Lógica

Lógica de Predicados
Aula 18 – Resolução

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

- **Resolução**
  - **Como funciona?**
    - Dado um conjunto de fbfs S e uma meta (conclusão) G que se deseja provar (também uma fbf)

    1. Nega-se G
    2. Adiciona-se a negação de G a S
    3. Converte-se o conjunto resultante do passo 2 para um conjunto de cláusulas
    4. Aplica-se resolução para derivar a contradição (cláusula vazia, nil)
       - Para tanto, os **resolventes** devem ser calculados
       - Os resolventes são adicionados ao conjunto de cláusulas e o processo se repete até obter nil

Lógica de Predicados

- **Resolução**
  - **Como funciona?**
    - Dado um conjunto de fbfs S e uma meta (conclusão) G que se deseja provar (também uma fbf)
      - Se G for uma fbf que segue logicamente de S, toda interpretação que satisfaz S também satisfaz G
      - Ou seja, nenhuma interpretação que satisfaz S irá satisfazer $\neg$G
      - Ou, ainda, se G segue logicamente de S então o conjunto S $\cup$ {$\neg$G} deve ser insatisfazível

Lógica de Predicados

- **Resolvente**
  - Considere duas cláusulas da Lógica de Predicados

    $$C_1 = \{A_1, \ldots, A_n\} \text{ e } C_2 = \{B_1, \ldots, B_m\}$$

    - Suponha que C_1 e C_2 possuem dois literais L_1 e $\neg L_2$ tais que L_1 e L_2 são unificáveis e $L_1 \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ e $L_2 \in \{B_1, \ldots, B_m\}$
    - Seja θ uma mgu de L_1 e L_2
    - O resolvente de C_1 e C_2 é definido por:

    $$\mathbf{resolvente(C_1,C_2) = (C_1\theta - L_1\theta) \cup (C_2\theta - \neg L_2\theta)}$$

      - Se resolvente(C_1,C_2) = { }, ele é dito **vazio** ou **trivial**

Lógica de Predicados

- **Resolvente**
  - Exemplo
    - Dadas as cláusulas
      - C_1: { p(f(X),Y,X), ¬q(a,Y,W1) }
      - C_2: { ¬p(Z,g(Z),W) }
    - Os literais
      - L_1 = p(f(X),Y,X)
      - L_2 = ¬p(Z,g(Z),W)
      - A mgu que unifica L_1 e L_2 é θ = { f(X)/Z, g(f(X))/Y, X/W }
    - resolvente(C_1,C_2) = ($C_1\theta$ – p(f(X),Y,X)θ) $\cup$ ($C_2\theta$ – ¬p(Z,g(Z),W)θ) = { ¬q(a,g(f(X)),W1) }

Lógica de Predicados

- **Resolvente**
  - Encontre os resolventes dos seguintes pares de cláusulas
    - a) C_1: $\neg p(X) \vee q(X)$ e C_2: $p(a)$ — resolvente = { q(a) }
    - b) C_1: $p(X) \vee q(X)$ e C_2: $\neg p(f(a))$ — resolvente = { q(f(a)) }
    - c) C_1: $\neg r(b,a)$ e C_2: $r(b,a)$ — resolvente = { }

Lógica de Predicados

- **Princípio de Resolução (aula 10 – slide 5)**
  - Considere α e β duas fbfs da Lógica de Predicados que têm como resolvente a cláusula C
  - Então

$$\{\alpha, \beta\} \models C$$

➔ Ou seja, o resolvente de duas fórmulas é consequência lógica dessas fórmulas

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Exemplo

$\neg p(X) \vee q(X)$ $\quad$ $p(a)$ $\quad$ $\neg q(Y) \vee \neg r(b,Y)$ $\quad$ $r(b,a)$

$\theta_1 = \{a/X\}$

$q(a)$

$\theta_2 = \{a/Y\}$

$\neg r(b,a)$

nil

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dadas as premissas (S)
    - $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))$ $\equiv \neg p(X) \vee q(X)$
    - $\forall X\ (r(X) \rightarrow \neg q(X))$ $\equiv \neg r(Y) \vee \neg q(Y)$
    - $\exists X\ (r(X) \wedge s(X))$ $\equiv r(a) \wedge s(a)$
  - E a conclusão (G) que se deseja provar
    - $\exists X\ (s(X) \wedge \neg p(X))$ $\equiv \neg \exists X\ (s(X) \wedge \neg p(X))$

      $\equiv \forall X\ \neg s(X) \vee p(X) \equiv \neg s(Z) \vee p(Z)$
  - Demonstre usando inferência por resolução que a conclusão decorre das premissas

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Exemplo

$r(a)$ $\quad \neg r(Y) \vee \neg q(Y)$ $\quad \neg p(X) \vee q(X)$ $\quad s(a)$ $\quad \neg s(Z) \vee p(Z)$

$\theta_1 = \{a/Z\}$

$p(a)$

$\theta_2 = \{a/X\}$

$q(a)$

$\theta_3 = \{a/Y\}$

$\neg r(a)$

nil

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dadas as premissas (S)
    - $\forall X\ \forall Y\ (\neg p(X) \rightarrow q(X,Y)) \equiv p(X) \vee q(X,Y)$
    - $\neg \exists Z\ p(Z) \equiv \forall Z\ \neg p(Z) \equiv \neg p(Z)$
  - E a conclusão (G) que se deseja provar
    - $\forall X\ \forall Y\ (q(X,Y) \wedge \neg p(X) \wedge \neg p(Y))$

$\equiv \neg \forall X\ \forall Y\ (q(X,Y) \wedge \neg p(X) \wedge \neg p(Y))$

$\equiv \exists X\ \exists Y\ (\neg q(X,Y) \vee p(X) \vee p(Y)) \equiv \neg q(a,b) \vee p(a) \vee p(b))$

  - Demonstre usando inferência por resolução que a conclusão decorre das premissas

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dadas as premissas (S)
    - $\forall X\ \forall Y\ (\neg p(X) \rightarrow q(X,Y))$
    - $\neg \exists Z\ p(Z)$
  - E a conclusão (G) que se deseja provar
    - $\forall X\ \forall Y\ (q(X,Y) \wedge \neg p(X) \wedge \neg p(Y))$

RESPOSTA

$\underline{p(X) \vee q(X,Y)}$ $\quad \underline{\neg p(Z)}$ $\quad \neg q(a,b) \vee p(a) \vee p(b)$ $\quad \theta_1 = \{Z/X\}$

$\underline{q(Z,Y)}$ $\quad \underline{\neg q(a,b) \vee p(a) \vee p(b)}$ $\quad \theta_2 = \{a/Z, b/Y\}$

$\underline{p(a) \vee p(b)}$ $\quad \underline{\neg p(Z)}$ $\quad \theta_3 = \{a/Z\}$

$\underline{p(b)}$ $\quad \underline{\neg p(Z)}$ $\quad \theta_4 = \{b/Z\}$

nil

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento em língua natural

”Todo número primo diferente de 2 é ímpar. O quadrado de um número ímpar é ímpar. O número 7 é primo. O número 7 é diferente de 2. Logo, o quadrado de 7 é ímpar.”

  - Demonstre usando inferência por resolução que o argumento dado é válido

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento em língua natural

"Todo número primo diferente de 2 é ímpar. O quadrado de um número ímpar é ímpar. O número 7 é primo. O número 7 é diferente de 2. Logo, o quadrado de 7 é ímpar."

RESPOSTA

Convertendo para Lógica de Predicados

Premissas:

$\forall X\ ((primo(X) \land \neg igual(X,2)) \rightarrow impar(X))$

$\forall Z\ (impar(Z) \rightarrow impar(quadrado(Z)))$

$primo(7)$

$\neg igual(7,2)$

Conclusão:

$impar(quadrado(7))$

Lógica de Predicados

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento em língua natural

"Todo número primo diferente de 2 é ímpar. O quadrado de um número ímpar é ímpar. O número 7 é primo. O número 7 é diferente de 2. Logo, o quadrado de 7 é ímpar."

RESPOSTA

$\{\neg pr(X),\ ig(X,2),\ im(X)\}$ $\{\neg ig(7,2)\}$ $\{pr(7)\}$ $\{\neg im(Z),\ im(qu(Z))\}$ $\{\neg im(qu(7))\}$ $\theta_1=\{7/X\}$

$\{\neg pr(7),\ im(7)\}$ $\{pr(7)\}$ $\{\neg im(Z),\ im(qu(Z))\}$ $\{\neg im(qu(7))\}$ $\theta_2 = \{\}$

$\{im(7)\}$ $\{\neg im(Z),\ im(qu(Z))\}$ $\{\neg im(qu(7))\}$ $\theta_3 = \{7/Z\}$

$\{im(qu(7))\}$ $\{\neg im(qu(7))\}$ $\theta_4 = \{\}$

nil