Makine Mühendisliği MAT-I Final Sınavı 25.12.17

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$ limitini hesaplayınız. (15)

b) $f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x\le -1 \\ ax-b & , \quad -1<x<4 \\ 9 & , \quad x\ge 4 \end{cases}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır? (10)

2) a) $y(0)=-1$ olmak üzere $e^{xy}=x^2-y^3$ ile tanımlanan kapalı fonksiyonun $y'(0)$ türevini bulunuz. (15)

b) $y=x^{\arctan x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz. (10)

3) Aşağıdaki şıklardan **sadece birini** çözünüz. (20)

a) $f(x)=x^2+2x+3$ eğrisinin $y=\dfrac{x+2}{3}$ doğrusuna dik olan teğetinin denklemini bulunuz.

b) Yüzey alanı 24π olan kapalı bir dik silindirin hacmi en fazla ne kadardır?

4) $y=\dfrac{3x-1}{2x+4}$ eğrisinin grafiğini detayları ile birlikte çiziniz. (30)

NOT: Süre 80 dakikadır. Başarılar dileriz.

MAT-I Final Çözümleri 25.12.2017

1) a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(x+1)-x}{x\cdot\ln(x+1)}\right) \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}}$ (2)

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{1\cdot\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}} \underset{L'Hsp}{\overset{0/0}{=}}$ (6)

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}} = \frac{-\frac{1}{(0+1)^2}}{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}} = \frac{-1}{2}$ // (6)

---

1) b) $f(x)=\begin{cases} 2, & x\leq -1 \\ ax-b, & -1<x<4 \\ 9, & x\geq 4 \end{cases}$ fonksiyonun sürekli olması

için $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ ve $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

olmalıdır. Burada $f(-1)=2$ ve $f(4)=9$ dur.

(4)

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(ax-b) = -a-b \\ f(-1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=-a-b=2 \Rightarrow -a-b=2 \quad \cdots (1)$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(ax-b) = 4a-b \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = 9 \quad \text{ve } f(4)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow (4a-b)=9=9 \Rightarrow 4a-b=9 \quad \cdots (2)$

(4)

(1) ve (2) den
$$\begin{array}{r} 4a-b=9 \\ -\;\; -a-b=2 \\ \hline 5a=7 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=\frac{7}{5}}$$
bunu (1) denkleminde yerine yazarsak (2)

$-a-b=2 \Rightarrow -\frac{7}{5}-b=2 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-17}{5}}$

bulunur

MAT-I / Final / Çözümleri 25.12.2017

(2) a) $y(0)=-1$ olm. üzere $e^{xy}=x^2-y^3$ fonu. için $y'(0)=?$

(8) $(1+x\cdot y')e^{xy}=2x-3y^2\cdot y' \Rightarrow (x\cdot e^{xy}+3y^2)y'=2x-y\cdot e^{xy}$ den

$y'=\dfrac{2x-y\cdot e^{xy}}{x\cdot e^{xy}+3y^2}$ dır. $x_0=0$, $y_0=-1$ için

(7) $y'(x_0)=y'(0)=\dfrac{2x_0-y_0 e^{x_0y_0}}{x_0 e^{x_0y_0}+3y_0^2}=\dfrac{2.0-(-1)e^{0.(-1)}}{0.e^{0.(-1)}+3.(-1)^2}=\dfrac{0+1}{0+3}=\dfrac{1}{3}$

---

(2) b) $y=x^{\mathrm{Arctan}x}$ ise $y'=?$

(6) $y=x^{\mathrm{Arctan}x} \Rightarrow \ln y=\ln\left(x^{\mathrm{Arctan}x}\right)=\mathrm{Arctan}x.\ln x$

$\ln y=\mathrm{Arctan}x.\ln x \Rightarrow (\ln y)'_x=(\mathrm{Arctan}x.\ln x)'$ den

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{1+x^2}.\ln x+(\mathrm{Arctan}x)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{1+x^2}+\dfrac{\mathrm{Arctan}x}{x}$ den

(4) $y'=y\cdot\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2}+\dfrac{\mathrm{Arctan}x}{x}\right)=x^{\mathrm{Arctan}x}\cdot\dfrac{x\ln x+(1+x^2)\mathrm{Arctan}x}{x(1+x^2)}$

$$\boxed{y'=\frac{x.\ln x+(1+x^2)\mathrm{Arctan}x}{x\cdot(1+x^2)}\cdot x^{\mathrm{Arctan}x}}$$ bulunur.

17 – 18 / MAT-I / Final 25.12.2017

3 a) $f(x)=x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x+2$ } 3

3 $y=\frac{x+2}{3}=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; $m=\frac{1}{3}$; $m_t \cdot m=-1 \Rightarrow m_t \cdot \frac{1}{3}=-1$

$m_t=-3$ dür. $m_t=f'(x_0)=2x_0+2=-3 \Rightarrow x_0=-\frac{5}{2}$

$y_0=f(x_0)=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+3=\frac{25}{4}-2\frac{5}{2}+3=\frac{25}{4}-2=\frac{17}{4}$ olup

$\left(-\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right)$ noktasından geçen, eğimi $m_t=-3$ olan } 3

4 teğet doğrunun denklemi $y-y_0=m_t(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{17}{4}=-3\left(x+\frac{5}{2}\right)$ den

$4y-17=-12x-30 \Rightarrow \boxed{12x+4y+13=0}$ veya $y=-3x-\frac{13}{4}$

3 $\{ m_n \cdot m_t=-1 \Rightarrow m_n\cdot(-3)=-1 \Rightarrow m_n=+\frac{1}{3}$ olup

4 $\left(-\frac{5}{2},\frac{17}{4}\right)$ den geçen eğimi $m_n=\frac{1}{3}$ olan normal doğrunun

denklemi $y-y_0=m_n(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{17}{4}=\frac{1}{3}\left(x+\frac{5}{2}\right)$ den

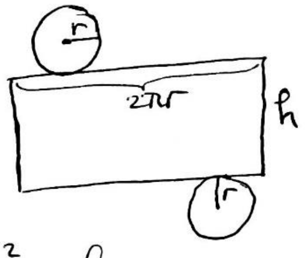
$3y-\frac{51}{4}=x+\frac{5}{2} \Rightarrow x-3y+\underset{(2)}{\frac{5}{2}}+\frac{51}{4}=0 \Rightarrow \boxed{x-3y+\frac{61}{4}=0}$

veya $4x-12y+61=0$ ya da $\boxed{y=\frac{x}{3}+\frac{61}{12}}$

bulunur.

MAT-I / Final Çözümleri 25.12.2017

(3) b) Yüzey alanı: $S = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r h = 24\pi$



(2)

Hacim $V = \pi r^2 \cdot h$ olup yüzey alanından

h yüksekliği r yarıçapı cinsinden

bulunursa; $\cancel{\pi} r^2 + \cancel{\pi} r h = 12\cancel{\pi} \Rightarrow h = \dfrac{12-r^2}{r}$ olup

(4)

$V(r) = \pi r^2 \cdot \dfrac{12-r^2}{r} = \pi(12r - r^3)$ olup bunun türevi alınırsa

(4) $V'(r) = \pi\cdot(12 - 3r^2) = 3\pi(4-r^2)$ den

(4) $V'(r) = 0 \Longleftrightarrow 3\pi(4-r^2) = 0 \Rightarrow 3\pi(2+r)(2-r) = 0$ dan

$r_1 = -2$ (anlamsız) ve $r_2 = 2$ dir.

(4) Türevin işaret tablosu ise

r		-2		2	
$V'(r)$	$-$	0	$+$		$-$
	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

(2) $r=2$ için hacim maksimum oluyor. $h = \dfrac{12-2^2}{2} = 4$ olup

Maksimum hacim: $V_{max} = \pi\cdot r^2\cdot h = \pi\cdot 2^2\cdot 4 = 16\pi$ br^3

bulunur

17–18 / MAT-I / Final

25.12.2017

(4) $y = \frac{3x-1}{2x+4}$

(2) 1° T. A. $= \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

(5) 2° $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{3x-1}{2x+4} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{\overbrace{3x-1}^{(-)}}{\underbrace{2x+4}_{(-)}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{\overbrace{3x-1}^{(-)}}{\underbrace{2x+4}_{(+)}} = -\infty$

$y = \frac{3}{2}$ Y.A. $x = -2$ D.A.

(5) 3° $y' = \frac{3(2x+4)-2(3x-1)}{(2x+4)^2} = \frac{14}{(2x+4)^2}$; $y' > 0$ daima artan
ekstremum Yok!

(5) 4° $y'' = \frac{-14 \cdot 2(2x+4) \cdot 2}{(2x+4)^4} = \frac{-7}{(x+2)^3}$; $f''(-2)$ = tanımsız. $x_0 = -2$ nin öncesinde ve sonrasında $f''(x)$ işaret değiştirir. Fakat $x_0 = -2$ de fonksiyon tanımsız old. $x_0 = -2$ de B.Nok. Yok!

(2) 5° $x = 0$ için $y = \frac{0-1}{0+4} = \frac{-1}{4}$; $y = 0$ için $3x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

(6) 6°

x	$-\infty$	-2	0	$1/3$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	
y''	$+$	$-$	$-$	$-$	
y	$\frac{3}{2}^+ \nearrow \infty$	$-\infty \nearrow$	$-1/4 \nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{3}{2}^-$

konveks konkav

(5) 7° Grafik!