RESUMO: Retas,Planos e Distância

Olimpio Hiroshi Miyagaki
Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos
São Carlos, SP, CEP:13565-905, Brazil
olimpio@ufscar.br

UFSCAR- 2021[1]

[1]Notas baseados nos textos

1. Paulo Boulos, Geometria analítica-Um tratamento vetorial, Mc Graw Hill 1986
2. Reginaldo J. Santos, Matrizes vetores e Geometria anal'ıtica, UFMG, 2010, disponivel: www.mat.ufmg.br/- regi

1 Retas

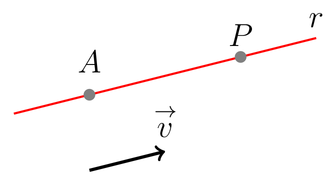
Equação da reta

- Reta r passando pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$, e na direção $\vec{v} = (a, b, c)$

$$P = P(x,y,z) \in r \iff \overrightarrow{AP} \;//\; \vec{v}$$

$$\iff \overrightarrow{AP} = r\,\vec{v} \iff P - A = t\,\vec{v}$$

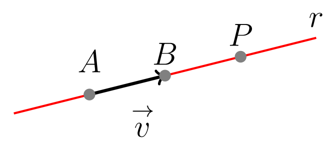
$$\boxed{\boxed{P = A + t\,\vec{v},\ t \in \mathbb{R}}}$$



- Reta r passando por dois pontos A e B.

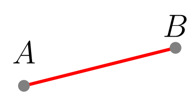
  neste caso: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então

$$\boxed{\boxed{P = A + t\,\overrightarrow{AB} \iff P = A + t(B - A),\ t \in \mathbb{R}}}$$



- segmento de reta $\overline{AB}$ (de A para B.

$$\boxed{\boxed{P = A + t\,\overrightarrow{AB} \iff P = A + t(B - A),\ t \in [0, 1]}}$$



- Equações paramétricas da reta, r, passando pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$, e na direção $\vec{v} = (a, b, c)$. $P(x, y, z) \in r$ então

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}$$

- Equações simétricas da reta, r, passando pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$, e na direção $\vec{v} = (a, b, c)$.

  $P(x, y, z) \in r$ então

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

  OBS:

  - Se $\vec{v} = (a, b, c) = (a, b, 0)$ então

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},\ z = z_0}$$

  - Se $\vec{v} = (a, b, c) = (a, 0, 0)$ então

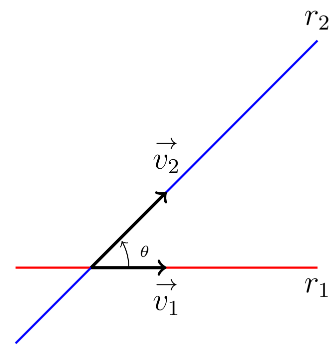
$$\boxed{x = x_0 + at,\ y = y_0,\ z = z_0}$$

- Equações reduzidas

  Das equações simétricas, isolar duas variáveis em função da terceira, por exemplo, escrever x e y em fun c cão de z

- ângulo entre duas retas

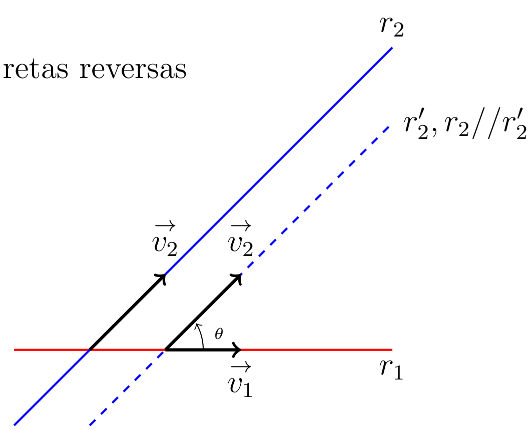
retas concorrentes



Sejam duas retas r_1 e r_2, retas nas direções $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, respectivamente, então o ângulo entre r_1 e r_2, é o menor ângulo entre os vetores diretores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, dado por

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{\| \vec{v_1} \| \| \vec{v_2} \|}, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$$

retas reversas



- Retas ortogonais

  Sejam duas retas r_1 e r_2, retas nas direções $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, respectivamente.

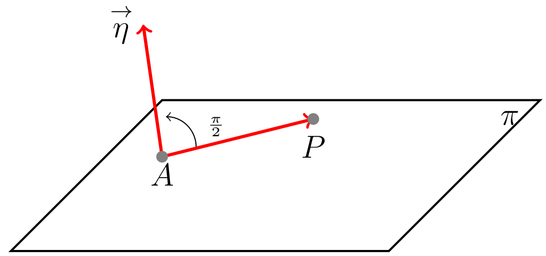
$$\boxed{r_1 \perp r_2 \iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0}$$

2 Equação geral do plano

- Plano

Plano π passando pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e normal (ortogonal) ao vetor $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$, para $P(x, y, z) \in \pi$ temos

$$\boxed{\overrightarrow{AP} \perp \vec{\eta} \iff \overrightarrow{AP} \cdot \vec{\eta} = 0}$$



$$\boxed{(P - A) \cdot \vec{\eta} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0.}$$

onde

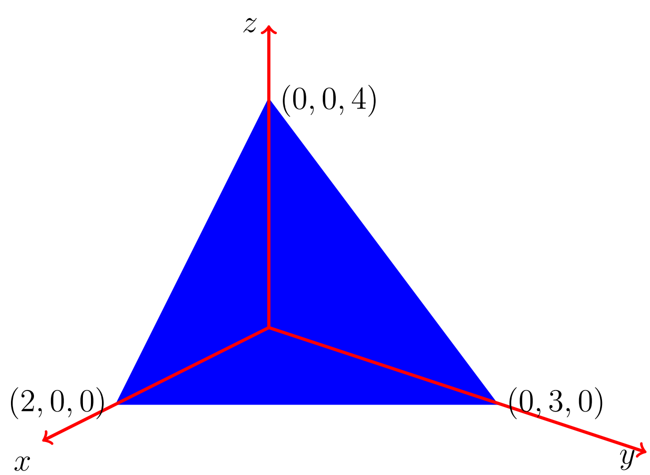
$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

- Exemplo

  Plano π dado por

$$\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0}$$

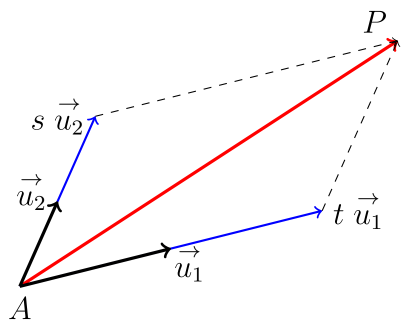
  corta os eixos coordenados em $2, 3$ e 4.



- Plano π passando pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e paralelo aos vetores $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$

  OBS: note que a normal é dada por:

$$\vec{\eta} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$$



– Equação vetorial: $P \in \pi \iff$

$$\boxed{\vec{AP} = t\,\vec{u_1} + s\,\vec{u_2},\ \ s,t \in \mathbb{R},}$$

ou

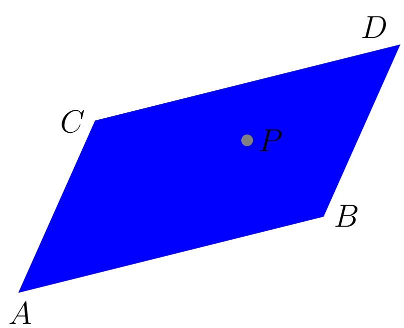
$$\boxed{P = A + t\,\vec{u_1} + s\,\vec{u_2},\ \ s,t \in \mathbb{R},}$$

– Equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta_1 + sa_2 \\ y &= y_0 + tb_1 + sb_2 \\ z &= z_0 + tc_1 + sc_2 \end{cases}$$

- Paralelogramo $ABCD$

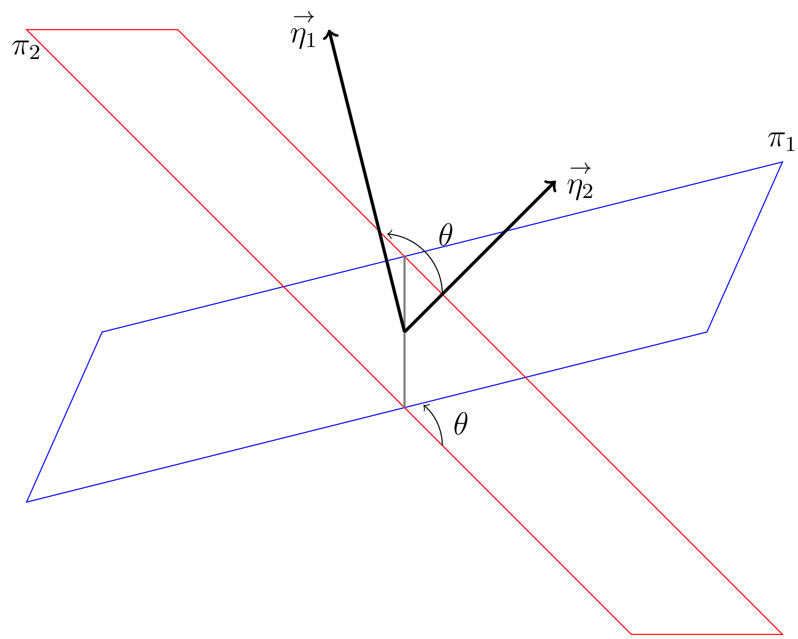
$$\boxed{P = A + t\,\vec{AB} + s\,\vec{AC},\ \ s,t \in [0,1]}$$



3 ângulo entre planos e retas:

- ângulo entre planos O ângulo entre planos π_1 e π_2 com normais $\vec{\eta_1}$ e $\vec{\eta_2}$, respectivamente, é dado por:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\,\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2}\,|}{\|\,\vec{\eta_1}\,\|\|\,\vec{\eta_2}\,\|},\ \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$$



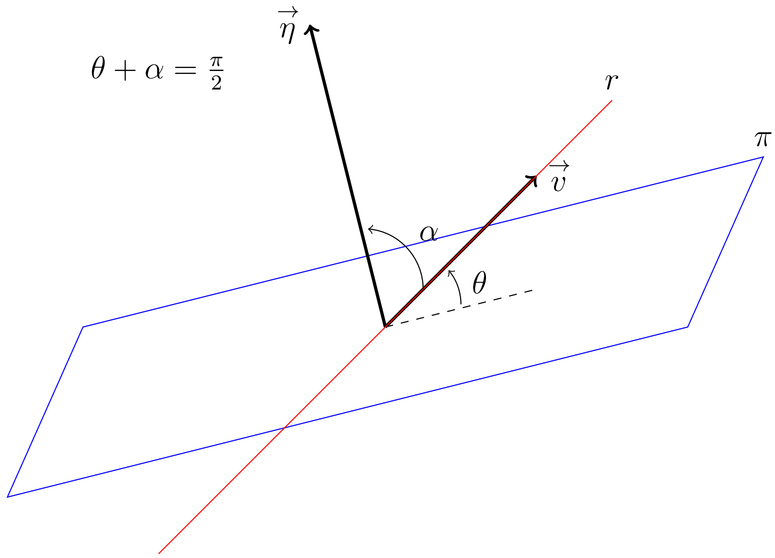
OBS: π_1 e π_2 são perpendiculares, se $\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2} = 0$.

- ângulo entre reta e plano: O ângulo entre uma reta r e um plano π, sendo $\vec{v}$ vetor diretor de r, e $\vec{\eta}$, vetor normal a π, é dado por:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{\eta}\|}, \ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}],}$$

sendo $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\boxed{\text{sen}\theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{\eta}\|}, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]}$$



4 Relações entre reta r com vetor diretor $\vec{v}$ e um plano π com normal $\vec{\eta}$.

- paralelismo

$$\boxed{r//\pi \iff \vec{v} \perp \vec{\eta} \iff \vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0}$$

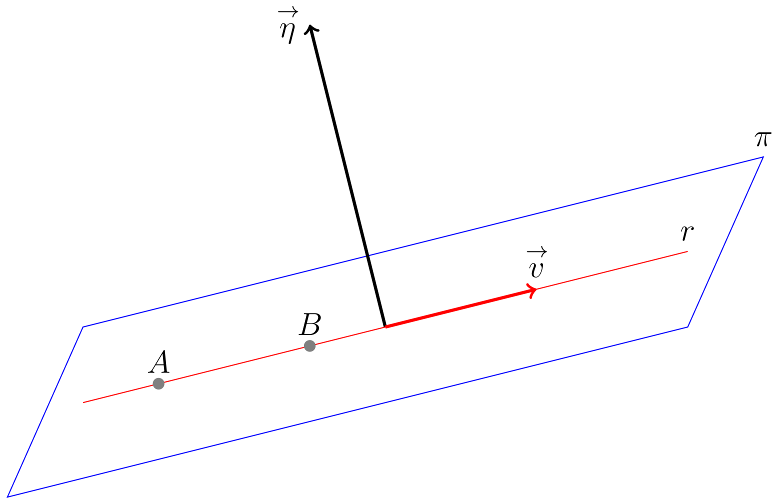
- perpendicularismo

$$\boxed{r \perp \pi \iff \vec{v} // \vec{\eta} \iff \vec{v} = t\,\vec{\eta}, t \in \mathbb{R}.}$$

- reta r contida no plano π Se
  - $$\boxed{A, B \in r \iff A, B \in \pi}$$

  ou

  - $$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0 \text{ e } A \in r \Longrightarrow A \in \pi.}$$

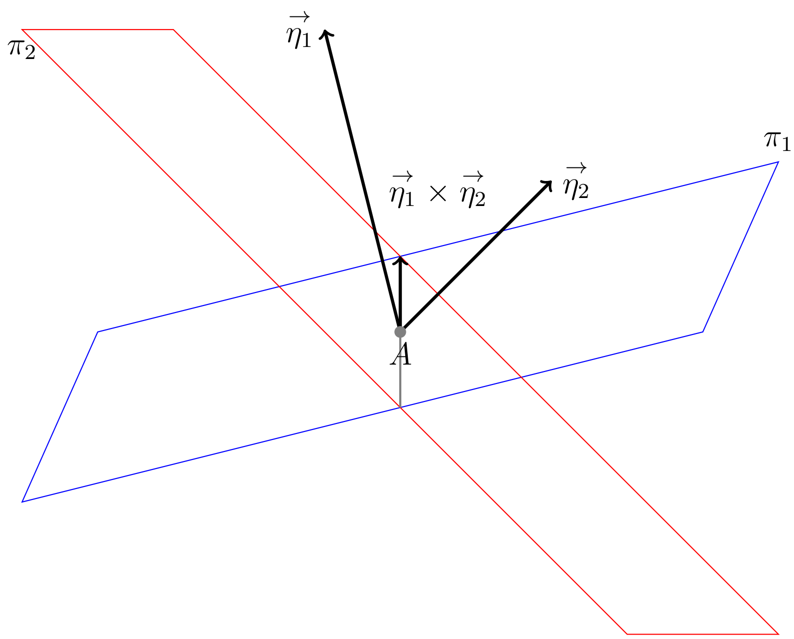


- Interseção dos planos π_1 e π_2, de normais $\vec{\eta_1}$ e $\vec{\eta_2}$, respectivamente.

  Teremos uma reta na direção

$$\vec{v} = \vec{\eta_1} \times \vec{\eta_2}$$

  passando por um ponto $A \in \pi_2 \cap \pi_2$.



- Interseção da reta r de vetor diretor $\vec{v}$ com um plano π,de normal $\vec{\eta}$, respectivamente.

  Neste caso, teremos três casos:

  - $r \cap \pi = r$ (reta contida no plano, e $\vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0$)
  - $r \cap \pi = \{P\}$ ($\vec{v} \cdot \vec{\eta} \neq 0$)
  - $r \cap \pi = \emptyset$ (reta paralela ao plano, e $\vec{v} \cdot \vec{\eta} = 0$)

5 Distâncias

- Entre dos pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}}$$

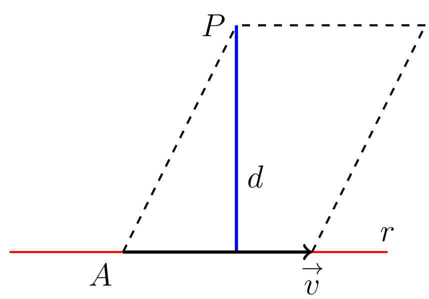
- distância entre um ponto P e uma reta r de direção $\vec{v}$

Tome $A \in r$, como a área do paralelogramo determinada pelo pelos vetores $\vec{AP}$ e $\vec{v}$, é dada por

$$\| \vec{AP} \times \vec{v} \| = d \| \vec{v} \|,$$

então

$$\boxed{d = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}, \ A \in r.}$$



- distância entre um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e um plano π de normal $\vec{\eta} = (a, b, c)$

Tome $A \in \pi$. A distância é o módulo do vetor projeção ω do vetor $\vec{AP}$ sobre $\vec{\eta}$, dada

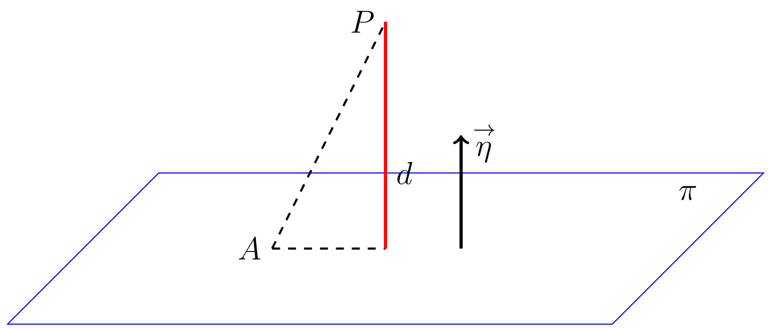
$$\vec{\omega} = \text{Proj}_{\vec{\eta}} \vec{AP} = \left(\frac{\vec{AP} \cdot \vec{\eta}}{\| \vec{\eta} \|^2}\right) \vec{\eta} \ .$$

$$\boxed{d = |\text{Proj}_{\vec{\eta}} \vec{AP}| = |\frac{\vec{AP} \cdot \vec{\eta}}{\|\vec{\eta}\|}|}$$

ou

$$\boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

onde $ax + by + cz + d = 0$ é a equação do plano π.



- distância entre dois planos π_i de normal $\vec{\eta_i} = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2$

  Neste caso recaí na distância de um ponto ao plano

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1), \text{ onde } P \in \pi_2.}$$

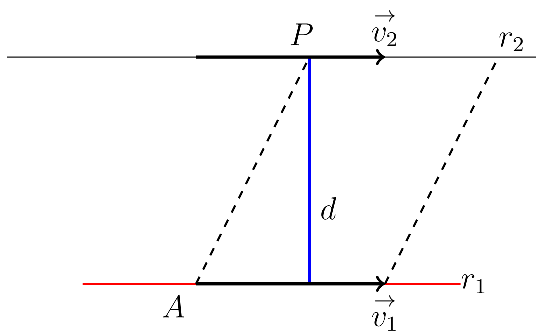
- distância entre duas reta r_i de direção $\vec{v_i} = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2$

  - r_1 e r_2 são concorrentes:

$$\boxed{d(r_1, r_2) = 0}$$

  - r_1 e r_2 são paralelos: Neste caso recaí na distância de um ponto a uma reta

$$\boxed{d(r_1, r_2) = d(P, r_1), \text{ onde } P \in r_2}$$

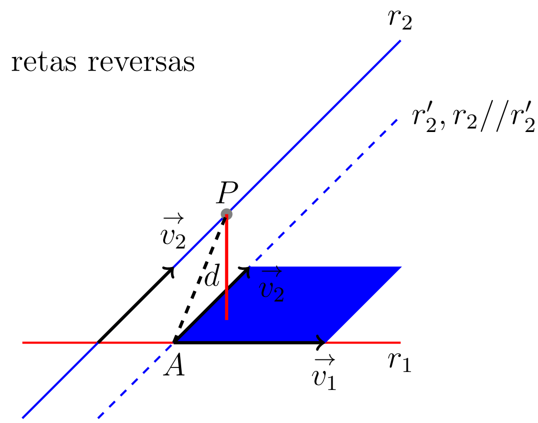


  - r_1 e r_2 são reversas: Observe que o volume do paralelopípedo determinados pelos vetores $\vec{AP}$,$\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, com $A \in r_1$ e $P \in r_2$, é dado por

$$|[\vec{AP}, \vec{v_1}, \vec{v_2}]| = \| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \| d,$$

então

$$\boxed{d = \frac{|[\vec{AP}, \vec{v_1}, \vec{v_2}]|}{\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|}.}$$



retas reversas
r_2
$r_2', r_2//r_2'$
P
$\vec{v_2}$
d
$\vec{v_2}$
A
$\vec{v_1}$
r_1