IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

ÜSTEL RASTGELE DEĞİŞKEN

İçerik

Üstel Rastgele Değişken

Üstel ve Poisson Rastgele Değişken İlişkisi

Üstel Rastgele Değişken

Bir $\lambda > 0$ sabiti için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olan rastgele değişkene λ parametreli üstel rastgele değişken denir.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Bu rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

Üstel Rastgele Değişken

Üstel rastgele değişken sıklıkla belli bir olayın gerçekleşmesine kadar geçen zamanın dağılımı olarak görünür.

Örneğin;

- Bir deprem olana kadar geçen süre
- Gelen ilk yanlış aramaya kadar geçen süre

Üstel Rastgele Değişken

Üstel rastgele değişkenin beklenti ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Örnek 1

Sahra çölüne küçük bir göktaşının düşmesi üstel dağılımla ortalama 10 günde 1 olarak verilmiştir. Şu anda gece yarısı olduğuna göre ilk gün 6:00 – 18:00 arası göktaşı düşme ihtimalini bulun.

Örnek 1

Sahra çölüne küçük bir göktaşının düşmesi üstel dağılımla ortalama 10 günde 1 olarak verilmiştir. Şu anda gece yarısı olduğuna göre ilk gün 6:00 – 18:00 arası göktaşı düşme ihtimalini bulun.

$$\lambda = \frac{1 taş}{10 gün} = 1/10 \text{ taş/gün}$$

Örnek 1

Sahra çölüne küçük bir göktaşının düşmesi üstel dağılımla ortalama 10 günde 1 olarak verilmiştir. Şu anda gece yarısı olduğuna göre ilk gün 6:00 – 18:00 arası göktaşı düşme ihtimalini bulun.

$$\lambda = \frac{1 taş}{10 gün} = \frac{1}{10} taş/gün$$

X: Göktaşının düşme süresi

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) =$$

Örnek 1

Sahra çölüne küçük bir göktaşının düşmesi üstel dağılımla ortalama 10 günde 1 olarak verilmiştir. Şu anda gece yarısı olduğuna göre ilk gün 6:00 – 18:00 arası göktaşı düşme ihtimalini bulun.

$$\lambda = \frac{1taş}{10gün} = \frac{1}{10} taş/gün$$

X: Göktaşının düşme süresi

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = P\left(X < \frac{3}{4}\right) - P\left(X < \frac{1}{4}\right) = e^{-\frac{1}{40}} - e^{-\frac{3}{40}} = 0{,}0476$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = P\left(X > \frac{1}{4}\right) - P\left(X > \frac{3}{4}\right)$$

Örnek 2

Bir bilgisayar sisteminin cevap süresi 3 saniye ortalama ile üstel olarak modellenmiştir. Cevabın 5 saniyeden fazla olma olasılığını hesaplayın.

Örnek 2

Bir bilgisayar sisteminin cevap süresi 3 saniye ortalama ile üstel olarak modellenmiştir. Cevabın 5 saniyeden fazla olma olasılığını hesaplayın.

$\lambda = \frac{1}{3}\ iş/sn$

X: Cevap süresi

$P(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-5/3} = 0,1889$

Örnek 3

Bir cihaz saatte ortalama $0,01$ çökme oranı ile satılıyor.

A) Ortalama çökme süresi nedir?

B) Bir çökme gözlenmeden önce 200 saat geçme olasılığı nedir?

Örnek 3

Bir cihaz saatte ortalama $0,01$ çökme oranı ile satılıyor.

A) Ortalama çökme süresi nedir?

X: Çökme süresi

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 100\ saat$$

Örnek 3

Bir cihaz saatte ortalama $0{,}01$ çökme oranı ile satılıyor.

B) Bir çökme gözlenmeden önce 200 saat geçme olasılığı nedir?

X: Çökme süresi

$$P(X > 200) = e^{-200/100} = e^{-2} = 0{,}1353$$

Örnek 4

Bir jeneratörün bozulma süresi üstel rastgele değişken olarak ortalama 15 gündür.

A) Jeneratör henüz bozulduysa 21. günden sonra bozulma olasılığını hesaplayınız.

B) Jeneratörün bozulmadan 30 gün çalışması olasılığını hesaplayınız.

Örnek 4

Bir jeneratörün bozulma süresi üstel rastgele değişken olarak ortalama 15 gündür.

A) Jeneratör henüz bozulduysa 21. günden sonra bozulma olasılığını hesaplayınız.

$$\lambda = \frac{1}{15}$$

$$P(X > 21) = e^{-21/15} = 0{,}2466$$

Örnek 4

Bir jeneratörün bozulma süresi üstel rastgele değişken olarak ortalama 15 gündür.

B) Jeneratörün bozulmadan 30 gün çalışması olasılığını hesaplayınız.

$$P(X > 30) = e^{-2} = 0{,}1353$$

Örnek 5

Bir parçanın arızalanma süresi olan T, 5 yıl ortalamalı üstel dağılımla modellenmiştir. Bu parçalardan 5 tanesi 5 farklı ürüne monte edilmiştir. Bu 5 üründen en az ikisinin 8 yılın sonunda hala çalışıyor olması ihtimalini bulunuz.

Örnek 5

Bir ürünün 8 yıldan fazla çalışıyor olma ihtimali

$$P(T > 8) = e^{-\frac{1}{5}\times 8} = 0{,}2019$$

5 üründen en az ikisinin bu şekilde çalışıyor olma ihtimali

X: 5 ürün içinden 8 yıldan fazla çalışıyor olanların sayısı

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \binom{5}{0}(0{,}2019)^0(0{,}7981)^5 - \binom{5}{1}(0{,}2019)^1(0{,}7981)^4 = 0{,}2627$$

Üstel ve Poisson Rastgele Değişken İlişkisi

Üstel rastgele değişken ve poisson rastgele değişken arasında ilişki mevcuttur.

Üstel rastgele değişken

- Belli bir olay meydana gelene kadar geçen süre

Poisson rastgele değişken

- Olay sayısı

Bir olay meydana gelene kadar geçen süre ⟺ Belli bir sürede gerçekleşen olay sayısı

Üstel ve Poisson Rastgele Değişken İlişkisi

Poisson rastgele değişken

$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0,1,\ldots \qquad E[X] = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

Üstel rastgele değişken

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Üstel ve Poisson Rastgele Değişken İlişkisi

Belli bir olay meydana gelene kadar geçen süre λ_1 parametresine sahip bir üstel rastgele değişken ile ifade edilsin.

Aynı olayın belli süre içerisinde meydana gelme sayısı ise λ_2 parametresine sahip bir poisson rastgele değişken ile ifade edilsin.

Süreleri ifade ettiğimiz zaman birimleri aynı olsun.

Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2$ diyebiliriz.

Örnek 6

Bir işlemciye gelen görevler arasında geçen süre ortalama 10 ms'dir. İşlemciye 3 ms içerisinde ortalama kaç adet görev gelir?

Örnek 6

X, işlemciye gelen görevler arasında geçen süreyi gösteren rastgele değişken olsun. X, üstel bir rastgele değişkendir.

$$E[X] = 10ms \rightarrow \frac{1}{\lambda} = 10ms \rightarrow \lambda = \frac{1}{10} görev/ms$$

Y, işlemciye 1 ms içinde gelen görev sayısını gösteren rastgele değişken olsun. Y, Poisson rastgele değişkendir.

$$\lambda = \frac{1}{10} \frac{görev}{ms} = 0{,}1 \frac{görev}{ms} = E[Y]$$

1 ms içerisinde ortalama 0,1 görev gelir. Dolayısıyla 3 ms içerisinde ortalama 0,3 görev gelir.

Örnek 7

Bir bankamatikten 1 saat içerisinde ortalama 5 kişi para çekmektedir.

A) Bu bankamatikten bir kişi para çektikten sonra, bir sonraki kişinin para çekmesine kadar geçen süre ortalama ne kadardır?

B) Bu bankamatikten bir kişi para çektikten sonra, bir başka kişinin para çekmesine kadar geçen sürenin 3 saatten fazla olma olasılığı nedir?

Örnek 7

A) Bu bankamatikten bir kişi para çektikten sonra, bir sonraki kişinin para çekmesine kadar geçen süre ortalama ne kadardır?

X, bir saat içerisinde para çeken kişi sayısını gösteren rastgele değişken olsun. X, poisson rastgele değişkendir.

$$E[X] = 5kişi/saat \rightarrow \lambda = 5kişi/saat$$

Y, iki kişinin para çekmesi arasında geçen süreyi gösteren rastgele değişken olsun. Y, üstel rastgele değişkendir.

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2saat$$

Örnek 7

B) Bu bankamatikten bir kişi para çektikten sonra, bir başka kişinin para çekmesine kadar geçen sürenin 3 saatten fazla olma olasılığı nedir?

Y, iki kişinin para çekmesi arasında geçen süreyi gösteren rastgele değişken olsun. Y, üstel rastgele değişkendir.

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0{,}2 saat, \lambda = 5 kişi/saat$$

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-\lambda y}) = e^{-5\times 3}$$

$$= e^{-15} = 3{,}059 \times 10^{-7}$$