2.3.9. Riccati Diferansiyel Denklemi

$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ şeklindeki diferansiyel denklemdir. $y_1(x)$ şeklinde özel bir çözüm bulunarak çözülür. Eğer böyle bir çözüm bulunabilirse $u = u(x)$ olmak üzere,

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \rightarrow dönüşümü\ yapılarak$$

$u' + \big(2R(x)y_1(x) + Q(x)\big)u = -R(x) \rightarrow$ $u'ya$ göre Lineer diferansiyel olan bu denklem çözüldüğünde $u = \varphi(x, C)$ bulunur.

$$u = \frac{1}{y - y_1}\ olduğundan$$

$$\frac{1}{y - y_1} = \varphi(x, C)$$

$y = y_1 + \dfrac{1}{\varphi(x, C)} \rightarrow$ olarak Riccati diferansiyel denkleminin Genel Çözümü bulunmuş olur.

Örnek: $y' = xy^2 - x^2y + 1$ denkleminin özel bir çözümünü bularak genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' = 1 - x^2y + xy^2 \rightarrow (I)$

Çözüm için $y_1(x)$ şeklinde özel bir çözüm aranır. $y_1(x) = x$ i deneyelim.

$y_1(x) = x$ özel çözüm ise (I) dif.denklemini sağlamalıdır.
$y_1'(x) = 1$

Bu ifadeler *(I)* denkleminde yerine konulursa

$$y' = 1 - x^2y + xy^2$$

$1 = 1 - x^2x + xx^2 \rightarrow 1 = 1$ olduğundan bu özel çözüm diferansiyel denklemi sağlar. O halde değişken dönüşümü yapılabilir.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

Bu dönüşümler *(I)* denkleminde yerine konulursa

$$y' = 1 - x^2y + xy^2$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} = 1 - x^2\left(x + \frac{1}{u}\right) + x\left(x + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{x}{u^2} + \frac{x^2}{u} \Rightarrow u' = -x - x^2u$$

$$\boldsymbol{u' + x^2u = -x \quad \rightarrow u'ya\ göre\ lineerdir.}$$

Bu denklem *Sabitlerin Değişimi Metodu* ile çözülürse,
$u' + x^2 u = -x \quad \to (II)$ Lineer dif. Denkleminin homogen kısmı

$$u' + x^2 u = 0 \;\; => \;\; \frac{du}{dx} + x^2 u = 0 => \int \frac{du}{u} + \int x^2 dx = \int 0$$

$$\ln u + \frac{x^3}{3} = \ln C => \ln u - \ln C = -\frac{x^3}{3} => \ln\frac{u}{C} = -\frac{x^3}{3} => \frac{u}{C} = e^{-x^3/3}$$

$u = C.e^{-x^3/3}$ *Homogen kısmın çözümünde* $\to$ *C yerine* $C(x)$ *yazılarak*

$u = C(x).e^{-x^3/3} \to (III)$

Bu ifadenin türevi
$u' = C'(x).e^{-x^3/3} - C(x).x^2.e^{-x^3/3}$

u ve u' *(II)* denkleminde yerine konulursa,

$$C'(x).e^{-x^3/3} - C(x).x^2.e^{-x^3/3} + x^2.C(x).e^{-x^3/3} = -x$$

$$C'(x).e^{-x^3/3} = -x$$

$$C'(x) = -xe^{x^3/3}$$

$\int C'(x) = \int -xe^{x^3/3}\,dx \to$ *analitik olarak çözülemez.*

$C(x) = \int -xe^{x^3/3}dx + C_1 \to$ *şeklinde alınır.*

(III) denkleminde yerine konulur.

$u = C(x).e^{-x^3/3}$
$u = \left(\int -xe^{x^3/3}dx + C\right).e^{-x^3/3}$ $\to$ *Lineer diferansiyel denklemin çözümünnde* integral analitik yöntemlerle çözülemediği için integral ifadesi altında kalır. Buradan ters dönüşümü yaparak

$$y = x + \frac{1}{u} \;\; => \;\; u = \frac{1}{y-x}$$

$\left(\int -xe^{x^3/3}dx + C\right).e^{-x^3/3} = \dfrac{1}{y-x}$ *Riccati dif. denkleminin Genel Çözümü bulunur.*

Örnek:(uyg) $xy' = y^2 - 2xy + x^2 + 2y - x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $xy' = y^2 - 2xy + x^2 + 2y - x$ şeklinde verilen denklemin terimleri soldaki x e bölünürse

$$\frac{x}{x}y' = \frac{y^2}{x} - \frac{2xy}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{2y}{x} - \frac{x}{x}$$

$y' = (x-1) + \left(\frac{2}{x} - 2\right)y + \frac{1}{x}y^2 \rightarrow (I)$ Riccati Dif.denklemi olur.

Özel çözüm için $y_1(x) = x$ deneyelim:

$$y_1(x) = x$$
$$y_1'(x) = 1$$

ifadeleri *(I)* denkleminde yerine konulursa

$$y' = (x-1) + \left(\frac{2}{x} - 2\right)y + \frac{1}{x}y^2$$
$$1 = (x-1) + \left(\frac{2}{x} - 2\right)x + \frac{1}{x}x^2 \quad \rightarrow 1 = 1$$

olduğundan bu özel çözüm diferansiyel denklemi sağlar. O halde değişken dönüşümü yapılabilir.

$y = y_1 + \frac{1}{u}$ dan

$y = x + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapılırsa

$$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

Bu dönüşümler *(I)* denkleminde yerine konulduğunda

$$y' = (x-1) + \left(\frac{2}{x} - 2\right)y + \frac{1}{x}y^2$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} = (x-1) + \left(\frac{2}{x} - 2\right)\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{2}{xu} + \frac{1}{xu^2}$$

$$u' = -\frac{2}{x}u - \frac{1}{x}$$
$$u' + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x} \rightarrow Lineer\ diferansiyel\ denklem$$

Bu denklem *Sabitlerin Değişimi Metodu* ile çözülürse,

$$u' + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x} \rightarrow (II)$$

$$u' + \frac{2}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{u} + \frac{2}{x}dx = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{2}{x}dx = \int 0$$

$$\ln u + 2\ln x = \ln C$$

$$\ln u - \ln C = -2\ln x$$
$$\ln \frac{u}{C} = -2\ln x$$

$$\frac{u}{C} = \frac{1}{x^2}$$
$$u = C\frac{1}{x^2} \rightarrow C\ yerine\ C(x)\ yazıldığında$$

$u = C(x)\frac{1}{x^2}$ Genel çözüm olsun. Ohalde
$$u' = C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\left(-\frac{2}{x^3}\right) \rightarrow (II)\ denkleminde\ yerine\ konulduğunda$$

$$C'(x)\frac{1}{x^2} + C(x)\left(-\frac{2}{x^3}\right) + \frac{2}{x}C(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$C'(x) = -x$$
$$\int C'(x) = \int -x\,dx$$

$$C(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

$u = C(x)\frac{1}{x^2}$ de konulursa
$$u = \left(-\frac{x^2}{2} + C\right)\frac{1}{x^2}$$

$u = -\frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$ olur. Burada

$y = x + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapıldığında

$$y = x + \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}\right)}\ genel\ çözümü\ elde\ edilir.$$

Soru1. $y' = \frac{y^2}{x^3 - x^2} + \frac{x-2}{x^2 - x}y$ için $x, -x, x^2, -x^2$ fonksiyonlarından birinin özel çözüm olduğunu belirleyerek genel çözümü bulunuz.

Soru2. $(1 - x^3)y' - 2x + x^2y + y^2 = 0$ denkleminin genel çözümünü belirleyeceğiniz bir özel çözüm yardımıyla bulunuz.