Capítulo 5 | Algumas distribuições de probabilidade secretas

5.2 Distribuição uniforme discreta

Distribuição uniforme discreta

Se a variável X assume os valores $x_1, x_2, ..., x_k$ com igual probabilidade, então a distribuição uniforme discreta é dada por

$$f(x; k) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_k.$$

Teorema 5.1

A média e a variância da distribuição uniforme discreta $f(x; k)$ são

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2.$$

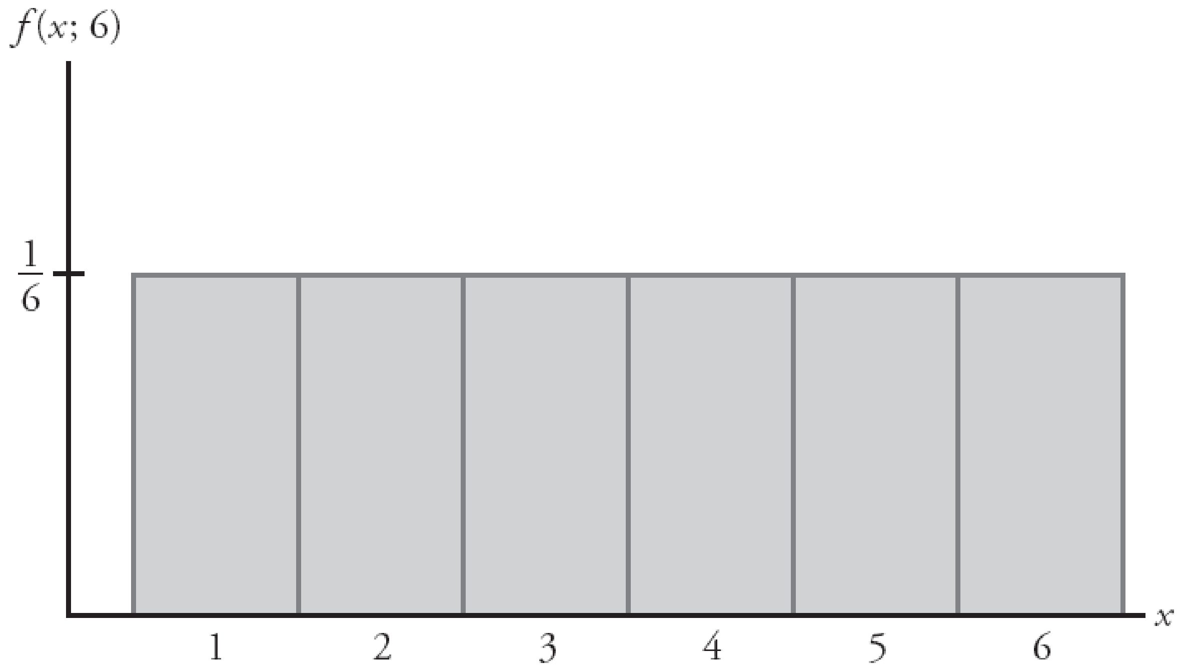

Figura 5.1 Histograma para o lançamento de um dado.

5.3 Distribuições binomial e multinomial

A rigor, o processo de Bernoulli deve ter as seguintes propriedades:

1. O experimento consiste em *n* tentativas repetidas.

2. Cada tentativa gera um resultado que pode ser classificado como sucesso ou falha.

3. A probabilidade de sucesso, denotada por *p, se mantém* constante de tentativa para tentativa.

4. As tentativas repetidas são independentes.

Distribuição binomial

Uma tentativa de Bernoulli pode resultar em um sucesso com probabilidade p, ou em uma falha, com probabilidade $q = 1 - p$. Então, a distribuição de probabilidade da variável aleatória X, o número de sucessos em n tentativas independentes, é

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 5.2

A média e a variância da distribuição binomial $b(x; n, p)$ são:

$$\mu = np \text{ e } \sigma^2 = npq.$$

Distribuição multinomial

Se certa tentativa pode resultar em k resultados E_1, E_2, ..., E_k, com probabilidades p_1, p_2, ..., p_k, então a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias X_1, X_2, ..., X_k, representando o número de ocorrências de E_1, E_2, ..., E_k em n tentativas independentes, é

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ p_1, p_2, \ldots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k},$$

com

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

5.4 Distribuição hipergeométrica

Distribuição hipergeométrica

A distribuição de probabilidade da variável aleatória hipergeométrica X, o número de sucessos em uma amostra aleatória de tamanho n selecionada de N itens dos quais k são chamados de *sucessos* e $N - k$ de *falhas*, é

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$$\max\{0, n - (N - k)\} \le x \le \min\{n, k\}.$$

Teorema 5.3

A média e a variância de uma distribuição hipergeométrica $h(x; N, n, k)$ são

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{k}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

5.5 Distribuições binomial negativa e geométrica

Distribuição binomial negativa

Se tentativas independentes repetidas podem resultar em um sucesso com probabilidade p e em uma falha com probabilidade $q = 1 - p$, então a distribuição de probabilidade da variável aleatória X, o número da tentativa na qual o k-ésimo sucesso ocorre, é

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

Teorema 5.4

A média e a variância de uma variável aleatória que segue a distribuição geométrica são

$$\mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

5.6 Distribuição de Poisson e o processo de Poisson

Distribuição de Poisson

A distribuição de probabilidade da variável aleatória de Poisson X, que representa o número de resultados que ocorrem em certo intervalo de tempo ou em uma região específica denotados por t, é

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde λ é o número médio de resultados por unidade de tempo, distância, área ou volume, e $e = 2{,}71828\cdots$

Teorema 5.5

Tanto a média quanto a variância da distribuição de Poisson $p(x; \lambda t)$ são λt.

Teorema 5.6

Seja X uma variável aleatória binomial com distribuição de probabilidade $b(x; n, p)$. Quando $n \to \infty$, $p \to 0$ e $np \xrightarrow{n\to\infty} \mu$ permanece constante,

$$b(x; n, p) \xrightarrow{n\to\infty} p(x; \mu).$$

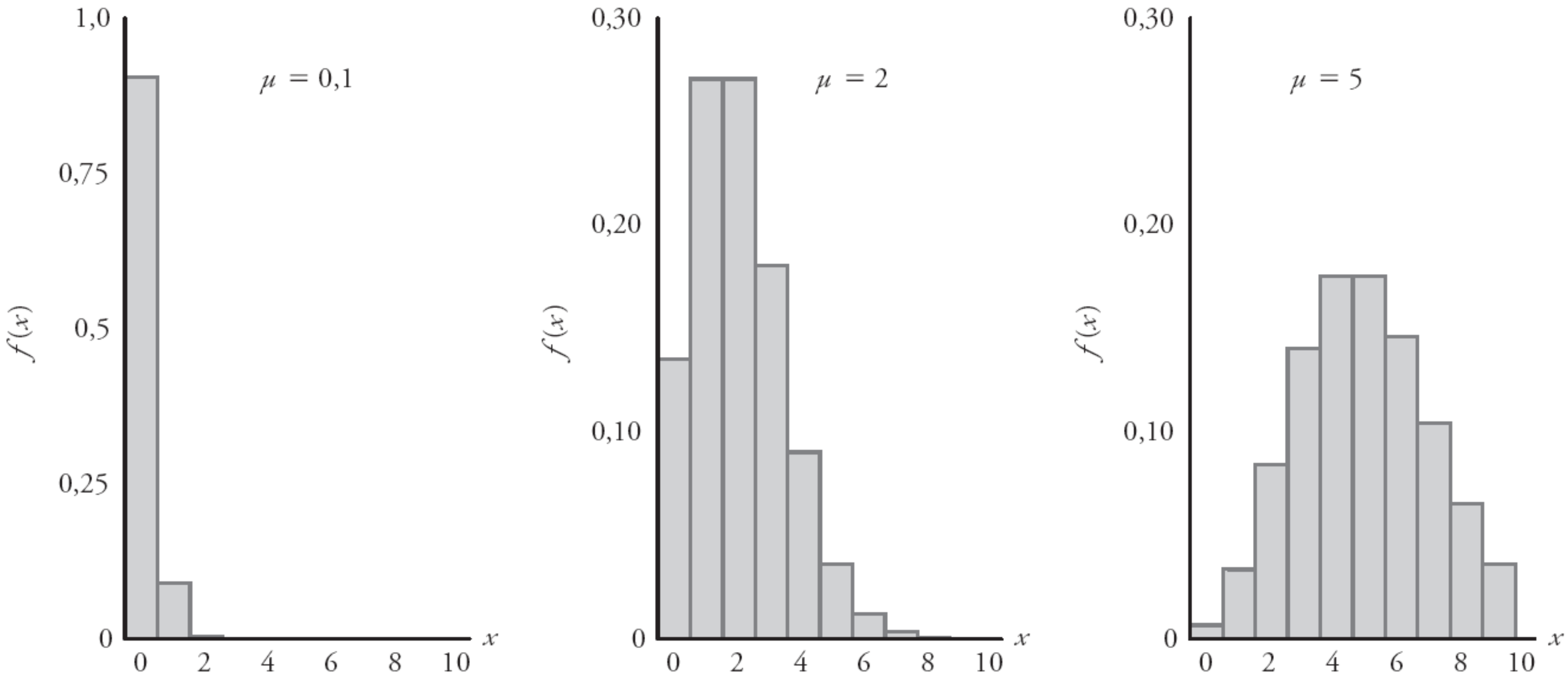

Figura 5.2 Funções de densidade de Poisson para diferentes médias.