sin x\}$$

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)\right]-5\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]+7\left[sY(s)-y(0)\right]-3Y(s)=20\frac{1}{s^2+1}$$

$$\left[s^3-5s^2+7s-3\right]Y(s)+2=20\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{20-2s^2-2}{\left(s^2+1\right)\left(s^3-5s^2+7s-3\right)}=\frac{-2(s-3)(s+3)}{\left(s^2+1\right)(s-1)^2(s-3)}=\frac{-2s-6}{\left(s^2+1\right)(s-1)^2}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\}=y(x)=L^{-1}\left\{\frac{-2s-6}{\left(s^2+1\right)(s-1)^2}\right\}$$

$$\frac{-2s-6}{\left(s^2+1\right)(s-1)^2}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{(s-1)^2}$$

$A=-3, B=1, C=3, D=-4$ olup

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{-3s+1}{s^2+1}+\frac{3}{s-1}-\frac{4}{(s-1)^2}\right\}=-3L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{-3s+1}{s^2+1}+\frac{3}{s-1}-\frac{4}{(s-1)^2}\right\}=-3\cos x+\sin x-4xe^x+3e^x$$

Örnek. $y''+2y'+y=xe^{-x}$ $\quad y(0)=1, y'(0)=2$ başlangıç değer probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$y(x)=\frac{1}{6}x^3e^{-x}+e^{-x}+3xe^{-x}$$
