Diferansiyel Denklemler

PROF.DR. METİN YAMAN

BÖLÜM 4.1.2

SABİT KATSAYILI HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$y_ö$ Özel Çözümün Bulunması Yöntemleri

1. Belirsiz katsayılar yöntemi
2. Parametrenin değişimi yöntemi
3. Operatör yöntemi

Önceki bölümde 1. yöntemi yani Belirsiz katsayılar yöntemini incelemiştik. Şimdi de 2. yöntemi yani parametrenin değişimi diğer adıyla sabitin değişimi yöntemini inceleyelim. Bu yöntem genel yöntemdir. Belli özellikteki fonksiyonları değil tüm fonksiyonları içerir.

2. Parametrenin Değişimi Yöntemi

Bu yöntemi 2.mertebeden bir denklem üzerinde anlatıp daha sonra genelleştireceğiz.

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x) \quad (1)$$

denklemini ele alalım. Burada $a_2 \neq 0, a_1, a_0$ sabit sayılardır.
(1) denkleminin homojen çözümü $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ şeklinde yazıldığını önceden biliyoruz. Bu çözümde $c_1 = v_1(x)$ ve $c_2 = v_2(x)$ düşünerek

$$y_ö = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \quad (2)$$

şeklinde özel çözüm arayalım. v_1, v_2 bulunması gerekli fonksiyonlardır.

(2) nin türevi alınırsa

$$y'_{\text{ö}} = v'_1 y_1 + v_1 y'_1 + v'_2 y_2 + v_2 y'_2 \qquad (3)$$

bulunur. Bu yöntemde bazı koşullara ihtiyacımız olacak. Bunlardan ilki bu türevden yazılır.

$$v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \qquad (4)$$

koşulu altında (3) ifadesi

$$y'_{\text{ö}} = v_1 y'_1 + v_2 y'_2 \qquad (5)$$

şekline dönüşür. (5) in tekrar türevini alırsak

$$y''_{ö} = v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2 \qquad (6)$$

elde ederiz.
Şimdi (6),(5) ve (2) yi (1) denkleminde yerine yazarsak

$$a_2[v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2] + a_1[v_1 y'_1 + v_2 y'_2]$$

$$+a_0[v_1 y_1 + v_2 y_2] = Q(x)$$

veya

$$[a_2y''_2 + a_1y'_2 + a_0y_2]v_2 + [a_2y''_1 + a_1y'_1 + a_0y_1]v_1$$

$$+a_2[v'_1y'_1 + v'_2y'_2] = Q(x)$$

eşitliğini buluruz. Burada y_1, y_2 homojen denklemin çözümleri olduğundan üsteki birinci ve ikinci parantez içleri sıfır olacaktır. Sonuçta bu yöntemin ikinci koşulu olan

$$a_2[v'_1y'_1 + v'_2y'_2] = Q(x) \qquad (7)$$

şartı elde edilmiş olur.

Özetleyecek olursak;

(2) şeklinde aranan özel çözümde bilinmeyen v_1, v_2 fonksiyonları (4) ve (7) denklemleri yardımıyla bulunur. Yani

$$\left.\begin{aligned} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 &= 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 &= \frac{Q(x)}{a_2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

sistemi çözülmelidir.

Üsteki sistemden önce v'_1, v'_2 , sonra da integral alınmak suretiyle v_1, v_2 fonksiyonları bulunur.

Örnek 4.34 $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x}$ denkleminin genel çözümünü parametrenin değişimi yöntemiyle bulalım.

Çözüm.

1.adım: Önce y_h homojen çözümü bulacağız. Karakteristik denklemi $k^2 - 3k + 2 = 0$ olup kökleri $k_1 = 1, k_2 = 2$ dir.

$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$ homojen çözüm yazılır.

2.adım: Şimdi de $y_ö$ özel çözümü (denklemin sağ tarafı) bulalım.

$$y_ö = v_1e^x + v_2e^{2x}$$

şeklinde arayalım.

v_1, v_2 fonksiyonlarını bulabilmek için

$$\left.\begin{aligned} v'_1 e^{x} + v'_2 e^{2x} &= 0 \\ v'_1 e^{x} + 2v'_2 e^{2x} &= 3e^{-x} \end{aligned}\right\}$$

sistemini çözmeliyiz. Lineer cebir dersinden hatırladığımız Gauss eliminasyon yöntemi, Kramer yöntemi, yerine koyma yöntemi gibi yötemler kullanarak

$$v_1 = \frac{3}{2}e^{-2x}, v_2 = -e^{-3x}$$

bulunur.

Özel çözüm

$$y_{ö} = \left(\frac{3}{2}e^{-2x}\right)e^{x} + (-3e^{-3x})e^{2x}$$

$$y_{ö} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

şeklinde yazılır.

3.adım: Denklemin genel çözümü

$y_g = y_h + y_{ö} = c_1\, e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ şeklinde yazılır.

Örnek 4.35 $y'' + y = tanx$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm.

1.adım: Önce y_h homojen çözümü bulacağız. Karakteristik denklemi $k^2 + 1 = 0$ olup kökleri $k_1 = 0 + i, k_2 = 0 - i$ dir.

$y_h = c_1 cosx + c_2 sinx$ homojen çözümü yazılır.

2.adım: Şimdi de $y_ö$ özel çözümü bulalım. $Q(x) = tanx$ olduğu için belirsiz katsayı yöntemi burada geçersizdir. Mecburen parametrenin değişimi yöntemini kullanmamız gerekir.

$$y_ö = v_1 cosx + v_1 sinx$$

şeklinde aramalıyız.

v_1, v_2 fonksiyonlarını bulabilmek için

$$\left.\begin{array}{r} v'_1 cosx + v'_2 sinx = 0 \\ v'_1(-sinx) + 2v'_2(cosx) = tanx \end{array}\right\}$$

sistemini çözmeliyiz. Kramer yöntemi kullanalım;

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sinx \\ tanx & cosx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix}} = -\frac{sin^2x}{cosx} \quad , \; v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -sinx & tanx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix}} = sinx$$

İntegral alarak

$$v_1 = -\int \frac{sin^2x}{cosx}dx = sinx - \ln(secx + tanx)\ ,\ v_2 = \int sinxdx = -cosx$$

buluruz. Özel çözüm

$$y_ö = (sinx - \ln(secx + tanx))cosx + (-cosx)sinx$$

$y_ö = -cosx\ (\ln(secx + tanx))$ şeklinde yazılır.

3.adım: Denklemin genel çözümü

$$y_g = y_h + y_ö = c_1cosx + c_2sinx - cosx\ (\ln(secx + tanx))$$

şeklinde yazılır.

Yöntemin genelleştirilmesi:

Şimdi bu yöntemi n.mertebeden bir denkleme genelleştirelim.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \quad (9)$$

denklemini ele alalım. Burada $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ sabit sayılardır. (1) denkleminin homojen çözümü $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklinde yazıldığını önceden biliyoruz. Bu çözümde $c_1 = v_1(x)$, $c_2 = v_2(x)$, …, $c_n = v_n(x)$ düşünerek

$$y_ö = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_n y_n \quad (10)$$

şeklinde özel çözüm arayalım. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bulunması gerekli fonksiyonlardır.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ fonksiyonlarını bulabilmek için; oluşacak olan koşullardan elde edilen denklem sistemi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\left.\begin{array}{c} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 + \cdots + v'_n y_n = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 + \cdots + v'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ v'_1 y_1^{(n-1)} + v_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n y_n^{(n-1)} = \dfrac{Q(x)}{a_n} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Üsteki sistemden önce $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ türev fonksiyonları, sonra da integral alınmak suretiyle $v_1, v_2, \ldots, v_n$ fonksiyonları bulunur.

Örnek 4.36 $y''' + y' = cosecx$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm.

1.adım: Önce y_h homojen çözümü bulacağız. Karakteristik denklemi $k^3 + k = 0$ olup kökleri $k_1 = 0, k_2 = i, k_3 = -i$ dir.

$y_h = c_1.1 + c_2 cosx + c_3 sinx$ homojen çözümü yazılır.

2.adım: Şimdi de $y_ö$ özel çözümü bulalım. $Q(x) = cosecx$ olduğu için parametrenin değişimi yöntemini kullanmamız gerekir.

$$y_ö = v_1.1 + v_2 cosx + v_3 sinx$$

şeklinde aramalıyız.

v_1, v_2, v_3 fonksiyonlarını bulabilmek için

$$\left.\begin{aligned} v'_1.1 + v'_2 cosx + v'_3 sinx &= 0 \\ v'_1.0 + v'_2(-sinx) + v'_3(cosx) &= 0 \\ v'_1.0 + v'_2(-cosx) + v'_3(-sinx) &= cosex \end{aligned}\right\}$$

sistemini çözmeliyiz. Kramer yöntemi kullanalım;

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ cosecx & -cosx & -sinx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 0 & -cosx & -sinx \end{vmatrix}} = \frac{1}{sinx} \quad , \quad v_1 = \int \frac{1}{sinx} dx = -\ln(cosec + cotx)$$

$$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & sinx \\ 0 & 0 & cosx \\ 0 & cosecx & -sinx \end{vmatrix}}{1} = \frac{-cosx}{sinx} \;, \; v_2 = -\int \frac{cosx}{sinx} dx = -\ln(sinx)$$

$$v'_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & cosx & 0 \\ 0 & -sinx & 0 \\ 0 & -cosx & cosecx \end{vmatrix}}{1} = -1 \;, \; v_3 = -\int 1dx = -x$$

$$y_ö = (-\ln(cosec + cotx)).1 + (-\ln(sinx))cosx + (-x)sinx$$

veya

$y_ö = -\ln(cosec + cotx) - cosx\ln(sinx) - xsinx$ özel çözümü yazılır.

Genel çözüm

$y_g = c_1 + c_2cosx + c_3sinx - \ln(cosec + cotx) - cosx\ln(sinx) - xsinx$ yazılır.

PROBLEMLER

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini yazınız.

1. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{x}}$

   C: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + (e^{x} + e^{2x})\ln(1+e^{x}) - e^{x}(1+e^{x})$

2. $y'' + y - 2y = sec^3 x$

   C: $y = c_1 cosx + c_2 sinx + \frac{1}{2} secx - cosx$

3. $y'' + 3y' + 2y = \cos(e^{x})$

   C: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} - e^{-2x}\cos(e^{x})$

4. $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{x^2}\ ,\quad x > 0$

C: $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x} - (1 + lnx)e^{-4x}$

5. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x} lnx\ ,\quad x > 0$

C: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}(2lnx - 3)$

6. $y'' + y = \frac{1}{1+sinx}$

C: $y = c_1 sinx + c_2 cosx + sinxln(1 + sinx) - xcosx - \frac{cos^2 x}{1+sinx}$

7. $y'' - 2y' + y = e^x arcsinx$

C: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2\right) e^x arcsinx + \frac{3}{4} x e^x \sqrt{1 - x^2}$