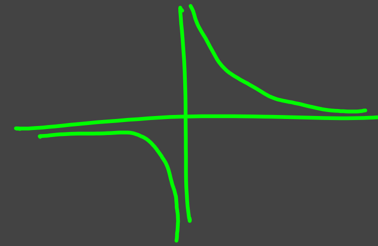
4 - Introdução às cônicas

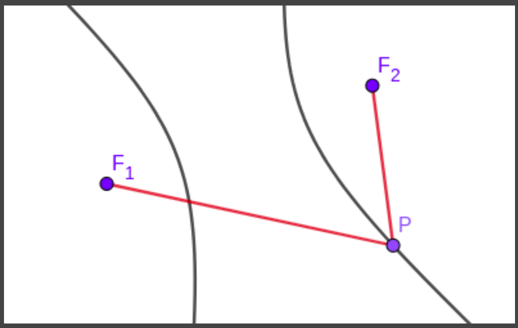


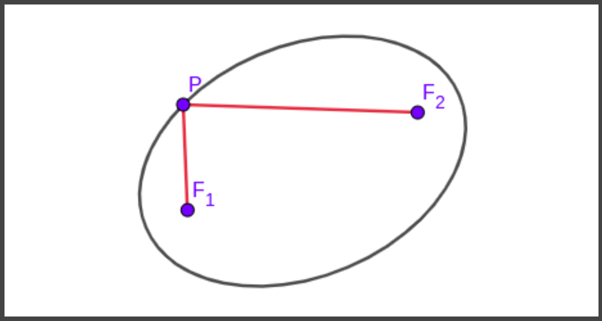
Parábolas, elípses e hipérboles são chamadas de "cônicas".

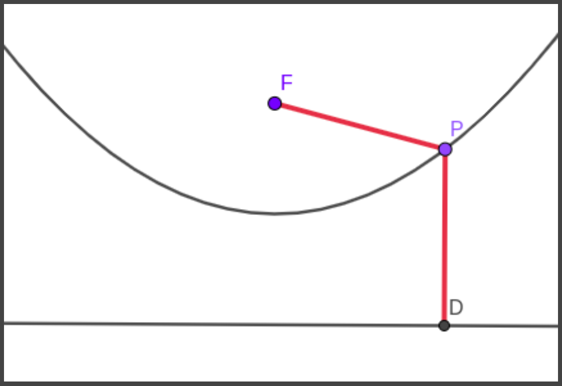
$y = 2x^2 - 3x + 2$ é uma parábola

$y = \frac{3}{x}$ é uma hipérbole

$y^2 + x^2 = 7$ é um círculo caso especial de uma elipse: $y^2 + 3x^2 = 7$







Vamos estudar a caracterização geométrica das cônicas, suas propriedades, e como obter essas propriedades a partir de sua representação algébrica.

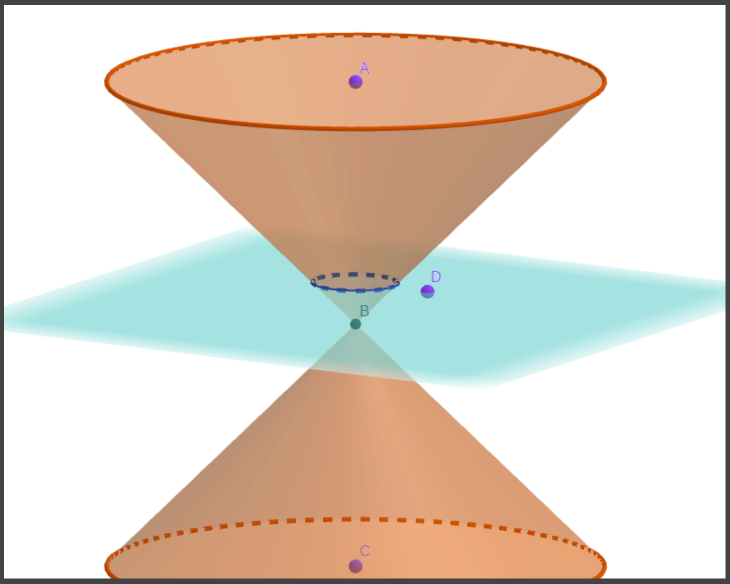
Todas as cônicas se encaixam na seguinte descrição algébrica: uma curva dada pelos pontos do plano xOy que satisfazem uma expressão da forma:

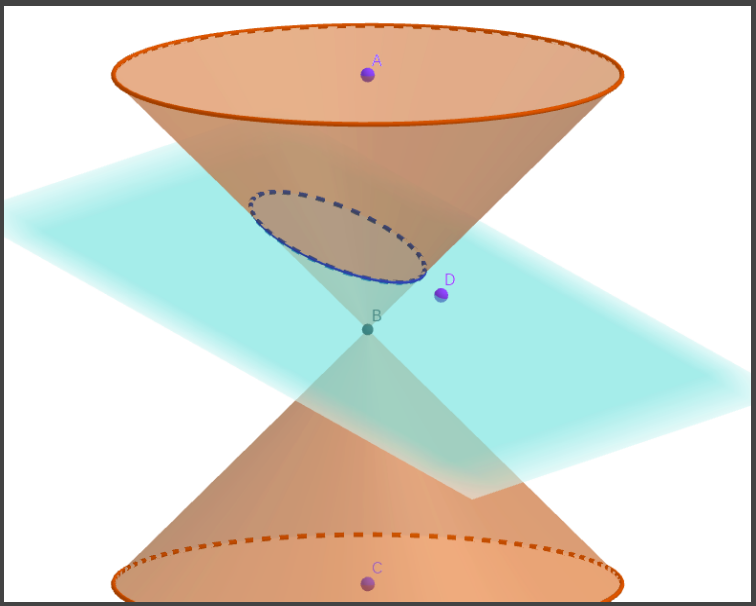
$y = \frac{3}{x}$

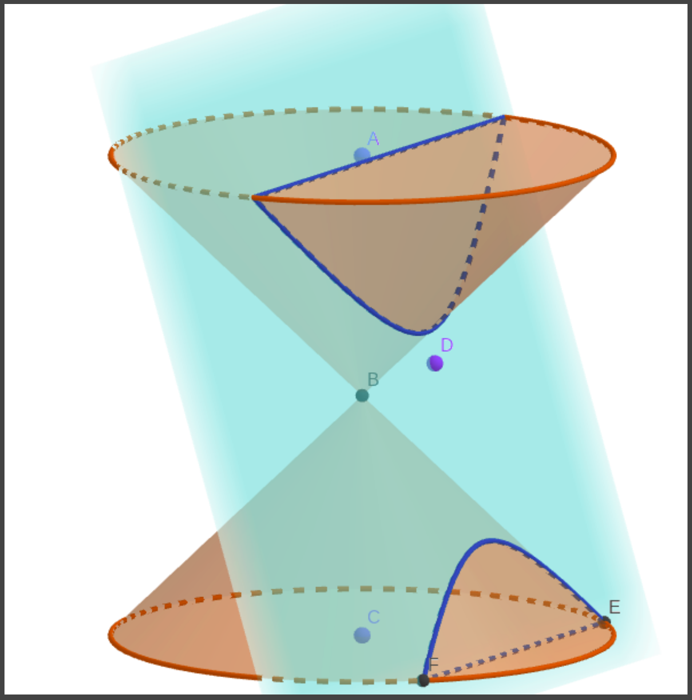
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

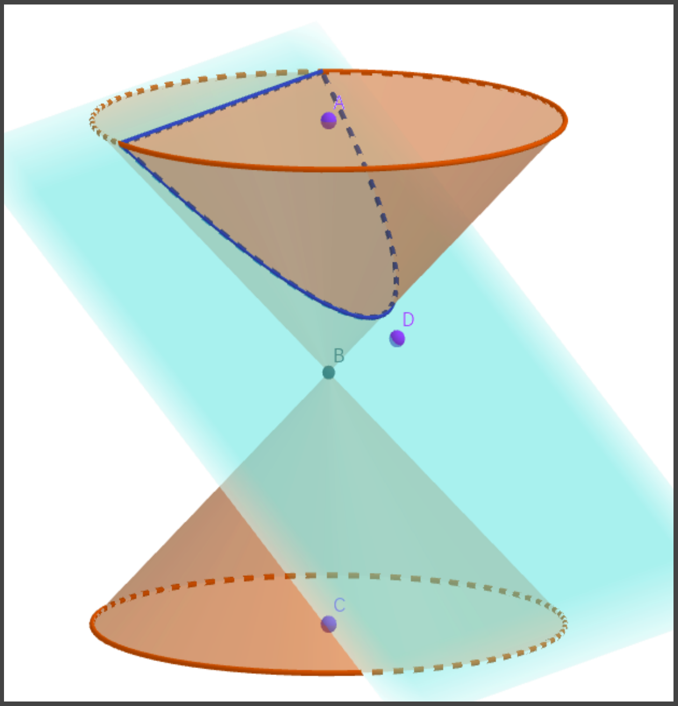
com constantes reais A, B, C, D, E, F.

Por exemplo: $y = \frac{3}{x} \Rightarrow xy - 3 = 0$


A
D
B
C

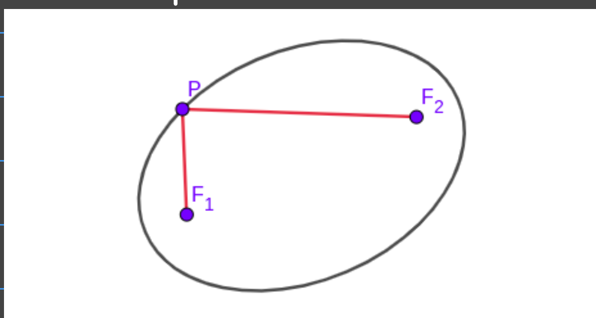

A
D
B
C

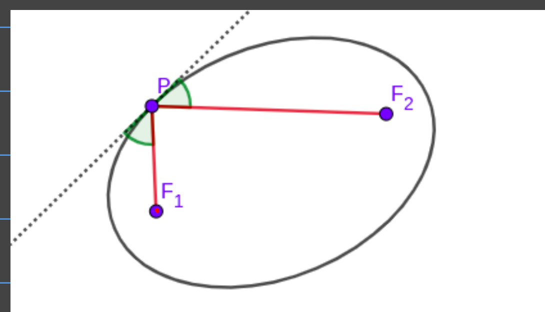

A
D
B
C
E
F


A
D
B
C

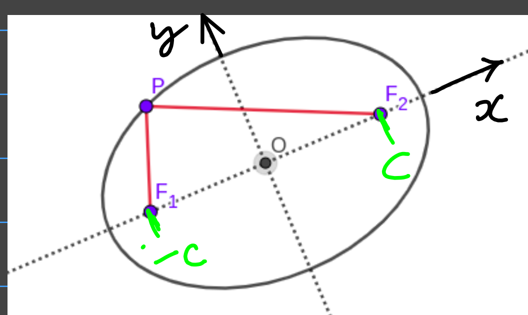
Caracterização geométrica de uma elipse:

Dados dois pontos F_1, F_2 e um valor "a" tal que $2a > d(F_1, F_2)$, a elipse é definida pelos pontos $P^{(x,y)}$ do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.





F_1 e F_2 são chamados de focos.



Escolhendo um sistema de coordenadas apropriado onde $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, $P(x, y)$, podemos escrever:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

elevando ao quadrado e simplificando...

$$\left(a^2 + cx\right)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

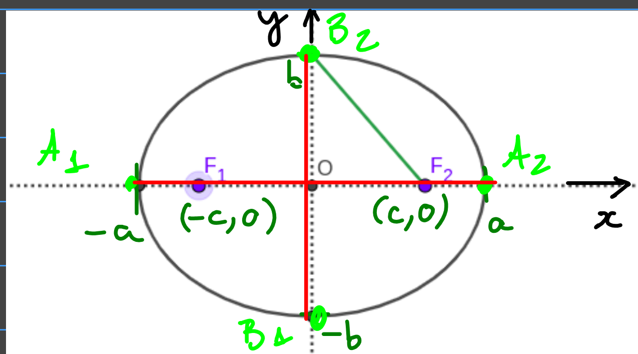
e com mais simplificações...

$$\frac{\cancel{(a^2-c^2)}\,x^2}{a^2\,\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}\,y^2}{\cancel{a^2}\,b^2} = \frac{\cancel{a^2(a^2-c^2)}}{\cancel{a^2\,b^2}}\;1$$

Denote $b^2 = a^2 - c^2$ e divida a expressão por a^2b^2

Forma reduzida da elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad a \geq b$

$b^2 + c^2 = a^2$



Excentricidade:

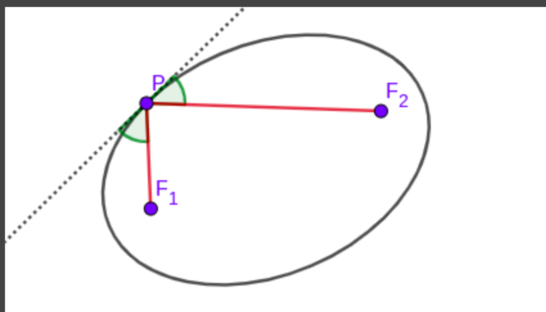
$$e = \frac{c}{a} < 1$$

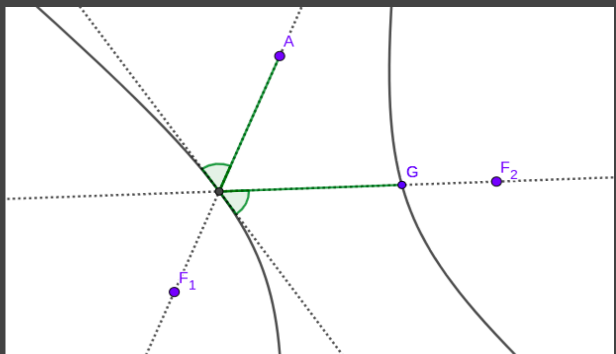
A_1A_2 é o eixo maior e B_1B_2 é o eixo menor.

A_1, A_2, B_1, B_2 são chamados de vértices da elipse.

Distância focal $2c$.

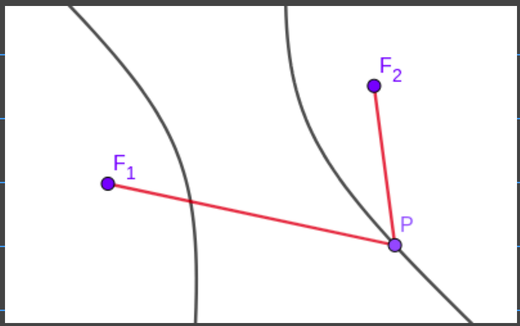
Equivalentemente, o papel dos eixos x e y poderiam aparecer invertidos, $\boxed{\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$ com $a > b$, os focos ficam então no eixo y com coordenadas $(0,c)$ e $(0,-c)$.


P
F2
F1

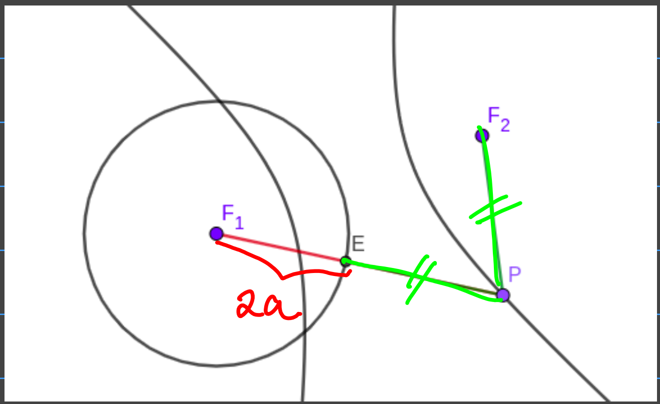

A
G
F2
F1

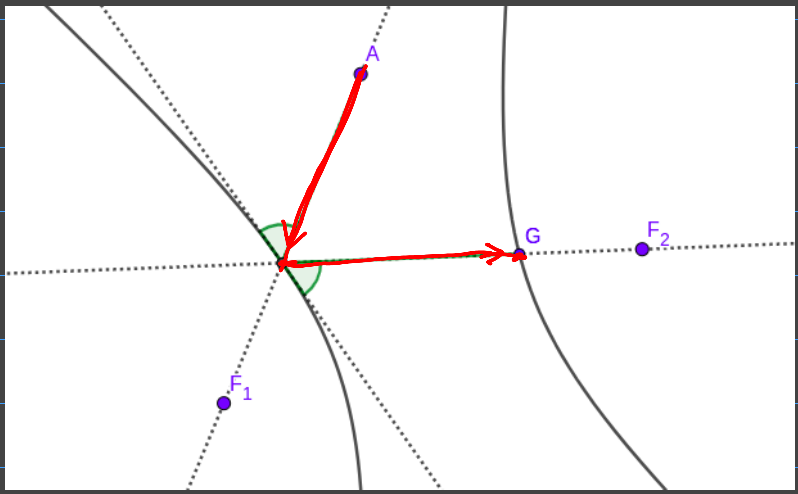
Caracterização geométrica de uma hipérbole:

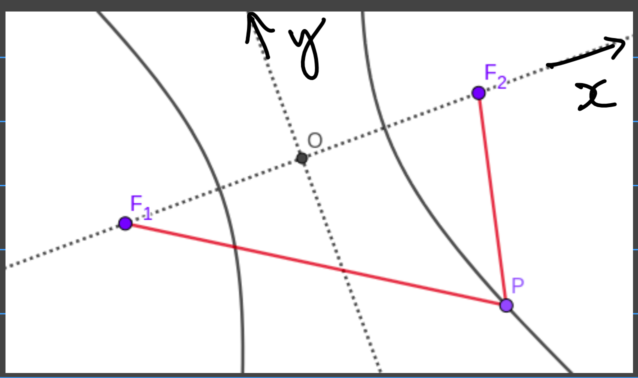
Dados dois pontos F_1, F_2 e um valor $a > 0$ tal que $2a < d(F_1, F_2)$, a hipérbole é definida pelos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$



$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$







$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

elevando ao quadrado e simplificando...

$$\left(cx - a^2\right)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

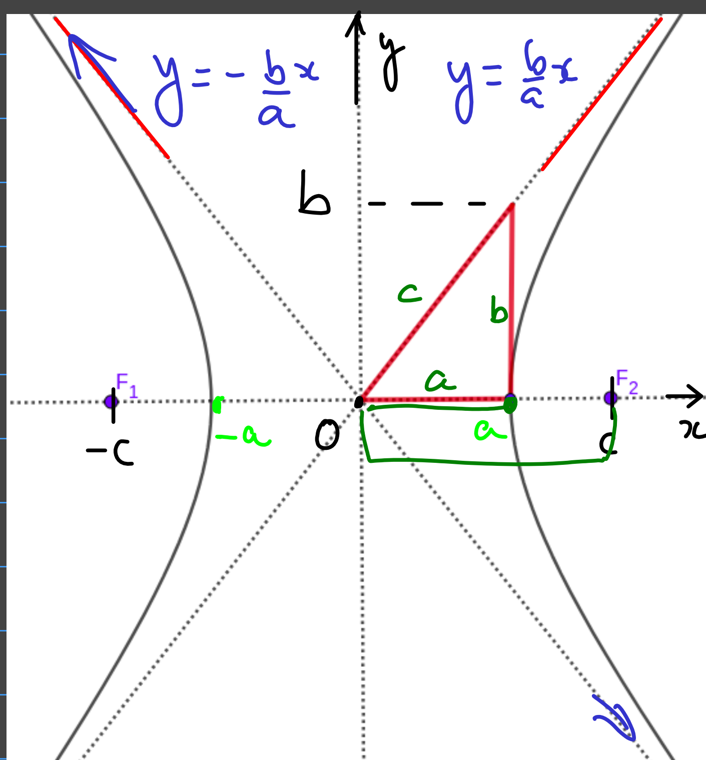
elevando ao quadrado novamente...

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

denotando $b^2 = c^2 - a^2$, pois $c > a$, temos

$$\frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{-b^2a^2} = \frac{-a^2b^2}{-b^2a^2}$$

equação reduzida da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



$a^2 + b^2 = c^2$

Focos: $(\pm c, 0)$

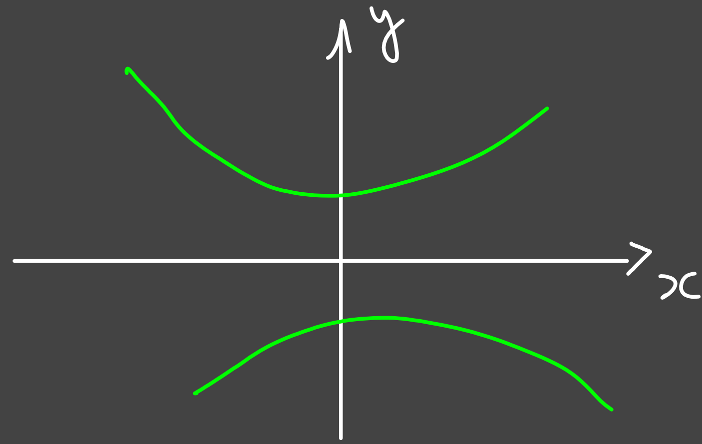
vértices: $(\pm a, 0)$

Assíntotas:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Excentricidade $e = \dfrac{c}{a} > 1$

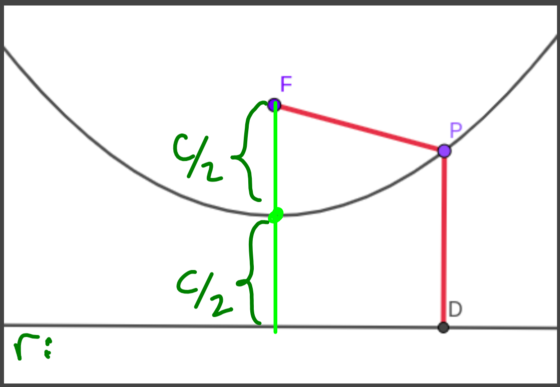
Caso a equação tenha os sinais + e − trocados $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ então o papel dos eixos x e y ficam trocados também. Focos: $(0, \pm c)$, vértices: $(0, \pm a)$, Assíntotas: $x = \pm\frac{b}{a}y$, onde $c^2 = a^2+b^2$.

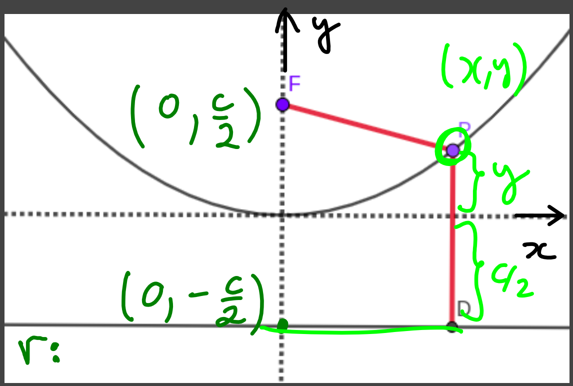


Caracterização geométrica de uma parábola:

Dados um ponto F e uma reta r tais que $d(F, r) = c > 0$, uma parábola é definida pelos pontos $P(x,y)$ tais que

$$d(P, r) = d(P, F).$$





F é o foco e r é a reta diretriz.

$$\left(d(P,F)\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2}\right)^2$$

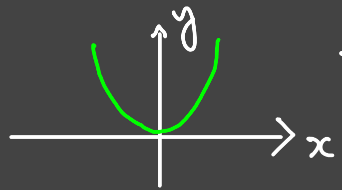
$$\left(d(P,r)\right)^2 = \left(\left|y + \frac{c}{2}\right|\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{c}{2}\right)^2$$

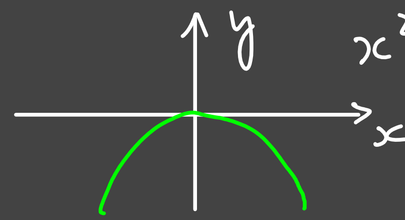
$$x^2 + y^2 - 2y\cdot\frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} = y^2 + 2y\frac{c}{2} + \frac{c^2}{4}$$

$$\boxed{x^2 - 2cy = 0}$$

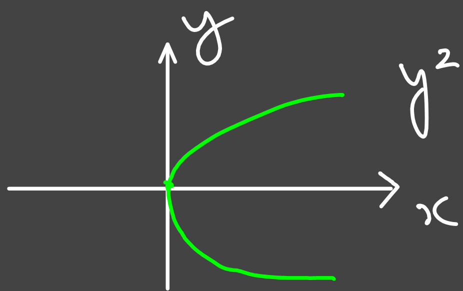
Outras posições da parábola



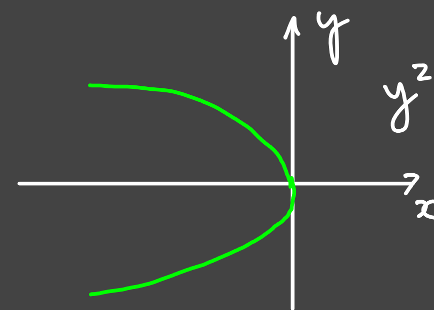
$x^2 - 2cy = 0$



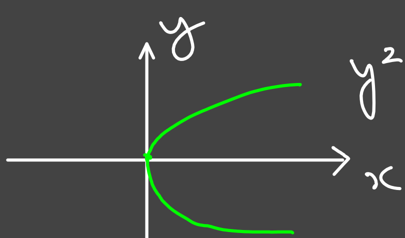
$x^2 + 2cy = 0$



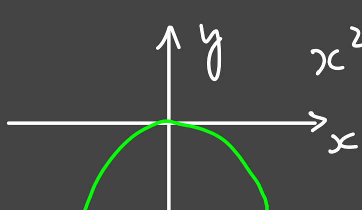
$y^2 - 2cx = 0$



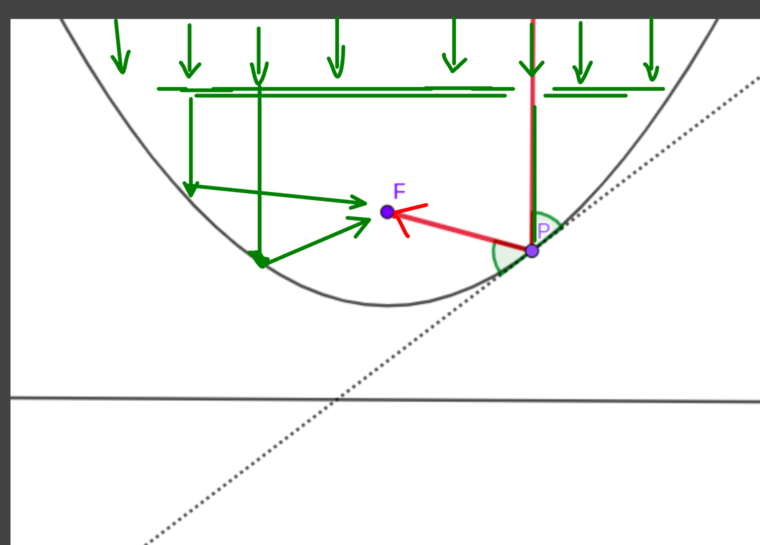
$y^2 + 2cx = 0$

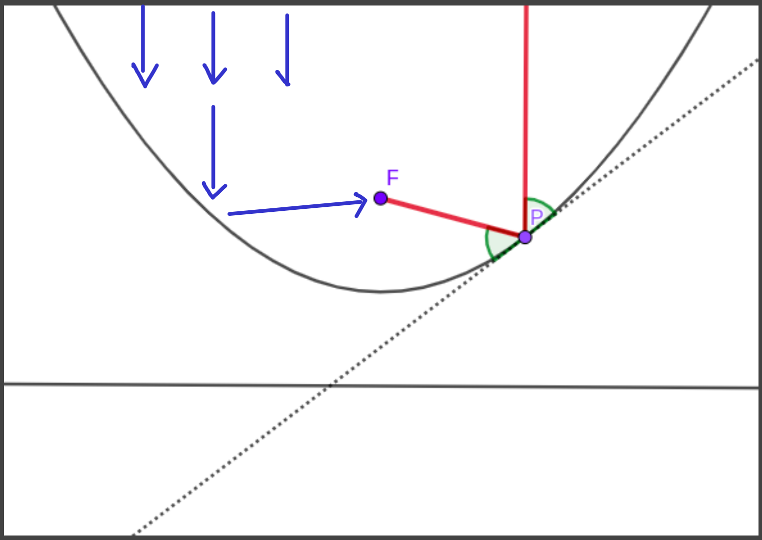


$y^2 - 2cx = 0$



$x^2 + 2cy = 0$




F
P

Como obter a equação de uma cônica passando por 5 pontos no plano:

Queremos escolher as constantes na equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se quisermos que a curva passe pelos pontos

$P_1(2,1)$ $P_2(3,2)$ $P_3(1,2)$ $P_4(4,5)$ $P_5(0,5)$

podemos procurar A, B, C, D, E, F satisfazendo o sistema linear obtido substindo os as coordenadas de $P_i(x_i, y_i)$ na equação.

$P_1(\underline{2},1)$ $P_2(\underline{3},2)$ $P_3(\underline{1},2)$ $P_4(\underline{4},5)$ $P_5(\underline{0},5)$

$$\begin{cases} A(2)^2 + B(2)(1) + C(1)^2 + D(2) + E(1) + F = 0 \\ A(3)^2 + B(3)(2) + C(2)^2 + D(3) + E(2) + F = 0 \\ A(1)^2 + B(1)(2) + C(1)^2 + D(2) + E(1) + F = 0 \\ A(4)^2 + B(4)(5) + C(5)^2 + D(4) + E(5) + F = 0 \\ A(0)^2 + B(0)(5) + C(5)^2 + D(0) + E(5) + F = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A + 2B + C + 2D + E + F = 0 \\ 9A + 6B + 4C + 3D + 2E + F = 0 \\ A + 2B + 4C + D + 2E + F = 0 \\ 16A + 20B + 25C + 4D + 5E + F = 0 \\ 25C + 5E + F = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 16 & 20 & 25 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

https://www.dm.ufscar.br/profs/caetano/ead/vga/conica_equacao_reduzida.php#

Depois de escalonada fica:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$A = \frac{1}{5} F$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -\frac{4}{5} F$, $E = -\frac{1}{5} F$.

Se escolhermos $F = 5$ temos

$$1x^2 - 4x - y + 5 = 0$$

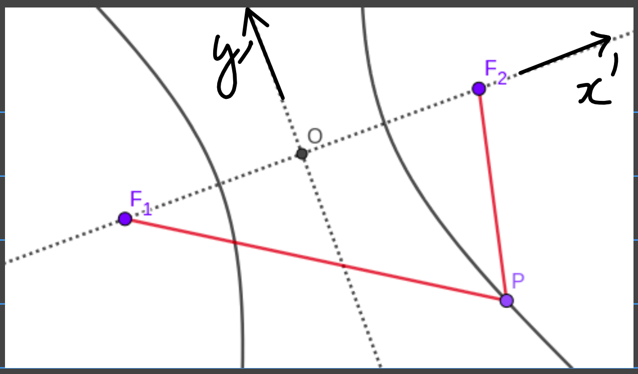
que é uma parábola $y = x^2 - 4x + 5$.

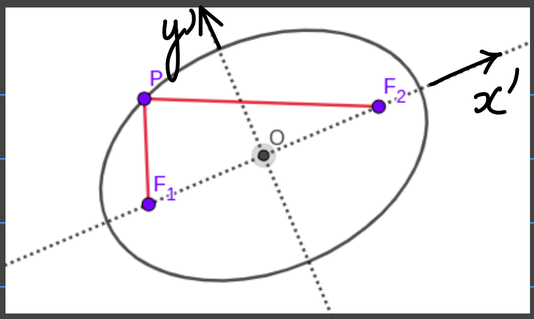
https://www.geogebra.org/m/h95NBNyS

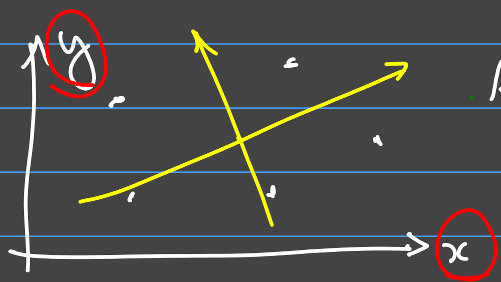
Próximos passos:

Da equação geral, fazer uma mudança da variável para descobrir o tipo de cônica e trazer para a forma da equação "reduzida".

Na forma reduzida, identificar os elementos geométricos importantes como o foco.







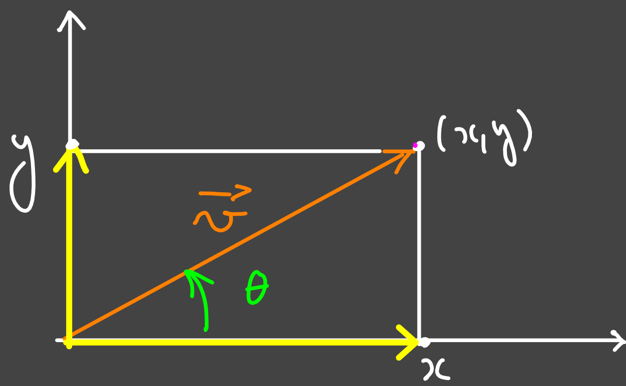
$$Ax^2 + Byx + Cy^2 + \cdots = 0$$

Mudanças de vairável para ir da forma geral para uma forma reduzida

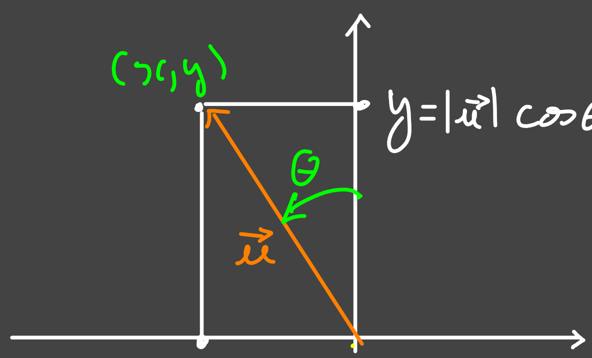
Começaremos com uma rotação do eixo para eliminar o termo com xy.

Vamos convencionar que a rotação é sempre no sentido horário. Entre 0 e 90 graus.

$|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta = y$

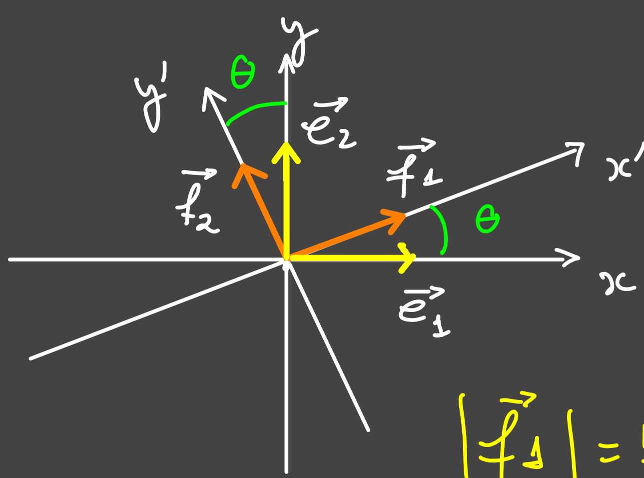


$x = |\vec{v}|\cos\theta$



$y = |\vec{u}|\cos\theta$

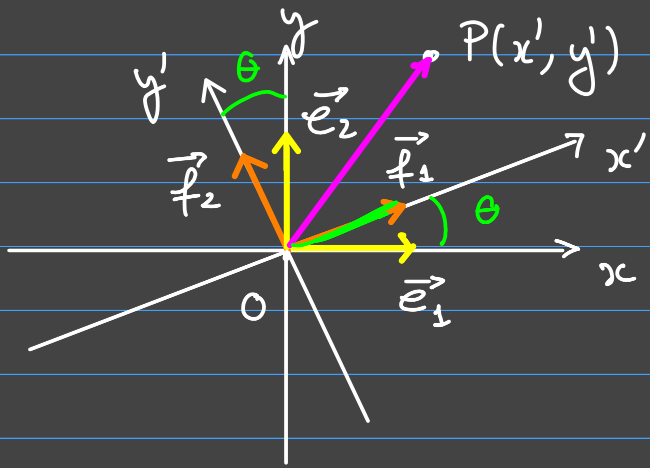
$x = -|\vec{u}|\,\mathrm{sen}\,\theta$



$$\vec{f}_1 = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2$$

$$|\vec{f}_1| = 1 = |\vec{f}_2|$$



$P(x,y)$

$$\vec{OP} = x' \vec{f}_1 + y' \vec{f}_2$$

$$\vec{OP} = x' (\cos\theta \, \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta \, \vec{e}_2) + y' (-\operatorname{sen}\theta \, \vec{e}_1 + \cos\theta \, \vec{e}_2)$$

$$= (x'\cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)\, \vec{e}_1 + (x' \operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)\, \vec{e}_2$$

logo $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Esta é chamada de matriz de rotação.

é a sua transposta

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

---- // ----

(*) Obs: As variáveis são relacionadas pelas matrizes de rotação $R(\theta)$ e $R(-\theta)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R(-\theta)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R(\theta)} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

com $R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$

---- // ----

Ao substituir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

em

com $B \neq 0$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

teremos muitos termos. Primeiro, vamos simplificar a notação chamando

$$c = \cos\theta \quad e \quad s = \operatorname{sen}\theta$$

assim $x = cx' - sy'$ e $y = sx' + cy'$.

Segundo, vamos escrever os termos x^2, xy e y^2 separadamente:

$$A\left(x^2 = c^2 x'^2 - 2cs\,x'y' + s^2 y'^2 \right)$$

$$B\left(xy = cs\,x'^2 + c^2 x'y' - s^2 x'y' + cs\,y'^2 \right)$$

$$C\left(y^2 = s^2 x'^2 + 2cs\,x'y' + c^2 y'^2 \right)$$

de modo que na parte "$Ax^2 + Bxy + Cy^2$" o termo com $x'y'$ é igual a:

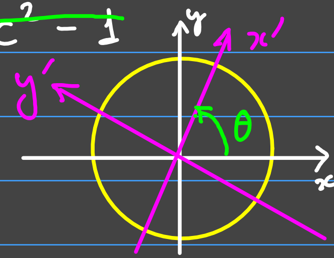
"$(-2Acs + Bc^2 - Bs^2 + 2Ccs)\,x'y'$"

Queremos escolher θ de modo que

$$2(C-A)\,cs + B(c^2-s^2) = 0 .$$

Usaremos algumas identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = 2cs \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = c^2 - s^2 \\ \cancel{\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2c^2 - 1} \end{cases}$$



$$\boxed{B \cdot \cos 2\theta = (A-C)\operatorname{sen} 2\theta}$$

Desta equação, queremos uma solução na qual $0 \le \theta < 90°$. Ou seja $0 \le 2\theta < 180°$.

Nesta faixa vale que $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$. Portanto, escolheremos o sinal de $\cos 2\theta$ igual ao sinal de $\dfrac{A-C}{B}$ (note que $B \neq 0$)

Escolhemos:

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{|B|}{H}, \qquad \cos 2\theta = \operatorname{sign}\left(\frac{A-C}{B}\right)\frac{|A-C|}{H}$$

com $H = \sqrt{B^2 + (A-C)^2}$

$$\boxed{B \cdot \cos 2\theta = (A-C)\operatorname{sen} 2\theta}$$

Obs.: para saber θ, $0 \leq \theta < 90$, podemos usar que se $\cos 2\theta = \text{sign}\left(\frac{A-C}{B}\right)\frac{|A-C|}{H}$ e a função "arccos" para calcular θ.

Agora que sabemos eliminar o termo $x'y'$, resta "apenas" calcular os outros coeficientes...

Prosseguimos para calcular c e s usando que

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ e $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ou seja, calcula-se $c = \cos\theta$ e $s = \text{sen}\,\theta$ das expressões:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2c^2 - 1 = \text{sign}\left(\frac{A-C}{B}\right)\frac{|A-C|}{H}, & \text{com } c > 0 \\ s^2 + c^2 = 1 & \text{com } s > 0 \end{array}}$$

Voltando a expressão $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

após substituirmos, $x = cx' - sy'$ e $y = sx' + cy'$

expandindo e reagrupando os termos, obtemos

$$A'x'^2 + \cancel{B'}^{\,0}\, x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F'$$

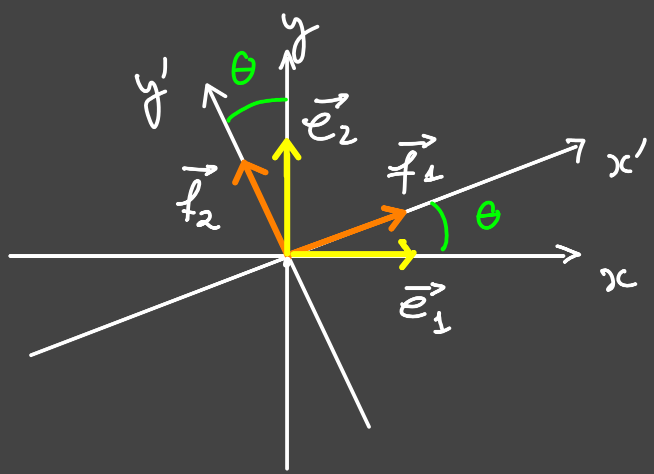
onde:

$$\boxed{\begin{cases} A' = Ac^2 + Bcs + Cs^2 \\ B' = 0 \\ C' = As^2 - Bcs + Cc^2 \\ D' = Dc + Es \\ E' = -Ds + Ec \\ F' = F \end{cases}}$$

c, s

//

$$\boxed{B \cdot \cos 2\theta = (A - C)\, \operatorname{sen} 2\theta}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 80x - 16y + 100 = 0$$

$A = 9, \; B = -24, \; C = 16$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Escolhemos:} \\ \operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{|B|}{H}, \quad \cos 2\theta = \operatorname{sign}\left(\dfrac{A-C}{B}\right)\dfrac{|A-C|}{H} \\ \text{com} \quad H = \sqrt{B^2 + (A-C)^2} \end{array} \right\}$$

Temos:

$$A - C = -7, \quad H = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25,$$

$$\cos 2\theta = \operatorname{sign}\left(\frac{-7}{-24}\right) \cdot \frac{|-7|}{25} = \frac{7}{25},$$

usando

$$\boxed{\cos 2\theta = 2(\cos\theta)^2 - 1} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{25} + 1\right) = \frac{16}{25}$$

e portanto

$$c = \cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \left(\begin{array}{l}\text{sinal positivo} \\ \text{pois } 0 < \theta < 90^\circ\end{array}\right)$$

o seno correspondente vêm de

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

ou seja $\quad s = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}. \quad \left(\begin{array}{l}\text{também positivo} \\ \text{pois } 0 < \theta < 90^\circ\end{array}\right)$

Observação: A mudança de coordenada a ser usada é $\begin{cases} x = c\,x' - s\,y' \\ y = s\,x' + c\,y' \end{cases}$

com $c = \frac{4}{5}$ e $s = \frac{3}{5}$.

Calculando os novos coeficientes:

$$\begin{cases} A' = A c^2 + B c s + C s^2 \\ B' = 0 \\ C' = A s^2 - B c s + C c^2 \\ D' = D c + E s \\ E' = -D s + E c \\ F' = F \end{cases}$$

$A = 9$
$B = -24$
$C = 16$
$D = -80$
$E = -60$
$F = 100$

temos

$$A' = 9.\left(\frac{4}{5}\right)^2 + (-24).\frac{4}{5}.\frac{3}{5} + 16.\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0$$

$$C' = 9\left(\frac{3}{5}\right)^2 - (-24).\frac{4}{5}.\frac{3}{5} + 16\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{625}{25} = 25$$

$$D' = -80.\frac{4}{5} + (-60)\frac{3}{5} = -100$$

$$E' = -(-80).\frac{3}{5} + (-60)\frac{4}{5} = 0$$

$$F' = 100$$

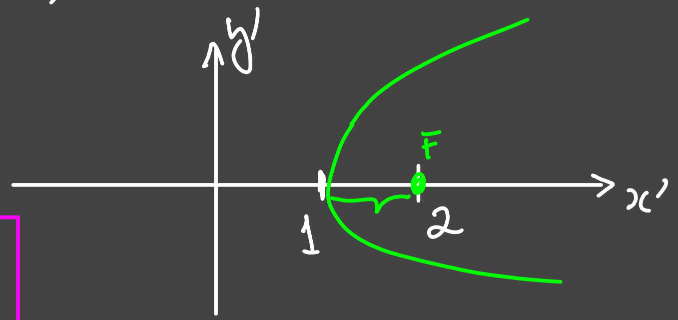
que resulta em

$$0 \cdot x'^2 + 0 \cdot x'y' + 25y'^2 - 100x' + 0 \cdot y' + 100 = 0$$

é a parábola $y'^2 - 4x' + 4 = 0$.

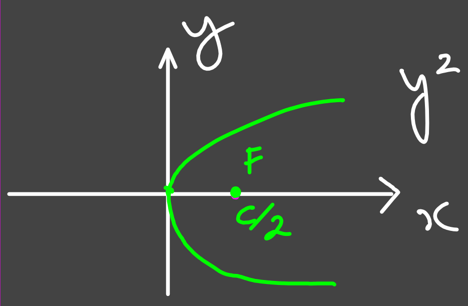
$$y'^2 - 2c\,x' = 0 \Longrightarrow y'^2 = 2c\,x'$$

ou seja, $y'^2 - \underbrace{4}_{4=2c}(x' - 1) = 0$

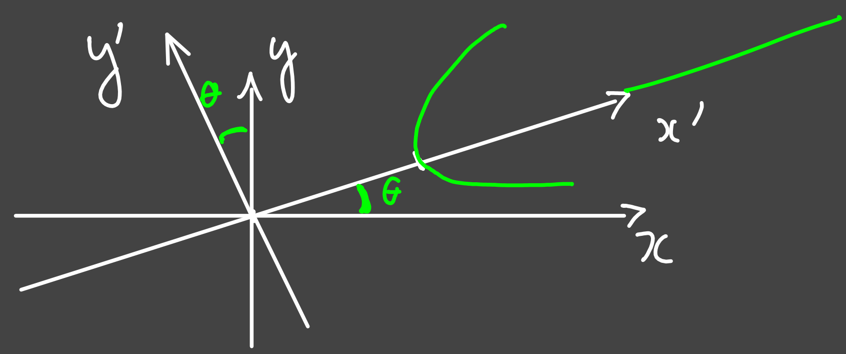


Forma reduzida:

$$\boxed{y^2 - 2c\,x = 0}$$



$$\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta \simeq 37^0$$



Vamos agora supor que as contas para eliminar o termo misto de

$$6x^2 - 24xy - y^2 + 12x + 26y + 11 = 0$$

já tenham sido feitas, e resultou em

$$-10x'^2 + 15y'^2 + 28x' + 6y' + 11 = 0.$$

Agora vamos encontrar o "centro" da cônica.

$$-10x'^2 + 15y'^2 + 28x' + 6y' + 11 = 0$$

Queremos simplificar mais eliminando os termos "lineares": $28x' + 6y'$.

Há dois métodos:

(1) substituir em x' e y' uma nova mudança:

$x' = x'' + k$ e $y' = y'' + l$ e escolher k e l,

ou (2) completando quadrado.

Vamos fazer este exemplo completando quadrado. $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$

Primeiro reagrupamos

$$-10x'^2 + 28x' \quad + 15y'^2 + 6y' + 11 = 0$$

fatoramos os coeficientes de x'^2 e y'^2:

$$-10\left(x'^2-\frac{28}{10}x'\right)+15\left(y'^2+\frac{6}{15}y'\right)+11=0$$

Completamos o quadrado

$$x'^2-\frac{14}{5}x' = x'^2-2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)x'+\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$=\left(x'-\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2.$$

$$y'^2+\frac{2}{5}y' = y'^2+2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)y'+\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$$

$$=\left(y'+\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

Retornando à expressão temos:

$$-10\left(x'^2-\frac{28}{10}x'\right)+15\left(y'^2+\frac{6}{15}y'\right)+11=0$$

$$-10\left[\left(x'-\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2\right]+15\left[\left(y'+\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]+11=0$$

$$-10\left(x'-\frac{7}{5}\right)^2+\frac{2\cdot 7^2}{5}+15\left(y'+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{3}{5}+11=0$$

$$-10\left(x'-\frac{7}{5}\right)^2+15\left(y'+\frac{1}{5}\right)^2+30=0$$

que simplifica para

$$\frac{1}{3}\left(x' - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y' + \frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

que é uma hipérbole centrada em $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Se quisermos, podemos fazer uma troca de variável $x' = x'' + \frac{7}{5}$ e $y' = y'' - \frac{1}{5}$ de modo a obter a equação

$$\frac{1}{3}x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 = 1 .$$

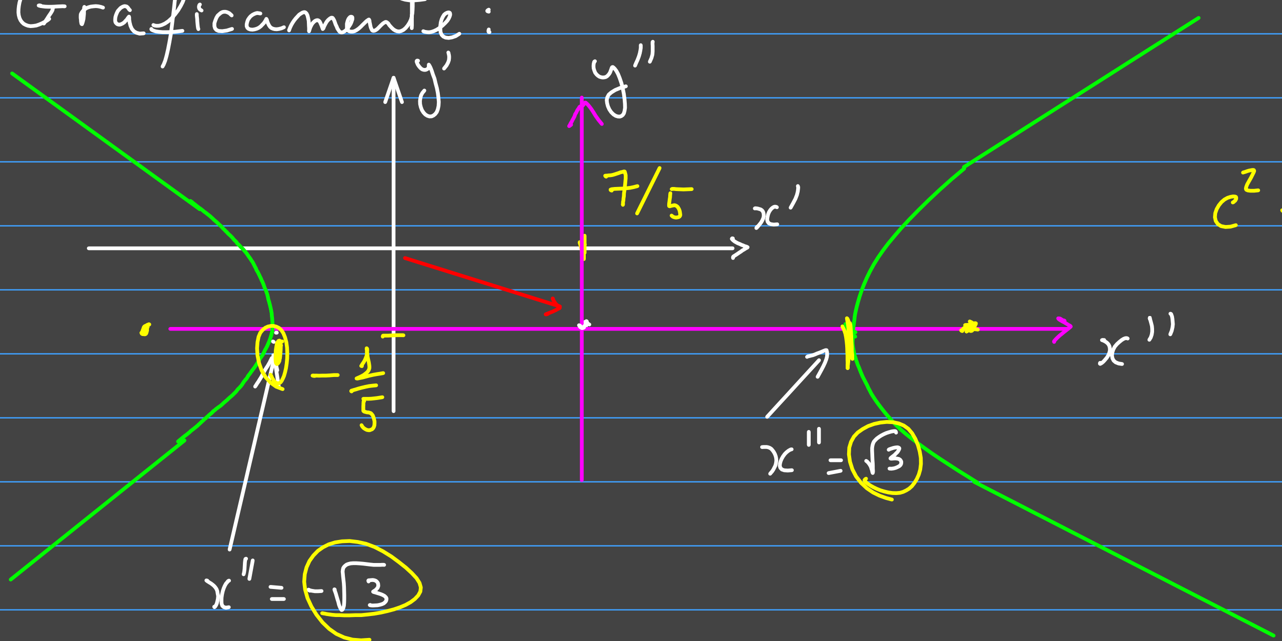
$$\frac{x''^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{y''^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

$a = \sqrt{3}$

$b = \sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2$

Graficamente:

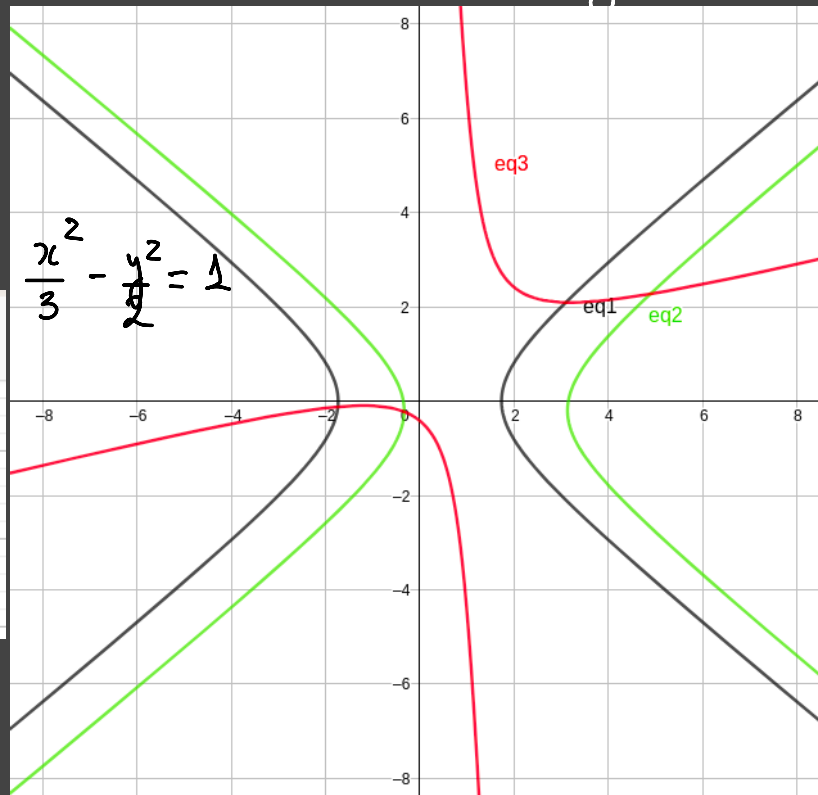


No Geogebra, no mesmo eixo xOy.

eq1: $\boxed{1 / 3 x^2 - 1 / 2 y^2 = 1}$

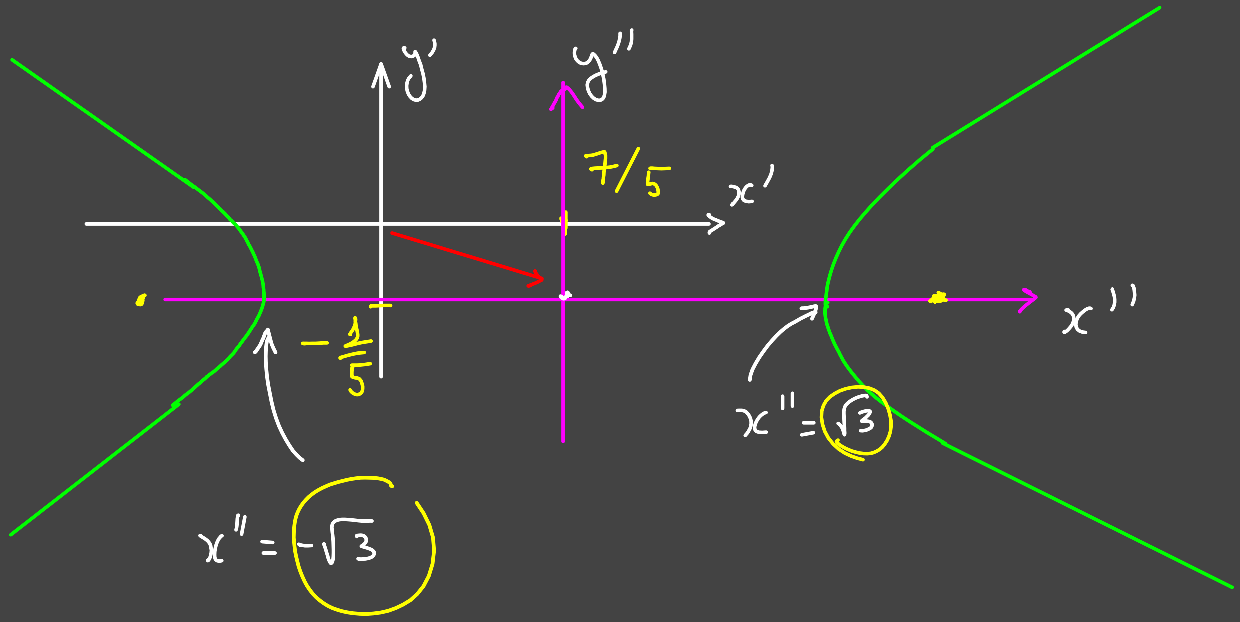
eq2: $-10 x^2 + 15y^2 + 28x + 6y + 11 = 0$

eq3: $6x^2 - 24x y - y^2 + 12x + 26y + 11 = 0$



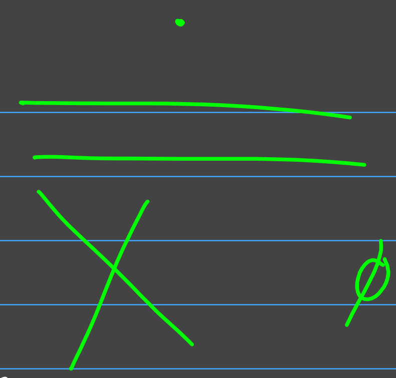
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$$

//



y'
y''
7/5
x'
x''
−1/5
x'' = √3
x'' = −√3

Formas degeneradas das cônicas:



$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

(I) Se $A \cdot C > 0$,

(a) se $F = 0$, $\quad Ax^2 + Cy^2 = 0$

a solução é o ponto $(0,0)$.

(b) se $F \neq 0$ e tem o mesmo sinal que A e C

então não há solução.

(II) Se $A \cdot C < 0$,

Se $F = 0$, temos duas retas concorrentes:

$$x^2 - \left|\frac{C}{A}\right| y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \left|\frac{C}{A}\right| y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\left|\frac{C}{A}\right|}\, y$$

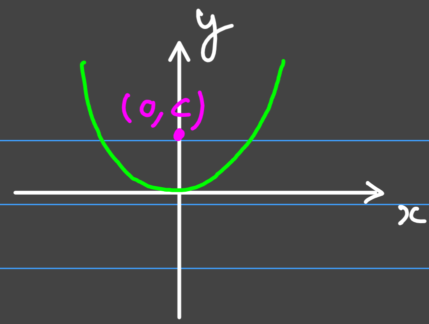
(III) Se $A \cdot C = 0$, e supondo $A \neq 0$, tem-se

→ Se $F \cdot A > 0$,
$Ax^2 = F \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{F}{A}} \Rightarrow$ duas retas paralelas.

→ Se $F = 0$,
$Ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ que é uma reta.

→ Se $A \cdot F < 0$, não há solução.

Forma padrão para as cônicas

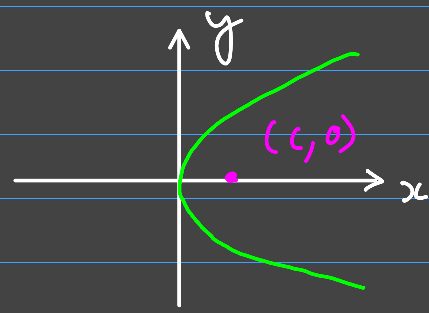


Parábolas

$$x^2 + 2cy = 0$$

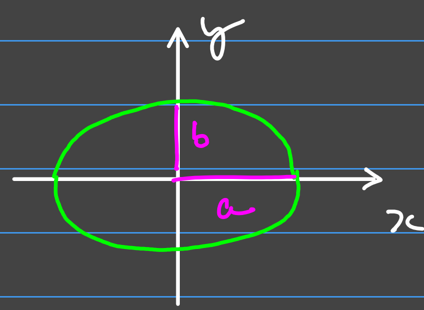
ou

$$y^2 + 2cx = 0$$

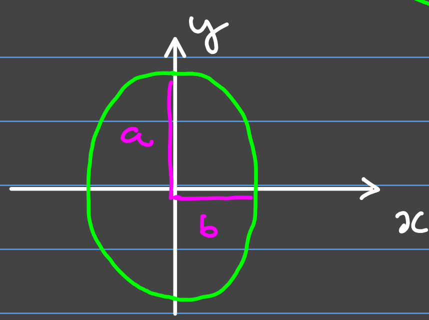


Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b$$



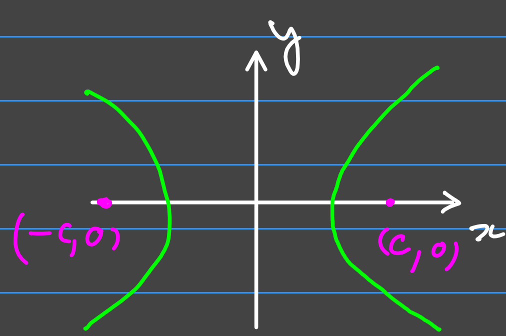
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



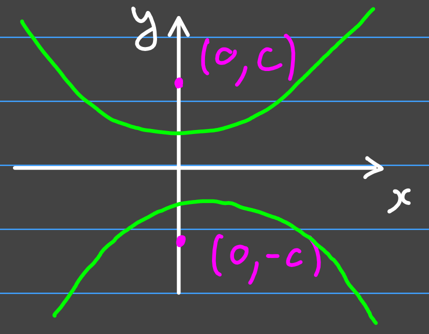
$$c^2 = a^2 - b^2$$

Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$