

Örnek. $y = e^{\frac{x+1}{x}}$ eğerisini çiziniz.

1. $TK = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1 + \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ } olduğundan $x=0$ dikey asimptot.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{x+1}{x}} = e^1 = e$ olduğundan $y=e$ yatay asimptot.

3. $x=0$ da tanımsız olduğundan, grafik y eksenini kesmez.

Üstel bir fonksiyon daima sıfırdan büyük değerler alacağından (yani 0 olamayacağından) grafik x eksenini de kesmez.

4. $y' = e^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ olup $e^{\frac{x+1}{x}} > 0$ ve $-\frac{1}{x^2} < 0$ olduğundan $y' < 0$ dir.

Dolayısıyla fonk hep azalır.

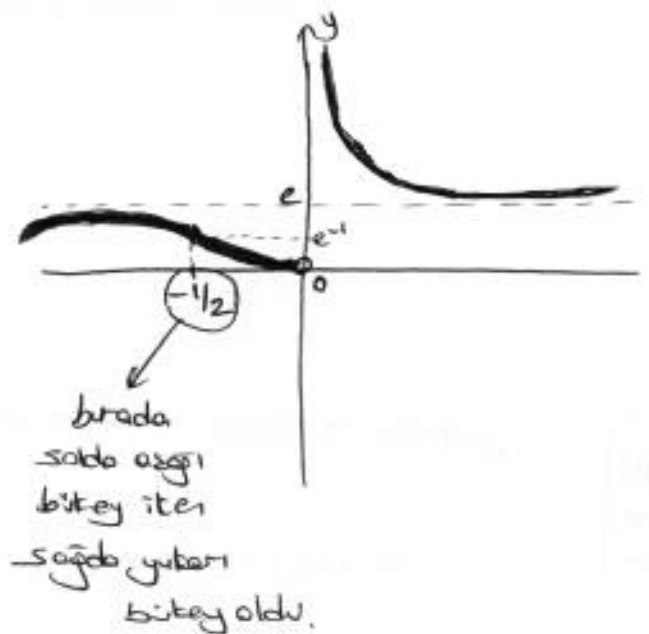
$y'' = e^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{\frac{x+1}{x}} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} \right) = e^{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$

olup $y''=0$ dan $2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ olur. ($x=0$ da 2. türev yok)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
y'	-	-	-	-
y''	-	+	+	+
y	e	e^{-1}	0	$+\infty$

büyük nokta

çizim



Örnek. $y=f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm 1.) $TK = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2-x} > 0\right\}$ $\frac{x}{-\infty} \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$ $TK = (1, 2)$

2.) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+t-1}{2-(1+t)}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(\frac{t}{1-t}\right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(\frac{2-t-1}{2-(2-t)}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1-t}{t}\right) = +\infty$

olduğundan $x=1$ ve $x=2$ dikey asimptottur.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ limiti yoktur çünkü $\pm\infty$ bu fonksiyonun çizilme noktası

değildir. Bu fonksiyonun çizilme noktalarının kümesi $[1, 2]$ dir.

Dolayısıyla bu fonk. için yatay asimptot yoktur.

Çizik asimptot da yoktur çünkü $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ limiti yukarıdaki nereden dolayı yoktur.

Fonk. rasyonel olmadığından eğri asimptot da yoktur.

3) $x=0$ için y tanımsızdır. Zaten tanım aralığı $(1, 2)$ idi. Yani $x=0$ olmaz, dolayısıyla eğri y eksenini kesmez.

$y=0$ için $\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)=0$ yani $\frac{x-1}{2-x}=1 \Rightarrow x-1=2-x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow$

$x=3/2$ olup, eğri x eksenini $(3/2, 0)$ da keser.

4) $f'(x) = (\ln(x-1) - \ln(2-x))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} = \frac{2-x+x-1}{(x-1)(2-x)}$

$f'(x) = \frac{1}{(x-1)(2-x)}$ olduğu için birinci türevin kökü yok. $x=1$ ve $x=2$ de türev

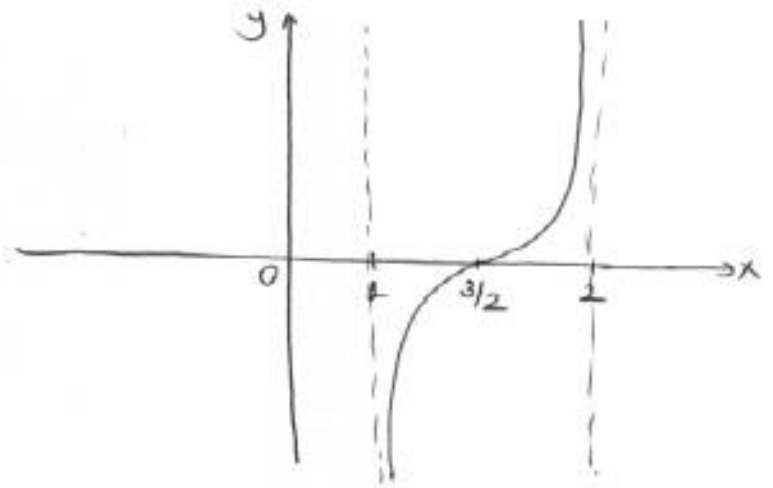
yok. $f''(x) = \frac{0 \cdot (x-1)(2-x) - 1 \cdot (1 \cdot (2-x) + (x-1) \cdot (-1))}{(x-1)^2(2-x)^2} = \frac{-(3-2x)}{(x-1)^2(2-x)^2}$

$f''(x)=0$ dan $x=3/2$ olur.

5.)

x	1	3/2	2
y'	/	+	+
y''	/	-	+
y	/	0	/

6.)



Örnek $f(x) = \frac{2x-15}{x+5}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm 1) $TK = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

2) Düşey asimptot $x = -5$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-15}{x+5} = 2$ old. dan $y = 2$ yatay asimptot

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-15}{x^2+5x} = 0 \text{ olup } m \neq 0 \text{ olması gerektiripinden}$$

eğik asimptot yok. (Payın derecesi paydanın derecesine eşit olduğundan zaten belli idi.) Eğri asimptot da yok. (Payın derecesi, paydanıkinden en az 2 büyük olmalı idi)

3) $x=0$ için $y=-3$ $(0, -3)$

$y=0$ için $x=15/2$ $(15/2, 0)$

4) $f'(x) = \frac{2 \cdot (x+5) - (2x-15) \cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{2x+10-2x+15}{(x+5)^2} = \frac{25}{(x+5)^2}$; $x=-5$ de türev

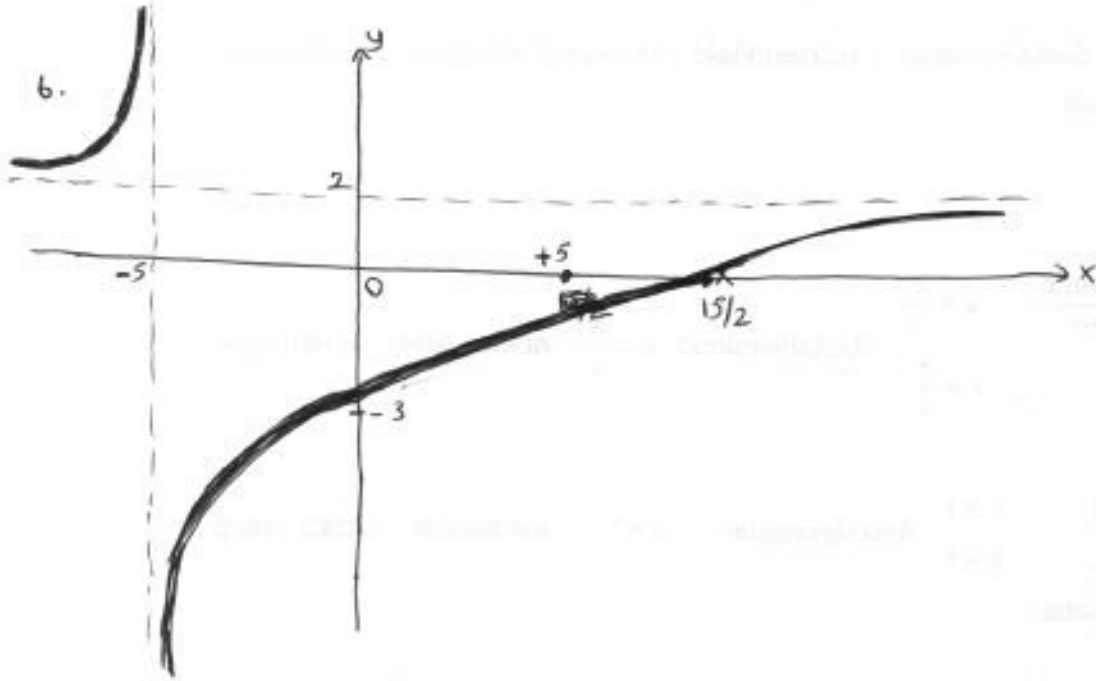
yok ve her x için $f'(x) > 0$ dir.

$f''(x) = 25 \cdot (-2) \cdot (x+5)^{-3} = \frac{-50}{(x+5)^3}$ olup $x=-5$ de türev yok.

$\forall x > -5$ için $f''(x) < 0$; $\forall x < -5$ için $f''(x) > 0$ dir.

→

x	$-\infty$	-5	0	$15/2$	$+\infty$
y'		+	+	+	+
y''	+	-	-	-	-
y	2	$+\infty$	$-\infty$	-3	0



Örnek. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 5}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm. 1) $TK = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$.

2) $x=1$ ve $x=5$ dikey asimptottlardır.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ olduğundan $y=1$ yatay asimptottur.

Payın derecesi paydanın derecesine eşit olduğundan eğik ya da eğri asimptot yok.

3) $x=0$ için $y = 8/5$ $(0, 8/5)$

$y=0$ için $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x=2$ veya $x=4 \Rightarrow (2, 0)$ ve $(4, 0)$

$$4) f'(x) = \frac{(2x-6) \cdot (x^2-6x+5) - (x^2-6x+8) \cdot (2x-6)}{(x^2-6x+5)^2} = \frac{-6x+18}{(x^2-6x+5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3. \quad x=1 \text{ ve } x=5 \text{ de t\u00fcrev yok.}$$

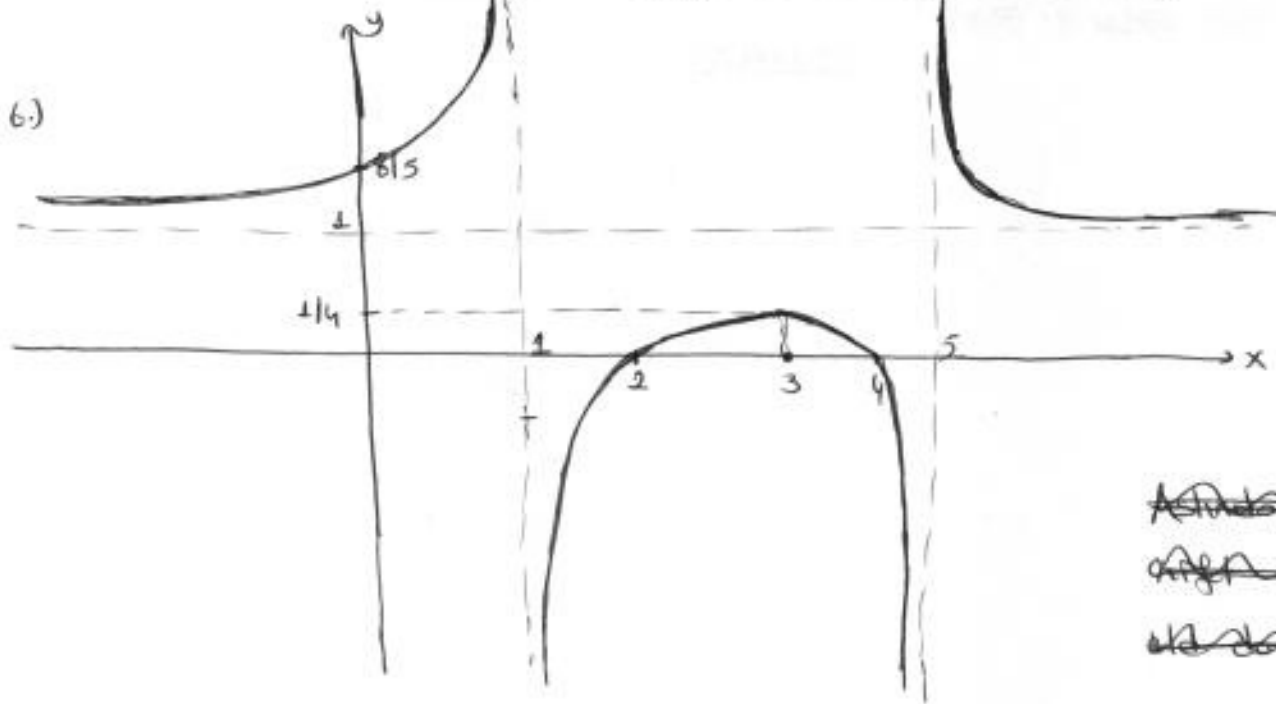
$$f''(x) = \frac{-6(x^2 - 6x + 5)^2 - (-6x + 18)2(x^2 - 6x + 5)(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 5)^4} = \frac{18x^2 - 108x + 186}{(x^2 - 6x + 5)^3}$$

Bu ifadenin payı i\u00e7in $\Delta = (-108)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 186 = 11664 - 13392 < 0$ oldu\u011fundan

2. t\u00fcrevin reel k\u00f6\u00e7i yok.

5.)

x	$-\infty$		1		2		3		4		5		$+\infty$
y'		+		+		+		+		0	-		-
y''		+		+		-		-		-	-		+
y	1	\nearrow	$\frac{8}{5}$	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	0	\nearrow	$+\frac{1}{4}$	\searrow	0	\searrow	$-\infty$



~~Astut\u00f6k fonk~~
~~Asit\u00f6k fonk~~
~~Asit\u00f6k fonk~~