UNIDADE V

Aula 27 - Multiplicadores de Lagrange - Parte I

Prof. Alex Carlucci Rezende

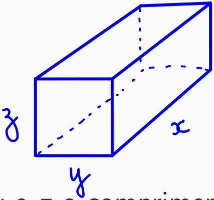
Cálculo Diferencial e Séries

Período ENPE - Bloco C - 2020/1

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

Exemplo 1

Exemplo 1: Uma caixa retangular com tampa deve ser feita com 9 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.



Resolução: Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros), respectivamente.

Então, seu volume é

$$V = xyz.$$

Exemplo 1

Vemos que a função volume V depende de três variáveis. Mas, podemos expressar V como função apenas de x e y usando o fato de que a área lateral da caixa é

$$2xy + 2xz + 2yz = 9.$$

Isolando z nessa equação, temos:

$$z = \frac{9 - 2xy}{2x + 2y}.$$

Assim, o volume fica:

$$V = xy\frac{9 - 2xy}{2x + 2y} = \frac{9xy - 2x^2y^2}{2x + 2y}.$$

Exemplo 1

Calculando as derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(9 - 2x^2 - 4xy)}{2(x+y)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(9 - 2y^2 - 4xy)}{2(x+y)^2}.$$

Para que V seja máximo, devemos encontrar x e y que anulem essas derivadas parciais, ou seja,

$$9 - 2x^2 - 4xy = 0 \quad \text{e} \quad 9 - 2y^2 - 4xy = 0,$$

implicando que $x = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Dessa forma, obtemos:

$$x = y = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad z = \frac{9 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exemplo 1

Aplicando o Teste da Derivada Segunda, temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} < 0$$

e

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{9}{8} > 0,$$

implicando que o ponto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ é de máximo.

Assim, o volume máximo é

$$V = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Introdução

No exemplo anterior maximizamos a função

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$2xy + 2xz + 2yz = 9.$$

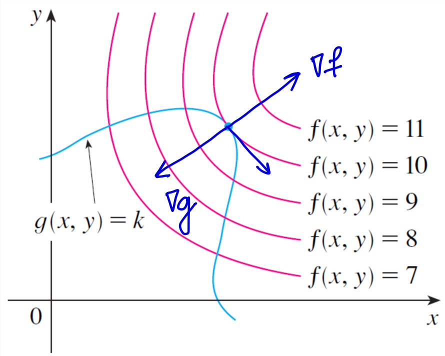
Nesta aula apresentaremos o método de Lagrange para maximizar (ou minimizar) uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

Interpretação geométrica do método

Problema: Determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $\underbrace{g(x, y) = k}$.

↳ curva de nível de g

Equivalentemente, queremos determinar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertence à curva de nível $g(x, y) = k$.



$\nabla f \,//\, \nabla g$

Interpretação geométrica do método

Se (x_0, y_0) é um valor extremo de f localizado na curva de nível $f(x, y) = c$, então os vetores gradientes de f e g são paralelos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

O número λ na equação acima é chamado de multiplicador de Lagrange.

A ideia geométrica para mais variáveis é análoga e obtemos a mesma condição de paralelismo entre os vetores gradientes ∇f e ∇g.

Método dos Multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeitos à restrição $g(x, y, z) = k$ (supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$):

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z), \\ g(x, y, z) = k. \end{cases}$$

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Exemplo 2

Exemplo 2: Uma caixa retangular com tampa deve ser feita com 9 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Resolução: Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros), respectivamente.

Queremos maximizar a função

$$V = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz = 9.$$

Exemplo 2

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, olhamos para os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla V = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = 9.$$

Isso gera as equações:

$$V_x = \lambda g_x, \quad V_y = \lambda g_y, \quad V_z = \lambda g_z, \quad 2xy + 2xz + 2yz = 9,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(2y + 2z), \\ xz &= \lambda(2x + 2z), \\ xy &= \lambda(2x + 2y), \\ 2xy + 2xz + 2yz &= 9. \end{aligned}$$

$\boxed{1^{\underline{o}})\ \lambda \neq 0}$

Exemplo 2

Das três primeiras equações, temos:

$$xyz = \lambda(2xy + 2xz),$$
$$xyz = \lambda(2xy + 2yz),$$
$$xyz = \lambda(2xz + 2yz).$$

Primeiramente, observamos que $\lambda \neq 0$. Caso contrário, teríamos $xy = xz = yz = 0$, o que contraria a restrição $2xy + 2xz + 2yz = 9$.

Das duas primeiras equações, temos:

$$2xy + 2xz = 2xy + 2yz \;\Rightarrow\; xz = yz.$$

Como $z \neq 0$ (pois $V \neq 0$), segue que $x = y$.

Exemplo 2

Agora, considerando a segunda e a terceira equações, temos:

$$2xy + 2yz = 2xz + 2yz \;\Rightarrow\; xy = xz.$$

De forma análoga, temos $x \neq 0$ e, assim, $y = z$.

Colocando $\boxed{x = y = z}$ na restrição do problema, temos:

$$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

e obtemos

$$x = y = z = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

o ponto de máximo encontrado no início da aula.

UNIDADE V

Aula 27 - Multiplicadores de Lagrange - Parte II

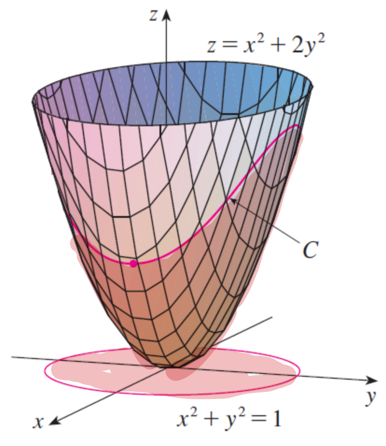
Prof. Alex Carlucci Rezende

Cálculo Diferencial e Séries

Período ENPE - Bloco C - 2020/1

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

Exemplo 3: Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.



$f(x,y) = x^2 + 2y^2$

$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x, 4y) = \lambda (2x, 2y)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x\lambda \\ 4y = 2y\lambda \end{cases}$

Exemplo 3

$$2x = 2x\lambda \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1$$

- $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$
- $\lambda = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore$ pontos extremos: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,1) = 2 \\ f(0,-1) = 2 \\ f(-1,0) = 1 \\ f(1,0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{valor máximo de } f \text{ no círculo: } f(0,\pm 1) = 2 \\ \text{valor mínimo de } f \text{ no círculo: } f(\pm 1, 0) = 1 \end{array}$$

Exemplo 4

Exemplo 4: Determine os valores extremos da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Precisamos comparar os valores de f nos pontos críticos e na fronteira:

- na fronteira: Exemplo 3
- nos pontos críticos:

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow (2x, 4y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow f(0,0) = 0$$

Exemplo 4

$f(0,0) = 0 \longrightarrow$ valor mínimo no disco

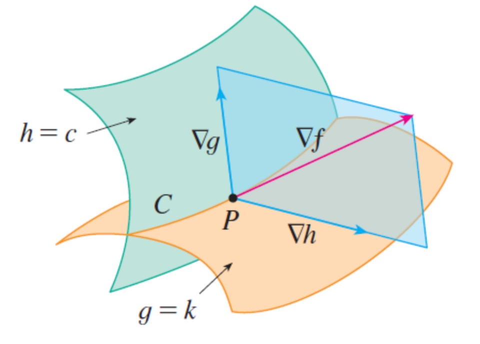
$f(0,\pm 1) = 2 \longrightarrow$ valor máximo no disco

$f(\pm 1, 0) = 1$

Método de Lagrange com Duas Restrições

Problema: Determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições da forma $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$.

Geometricamente, estamos procurando pelos valores extremos de f quando (x, y, z) está restrito a pertencer à curva C, obtida pela interseção das superfícies de nível $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$.



Método de Lagrange com Duas Restrições

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ é um extremo de f, sabemos que ∇f é ortogonal a C em P.

Como ∇g é ortogonal a $g(x, y, z) = k$ e ∇h é ortogonal a $h(x, y, z) = c$, temos ∇g e ∇h ortogonais a C.

Logo, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado pelos vetores $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$.

Assim, existem λ e μ reais tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

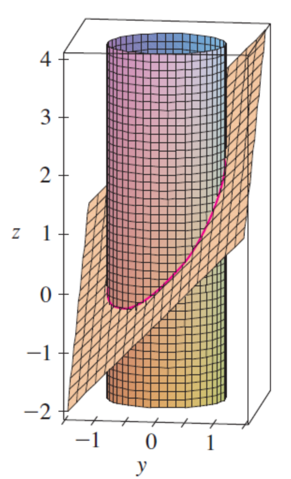
Método de Lagrange com Duas Restrições

Neste caso, o método de Lagrange nos leva a procurar por valores extremos ao resolver cinco equações nas cinco incógnitas x, y, z, λ e μ:

$$
\begin{aligned}
f_x &= \lambda g_x + \mu h_x,\\
f_y &= \lambda g_y + \mu h_y,\\
f_z &= \lambda g_z + \mu h_z,\\
g(x, y, z) &= k,\\
h(x, y, z) &= c.
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

Exemplo 5: Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da interseção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \mu \cdot \nabla h$$

$$g = x - y + z = 1$$

$$h = x^2 + y^2 = 1$$

$$(1, 2, 3) = \lambda (1, -1, 1) + \mu (2x, 2y, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2x\mu = 1 \\ -\lambda + 2y\mu = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Exemplo 5

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\mu x = 1-3 \\ 2\mu y = 2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu x = -2 \\ 2\mu y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\mu} \quad e \quad y = \frac{5}{2\mu}.$$

Substituindo em $h(x,y,z) = 1$:

$$\left(-\frac{1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\mu}\right)^2 = 1 \Rightarrow \mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Logo, $x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ e $y = \pm\dfrac{5}{\sqrt{29}}$.

Exemplo 5

Substituindo em $g(x,y,z) = 1$:

$x - y + z = 1 \Rightarrow$

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} \mp \frac{5}{\sqrt{29}} + z = 1 \Rightarrow z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$$

Os valores correspondentes de f:

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}.$$

Portanto, o valor máximo de f é $3 + \sqrt{29}$.

Referência

Para esta aula, usamos a seguinte referência:

J. Stewart. Cálculo, v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.