Inleveropgaven stochastiek 1

Set 4: inleverdeadline dinsdag 28 november 11:00

Opmerking 1: elke opgave dient beredeneerd te worden. Er kunnen 9 punten behaald worden; cijfer = totaal aantal punten +1 (afgerond op een geheel getal).

Opmerking 2: sommige opgaven leveren geen punten op. Dit zijn dus de in het college besproken "oefenopgaven", en deze hoeven dus niet te worden ingeleverd.

Opgave 1 (0pt)

Gebruik Stelling 2.30 om te bewijzen dat als X een discrete stochast is met de eigenschappen $\mathbb{P}(|X| \leq 1) = 1$ en $\mathbb{E}(X^2) = 1$, dan geldt $\mathbb{P}(X \in \{-1, 1\}) = 1$.

Opgave 2 (0pt)

Zij $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

i. (0pt) Bepaal $\mathbb{E}(X^2 - X)$. Hint: voor welke $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ geldt $k^2 - k = 0$?

ii. (0pt) Gebruik het bovenstaande om $\mathrm{Var}(X)$ te bepalen.

Opgave 3 (3pt)

Zij $\lambda \in (0, \infty)$ en zij $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

i. (2pt) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}((X+1)^{n-1}).$$

NB: Inductie is niet altijd de beste manier om te laten zien dat iets geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

ii. (1pt) Gebruik het bovenstaande om $\mathrm{Var}(X)$ te bepalen.

Opgave 4 (3pt)

Zij X een discrete stochast met de eigenschap dat $\mathbb{P}(\{X \in \mathbb{N}\}) = 1$.

i. (1pt) Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}$. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_1 + \ldots + a_j)\mathbb{P}(\{X = j\}) + \mathbb{P}(\{X \geq n+1\}) \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{P}(\{X \geq j\}).$$

ii. (0pt) Toon aan dat als $\sum_{j=1}^{\infty}(a_1 + \ldots + a_j)\mathbb{P}(\{X = j\}) < \infty$, dan[1]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X \geq n+1\}) \sum_{j=1}^{n} a_j = 0.$$

iii. (0pt) Gebruik het bovenstaande om te bewijzen dat

$$\sum_{j=1}^{\infty}(a_1 + \ldots + a_j)\mathbb{P}(\{X = j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbb{P}(\{X \geq j\}).$$

iv. (2pt) Gebruik het bovenstaande om te bewijzen dat

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X \geq j\}).$$

Opgave 5 (3pt)

Gegeven zijn vier dobbelstenen. Één daarvan is een 'gewone' dobbelsteen (op de zes zijden staan respectievelijk één, twee, drie, vier, vijf, en zes ogen), bij de tweede dobbelsteen staan op alle zijden vier ogen, bij de derde staan op alle zijden één oog, en bij de laatste staan op drie zijden drie ogen en op drie zijden vier ogen.

i. (3pt) Je pakt een willekeurige dobbelsteen (dat wil zeggen elke dobbelsteen wordt met kans $\frac{1}{4}$ gepakt) en gooit deze dobbelsteen op. Gebruik de partitiestelling om het verwachte aantal ogen te bepalen.

ii. (0pt) *(Deze vraag heeft eigenlijk betrekking op de stof van week 2, maar is te mooi om te laten liggen.)* Iemand gooit de willekeurig gekozen dobbelsteen drie keer op en meldt dat hij alledrie de keren vier ogen kreeg. Wat is de kans dat de gekozen dobbelsteen op alle zijden vier ogen heeft?

[1]Hint: $\mathbb{P}(\{X \geq n+1\}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})$.

Inleveropgaven stochastiek 1

Set 5: inleverdeadline dinsdag 5 december 11:00

Opmerking 1: elke opgave dient beredeneerd te worden. Er kunnen 9 punten behaald worden; cijfer = totaal aantal punten +1 (afgerond op een geheel getal).

Opmerking 2: sommige opgaven leveren geen punten op. Dit zijn dus de in het college besproken "oefenopgaven", en deze hoeven dus niet te worden ingeleverd.

Opgave 1 (3pt)

Zij (X, Y) een bivariate stochast met de volgende verdeling:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$		$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
X	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

i. (1pt) Zijn X en Y onafhankelijk?

ii. (2pt) Zij $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = |x|$. Zijn $g(X)$ en $g(Y)$ onafhankelijk?

Opgave 2 (2pt)

Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer $I_n = \{(i, j)\colon 1 \leq i < j \leq n\}$ en $J_n = \{(i, j, k)\colon 1 \leq i < j < k \leq n\}$.

i. (0pt) Geef een combinatorisch argument waarom voor alle $n \in \{2, 3, \ldots\}$ het aantal elementen in I_n gelijk is aan $\binom{n}{2}$.

ii. (2pt) Geef een combinatorisch argument waarom voor alle $n \in \{3, 4, \ldots\}$ het aantal elementen in J_n gelijk is aan $\binom{n}{3}$.

Opgave 3 (2pt)

Zij $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$. Voor alle $(i, j) \in I := \{(i, j)\colon 1 \leq i < j \leq n\}$ zij $B_{(i,j)}$ een discrete stochast, $B_{(i,j)} \sim \text{Bernoulli}(p)$. We nemen aan dat de verzameling stochasten $\{B_{(i,j)}\colon (i, j) \in I\}$ onafhankelijk is[1].

We gebruiken $\{B_{(i,j)}\colon (i, j) \in I\}$ om een *random graaf* te maken: zij $v_1, \ldots, v_n$ de knopen van de graaf; voor alle $(i, j) \in I$ is er een lijnstuk tussen v_i en v_j dan en slechts dan als $B_{(i,j)} = 1$.

[1] Zie pagina 44 van het boek voor de definitie van een verzameling onafhankelijke stochasten – op college is slechts het geval van *twee* onafhankelijke stochasten besproken.

i. (0pt) Leg uit (zie Opgave 2) waarom het verwachte aantal lijnstukken gelijk is aan

$$\mathbb{E}\left(\sum_{(i,j)\in I} B_{i,j}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1)p.$$

ii. (0pt) Voor alle $(i,j,k) \in J := \{(i,j,k)\colon 1 \leq i < j < k \leq n\}$ zij $A_{i,j,k}$ de gebeurtenis dat $B_{i,j} \cdot B_{i,k} \cdot B_{j,k} = 1$ (d.w.z. de gebeurtenis dat er een driehoek is in de graaf tussen de knopen v_i, v_j, and v_k). Wat is $\mathbb{P}(A_{i,j,k})$?

iii. (2pt) Toon aan (zie Opgave 2) dat het verwachte aantal driehoeken in de graaf gelijk is aan $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)p^3$.

Opgave 4 (2 pt)

Han, Jan, Gerrit en Sonja willen een bordspel spelen en moeten bepalen wie er mag beginnen. Ze hebben helaas maar drie dobbelstenen. Besloten wordt dat Han, Jan, en Gerrit ieder een dobbelsteen mogen opgooien. Als één van de drie hoger gooit dan de andere twee, mag diegene beginnen. Als dat niet gebeurt (d.w.z. het hoogste aantal ogen komt minstens twee keer voor), mag Sonja beginnen. Bepaal de kans dat Sonja mag beginnen.

Inleveropgaven stochastiek 1

Set 6: inleverdeadline dinsdag 12 december 11:00

Opmerking 1: elke opgave dient beredeneerd te worden. Er kunnen 9 punten behaald worden; cijfer = totaal aantal punten +1 (afgerond op een geheel getal).

Opmerking 2: sommige opgaven leveren geen punten op. Dit zijn dus de in het college besproken "oefenopgaven", en deze hoeven dus niet te worden ingeleverd.

Opgave 1 (2pt)

In een gegeven bioscoopzaal zijn 100 genummerde stoelen. Op de bioscoopkaartjes staat het nummer van de stoel waarop de eigenaar van het kaartje dient te gaan zitten. Stel dat er 83 bezoekers zijn, die allen het stoelnummer op hun kaartje negeren en een willekeurige vrije stoel kiezen. Zij A_j, $j \in \{1, 2, \ldots, 83\}$, de gebeurtenis dat de j^{de} bezoeker (toevallig) op de goede stoel gaat zitten (d.w.z. op de stoel met hetzelfde nummer als wat er op zijn kaartje staat), en zij N de stochast die weergeeft hoeveel mensen toevallig op de 'goede' stoel terecht zijn gekomen (d.w.z. van hoeveel mensen het stoelnummer op het bioscoopkaartje overeenkomt met het werkelijke stoelnummer).

a. (0pt) Leg uit waarom geldt $\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^{83} \mathbb{P}(A_j)$. (Hint: beschouw 1_{A_j}, $j \in \{1, 2, \ldots, 83\}$).

b. (1pt) Bepaal $\mathbb{E}(N)$.

c. (1pt) Gebruik de inclusie-exclusie formule om te bepalen wat de kans is dat géén van de eerste vier bezoekers op zijn/haar eigen stoel is gaan zitten.

Opgave 2 (0pt)

Zij $X \sim \text{Uniform}([-3, 2])$.

a. (0pt) Schets f_X en F_X.

b. (0pt) Bepaal $\mathbb{P}(X < -1 \mid |X| > 1)$.

Opgave 3 (2pt)

Zij $\lambda \in (0, \infty)$ en zij $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zij $x, y \in [0, \infty)$ zodanig dat $y > x$.

a. (1pt) Bepaal $\mathbb{P}(X > y - x)$ en $\mathbb{P}(X > y | X > x)$.

b. (1pt) Er wordt weleens gezegd dat de exponentiele verdeling *geheugenvrij* is. Leg op basis van deel (a) uit wat hiermee bedoeld wordt.

Opgave 4 (2pt)

Zij X een stochast en zij $F_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (cumulatieve) verdelingsfunctie van X, d.w.z. $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

a. (0pt) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$ (N.B. dit is op college voorgedaan dus ga even na of je dat begrijpt).

b. (2pt) Zij $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\mathbb{P}(X = c) = 0$. Toon aan dat $\lim_{y \uparrow c} F_X(y) = F_X(c)$.

c. (0pt) Zij $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\mathbb{P}(X = c) = 0$. Leg uit waarom uit (a) en (b) volgt dat F_X continu is in c.

Opgave 5 (0pt)

Voor $c \in \mathbb{R}$ zij $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0,1]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \end{cases}$$

a. (0pt) Ga na dat $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\, dx = 1$ dan en slechts dan als $c = 6$.

b. (0pt) De functie f_6 is kansdichtheidsfunctie. Bepaal de bijbehorende verdelingsfunctie F.

c. (0pt) Maak een schets van f_6 en F.

Opgave 6 (4pt)

Voor $c \in (0, \infty)$ zij $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{cx}, & x \in [1, e^c]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, e^c]. \end{cases}$$

a. (1pt) Ga na dat $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\, dx = 1$ voor alle $c \in (0, \infty)$.

b. (1pt) De functie f_1 is kansdichtheidsfunctie. Bepaal de bijbehorende verdelingsfunctie F.

c. (2pt) Maak een schets van f_1 en F.

Inleveropgaven stochastiek 1

Set 7: inleverdeadline als je wilt dat het vóór de tussentoets nagekeken is: dinsdag 19 december 11:00 (in het postvakje v/d docent); anders maandag 8 januari vóór het college

Opmerking 1: elke opgave dient beredeneerd te worden. Er kunnen 9 punten behaald worden; cijfer = totaal aantal punten +1 (afgerond op een geheel getal).

Opmerking 2: sommige opgaven leveren geen punten op. Dit zijn dus de in het college besproken "oefenopgaven", en deze hoeven dus niet te worden ingeleverd.

Opgave 1 (4pt)

Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte, zij $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ een stochast zodanig dat $U \sim \text{Uniform}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, zij $g, h\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ gegeven door $g(x) = \tan(x)$, $h(x) = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}$, en zij $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeven door $X = g \circ U$ en $Y = h \circ U$.

a. (0pt) Schets de grafiek van g en h.

b. (0pt) Bepaal $\mathbb{P}(X \leq x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en gebruik dat om aan te tonen dat X een continue stochast is met kansdichtheidsfunctie $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

c. (2pt) Toon aan:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{y})^{\frac{1}{2}}, & y \in [1, \infty) \\ 0, & y \in (-\infty, 1). \end{cases} \tag{1}$$

d. (2pt) Gebruik het bovenstaande om aan te tonen dat Y een continue stochast is, en bepaal de bijbehorende kansdichtheidsfunctie f_Y.

Opgave 2 (0pt)

Zij $\lambda \in (0, \infty)$ en zij $X \sim \text{Exponentieel}(\lambda)$.

a. Bepaal $\mathbb{E}(X)$.

b. Bepaal $\text{Var}(X)$.

Opgave 3 (3pt)

Zij X een continue stochast met kansdichtheidsfunctie $f_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x}, & x \in [1, e^4]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1, e^4]. \end{cases}$$

a. (1pt) Bepaal $\mathbb{E}(X)$.

b. (2pt) Bepaal $\mathrm{Var}(X)$.

Opgave 4 (2pt)

a. (1pt) Zij $X \sim N(0,1)$. Toon aan dat voor alle $x \in (0,\infty)$ geldt dat $\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}$.

b. (0pt) Zij $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0,\infty)$, en $Y \sim N(\mu,\sigma)$. Toon aan dat voor alle $x \in (0,\infty)$ geldt $\mathbb{P}(X - \mu > x) \leq \frac{\sigma e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{x\sqrt{2\pi}}$.

c. (1pt) Marten is mode ontwerper. Hij gaat er voor het gemak vanuit dat de lengte van een volwassen vrouw $N(\mu,\sigma)$ verdeeld is met parameters $\mu = 160$ en $\sigma = 8$. Sanne merkt op dat dit een raar model is, omdat het impliceert dat vrouwen een negatieve lengte kunnen hebben. Gebruik deel (b) om een bovengrens te geven voor de kans volgens het model van Marten dat een vrouw een negatieve lengte heeft. (Ben je het eens met de kritiek van Sanne?)