# Matemática Discreta

## Teoria dos Grafos
## Conexidade
## Árvore

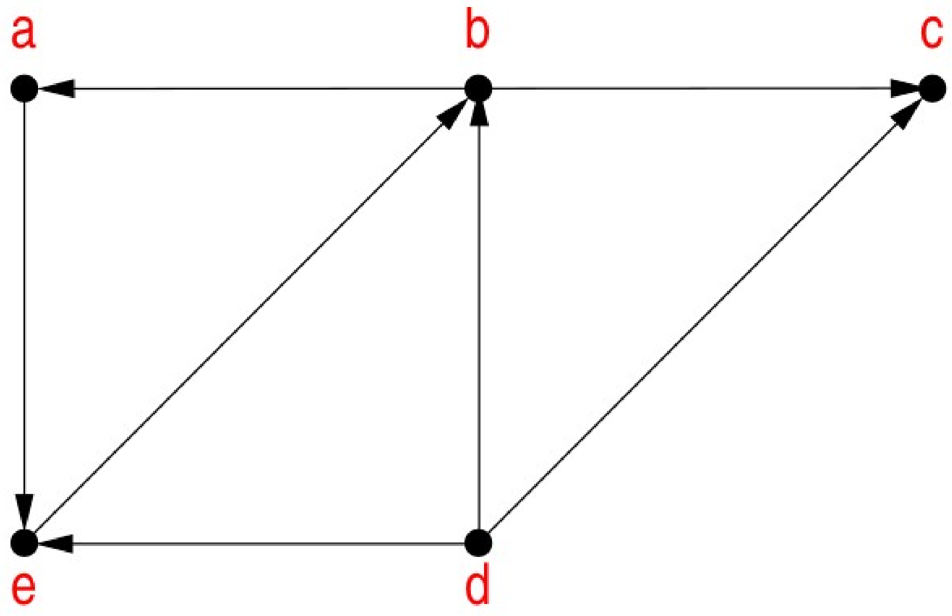
Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

# Teoria dos Grafos

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar conceitos relacionados a **conexidade** em grafos
    - Grafo conexo, desconexo e totalmente desconexo
    - Componente (conexa) e componente fortemente conexa
    - Aresta e vértice de corte
  - Apresentar o conceito de **árvore**
    - Árvore geradora
    - Floresta
  - Capacitar o aluno a usar os conceitos de **conexidade** em grafos para modelar e resolver problemas computacionais

# Problema #18

- **Determine as componentes fortemente conexas do grafo**



# Teoria dos Grafos

- **Conectividade (ou conexidade)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja G = (V, A) um grafo não orientado
  - Dizemos que um vértice u $\in$ V está **conectado** ou **ligado** a um vértice v $\in$ V sse existe um caminho em G com início em u e término em v

* Um caminho é uma sequência de vértices e as arestas que os unem, onde todos os vértices são distintos

# Teoria dos Grafos

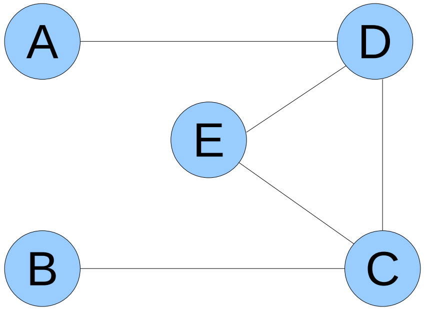
- **Grafo conexo**

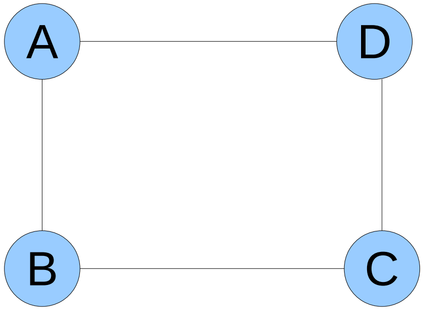
Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo não vazio é **conexo** quando quaisquer dois de seus vértices estão conectados

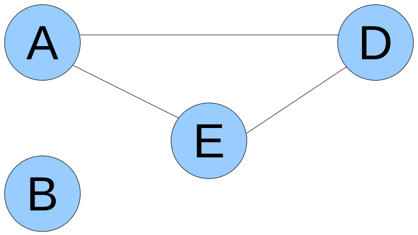
# Teoria dos Grafos

- **Grafo conexo**
  - Exemplos
    - Grafos conexos



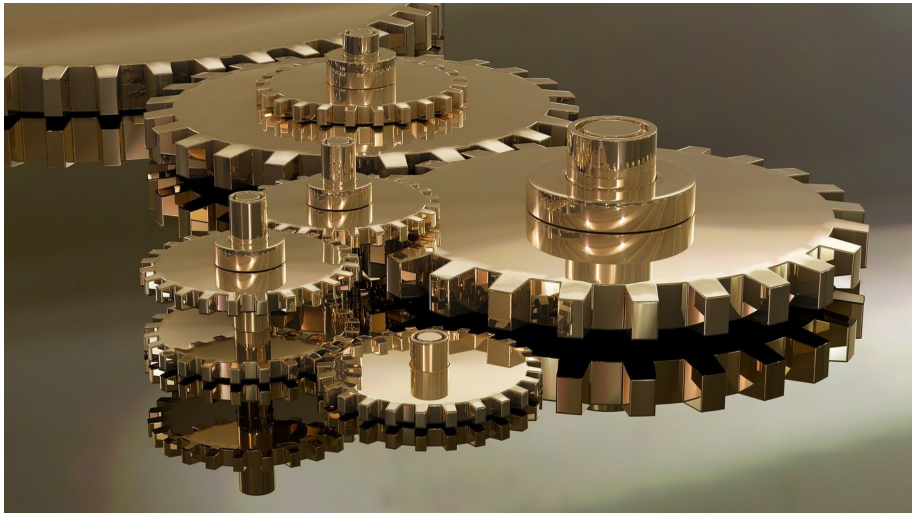




    - Grafo desconexo



# Teoria dos Grafos

- **Componentes (conexas)**

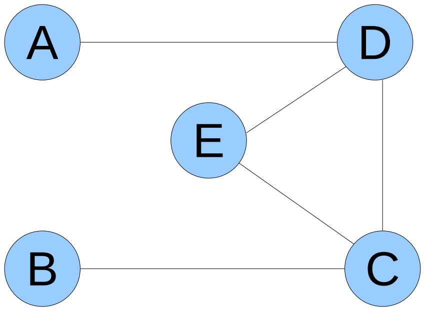


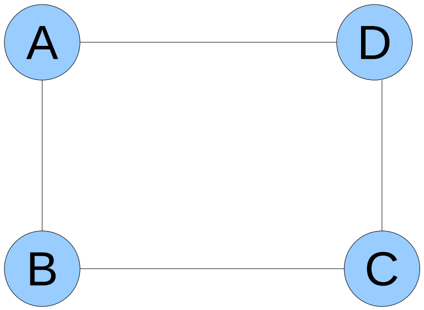
Fonte: https://pixabay.com/

- As **componentes** (conexas) de um grafo G são os subgrafos conexos de G que são maximais na relação "⊆" ("é subgrafo de")

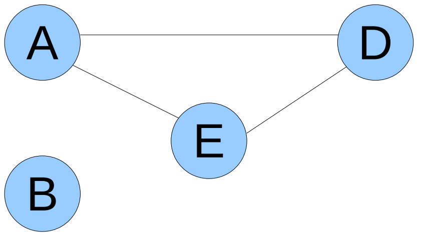
# Teoria dos Grafos

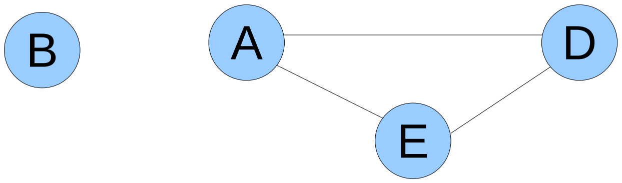
- **Componentes (conexas)**
  - Exemplos
    - Grafos conexos têm exatamente uma componente




    - Grafo desconexo e suas duas componentes conexas



# Teoria dos Grafos

- **Componentes (conexas)**
  - **Teorema 1**
    - Um subgrafo H de um grafo não orientado G é uma componente conexa de G sse H é conexo e toda aresta de G (A(G)) que tem um extremo em V(H) está em A(H) (e portanto tem os dois extremos em V(H)).
      - O Teorema 1 implica que cada componente de um grafo G é essencialmente um grafo independente, sem intersecção ou ligação com as outras componentes

# Teoria dos Grafos

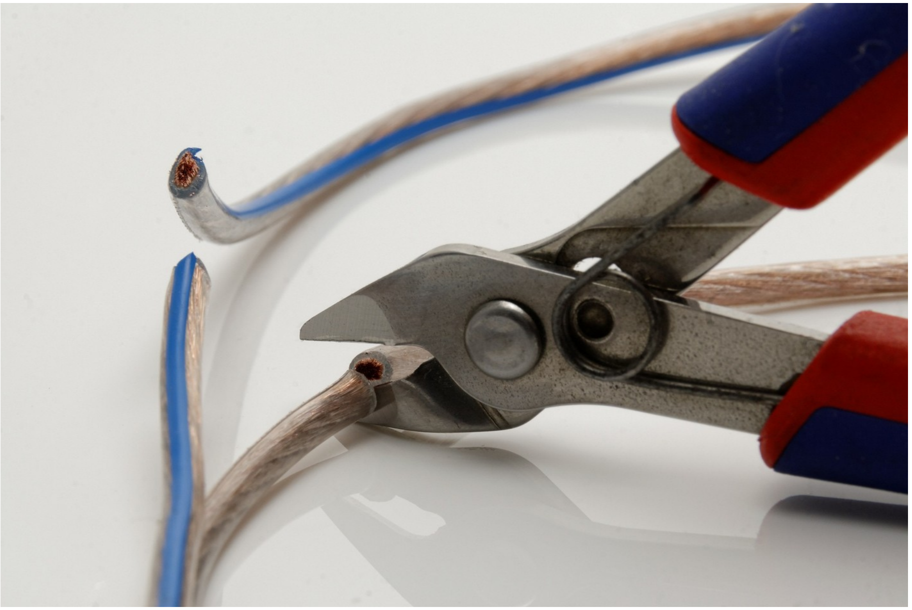
- **Componentes (conexas)**
  - **Grafo conexo**
    - Um grafo é conexo sse ele tem <u>exatamente uma componente conexa</u>
  - **Grafo desconexo**
    - Um grafo é desconexo sse tem <u>duas ou mais componentes conexas</u>

➔ O grafo vazio não é conexo nem desconexo

➔ Um grafo sem arestas é dito **totalmente desconexo**

# Teoria dos Grafos

- **Aresta de corte**



Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **aresta de corte** *e* é uma aresta de um grafo G que, <u>se removida</u> (G - *e*) gera um grafo G’ que tem <u>uma componente conexa a mais</u> em relação a G

# Teoria dos Grafos

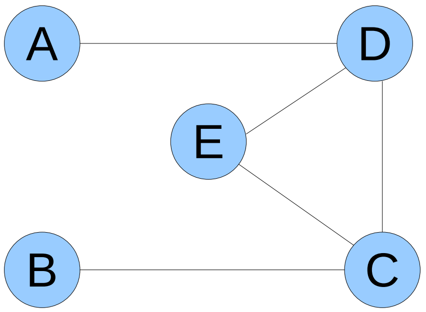
- **Vértice de corte**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um **vértice de corte** *v* é um vértice de um grafo G que, se removido (G - *v*) gera um grafo G' que tem uma componente conexa a mais em relação a G

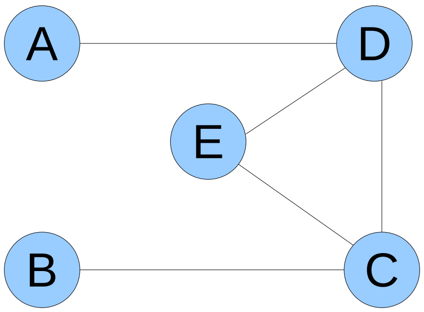
# Teoria dos Grafos

- **Dado o grafo abaixo**




  - Responda
    a) Quem são as arestas de corte?
    b) Quem são os vértices de corte?

- **Dado o grafo abaixo**




- Responda
  a) Quem são as arestas de corte?
  b) Quem são os vértices de corte?

**RESPOSTAS**

AD e BC

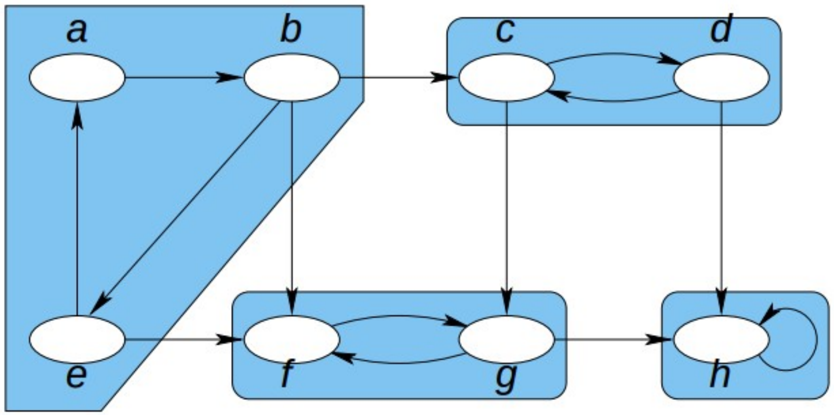
C e D

# Teoria dos Grafos

- **Conectividade (ou conexidade)**
  - **Grafo orientado**
    - **Grafo orientado fortemente conexo**
      - Um grafo orientado $G = (V, A)$ é fortemente conexo se para quaisquer dois vértices $u, v \in V$ <u>existe um passeio orientado de u para v e de v para u</u>
    - **Componentes fortemente conexas**
      - As componentes fortemente conexas de um grafo orientado G são os <u>subgrafos fortemente conexos</u> de G que são maximais na relação "$\subseteq$" ("é subgrafo de")

# Teoria dos Grafos

- **Conectividade (ou conexidade)**
  - Grafo orientado e suas componentes fortemente conexas




    - ➔ Ao contrário do que ocorre em grafos não orientados, uma componente fortemente conexa de um grafo orientado não é necessariamente "isolada" das outras componentes

Fonte: http://www.ic.unicamp.br/~fkm/disciplinas/mc448/anteriores/2011s1/pdfs/13-componentes-fortemente-conexas.pdf

# Teoria dos Grafos

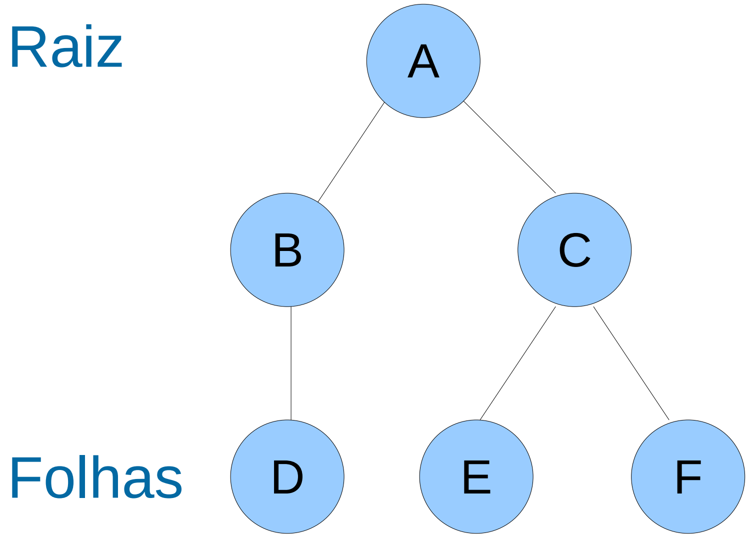
- **Árvore**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico
  - Por definição, um grafo com um vértice e nenhuma aresta é uma árvore

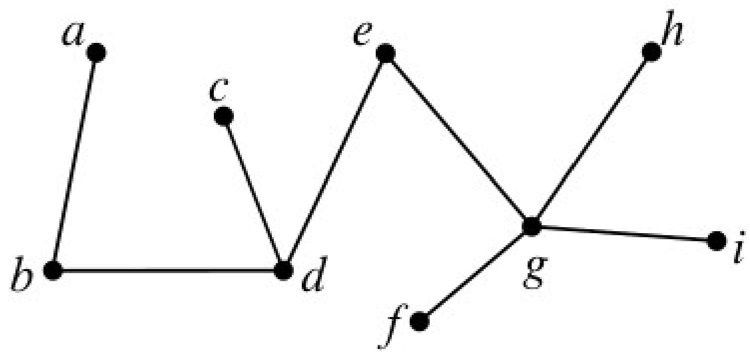
# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - Terminologia
    - Nó = vértice
    - Raiz
      - Nó do qual partem as arestas
    - Folha
      - Nó de grau 1
    - Pai
      - Nó antecessor direto de um dado nó
    - Filho
      - Descendente direto de um dado nó



# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - Exemplo




Fonte: (LEHMAN et al., 2017, p. 496)

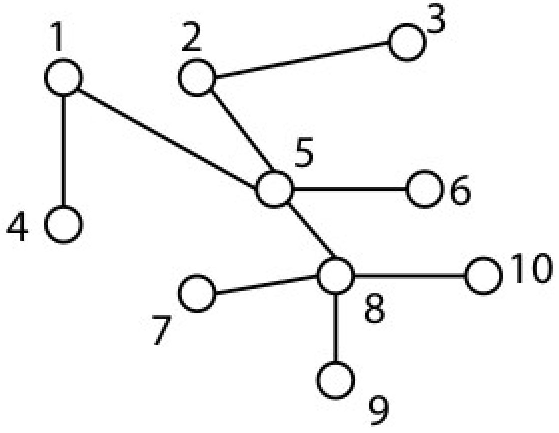
    - Uma árvore com 9 vértices (nós), sendo 5 deles nós folhas (nós de gau 1)

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - Dado o grafo G(V, A) com V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } e A = { { 1, 4 }, { 1, 5 }, { 2, 3 }, { 2, 5 }, { 5, 6 }, { 5, 8 }, { 7, 8 }, { 8, 9 }, { 8, 10 } }
    - Esse grafo é uma árvore?

**RESPOSTA**

Sim, é uma árvore



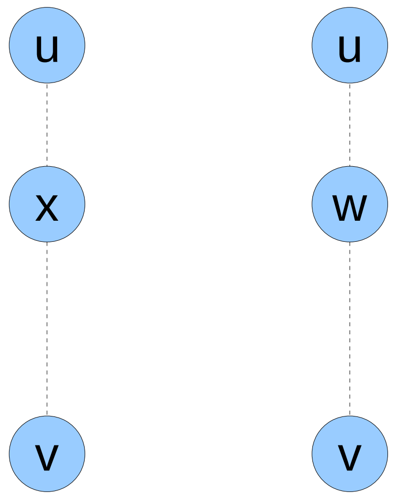
# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**
    1. Cada subgrafo conexo de uma árvore é uma árvore
    - Demonstração
      - Para um subgrafo ser uma árvore ele tem que ser <u>conexo</u> e <u>acíclico</u>
      - ➔ <u>Conexo</u> ele já é pela própria especificação da propriedade
      - Considere agora a possibilidade de haver um ciclo no subgrafo
        - Um ciclo no subgrafo necessariamente implica em um ciclo no grafo original, o que contradiz a especificação
      - ➔ Logo, o subgrafo também tem que ser <u>acíclico</u>

- **Árvore**
  - **Propriedades**
    2. Há um único caminho entre cada par de vértices
    - Demonstração
      - Premissas
        - Seja T uma árvore
        - Sejam u e v dois vértices de T
        - Como a árvore é conectada, há pelo menos um caminho P ligando u a v
      - Suponhamos, por contradição, que existe outro caminho Q ligando u a v (ou seja, P não é único)

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**
    2. Há um único caminho entre cada par de vértices
    - Graficamente
      - P e Q

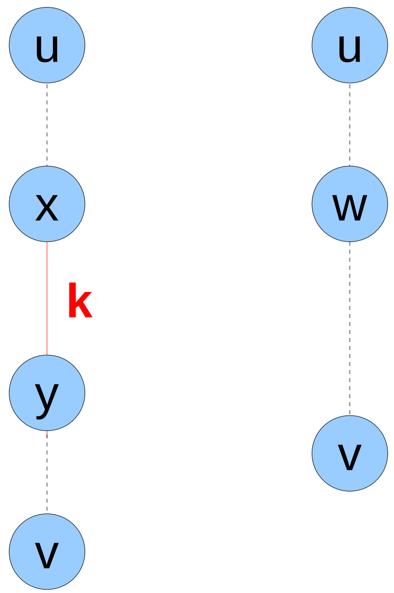


# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**

    2. Há um único caminho entre cada par de vértices

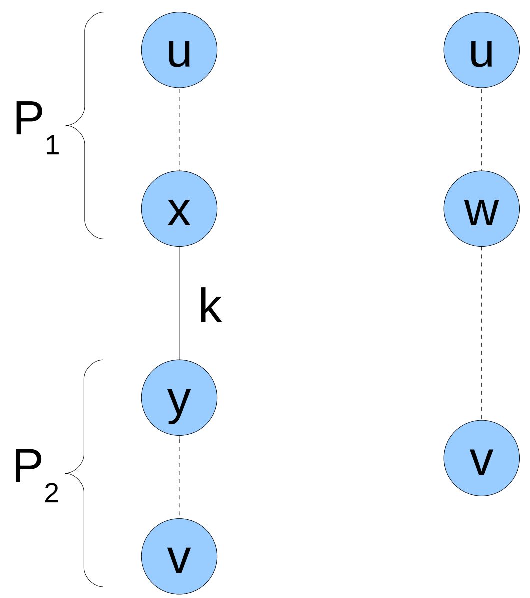
    - Graficamente
      - P e Q




Como P e Q são distintos, existe uma aresta k que ocorre em P, mas não ocorre em Q
k tem x e y como extremos

# Teoria dos Grafos

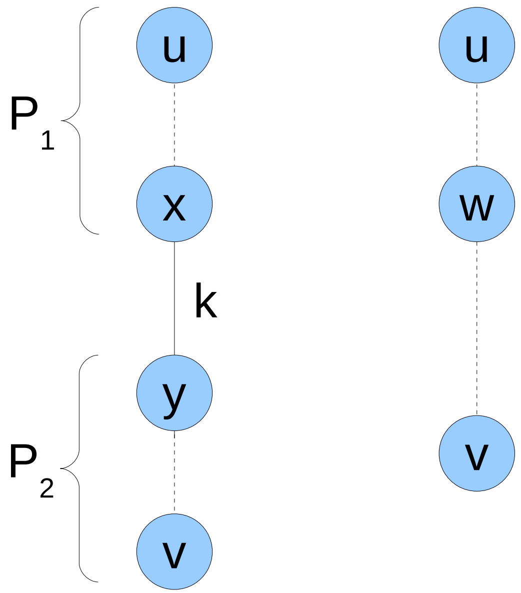
- **Árvore**
  - **Propriedades**
    2. Há um único caminho entre cada par de vértices
    - Graficamente
      - P e Q




Podemos escrever
$P = P_1 \cdot (x, k, y) \cdot P_2$

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**
    2. Há um único caminho entre cada par de vértices
    - Graficamente
      - P e Q



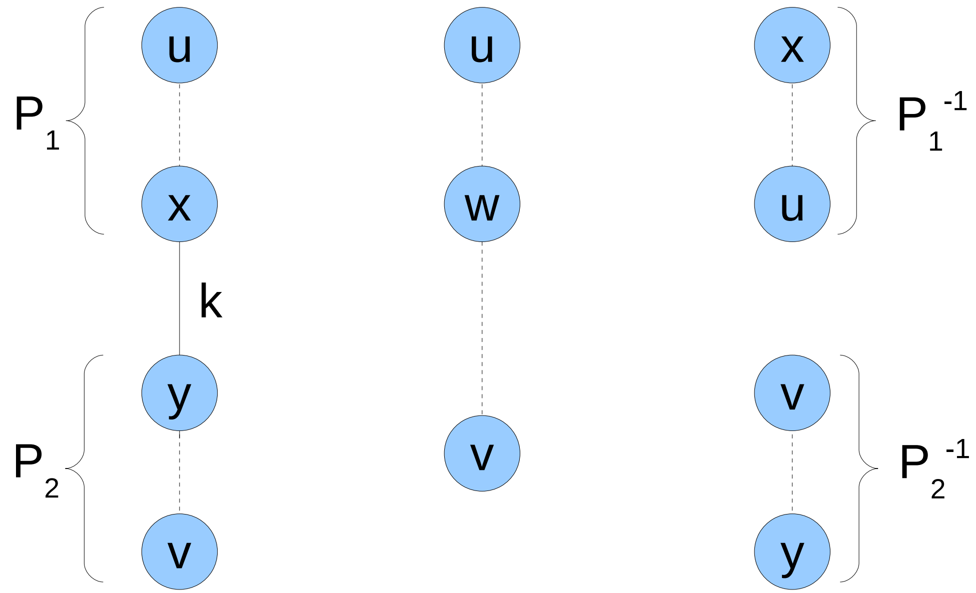

Considere o subgrafo H do grafo original que consiste de todos os vértices e arestas de P e de Q, exceto a aresta k

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**

    2. Há um único caminho entre cada par de vértices

    - Graficamente
      - P , Q Passeios inversos




$P_1^{-1}$ é um passeio em H

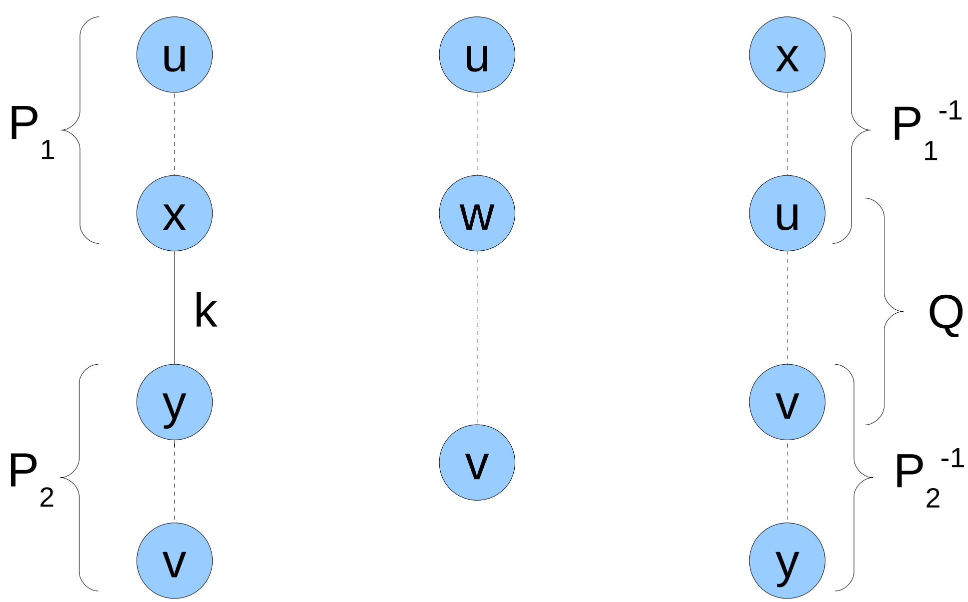
$P_2^{-1}$ é um passeio em H

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**

    2. Há um único caminho entre cada par de vértices

    - Graficamente
      - P , Q e R




$R = P_1^{-1} \cdot Q \cdot P_2^{-1}$

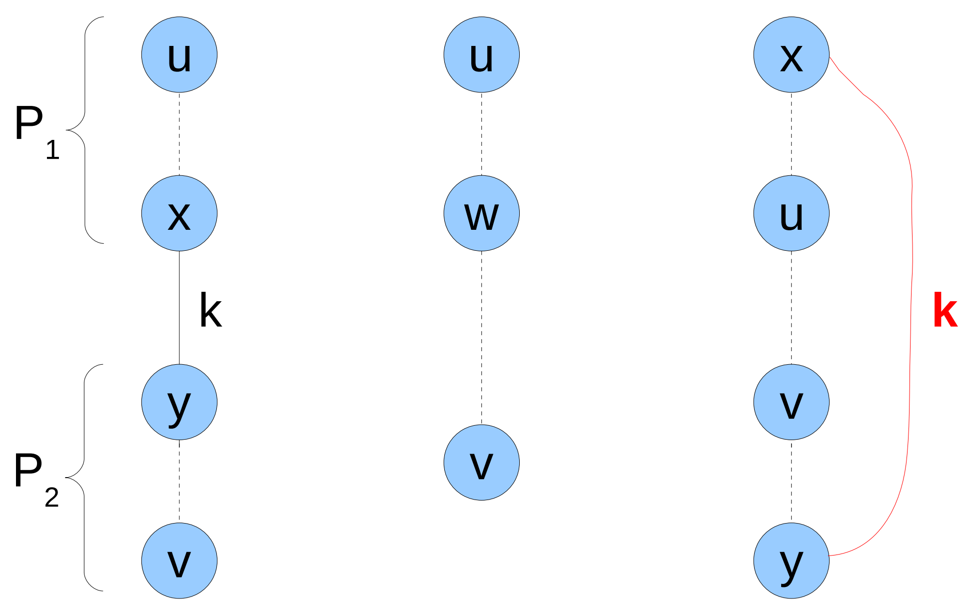
é um passeio que visita todos os vértices de H
Portanto, H é conexo e existe um caminho R em H, de x para y, que não passa por k

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**

    2. Há um único caminho entre cada par de vértices

    - Graficamente
      - P , Q e R




A concatenação
R · (y, k, x)
É, portanto um circuito em T
O que contradiz a definição de árvore aplicada a T e, portanto, concluímos que o caminho P é único

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**
    1. Cada subgrafo conexo de uma árvore é uma árvore
    2. Há um único caminho entre cada par de vértices
    3. Adicionar uma aresta entre dois nós não adjacentes em uma árvore cria um grafo com um ciclo
    4. Remover qualquer aresta torna o grafo desconexo, ou seja, toda aresta em uma árvore é uma aresta de corte
    5. Se a árvore tem pelo menos dois vértices, então ela tem pelo menos duas folhas
    6. O número de vértices em uma árvore é uma unidade maior do que o número de arestas

Conseq. da 2

Conseq. definição

# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - **Propriedades**

    6. O número de vértices em uma árvore é uma unidade maior do que o número de arestas

    - Seja $T = (V, E)$ uma árvore com $|V| = n$

    → Como uma árvore é um grafo acíclico e conexo,

$$|E| = n - 1$$

senão teríamos as seguintes contradições:

1) Se $|E| < n - 1$, o grafo seria desconexo (não seria árvore)
2) Se $|E| > n - 1$, o grafo teria um ciclo (não seria árvore)

# Teoria dos Grafos

- **Árvore geradora**

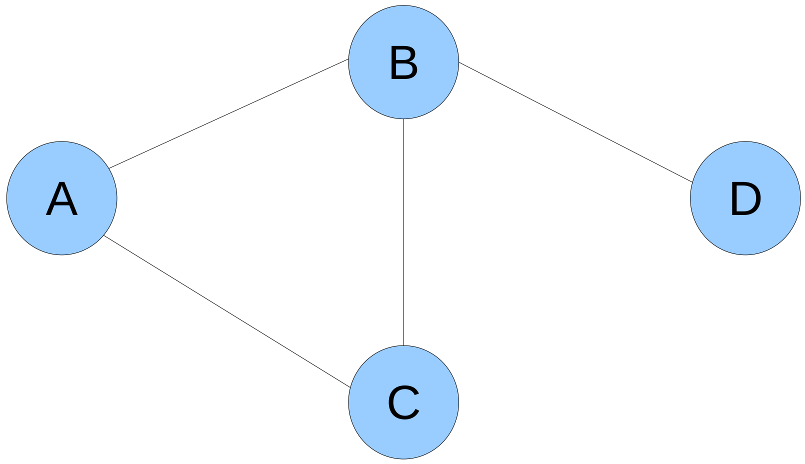
Fonte: https://pixabay.com/

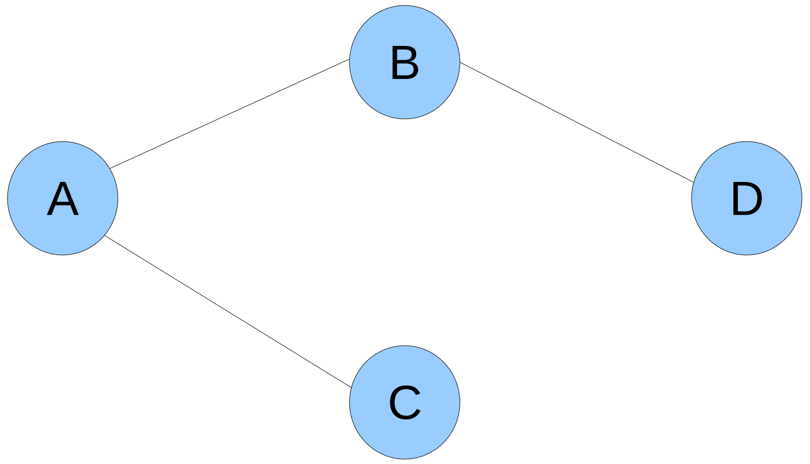
- Uma **árvore geradora** de um grafo G é um <u>subgrafo gerador</u> de G que é uma <u>árvore</u>

# Teoria dos Grafos

- **Árvore geradora**
  - Exemplo
    - Grafo G

Uma possível árvore geradora de G



# Teoria dos Grafos

- **Árvore**
  - Dado o grafo G(V, A) com V = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k } e A = { { a, b }, { b, c }, { b, e }, { b, f }, { c, d },{ c, f }, { d, g }, { e, h }, { f, g }, { f, h }, { f, i }, { g, i }, { h, i }, { i, j }, { i, k }, { j, k } }
  - Dê uma possível árvore geradora

**RESPOSTA**

V’ = V

A’ = { { a, b }, { b, c }, { b, e }, { b, f }, { c, d }, { e, h }, { f, g }, { h, i }, { i, j }, { i, k } }

(Há outras possibilidades)

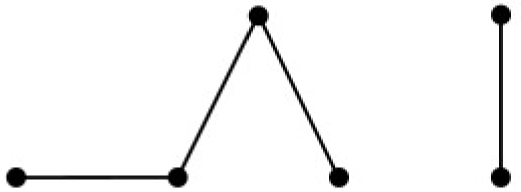
- **Floresta**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **floresta** é um <u>grafo acíclico</u>

# Teoria dos Grafos

- **Floresta**
  - Exemplo

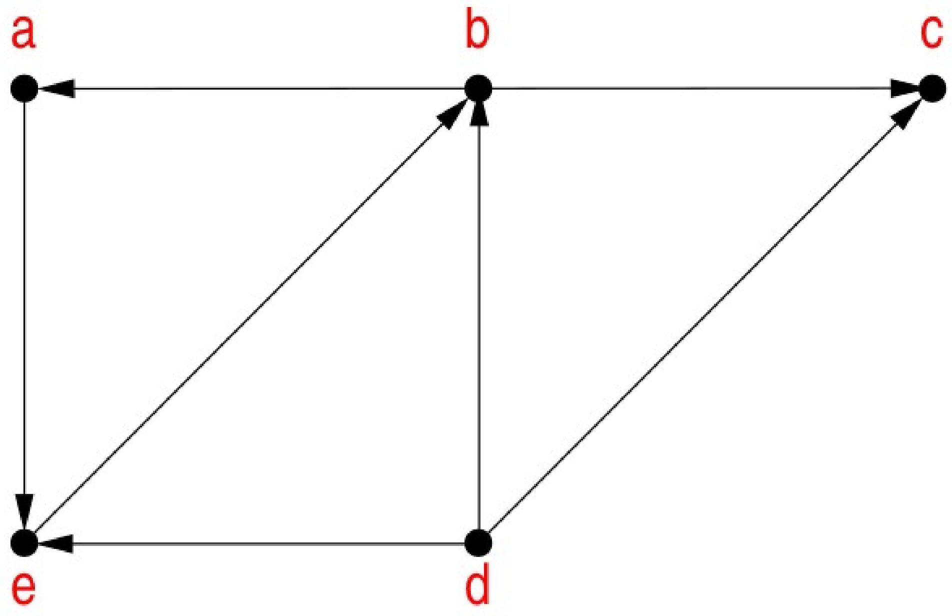


Fonte: (LEHMAN et al., 2017, p. 496)

➔ Cada componente desse grafo é uma árvore

# Problema #18

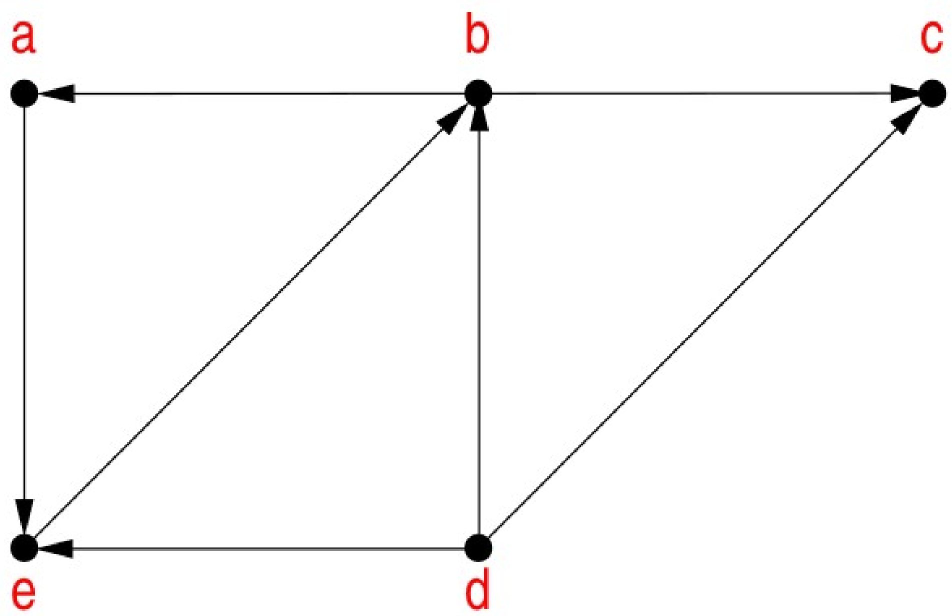
- **Determine as componentes fortemente conexas do grafo**




Fonte: https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE9_Solucao.pdf - pág. 14

# Problema #18

- **Determine as componentes fortemente conexas do grafo**




**RESPOSTA**

(a) $H_1 : V_1 = \{a, b, e\}$

(b) $H_2 : V_2 = \{c\}$

(c) $H_3 : V_3 = \{d\}$

Fonte: https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE9_Solucao.pdf - pág. 14