Métodos Numéricos (M2039) — /2023

Folha de Exercícios 3 - Interpolação polinomial. Splines. Aproximação no sentido dos mínimos quadrados.

1. A partir da tabela:

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/4$
$\text{tg}(x_i)$	0	0.57735	1

calcule o valor de $\text{tg}(\pi/5)$ usando interpolação linear e interpolação parabólica pelo método de Lagrange. Calcule um majorante do erro cometido em ambos os casos.

2. Considere a seguinte tabela:

x_i	0.2	0.3	0.5
$f(x_i)$	0.1586693	0.2055202	0.2294255

(a) Determine $f(0.4)$ por interpolação parabólica.

(b) Determine um majorante do erro cometido sabendo que

$$f(x) = \sin(x) - x^2.$$

3. Mostre que o erro máximo cometido numa interpolação linear é dado por

$$E = M(x_1 - x_0)^2/8, \quad \text{sendo} \quad M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|.$$

4. Determine o polinómio do segundo grau que passa pelos pontos $(0, 1/2)$, $(1, 1)$ e $(3, 25)$.

5. Fazendo uso de toda a informação da tabela:

x	1.35	1.37	1.40	1.45
$f(x)$	0.1303	0.1367	0.1461	0.1614

determine um valor aproximado de $f(1.38)$ por interpolação polinomial.

6. A partir da tabela:

x	0.4	0.6	0.8	1.0
e^x	1.49182	1.82212	2.22554	2.71828

estime $e^{0.7}$ usando o método de Newton em diferenças divididas. Determine um majorante do erro cometido.

7. Considere a seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	3	10
$f(x)$	-14.2	9.4	10	11.6	50.2	105011

(a) Determine os dois polinómios interpoladores de graus 2 e 3 mais adequados para estimar o valor de $f(2)$, usando o método de Newton em diferenças divididas.

(b) Determine $f(x)$ sabendo que $f(x)$ é um polinómio de grau 5.

8. A tabela seguinte é de um polinómio $P(x)$ de grau desconhecido:

x	-2	-1	1	2	3
$P(x)$	13	4	-2	1	8

(a) Use diferenças divididas para determinar o grau de P (sabendo que este não é superior a 4).

(b) Determine $P(x)$ e calcule $P(0)$.

9. Considere a função $f(x) = 1/(1+x^2)$ para $-5 \leq x \leq 5$. Seja $n > 0$ um inteiro par e definam-se $h = 10/n$ e

$$x_j = -5 + jh, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

(a) Determine o polinómio $P_{10}(x)$ que interpola a função $f(x)$ nos pontos de abcissas dadas.

(b) Esboce os gráficos de $f(x)$ e de $P_{10}(x)$ ou construa uma tabela de valores daquelas funções em pontos no intervalo $[-5, 5]$. Comente os resultados.

10. Resolva o problema anterior considerando as abcissas

$$x_j = (-10\cos(\frac{2j+1}{2n+2}\pi))/2, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

Compare os resultados e tire conclusões.

11. Determine o spline cúbico natural que interpola os dados $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$.

12. Determine spline cúbico completo s que interpola os dados $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$ e satisfaz $s'(0) = s'(2) = 1$.

13. Considere os seguintes dados: $\{(0, 1),\ (1, 1),\ (2, 5)\}$

    (a) Determine o spline linear que interpola os dados.

    (b) Determine o polinómio interpolador dos dados.

    (c) Determine o spline cúbico natural que interpola os dados.

14. Considere a seguinte tabela:

x	0	1/2	1	2	3
y	0	1/4	1	-1	-1

    (a) Determine o spline linear que interpola os dados.

    (b) Determine o spline cúbico natural que interpola os dados.

15. (a) Determine o spline cúbico natural que interpola os dados $f(8.3) = 17.56492$ e $f(8.6) = 18.50515$.

    (b) Sabendo que $f(x) = x\ln(x)$ calcule um valor aproximado de $f(8.4)$ e compare com o valor exato.

16. A seguinte função é um spline cúbico no intervalo $0 \leq x \leq 2$?

$$s(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

17. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Determine os valores de a, b e c para que $f(x)$ seja um spline cúbico. O spline obtido é natural?

18. Determine o polinómio de grau não superior a 2 que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, a seguinte tabela de pontos:

x	1.05	1.10	1.15	1.20
$f(x)$	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

19. Determine a reta que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, a função $f(x)$ dada pela tabela $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ seguinte:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(x)$	0	1	1

20. Determine a combinação linear das funções $\{\sin(x), \cos(x)\}$ que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, a função dada pela tabela do exercício anterior.

21. Considere o seguinte conjunto de valores de uma função:

x	1.4	1.8	2.2
$f(x)$	0.7143	0.5556	0.4545

Determine a combinação linear das funções $\{1, e^x\}$ que melhor representa, no sentido dos mínimos quadrados, aquele conjunto de pontos.

22. Considere a seguinte tabela (onde ω_i designa o peso da observação (x_i, y_i)):

x_i	-1	0	1
y_i	1	1	3
ω_i	1	0.5	2

Usando o método dos mínimos quadrados, determine a reta que melhor representa a tabela dada. Represente graficamente essa reta, bem como os pontos da tabela. Determine os resíduos em cada ponto da tabela. Comente.