2.3.7. Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \rightarrow (I)$ diferansiyel denklemi bir $f(x,y) = C$ fonksiyonunun tam diferansiyelini ifade ediyorsa bu denkleme Tam Diferansiyel Denklem denir.
O halde f fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \quad olmalıdır.\ Buradan,$$

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \text{ şartları ortaya çıkar.}$$

Bu şartlardan da,
$$P_y(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$Q_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad olur\ ve$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = P_y = Q_x \text{ eşitliği ortaya çıkar.}$$

Buna göre *(I)* diferansiyel denkleminin Tam diferansiyel denklem olması için Gerek ve Yeter şart $P_y = Q_x$ olmasıdır.

Eğer bu şartlar sağlanıyorsa *(I)* diferansiyel denklemi çözülebilir.

Örnek: $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem midir?

Çözüm: $P_y = Q_x$ eşitliğine bakılır.

$$P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \rightarrow P_y = 12xy$$
$$Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \rightarrow Q_x = 12xy$$

$P_y = Q_x$ Olduğundan tam diferansiyel denklemdir. Doğrudan çözüme gidilir.

Genel Çözüm şöyle bulunur:
$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0 \rightarrow (I)$$
$$f(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = C \rightarrow (II)$$

$$f(x,y) = \frac{3x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}y^2 + \varphi(y) = C$$

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) = C \rightarrow (III)$$

$\varphi(y) = ?$ belirleyelim;

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ *olduğundan*

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow 0 + 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$

$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y^3$

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int 4y^3$$

$\varphi(y) = y^4 + C_1 \rightarrow (III)'te\ yerin\ konulursa$

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) = C$

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 = C$

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C - C_1$

$C - C_1 = \mathbf{C}$ dersek

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = \mathbf{C}$ tam diferansiyel denklemin genel çözüm fonksiyonu bulunur.

Örnek: $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0$ denkleminin genel çözüm fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0 \rightarrow (I)$ denklemi tam diferansiyel midir?

$P(x,y) = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right) \rightarrow P_y = 2xe^{x^2}$

$Q(x,y) = e^{x^2} \rightarrow Q_x = 2xe^{x^2}$

$P_y = Q_x$ olduğundan tam diferansiyel denklemdir. Doğrudan çözüme gidilir.

$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)$ den

$f(x,y) = \int 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + \varphi(y) = C$ integraller alınırsa

$f(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + \varphi(y) = C \rightarrow (II)$ Genel çözümü bulunur.

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ *olduğundan*

$Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow e^{x^2} - 0 + \varphi'(y) = e^{x^2}$

$\varphi'(y) = 0$

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int 0$$

$\varphi(y) = C_1$ bulunur. *(II)* denkleminde yerine konulursa,

$f(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + \varphi(y) = C$

$f(x,y) = ye^{x^2} - x^2 + C_1 = C$

$f(x,y) = ye^{x^2} - x^2 = C$ tam diferansiyel denklemin genel çözüm fonksiyonudur.