Sabit Katsayılı Lineer Homojen olmayan Denklemler

Belirsiz katsayılar Metodu

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$ denklemi verilmiş olsun. F(x) fonksiyonunun polinom, üstel ve trigonometrik (sinüs, cosinüs) şeklindeki fonksiyonlardan herhangi biri olması durumunda veya bunların çarpımı şeklinde olması durumunda özel çözüm tahmin edilebilir. Buna göre,

i) $F(x) = P_n(x)$ ise

$y_p = Q_n(x)$ şeklinde aranır.

Yani F(x) n-yinci dereceden bir polinom ise y_p yani özel çözümde bu şekilde bir polinom olarak araştırılır.

Eğer karakteristik denklemin k-tane kökü 0 (sıfır) ise homojen kısmın genel çözümü polinom şeklinde olacağından

$y_p = x^k Q_n(x)$ şeklinde seçilmelidir.

Ör $y'' + 2y' + 2y = x+1$ denk genel çözümünü bulunuz.

Denklemin homojen kısmına ait genel çözüm

$r^2 + 2r + 2 = 0$ $\quad r_{1,2} = -1 \mp i$ ile

$y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ şeklindedir.

$F(x) = x+1$ birinci derece polinom old. dan

$y_p = Ax + B$ şeklinde seçilerek A ve B katsayıları bulunabilir. y_h içinde polinomsal ifade yok yani karakteristik denklemin kökleri içinde "0" yok.

denklemi sağlamalıdır

$y_p = Ax + B$ çözüm olacak ise

2

Buna göre $y_p' = A$, $y_p'' = 0$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa

$A = \frac{1}{2}$ $\quad B = 0$ olarak bulunur.

Böylece $y_p = \frac{1}{2}x$ olup

$$y_g = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_g = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2}x}$$

olarak elde edilir.

den...

$y''' + y' = x^2+1$

$r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1)=0$ olup

$r_1 = 0$ $r_{2,3} = \mp i$ olur

$y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ olarak seçilemez.

Çünkü karakteristik denklemin bir kökü "0" ve y_h ile y_p toplandığında lineer bağımsızlık korunmamış olur. Bu nedenle

$y_p = x(Ax^2+Bx+C) = Ax^3+Bx^2+Cx$

şeklinde seçilmeli ve çözüm sağlanacak şekilde A, B ve C katsayıları bulunmalıdır.