

Capítulo 13 | Experimentos com um fator: geral

13.1 Técnica da análise de variância

Tabela 13.1 Absorção de mistura dos agregados de concreto

Agregado:	1	2	3	4	5	
	551	595	639	417	563	
	457	580	615	449	631	
	450	508	511	517	522	
	731	583	573	438	613	
	499	633	648	415	656	
	632	517	677	555	679	
Total	3320	3416	3663	2791	3664	16,854
Média	553,33	569,33	610,50	465,17	610,67	561,80

13.3 Análise de variância simples: delineamento completamente aleatorizado (ANOVA simples)

Tabela 13.2 Amostras aleatórias

Tratamento:	1	2	...	<i>i</i>	...	<i>k</i>	
	y_{11}	y_{21}	...	y_{i1}	...	y_{k1}	
	y_{12}	y_{22}	...	y_{i2}	...	y_{k2}	
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	
	y_{1n}	y_{2n}	...	y_{in}	...	y_{kn}	
Total	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$...	$Y_{i.}$...	$Y_{k.}$	$Y_{..}$
Média	$\bar{y}_{1.}$	$\bar{y}_{2.}$...	$\bar{y}_{i.}$...	$\bar{y}_{k.}$	$\bar{y}_{..}$

Teorema 13.1

Identidade da soma dos quadrados

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

Três importantes medidas de variabilidade

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \text{soma dos quadrados total,}$$

$$SQA = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \text{soma dos quadrados do tratamento,}$$

$$SQE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \text{soma dos quadrados do erro.}$$

Teorema 13.2

$$E(SQA) = (k - 1)\sigma^2 + n \sum_{i=1}^k \alpha_i^2.$$

Quadrado médio do tratamento

$$s_1^2 = \frac{SQA}{k - 1}.$$

Quadrado médio do erro

$$s^2 = \frac{SQE}{k(n - 1)}.$$

Tabela 13.3 Análise de variância para a ANOVA simples

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	f calculado
Tratamentos	SQA	$k - 1$	$s_1^2 = \frac{SQA}{k - 1}$	$\frac{s_1^2}{s^2}$
Erro	SQE	$k(n - 1)$	$s^2 = \frac{SQE}{k(n - 1)}$	
Total	SQT	$kn - 1$		

The GLM Procedure					
Dependent Variable: moisture					
Source	DF	Squares	Sum of Mean Square	F Value	Pr > F
Model	4	85356,4667	21339,1167	4,30	0,0088
Error	25	124020,3333	4960,8133		
Corrected Total	29	209376,8000			
R-Square	Coeff Var	Root MSE	moisture Mean		
0,407669	12,53703	70,43304	561,8000		
Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
aggregate	4	85356,46667	21339,11667	4,30	0,0088

Figura 13.1 – Impressão SAS para o procedimento da análise de variância.

Soma dos quadrados; tamanhos de amostras desiguais

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2,$$

$$SQA = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2, \quad SQE = SQT - SQA$$

Tabela 13.4 Nível de atividade da fosfatase alcalina do soro

	G-1	G-2	G-3	G-4
49,20	97,50	97,07	62,10	110,60
44,54	105,00	73,40	94,95	57,10
45,80	58,05	68,50	142,50	117,60
95,84	86,60	91,85	53,00	77,71
30,10	58,35	106,60	175,00	150,00
36,50	72,80	0,57	79,50	82,90
82,30	116,70	0,79	29,50	111,50
87,85	45,15	0,77	78,40	
105,00	70,35	0,81	127,50	
95,22	77,40			

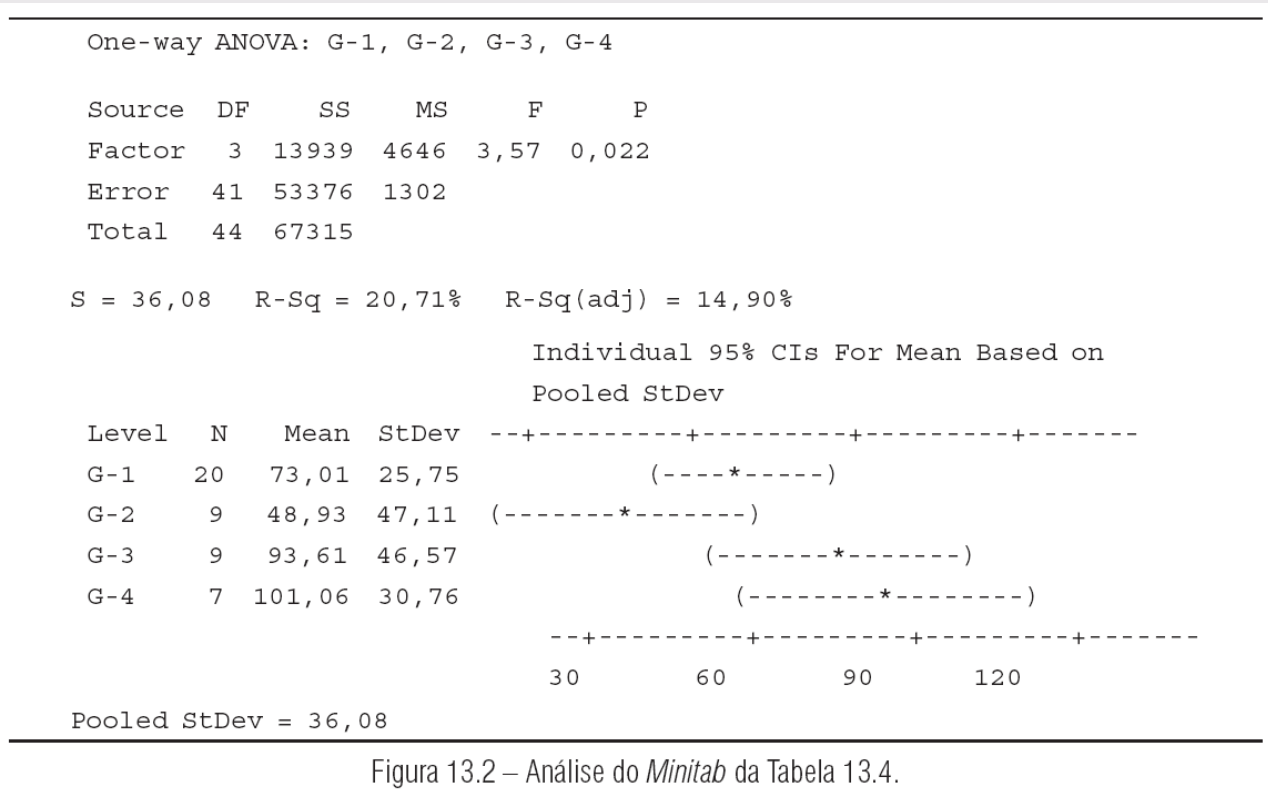


Figura 13.2 – Análise do *Minitab* da Tabela 13.4.

13.7 Comparando tratamentos com um controle

Tabela 13.6 Rendimento da reação

Controle	Catalisador 1	Catalisador 2	Catalisador 3
50,7	54,1	52,7	51,2
51,5	53,8	53,9	50,8
49,2	53,1	57,0	49,7
53,1	52,5	54,1	48,0
52,7	54,0	52,5	47,2
$\bar{y}_0 = 51,44$	$\bar{y}_1 = 53,50$	$\bar{y}_2 = 54,04$	$\bar{y}_3 = 49,38$

13.9 Delineamento completamente aleatorizado em blocos

Tratamento	Bloco:	1	2	3	4
1		y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
2		y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
3		y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}

Hipótese de médias de tratamentos iguais

$$H'_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu,$$

H'_1 : Os $\mu_{i.}$'s não são todos iguais.

Tabela 13.7 $k \times b$ para o delineamento CAB

Bloco:								
Tratamento	1	2	...	j	...	b	Total	Média
1	y_{11}	y_{12}	\cdots	y_{1j}	\cdots	y_{1b}	$T_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	\cdots	y_{2j}	\cdots	y_{2b}	$T_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
i	y_{i1}	y_{i2}	\cdots	y_{ij}	\cdots	y_{ib}	$T_{i.}$	$\bar{y}_{i.}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
k	y_{k1}	y_{k2}	\cdots	y_{kj}	\cdots	y_{kb}	$T_{k.}$	$\bar{y}_{k.}$
Total	$T_{.1}$	$T_{.2}$	\cdots	$T_{.j}$	\cdots	$T_{.b}$	$T_{..}$	
Média	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	\cdots	$\bar{y}_{.j}$	\cdots	$\bar{y}_{.b}$		$\bar{y}_{..}$

Teorema 13.3

Identidade da soma dos quadrados

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= b \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + k \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \end{aligned}$$

A identidade da soma dos quadrados pode ser apresentada simbolicamente pela equação

$$SQT = SQA + SQB + SQE$$

onde

$$\begin{aligned}
 SQT &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 && = \text{a soma dos quadrados total ,} \\
 SQA &= b \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 && = \text{soma dos quadrados do tratamento,} \\
 SQB &= k \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 && = \text{soma dos quadrados dos blocos,} \\
 SQE &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 && = \text{soma dos quadrados do erro.}
 \end{aligned}$$

Valor esperado do quadrado médio do tratamento

$$E \left(\frac{SQA}{k - 1} \right) = \sigma^2 + \frac{b}{k - 1} \sum_{i=1}^k \alpha_i^2,$$

Tabela 13.8 Análise de variância para o desenho de blocos completamente aleatorizados

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	f calculado
Tratamentos	SQA	$k - 1$	$s_1^2 = \frac{SQA}{k - 1}$	$f_1 = \frac{s_1^2}{s^2}$
Blocos	SQB	$b - 1$	$s_2^2 = \frac{SQB}{b - 1}$	
Erro	SQE	$(k - 1)(b - 1)$	$s^2 = \frac{SQE}{(k - 1)(b - 1)}$	
Total	SQT	$kb - 1$		

Tabela 13.9 Tempo, em segundos, para a montagem do produto

Máquina	Operador						Total
	1	2	3	4	5	6	
1	42,5	39,3	39,6	39,9	42,9	43,6	247,8
2	39,8	40,1	40,5	42,3	42,5	43,1	248,3
3	40,2	40,5	41,3	43,4	44,9	45,1	255,4
4	41,3	42,2	43,5	44,2	45,9	42,3	259,4
Total	163,8	162,1	164,9	16,98	176,2	174,1	1010,9

Tabela 13.10 Análise de variância para os dados da Tabela 13.9

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Quadrado médio	$f_{\text{calculado}}$
Máquinas	15,93	3	5,31	3,34
Operadores	42,09	5	8,42	
Erro	23,84	15	1,59	
Total	81,86	23		

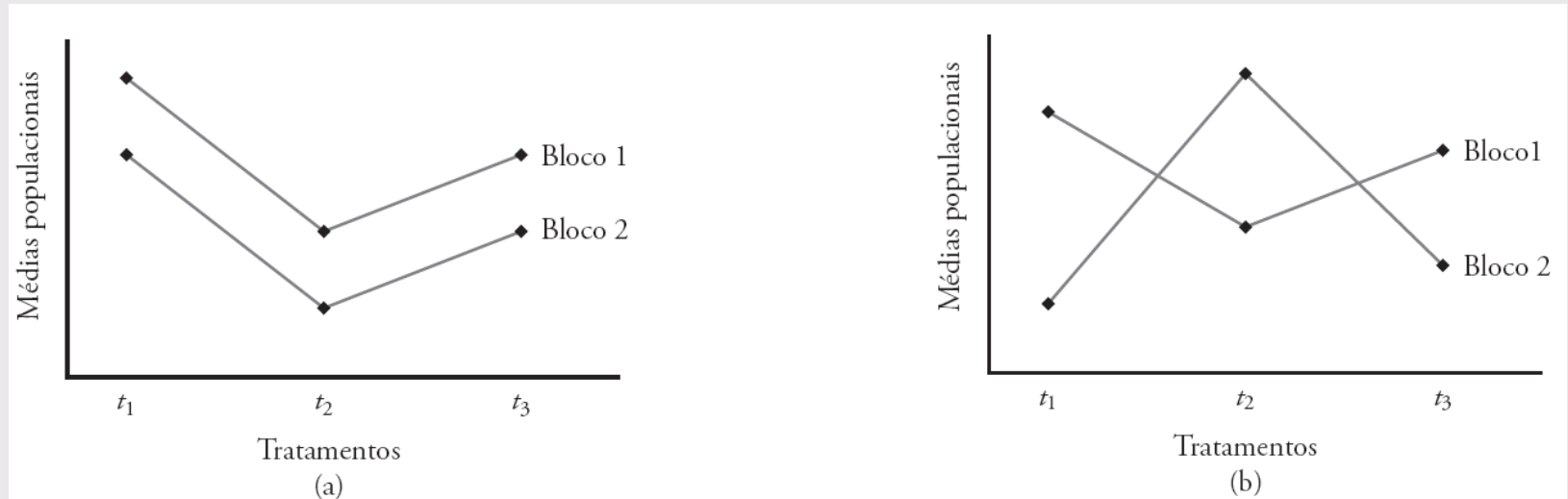
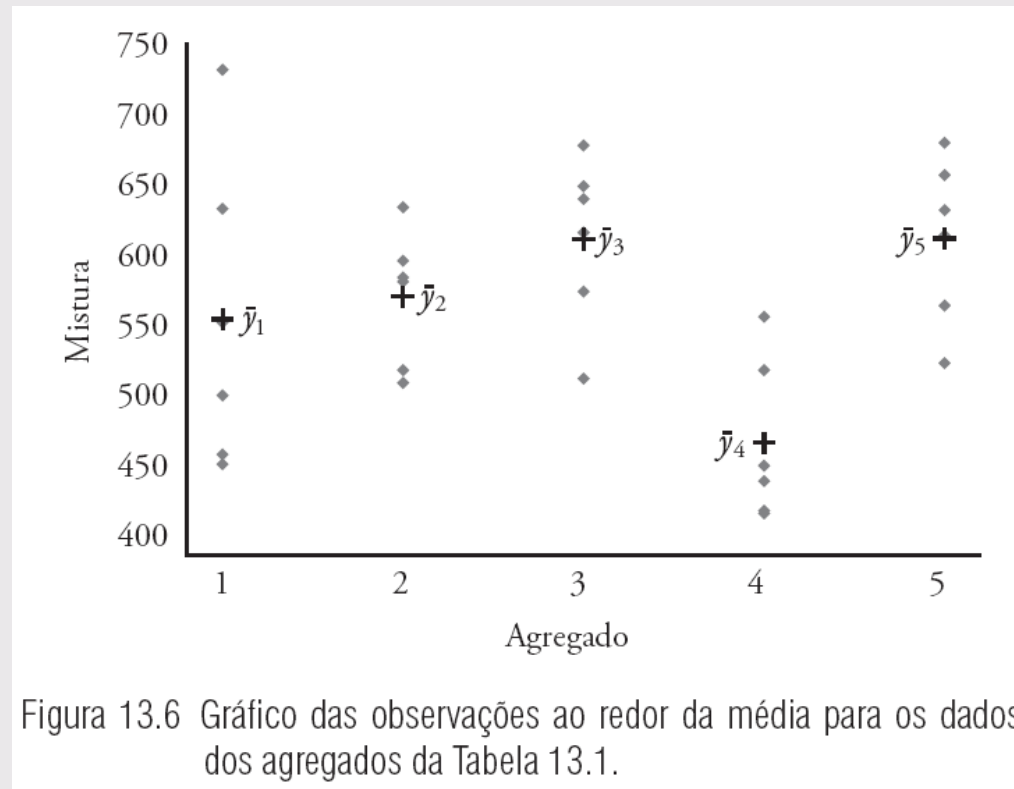


Figura 13.5 Médias populacionais para (a) resultados aditivos e (b) efeitos interativos.

13.10 Métodos gráficos e verificação do modelo



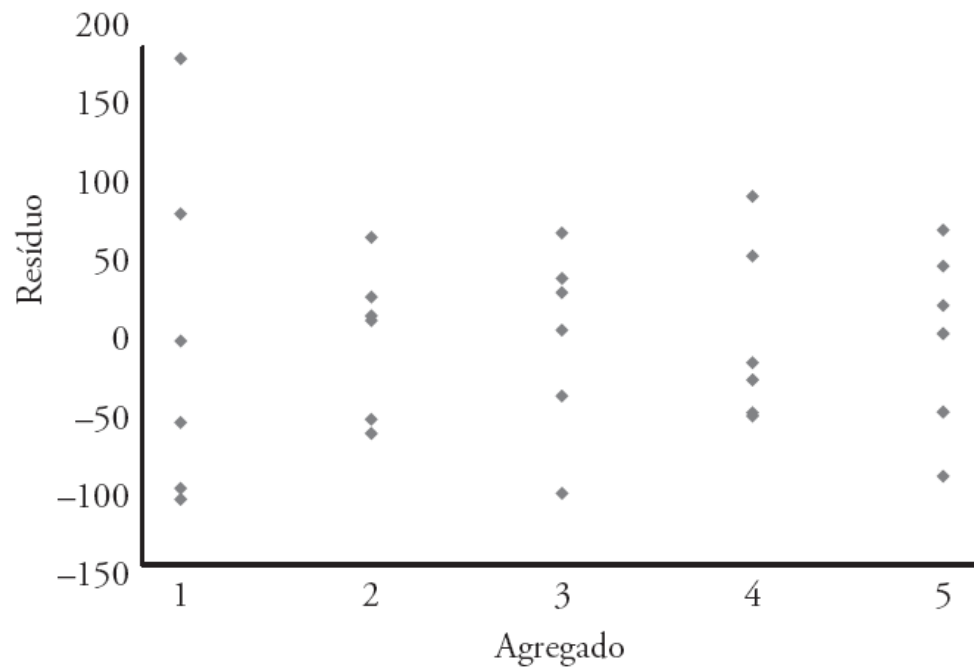


Figura 13.7 Gráfico dos resíduos para os cinco agregados, usando a Tabela 13.1.

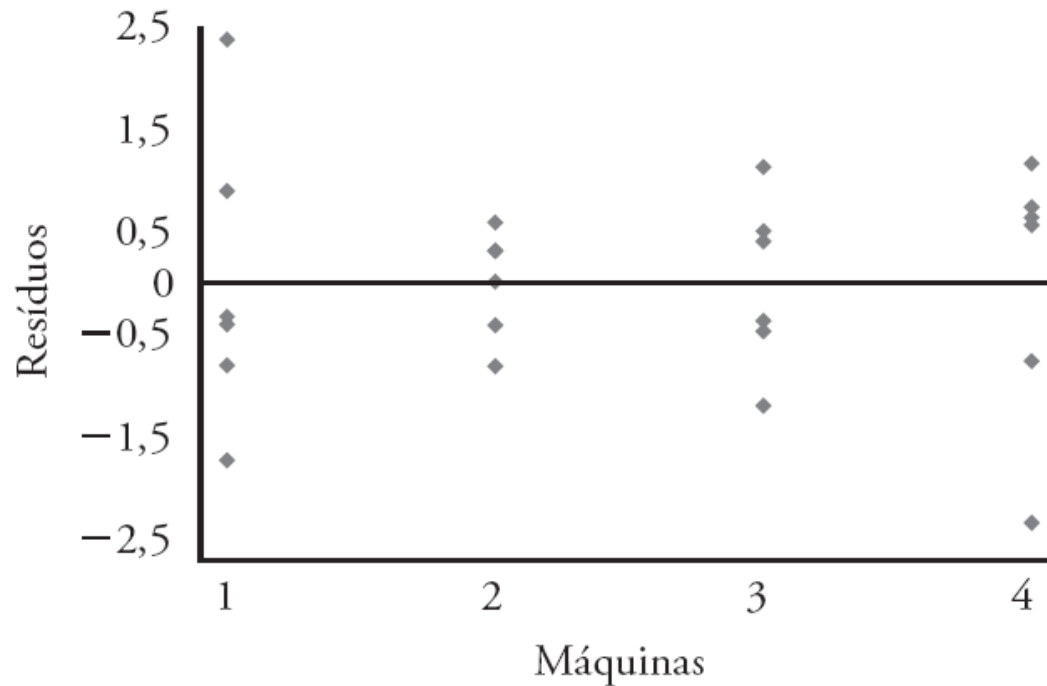


Figura 13.8 Gráfico dos resíduos das quatro máquinas para os dados do Exemplo 13.6.

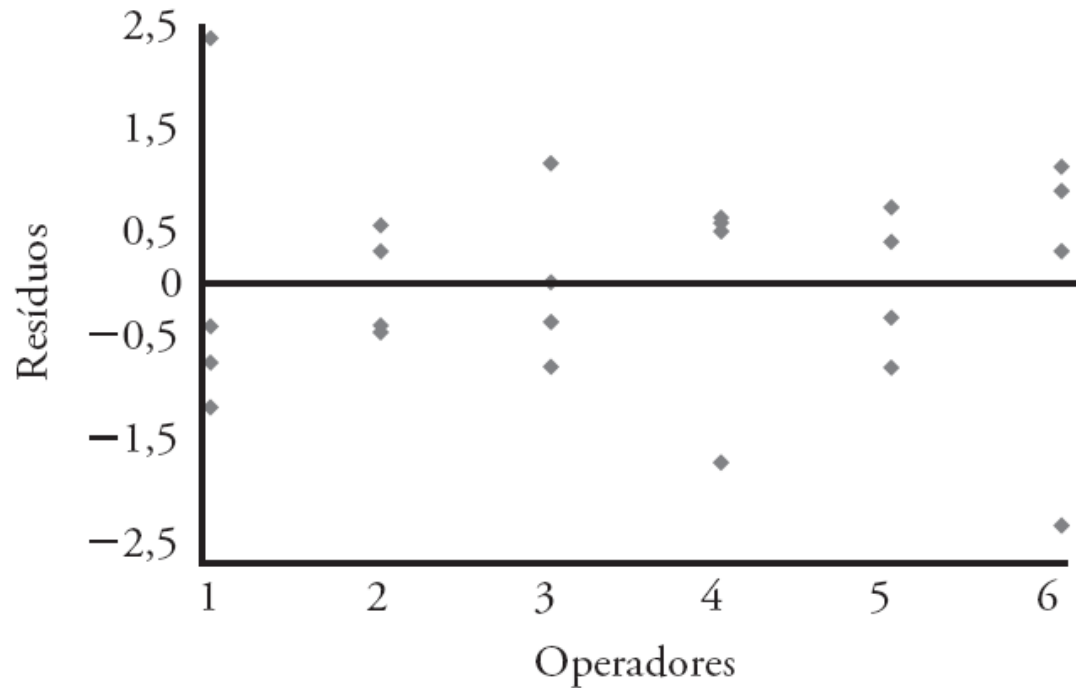


Figura 13.9 Gráfico dos resíduos dos seis operadores para os dados do Exemplo 13.6.