Öğr. No: Ad-Soyad: İmza:

17-18 YAZ MF İnşaat ve Makine MAT-I Final Sınavı 31.07.2018

Aşağıdaki sorulardan herhangi dördünü seçerek çözünüz:

S.1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}+\log(5x-x^2)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini (aralığını) bulunuz. (25 P.)

S.2) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=?$ (Hospital'sız!) (10 P.), **b)** $\lim\limits_{x\to 0} x^x=?$ (15 P.) limitlerini hesaplayınız.

S.3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ fonksiyonunun tanımdan hareketle (limit yolundan) türevini bulunuz.

S.4) Bir kenarı 12 cm olan kare şeklindeki bir metal levhanın köşelerinden eşit büyüklükte kareler kesilip atılıyor. Geriye kalan parçanın kenarları kıvrılarak üstü açık bir kare prizma kutu elde ediliyor. Bu kutunun en büyük (maksimum) hacimli olması için atılan karelerin bir kenarı kaç cm olmalıdır? (Türevin işareti incelenmelidir). (25 P.)

S.5) a) $\sqrt{82}$ nin yaklaşık bir değerini diferansiyel yardımıyla hesaplayınız. (10 P.)

b) $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ fonksiyonunun tanım aralığını yazınız. Tanım aralığının uç noktalarında limit araştırması yaparak asimptotlarını belirleyiniz. (15 P.)

NOT: Süre 75 dakikadır. Soru kâğıdınızı cevap kâğıdınızla birlikte teslim ediniz. Başarılar dileriz.

17-18 YAZ MF (İnş.-Mak.) MAT-I Final (31.07.2018)

(1) $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$, $x-2 \neq 0$ ve $5x-x^2>0$ olmalı

$x_1=1$, $x_2=2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$\frac{x-1}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$T.A_1=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

$x(5-x)>0 \Rightarrow x_3=0$; $x_4=5$

x		0		5	
$x(5-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$0<x<5$

$T.A_2=(0,5)$ dir.

$T.A.=T.A_1\cap T.A_2=(0,1]\cup(2,5)$ dir.

---

(2) a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\scriptstyle{(1+\cos x)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$

$=\Big(\underbrace{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}_{=1\text{ (öz. lim)}}\Big)^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ dir.

b) $\lim\limits_{x\to0}x^x=0^0$ belirsizliği. $\lim\limits_{x\to0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0}x.\ln x}$ olup

$\lim\limits_{x\to0}x.\ln x\overset{0.(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{1/x}\overset{-\infty/\infty}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{x}=-0=0$ olup

$\lim\limits_{x\to0}x^x=e^0=1$ dir.

---

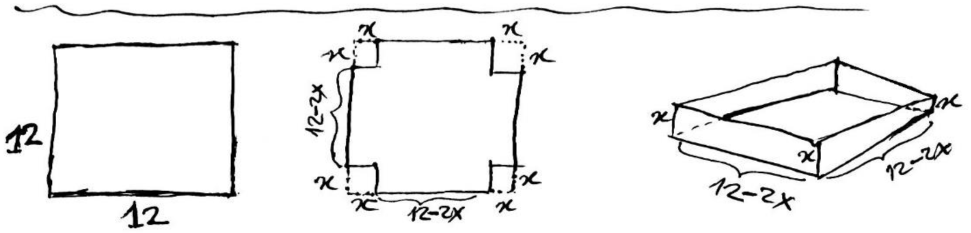
(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$; $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^{2/3}-x^{2/3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{x^{2/3}\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{2/3}-1\right]}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{x^{2/3}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{2/3}-1\right]}{x.\frac{\Delta x}{x}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{x^{2/3}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{2/3}-1\right]}{x.\frac{\Delta x}{x}}=$

$=\frac{x^{2/3}}{x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{2/3}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{\frac{2}{3}-1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3.\sqrt[3]{x}}$ bulunur.

17-18 YAZ MF (İnş+Mak.) MAT-I Final (31.07.2018)

4)



Hacim: $V(x) = (12-2x)^2 \cdot x \Rightarrow V'(x) = 2(12-2x)(-2)\cdot x + (12-2x)^2 \cdot 1$ den

$V'(x) = (12-2x)(-4x+12-2x) = (12-2x)(12-6x) \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 6$ (anlamsız)

x	0		2		6	
$V'(x)$		$+ \nearrow$	0	$- \searrow$	0	$+$
			max.			

O halde max. hacim $\underline{x = 2 \text{ cm}}$ için sağlanır.

---

5) a) $\sqrt{82} \approx ?$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$ olsun. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $x_0 = 81,\ \Delta x = 1$

olmak üzere $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ den $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x$

den $\sqrt{x_0+\Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x$ de $x_0 = 81$, $\Delta x = 1$ için

$$\sqrt{81+1} \approx \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{81}}\cdot 1 \Rightarrow \sqrt{82} \approx 9 + \frac{1}{18} = \underline{\underline{\frac{163}{18}}}\ \text{dir.}$$

---

b) $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ in T.A. $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ olup

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overset{(+)}{x^2+1}}{\underset{(-)}{x-1}} = \frac{2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\overset{(+)}{x^2+1}}{\underset{(+)}{x-1}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{ olup } \boxed{x=1} \text{ düşey asimptot.}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \mp\infty$ eğik asimp. olabilir.

$$m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1 \text{ (eğim)} \quad n = \lim_{x\to\mp\infty}(y - mx) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\mp\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{x-1} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \text{ den}$$

$\boxed{y = x+1}$ eğik asimptot.

eğik asimptot pratikten:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & x+1 \\ x+1 & \\ \underline{x-1} & \\ 2 & \end{array}$$

den $\boxed{y = x+1}$

NOT: Çözümlerde işlem hatası varsa lütfen bildiriniz.

3. Sorunun çözümündeki katsayı hatamızı görüp düzeltilmesini sağlayan öğrencimiz Hatice Demirci'ye teşekkür ederiz.(31.07.2018)