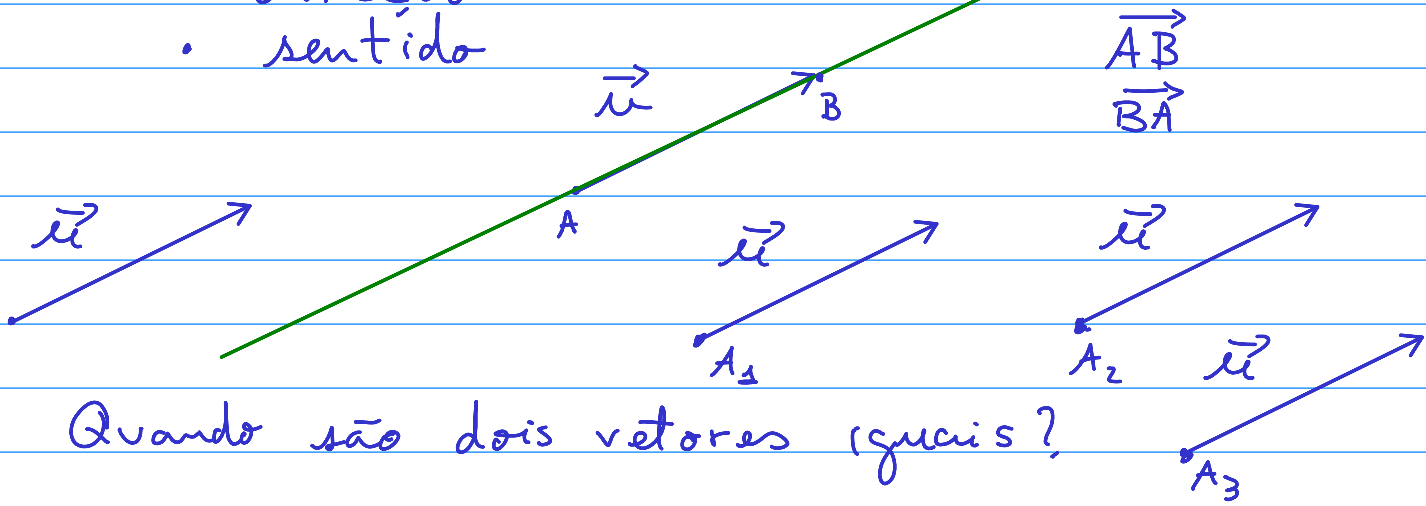
https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

L2.1 - Lição - Vetores: o tratamento geométrico

Vetor $\vec{u}$ é definido pelo seu
- módulo (tamanho, comprimento)
- direção
- sentido

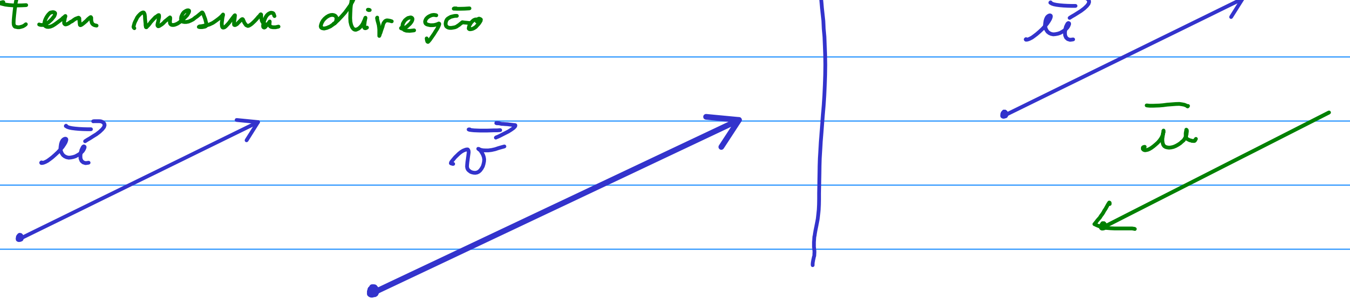


Quando são dois vetores iguais?

$\vec{0}$ $\vec{0}$ $\vec{AA}$

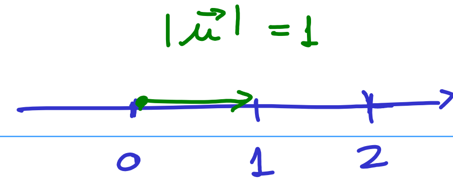
Vetores paralelos, vetor nulo, vetor oposto

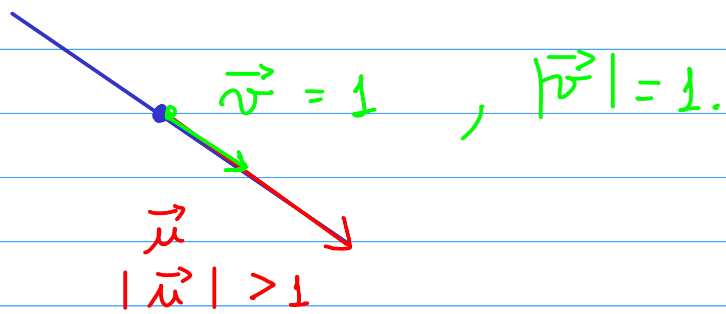
tem mesma direção



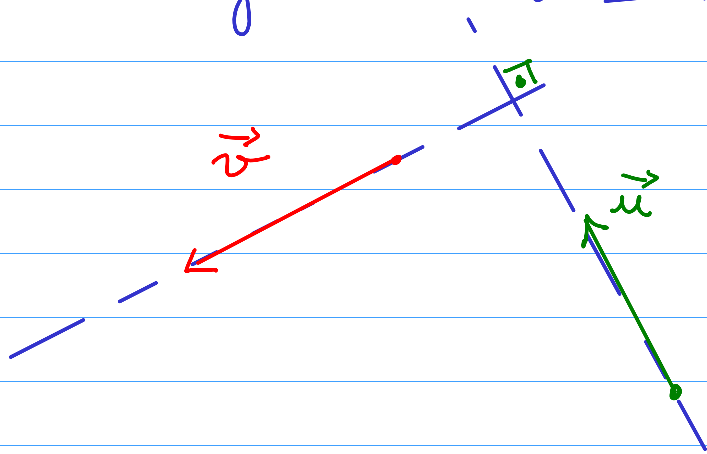
$\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$, $\vec{v} // \vec{u}$.

Vetor unitário $|\vec{u}| = 1$





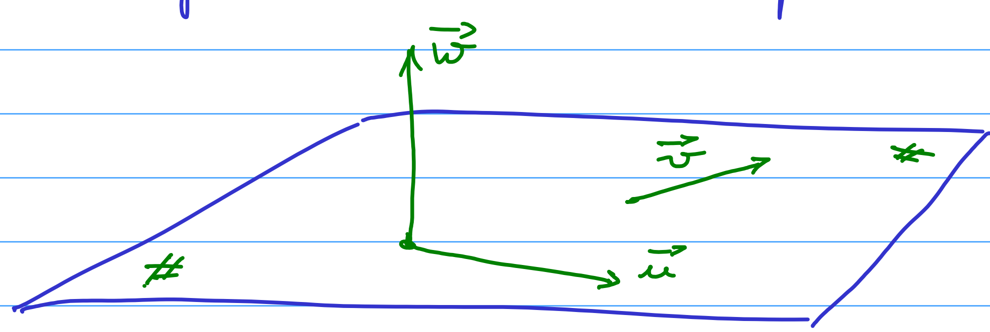
Vetores ortogonais , $\vec{v} \perp \vec{u}$

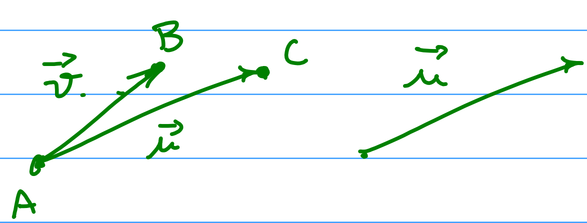


$\vec{v} \perp \vec{u}$

perpendicular
ortogonal

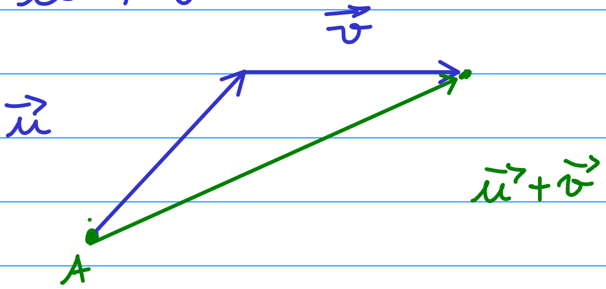
Vetores coplanares e não coplanares

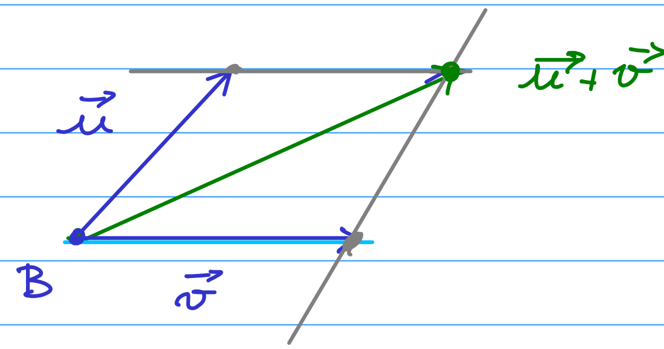




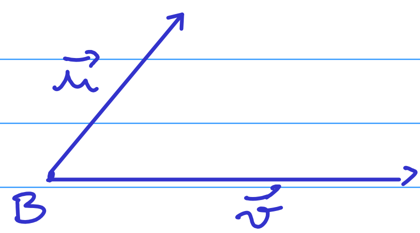
Adição de vetores (com e sem regra do paralelogramo)

$\vec{u} + \vec{v}$



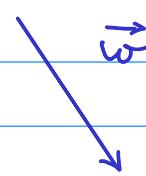


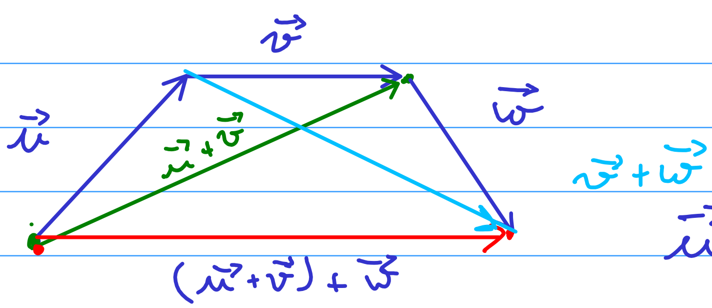
A soma é comutativa $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,



é associativa $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u} + \underbrace{(\vec{v}+\vec{w})}$

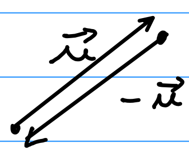
$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

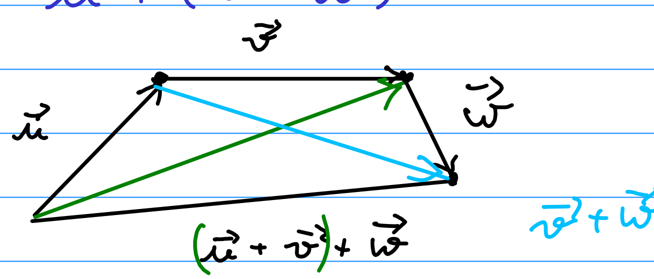




$\vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$

$\vec{u}+\vec{v}$





$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

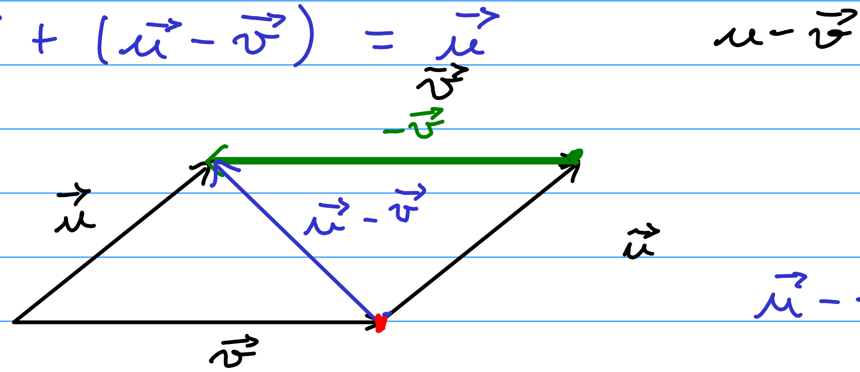
$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

O vetor $\vec{0}$ é o elemento neutro: $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$.

O vetor $-\vec{u}$ é o oposto de $\vec{u}$: $-\vec{u}+\vec{u} = \vec{0}$.

Diferença de vetores: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

- $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$



$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Dado $\vec{v}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Multiplicação por escalar α: $\alpha\vec{v}$

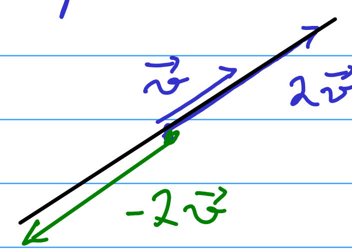
- O vetor $\alpha\vec{v}$ tem módulo $|\alpha|\cdot|\vec{v}|$,

tem a mesma direção de $\vec{v}$ (são paralelos: $\alpha\vec{v} \parallel \vec{v}$)

tem o mesmo sentido se $\alpha > 0$

tem sentido oposto se $\alpha < 0$.

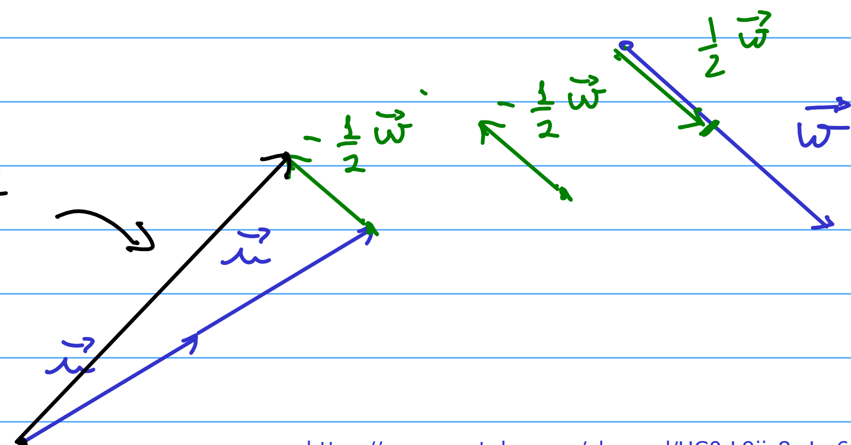
Se $\alpha = 0$ então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.



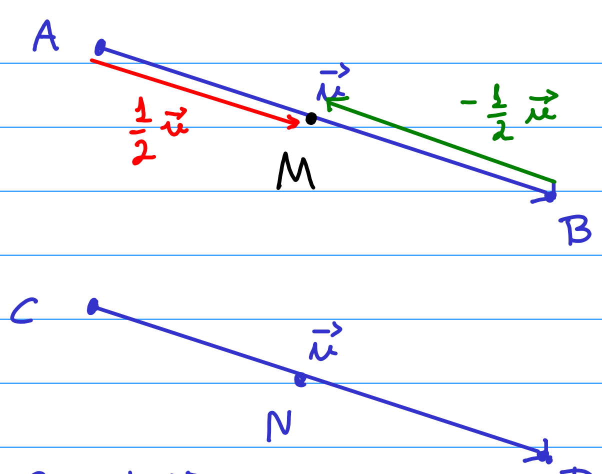
$-\vec{v}$, $\alpha = -1$, $\alpha\cdot\vec{v}$, $|-\vec{v}| = |-1|\cdot|\vec{v}| = |\vec{v}|$

$2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$

$2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$



Ponto médio de um segmento



$\vec{u} = \vec{AB}$

$A + \vec{u} = B$

$C + \vec{u} = D$

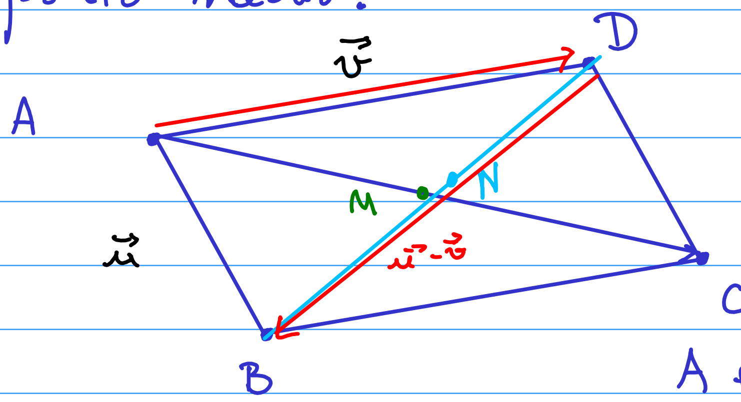
$A + \frac{1}{2}\vec{u} = M$

$C + \frac{1}{2}\vec{u} = N$

$M = B - \frac{1}{2}\vec{u} = A + \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} =$

$A + \frac{1}{2}\vec{u} = M$

As diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.



$A + \vec{v} = D$

$A + \vec{v} + \vec{u} = C$

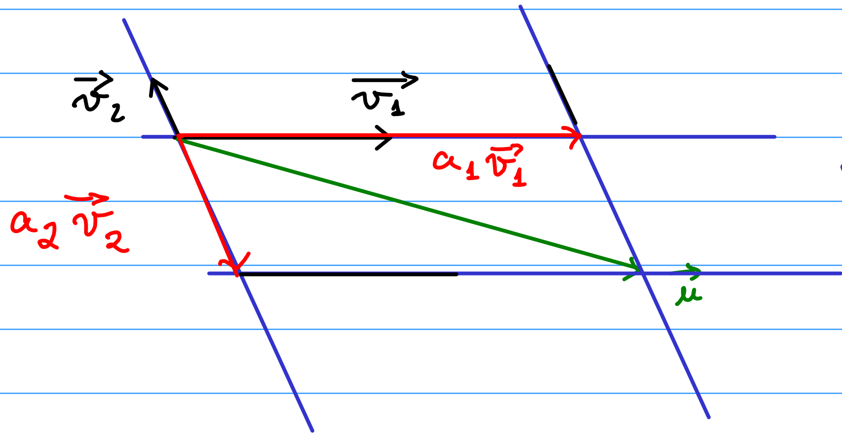
$A + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u}) = M$

$A + \vec{v} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = N$

$N = A + \vec{v} + \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = A + \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$

$= A + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} = A + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u}) = M$

Combinação linear, base, coordenada.
(componentes)



$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$\vec{u} = (a_1, a_2)_B$

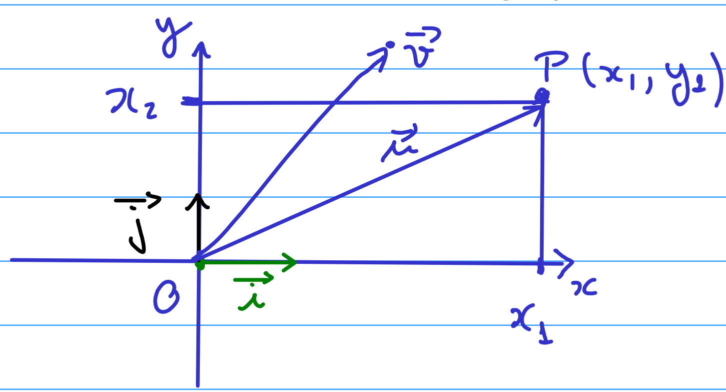
Bases ortonormais : $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $\quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

Base canônica $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ $\quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1.$

Sistema cartesiano

$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ ou $\vec{v} = (x, y)$

abscissa $\quad$ ordenada

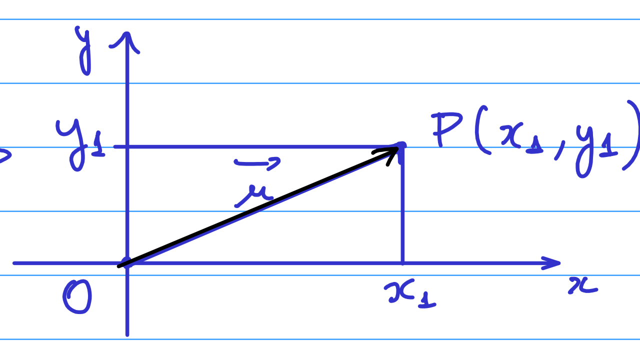


$\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j}$

$\vec{u} = (x_1, y_1)$

Ponto ou vetor?

Notação do livro $\begin{cases} \vec{u} = (x_1, y_1) = \overrightarrow{OP} \\ P(x_1, y_1) \end{cases}$

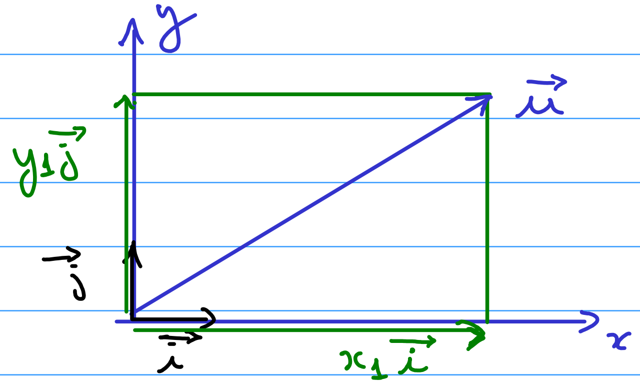


Operação com vetores usando coordenadas

$\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$

(a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$

(b) $\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

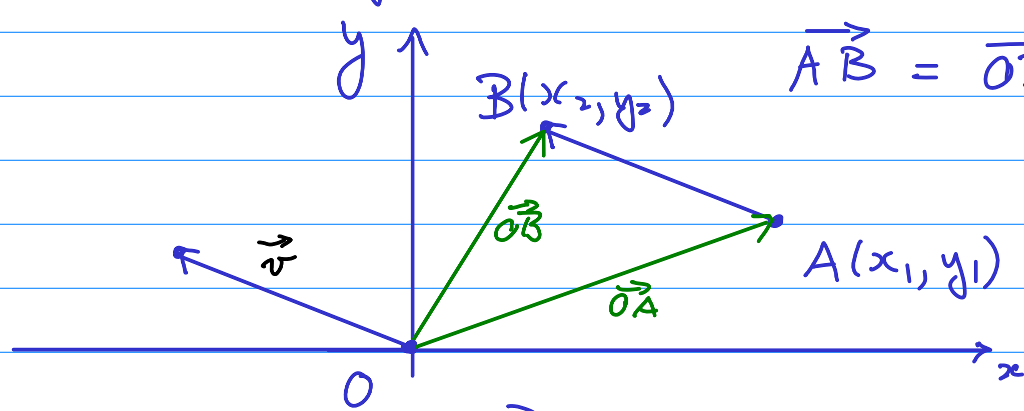


$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$

$\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

Vetor definido por dois pontos



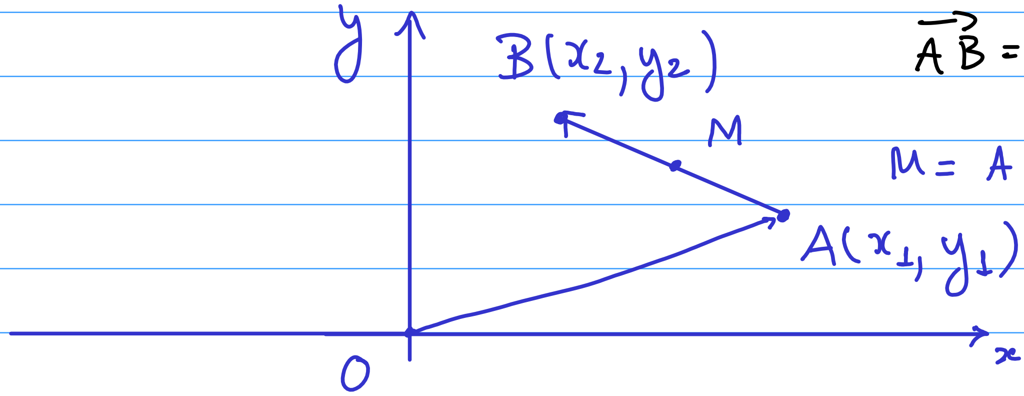
$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) =$

$\vec{v} = \vec{AB} = (x_2 - x_1, \; y_2 - y_1)$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Ponto médio de um segmento



$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$M = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Exemplo: Considere o triângulo ABC com as coordenadas $A(4,8)$, $B(0,4)$ e $C(2,0)$.

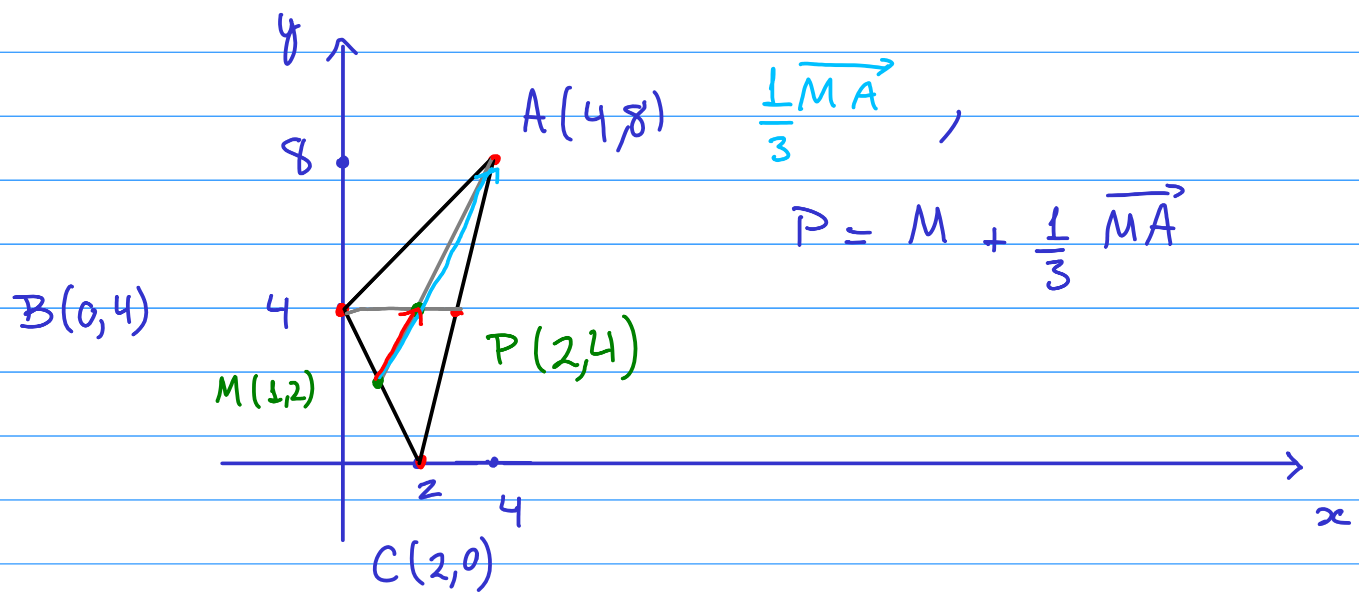
(a) Encontre M o ponto médio do segmento BC.

(b) Encontre P o baricentro deste triângulo.

(a) $\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (1,2)$, $M(1,2)$

(b) $(1,2) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA} = (1,2) + \dfrac{1}{3}(3,6) = (1,2) + (1,2) = (2,4)$

$\overrightarrow{MA} = (4,8) - (1,2) = (3,6)$



$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$,

$P = M + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos então existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v}$ é o vetor nulo.

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \qquad (x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2), \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha x_2 \\ y_1 = \alpha y_2 \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \alpha, \quad \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha \quad (\text{se } x_2 \neq 0 \text{ e } y_2 \neq 0)$$

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos sempre que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

$x_1 = \alpha x_2$

$\boxed{y_1 = \alpha y_2}$

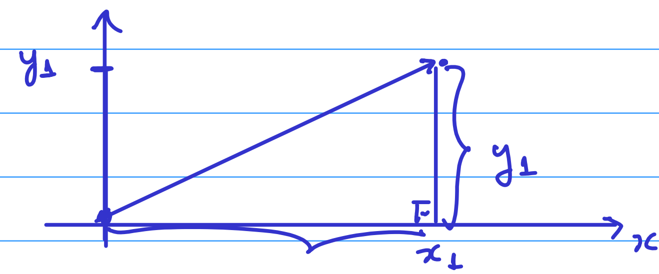
$$\alpha x_2 y_2 - x_2 \alpha y_2 = 0$$

Módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y)$.

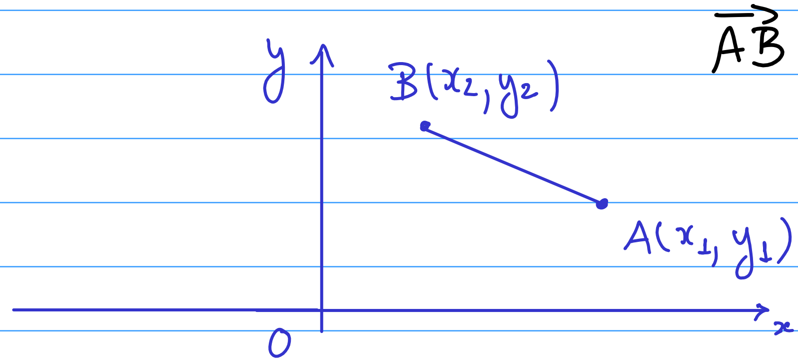
Distância entre pontos. Vetor unitário.

O módulo do vetor $\vec{u}$ é $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

$\vec{u} = (x_1, y_1)$



Dizemos que $\vec{u}$ é um vetor unitário quando $|\vec{u}| = 1$.

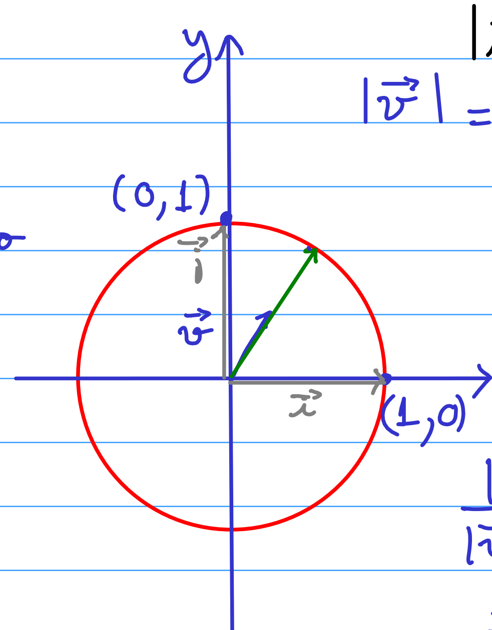


$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Qual o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor v?



$$|\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}}$$

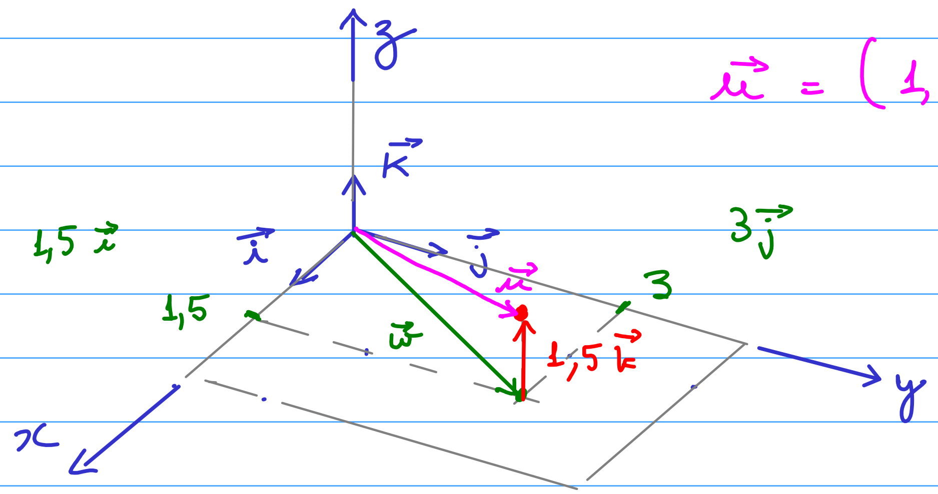
$$= \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Vetores no espaço

A base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ no espaço



$\vec{u} = (1{,}5,\ 3,\ 1{,}5)$

(x, y, z)

$\vec{w} = (1{,}5,\ 3,\ 0)$

$$(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$ soma

$\alpha\,\vec{u} = (\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$ multiplicação por α

$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ módulo

$|\vec{v} - \vec{u}| = |(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)| =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

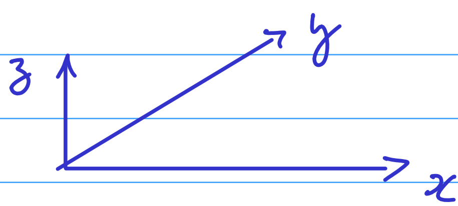
módulo da diferença

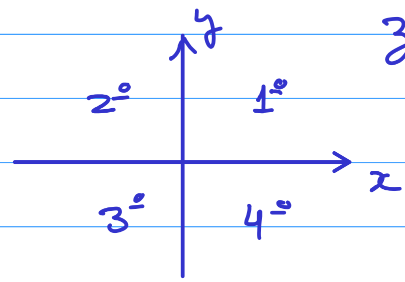
distância entre $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$

Ponto médio de AB

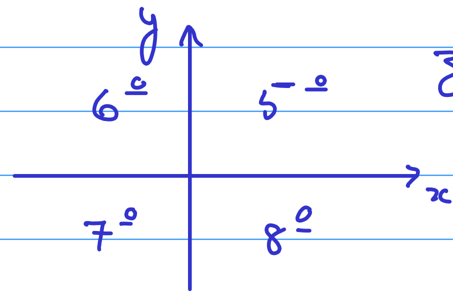
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Octantes que dividem o espaço





$z > 0$



$z < 0$

Exemplo: Dado os pontos A e B, calcule e interprete geometricamente o vetor $\overrightarrow{AB}$ e o ponto médio de AB.

$A(2,3,4)$ $\qquad \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (2,3,4)$

$B(-3,2,2)$ $\qquad \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (3,2,2)$

$$M = \left(\frac{2-3}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-3-2, 2-3, 2-4) = (-5,-1,-2)$$

Ponto médio de AB é

$$M = \left(\frac{2-3}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right)$$

Definição de produto escalar.

Dados vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com coordenadas

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad e \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

definimos $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Nomenclatura:

"$\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$"

"produto escalar $\vec{u}$ e $\vec{v}$"

"$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$" $\qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

- Notação alternativa $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
- Nome alternativo "produto interno"

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

Exemplo: Calcule o produto escalar de $\vec{u} = (1, 2, -2)$ com $\vec{v} = (-1, 1, -1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = -1 + 2 + 2 = 3$$

Exemplo: Calcule o produto escalar de $\vec{u} = (\sqrt{27}, \pi, \sqrt{2})$ com $\vec{v} = (0, 0, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{27} \cdot 0 + \pi \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Propriedades do produto escalar

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\qquad$ (comutativa)

(2) $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{u}|^2$ (módulo ao quadrado)

Obs. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.

(3) $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = x_1 \cdot \alpha \cdot x_2 + y_1 \cdot \alpha \cdot y_2 + z_1 \cdot \alpha \cdot z_2 =$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $= \alpha (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) + z_1 \cdot (z_2 + z_3)$

$$= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Distributiva $\quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Três fórmulas úteis (a versão dos produtos notáveis p/ o prod. escalar)

Vamos usar as propriedades para obter uma expressão para:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) =$$

$$= (\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{u} - (\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v} =$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{v}) =$$

$$= |\vec{u}|^2 - \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$= |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Concluimos que $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$

De forma análoga obtemos:

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$$

Exemplo: Sabendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$ e que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, calcule $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$.

$|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$

Usaremos:

$$\boxed{|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2}$$

assim

$$|\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot (2\vec{v}) + |2\vec{v}|^2$$

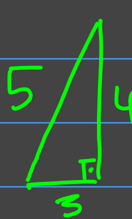
$$= 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (2|\vec{v}|)^2 =$$

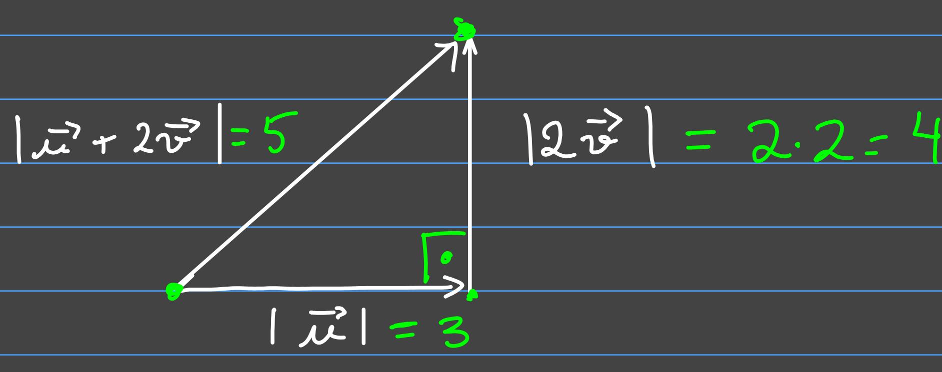
$$= 9 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot |\vec{v}|^2 = 9 + 16 = 25$$

$$|\vec{u} + 2\vec{v}| = \sqrt{25} = 5$$

Interpretação geométrica: os módulos são

$|\vec{u}| = 3$, $|2\vec{v}| = 4$, $|\vec{u} + 2\vec{v}| = 5$

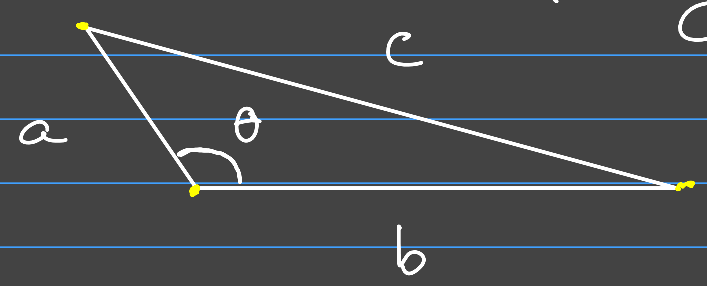




Interpretação Geométrica de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

- Da geometria temos a lei dos cossenos:

para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$



vale que

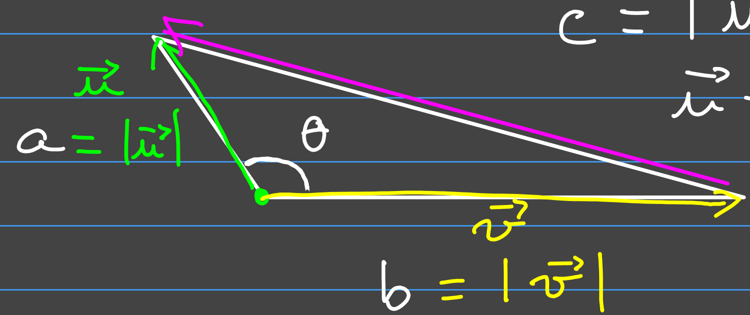
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\boxed{a \cdot b \cdot \cos\theta}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2(a \cdot b \cdot \cos\theta)$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}} + |\vec{v}|^2$$

$c = |\vec{u} - \vec{v}|$

$\vec{u} - \vec{v}$



$\cos 90^\circ = 0$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$$

O produto escalar é o produto dos módulos vezes o cosseno do ângulo.

Caso especial $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ocorre se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$, ou seja, $\theta = 90^\circ$

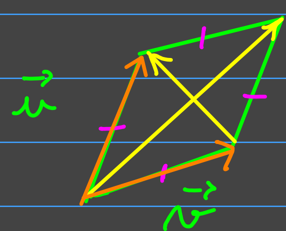
Exemplo: Encontre o valor de x de modo que o vetor $\vec{u}=(x,2,-1)$ seja ortogonal a $\vec{v}=(-1,1,-3)$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

$$x(-1)+2\cdot 1+(-1)(-3) = -x+2+3=0, \quad x=5$$

Exemplo: Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares.

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|$$



$\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{u}-\vec{v}$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=0$$

Exemplo de cálculo de ângulo entre dois vetores.

Qual o ângulo entre

$\vec{u} = (1, -2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

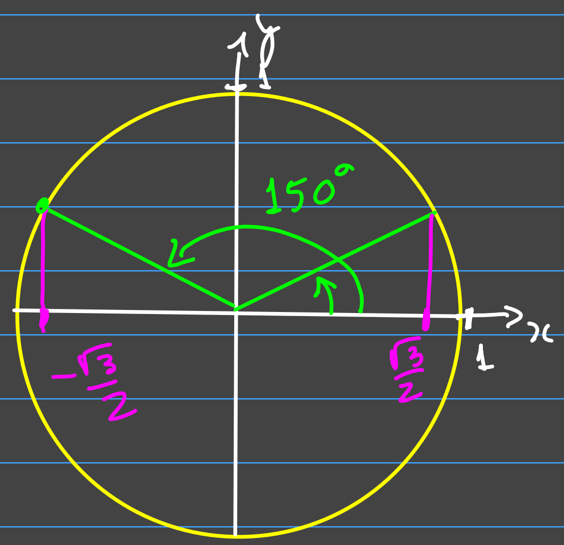
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 180° - 30° = 150°$$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Observação:

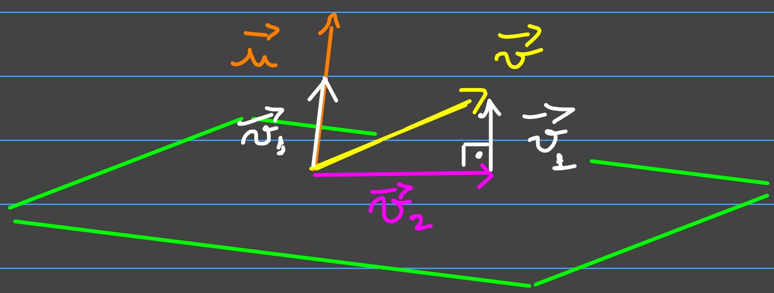
- Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ então $\cos\theta > 0$ e portanto $0 \leq \theta < 90°$, ângulo agudo.

- Se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ então $\cos\theta < 0$ e portanto $90° < \theta \leq 180°$, ângulo obtuso.

Projeção ortogonal:

Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo $(\vec{u} \neq \vec{0})$ e seja $\vec{v}$ um vetor qualquer.

Vamos decompor $\vec{v}$ como a soma de dois vetores $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sendo que $\vec{v}_1 // \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.



$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

Fórmula:

$$\vec{v}_1 = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

Como obter está fórmula?

Tome $\vec{v}_1 = \alpha \vec{u}$ pois $\vec{v}_1 // \vec{u}$

e faça o produto escalar de

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} + \vec{v}_2 \quad \begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v}_2 \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{array}$$

Com $\vec{u}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{u} + \vec{v}_2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{|\vec{u}|^2} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}_{0}$$

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \right) \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha |\vec{u}|^2$$

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2},$$

Exemplo: Encontre a projeção de $\vec{v} = (2, 3, 0)$ na direção de $\vec{u} = (1, 1, 1)$:

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \left(\frac{(2, 3, 0) \cdot (1, 1, 1)}{1^2 + 1^2 + 1^2} \right) \cdot (1, 1, 1) =$$

$$= \left(\frac{5}{3} \right) \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Observação: $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ só depende da direção de $\vec{u}$ (independe de módulo e sentido).

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \left(\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right) \cdot \vec{v} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right) = (\vec{n} \cdot \vec{v})\, \vec{n}$$

com $|\vec{n}| = 1$.

$|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|$

Definição de produto vetorial.

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(y_1 z_2 - y_2 z_1 ,\ x_2 z_1 - x_1 z_2 ,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \right)$$

"$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$", outra notação $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
$\vec{u} \times \vec{v}$

O produto vetorial tem propriedades análogas ao determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Duas propriedades importantes:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = - \vec{v} \times \vec{u}$$

Se $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ então $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
(ou seja, $\vec{u} = \alpha \vec{v}$)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha x_2 & \alpha y_2 & \alpha z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Intepretação geométrica de $\vec{u} \times \vec{v}$:

(I) direção: $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ simultaneamente.

(II) módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}|$ é a área do paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

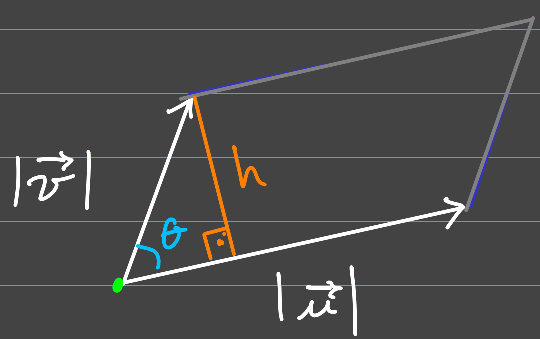
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

$0 \leq \theta \leq 180^\circ$

$0 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$

$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 180^\circ = 0$

$\operatorname{sen} 90^\circ = 1$



$h = |\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$

(III) sentido: os vetores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ seguem a mesma orientação que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ no espaço.

"Regra da mão direita"

Resumo

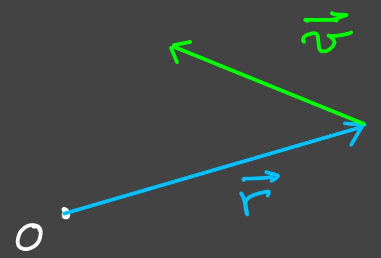
(I) direção: $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ simultaneamente.

(II) módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$
área do paralelogramo

(III) sentido: Regra da mão direita

Usos na física

momento angular

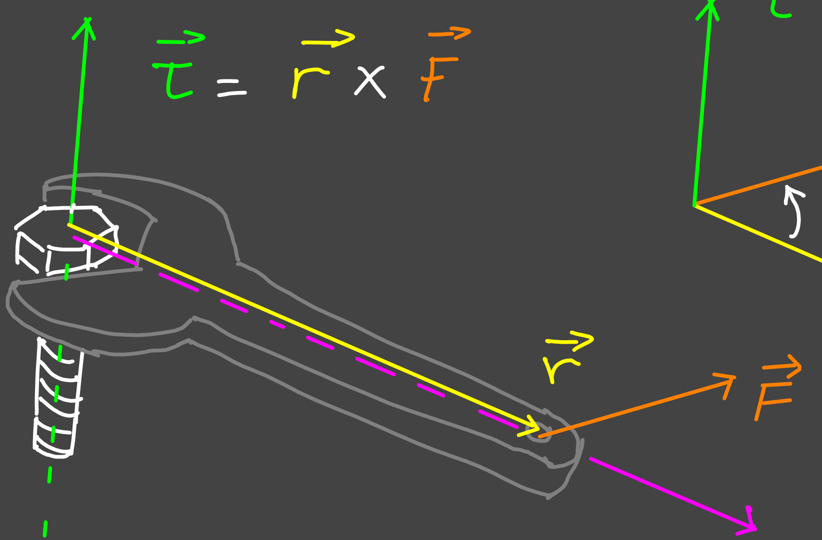


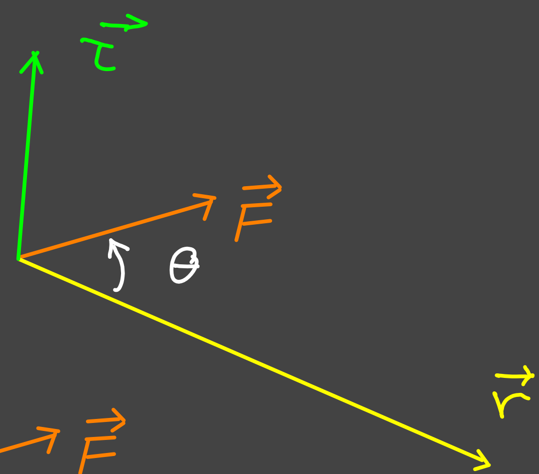
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$





$$|\vec{\tau}| = \underbrace{|\vec{r}|}_{\text{alavanca}}\,|\vec{F}|\,\operatorname{sen}\theta$$

Mais uma propriedade

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

vêm do determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} =$$

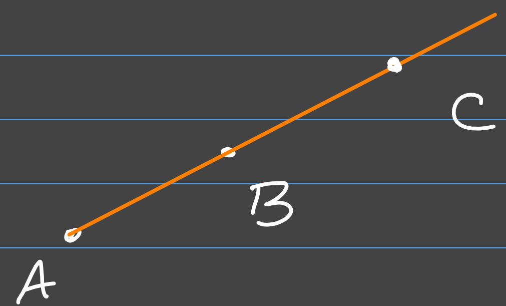
$$\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}_{\vec{u} \times \vec{v}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}_{\vec{u} \times \vec{w}}$$

Da mesma forma vale

$$(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}$$

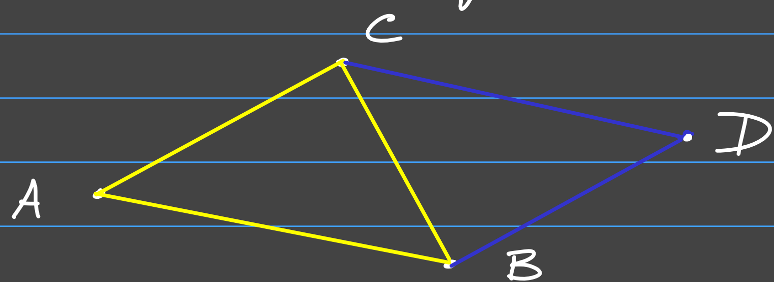
Três "hacks" úteis com produto vetorial

(1) Verificar se 3 pontos são colineares



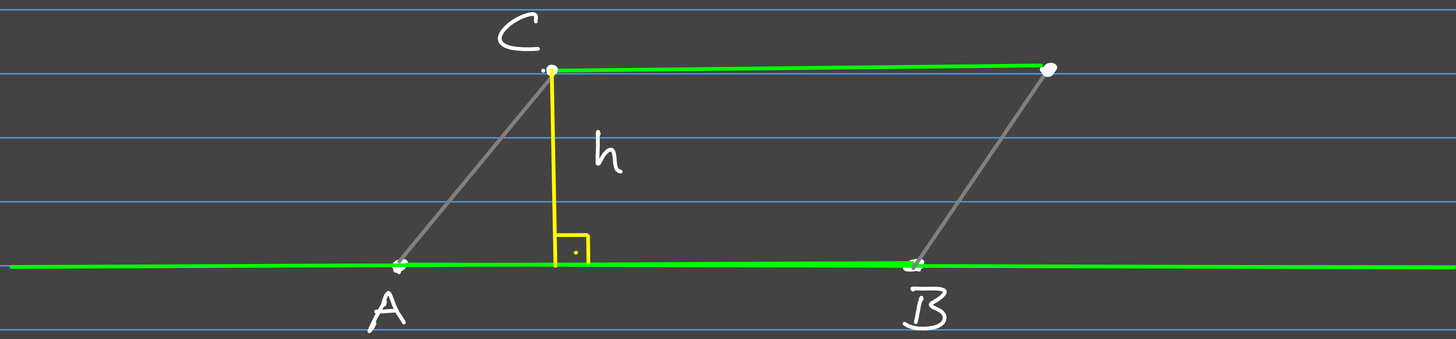
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0,0,0)$$

(2) Área de um triângulo



$\frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$ é a área do triângulo.

(3) Distância de um ponto a uma reta (altura de um triângulo)

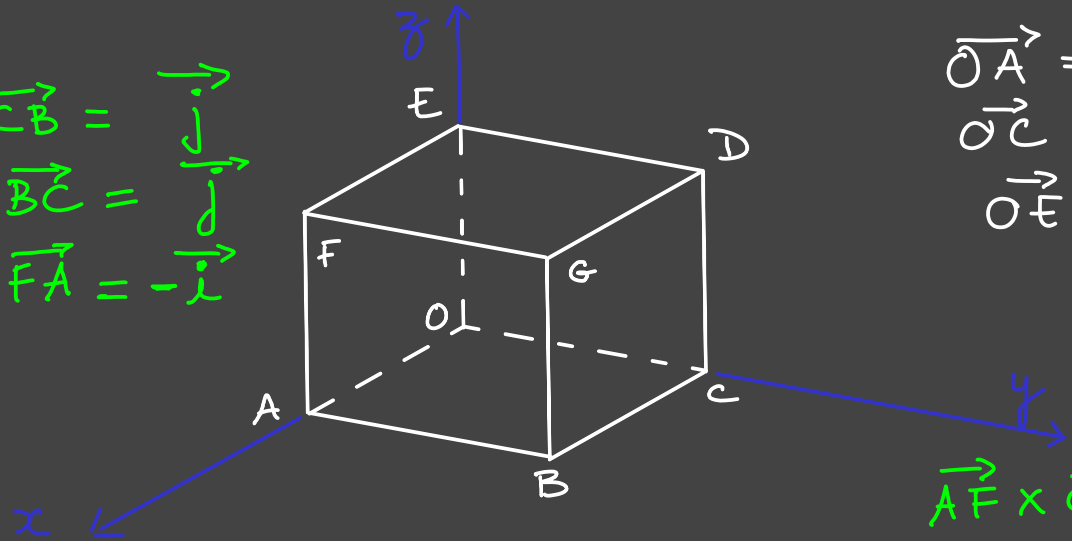


$|\vec{AB}| \cdot h =$ área do paralelogramo $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$h = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$$ = distância de C à reta por A e B.

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

$$\begin{cases} \vec{AF} \times \vec{CB} = \vec{j} \\ \vec{GB} \times \vec{BC} = \vec{j} \\ \vec{ED} \times \vec{FA} = -\vec{i} \end{cases}$$



$\vec{OA} = \vec{i}$

$\vec{OC} = \vec{j}$

$\vec{OE} = \vec{k}$

$\vec{AF} \times \vec{CB} = \vec{j}$

$\vec{GB} \times \vec{BC} = ?$

$\vec{ED} \times \vec{FA} = ?$

um cubo de arestas unitárias

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Definição: Dados três vetores, o produto misto é o determinante da matriz 3 x3 formado pelas coordedadas dos três vetores:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \ \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

$$\vec{u} = (2, 11, -22), \ \vec{v} = (0, -2, 3), \ \vec{w} = (0, 0, 3)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 11 & -22 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

O produto misto também pode ser calculado usando o produto escalar e vetorial da seguinte forma:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

pois sabemos que de $\vec{v} \times \vec{w}$ vale

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Usaremos as seguintes propriedades de determinantes:

* Troca de linhas troca o sinal do determinante

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad L_1 \Leftrightarrow L_3$$

Analogamente: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$

"Se duas linhas são iguais etnão o determinante é zero."

Como consequência: $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

* Uma constante multiplicando uma linha pode ser "fatorada".

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-35) = 70$$

Análogamente: $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

* Somas dentro de uma única linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2+8 & 7-3 & -3+0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Analogamente, somando $\vec{x}$ a um dos vetores, vale escrever:

$$(\vec{u}+\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}+\vec{x}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{x}, \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+\vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Exemplo: Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -3$,

calcule $(\vec{u}, \vec{v} - 2\vec{u}, 3\vec{w})$.

$(\vec{u}, \vec{v} - 2\vec{u}, -2\vec{w}) =$

A propriedade geométrica mais importante do produto misto:

$$\boxed{|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \text{volume do paralelepípedo determinado pelos 3 vetores}}$$

Como

$$\boxed{|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \text{volume do paralelepípedo determinado pelos 3 vetores}}$$

concluimos que:

" Os três vetores u, v, e w são coplanares se, e somente se, (u,v,w) = 0 "

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$$

Exemplo: Para qual valor x os pontos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ e $D(x,x,x)$ são coplanares?

$$\vec{AB} = (-1,1,0),\ \vec{AC} = (-1,0,2),\ \vec{AD} = (x-1,x,x)$$

Vamos (tentar) escolher x de modo que

$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$, ou seja,

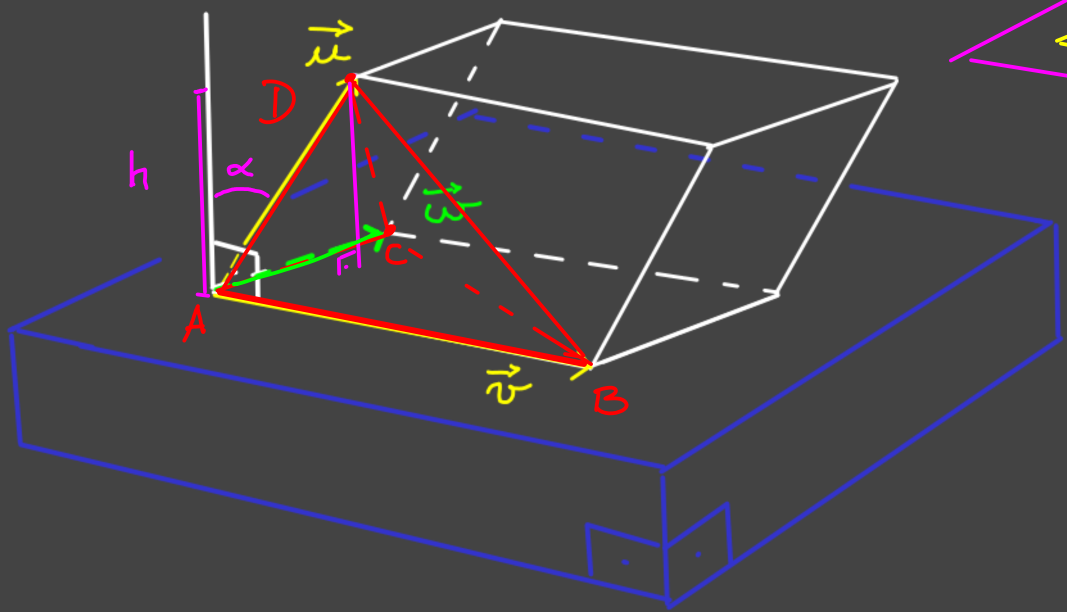
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ x-1 & x & x \end{vmatrix} = 0$$

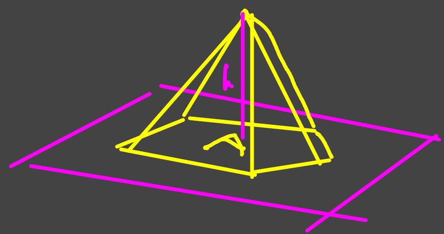
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ x-1 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ x & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 =$$

$= x\left(2-(-2)-(-1)\right) - 2 = 5x - 2$ que igualamos a zero, logo $x = \frac{2}{5}$.

Cálculo do volume de um tetraedro





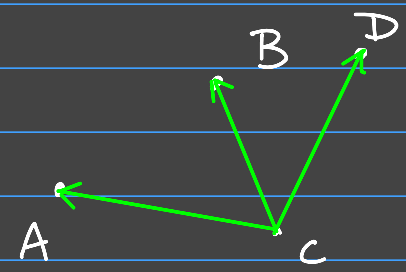
ABC

$$\text{Area da base} \cdot \frac{h}{3} = \frac{|\vec{v} \times \vec{w}|}{2} \cdot \frac{|\vec{u}|\,|\cos\alpha|}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \right|$$

https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw

Exemplo: Dados 4 pontos no espaço $A\left(\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-t\right)$, $B(0,2,3)$, $C(1,0,-1)$, $D(-1,1,1)$, encontre o volume do tetraedro formado por esses pontos em função de t.



$$\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}, \frac{5}{2}-t\right)$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1, 2, 4)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-2, 1, 2)$$

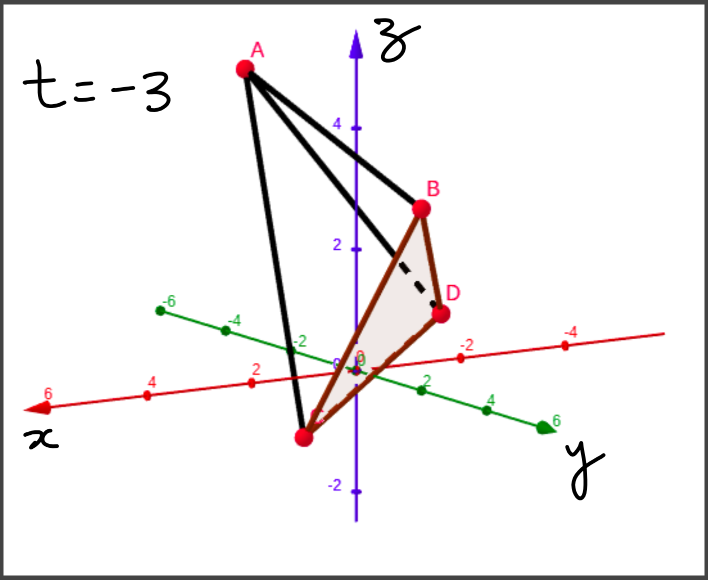
O volume é

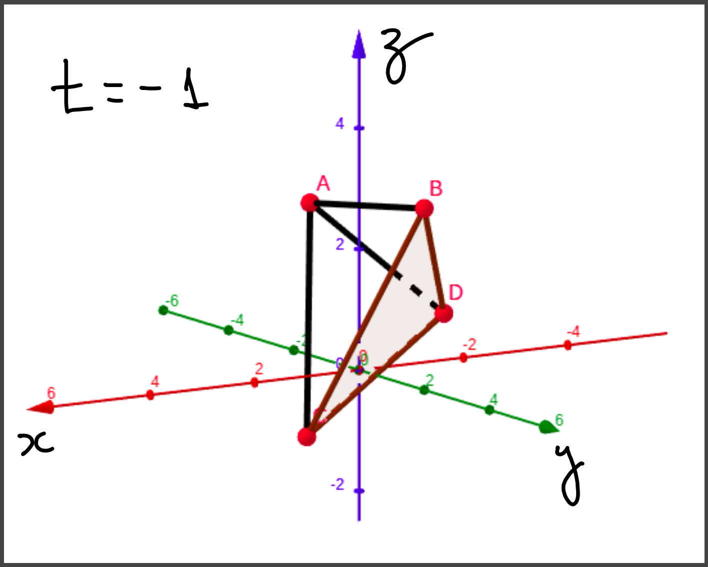
$$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & t+\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-t \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| =$$

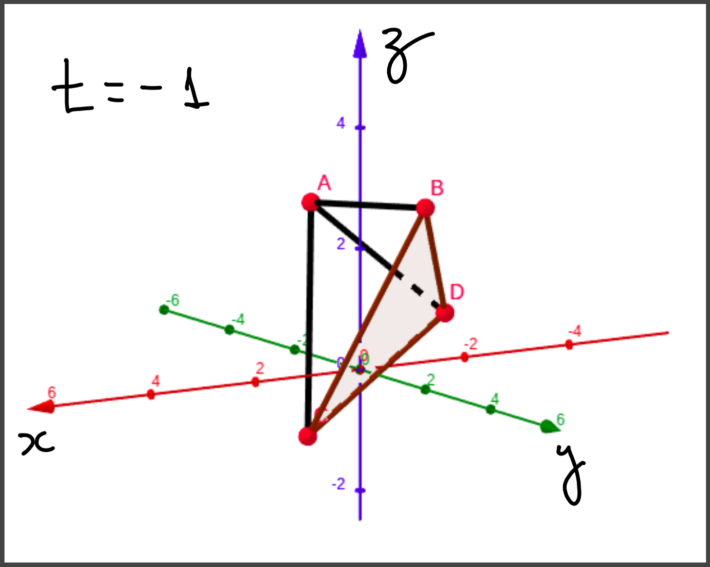
$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 & 5/2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & t & -t \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| =$$

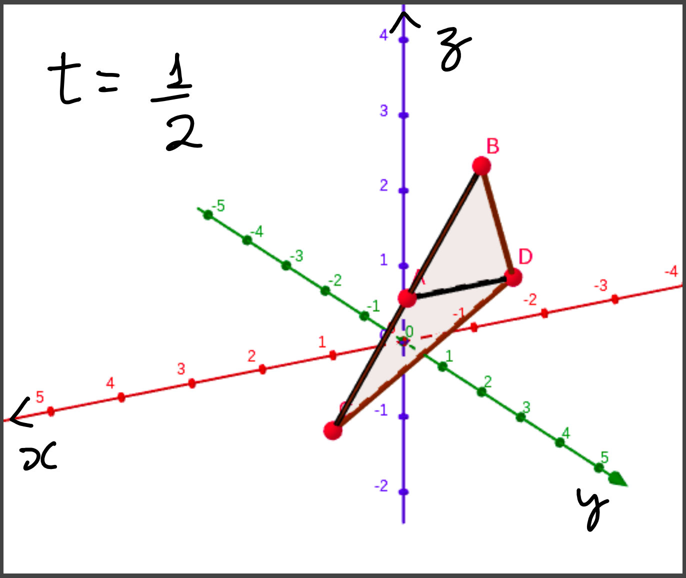
$$= \frac{1}{6}\left|\frac{9}{2} + t\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{9}{2} + t(-9)\right|$$

O volume é igual a $\left|\frac{3}{4} - \frac{3}{2}t\right|$ (O volume é zero em $t = 1/2$)









https://www.youtube.com/channel/UC0-L9ii_8wIm6sM742RCscw