

## Aula 13

# Limites indeterminados e as regras de L'Hopital

Nesta aula, estaremos apresentando as *regras de L'Hopital*, regras para calcular limites indeterminados, da forma  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ , usando derivadas. Estaremos também examinando gráficos de funções envolvendo funções exponenciais.

Diremos que o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  tem a forma indeterminada  $0/0$ , se o quociente de funções reais  $f(x)/g(x)$  está definido em um conjunto da forma  $I - \{a\}$  (sendo  $I$  um intervalo, e  $a$  uma extremidade ou ponto interior de  $I$ ),  $f(x)$  e  $g(x)$  são contínuas e deriváveis para  $x \neq a$ , e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Diremos que o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  tem a forma indeterminada  $\infty/\infty$ , se o quociente de funções reais  $f(x)/g(x)$  está definido em um conjunto da forma  $I - \{a\}$  (sendo  $I$  um intervalo, e  $a$  uma extremidade ou ponto interior de  $I$ ),  $f(x)$  e  $g(x)$  são contínuas e deriváveis para  $x \neq a$ , e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

Os mesmos conceitos são definidos analogamente se tivermos  $x \rightarrow a^+$  ou  $x \rightarrow a^-$ , ou ainda se  $a = \pm\infty$ .

São duas as chamadas regras de L'Hopital. Uma para formas indeterminadas  $0/0$  e outra para formas indeterminadas  $\infty/\infty$ . Ambas podem ser enunciadas conjuntamente em um único teorema (que não demonstraremos).

**Teorema 13.1** (Regras de L'Hopital). Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  tem uma forma indeterminada  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

caso o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$  exista (sendo finito ou infinito). O mesmo vale se  $a$  é substituído por  $a^+$  ou  $a^-$ , ou se  $a = +\infty$  ou  $-\infty$ .

**Exemplo 13.1.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$

*Solução.* Um cálculo direto nos dá a forma indeterminada  $0/0$ . Isto quer dizer que 2 é raiz do numerador e do denominador de  $(x^2 - x - 2)/(3x^2 - 5x - 2)$ . Pelo método algébrico já estudado, fatoramos  $x - 2$  em ambas as expressões quadráticas e obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(3x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 1)}{\cancel{(x - 2)}(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{3x + 1} = 3/7 \end{aligned}$$

Aplicando regras de L'Hopital, não necessitamos da fatoração:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)'}{(3x^2 - 5x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{6x - 5} = 3/7$$

No caso de quociente de polinômios, não precisamos das regras de L'Hopital, mas às vezes as regras de L'Hopital são nosso único recurso para o cálculo de um limite, que é o caso do limite do próximo exemplo.

**Exemplo 13.2.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

O limite é indeterminado, da forma  $0/0$ , a agora não podemos colocar em evidência nenhuma potência de  $x$ . Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad (= 0/0, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = 1/6 \quad (\text{usando } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1) \end{aligned}$$

**Exemplo 13.3.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

Aqui temos uma indeterminação da forma  $\infty/\infty$ . Aplicando L'Hopital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} \quad (= \infty/\infty, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2e^{2x})'}{(3x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{6x} \quad (= \infty/\infty, \text{ aplicamos novamente L'Hopital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^{2x}}{6} = \frac{+\infty}{6} = +\infty\end{aligned}$$

No cálculo de limites, sabemos que também  $0 \cdot \infty$  e  $(+\infty) - (+\infty)$  são símbolos de indeterminação. No caso  $0 \cdot \infty$  também podemos aplicar regras de L'Hopital, após uma manipulação conveniente das funções no limite.

Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$  é indeterminado na forma  $0 \cdot \infty$ , isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ .

Neste caso, podemos fazer

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = 0/0$$

e então, aplicando L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(1/g(x))'}$$

ou alternativamente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \infty / \pm \infty$$

e então, por L'Hopital, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{(1/f(x))'}$$

**Exemplo 13.4.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ .

Temos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty)$ . Recorde-se de que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  (veja aula 9).

Neste caso, fazemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad (= -\infty / +\infty, \text{ aplicamos L'Hopital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0\end{aligned}$$

## 13.1 Regras de L'Hopital frente a novos símbolos de indeterminação em limites

Estudaremos agora procedimentos para lidar com os símbolos de indeterminação  $0^0$ ,  $\infty^0$  e  $1^\infty$ , usando regras de L'Hopital.

Em toda a literatura de matemática universitária, adota-se, ainda que sub-liminarmente às vezes, a definição  $0^0 = 1$ . No cálculo de limites no entanto,  $0^0$  é um símbolo de indeterminação. O exemplo abaixo explica porquê.

Consideremos a função  $f(x) = x^{k/\ln x}$  ( $k$  constante), definida para  $x > 0$ . Vimos na aula 9, que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$ .

Assim, utilizando *álgebra de limites*, temos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^{k/\ln 0^+} = 0^{k/-\infty} = 0^0$ .

No entanto,  $f(x) = x^{k/\ln x} = e^{\ln(x^{k/\ln x})} = e^{\frac{k}{\ln x} \cdot \ln x} = e^k$ , ou seja,  $f(x)$  é a função constante  $e^k$ , e portanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^k$ .

Também são formas indeterminadas, ou seja, símbolos de indeterminação, as expressões  $1^\infty$  e  $\infty^0$ .

Suponhamos que o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  tem uma das formas indeterminadas  $0^0$ ,  $\infty^0$  ou  $1^\infty$ . Aqui deveremos ter  $f(x) > 0$  no domínio da função  $f^g$ .

Em qualquer um desses casos, fazemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

e então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L$$

sendo

$$L = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)]$$

Para as formas indeterminadas  $0^0$ ,  $\infty^0$  e  $1^\infty$ , o limite  $L = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)]$  terá sempre a forma indeterminada  $0 \cdot \infty$  (ou  $\infty \cdot 0$ ), e então podemos aplicar L'Hopital segundo truques anteriormente estudados.

**Exemplo 13.5.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$  (aqui,  $x \rightarrow 0$  significa  $x \rightarrow 0^+$ ).

*Solução.* Aqui temos uma indeterminação  $0^0$ . Seguindo procedimento descrito acima, fazemos

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

e então  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^L$ , sendo  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ .

Pelo exemplo 13.4,  $L = 0$  e portanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$

**Exemplo 13.6.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x}$ .

Aqui temos uma indeterminação  $1^\infty$ .

Fazemos  $(1 + \sin 2x)^{1/x} = e^{\ln(1 + \sin 2x)^{1/x}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + \sin 2x)}$ . Então

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x} = e^L$ , sendo

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} \quad (= 0/0).$$

Aplicando L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1 + \sin 2x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sin 2x} \cdot 2 \cos 2x = 2.$$

Portanto  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x} = e^2$ .

As regras de L'Hopital, nos casos de indeterminação  $0/0$  e  $\infty/\infty$ , dizem que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ , mas somente quando este último limite é efetivamente computável.

No exemplo 13.7, temos uma indeterminação  $\infty/\infty$  para a qual a regra de L'Hopital não se aplica porque o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$  não existe, mas o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  é calculável por outros meios.

**Exemplo 13.7.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ .

*Solução.* Temos  $\sin x \geq -1$ , daí  $x + \sin x \geq x - 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Logo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ . Assim sendo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$ , e o limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$  é indeterminado na forma  $\infty/\infty$ .

Aplicando L'Hopital, consideramos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x)$ . Este limite não existe (não é finito nem infinito) pois quando  $x$  cresce indefinidamente,  $\cos x$  fica oscilando indefinidamente entre  $-1$  e  $+1$ .

Entretanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ , pois, sendo  $x > 0$ , como  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , temos  $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$ , e portanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

No próximo exemplo, temos um caso curioso em que o limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe mas a regra de L'Hopital se mostra ineficaz.

**Exemplo 13.8.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1}$

*Solução.* O limite é indeterminado na forma  $\infty/\infty$ .

Aplicando L'Hopital, usando o fato de que  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  teremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2 + x})'}{(2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

e assim vemos que o efeito por aplicarmos L'Hopital foi a troca de posição entre numerador e denominador na função algébrica do limite proposto. Se aplicarmos L'Hopital novamente, permutaremos numerador e denominador e retornaremos ao limite inicial.

O limite é calculado diretamente por uma manipulação algébrica simples:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{2x(1 + \frac{1}{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{2x}(1 + \frac{1}{2x})} = 1.$$

## 13.2 Novos exemplos de gráficos envolvendo funções exponenciais

Como veremos nos dois exemplos seguintes, as regras de L'Hopital são um recurso útil quando analisamos o comportamento de certas funções que envolvem funções exponenciais.

**Exemplo 13.9.** Esboçar o gráfico de  $f(x) = 2xe^{-x^2}$ .

*Solução.* Temos  $D(f) = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ , e  $f'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ . Os pontos críticos de  $f$  são  $\pm\sqrt{2}/2$ . Lembremo-nos de que, por derivação em cadeia,  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ .

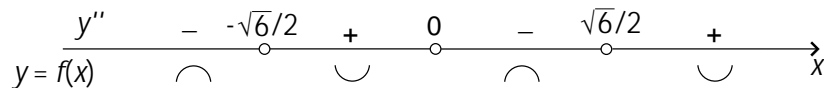
Assim, Temos  $f'(x) > 0$  se  $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$ , e  $f'(x) < 0$  se  $x > \sqrt{2}/2$  ou se  $x < -\sqrt{2}/2$ . Portanto  $f$  é crescente em  $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ , e decrescente em cada um dos intervalos  $[\sqrt{2}/2, +\infty[$  e  $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$ .

$x_1 = -\sqrt{2}/2$  é um ponto de mínimo local de  $f$ , e  $x_2 = \sqrt{2}/2$  é um ponto de máximo local de  $f$ . Temos  $f(-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$  e  $f(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}e^{-1/2}$ . Para o esboço do gráfico, usaremos  $\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 1,4 \cdot 0,6 = 0,84$

$$f''(x) = -12xe^{-x^2} + 8x^3e^{-x^2} = 4e^{-x^2}(2x^3 - 3x) = 4e^{-x^2}x(2x^2 - 3).$$

$$f''(x) = 0 \text{ se e somente se } x = \pm\sqrt{6}/2 \text{ ou } x = 0.$$

A variação de sinais de  $f''$ , com a correspondente análise das concavidades do gráfico de  $f$ , é dada no diagrama abaixo.



São pontos de inflexão do gráfico os pontos  $P_1 = (-\sqrt{6}/2, -\sqrt{6}e^{-3/2})$ ,  $P_2 = (0, 0)$  e  $P_3 = (\sqrt{6}/2, \sqrt{6}e^{-3/2})$ . Temos,  $\sqrt{6}/2 \approx 1,3$ ,  $f(-\sqrt{6}/2) = -\sqrt{6}e^{-3/2} \approx -2,5 \cdot 2,2 \approx -0,6$ ,  $f(0) = 0$  e  $f(\sqrt{6}/2) = \sqrt{6}e^{-3/2} \approx 0,6$ .

Pesquisando a existência de assíntotas do gráfico temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2xe^{-x^2} = \pm\infty \cdot e^{-\infty} = \pm\infty \cdot 0.$$

Para evitarmos a indeterminação, fazemos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} \left( = \frac{\infty}{\infty} \right).$$

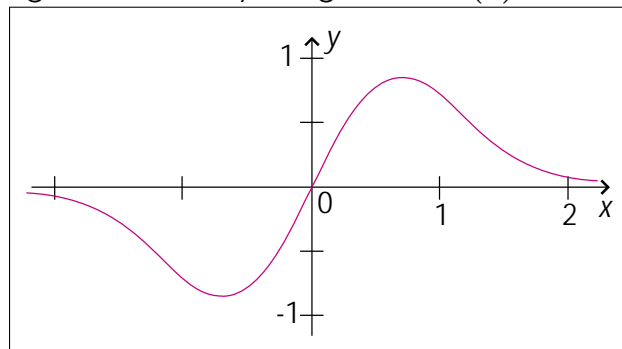
Aplicando regras de L'Hopital, temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

Assim, a reta  $y = 0$  (eixo  $x$ ) é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ .

Com base nos elementos estudados, o gráfico de  $f$  é esboçado na figura 13.1.

Figura 13.1. Esboço do gráfico de  $f(x) = 2xe^{-x^2}$ .



**Exemplo 13.10.** Esboçar o gráfico de  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$ .

*Solução.* Do exemplo 13.5, temos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ . Esta é uma informação relevante para esboçarmos o gráfico de  $f$  nas proximidades de  $x = 0$ .

No exemplo 10.1, da aula 9, obtivemos  $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$ .

Assim,  $f'(x) = 0$  se e somente se  $\ln x = -1$ , isto é,  $x = e^{-1} = 1/e$ .

Como  $\ln x = \log_e x$  tem base  $e > 1$ , a função  $\ln$  é crescente, e portanto  $f'(x) > 0$  quando  $\ln x > -1$ , logo para  $x > e^{-1} = 1/e$ , e  $f'(x) < 0$  para  $x < 1/e$ .

Daí, a função  $x^x$  é decrescente no intervalo  $]0, 1/e]$  e crescente no intervalo  $[1/e, +\infty[$ , sendo  $1/e$  um ponto de mínimo local (e absoluto) de  $f$ . Temos ainda  $f(1/e) = (1/e)^{1/e} \approx 0,7$ .

Finalmente,  $f''(x) = x^x \cdot [(1/x) + (1 + \ln x)^2]$ , e assim  $f''(x) > 0$  para todo  $x > 0$ , e então o gráfico de  $f$  tem concavidade sempre voltada para cima.

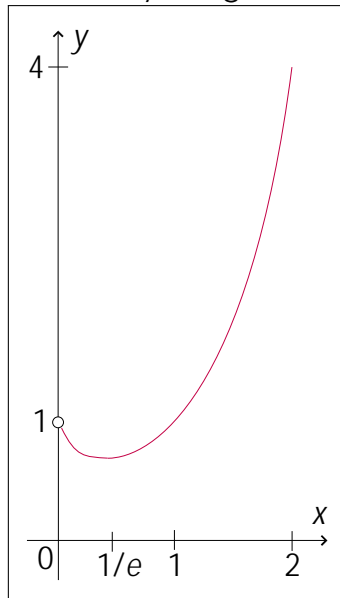
Obviamente  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$ . O gráfico de  $f$  é esboçado na figura 13.2.

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x-1} = +\infty$$

e portanto o gráfico de  $f$  não tem assíntotas.

Figura 13.2. Esboço do gráfico de  $y = x^x$ .





### 13.3 Problemas

1. Calcule os seguintes limites, aplicando regras de L'Hopital se necessário.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} \text{ (n inteiro positivo)}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} \text{ (n inteiro positivo)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^x$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda e^{-x} \text{ (\lambda real positivo)}$$

*Respostas.* (a)  $-1/3$ . (b) 0. (c)  $1/2$ . (d) 0. (e)  $+\infty$  se  $n$  é par,  $-\infty$  se  $n$  é ímpar. (f) 0. (g) 1. (h) 1. (i)  $e^3$ . (j)  $e$ . (k) 1. (l) 0.

2. Calcule as equações das retas assíntotas do gráfico de cada uma das seguintes funções.

$$(a) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \quad (b) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(c) y = 2x \cdot e^{-1/x} \quad (d) y = x^2 e^{-x}$$

$$(e) y = \frac{\sin x}{x}$$

*Respostas.* (a)  $y = 0$ , e  $x = 0$ . (b)  $x = -1$ ,  $y = e$ . (c)  $x = 0$ , e  $y = 2x - 2$ . (d)  $y = 0$ . (e)  $y = 0$ .

3. Esboce os gráficos das seguintes funções.

$$(a) y = 2xe^{-x} \quad (b) y = e^{-x^2}$$

$$(c) y = 2x^2 e^{-x^2} \quad (d) y = \frac{2 \ln(2x)}{x}$$

*Respostas.*

(Daremos as derivadas como suporte às soluções.)

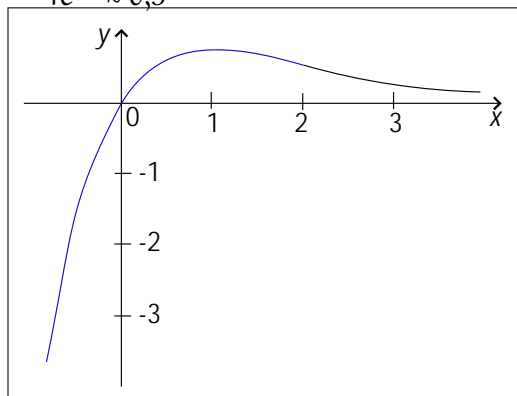
$$(a) y' = 2(1 - x)e^{-x}, y'' = 2(x - 2)e^{-x}$$

$$(b) y' = -2xe^{-x^2}, y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

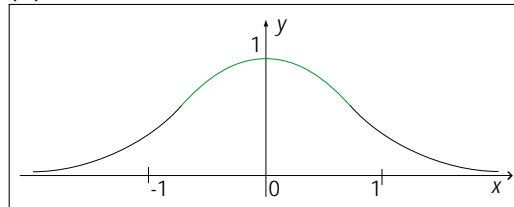
(c)  $y' = 4xe^{-x^2}(1 - x^2)$ ,  $y'' = 4e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4)$ , os zeros de  $y''$  são  $\pm \frac{1}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$ , sendo aproximadamente  $\pm 0,5$  e  $\pm 1,5$ .

$$(d) y' = 2[1 - \ln(2x)]/x^2, y'' = 2[-3 + 2\ln(2x)]/x^3.$$

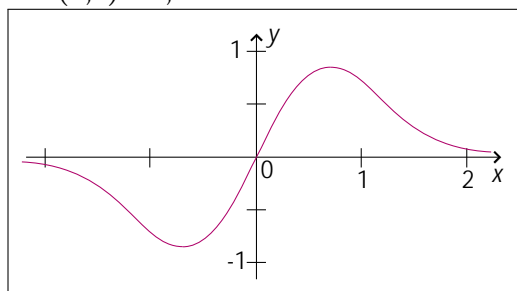
(a) *Dados numéricos.*  $2e^{-1} \approx 0,7$   
 $4e^{-2} \approx 0,5$



(b) *Dados numéricos.*  $e^{-1/2} \approx 0,6$ .



(c) *Dados numéricos.*  $f(0,5) \approx 0,4$   
 $f(1,5) \approx 0,5$



(d) *Dados numéricos.*  $e/2 \approx 1,4$   
 $e^{3/2}/2 \approx 2,2$ .

