Métodos Numéricos (M2039) — 2023/2024

Folha de Exercícios 2 - Resolução numérica de equações por métodos iterativos.

1. Dada uma função $F(x)$ contínua em $[a,b]$ e tal que $F(a)F(b) < 0$, escreva um programa que permita o cálculo da raiz $X \in [a,b]$ da equação $F(x) = 0$ com erro não superior a ϵ, pelo método das bissecções sucessivas,
   (a) determinando o número de iterações a efetuar.
   (b) calculando um majorante do erro em cada iteração.

2. Aplicando o método das bissecções sucessivas determine um valor aproximado da raiz da equação:
   (a) $(0.123)^x - x = 0$, com $\epsilon = 10^{-4}$
   (b) $x^3 - 2e^{-x} = 0$, com $\epsilon = 10^{-5}$

3. Considere a equação:
$$|\ln(x)| - 0.2\sin(x) = 0, \quad x > 0$$
   (a) Separe as suas raízes reais e encontre um intervalo de amplitude 10^{-1} que contenha a menor delas.
   (b) Verifique que é possível aplicar o método iterativo simples para calcular essa raiz. Efetue 3 iterações e determine um majorante do erro em cada iteração.

4. Supondo que são satisfeitas no intervalo $[a,b]$ as condições de aplicabilidade do método iterativo simples para a resolução da equação $F(x) = 0$, escrita na forma $x = g(x)$, escreva um programa que permita o cálculo da raiz existente nesse intervalo com erro não superior a um valor ϵ:
   (a) estimando em cada iteração o erro absoluto.
   (b) estimando em cada iteração o erro relativo.
   (c) determinando o número de iterações a efetuar.
   (d) majorando em cada iteração o erro absoluto.

5. Pretende-se calcular, usando o método iterativo simples, a raiz, que pertence ao intervalo $[0.52, 0.62]$, da equação $x + \ln x = 0$. Considere as relações de recorrência:
$$\text{(a) } x_{n+1} = -\ln x_n; \quad \text{(b) } x_{n+1} = \mathrm{e}^{-x_n}; \quad \text{(c) } x_{n+1} = \frac{x_n + \mathrm{e}^{-x_n}}{2}.$$
   Qual das relações deverá usar? Use-a para determinar a raiz com 3 algarismos significativos corretos.

6. Considere a equação:

$$2\ln(x) - x + 2 = 0, \quad x > 0.$$

   (a) Separe as suas raízes reais e encontre um intervalo de amplitude 10^{-1} que contenha a maior delas.

   (b) Verifique que é possível aplicar o método de Newton para calcular essa raíz. Efetue 3 iterações e determine um majorante do erro em cada iteração.

7. Considere a equação:

$$\sin x - \frac{x+1}{x-1} = 0.$$

   (a) Separe as suas raízes reais.

   (b) Determine intervalos de amplitude 5×10^{-2} que contenham as duas maiores raízes.

   (c) Determine a maior raiz pelo método de Newton com erro absoluto inferior a 10^{-5}.

8. Para cada uma das equações abaixo, separe as suas raízes (pelo método gráfico ou dos números de Rolle) e determine intervalos de amplitude 10^{-2} que contenham a menor raiz de cada equação. Use os métodos que conhece (bisseções sucessivas, iterativo simples, de Newton, ...) para determinar essas raízes com 7 casas decimais corretas.

   (a) $x^3 - \ln|x| = 0$; (b) $x - \mathrm{e}^{-x} = 1/4$; (c) $\mathrm{e}^x = 3x$;

   (d) $\cos x - (x-2)^2 + 1 = 0$; (e) $7\sin x - 4x = 0$.

9. Seja $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ uma função com derivada contínua e seja $L = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

   (a) Mostre que quaisquer que sejam $x, y \in [a,b]$ se tem:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

   (b) Um ponto $\alpha \in [a,b]$ diz-se um ponto fixo de f se e só se $f(\alpha) = \alpha$. Mostre que, se $L < 1$, então f tem no máximo um ponto fixo.

   (c) Seja x_0 um ponto de $[a,b]$ e considere a relação de recorrência $x_{n+1} = f(x_n)$. Mostre que se a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente, então ela converge necessariamente para um ponto fixo de f.

   (d) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão dada em (c). Mostre que:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}\,|x_1 - x_0|\,.$$

   (e) Suponha agora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x e que $L < 1$. Mostre que:

$$|x - x_n| \leq \frac{L^{n-1}}{1-L}\,|x_1 - x_0|\,.$$