(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Sugestão. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$

$\boxed{\text{(d) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}}$

(c) Seja $f(x)=e^{ax}$ sendo $a\in\mathbb{R}$ uma constante fixa

Sabemos que $f'(x) = a e^{ax}$, logo $f'(0) = a e^{a\cdot 0} = a$

$\Rightarrow \boxed{f'(0) = a}$.

Por outro lado, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}$

Logo, $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a}$. (1)

Usando o mesmo argumento temos que

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}-1}{x} = b}$ (2)

Desta modo, para calcularmos o limite de $\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ usaremos as igualdades acima (1) e (2) somando e subtraindo por 1, ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{ax}-1}{x} - \frac{e^{bx}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx}-1}{x} = a-b$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b}$$

(d) Do mesmo modo mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} = \frac{a}{b}$

Pensem nisso!! $\square$