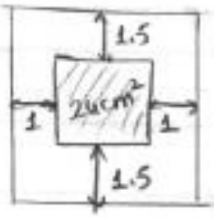
① Bir kağıdın $24\ cm^2$ lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1,5 cm, sağ ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre, bu kağıdın alanı en az kaç cm^2 olmalıdır?



Yazı yazılacak kısmın eni x, boyu y olsun. Kağıdın ebatları $x+2$ ve $y+3$ olur. Dolayısıyla kağıdın alanı $A=(x+2).(y+3)$ olur. $x.y=24$ olacağından $y=\frac{24}{x}$ dir.

$$A=(x+2).(y+3)=(x+2)\left(\frac{24}{x}+3\right)=24+3x+\frac{48}{x}+6=3x+\frac{48}{x}+30$$

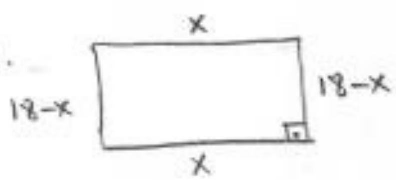
Kağıdın alanının <u>en az</u> olması istendiğine göre, $A(x)=3x+\frac{48}{x}+30$ fonksiyonunun minimumu soruluyor demektir.

$A'(x)=3-\frac{48}{x^2}=0 \Rightarrow x=4$ olur. ($x\neq-4$ dür çünkü x bir uzunluktur)

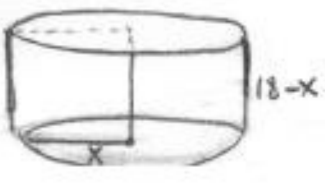
$A''(x)=-48.\left(-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{96}{x^3}$ olup $A''(\overset{\text{yerel min. nokta}}{4})=\frac{96}{4^3}=\frac{96}{64}>0$ olduğundan, $x=4$ noktasında alan minimum olur. Böylece alan en az $A=3.4+\frac{48}{4}+30$ yani $A=54cm^2$ olur.

② Çevresi 36 cm olan dikdörtgen biçimindeki bir karton, kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel silindirin hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

<u>Çözüm</u>.



Dikdörtgenin çevresi 36cm olduğuna göre, bir kenarına x dersek, diğer kenarı $18-x$ olur.



$$V=\pi r^2.h=\pi x^2.(18-x)=\pi(18x^2-x^3)$$

$$V'=\pi(36x-3x^2)=0 \Rightarrow 3x(12-x)=0$$

$x=0$ veya $x=12$ olur.

Fakat $x=0$ olamaz (Dikdörtgenin bir kenar uzunludur çünkü.)

O hâlde $x=12$ olmalıdır. $V''(x) = \pi(36-6x) = \pi(36-6.12) = -36\pi < 0$

olduğundan $x=12$ yerel maksimum noktadır. Böylece hacim en fazla,

$V = \pi . x^2(18-x) = \pi . 12^2(18-12) = \pi . 144 . 6 = 864\pi \text{ cm}^3$ olur.

(3) Bir sanayici, aliminyumdan dik dairesel silindir şeklinde <u>üstü açık</u> 64 cm^3 hacminde kutular yapmaktadır. <u>En az</u> aliminyum kullanması için yapacağı silindirin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır?

<u>Çözüm.</u>

Kullanılacak aliminyumun alanı, silindirin yüzey alanı olacağından, $A = \pi r^2 + 2\pi r h \text{ cm}^2$ dir (Üstü açık!)

(Normalde burada 2 katsayısı olmalıydı ama üstü açık dediği için 1 yazdık)

Hacmi 64 cm^3 olacağından, $V = \pi r^2 h = 64$ olur. Yani $h = \frac{64}{\pi r^2}$ dir.

Buna göre $A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\cancel{\pi} r . \frac{64}{\cancel{\pi} r^2} = \pi r^2 + \frac{128}{r}$ olur.

Alan <u>minimum</u> olmalı ki <u>en az</u> malzeme kullanılsın! Dolayısıyla A nın yerel minimumu soruluyor.

$A'(r) = 2\pi r + 128 . \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 128 \Rightarrow r^3 = \frac{64}{\pi}$

$\Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm olmalıdır.

4) $y^2=2x^3$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $4x-3y+2=0$ doğrusuna diktir?

Çözüm. $4x-3y+2=0 \Rightarrow 4x+2=3y \Rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ olup, bu doğrunun eğimi $\frac{4}{3}$ tür.

$(y=\underset{\substack{\downarrow \\ \text{eğim}}}{m}x+n)$

Dolayısıyla teğetin eğimi $-3/4$ olmalıdır. (Dik olunca eğimler çarpımı -1 idi)

$y^2=2x^3$ eğrisi üzerindeki bir (a,b) noktasından çizilen ve $4x-3y+2=0$'a dik olan teğetin denklemi

$y-b=\underset{\substack{\downarrow \\ y'(a,b)}}{\left(-3/4\right)}(x-a)$ olur. Bize sorulan (a,b) ikilisi nedir?

$$\underbrace{y^2-2x^3}_{F(x,y)}=0 \Rightarrow y'=-\frac{-6x^2}{2y}=\frac{3x^2}{y}$$

$$y'\Big|_{(a,b)}=\frac{3\cdot a^2}{b} \text{ olur.}$$

$\frac{\cancel{3}a^2}{b}=-\cancel{3}/4 \Rightarrow -4a^2=b$ olur. (a,b) noktası $y^2=2x^3$ üzerinde olduğuna göre $b^2=2a^3$ olur. $\Rightarrow \underset{8}{\cancel{16}}a^4=\cancel{2}a^3 \Rightarrow 8a^4-a^3=0$

$a^3(8a-1)=0$

$a=0$ veya $a=1/8$ olur.

Fakat $a=0$ olamaz çünkü $a=0$ olursa $b=0$ olur ki, bu durumda y' türevi tanımsız olur. Böylece $a=\frac{1}{8}$ olmalıdır.

$a=\frac{1}{8} \Rightarrow b=-4a^2=-4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=-4\cdot\frac{1}{64}=-\frac{1}{16}$ olur.

$(a,b)=\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{16}\right)$ bulunur.

(5) $y = x^2 - 2x + 5$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $y = x$ doğrusuna paraleldir?

Çözüm. $y = x$ doğrusunun eğimi 1 dir. Paralel doğruların eğimleri eşit olduğuna göre, $y = x^2 - 2x + 5$ eğrisinin bir (a, b) noktasındaki teğetinin eğiminin 1 olması için a ve b ne olmalıdır?

$y' = 2x - 2$

$\underbrace{y'(a)}_{\text{eğim}} = 2a - 2 = 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 3/2.$ $\left(\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 5 \text{ olduğundan} \\ b = a^2 - 2a + 5 \\ b = \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4} \end{array} \right)$

Yani aranan nokta $(a, b) = (3/2, 17/4)$ tür.

(6) $x^2 + y^2 = 25$ eğrisinin hangi noktasındaki teğetinin eğimi $3/4$ dür?

Çözüm. $\underbrace{x^2 + y^2 - 25}_{F(x,y)} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

Aranan nokta (a, b) olsun. $y'\big|_{(a,b)} = -\frac{a}{b} = 3/4 \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3k \\ b = 4k \end{array}$ olur.

$a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 = 25 \Rightarrow 25k^2 = 25 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \mp 1$

$k = 1$ için $(a, b) = (-3, 4)$; $k = -1$ için $(a, b) = (3, -4)$ dür.

(7) $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçen ve $4y = x^2 + 4$ paraboline teğet olan doğruların dik kesiştiklerini gösteriniz.

Çözüm. $4y-x^2-4=0 \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x}{4} = \frac{x}{2}$

Herhangi bir (a,b) noktasından eğriye çizilen teğetin denklemi

$y-b = f'(a)(x-a)$ idi. $f'(a)=\frac{a}{2}$ olduğundan, teğetin denklemi

$y-b=\frac{a}{2}(x-a)$ yani $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{2}+b$ olur. Bu teğet $(\frac{3}{2},0)$ dan

geçtiğine göre, $0=\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{a^2}{2}+b$ yani $0=3a-2a^2+4b$ olur.

Ayrıca (a,b) noktası, $4y=x^2+4$ eğrisi üzerinde olduğundan $4b=a^2+4$

olur. Böylece $0 = 3a-2a^2+a^2+4 = -a^2+3a+4$ olur. Yani

$a^2-3a-4=0$ dır. Buradan $a=4$ veya $a=-1$ dir.
$\begin{matrix}-4\\+1\end{matrix}$

$a=4$ ise teğetin eğimi: $\frac{a}{2}=\frac{4}{2}=2$ dir.
$a=-1$ ise " " $\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$ dir.
Dolayısıyla eğimler çarpımı $2.(-\frac{1}{2})=-1$ dir.

Böylece iki teğet birbirine diktir.

8) $y=-x$ (eğimi -1 yani!) doğrusunun $y=x^3-6x^2+8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz.

Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?

Çözüm. (a, a^3-6a^2+8a) noktasından çizilen teğetin eğimi -1

olacağından, $\underbrace{3a^2-12a+8}_{\text{türevin } x=a \text{ daki değeri}}=-1$ yani $3(a^2-4a+3)=0$ olur. Yani $a=1$ veya

$a=3$ tür. Bu iki değere karşılık gelen teğetlerden birinin $y=-x$ olduğunu göstermeliyiz. $a=1$ için değme noktası $(1,3)$ olacağından teğetin denklemi

$y-3=-1(x-1)$ yani $y=-x+4$ olur. $a=3$ için değme noktası $(3,-3)$ olur.

O halde teğetin denklemi $y+3=-1(x-3)$ yani $y=-x$ olur.

O hâlde $y=-x$, eğriye $x=3$ apsisli noktada teğettir.

$$x^3-6x^2+8x=-x \Rightarrow x(x^2-6x+9)=0 \Rightarrow x(x-3)^2=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=x_3=3$$

olacağından $y=-x$ doğrusu, eğriyi $x=0$ apsisli noktada, yani $(0,0)$ noktasında keser. $x=3$ apsisli noktada ise teğet olur.

(9) m nin hangi değerleri için $y=mx$ doğrusu $x^2+y^2-4x+3=0$ çemberine teğet olur? Değme noktasının apsisini bulunuz.

Çözüm. $x^2+(mx)^2-4x+3=0 \Rightarrow (1+m^2)x^2-4x+3=0$

Çember ile doğrunun bir tek ortak noktası olacağından,

$\Delta=b^2-4ac=16-4(1+m^2)\cdot 3=0$ olmalıdır. Yani $4\left(4-3(1+m^2)\right)=0$

olup $1+m^2=4/3 \Rightarrow m^2=1/3 \Rightarrow m=\mp 1/\sqrt{3}$ olur.

Değme noktası, (bu soru için!) kesişim noktası ile aynı olur.

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x^2-4x+3=0 \Rightarrow \frac{4}{3}x^2-4x+3=0$$

$$\Rightarrow 4x^2-12x+9=0 \Rightarrow x=3/2 \Rightarrow \left(3/2,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\right)=\left(3/2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$2x \quad -3$

$2x \quad -3$

değme noktasının apsisi,

$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x^2-4x+3=0$ dan yine $\left(3/2,\ \sqrt{3}/2\right)$ bulunur.

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. ∞^0 belirsizliği vardır. $k = \lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ olsun.

$$\ln k = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (\text{L'HOSPİTAL})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left((\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = -(1.1) = -1$$

$\ln k = -1$ ise $k = e^{-1}$ bulunur. k sayısı zaten limitin kendisidir.

(11) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x^2-3x+1} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x^2-3x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{4x-3} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{L'HOSPİTAL})$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x).\cot x = ?$ (0.∞ belirsizliği)

$$= \lim_{x\to 0} (1-\cos x).\frac{\cos x}{\sin x} = \Bigg(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}\Bigg)\Bigg(\underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{1}\Bigg) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

(13) $\sqrt[3]{28}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz

Çözüm. $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}$

$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$; $x = 27$, $\Delta x = 1$

$f(27+1) \cong f(27) + \frac{1}{3}.(27)^{-2/3}.1$

$f(28) \cong \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3}.(3^3)^{-2/3} = 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27}$.

(14) $y = \dfrac{x^2+5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm. $x^3-4x = x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x=0,\ x=2,\ x=-2$ (paydayı sıfır yapanlar)

$x=0$ için $x^2+5x-14 = -14 \neq 0$

$x=2$ için $x^2+5x-14 = 4+10-14 = 0$

$x=-2$ için $x^2+5x-14 = 4-10-14 = -20 \neq 0$

olup, $x=2$ için pay 0 olduğundan, düşey asimptotlar $x=0$ ve $x=-2$ doğrularıdır.

(15) $y = 2^{\frac{1}{x}}$ eğrisinin düşey asimptotlarını bulunuz.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ veya $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x=a$ düşey asimptot oluyordu.

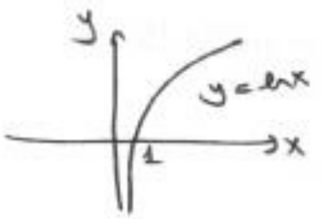
$\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0$

$\left(\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ olduğunu kullandık} \right)$

olduğundan $x=0$ düşey asimptottur.

(16) $y = \ln x$ eğrisinin düşey asimptotunu bulunuz.

Çözüm.



$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğundan $x = 0$ düşey asimptottur.

(17) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm. $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.

(18) $y = \sqrt{x^2 - x}$ eğrisinin eğik asimptotunu bulunuz.

Çözüm. $y = mx + b$

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ idi.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{|x|\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

$x \to -\infty$ alındığında ise ikinci eğik asimptot $y = -x + \frac{1}{2}$ olur.

(19) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm. $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ olup, payda 0 olamayacağından tanım kümesi $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dir.

$x=-1$ düşey asimptottur (paydayı 0 yapar ama payı yapmaz)

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+2x+1} = 1$ olduğundan $y=1$ yatay asimptottur.

$x=0$ için $y=-4$; $y=0$ için $x=-2$ veya $x=2$ olur. Böylece eğri, eksenleri

$(0,-4)$, $(-2,0)$ ve $(2,0)$ da keser.

$$y' = \frac{2x(x^2+2x+1)-(x^2-4).(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{(x+1).(2x+8)}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x=-4 \text{ olur.}$$

($x \neq -1$ dir payda 0 olmaz)

$x=-4$ ise $y = 4/3$ olur.

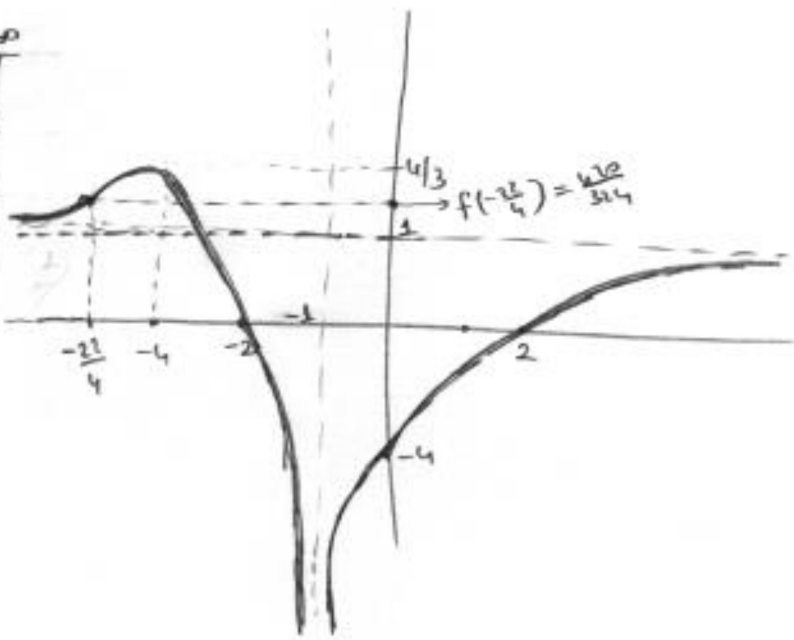
$$y'' = \frac{(1.(2x+8)+(x+1).2).(x+1)^4-(x+1).(2x+8).4(x+1)^3}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)^3}\left((2x+8)(x+1)+2(x+1)^2-4(x+1)(2x+8)\right)}{\cancel{(x+1)^8}\ (x+1)^5}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)}(2x+8+2x+2-8x-32)}{\cancel{(x+1)^5}\ (x+1)^4} = \frac{-4x-22}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{22}{4}$$

x	$-\infty$	$-22/4$		-4		-2		-1 (asimptot)		0		2		$+\infty$
y'	+		+	0	−		−		+		+		+	
y''	+	0	−		−		−		−		−		−	
y	1 ↗	$\frac{423}{324}$	↗	$4/3$	↘	0	↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗	-4	↗	0	↗	1

yatay asimptot



(20) $y = x + \frac{1}{x}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm. 1. $T.K = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $x=0$ düşey asimptot. $y=x$ eğik asimptot.

3. $x=0$ için fonk. tanımlı değil. Bu nedenle eğri y eksenini kesmez

$y=0$ için $\frac{x^2+1}{x} = 0$ yani $x^2 = -1$ olur ki bu mümkün değil. Dolayısıyla eğri

x eksenini de kesmez.

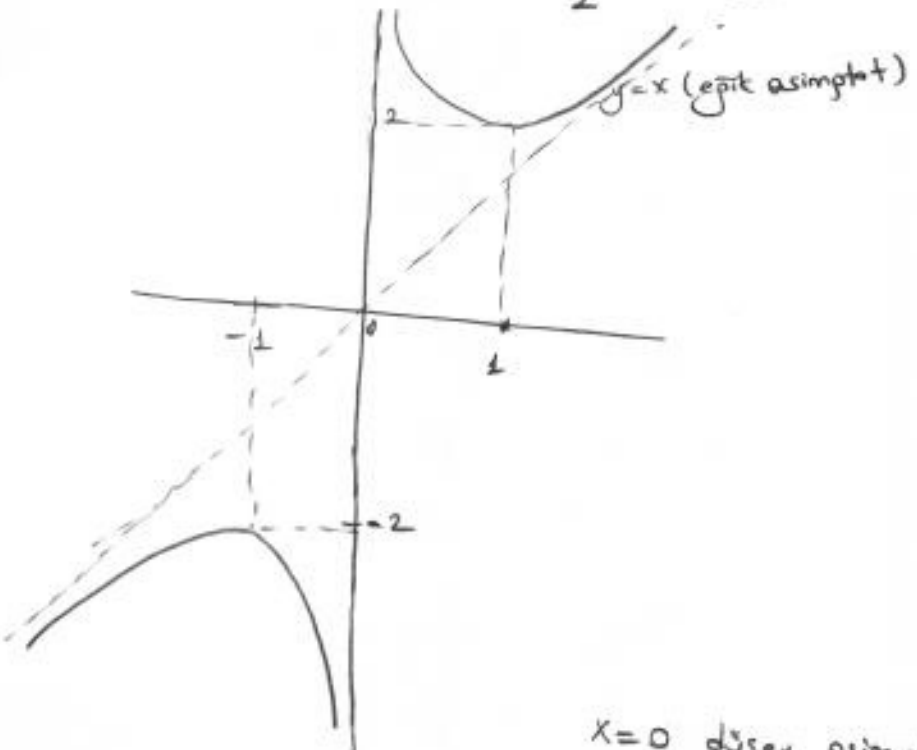
4. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 0$ ın kökleri $x^2 - 1 = 0$ dan $x = \mp 1$ dir.

$x = 1$ için $y = 2$; $x = -1$ için $y = -2$ dir.

$y'' = +2/x^3$ olup $x>0$ için $y''>0$, $x<0$ için $y''<0$ dır.

5.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



$x=0$ düşey asimptotun y ekseninin kendisi olduğuna dikkat ediniz.

(21) $y=\ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm. 1. $\frac{x^2-4}{1-x^2}>0$ olmalı. $\quad x^2-4=0 \Rightarrow x=\mp 2$

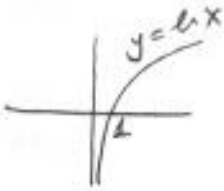
$1-x^2=0 \Rightarrow x=\mp 1$

x		-2		-1		1		2	
x^2-4	+	0	−		−		−	0	+
$1-x^2$	−		−	0	+	0	−		−
$\frac{x^2-4}{1-x^2}$	−		+		−		+		−

T.K $=(-2,-1)\cup(1,2)$ dir.

2. $\lim\limits_{x\to -2^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(\frac{(-2+t)^2-4}{1-(-2+t)^2}\right)=\ln\left(\frac{0}{-3}\right)=\ln(0)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(\frac{(2+t)^2-4}{1-(2+t)^2}\right)=\ln\left(\frac{0}{-3}\right)=\ln(0)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(\frac{(-1+t)^2-4}{1-(-1+t)^2}\right)=\ln\left(\frac{-3}{0}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(\frac{(1+t)^2-4}{1-(1+t)^2}\right)=\ln\left(\frac{-3}{0}\right)=+\infty$

olduğundan $x=-2$, $x=2$, $x=-1$ ve $x=1$ doğruları birer düşey asimptottur.

Yatay asimtot yok $\left(\lim\limits_{x\to\mp\infty}\ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=\ln(-1)\to \text{tanımsız old. dan limit yok}\right)$

Eğik asimptot yok.

3. Eksenleri kestiği noktalara bakalım.

$x=0$ için fonk. tanımsız olduğundan grafik y eksenini kesmez.

$y=0$ için $\ln\left(\frac{x^2-4}{1-x^2}\right)=0$ yani $\frac{x^2-4}{1-x^2}=1 \Rightarrow x^2-4=1-x^2 \Rightarrow 2x^2=5 \Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{5}{2}}$

4. $y'=\frac{\cancel{1-x^2}}{x^2-4}\cdot\left(\frac{2x.(1-x^2)-(x^2-4).(-2x)}{\cancel{(1-x^2)^2}_{\,1-x^2}}\right)=\frac{2x(1\cancel{-x^2}+\cancel{x^2}-4)}{(x^2-4)(1-x^2)}=\frac{-6x}{(x^2-4)(1-x^2)}$

$y'=0$ dan $x=0$ olur. Fakat $x=0$ için fonk. tanımsızdır. Payda, tanım kümesindeki x ler için pozitif olduğundan türevin işareti sadece paya bağlıdır. $x>0$ ise $y'<0$ · $x<0$ ise $y'>0$ dır

$$y'' = \frac{-6.(x^2-4)(1-x^2) + 6x.\left(2x.(1-x^2)+(x^2-4).(-2x)\right)}{(x^2-4)^2.(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-6(x^2-4)(1-x^2) + 12x^2(1-x^2) - 12x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^2(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-6(x^2-4)(1-x^2) + 12x^2(\overbrace{1-x^2-x^2+4}^{5-2x^2})}{(x^2-4)^2.(1-x^2)^2} = \frac{(-6x^2+24)(1-x^2)+60x^2-24x^4}{(x^2-4)^2.(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+6x^4+24-24x^2+60x^2-24x^4}{(x^2-4)^2(1-x^2)^2} = \frac{-18x^4+30x^2+24}{(x^2-4)^2(1-x^2)^2}$$

$y''=0 \Rightarrow$ $x^2=t$ denirse $-18t^2+30t+24=0$ yani $-3t^2+5t+4=0$

olur. Buradan $t_{1,2} = \dfrac{-5 \mp \sqrt{25+4.3.4}}{2.(-3)} = \dfrac{-5 \mp \sqrt{73}}{-6}$ olup $t=x^2$

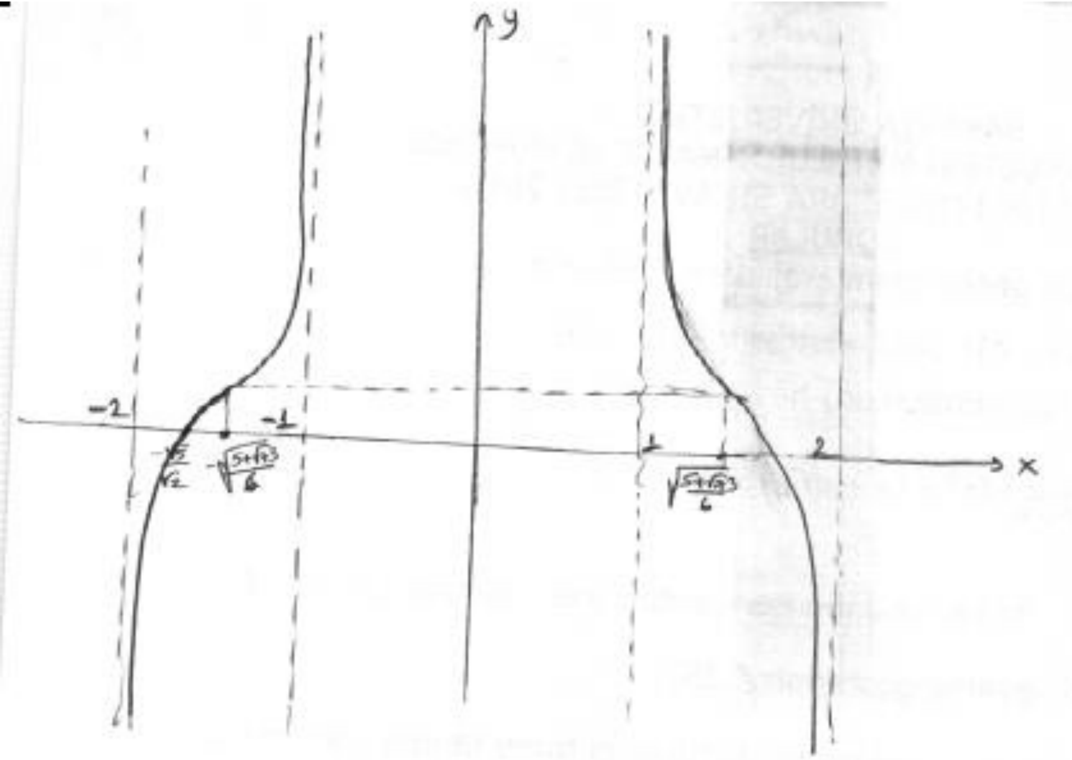
yani t pozitif old. dan $t = \dfrac{-5-\sqrt{73}}{-6}$ seçilmelidir. Dolayısıyla

$x = \mp\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{73}}{6}}$ olur (2. türevin kökleri) $\sqrt{73}$ sayısı 8 den büyük, 9dan küçük bir sayı olup, $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{73}}{6}}$ sayısı $\sqrt{2}$ den büyük bir sayıdır. $\sqrt{\frac{5}{2}}$ dan de küçüktür.

x		-2		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$		$+\sqrt{\frac{5}{2}}$		2	
y'	//////		$+$		$+$		$+$		//////		$-$		$-$		$-$		//////
y''	//////		$-$		$-$	0	$+$		//////		$+$	0	$-$		$-$		//////
y	//////	$-\infty$	↗	0	↗		↗	$+\infty$	//////	$+\infty$	↘		↘	0	↘	$-\infty$	//////

Tabloya göre profil aşağıdaki gibi olur.

$\mp\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{2}}$ ler büküm noktası



(22) $y = x.e^x$ eğrisini çiziniz. (Basit, anlaşılır bir örnek!!)

Çözüm. T.K = $\mathbb{R}$ dir. Düşey asimptot yok.

$\lim_{x\to-\infty} x.e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ olduğundan $y=0$ yatay asimptottur.

$\lim_{x\to+\infty} x.e^x = +\infty$ olduğundan, $y=0$ dan başka yatay asimptot yok.
Eksenleri kestiği nokta sadece $(0,0)$ dır.
$y' = (1+x).e^x$ olup $y'=0$ ın kökü sadece $x=-1$ dir. $x=-1$ için $y=-e^{-1}$ olur.
$y'' = (2+x).e^x$ olup $y''=0$ ın kökü " $x=-2$ dir. $x=-2$ için $y=-2e^{-2}$ olur.

x	$-\infty$	-2 (Büküm noktası)		-1		0		$+\infty$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	0 ↘	$-2e^{-2}$	↘	$-e^{-1}$	↗	0	↗	$+\infty$