2.3.8. İntegrasyon Çarpanları

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \rightarrow (I)$ denklemi Tam diferansiyel değil ise $P_y \neq Q_x$'dir.

Bu durumda denklem doğrudan çözülemez. O halde *(I)* denklemini tam diferansiyel hale getiren $\mu = \mu(x,y)$ çarpanları aranır. Eğer böyle çarpanlar bulunabilirse bu ifadelere "*integrasyon çarpanları*" denilir. Böyle $\mu = \mu(x,y)$ integrasyon çarpanları varsa bu *(I)* denklemi ile çarpılınca,

$\boldsymbol{\mu(x,y).P(x,y)dx + \mu(x,y).Q(x,y)dy = 0 \rightarrow (II)}$ denklemi tam diferansiyel olur ve doğrudan çözülür.

İntegrasyon Çarpanlarının Bulunması

$\mu = \mu(x,y) \rightarrow v(x,y)$ *şeklinde belirli bir fonksiyon ise*

1. $\dfrac{\mu' v}{\mu} = \dfrac{Q_x - P_y}{P.v_y - Q.v_x}$ $\rightarrow$ *Eğer böyle* $\mu = \mu(x,y)$ *varsa ve bu çarpan* $v(x,y)$ *ye bağlı ise*

2. $\dfrac{\mu' x}{\mu} = \dfrac{Q_x - P_y}{-Q}$ $\rightarrow$ *Eğer* $\mu = \mu(x)$ *şeklinde yalnız* $x'e$ *bağlı ise* $\{v = x, v_x = 1, v_y = 0'dır.\}$

3. $\dfrac{\mu' y}{\mu} = \dfrac{Q_x - P_y}{P}$ $\rightarrow$ *Eğer* $\mu = \mu(y)$ *şeklinde yalnız* $y'ye$ *bağlı ise* $\{v = y, v_x = 0, v_y = 1'dir.\}$

İntegrasyon çarpanı ile *(I)* denklemi çarpılarak tam diferansiyel denklem elde edilir ve doğrudan çözülür.

Örnek: $(1 - xy)dx - (-xy + x^2)dy = 0$ denkleminin genel çözüm fonksiyonunu tam diferensiyel olup olmadığını kontrol ederek bulunuz.

Çözüm: $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0 \rightarrow (I)$ öncelikle tam diferansiyel olup olmadığına bakılır.

$P(x,y) = (1 - xy) \quad \rightarrow P_y = -x$
$Q(x,y) = (xy - x^2) \rightarrow Q_x = y - 2x$

$P_y \neq Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda $\mu = \mu(x,y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı aranır.
$v(x,y) = x'e$ bağlı olsun. O halde ona uygun İntegrasyon çarpan formülünü kullanırsak

$$\frac{\mu' x}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{-Q} = \frac{y - 2x - (-x)}{-(xy - x^2)} = \frac{y - x}{x(x - y)}$$

$\dfrac{\mu' x}{\mu} = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{d\mu}{\mu} = -\dfrac{1}{x}dx \Rightarrow \int \dfrac{d\mu}{\mu} = \int -\dfrac{1}{x}dx$ integrali alınırsa

$\ln \mu = -\ln x + (\ln C) \rightarrow$ *lnC sonucu değiştirmeyeceği için ihmal edilir.*

$\ln \mu = -\ln x$
$\mu(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow$ *integrasyon çarpanı*

Elde edilir. İntegrasyon çarpanı ile *(I)* denklemi çarpılırsa,

$$\frac{1}{x}(1-xy)dx+\frac{1}{x}(xy-x^2)dy=0$$

$$\left(\frac{1}{x}-y\right)dx+(y-x)dy=0\rightarrow(II)\ tam\ diferansiyel\ midir?$$

$$P(x,y)=\left(\frac{1}{x}-y\right)\quad\rightarrow P_y=-1$$
$$Q(x,y)=(y-x)\quad\rightarrow Q_x=-1$$

$P_y=Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{x}-y\right)$$

$f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-y\right)dx+\varphi(y)=C$ burada $\varphi(y)$, x e göre integral alınması nedeniyle Sabit anlamında alınmıştır.

$$f(x,y)=\ln x-yx+\varphi(y)=C$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\ olduğundan$$
$$Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=0-x+\varphi'(y)=y-x$$
$$\varphi'(y)=y$$

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\int y\ \ =>\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C_1$$

$$f(x,y)=\ln x-yx+\frac{y^2}{2}+C_1=C$$

$$f(x,y)=\ln x-yx+\frac{y^2}{2}=C\rightarrow denklemin\ genel\ çözüm\ fonksiyonu\ elde\ edilir$$

Örnek: $y^2(x+y)dx+(xy^2+3)dy=0$ denkleminin genel çözüm fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y^2(x+y)dx+(xy^2+3)dy=0\rightarrow(I)$

$$P(x,y)=y^2(x+y)\rightarrow P_y=2xy+3y^2$$
$$Q(x,y)=(xy^2+3)\rightarrow Q_x=y^2$$

$P_y\neq Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda $\mu=\mu(x,y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı aranır.
$v(x,y)=y$ ye bağlı olduğunu kabul edersek;

$$\frac{\mu' y}{\mu}=\frac{Q_x-P_y}{P}=\frac{y^2-2xy-3y^2}{y^2(x+y)}=\frac{-2y^2-2xy}{y^2(x+y)}=\frac{-2y(x+y)}{y^2(x+y)}=-\frac{2}{y}$$

$\frac{\mu' y}{\mu} = -\frac{2}{y}$ => $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}dy$ => $\int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{2}{y}dy$ => $\ln\mu = -2\ln y$

$\mu(y) = \frac{1}{y^2} \rightarrow integrasyon\ çarpanı$ olur. İntegrasyon çarpanı ile *(I)* denklemi çarpılırsa,

$\frac{1}{y^2}y^2(x+y)dx + \frac{1}{y^2}(xy^2+3)dy = 0$

$\boldsymbol{(x+y)dx + \left(x+\frac{3}{y^2}\right)dy = 0}$ **Tam dif. denklemi olur.**

$P(x,y) = (x+y) \quad \rightarrow P_y = 1$

$Q(x,y) = \left(x+\frac{3}{y^2}\right) \rightarrow Q_x = 1$

$P_y = Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)$

$f(x,y) = \int (x+y)\,dx + \varphi(y) = C$

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi(y) = C$

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\ olduğundan$

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} => 0 + x + \varphi'(y) = x + \frac{3}{y^2}$

$\varphi'(y) = \frac{3}{y^2}$ => $\int \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int \frac{3}{y^2}$ => $\varphi(y) = -\frac{3}{y} + C_1$

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - \frac{3}{y} + C_1 = C$ de C- $C_1 = C$ denilirse

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - \frac{3}{y} = C \rightarrow denklemin\ genel\ \text{çözüm}\ fonksiyonu\ bulunur.}$$

Örnek: $y(x^2y^2+2)dx + x(2-2x^2y^2)dy = 0$ denkleminin genel çözüm fonksiyonunu tam dif.olup olmadığını kontrol ederek bulunuz.

Çözüm: $y(x^2y^2+2)dx + x(2-2x^2y^2)dy = 0 \rightarrow (I)$ Tam dif.olup olmadığına bakalım

$P(x,y) = y(x^2y^2+2) \quad \rightarrow P_y = 3x^2y^2 + 2$

$Q(x,y) = x(2-2x^2y^2) \rightarrow Q_x = 2 - 6y^2x^2$

$P_y \neq Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda $\mu = \mu(x,y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı aranır.

$v(x,y) = (x,y)$'ye bağlı olsun. Bu durumda $v = xy\ alındığında,\ v_x = y, v_y = x\ olur.$

$$\frac{\mu' v}{\mu}=\frac{Q_x-P_y}{P.v_y-Q.v_x}=\frac{2-6y^2x^2-3x^2y^2-2}{y(x^2y^2+2).x-x(2-2x^2y^2).y}=\frac{-9x^2y^2}{xy(3x^2y^2)}=-\frac{3}{xy}$$

$$\frac{\mu' v}{\mu}=-\frac{3}{xy}=-\frac{3}{v}=>\frac{\mu' v}{\mu}=-\frac{3}{v}=>\int\frac{d\mu}{\mu}=\int-\frac{3}{v}dv=>\ln\mu=-3\ln v$$

$$\mu(x,y)=\frac{1}{v^3}=\frac{1}{x^3y^3}\rightarrow \textit{integrasyon çarpanı olur.}$$

İntegrasyon çarpanı ile *(I)* denklemi çarpılırsa,

$$\frac{1}{x^3y^3}y(x^2y^2+2)dx+\frac{1}{x^3y^3}x(2-2x^2y^2)dy=0$$

$\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)dy=0$ Tam dif.denklem elde edilir.

$$P(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)\rightarrow P_y=-\frac{4}{x^3y^3}$$

$$Q(x,y)=\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)\rightarrow Q_x=-\frac{4}{x^3y^3}$$

$P_y=Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)$$

$$f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3y^2}\right)dx+\varphi(y)=C$$

$$f(x,y)=\ln x-\frac{1}{x^2y^2}+\varphi(y)=C$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\ \textit{olduğundan}$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=>0-\frac{1}{x^2}.\left(-\frac{2}{y^3}\right)+\varphi'(y)=\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)$$

$$\frac{2}{x^2y^3}+\varphi'(y)=\left(\frac{2}{x^2y^3}-\frac{2}{y}\right)$$

$$\varphi'(y)=-\frac{2}{y}=>\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\int-\frac{2}{y}=>\varphi(y)=-2\ln y+C_1$$

$$f(x,y)=\ln x-\frac{1}{x^2y^2}+\varphi(y)=C$$

$$f(x,y)=\ln x-\frac{1}{x^2y^2}-2\ln y+C_1=C$$

$$f(x,y) = \ln x - \frac{1}{x^2y^2} - 2\ln y = C \rightarrow denklemin\, genel\, çözüm\, fonksiyonu\, elde\, edilir.$$

Soru1. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
Soru2. $[y(x+y)+1]dx + [x(x+y)+1]dy = 0$ denklemlerinin genel çözüm fonksiyonlarını bulunuz.

***Bu sorular ödev olarak verilmiştir. Ayrıca herkes enaz 2 adet int.çarpanı problemi bulup çözecek.