

Résumé de LELEC1370

compilation du 20 juin 2023

Thomas Debelle

Juin 2023

Table des matières

1	Cours 1	5
1.1	Les bases	5
1.1.1	Le courant et la puissance	5
1.1.2	Équivalent Thévenin Norton	6
1.1.3	Transfert maximal de puissance	7
1.1.4	Le quadripole à 2 accès	8
1.1.5	L'amplificateur opérationnelle	8
2	Signaux sinusoïdaux et phaseurs	11
2.1	Circuits en régime sinusoïdal	11
2.1.1	Circuit RC : rappel	11
2.1.2	Circuit LC	11
2.1.3	Régime sinusoïdal	12
2.1.4	Les Phaseurs	12
2.1.5	Analyse de circuits	13
2.1.6	Admittance équivalente à une impédance	14
2.1.7	Addition Impédance	15
2.1.8	Thévenin et Norton	15
2.1.9	Conseil	15
3	Comportement des circuits en domaine fréquentielle	16
3.1	Diagramme de Bode	16
3.1.1	Info	16
3.1.2	Calculer	17
3.1.3	Interprétation	17
3.1.4	Modèle plus compliqué	17
3.1.5	Formule générale	17
3.2	Circuits résonants et filtrage	18
3.2.1	Circuits résonants	19
3.3	Conception des filtres	20
3.3.1	Butterworth	20
3.3.2	Chebyshev	20
3.3.3	Bessel	20
3.4	Rétroaction et circuits en boucle fermée	21
3.4.1	Rétroaction	21
3.4.2	Représentation Schéma-Bloc	22
3.4.3	Bode	22
3.4.4	Conseils	24
3.5	Quadripôles	24
3.5.1	Rappels	24
3.5.2	L'équivalence	25
3.5.3	Déterminer les coefficients	26

3.5.4	Changement de représentation	26
3.5.5	Association de quadripôle	28
3.5.6	Quadripôle chargé	28
4	Puissance	30
4.1	Instantanée, moyenne et effective	30
4.1.1	Instantanée	30
4.1.2	Moyenne	30
4.1.3	Valeur efficace	31
4.1.4	Courant sinusoïdal	31
4.2	Puissance active, réactive et apparente	32
4.2.1	Impédance quelconque	32
4.2.2	Résistance pure - Courant imposé	32
4.2.3	Inductance pure - Courant imposé	33
4.2.4	Capacité pure - Courant imposé	33
4.2.5	Admittance quelconque - Tension Imposée	33
4.2.6	Capacité Pure - Tension imposée	33
4.3	Puissance complexe et bilan de puissance	33
4.3.1	Puissance complexe	33
4.3.2	Bilan de puissance	34
4.4	Facturation de la puissance consommée	34
4.5	Compensation de la puissance réactive et Adaptation d'impédance	34
4.5.1	Compensation de la puissance	34
4.5.2	Adaptation d'impédance	34
5	Triphasé	36
5.1	Introduction	36
5.1.1	Source	36
5.1.2	Connections	36
5.1.3	Grandeurs de ligne	37
5.1.4	Grandeurs de phase	37
5.1.5	Circuit équivalent monophasé	38
5.2	Transformation étoiles triangles	38
5.2.1	Puissance	39
6	Circuits couplés magnétiquement	40
6.1	Introduction	40
6.1.1	Inductance	40
6.1.2	Inductances propre et mutuelle	40
6.1.3	Bornes homologues	41
6.2	Efficacité	41
6.2.1	Analyse énergétique	41
6.2.2	Facteur de dispersion et coefficient de couplage	42
6.3	Transformateur idéal	42
6.3.1	Analyse énergétique	43
6.3.2	Excitation sinusoïdale	43
7	Transformée de Laplace	45
7.1	Équation différentielle avec Fourier	45
7.1.1	Résolution	45

8	Stabilité et systèmes	46
8.1	Transformée inverse de Laplace	46
8.1.1	Stabilité	46
8.2	Systèmes	46
8.2.1	Boucle fermée	46
8.2.2	Réponse à une harmonique infinie	47
8.2.3	Réponse à une harmonique causale	47
8.2.4	Décomposition en Harmonique	47
9	Mesure	48
9.1	Erreurs et incertitudes	48
9.1.1	Erreurs vs. incertitudes	48
9.1.2	Origine des erreurs	48
9.1.3	Éléments de statistique	49
9.1.4	Opérations arithmétiques sur les incertitudes	49
9.2	Ponts pour la mesure d'impédance	50
9.2.1	Principe	50
9.2.2	Utilisation	50
9.2.3	Pont de Wheatstone	50
9.2.4	Pont de Wien	50
9.2.5	Pont de Maxwell	51
9.2.6	Impédances parasites en parallèle	51

Préface

Bonjour à toi !

Cette synthèse recueille toutes les informations importantes données au cours, pendant les séances de tp et est améliorée grâce au note du Syllabus. Elle ne remplace pas le cours donc écoutez bien les conseils et potentielles astuces que les professeurs peuvent vous donner. Notre synthèse est plus une aide qui, on l'espère, vous sera à toutes et tous utile.

Elle a été réalisée par toutes les personnes que tu vois mentionnées. Si jamais cette synthèse a une faute, manque de précision, typo ou n'est pas à jour par rapport à la matière actuelle ou bien que tu veux simplement contribuer en y apportant tes connaissances ? Rien de plus simple ! Améliore la en te rendant [ici](#) où tu trouveras toutes les infos pour mettre ce document à jour. (*en plus tu auras ton nom en gros ici et sur la page du github*)

Nous espérons que cette synthèse te sera utile d'une quelconque manière ! Bonne lecture et bonne étude.

Chapitre 1

Cours 1

1.1 Les bases

1.1.1 Le courant et la puissance

Tout d'abord, il existe 2 types de courant appelé **Direct Current** ou *DC* et **Alternating Current** ou *AC*. Le courant direct est continu tandis que le courant *AC* varie dans le temps comme montré ci-contre.

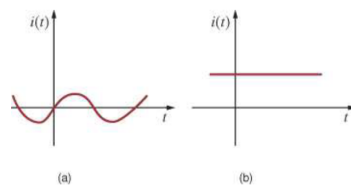


FIGURE 1.1 – Gauche : courant AC Droite : courant DC

La tension vaut la variation d'énergie selon la charge ou autrement dit :

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.1)$$

La puissance vaut la tension par le courant ou :

$$p = vi = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} \quad (1.2)$$

Finalement, l'énergie est une différence de puissance en fonction du temps :

$$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} v i dt \quad (1.3)$$

Quelques conventions :

- Source de tension nulle = court circuit
- Source de courant nulle = circuit ouvert
- Le sens du courant "rentre" dans la borne + d'un générateur de tension.

Puissance dissipée

Pour connaître la puissance dissipée dans une résistance, on utilise d'abord la formule fondamentale d'une résistance :

$$v(t) = Ri(t) \quad (1.4)$$

Ainsi, en utilisant 1.2 on trouve :

$$p(t) = vi(t) = \frac{v^2(t)}{R} = Ri^2(t) \quad (1.5)$$

Loi des noeuds de Kirchoff

La somme des courants dans un noeud a pour résultat 0. Autrement dit, tout courant qui apparaît, disparaît quelque part.

Loi des mailles de Kirchoff

Dans un circuit électrique, on peut dessiner des *mailles* ou des sortes de carrés. En tournant dans un sens, on fait la somme des tensions (*faire attention au sens des tensions*) on doit obtenir une somme nulle.

Sources multiples - Diviseur de tension

On peut simplifier un circuit et sommer des sources de tension en additionnant leur tension. On utilise également la règle des diviseurs de tension pour les résistances :

$$\begin{cases} \parallel \rightarrow R_{new} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \\ \text{série} \rightarrow R_{new} = R_1 + R_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Mise en parallèle et sources multiples

Les sources de *courant* en parallèle peuvent être sommées pour les simplifier et n'en avoir qu'une seule source de courant. Pour les sources de *tension*, on les additionne quand elles sont en série.

1.1.2 Équivalent Thévenin Norton

On peut simplifier une alimentation d'un circuit via les circuits de Thévenin et Norton. Thévenin est composé d'une source de tension et d'une résistance en série tandis que Norton a une source de courant et une résistance en parallèle.

Les choses importantes à noter sont :

$$\begin{cases} R_{Th} = R_{No} \\ I_{sc} = \frac{V_R}{R_{Th}} \\ v_{oc} = R_{Th} i_{sc} \end{cases} \quad (1.7)$$



FIGURE 1.2 – Illustration du passage de Thévenin à Norton

Pour trouver la résistance R_{Th} on met en *court-circuit* les générateurs de tensions et en *circuit ouvert* les générateurs de courant. Ensuite, on enlève la résistance ou la partie de circuit qu'on veut garder après la transformation. On regarde à ses bornes les *résistances* et on trouve donc *l'équivalent des résistances*. On peut faire cela uniquement avec des générateurs **non commandés**.

Pour trouver le *courant de Norton* et la *tension de Thévenin* (on est **obligé** de passer par cette étape en premier avec des *sources commandées*). Pour *Thévenin* on met notre résistance en *circuit ouvert* et on trouve le voltage à ses bornes.

Pour *Norton* on met notre résistance en *court-circuit* et on trouve le courant circulant dans ce fil.

Conseil Norton Thévenin

Lorsqu'on travaille avec des courants, on utilise la loi des *noeuds* et une fois qu'on a toutes les équations, on utilise la loi des *mailles* qui permet d'utiliser nos courants et tout simplifier.

Dualité étoiles-triangle

Dans un circuit électrique, on peut faire face à des arrangements de résistances en *triangle* qui sont compliqués à transformer en *résistance équivalente*.

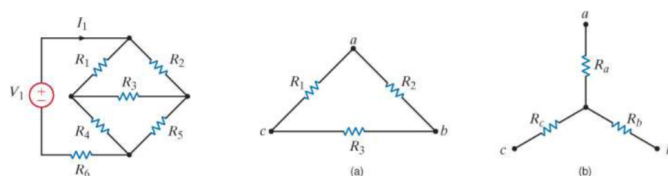


FIGURE 1.3 – Passage d'une forme de triangle à une forme d'étoiles

Les équations sont pour passer de **triangles à étoiles** :

$$R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Et pour convertir d'**étoiles à triangles** :

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_b} \quad R_2 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c}{R_a}$$

Thévenin avec sources dépendantes

Pour trouver R_{Th} on va rajouter au borne connectant l'autre circuit une source de tension. Puis on détermine les tensions à borne ouverte et le courant en *court-circuit*.

1.1.3 Transfert maximal de puissance

Pour trouver la puissance maximale dans une résistance, on peut faire varier le courant et donc le voltage. Ici, on a réalisé un diviseur résistif très simple pour démontrer la formule de puissance de résistance donné par 1.5, on obtient donc ceci dans notre circuit : (plus d'informations en section 3.5)

$$\frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{V^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right) = 0 \quad (1.8)$$

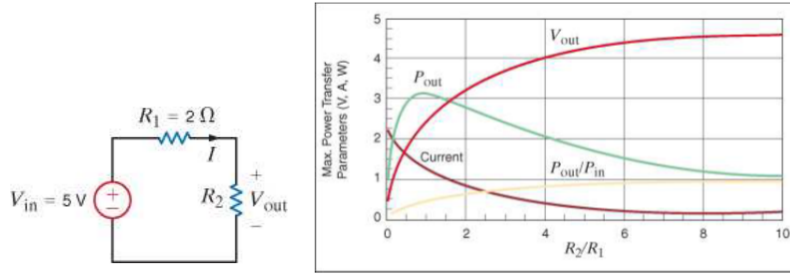


FIGURE 1.4 – Graphique montrant l'évolution de la puissance dans une résistance

1.1.4 Le quadripole à 2 accès

Le quadripole à 2 accès se reposent sur 2 principes, il faut qu'il n'y ait aucune source indépendante interne → donc passif. Il faut également n'avoir que 2 accès, c'est à dire que la somme des entrées est nulle. Pour simplifier, il faut qu'on ait une entrée et sortie comprenant le même courant (voir schéma ci-contre). Le but de cette représentation est une simplification de circuit. De plus, même si ce circuit n'est pas linéaire, on fait des petites variations autour d'une valeur rendant approximativement le circuit linéaire.

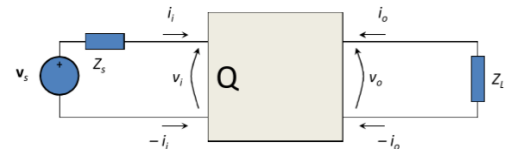


FIGURE 1.5 – Schéma classique d'un quadripole à 2 accès

Ce type de quadripole peut être réalisé de 4 manières différentes détaillées ci-dessus.

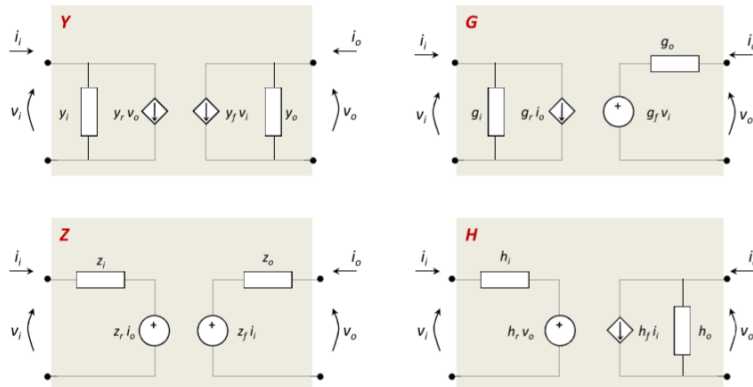


FIGURE 1.6 – Les 4 types de quadripoles

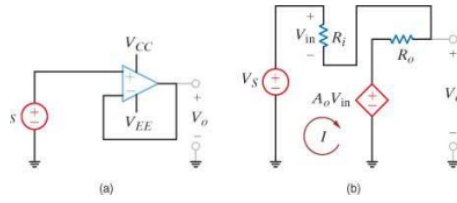
On peut facilement représenter ces différents systèmes via des matrices détaillant le système voir 3.5.

1.1.5 L'amplificateur opérationnelle

L'amplificateur opérationnelle ou *ampli op* est un composant qu'on retrouve abondamment en électronique.

On va éviter la saturation et contrôler l'ampli-op en réalisant une boucle de rétroaction négative à la borne $-$. Nous n'avons aucun courant qui rentre dans l'ampli-op dû à son impédance élevée. Il se peut qu'à la sortie de celle-ci, un faible courant puisse rentrer car l'impédance est plus faible. Dans le cas idéal, $V_+ = V_-$ et $I_+ = I_- = 0$.

Buffer

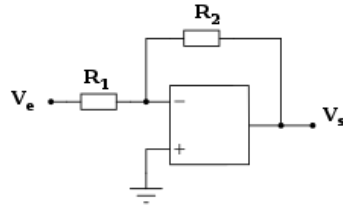


Permet de trier un maximum de courant sans changer la tension.

$$\frac{V_o}{V_S} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_o + A_o R_i}} \approx 1 \quad (1.9)$$

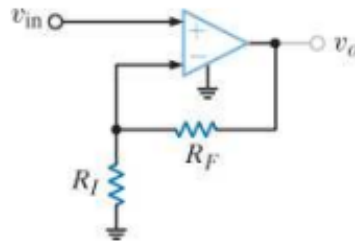
Et avec une ampli-op idéale, $A_o \rightarrow \infty$, $R_i \rightarrow \infty$ et $R_o \rightarrow 0$.

Inverseur



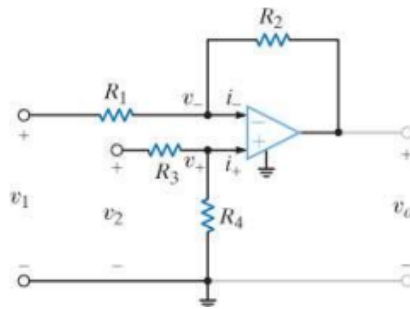
$$\text{où } \frac{v_o}{v_s} \approx -\frac{R_2}{R_1}.$$

Non-inverseur



$$\text{Où } \frac{v_o}{v_{in}} = 1 + \frac{R_F}{R_I}.$$

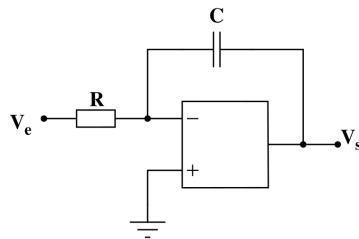
Différence



Le but est de faire la différence entre deux tensions.

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (1.10)$$

Intégrateur



On doit parfois rajouter une résistance en parallèle de la capacité pour en faire un intégrateur à perte. On l'ajoute quand on n'a rien en aval du bloc.

$$V_{out} = -\frac{1}{RC} \int_{t=0}^t V_{in} dt + V_{out}(0) \quad (1.11)$$

Chapitre 2

Signaux sinusoïdaux et phaseurs

2.1 Circuits en régime sinusoïdal

2.1.1 Circuit RC : rappel

Dans cette partie, on s'intéressera surtout au circuit **RC**, il est donc bon de rappeler différentes formules :

$$I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (2.1)$$

$$V_R(t) = RI(t) \quad (2.2)$$

$$RC \frac{dV_C(t)}{dt} = -(V_C(t) - V_S(t)) \quad (2.3)$$

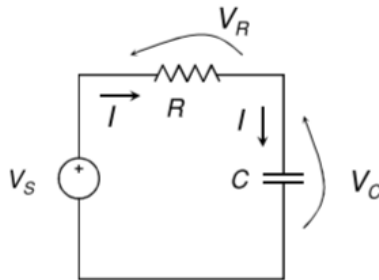


FIGURE 2.1 – Circuit RC en régime sinusoïdal

Il est à noter que l'équation 2.3 est une équation propre au circuit de la figure 2.1.1. Il est bon de remarquer que *maintenant*, les courants et tension sont *dépendantes du temps*. La *constante de temps* est $\tau = RC$ et apparaît dans la résolution de *l'équation différentielle*.

2.1.2 Circuit LC

Voici les formules pour les circuits LC. (*note* : on dirait que notre source de courant est une source de courant *commandée* mais c'est bien une source de courant **non-commandée**)

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} \quad (2.4)$$

$$V_L(t) = GI_G(t) \quad (2.5)$$

$$\frac{L}{G} \frac{dI_L(t)}{dt} = -(I_L(t) - I_S(t)) \quad (2.6)$$

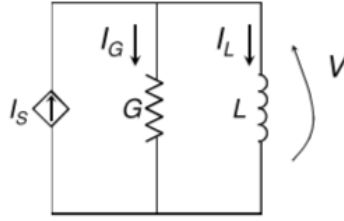


FIGURE 2.2 – Circuit LC en régime sinusoïdal

Il est à noter que l'équation 2.6 est une équation propre au circuit de la figure 2.1.2. La *constante de temps* est $\tau = \frac{L}{R}$

2.1.3 Régime sinusoïdal

Quelques notions à bien comprendre :

- La phase est établie par l'observateur car c'est lui qui définit "*le début de la sinusoïdale*"
- Un cosinus est un sinus *déphasé* de $\frac{\pi}{2}$

Analyse circuit RC

Si on a une source de courant sinusoïdale :

$$V_s(t) = V_p \cos(\omega t) \quad (2.7)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_p \cos(\omega t) \quad (2.9)$$

L'équation 2.9 correspond à l'équation différentielle et à pour solution :

$$\begin{cases} V_C(0) = 0 \\ V_C(t) = \frac{V_p}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \left[-\cos(\varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} + \cos(\omega t + \varphi) \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

L'équation 2.10 nous indique plusieurs choses :

1. La partie en **bleu** nous montre une atténuation du signal.
2. La partie en **brun** nous montre une partie *transitoire* dû à la capacité qui se charge doucement avant d'arriver à un état stable.
3. La partie en **vert** est le *déphasage* du signal qui est créé par le caractère "*dérivateur*" d'une capacité

2.1.4 Les Phaseurs

On utilise des **phaseurs** pour des circuits :

- *linéaires*
- ne possédant *qu'une source indépendante*
- on a une source de fréquence $\omega/2\pi$
- le circuit est *en régime*

Donc tous les autres *courants dépendants* ont

- une *forme* ressemblant à la source

- la même fréquence
- une amplitude différente
- une phase différente

Seulement si cela est respecté, alors on peut utiliser les **phaseurs** :

$$\mathbf{V} = V_M e^{j\psi_V} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{I} = I_M e^{j\psi_I} \quad (2.12)$$

En électricité, on représente le nombre complexe par j . ψ représente les phases.

L'utilisation des *phaseurs* vient de l'idée de la *formule d'Euler* où quand on ajoute une partie imaginaire, cela n'affecte pas la partie *réelle*. Donc on peut faire ceci :

$$\begin{cases} A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow A \cos(\omega t + \varphi) + j A \sin(\omega t + \varphi) & -\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq \frac{\pi}{2} \\ A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow [A e^{j\varphi}] e^{j\omega t} \end{cases} \quad (2.13)$$

Ici, la deuxième équation utilise des *phaseurs* (mis entre parenthèses, l'utilisation de phaseurs va simplifier notre notation surtout en dérivée et intégrale :

$$\frac{d}{dt} [A e^{j\varphi}] e^{j\omega t} = [j\omega A e^{j\varphi}] e^{j\omega t} \quad (2.14)$$

$$\int [A e^{j\varphi}] e^{j\omega t} = \left[\frac{1}{j\omega} A e^{j\varphi} \right] e^{j\omega t} \quad (2.15)$$

Il est important de se rappeler que lorsqu'on travaille en *complexe*, multiplier par j revient à faire une rotation *anti-horlogé* de $\frac{\pi}{2}$.

2.1.5 Analyse de circuits

Passer en phaseur est une opération **linéaire** donc toutes les lois de *Kirchoff* et théorèmes de la *théorie des circuits* restent **valables**.

Élément	Résistance	Inductance	Capacité
Paramètre	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$
$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}}$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$
Équation constitutive	$V = \mathbf{Z}I$ $I = \mathbf{Y}V$	$V = \mathbf{Z}I$ $I = \mathbf{Y}V$	$V = \mathbf{Z}I$ $I = \mathbf{Y}V$

Pour des **dipôles** :

Impédance d'un dipôle	Admittance d'un dipôle
$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$	$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$
$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{ \mathbf{V} }{ \mathbf{I} } e^{j(arg(\mathbf{V}) - arg(\mathbf{I}))} = \frac{V}{I} e^{j(\psi_V - \psi_I)}$	$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{ \mathbf{I} }{ \mathbf{V} } e^{j(arg(\mathbf{I}) - arg(\mathbf{V}))} = \frac{I}{V} e^{j(\psi_I - \psi_V)}$

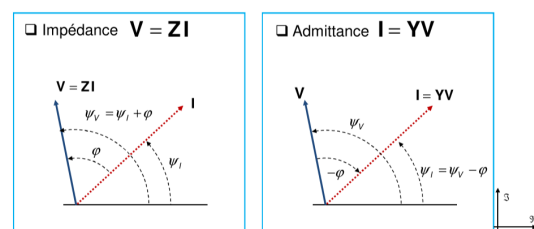
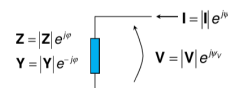
On a différente notation pour \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{jarg(\mathbf{Z})} = Z e^{j\varphi} \quad \text{représentation polaire} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad \text{représentation cartésienne} \quad (2.17)$$

R est la *résistance* et X la *réactance*. Si cette dernière est **négative**, on a affaire à une *capacité*. Si elle est **positive**, il s'agit d'une *inductance*.

Donc on voit clairement que notre vecteur \mathbf{Z} a une composante *complexe* et *réelle*. Et cela vaut de même pour le vecteur \mathbf{Y} .



Impédance de résistance pure

- $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ et donc $\mathbf{Z} = R$
- Tension en phase : $\varphi = 0 \rightarrow \mathbf{V} = RI_M e^{j\psi_I}$
- Admittance : $\mathbf{Y} = G = \frac{1}{R}$

Impédance d'inductance pure

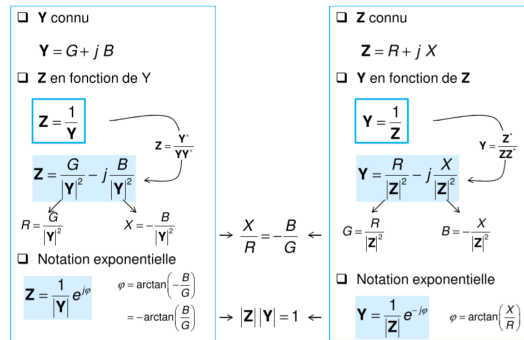
- $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$ et donc $\mathbf{Z} = j\omega L$
- Tension en **avance** sur le courant : $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{V} = \omega LI_M e^{j(\psi_I + \frac{\pi}{2})}$
- Admittance : $\mathbf{Y} = jB = \frac{1}{j\omega L}$

Impédance de capacité pure

- $\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$ et donc $\mathbf{Y} = j\omega C$
- Tension en retard sur le courant : $\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbf{I} = \omega CV_M e^{j\psi_V + \frac{\pi}{2}}$
- Impédance : $\mathbf{Z} = jX = \frac{1}{j\omega C}$

Attention à bien remarquer l'utilisation d'une impédance au lieu d'une admittance comme précédemment.

Même dipôle



2.1.6 Admittance équivalente à une impédance

À une **fréquence précise**, tout dipôle en série peut être remplacé par un dipôle en parallèle.

En effet, il suffit de recréer le même vecteur. Dans le cas en **série**, on impose le courant donc :

$$V_R = |\mathbf{Z}| \cos(\varphi) \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Z} = R \quad (2.18)$$

$$V_L = |\mathbf{Z}| \sin(\varphi) \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{Z} = \omega L \quad (2.19)$$

Et dans le second cas, on impose la tension au borne :

$$\mathbf{I} = \mathbf{VY} \quad (2.20)$$

$$I_R = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} \cos(\varphi) \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \quad (2.21)$$

$$I_L = \frac{|\mathbf{Z}|}{\sin(\varphi)} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Y} = \frac{1}{\omega L} \quad (2.22)$$

Il faut bien se rendre compte que cet équivalent est uniquement valable pour une **même fréquence**. Car le $|\mathbf{Z}|$ varie ainsi que le déphasage φ .

Pour faire la différence quand on a des graphes comme ci-dessous, on peut voir que à basse fréquence (donc quasi DC) aucun courant ne passe dans la capacité pour un circuit en parallèle. Cela implique qu'on n'a pas de déphasage car tout le courant passe dans la résistance. De plus, l'impédance est quasi constante. (on peut prouver un équivalent la même chose pour le circuit en série)

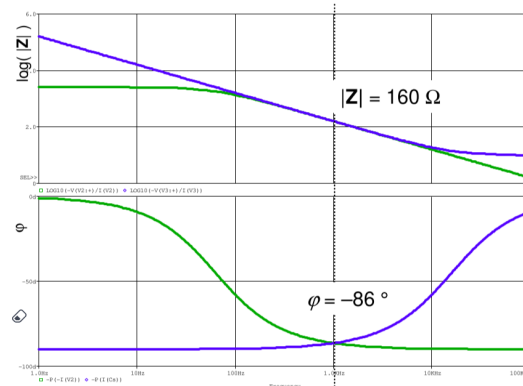


FIGURE 2.3 – En **bleu** le circuit en série, en **vert** le circuit en parallèle

2.1.7 Addition Impédance

Comme dit au début du chapitre, on conserve toutes les lois classiques des circuits en courant continu. Cela implique que :

- Pour les impédances :
 - On additionne simplement les impédances en série.
 - On réalise la formule $\frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n}}$ pour des impédances en parallèle.
- Pour les admittances :
 - On réalise la formule $\frac{1}{\frac{1}{Y_1} + \dots + \frac{1}{Y_n}}$ pour des admittances en série.
 - On additionne simplement les admittances en parallèle.

Cette *dualité* impédance-admittance est très utile et simplifie de nombreux calculs pour les circuits AC.

2.1.8 Thévenin et Norton

On fait les mêmes démarches qu'en DC, il faut faire attention aux impédances complexes et les sources de courants et tension qui sont des *phaseurs*.

2.1.9 Conseil

La valeur efficace = V_{RMS} et notre valeur de crête en sinusoïdale = $\sqrt{2}V_{RMS}$.
 On calcule notre puissance en valeurs efficaces. La puissance active est la partie réelle et la puissance réactive est la partie complexe. La puissance complexe se calcule depuis les valeurs *efficaces*.

Chapitre 3

Comportement des circuits en domaine fréquentielle

Nous avons déjà vu que la *fréquence* influence notre *impédance* et *phase*.

3.1 Diagramme de Bode

Le Diagramme de Bode est une façon conventionnelle de représenter un circuit selon une évolution de la fréquence. Ce type de graphe utilise des axes logarithmiques avec en axe **X** la fréquence et en axe **Y** notre valeur d'intérêt (ici, un courant)

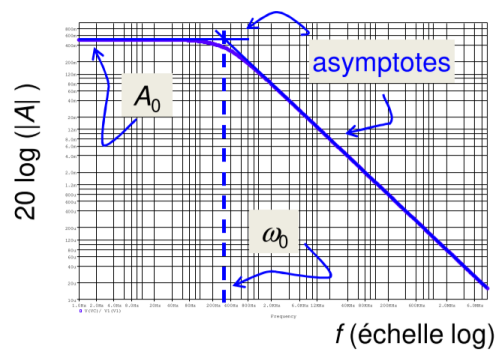


FIGURE 3.1 – Exemple pour $\mathbf{A} = A_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

3.1.1 Info

Il est important de ne pas oublier qu'un diagramme de *Bode* est un diagramme qui est **logarithmique** et il faut en produire **2**, un pour l'**amplitude** et un pour la **phase**.

L'axe **X** est d'une entrée $\log(\omega)$. Donc si on descend en-dessous de 1Hz , on tombe à $-\infty$ sur l'axe abscisses.

3.1.2 Calculer

Amplitude

L'exemple montré en 3.1 est un exemple classique qu'on rencontre en circuit AC. La formule pour transformer \mathbf{A} en \log est :

$$20\log(\mathbf{A}) = 20\log\left(A_0 \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}\right) = 20\log(A_0) - 20\log\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right) \quad (3.1)$$

Pour tracer un graphe il faut :

- Regarder quand $\omega \ll \omega_0 \rightarrow$ ici on a donc une équation qui devient $\mathbf{A} = A_0$
- Regarde quand $\omega \gg \omega_0 \rightarrow$ On peut donc ignorer le 1 au dénominateur. Ce qui devient donc $20\log(A_0) - 20\log(j\omega) + 20\log(\omega_0)$ Donc on a une droite qui "descend" de 20 dB par décade.

Phase

Le rapport d'argument de l'exemple 3.1 est :

$$\arg(H) = \arg(A_0) - \arg\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0}\right) \quad (3.2)$$

Donc on utilise le même principe qu'au point 3.1.2 :

- Regarder quand $\omega \ll \omega_0 \rightarrow$ l'équation devient donc $\arg(A_0) - \arg(1) = 0$ donc on a aucun déphasage.
- Regarder quand $\omega \gg \omega_0 \rightarrow$ l'équation devient donc $\arg(A_0) - \arg\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Tracer

Pour tracer notre graphe, on doit "*arrondir*" les angles pour retranscrire plus le côté physique et réaliste.

3.1.3 Interprétation

Toujours en se basant sur 3.1, on est sur un "*filtre passe-bas*". C'est même plus que ça car la valeur A_0 agit comme un amplificateur des basses fréquences. Et puis, on perd de plus en plus les hautes fréquences par un système *intégrateur*.

3.1.4 Modèle plus compliqué

Pour cela, on répète autant de fois qu'il y a de ω_n l'opération. On retient que quand la fonction est au *numérateur*, on croît. Au *dénominateur*, on décroît.

Ainsi, on aurait un ensemble de courbe et de droite qu'on doit simplement sommer entre elle. (ne pas oublier d'arrondir les angles pour donner un côté plus réaliste)

La partie complexe est toujours renvoyer vers l'argument où là celle-ci aura un impact plutôt que sur l'amplitude !

3.1.5 Formule générale

L'équation du rapport de puissance est en général de forme :

$$A_V = A_{V0}(j\omega)^{\pm N} \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + 2j\xi_a \frac{\omega}{\omega_a} - \left[\frac{\omega}{\omega_a}\right]^2\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right) \left(1 + 2j\xi_b \frac{\omega}{\omega_b} - \left[\frac{\omega}{\omega_b}\right]^2\right)} \quad (3.3)$$

1. $A_{V0}(j\omega)^{\pm N}$:
 - Amplitude : est une constante
 - Phase : nous déphase de $\pm \frac{\pi}{2}$ en fonction de $\pm N$ et ce de manière rectiligne de 20 dB par décade.
2. $\frac{(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})}{(1 + \frac{j\omega}{\omega_2})}$:
 - Amplitude : au **dénominateur**, on est face à un filtre *passé-bas*. Au **numérateur** on est face à un "amplificateur" **passé-haut**.
 - Phase : au **dénominateur**, déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ et déphasage de $\frac{\pi}{2}$ au **numérateur**.
3. $\frac{(1 + 2j\xi_a \frac{\omega}{\omega_a} - [\frac{\omega}{\omega_a}]^2)}{(1 + 2j\xi_b \frac{\omega}{\omega_b} - [\frac{\omega}{\omega_b}]^2)}$ cette partie est plus subtile et on doit s'intéresser au ξ , pour trouver les fréquences de coupure, on fait simplement un Δ :
 - (a) $\xi > 1$ (on suppose que $\omega_a < \omega_b$)
 - Amplitude : une augmentation/diminution en 20dB par décade de $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$ puis de 40 dB à partir de ω_b si cela est au numérateur/dénominateur.
 - Phase : Rotation de π si au *numérateur* ou rotation de $-\pi$ au *dénominateur*.
 - (b) $\xi = 1$ (on suppose que $\omega_a < \omega_b$)
 - Amplitude : une augmentation/diminution de 40 dB par décade à partir de $\omega_b = \omega_a$ si cela est au numérateur/dénominateur.
 - Phase : Rotation de π si au *numérateur* ou rotation de π au *dénominateur*.
 - (c) $0 \leq \xi < 1$ cas très spécial! (on suppose que $\omega_a < \omega_b$) on a un phénomène de résonance d'amplitude. *overshoot*
 - Amplitude : comme au point (b) mais au centre, on a une asymptote qui tend vers le bas/haut si c'est au numérateur/dénominateur.
 - Phase : changement de phase mais avec une pente plus raide autour du centre. voir 3.2.

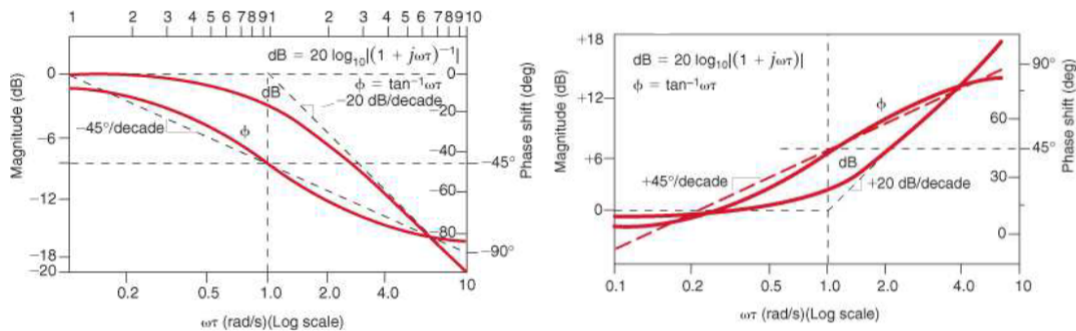


FIGURE 3.2 – Amplitude et Phase pour le (c)

3.2 Circuits résonants et filtrage

Maintenant, voyons des cas concrets de circuit RLC implémentant des courants AC.

3.2.1 Circuits résonants

Circuits résonants en série

Avec un circuit en série d'inductance, capacité et résistance, on a une impédance comme :

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour être en résonance, il faut annuler la partie complexe. On nomme cette **fréquence de résonance** ω_0 .

On établit aussi un **facteur de qualité** d'un circuit qui indique si on possède une bonne bobine pour le circuit. De plus, on peut avoir un rapport du voltage de la résistance sur le voltage totale V_R/V_1 :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$\frac{V_R}{V_1} = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$$

Ceci nous permet d'avoir des pics à des fréquences spécifiques. Avec cela, on va pouvoir créer des filtres (radio tuning, ...).

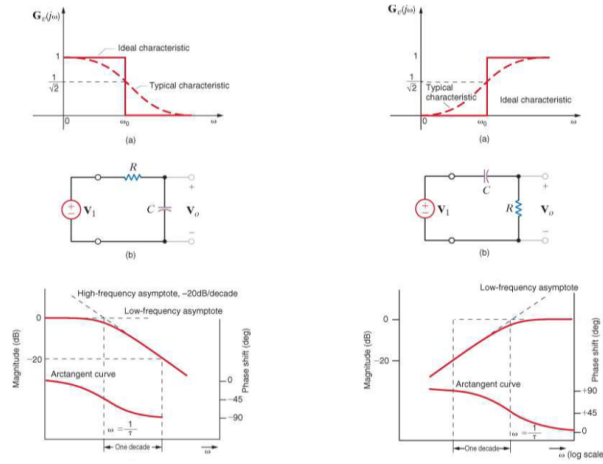


FIGURE 3.3 – à gauche : filtre du premier ordre passe-bas à droite : filtre du premier ordre passe-haut

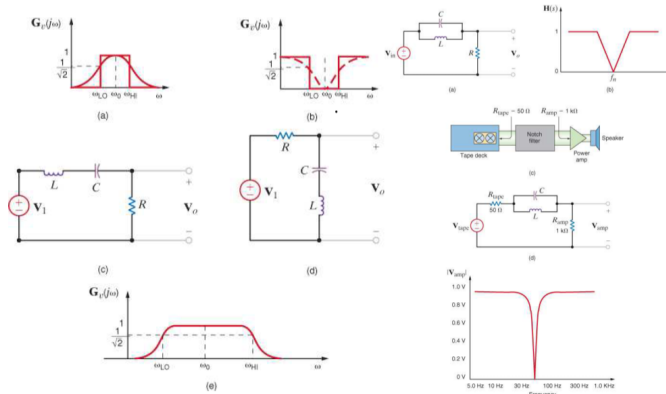


FIGURE 3.4 – à gauche : passe-bande au milieu : stop-bande à droite : notch

3.3 Conception des filtres

Les critères pour un filtre sont :

1. La fluctuation de bande passante : donc l'erreur d'amplification
2. La zone de transition : à quelle vitesse on passe de la zone passante à non-passante
3. La fluctuation de bande bloquante : on établit une marge d'erreur pour la partie bloquante

On peut aussi remarquer un **délai de groupe**. C'est la dérivée de la phase par rapport à ω .

On va souvent créer des filtres en se basant sur des *polynômes typiques*. On doit également choisir quelles caractéristiques on veut privilégier.

3.3.1 Butterworth

Ce type de filtre a pour but d'avoir une fluctuation de la bande passant **quasiment nulle**.

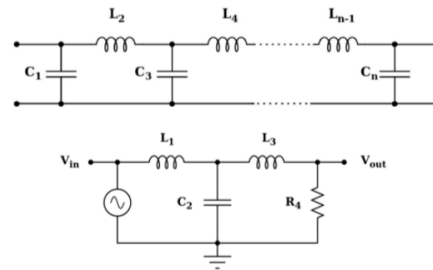
$$G^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{G_0}{B_n(\frac{j\omega}{\omega_c})}$$

Son désavantage est son temps de transition plus ou moins long. De plus sa zone bloquante est plutôt stable mais n'annule pas efficacement les fréquences proche de la fréquence de coupe.

On l'implémente comme montré ci-contre.

$$C_k = 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$

$$L_k = 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$$



Il existe également des filtres de **Sallen-Key** qui sont du *deuxième ordre* ce qui permet des filtres plus fiables car ne dépendant pas de ce qu'il y a en aval.

En effet grâce à l'impédance d'entrée *infini* des ampli-ops idéales, on ne sera jamais perturbé par les impédances en aval.

3.3.2 Chebyshev

L'avantage de ces filtres est qu'on a une zone de transition plus raide que Butterworth (3.3.1) mais on a de plus fortes oscillations en bande passante.

3.3.3 Bessel

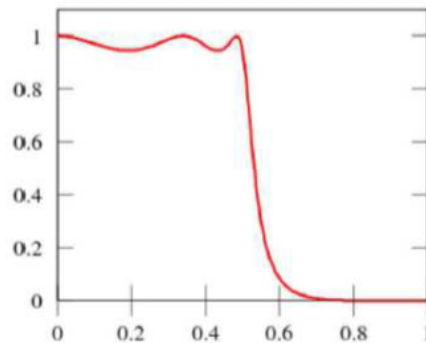
L'avantage des filtres de *Bessel* est qu'il minimise la distorsion de la zone passante tout en ayant un délai de groupe **constant**.

$$H(s) = \frac{\theta_n(0)}{\theta_n(\frac{s}{\omega_0})}$$

$$n = 1; s + 1$$

$$n = 2; s^2 + 3s + 3$$

$$n = 3; s^3 + 6s^2 + 15s + 15$$



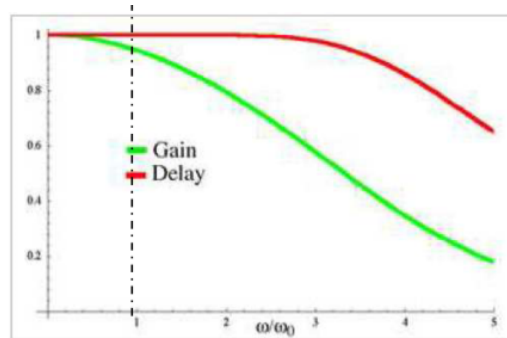


FIGURE 3.5 – Filtre de Bessel

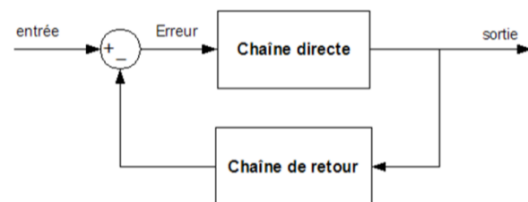
3.4 Rétroaction et circuits en boucle fermée

3.4.1 Rétroaction

Au lieu de régler quelque chose basé sur des instructions pré-déterminés, on va prendre des mesures et les effets d'un système pour pouvoir ajuster celui-ci.

Ceci rend notre machine plus efficace et permet à celle-ci de s'adapter peu importe le milieu.

Ci-contre un exemple en *schéma-bloc* d'un système en [boucle fermée](#)

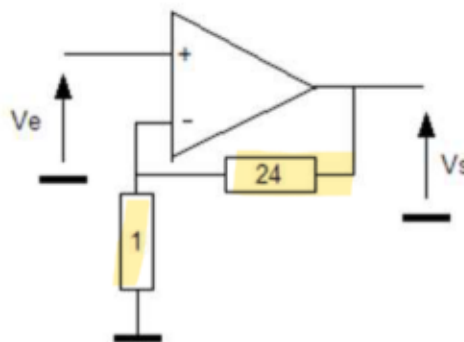


- Chaine directe : correspond à un gain en puissance important
- Chaine retour : l'ensemble des capteurs qui permettent de fournir une image du résultat du système
- Soustracteur : permet de faire la différence entre ce qu'on fournit et le résultat ce qui permet d'être plus précis et à s'adapter

Amplificateur opérationnelle

Dans le monde réelle, on implémente ce type de système avec des **ampli-ops**. Elles ont un gain qui varie aux alentours de 10^5 .

Mais en boucle avec rétroaction *négative* on peut fixer ce gain.



Et donc le gain est $\frac{1}{24+1}$

3.4.2 Représentation Schéma-Bloc

Fonction de transfert

On a en entrée $E(j\omega)$ et le bloc de transfert $T(j\omega)$ nous donne $S(j\omega) = T(j\omega).E(j\omega)$.
On peut remplacer les $j\omega$ par s (voir chapitre 7)
On retrouve ce genre de bloc dans les *amplificateurs, filtres, intégrateurs, ...*

Soustracteur

On le représente par une boule (3.4.1) et permet de faire la différence entre deux signaux.

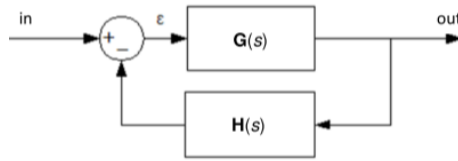
Mesure

C'est une utilisation de plusieurs fonctions de transfert pour mesurer différentes choses.

Déplacer

Il n'y a pas qu'une seule configuration qui produit un résultat. On peut intervertir des blocs et les modifier pour avoir en sortie et en entrée les mêmes choses.

Forme canonique



On peut voir ce système comme :

$$T_{bf}(s) = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G(s).H(s)}{1 + G(s).H(s)} = T_{ideal}(s) \cdot \frac{T_{bo}(s)}{1 + T_{bo}(s)} = T_{ideal}(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{T_{bo}(s)}}$$

Dans un monde idéal, le gain $G(s)$ tend vers ∞ . Ainsi la fonction de transfert *idéal* vaut donc $T_{ideal}(s) = 1/H(s)$

3.4.3 Bode

Montage non-inverseur

Ce type de montage a pour fonction de transfert selon ω :

$$G(j\omega) = G_0 \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Et la rétroaction est :

$$\begin{aligned} H(s) &= \beta^{-1} \\ \frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{G(j\omega)}{1 + \beta^{-1}G(j\omega)} = \frac{1}{\beta^{-1}} \frac{\beta^{-1}G(j\omega)}{1 + \beta^{-1}G(j\omega)} \\ \Rightarrow T_{bf}(j\omega) &= \frac{1}{H} \frac{T_{bo}(j\omega)}{1 + T_{bo}(j\omega)} \end{aligned}$$

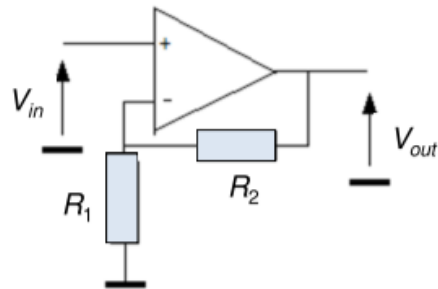


FIGURE 3.6 – Montage non-inverseur

Donc on a une fonction constante jusqu'à ω_0 et qui décroît de 20 dB par décade et tombe à 0 à $\omega = GBW$. GBW correspond au **Gain BandWidth** qui est une caractéristique propre à l'ampli-op.

Il est impossible de réaliser un montage non-inverseur de gain β à une fréquence supérieure à GBW/β .

$$\omega_{0,bf} T_{0,bf} = \omega_{0,bf} \beta = \omega_0 G_0$$

Montage inverseur

Ce type de montage a pour fonction de transfert selon ω :

$$G(j\omega) = G_0 \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$$

Pour établir la rétroaction $H(s)$ cela est plus compliqué et moins direct

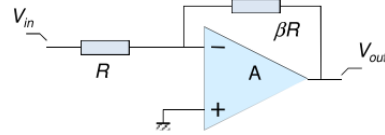


FIGURE 3.7 – Montage inverseur

$$V_{in} - V_- = \frac{V_- - V_{out}}{\beta} \quad V_{out} = -G(j\omega)V_- \quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}}{1 + \beta + G_0 \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}}$$

Ceci nous donne donc un rapport de tension :

$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{G_0 \beta}{1 + \beta + G_0} \frac{1}{1 + \frac{j\omega(1+\beta)}{(1+\beta+G_0)\omega_0}} \\ &\cong \frac{G_0 \beta}{1 + \beta + G_0} \frac{1}{1 + \frac{j\omega G_0 \beta}{(1+\beta+G_0)G_0 \omega_0}} \equiv T_{0,bf} \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0 G_0 / T_{0,bf}}} \\ \omega_{0,bf} &= \frac{\omega_0 G_0}{|T_{0,bf}|} = \frac{\omega_0 G_0}{\beta} \Rightarrow \beta \omega_{0,bf} = GBW \end{aligned}$$

Il est impossible de réaliser un montage non-inverseur de gain β à une fréquence supérieure à GBW/β .

Produit amortisseur-fréquence de coupure (second ordre)

On a une expression du gain en boucle ouverte du second ordre typique :

$$G(j\omega) = G_0 \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Si on est en **boucle fermée**, le produit invariant est $\xi\omega_0$:

$$\xi_{bf} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + G_0}} \quad \omega_{0,bf} = \omega_0 \sqrt{1 + G_0}$$

Il faut bien régler l'amortissement car on peut soit rendre le système *sur amorti* et donc oscillatoire amorti ou bien *sous amorti* et le système est trop réactif donc instable.

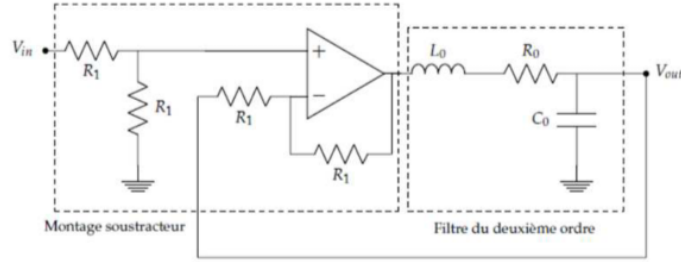


Fig. 6.10 – Circuit complet.

Dans ce circuit, on considère que la fonction de transfert du filtre du second ordre est le gain en boucle ouverte $G_{bo}(j\omega)$ du système, et que le montage soustracteur permet d'amener un feedback sur le filtre.

2. Calculez la fonction de transfert du circuit complet.
3. Montrez que le produit entre le facteur d'amortissement et la fréquence de coupure du circuit en boucle fermée est égal à celui en boucle ouverte.

Solution brève :

- 1) $\frac{V_{out}}{V_{in}}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega)R_0C_0 + (j\omega)^2L_0C_0}$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$ et $\zeta_0 = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$.
- 2) $T_{bf}(j\omega) = \frac{1}{1 + \zeta_0 \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$.
- 3) $\zeta_1 = \frac{\zeta_0}{\sqrt{2}}$ et $\omega_1 = \sqrt{2}\omega_0$.

FIGURE 3.8 – Système complet

3.4.4 Conseils

On ne peut plus considérer que $V_{i+} = V_{i-}$, on a que $\frac{V_o}{V_{i+} - V_{i-}}$ ce qui revient à :

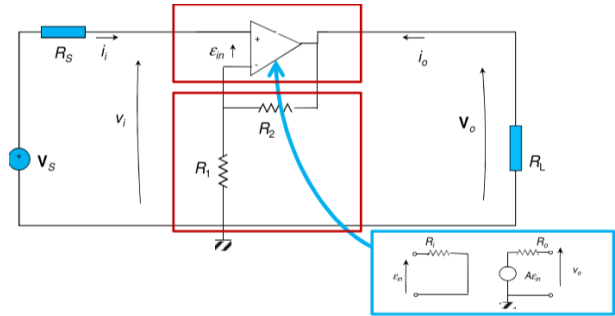
$$V_o = G(j\omega)(V_{in} - V_-) \quad (3.4)$$

3.5 Quadripôles

3.5.1 Rappels

On peut simplifier des montages avec des ampli-ops en quadripôles. On remplace donc le montage en rouge ci-contre par le quadripôle en bleu.

Donc on les utilise lorsqu'on fait des opérations sur des signaux avec une idée de *input* et *output*. Un **accès** implique 2 bornes. Pour un **dipôle** c'est simplement Thévenin et Norton (1.1.2). Pour un **quadripôle** à deux accès, on réalise des représentations *équivalentes* **Y**, **Z**, **G**, **H** (on ne peut pas avoir de sources indépendantes).



Quadripôle

Les conditions :

- Pas de source indépendante interne
- Deux accès
- On impose une des deux bornes avec une source de tension

Équivalence

Entre les 4 représentations, on a une équivalence et on ignore la structure et les variables internes. Il existe également des relations transitives comme ci-dessous.

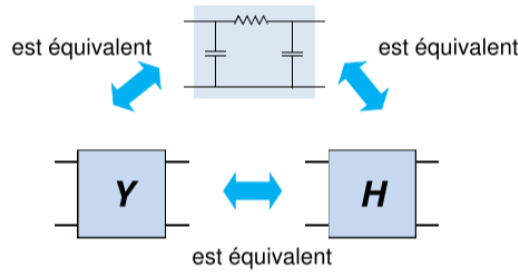
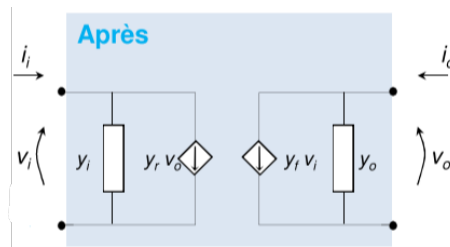


FIGURE 3.9 – Solution transitive au milieu

3.5.2 L'équivalence

On va toujours essayer de transformer un circuit complexe en un circuit quadripôles comme ci-dessous.



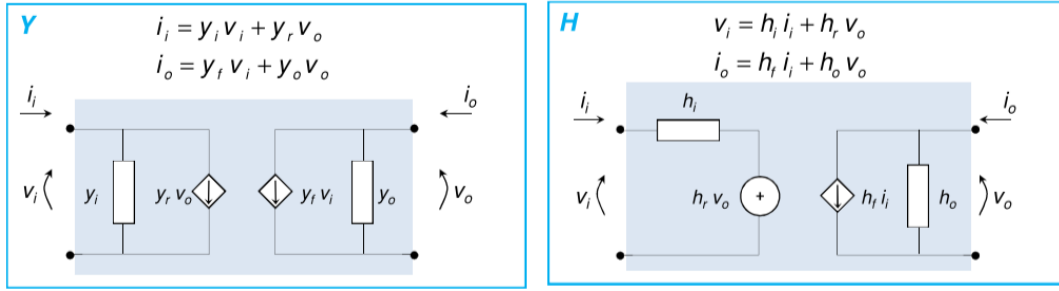
Représentation	Formule	Définition
Y Admittances (transadmittances)	$\begin{bmatrix} i_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_o \end{bmatrix}$	y_i : admittance d'entrée y_r : transadmittance inverse (<i>reverse</i>) y_f : transadmittance directe (<i>forward</i>) y_o : admittance de sortie
Z impédances (transimpédances)	$\begin{bmatrix} v_i \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i \\ i_o \end{bmatrix}$	z_i : impédance d'entrée z_r : transimpédance inverse (<i>reverse</i>) z_f : transimpédance directe (<i>forward</i>) z_o : impédance de sortie
G hybride	$\begin{bmatrix} i_i \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i & g_r \\ g_f & g_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ i_o \end{bmatrix}$	g_i : admittance d'entrée g_r : gain en courant g_f : gain en tension g_o : impédance de sortie
H hybride	$\begin{bmatrix} v_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i \\ v_o \end{bmatrix}$	h_i : impédance d'entrée h_r : gain en tension h_f : gain en courant h_o : admittance de sortie

Représentation via Kirchhoff

On peut voir les quadripôles comme des sources *imparfaites* :

- Courant + admittance parasite (type Norton)
- Tension + impédance parasite (type Thévenin)

- Source commandée : influence d'un accès sur l'autre
- Algèbre ou réseau de Kirchoff



Pour passer de **Y** à **Z** on passe de Norton à Thévenin et de **H** à **G** on passe de Norton à Thévenin pour la *droite* et de Thévenin à Norton pour la *gauche*.

3.5.3 Déterminer les coefficients

Par exemple, pour un système **Y**, on peut montrer par algèbre que :

$$y_i = \left. \frac{i_i}{v_i} \right|_{v_o=0}$$

$$i_i = y_i v_i + y_r v_o$$

En effet, en mettant les bornes de sortie en court circuit, on peut ainsi déterminer y_i . Ainsi, on fait passer un courant v_i qui est bien déterminé. On réalise des procédures similaires pour tous les coefficients.

Règle

1. Redessiner le schéma pour *chaque coefficient*.
2. Appliquer les conditions de définition.
3. Source de *test* pour la variable indépendante.
4. Déterminer la variable dépendante.
5. Calculer le coefficient.

3.5.4 Changement de représentation

Cette partie renvoie directement à l'image 3.5.1. Pour passer de **Y** à **H** on peut soit utiliser l'algèbre linéaire ou trouver des coefficients de **H** en partant de **Y**.

Algèbre linéaire

On connaît :

$$i_i = y_i v_i + y_r v_o$$

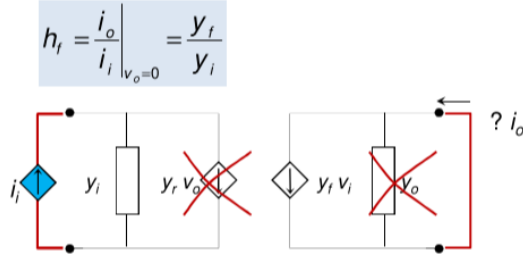
$$i_o = y_f v_i + y_o v_o$$

On veut trouver v_i et i_o en fonction de i_i et v_o :

$$v_i = h_i i_i + h_r v_o \quad i_o = h_f i_i + y_o v_o \quad [H] = \frac{1}{y_i} \begin{bmatrix} 1 & -y_r \\ y_f & \Delta^y \end{bmatrix}$$

Coefficients

On peut appliquer la règle de détermination des coefficients sur le schéma équivalent Y. On se rend compte qu'il faut utiliser la technique matricielle de temps en temps car peut vite être très lourde.



Conversion

$Z = \begin{bmatrix} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{bmatrix}$	$Z = \frac{1}{\Delta^y} \begin{bmatrix} y_o & -y_r \\ -y_f & y_i \end{bmatrix}$	$Z = \frac{1}{h_o} \begin{bmatrix} \Delta^h & h_r \\ -h_f & 1 \end{bmatrix}$	$Z = \frac{1}{g_i} \begin{bmatrix} 1 & -g_r \\ g_f & \Delta^g \end{bmatrix}$
$Y = \frac{1}{\Delta^z} \begin{bmatrix} z_o & -z_r \\ -z_f & z_i \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{bmatrix}$	$Y = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -h_r \\ h_f & \Delta^h \end{bmatrix}$	$Y = \frac{1}{g_o} \begin{bmatrix} \Delta^g & g_r \\ -g_f & 1 \end{bmatrix}$
$H = \frac{1}{z_o} \begin{bmatrix} \Delta^z & z_i \\ -z_f & 1 \end{bmatrix}$	$H = \frac{1}{y_i} \begin{bmatrix} 1 & -y_r \\ y_f & \Delta^y \end{bmatrix}$	$H = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix}$	$H = \frac{1}{\Delta^g} \begin{bmatrix} g_o & -g_r \\ -g_f & g_i \end{bmatrix}$
$G = \frac{1}{z_i} \begin{bmatrix} 1 & -z_r \\ z_f & \Delta^z \end{bmatrix}$	$G = \frac{1}{y_o} \begin{bmatrix} \Delta^y & y_r \\ -y_f & 1 \end{bmatrix}$	$G = \frac{1}{\Delta^h} \begin{bmatrix} h_o & -h_r \\ -h_f & h_i \end{bmatrix}$	$G = \begin{bmatrix} g_i & g_r \\ g_f & g_o \end{bmatrix}$

$$Z = Y^{-1}$$

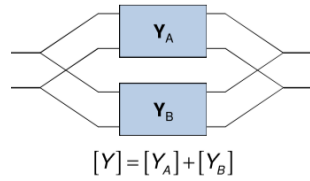
$$Y = Z^{-1}$$

$$G = H^{-1}$$

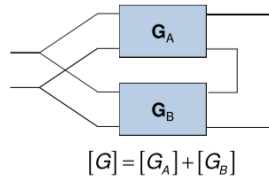
$$H = G^{-1}$$

3.5.5 Association de quadripôle

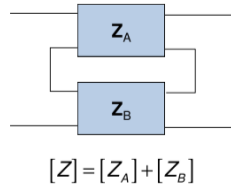
▪ Connexion parallèle / parallèle



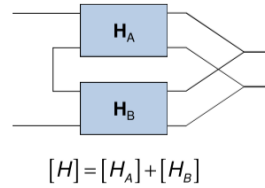
▪ Connexion parallèle / série



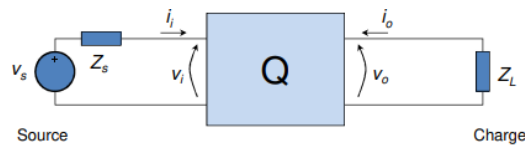
▪ Connexion série / série



▪ Connexion série / parallèle



3.5.6 Quadripôle chargé



C'est un quadripôle qui est entre une source v_s avec Z_s et une charge Z_L . De plus, on connaît une de ses représentations.

On doit avoir une relation entre les variables externes en présence de Z_s et Z_L . Il en existe 4 :

1. Impédance d'entrée Z_{in} : coefficient de i_i dans l'expression de v_i , $Z_{in} = \frac{v_i}{i_i}$, dépend de Z_L .
2. Impédance de sortie Z_{out} : coefficient de i_o dans l'expression de v_o , $Z_{out} = \frac{v_o}{i_o}$, dépend de Z_s .
3. Gain en tension direct A_{vf} : coefficient de v_i dans l'expression de v_o , $A_{vf} = \frac{v_o}{v_i}$, dépend de Z_L .
4. Gain en courant direct A_{if} : coefficient de i_i dans l'expression de v_o , $A_{if} = \frac{v_o}{i_i}$, dépend de Z_L .

On peut voir que A_{vf} , A_{if} et Z_{in} dépendent de Z_L , on a une répétition.

Pour déterminer les **caractéristiques externes** :

- On met une source de test pour la variable indépendante à l'un des accès
- On charge l'autre accès par l'impédance correspondante (Z_s ou Z_L)
- On détermine la variable *dépendante*
- On calcule le coefficient

Pour trouver Z_{out} on impose que $v_s = 0$.

		Y	Z	H	G
$y_r, z_r, h_r, g_r = 0$	Λ_{i0}	$-y_f z_L \left(\frac{1}{1+y_o z_L} \right)$	$\frac{z_f z_L}{z_i z_L + z_o}$	$-\frac{h_f z_L}{h_i} \frac{1}{1+h_o z_L}$	$g_f \frac{z_L}{z_L + g_o}$
$y_r, z_r, h_r, g_r \neq 0$	Λ_{vf}	Λ_{vf0}	$\frac{\Lambda_{vf0}}{1 - \frac{z_f}{z_L} \Lambda_{vf,0}}$	$\frac{\Lambda_{vf,0}}{1 + h_r \Lambda_{vf,0}}$	Λ_{vf0}
$y_r, z_r, h_r, g_r = 0$	Λ_{f0}	$\frac{y_f}{y_i} \frac{1}{1+y_o z_L}$	$-\frac{z_f}{z_o + z_L}$	$h_f \left(\frac{1}{1+h_o z_L} \right)$	$-\frac{g_f}{g_i} \frac{1}{z_L + g_o}$
$y_r, z_r, h_r, g_r \neq 0$	Λ_{if}	$\frac{\Lambda_{if,0}}{1 - \frac{y_f}{z_L} \Lambda_{if,0}}$	Λ_{if0}	Λ_{if0}	$\frac{\Lambda_{if,0}}{1 + g_r \Lambda_{if,0}}$
	Z_{in}	$\frac{1}{y_i} \frac{1}{1 + \frac{y_r}{y_i} \Lambda_{vf,0}}$	$z_i \left(1 + \frac{z_f}{z_i} \Lambda_{if,0} \right)$	$h_i (1 + h_r \Lambda_{vf,0})$	$\frac{1}{g_i} \frac{1}{1 + g_r \Lambda_{if,0}}$
	Z_{out}	$\frac{1}{y_o - y_r \frac{y_f z_G}{1 + y_i z_G}}$	$z_o - z_r \frac{z_f}{z_G + z_i}$	$\frac{1}{h_o - h_r \frac{h_f}{z_G + h_i}}$	$g_o - g_r \frac{g_f z_G}{1 + g_i z_G}$
	Λ_{pl0}	$y_f^2 z_L \frac{1}{y_i (1 + y_o z_L)^2}$	$z_f^2 z_L \frac{1}{z_i (z_o + z_L)^2}$	$h_f^2 z_L \frac{1}{h_i (1 + h_o z_L)^2}$	$g_f^2 z_L \frac{1}{g_i (g_o + z_L)^2}$

FIGURE 3.10 – Table des caractéristiques externes

Chapitre 4

Puissance

4.1 Instantanée, moyenne et effective

4.1.1 Instantanée

Une puissance est générée par le déplacement d'une charge dq d'un point A vers B. On voit cela comme une énergie *potentielle*. Donc au point X cela vaut dqV_X . Le déplacement crée un [Travail](#) (*Work*) : $dW = dq(V_A - V_B)$. On fait un *échange* de puissance avec le monde extérieur :

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}(V_A - V_B) = iv$$
$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{Peut dépendre du temps}$$

Dans les normes de ce cours, un dipôle **absorbe** de la puissance si le courant et la tension sont positifs ou négatifs.

On stocke cette énergie sous 2 forme.

1. Stocké sous forme d'énergie électrostatique (ex : capacité)
2. Stocké sous forme d'énergie magnétique (ex : inductance/self)

Et on dissipe la puissance sous forme de chaleur pour une résistance ou en énergie mécanique pour un moteur électrique.

On dit qu'on **fournit** de la puissance si la tension est négative et le courant positif ou inversement. Donc on doit **générer** une puissance depuis une autre source (*générateur de tension, capacité se vidant, ...*)

4.1.2 Moyenne

Dans une résistance, la puissance est **toujours positive**. En effet, une résistance ne peut fournir de la puissance donc sa puissance moyenne est toujours positive.

Son voltage vaut : $v(t) = Ri(t)$ et sa puissance [instantanée](#) vaut donc $p(t) = Ri^2(t)$ donc $p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$. La puissance moyenne se calcule via :

$$P_{moy} \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2(t)dt$$

le T correspond à une *période* de notre signal d'entrée (alimentation).

4.1.3 Valeur efficace

Courant

Pour le courant *continu*, on le nomme I_{eff} . Ainsi, la **puissance dissipée** dans la résistance vaut donc $RI_{eff}^2 = P_{moy}$.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{P_{moy}}{R}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt}$$

Tension

La tension *continu*, on la nomme V_{eff} . Ainsi, la **puissance dissipée** dans la résistance $V_{eff}^2/R = P_{moy}$.

$$V_{eff} = \sqrt{RP_{moy}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt}$$

4.1.4 Courant sinusoïdal

Si on a une pulsation de ω et une valeur de **crête** de I_{max} et non déphasé, notre courant vaut :
 $i(t) = I_{max} \cos(\omega t)$
Toujours avec une *résistance*, sa puissance vaut donc :

$$\begin{aligned} p(t) &= RI_{max}^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{RI_{max}^2}{2} (\cos(2\omega t) + 1) \\ &= P_{moy} (\cos(2\omega t) + 1) \\ P_{moy} &= \frac{RI_{max}^2}{2} = R \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Pour ce type de courant et tension, on peut établir ces égalités :

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \qquad V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Impédance quelconque

On a une valeur de crête I_{max} et V_{max} qui ont la même pulsation de ω et une phase de φ_i et φ_v respectivement.

La puissance instantanée s'obtient ainsi :

$$p(t) = V_{max} I_{max} \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} [\cos(\varphi_v - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)]$$

On voit bien qu'on a donc un terme **constant** à gauche et un terme qui **fluctue** à droite en fonction de la pulsation 2ω

Ainsi, la puissance moyenne (par la propriété des cosinus) vaut le terme **constant** :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos(\varphi_v - \varphi_i) = V_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

4.2 Puissance active, réactive et apparente

4.2.1 Impédance quelconque

On va tout d'abord transformer notre courant *sinusoïdal* en phaseur : $\bar{I} = I_{max}e^{j\varphi_i}$
Comme nous sommes en impédance quelconque, cela signifie que : $\bar{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$ petit rappel :

$$\begin{array}{lll} X = \omega L & \varphi = \text{atan}\left(\frac{X}{R}\right) & R = Z\cos(\varphi) \\ X = -\frac{1}{\omega C} & Z = \sqrt{R^2 + X^2} & X = Z\sin(\varphi) \end{array}$$

Donc on peut en tirer ces équations en régime permanent :

$$\begin{array}{lll} \bar{V} = \bar{Z}\bar{I} = ZI_{max}e^{j(\varphi_i + \varphi)} & \Rightarrow & \bar{V} = V_{max}e^{j\varphi_v} \\ v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} & \Rightarrow & v(t) = ZI_{max}\cos(\omega t + \varphi_i + \varphi) \\ & & i(t) = C\frac{d}{dt}[v(t) - Ri(t)] \end{array}$$

La puissance instantanée vaut donc :

$$\begin{array}{ll} p(t) = v(t)i(t) & p(t) = V_{eff}I_{eff}(\cos(\varphi_v - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i)) \\ p(t) = ZI_{eff}^2(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi + 2\varphi_i)) & p(t) = RI_{eff}^2 + V_{eff}I_{eff}\cos(2\omega t + \varphi + 2\varphi_i) \end{array}$$

Puissance active

La puissance moyenne nous indique la puissance fournit au dipôle mais la puissance **active** indique un échange **unidirectionnel** de l'énergie entre la source et une charge (par exemple la résistance ici)

$$P \triangleq V_{eff}I_{eff}\cos(\varphi) = RI_{eff}^2 \quad (4.1)$$

Puissance apparente

Son amplitude de la composante est fluctuante et s'écrit S en **Volt ampère** :

$$S \triangleq V_{eff}I_{eff} = ZI_{eff}^2$$

Puissance réactive

Traduit un échange **bidirectionnel** d'énergie entre une source et une charge (donc ici stocké et transmis depuis la *réactance* X). Cela s'écrit Q en **Volt ampère réactif**. On ne peut utiliser cela que en régime **sinusoïdal** :

$$Q \triangleq V_{eff}I_{eff}\sin(\varphi) = XI_{eff}^2 \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

4.2.2 Résistance pure - Courant imposé

Ainsi, notre tension en régime permanent est parallèle au courant comme suit :

$$\begin{array}{lll} \bar{V} = R\bar{I} & \bar{V} = V_{max}e^{j\varphi_v} & (V_{max} = RI_{max}, \quad \varphi_v = \varphi_i) \\ v(t) = Ri(t) & v(t) = RI_{max}\cos(\omega t + \varphi_i) & \end{array}$$

Puissance active	Puissance apparente	Puissance réactive	Propriété
$P = RI_{eff}^2$	$S = RI_{eff}^2$	$Q = 0$	$S = P$

4.2.3 Inductance pure - Courant imposé

Comme notre phase de la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension, notre tension instantanée va valoir :

$$p(t) = \omega L I_{eff}^2 \cos\left(2\omega t + 2\psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.2)$$

Puissance active	Puissance apparente	Puissance réactive	Propriété
$P = 0$	$S = \omega L I_{eff}^2$	$Q = \omega L I_{eff}^2$	$S = Q$

4.2.4 Capacité pure - Courant imposé

Comme notre phase de la tension est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension, notre tension instantanée va valoir :

$$p(t) = \frac{I_{eff}^2}{\omega C} \cos\left(2\omega t + 2\psi_i - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.3)$$

Puissance active	Puissance apparente	Puissance réactive	Propriété
$P = 0$	$S = \frac{I_{eff}^2}{\omega C}$	$Q = -\frac{I_{eff}^2}{\omega C}$	$S = Q $

4.2.5 Admittance quelconque - Tension Imposée

Ici, on va imposer la tension et donc seulement valable en sinusoïdal :

$$p(t) = Y V_{eff}^2 (\cos\varphi + \cos(2\omega t + 2\psi_i + \varphi)) \quad (4.4)$$

Puissance active	Puissance apparente	Puissance réactive	Propriété
$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$	$S = V_{eff} I_{eff}$	$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\varphi)$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

4.2.6 Capacité Pure - Tension imposée

Ainsi notre puissance est :

$$p(t) = \omega C V_{eff}^2 \cos\left(2\omega t + 2\psi_i - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.5)$$

Puissance active	Puissance apparente	Puissance réactive	Propriété
$P = 0$	$S = \omega C V_{eff}^2$	$Q = -\omega C V_{eff}^2$	$S = Q $

4.3 Puissance complexe et bilan de puissance

4.3.1 Puissance complexe

On définit la puissance complexe comme \bar{S} .

$$\bar{S} \triangleq P + jQ = \frac{1}{2} \overline{VI}^* \quad (4.6)$$

On réalise cela à partir d'une **impédance** \bar{Z} tel que

$$\bar{S} = \bar{Z} I_{eff}^2 \quad \text{et} \quad \bar{S} = (Z \cos(\varphi) + j Z \sin(\varphi)) I_{eff}^2 \quad (4.7)$$

Ou à partir d'une **admittance** \bar{Y} :

$$\bar{S} = \bar{Y} V_{eff}^2 \quad \text{et} \quad \bar{S} = (Y \cos(\varphi) + j Y \sin(-\varphi)) V_{eff}^2 \quad (4.8)$$

Ainsi, la puissance active et réactive sont tels que :

$$P = \Re\{\bar{S}\} = \frac{1}{2} \Re\{\overline{VI}^*\} \quad Q = \Im\{\bar{S}\} = \frac{1}{2} \Im\{\overline{VI}^*\}$$

4.3.2 Bilan de puissance

En principe, le bilan de puissance à un noeud doit être nul. Ainsi, on a une **conservation** de la puissance **active** et **réactive** :

$$\begin{array}{lll} \Re \left\{ \sum \bar{S} \right\} = 0 & \sum \Re \{ \bar{S} \} = 0 & \sum P = 0 \\ \Im \left\{ \sum \bar{S} \right\} = 0 & \sum \Im \{ \bar{S} \} = 0 & \sum Q = 0 \end{array}$$

4.4 Facturation de la puissance consommée

Résidentiel

On paye à l'année l'énergie consommée :

$$E = \int_0^{h_{annee}} p(t) dt \quad [kWh] \quad (4.9)$$

On ne tient compte de la puissance **moyenne** donc seulement de l'*active*.

Industriel

On tient compte de la puissance active **et** réactive.

4.5 Compensation de la puissance réactive et Adaptation d'impédance

4.5.1 Compensation de la puissance

On va essayer d'annuler le déphasage φ car c'est lui qui cause une puissance réactive. On va utiliser des inductances et capacité qui s'annulent mutuellement. C'est une sorte de circuit *résonant* :

$$\omega C V_{ch_{eff}}^2 = \frac{V_{ch_{eff}}^2}{\omega L_{ch}} \quad (4.10)$$

4.5.2 Adaptation d'impédance

On va essayer de maximiser la puissance *active* transmise de la source à la charge. On va donc modifier la charge \bar{Z} .

Résistance - Cas particulier

On sait que $\bar{Z} = R + jX$ et $X = 0$. On a notre tension à la source \bar{V}_{th} et la résistance de la source R_{th} .

$$\begin{aligned} P &= R \frac{V_{th}^2}{(R + R_{th})^2 + X^2} & dP &= \frac{\partial P}{\partial R} dR + \frac{\partial P}{\partial X} dX = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial R} &= V_{th}^2 \left(\frac{(R + R_{th})^2 + X^2 - 2R(R + R_{th})}{((R + R_{th})^2 + X^2)^2} \right) = 0 & \frac{\partial P}{\partial X} &= V_{th}^2 \left(\frac{2X}{((R + R_{th})^2 + X^2)^2} \right) = 0 \\ &= V_{th}^2 \left(\frac{R_{th}^2 - R^2 + X^2}{((R + R_{th})^2 + X^2)^2} \right) = 0 \rightarrow R = R_{th} & X &= 0 \\ \bar{Z} &= R_{th} & P &= \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} = \frac{P_{source}}{2} \end{aligned}$$

Donc pour être le plus optimal on devrait avoir le rendement suivant :

$$\eta = \frac{P}{P_{source}} = 50\% \quad (4.11)$$

Cas général

Le même rendement η est présent tel que

$$\overline{Z} = \overline{Z_{th}}^* \quad (4.12)$$

Chapitre 5

Triphasé

5.1 Introduction

5.1.1 Source

Triphasé indique qu'on n'a pas une source mais **3 sources** de tensions ou de courants. Elles sont de :

- Même amplitude V_{max} et I_{max}
- Même fréquence ω
- Déphasé l'une de l'autre de $\frac{2\pi}{3}$

Ci-dessous, un système **direct** de tension :

$$\begin{cases} e_1 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v) \\ e_2 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v - \frac{2\pi}{3}) \\ e_3 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{E_1} = V_{max} e^{j\varphi_v} \\ \overline{E_2} = V_{max} e^{j\varphi_v - 2\pi/3} \\ \overline{E_3} = V_{max} e^{j\varphi_v - 4\pi/3} \end{cases}$$

Ci-dessous, un système **inverse** de tension :

$$\begin{cases} e_1 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v) \\ e_2 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v + \frac{2\pi}{3}) \\ e_3 = V_{max} \cos(\omega t + \varphi_v + \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{E_1} = V_{max} e^{j\varphi_v} \\ \overline{E_2} = V_{max} e^{j\varphi_v + 2\pi/3} \\ \overline{E_3} = V_{max} e^{j\varphi_v + 4\pi/3} \end{cases}$$

Les signaux s'annulent entre eux.

5.1.2 Connections

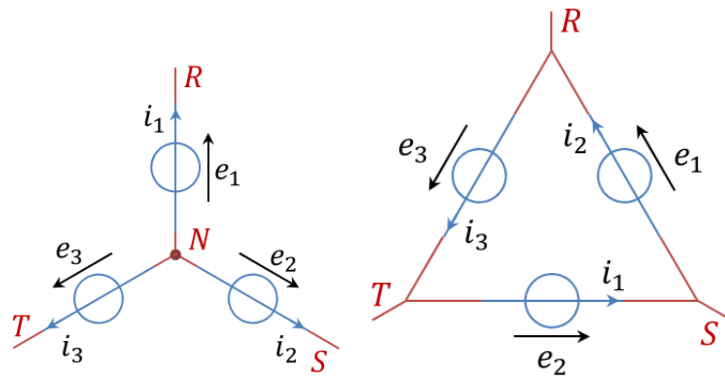
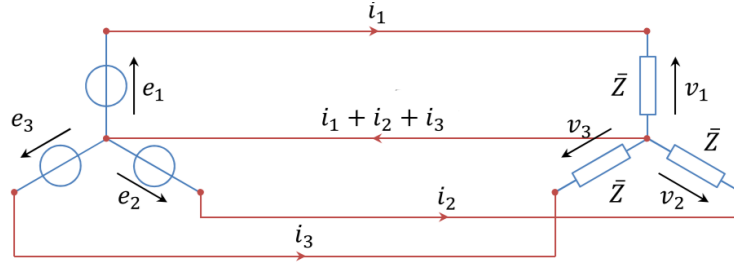


FIGURE 5.1 – à gauche : connection en étoile à droite : connection en triangle

On a l'apparition d'un point **neutre** N . Les tensions entre les points R,S et T sont les mêmes pour les deux formes.

Quand on y ajoute des charges, les tensions ne sont pas les mêmes pour les charges dans la formation triangles et étoiles.

Intérêt



On peut supprimer le fil $i_1 + i_2 + i_3$ qui peut être supprimé car via les propriétés du *triphase* le courant s'annulent.

5.1.3 Grandeurs de ligne

Ce sont les grandeurs mesurées au niveau de la liaison source/charge :

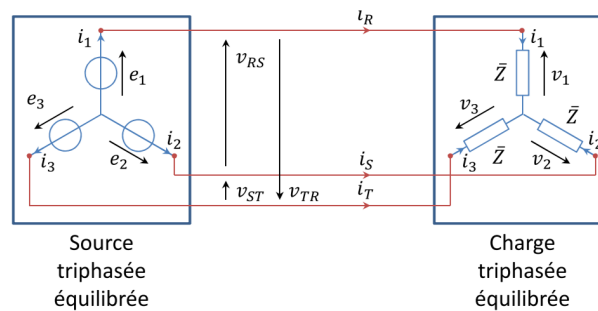
- Courants de ligne : courants i_R, i_S, i_T circulant dans les trois fils de liaison
- Tensions de ligne : tensions v_{RS}, v_{ST}, v_{TR} mesurées en prenant deux à deux les trois fils de liaison

5.1.4 Grandeurs de phase

Ce sont les grandeurs mesurées sur les éléments qui constituent la source et/ou la charge :

- Courants de phase : courant i_1, i_2, i_3 circulant dans les sources ou les impédances constituant la source ou la charge triphasée.
- Tensions de phase : tensions v_1, v_2, v_3 mesurées sur les sources ou les impédances constituant la source ou la charge triphasée.

Cas particulier - étoile



Dans le cas ci-dessus, le courant de ligne et de phase est le même. La tension de ligne est tel que $V_l = \sqrt{3}V_{ph}$ et sa phase $\phi_l = \phi_{ph} + \frac{\pi}{6}$

Si on a une formation en *triangle*, alors les courants de ligne et de phase sont différents entre eux.

$$V_l = \sqrt{3}V_{ph} \quad \varphi_l = \varphi_{ph} + \frac{\pi}{6} \quad I_l = I_{ph} \quad \varphi_l = \varphi_{ph}$$

Cas particulier - triangle

Ressemble au cas en étoile mais cette fois-ci :

$$V_l = V_{ph} \quad \varphi_l = \varphi_{ph} \quad I_l = \sqrt{3}I_{ph} \quad \varphi_l = \varphi_{ph} + \frac{\pi}{6}$$

5.1.5 Circuit équivalent monophasé

Puisque si nous possédons un circuit alimenté en **triphase équilibré** en régime sinusoïdal, nous pouvons déterminer le courant et la tension dans toutes les broches si nous connaissons ceux-ci pour **une seule phase**.

Donc on peut étudier un tel circuit sur base de son équivalent **monophasé**.

Mélange étoiles et triangles

Selon les conventions, le circuit en **monophasé** est le circuit équivalent **triphase** obtenu en prenant *une phase* du circuit triphasé et on remplace les **charges** et **sources** en leur équivalent étoile.

L'avantage est que les grandeurs de phase et de ligne sont les mêmes.

5.2 Transformation étoiles triangles

On peut toujours passer de l'un à l'autre.

$$Z_{etoile} = \frac{Z_{triangle}}{3} \quad V_{etoile} = \frac{V_{triangle}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

attention : on utilise un retard de tension si on a un système **direct** de tension donc avec $0, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$. Sinon on fait le signe opposé.

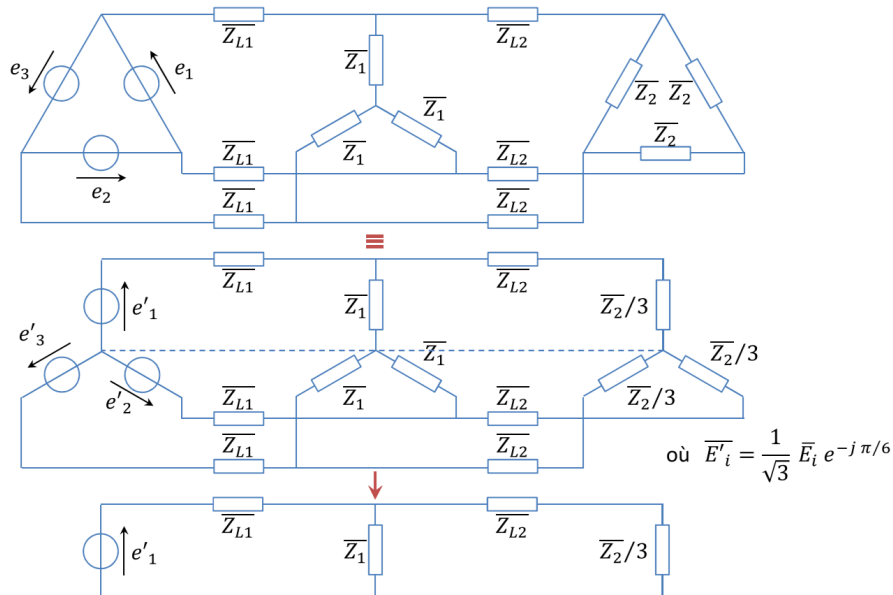


FIGURE 5.2 – Transformation et équivalent monophasé

5.2.1 Puissance

Puissance instantanée

Pour un circuit équivalent monophasé :

$$p = ei = P + S \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) \quad \begin{cases} P = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi) = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos(\phi) \text{ Puissance active} \\ S = V_{eff} I_{eff} = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \text{ Puissance apparente} \end{cases}$$

En triphasé :

$$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 = 3 V_{eff} I_{eff} \cos(\phi) = \frac{3}{2} V_{max} I_{max} \cos(\phi) = P \quad (5.1)$$

Puissance réactive

$$Q = 3 V_{eff} I_{eff} \sin(\phi) \quad (5.2)$$

Puissance apparente

$$S = 3 V_{eff} I_{eff} \quad (5.3)$$

Chapitre 6

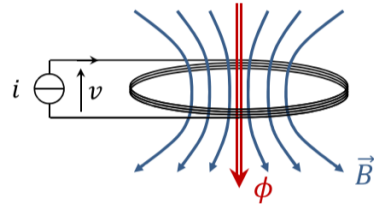
Circuits couplés magnétiquement

6.1 Introduction

6.1.1 Inductance

Si on a un bobinage, comme ci-contre, qui est formé de N spires et qu'on alimente d'une source de courant i . On génère ainsi un champ magnétique \vec{B} . Un certain flux ϕ traverse une spire. Ceci s'écrit $\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$. Le flux Φ sur le bobinage est $\Phi = N\phi$.

Si l'on considère le système sans **saturation magnétique**, on peut établir que $\Phi \propto i$. Ce facteur qui définit la **proportionnalité** est l'*inductance* L . $\Phi = Li$.



Loi de Faraday

La relation *tension-courant* aux bornes du bobinage est donnée par la loi de **Faraday** :

$$v = Ri + \frac{d\Phi}{dt} \text{ Loi de Faraday}$$

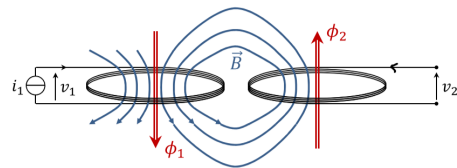
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ Loi de Lenz}$$

On peut négliger la *résistance* et simplifier la relation à juste $v = L \frac{di}{dt}$.

6.1.2 Inductances propre et mutuelle

Si nous avons 2 bobinages, on peut faire apparaître des courants *induits*. On va voir apparaître un courant et un champ magnétique opposé dans la deuxième partie.

Ces deux champs et flux magnétiques vont essayer de se "*tuer*". Cependant, les deux flux sont tels que $\Phi_1, \Phi_2 \propto i_1$.



$$\text{L'inductance propre : } L_1 = \frac{\Phi_1}{i_1}$$

$$\text{L'inductance mutuelle : } L_{21} = \frac{\Phi_2}{i_1}$$

$$\text{Faraday : } v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{Faraday : } v_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Double alimentation

Si maintenant, on alimente le circuit de droite et de gauche, on va obtenir un champ \vec{B} qui est le résultat de deux champs créés par les deux circuits dépendant de l'inductance propre et mutuelle.

Ces facteurs de proportionnalité se définissent comme les inductances **propres** et **mutuelles**.

$$\begin{aligned} L_1 &= \left. \frac{\Phi_1}{i_1} \right|_{i_2=0} & L_{12} &= \left. \frac{\Phi_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \\ L_2 &= \left. \frac{\Phi_2}{i_2} \right|_{i_1=0} & L_{21} &= \left. \frac{\Phi_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \end{aligned}$$

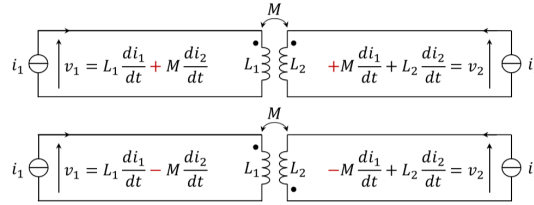
On peut établir que $L_{12} = L_{21} = M$. Via loi de Faraday :

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Si nous inversons le courant dans l'un des circuits, on aura donc deux flux en *parallèle*. Cela va créer une inversion de **norme** et donc rajouter des "-" devant les M .

6.1.3 Bornes homologues

On les repère par un *point* au niveau d'une borne d'un bobinage. Quand on alimente ces bobinages par cette borne, on génère un flux de même sens dans les différents bobinages. On a donc des tensions positives.



En sinusoïdale

Si on utilise des générateurs de courants/tensions sinusoïdaux, la définition devient :

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \qquad \bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

La réactance est $X = \omega L$.

6.2 Efficacité

6.2.1 Analyse énergétique

On stocke l'énergie sous forme **magnétique dans un bobinage**. Si on reprend le schéma 6.1.2, on peut réaliser une analyse de l'énergie. On imagine que le bobinage de droite est en **circuit ouvert**.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{t_1} (p_1(t) + p_2(t)) dt = \int_0^{t_1} v_1(t) i_1(t) dt \\ &= \int_0^{t_1} L_1 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) dt \\ &= \int_0^{i_1(t_1)} L_1 i_1(t) di_1(t) \\ E &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \end{aligned}$$

Si maintenant, on ferme le circuit à droite avec une source de courant I_2 . On a maintenant une énergie :

$$\begin{aligned} E &= \int_{t_1}^{t_2} (p_1(t) + p_2(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_1(t)I_1 + v_2(t)i_2(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(M \frac{di_2(t)}{dt} I_1 + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) \right) dt \\ &= \int_0^{i_2(t_2)} (MI_1 + L_2 i_2(t)) di_2(t) \\ E &= \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \end{aligned}$$

La simplification de v_1 et v_2 se repose sur le fait que notre circuit est à **l'équilibre** pour I_1 donc $\frac{di_1}{dt} = 0$. Ainsi :

$$v_1 = M \frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Ainsi, l'énergie magnétique totale stockée dans un tel système vaut :

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \quad (6.1)$$

Cette équation est valable uniquement si le courant est **entrant** ou **sortant** par les **bornes homologues** sinon :

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - MI_1 I_2 \quad (6.2)$$

Analyse

L'énergie dans le système **ne peut pas** être négative. Donc :

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - MI_1 I_2 \geq 0 \qquad L_1 L_2 \geq M^2$$

6.2.2 Facteur de dispersion et coefficient de couplage

Cas idéal

Il n'y a pas de flux de fuite et les flux sont *intégralement* captés par les deux bobinages. On parle d'un **couplage magnétique parfait**.

$$M^2 = L_1 L_2 \quad (6.3)$$

En réalité

On a toujours un flux de fuite entre les deux bobinages donc $M \neq L_1 L_2$.

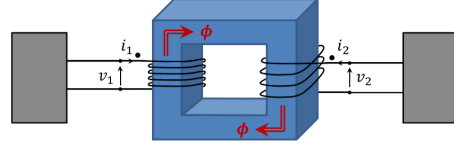
$$\text{Facteur de dispersion : } \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \qquad \text{Coefficient de couplage : } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Ici, $0 \leq \sigma \leq 1$ et $0 \leq k \leq 1$. Au plus σ est faible au mieux c'est. Au plus k est grand au mieux c'est.

6.3 Transformateur idéal

On couple deux bobinages à l'aide d'un entrefer pour ainsi rendre le transfert d'énergie optimale comme ci-contre.

On pose que la résistance électrique des bobinages nulle, pas de flux de fuite et perméabilité magnétique du circuit magnétique infinie. Via Faraday :



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.4)$$

On va maintenant réaliser la **loi d'Ampère** et on rajoute un parcours Γ qui passe dans l'entrefer et les deux bobinages.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} &= N i & \int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} &= N_1 i_1 + N_2 i_2 \\ 0 &= N_1 i_1 + N_2 i_2 & \frac{i_1}{i_2} &= -\frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

On peut supposer que l'énergie est finie et donc que $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$

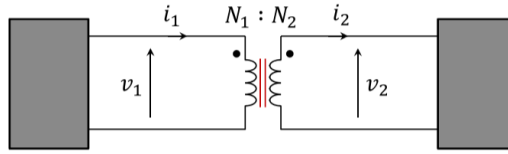
6.3.1 Analyse énergétique

Donc on a que :

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{Puissance équivalente : } p_1 = -p_2$$

La puissance entrante est la même que la puissance sortante.

6.3.2 Excitation sinusoïdale

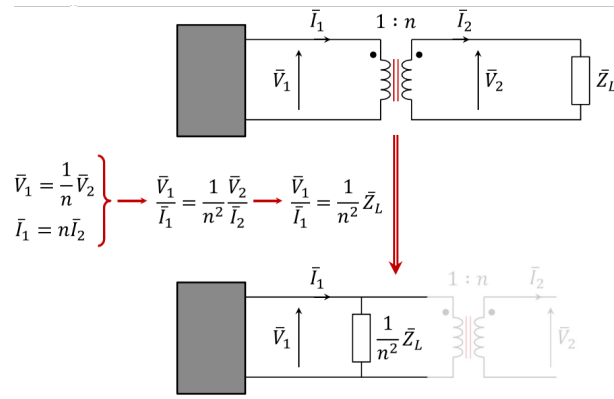


On peut ainsi travailler avec des *phaseurs*. On indique le nombre de spire comme sur le schéma ci-dessus $N_1 : N_2$. Un transformateur idéal est indiqué via c'est barres en parallèle devant les bobinages. Relation tensions, courants :

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{1}{n} \quad \frac{\overline{I_1}}{\overline{I_2}} = n \quad n = \frac{N_2}{N_1} \quad (6.5)$$

Manipulation

Quand on a ce type de circuit, on peut le transformer dans un modèle plus simple comme indiqué ci-dessous.



On peut réaliser ce type de changement car on suppose le transfert d'énergie comme idéal.
La manipulation de ce type de circuit se repose sur l'utilisation des formules vu à l'équation 6.5.

Chapitre 7

Transformée de Laplace

On va utiliser la transformée de Laplace *bilatérale* qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier en complexe et qui est plus général.

7.1 Équation différentielle avec Fourier

Si nous avons l'équation différentielle comme ci-contre, on va la transformer en équation dans le domaine **fréquentielle**.

On passe d'une équation différentielle à une équation algébrique plus simple à résoudre. Sa solution en fréquentielle est $A(\omega)$.

Donc on des *pôles* en $\pm k$.

On va appliquer le théorème des résidus pour intégrer sur $-\infty$ à ∞ en évitant les pôles. On fait une droite puis une demi arc de cercle.

Une propriété extrêmement utile est $df(t)/dt \rightarrow sF(s) - f(0)$.

Il faut aussi bien réduire en fraction simple.

$$\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + k^2 A(t) = \delta(t)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{k^2 - \omega^2}$$

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{j\omega t}}{\omega^2 - k^2} d\omega$$

$$A(t) = \frac{-2\pi j}{2\pi} \left(\frac{e^{jkt}}{2k} - \frac{e^{-jkt}}{2k} \right)$$

$$A(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$$

7.1.1 Résolution

Les calculs sont longs et méthodiques, au début, il faut ré-écrire toutes les équations différentielles. Une fois qu'on a qu'une seule variable dans cette équation, on remplace les dérivées par leur équivalent en Fourier unilatéral. Si on a un signal qui passe de 2 à 1 Volts, il faut noter $1u(t)$ avec $u(t)$ la fonction échelon. Cela est important puisque qu'on passe d'une équation différentielle à une analyse en continue.

N'hésitez pas à passer directement en transformée unilatérale après avoir écrit les équations de bases !

Chapitre 8

Stabilité et systèmes

On sait que la transformée de Laplace bilatérale est une transformée de Fourier pour $s = j\omega$ si la ROC contient $\sigma = 0$. On fait souvent référence à la transformée de Laplace unilatérale.

8.1 Transformée inverse de Laplace

On a une fonction $x(t) = e^{at}u(t)$ qui donne $X(s) = \frac{1}{s-a}$ sur $\Re(s) > a$. La transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{k-jT}^{k+jT} F(s)e^{st} ds \quad (8.1)$$

8.1.1 Stabilité

Un système est stable si **tous les pôles** de la fonction de **transfert** ont une partie réelle négative. Ainsi, quand on repasse en temporel, nos exponentielles sont bornées et n'exploseront pas.

8.2 Systèmes

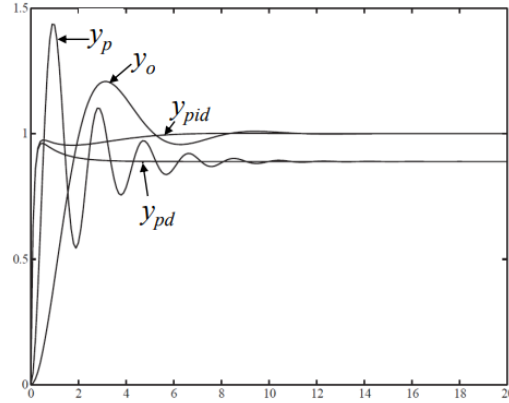
8.2.1 Boucle fermée

On va créer un chemin de retour pour minimiser l'erreur. Ainsi on peut comparer la valeur effective à la valeur recherchée. On a 3 types de régulateur :

1. P : proportionnel donc simplement $H(s) = K_1$
2. PD : proportionnel dérivé $H(s) = K_1 + K_3s$
3. PID : proportionnel intégrale dérivé $H(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3s$

Les pôles en proportionnel dérivée sont tous sur l'axe des réelles et les PID sont en partie proche de l'origine.

Soucis



On peut voir sur le schéma :

- y_0 : la réponse du système en boucle ouverte.
- y_p : la réponse du système avec un régulateur de type proportionnel. On constate un overshoot très important et une convergence vers une valeur qui n'est pas la valeur désirée (avec une stabilisation très oscillatoire, qui n'est pas en soi problématique en elle-même mais l'overshoot l'est).
- y_{pd} : la réponse du système avec un régulateur de type proportionnel dérivé. On constate un *overshoot* pratiquement nul, une stabilisation rapide mais pas vers la bonne valeur.
- y_{pid} : la réponse du système avec un régulateur de type proportionnel intégral dérivé. On constate qu'il n'y a pas d'overshoot, ça se stabilise très vite (plus vite que le système en boucle ouverte) vers la bonne valeur et c'est très stable. Un système PID est donc à privilégier de manière générale

8.2.2 Réponse à une harmonique infinie

Très proche d'un phaseur quand on fait le calcul :

$$g(t) = \Re\{H(s = j\omega_o)e^{j\omega_o t}\} \quad (8.2)$$

8.2.3 Réponse à une harmonique causale

Les pôles de la fonction de transfert sont responsable du transitoire et on a

$$g^h(t) = \Re\{H(s = j\omega_o)e^{j\omega_o t}\} \quad (8.3)$$

8.2.4 Décomposition en Harmonique

On peut séparer notre fonction en série de sinus et cosinus (série de Fourier) :

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ensuite, on peut voir le tout comme une sorte de convolution entre nos facteurs et un train de Dirac.

Chapitre 9

Mesure

9.1 Erreurs et incertitudes

9.1.1 Erreurs vs. incertitudes

Erreur

On nomme l'erreur comme e qui est observé quand on mesure une valeur x et son résultat réelle ξ .

L'erreur relative e_r est le rapport entre l'erreur absolue e et la valeur vraie ξ .

L'erreur e peut avoir une composante **systématique** δ et une composante **aléatoire** ϵ .

$$e \triangleq x - \xi \qquad e_r \triangleq \frac{e}{\xi} \qquad e = \delta + \epsilon \qquad (9.1)$$

Incertitudes

C'est une *estimation* de l'erreur **maximale** commise lors de la mesure. C'est donc un intervalle autour de la mesure avec une certaines probabilités où la valeur vraie se trouve.

9.1.2 Origine des erreurs

Elles proviennent des instruments de mesures, de RLC cachés. Pour contrer les RLC cachés, on peut les inclure de manière explicite à notre circuit ou les annuler.

Le bruit électrique est aussi un facteur. On peut changer de composants qui génèrent moins de bruit.

On peut aussi faire une moyenne sur différentes mesures.

L'interférence électrique est aussi un souci. On peut la diminuer via un blindage, filtrage ou un calcul des valeurs moyennes.

On observer aussi une variation de l'efficacité en fonction de la température des composants. Et certains composants peuvent différer des valeurs promises.

Puissance prélevé par la mesure

On va toujours essayer d'éviter les résistances en série. On probe toujours aux bornes de la résistances et non plus loin pour éviter de prendre en compte la résistivité des fils.

Haute fréquence

On utilise des câbles coaxiaux qui sont composés d'une âme qui n'est autre que le câble transportant le courant et d'une gaine. La gaine est une sorte de capacité mise en parallèle. Cela nous évite un pôle à $160Hz$.

On utilise des câbles triaxiaux qui ont aussi une âme et une gaine mais possède une **garde** en plus. Cette garde est couplé à un suiveur pour obtenir un signal plus idéal.

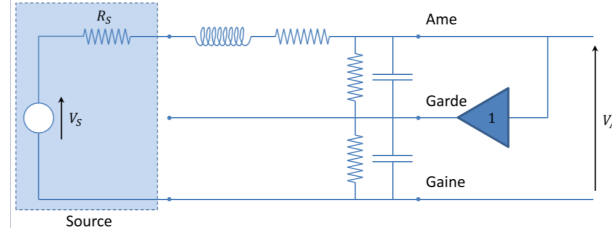


FIGURE 9.1 – Représentation d'un câble triaxial

9.1.3 Éléments de statistique

Via nos équations précédentes (9.1) on peut établir que la valeur mesurée vaut $x = \xi + \delta + \epsilon$. Ceci suit une loi **normal** de $N(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = \xi + \delta$.

On dit qu'une mesure est reproductible si on a un écart type σ faible donc un erreur aléatoire ϵ faible.

La mesure exacte est la valeur moyenne μ proche de la valeur vraie ξ , donc une erreur systématique δ faible.

Étalonnage

On va essayer de supprimer l'erreur *systématique* δ . La valeur 2σ correspond à l'incertitude absolue.

9.1.4 Opérations arithmétiques sur les incertitudes

Si on a deux mesures A et B qui n'ont aucune erreur systématique. De plus, ϵ_A et ϵ_B sont purement aléatoires et indépendantes.

$$\begin{cases} x_A = \epsilon_A + \xi_A & \text{suivant la loi normal } N(0, \sigma_A^2) \\ x_B = \epsilon_B + \xi_B & \text{suivant la loi normal } N(0, \sigma_B^2) \end{cases} \quad (9.2)$$

La grandeur $Y = A \pm B$ à une caractéristique :

$$x_Y = \xi_A \pm \xi_B + \epsilon_Y \quad \text{suivant la loi normal } N(0, \sigma_Y^2) \quad (9.3)$$

Et donc $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$.

La grandeur $Y = A * B$ à une caractéristique :

$$\begin{aligned} x_Y &\approx \xi_A * \xi_B * \left(1 + \frac{\epsilon_A}{\xi_A} + \frac{\epsilon_B}{\xi_B}\right) \\ &\approx \xi_A * \xi_B + \epsilon_Y \text{ suivant la loi normal } N(0, \sigma_Y^2) \\ \sigma_Y &= \xi_A * \xi_B \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{\xi_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{\xi_B}\right)^2} \end{aligned}$$

La grandeur $Y = A/B$ à les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} x_Y &\approx \frac{\xi_A}{\xi_B} * \left(1 + \frac{\epsilon_A}{\xi_A} - \frac{\epsilon_B}{\xi_B}\right) \\ &\approx \frac{\xi_A}{\xi_B} + \epsilon_Y \text{ suivant la loi normal } N(0, \sigma_Y^2) \\ \sigma_Y &= \frac{\xi_A}{\xi_B} \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{\xi_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{\xi_B}\right)^2} \end{aligned}$$

9.2 Ponts pour la mesure d'impédance

9.2.1 Principe

Les comparaisons sont beaucoup plus précises que des mesures absolues. Cela est utile pour les voltmètre numérique.

9.2.2 Utilisation

Mesure absolue de résistances par rapport à un standard. Cela est exacte à moins de 100 ppm près. On peut mesurer de faibles variations de résistance. On peut même mesurer des impédances.

9.2.3 Pont de Wheatstone

On mesure des petite variations de résistances et on réalise des mesures absolues de résistance. On peut ainsi établir la fonction de transfert H_W :

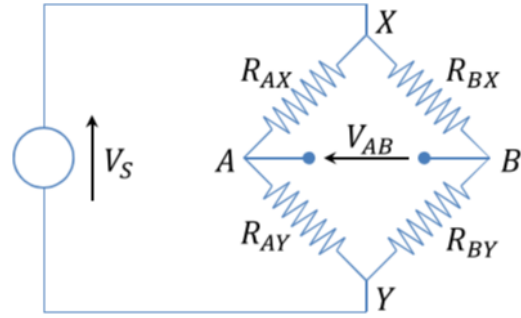
$$H_W = \frac{V_{AB}}{V_S} = \frac{R_{AY}}{R_{AX} + R_{AY}} - \frac{R_{BY}}{R_{BX} + R_{BY}}$$

Ainsi, on peut réaliser 2 modes bien spécifiques, observer des faibles modifications :

$$\begin{aligned} R_{AX} &= (1 + \alpha)R \\ R_{AY} &= R_{BX} = R_{BY} = R \\ H_W &= -\frac{\alpha}{2(2 + \alpha)} \end{aligned}$$

Ou bien de faire des mesures absolues :

$$\begin{aligned} H_W &= V_{AB} = 0 \\ R_{BX} &= R_{BY} \\ R_{AX} &= R_{AY} \end{aligned}$$



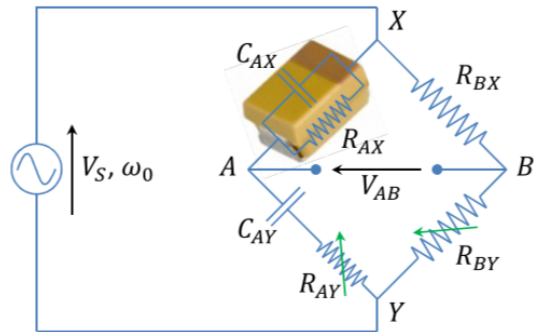
9.2.4 Pont de Wien

Ressemble très fort au pont de Wheatstone. Il faut bien remarquer le courant **AC** en entrée et pas DC. On a ces équations pour la fonction de transfert.

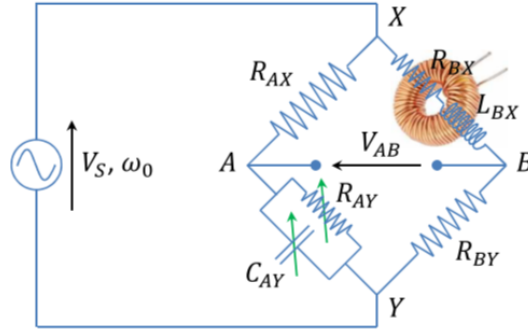
$$\begin{aligned} H_W &= \frac{V_{AB}}{V_S} = \frac{Z_{AY}}{Z_{AY} + Z_{AX}} - \frac{R_{BY}}{R_{BX} + R_{BY}} \\ \begin{cases} \frac{1}{Z_{AX}} &= \frac{1}{R_{AX}} + j\omega_0 C_{AX} \\ Z_{AY} &= R_{AY} + j\frac{1}{\omega_0 C_{AY}} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour mesurer, on veut que $H_W = V_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{Z_{AY}}{Z_{AX}} &= \frac{R_{BY}}{R_{BX}} \Rightarrow \frac{R_{AY}}{R_{AX}} + \frac{C_{AX}}{C_{AY}} + j \left(\omega_0 R_{AY} C_{AX} - \frac{1}{\omega_0 R_{AX} C_{AY}} \right) = \frac{R_{BY}}{R_{BX}} \\ \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} &= \frac{R_{BX}}{R_{BY}} \left(R_{AY} + \frac{1}{(\omega_0 C_{AY})^2 R_{AY}} \right) \\ C_{AX} &= \frac{1}{\omega_0^2 C_{AY} R_{AY} R_{AX}} \end{cases} \end{aligned}$$



9.2.5 Pont de Maxwell



Même idée que le pont de Wien mais pour les inductances, on va placer l'inductance sur l'autre côté.

$$H_W = \frac{V_{AB}}{V_S} = \frac{Z_{AY}}{Z_{AY} + R_{AX}} - \frac{R_{BY}}{R_{BY} + Z_{BX}}$$

$$\begin{cases} Z_{BX} = R_{BX} + j\omega_0 L_{BX} \\ \frac{1}{Z_{AY}} = \frac{1}{R_{AY}} - j\omega_0 C_{AY} \end{cases}$$

Et pour mesurer l'inductance on veut que $H_W = V_{AB} = 0$ donc :

$$\frac{R_{AX}}{Z_{AY}} = \frac{Z_{BX}}{R_{BY}} \Rightarrow \frac{R_{AX}}{R_{AY}} + j\omega_0 R_{AX} C_{AY} = \frac{R_{BX}}{R_{BY}} + j\frac{\omega_0 L_{BX}}{R_{BY}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{BX} = R_{BY} \frac{R_{AX}}{R_{AY}} \\ L_{BX} = R_{BY} C_{AY} R_{AX} \end{cases}$$

9.2.6 Impédances parasites en parallèle

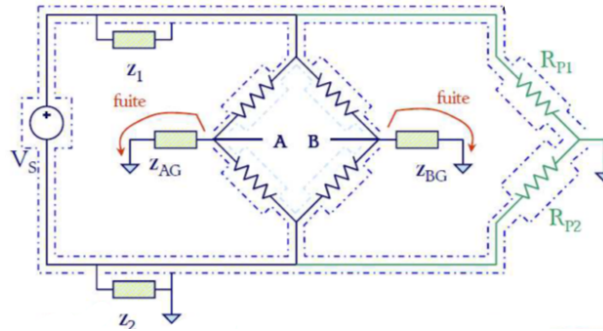


FIGURE 9.2 – Protection de Wagner

On fait face à un problème, on a un courant de fuite vers le blindage. On va donc annuler la tension aux bornes des éléments parasites les plus *critiques*. Ici, on annule l'effet des courants de fuite des nœuds A et B vers la garde afin que l'équilibre soit *correct*.