

Aula 20

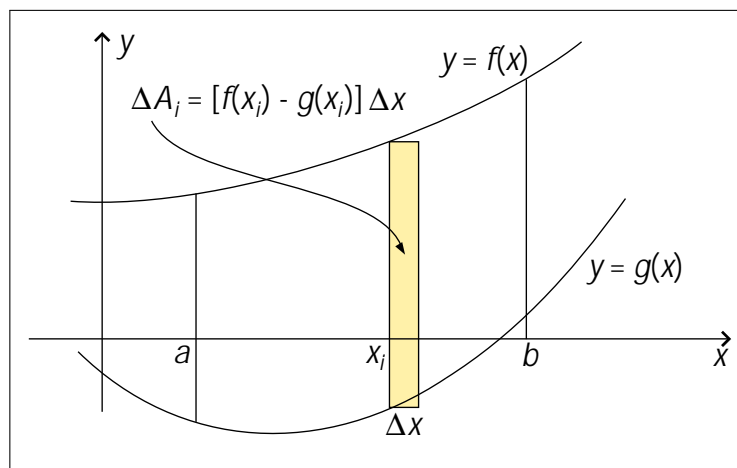
Aplicações selecionadas da integral definida

20.1 Área de uma região plana

Suponhamos que f e g são duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in [a, b]$.

Para um número real $x_i \in [a, b]$, consideramos, apoiada à esquerda no ponto x_i , uma fatia retangular de base Δx e altura $h(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$, como indicado na figura 20.1. A área dessa fatia será dada por $\Delta A_i = [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$.

Figura 20.1. O retângulo elementar (fatia) de área ΔA_i tem altura $f(x_i) - g(x_i)$ e base Δx .



Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$, por pontos $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ em sub-intervalos de mesmo comprimento Δx , e sobre cada um dos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, para $0 \leq i \leq n - 1$, construirmos um retângulo de área ΔA_i , como descrito anteriormente,

teremos a área entre as duas curvas, delimitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo dada aproximadamente pela soma integral

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta A_i = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$$

A área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais, quando $\Delta x \rightarrow 0$, ou seja, será dada por

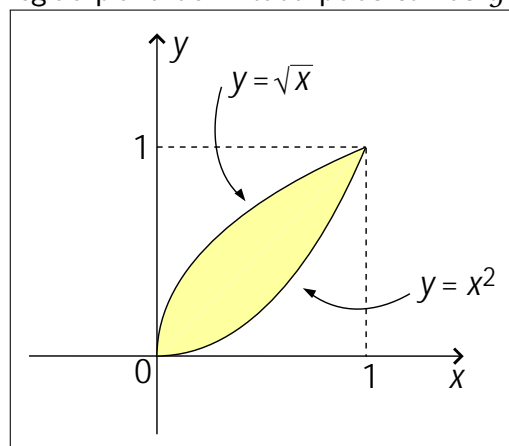
$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta A_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Sendo $\Delta A = [f(x) - g(x)] \Delta x$, é costume simbolizar $dA = [f(x) - g(x)] dx$. Temos então $A = \int_a^b dA$.

É costume dizer que $dA = [f(x) - g(x)] dx$ é um *elemento infinitesimal de área*, de altura $f(x) - g(x)$, sobre um *elemento infinitesimal de comprimento* dx . O símbolo de integração, \int , provém da forma de um arcaico \mathcal{S} , e tem o significado de “soma (veja isto: *foma*) de um número infinito de quantidades infinitesimais”. Assim, se $f(x) - g(x) \geq 0$, $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ corresponde, grosso modo, a uma soma de elementos infinitesimais de área, de alturas $f(x) - g(x)$, e “bases” dx , com x “variando” de a até b .

Exemplo 20.1. Calcular a área da região do plano delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Figura 20.2. Região plana delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Solução. As curvas dadas se interceptam quando $x^2 = \sqrt{x}$, o que nos dá $(0,0)$ e $(1,1)$ como únicos pontos de interseção. Define-se uma região entre as duas curvas quando $0 \leq x \leq 1$. Neste intervalo temos $\sqrt{x} \geq x^2$.

Assim sendo, a área entre as duas curvas (figura 20.2) é dada por

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \int_0^1 [x^{1/2} - x^2] dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

20.2 Média ou valor médio de uma função

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Em $[a, b]$ tomemos os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

isto é, tais que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

A média aritmética dos $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, é dada por

$$\mu_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n + 1}$$

Definiremos a média ou valor médio da função f , no intervalo $[a, b]$, como sendo

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$$

Mostraremos que

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

De fato, sendo $\Delta x = \frac{b - a}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n + 1} \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{1}{n + 1} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} \cdot \frac{b - a}{n} \cdot \frac{1}{b - a} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} \cdot \frac{1}{b - a} \left(f(x_1) \cdot \frac{b - a}{n} + f(x_2) \cdot \frac{b - a}{n} + \dots + f(x_n) \cdot \frac{b - a}{n} \right) \\ &= \frac{f(x_0)}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} \cdot \frac{1}{b - a} (f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x) \end{aligned}$$

Logo, passando ao limite, com $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0)}{n+1} + \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right) \\ &= 0 + \frac{1}{b-a} \cdot 1 \cdot \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

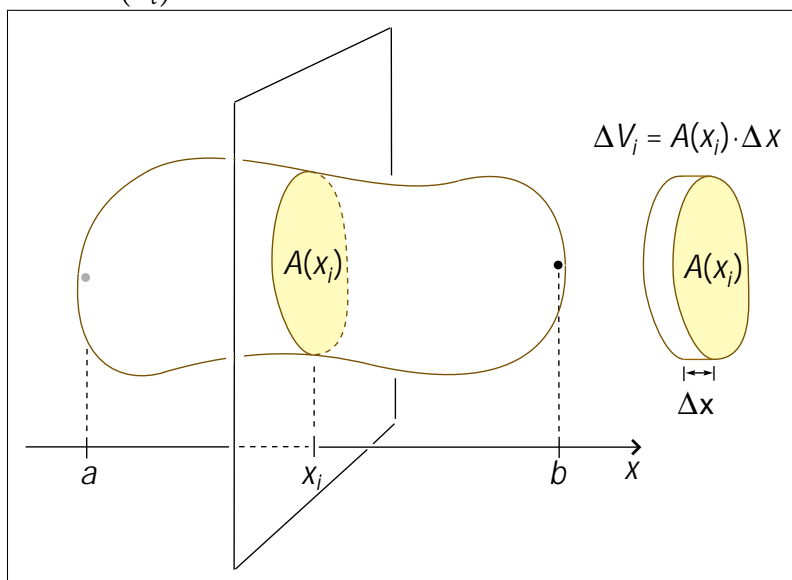
Exemplo 20.2. Determine o valor médio de $f(x) = x^2$, no intervalo $a \leq x \leq b$.

Solução. O valor médio de f em $[a, b]$, é dado por

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}\end{aligned}$$

20.3 Volume de um sólido por fatiamento

Figura 20.3. O volume de uma fatia do sólido é aproximado pelo volume da fatia cilíndrica de “base” $A(x_i)$ e “altura” Δx .



Na figura 20.3, para um ponto x_i , $a \leq x_i \leq b$, um plano perpendicular ao eixo x no ponto x_i corta um sólido (seria uma batata?), determinando no sólido uma secção transversal de área $A(x_i)$. Suponhamos que de $x = a$ até $x = b$, definem-se todas as secções transversais desse sólido por cortes de planos perpendiculares ao eixo x , sendo

$A(x)$ a área da secção transversal determinada pelo plano perpendicular ao eixo no ponto $x \in [a, b]$. Suponhamos que $A(x)$ é uma função contínua da variável x . Como podemos determinar o volume do sólido usando a função $A(x)$?

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ é subdividido em n sub-intervalos, de comprimentos iguais a $\Delta x = (b - a)/n$, por pontos $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

Se x_i ($0 \leq i \leq n-1$) é um ponto dessa subdivisão, como na figura 20.3, determina-se o volume ΔV_i de uma fatia “cilíndrica”, de “base” com área $A(x_i)$ e “altura” (espessura) Δx ,

$$\Delta V_i = A(x_i) \cdot \Delta x$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} A(x_i) \cdot \Delta x$$

Quanto mais finas as fatias “cilíndricas”, mais próximo o somatório estará do volume do sólido, sendo seu volume igual a

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta V_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum A(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Os cientistas de áreas aplicadas costumam dizer que $dV = A(x) \cdot dx$ é um *elemento infinitesimal de volume*, construído sobre um ponto x , de um “cilindro” de área da base $A(x)$ e altura (espessura) “infinitesimal” dx . Ao “somar” os infinitos elementos de volume, temos $\int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$ igual ao volume do sólido.

Exemplo 20.3. Qual é o volume de um tronco de pirâmide, de altura h , cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b ?

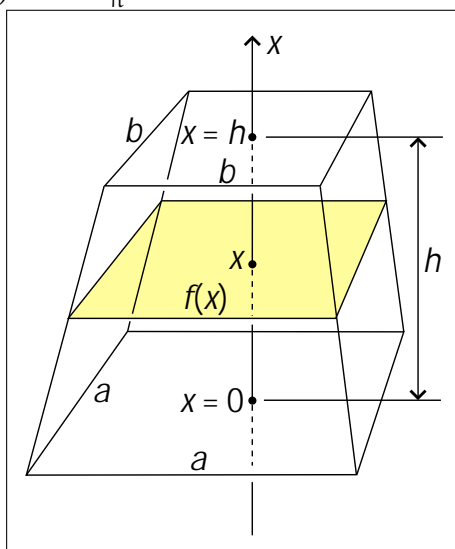
Solução. Posicionemos um eixo x perpendicular às duas bases. Cada ponto (altura) x , demarcada nesse eixo, corresponde, no tronco de pirâmide, a uma secção transversal quadrada, de tal modo que $x = 0$ corresponde à base quadrada de lado a , e $x = h$ corresponde ao topo quadrado de lado b . Veja figura 20.4.

Procurando uma função afim, $f(x) = mx + n$, tal que $f(0) = a$ e $f(h) = b$. encontramos $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$, como sendo a medida do lado do quadrado na altura x .

Para cada x , $0 \leq x \leq h$, a área da secção transversal, na altura x , é dada por

$$A(x) = \left(a + \frac{b-a}{h}x \right)^2$$

Figura 20.4. A área da secção transversal do tronco de cone, na altura x , é a área de um quadrado de lado $f(x) = a + \frac{b-a}{h}x$.



O volume do tronco de pirâmide é então

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \left(a + \frac{b-a}{h}x \right)^2 dx$$

Fazendo $u = a + \frac{b-a}{h}x$, temos $du = \frac{b-a}{h} dx$. Além disso, $u = a$ para $x = 0$, e $u = b$ para $x = h$, e então

$$V = \int_0^h A(x) dx = \frac{h}{b-a} \int_a^b u^2 du = \frac{h}{b-a} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_a^b = \frac{h}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

Note que o volume do tronco de pirâmide é $1/3$ do produto de sua altura pelo valor médio das áreas das secções transversais (veja exemplo 20.2). Conforme um antigo papiro, esta fórmula já era conhecida pela antiga civilização egípcia do século 18 a.C.

20.3.1 Volume de um sólido de revolução por fatiamento

Quando rotacionamos uma região do plano xy em torno do eixo x ou do eixo y , realizando uma volta completa, o lugar geométrico percorrido pelos pontos da região é o que chamamos um *sólido de revolução*.

Suponhamos que um sólido de revolução é obtido rotacionando-se, em torno do eixo x , uma região plana delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, com $a < b$, sendo $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$.

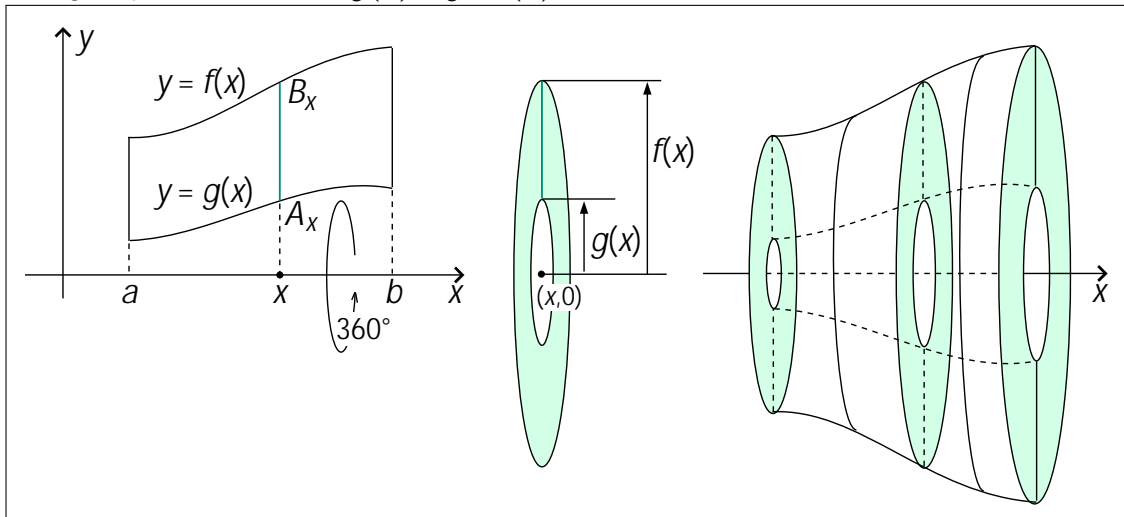
Para cada $x \in [a, b]$, um plano perpendicular ao eixo x , cortando este no ponto x , determina no sólido de revolução uma secção transversal. Esta secção transversal é

obtida pela revolução completa, em torno do eixo x , do segmento vertical $A_x B_x$, sendo $A_x = (x, g(x))$ e $B_x = (x, f(x))$. Veja figura 20.5

A área dessa secção transversal será nada mais que a área de uma região anular plana (contida em um plano perpendicular ao eixo x) compreendida entre dois círculos concêntricos de centro $(x, 0)$, sendo um menor, de raio $g(x)$, e outro maior, de raio $f(x)$. Como a área de um círculo de raio r é πr^2 , temos que a área $A(x)$, da secção transversal do sólido de revolução, definida sobre o ponto x , é dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2$$

Figura 20.5. O sólido esboçado à direita é obtido pela revolução, em torno do eixo x , da região plana $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$.



Portanto, o volume do sólido de revolução será

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b (\pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2) dx$$

Se a região plana for delimitada apenas pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x , e pelas retas $x = a$ e $x = b$, teremos $g(x) = 0$, e então

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Exemplo 20.4. Calcular o volume de uma esfera de raio a .

Solução. A esfera de raio a pode ser interpretada como o sólido obtido pela revolução da região semi-circular $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, em torno do eixo x .

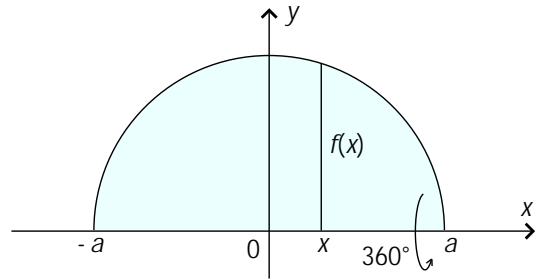
Tal região é delimitada pelas curvas $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y = 0$, com $-a \leq x \leq a$. Assim, aqui, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$, sendo então

$$dV = A(x) dx = \pi[f(x)]^2 dx = \pi(a^2 - x^2) dx$$

o elemento de volume a integrar.

Portanto,

$$V = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \pi \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3$$



20.4 Comprimento de uma curva

Consideremos uma curva $y = f(x)$, gráfico de uma função contínua com derivada $f'(x)$ também contínua, para $a \leq x \leq b$.

Para calcular o comprimento dessa curva, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através de pontos

$$a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

Em seguida consideramos, no gráfico, os $n+1$ pontos correspondentes,

$$A_0 = (x_0, f(x_0)), A_1 = (x_1, f(x_1)), \dots, A_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), A_n = (x_n, f(x_n))$$

Sendo $\Delta s_i = \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$, para $i = 1, \dots, n$, temos que uma aproximação do comprimento da curva é dada pela soma $\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \text{dist}(A_{i-1}, A_i)$.

Agora, para cada i , $1 \leq i \leq n$, temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_{i-1}, A_i) &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Sendo f diferenciável no intervalo $[a, b]$, pelo teorema do valor médio, teorema 15.1, aula 12,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

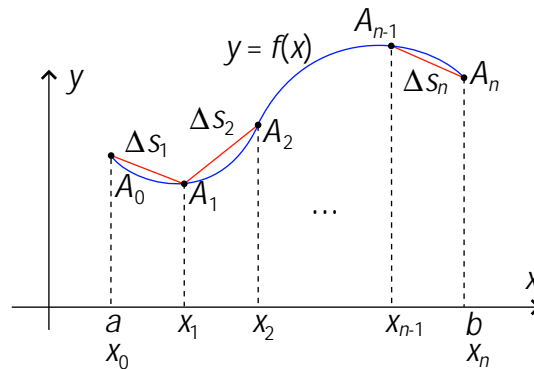


Figura 20.6.

para algum c_i compreendido entre x_{i-1} e x_i . Assim,

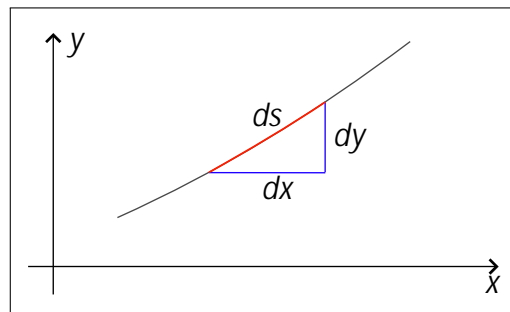
$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x$$

Esta é uma soma integral de $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, no intervalo $[a, b]$, correspondente à subdivisão $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, com uma “escolha” de pontos intermediários c_1, c_2, \dots, c_n . Veja definição de integral definida da aula 17.

Supondo $f'(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, temos então que o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é dado por

$$s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Figura 20.7. Ideia intuitiva para a dedução do “elemento” de comprimento de arco ds a ser integrado.



A ideia intuitiva que dá a integral para o comprimento de arco é ilustrada na figura 20.7. Para um elemento infinitesimal de comprimento dx , corresponde uma variação infinitesimal em y , dy . O elemento infinitesimal de comprimento de arco, ds ,

correspondente à variação dx , é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemplo 20.5. Calcular o comprimento da curva $y = \frac{x^2}{2}$, para x no intervalo $[0, x_0]$, sendo $x_0 > 0$ um número real.

Solução. O comprimento pedido é igual a $\ell = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

Como $\frac{dy}{dx} = x$, temos $\ell = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + x^2} dx$.

Fazendo a substituição trigonométrica $x = \operatorname{tg} \theta$, $0 \leq \theta < \pi/2$, temos $dx = \sec^2 \theta d\theta$, e também $\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \sec \theta$, e então

$\ell = \int_0^{\theta_0} \sec \theta \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\theta_0} \sec^3 \theta d\theta$, sendo $\theta_0 = \operatorname{arctg} x_0$, ou seja, θ_0 é o número real satisfazendo $0 \leq \theta_0 < \pi/2$ e $\operatorname{tg} \theta_0 = x_0$.

Aplicando a fórmula de redução 18.2, página 197 da Aula 18, obtemos

$$\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C, \text{ portanto}$$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\theta_0} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{1}{2} \ln(\sec \theta_0 + \operatorname{tg} \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} x_0 \sqrt{1 + x_0^2} + \frac{1}{2} \ln \left(x_0 + \sqrt{1 + x_0^2} \right) \end{aligned}$$

20.5 Área de uma superfície de revolução

Consideremos a curva $y = f(x)$, gráfico de uma função f contínua, a qual assumiremos que tem derivada f' também contínua, para $a \leq x \leq b$. Suponhamos $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$.

Rotacionando-se essa curva em torno do eixo x , obtemos uma superfície de revolução. Para o cálculo de sua área, primeiramente particionamos o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através de pontos $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

Tomando-se dois pontos dessa subdivisão, x_{i-1} e x_i , consideramos os pontos correspondentes no gráfico de f , $A_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $A_i = (x_i, f(x_i))$. Este procedimento geométrico está ilustrado na figura 20.6.

Quando rotacionamos a parte da curva do gráfico de f , compreendida entre os pontos A_{i-1} e A_i , em torno do eixo x , se $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ é suficientemente pequeno, a

área da superfície obtida pode ser aproximada pela área da superfície obtida pela rotação do segmento $A_{i-1}A_i$ em torno do eixo x . Isto está ilustrado na figura 20.8.

Ao rotacionar o segmento $A_{i-1}A_i$ em torno do eixo x , obtemos a superfície lateral de um tronco de cone, de geratriz lateral $\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i}$, sendo $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ os raios da “base” e do “topo” do tronco de cone.

Figura 20.8. A superfície de revolução da curva $y = f(x)$, com $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, em torno do eixo x , é aproximada pela superfície lateral do tronco de cone entre os círculos de raios $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$, com segmento geratriz $A_{i-1}A_i$.

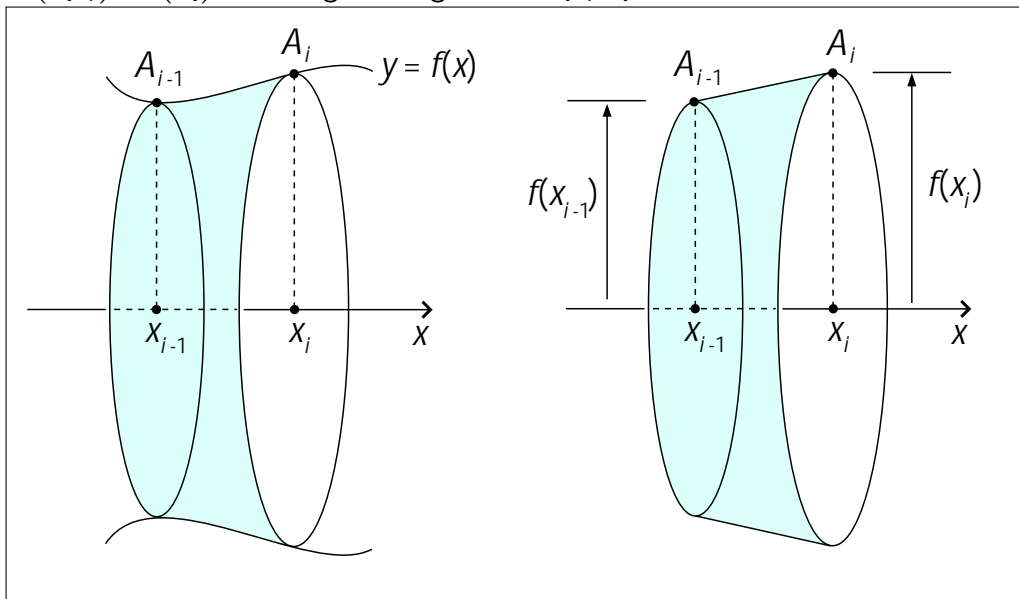
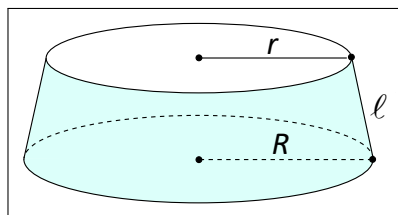


Figura 20.9. Superfície lateral de um tronco de cone, de geratriz lateral ℓ e raios r e R no topo e na base.



A área da superfície lateral de um tronco de cone, de geratriz lateral ℓ e raios r e R no topo e na base (figura 20.9), é dada por $\pi(r + R)\ell$.

Assim, rotacionando-se o segmento $A_{i-1}A_i$, em torno do eixo x , a superfície de revolução resultante terá área

$$\Delta S_i = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i$$

e a área da superfície de revolução, da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x , sendo aproximada pela soma $\sum_{i=1}^n \Delta S_i$, será dada por

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta S_i$$

Agora, como argumentado na seção anterior (confira),

$$\Delta s_i = \overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x$$

para algum c_i entre x_{i-1} e x_i . Assim sendo,

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \Delta s_i \\ &= \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \\ &\approx \pi \cdot 2f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \quad (\text{para } \Delta x \text{ suficientemente pequeno}) \end{aligned}$$

pois, se $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ é suficientemente pequeno, podemos considerar $x_{i-1} \approx c_i \approx x_i$.

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta S_i \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum 2\pi f(c_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x \\ &= \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

Assim, sendo $f(x) \geq 0$ contínua e com derivada $f'(x)$ contínua, a área da superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, em torno do eixo x , para $a \leq x \leq b$, é calculada pela integral

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemplo 20.6. Na literatura do Cálculo às vezes são encontradas as funções hiperbólicas, a função cosseno hiperbólico e a função seno hiperbólico, definidas respectivamente por

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Dentre as propriedades elementares destas funções temos

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação do gráfico de $f(x) = \cosh x$, $-a \leq x \leq a$ ($a > 0$), em torno do eixo x .

Solução. Temos $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ e

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) = (f(x))^2$$

Assim, a área S da superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, em torno do eixo x , para $-a \leq x \leq a$, é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_{-a}^a 2\pi f(x) \sqrt{(f(x))^2} dx = \int_{-a}^a 2\pi (f(x))^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + 2x \right]_{-a}^a \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2a}}{2} - \frac{e^{-2a}}{2} + 2a \right] - \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-2a}}{2} - \frac{e^{2a}}{2} - 2a \right] \\ &= \frac{\pi}{2} [e^{2a} - e^{-2a} + 4a] = \pi(2a + \sinh 2a) \end{aligned}$$

Observação 20.1. O leitor poderá também deduzir facilmente os seguintes resultados, que serão deixados como exercícios. Considere as funções $\cosh x$ e $\sinh x$ definidas no exemplo 20.6.

- A área A sob o gráfico de $f(x) = \cosh x$, e acima do eixo x , no intervalo $0 \leq x \leq a$, é dada por $A = \int_0^a \cosh x dx = \sinh a$.
- O comprimento ℓ da curva $y = \cosh x$, no intervalo $0 \leq x \leq a$, é igual a $\ell = \sinh a$.

20.6 Centro de gravidade de uma região plana

Se temos, em um plano ou no espaço n pontos P_1, P_2, \dots, P_n , tendo massas m_1, m_2, \dots, m_n , respectivamente, o centro de massa \bar{P} , do sistema de n pontos, é dado por

$$\bar{P} = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2 + \dots + m_n P_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i P_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

ou seja, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo

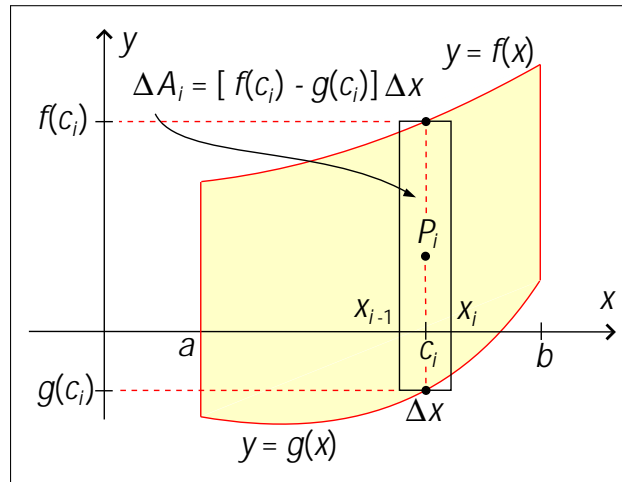
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Consideremos uma região plana, delimitada pelos gráficos das funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, sendo $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Olhando essa região como uma placa plana, de espessura constante desprezível, suponhamos que ela possui densidade superficial (massa por unidade de área) δ constante.

Particionando-se o intervalo $[a, b]$ em intervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, através dos pontos $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, aproximamos essa região por uma reunião de retângulos, como na figura 20.10, sendo cada retângulo de altura $f(c_i) - g(c_i)$ e base Δx , sendo c_i o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 20.10. A região plana é aproximada pela reunião dos vários retângulos de áreas ΔA_i .



Esse retângulo elementar tem área $\Delta A_i = (f(c_i) - g(c_i))\Delta x$, e seu centro de massa é o ponto $P_i = \left(c_i, \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2}\right)$, sendo sua massa Δm_i dada por

$$\Delta m_i = \delta \cdot \Delta A_i = \delta (f(c_i) - g(c_i))\Delta x$$

O centro de massa da reunião de todos esses retângulos elementares coincide com o centro de massa dos pontos P_i , atribuindo-se a cada ponto a massa Δm_i do seu retângulo correspondente.

Assim, uma aproximação do centro de massa da região plana considerada, a saber o centro de massa \hat{P} dos vários retângulos elementares, é dado por

$$\hat{P} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot P_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\sum \delta \cdot \Delta A_i \cdot P_i}{\sum \delta \cdot \Delta A_i} = \frac{\delta \cdot (\sum \Delta A_i \cdot P_i)}{\delta \cdot (\sum \Delta A_i)} = \frac{\sum \Delta A_i \cdot P_i}{\sum \Delta A_i}$$

sendo os somatórios realizados vetorialmente, ou seja, nas duas coordenadas. Agora temos

$$\begin{aligned}\Delta A_i \cdot P_i &= \Delta A_i \cdot \left(c_i, \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \right) \\ &= (f(c_i) - g(c_i)) \Delta x \cdot \left(c_i, \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \right) \\ &= \left(c_i(f(c_i) - g(c_i)) \Delta x, (f(c_i) - g(c_i)) \cdot \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \Delta x \right) \\ &= \left(c_i(f(c_i) - g(c_i)) \Delta x, \frac{1}{2} [(f(c_i))^2 - (g(c_i))^2] \Delta x \right)\end{aligned}$$

Assim sendo, o centro de massa \bar{P} da região plana considerada, será dado por

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \hat{P} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta A_i \cdot P_i}{\sum \Delta A_i} \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum c_i(f(c_i) - g(c_i)) \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \Delta x}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum \frac{1}{2} [(f(c_i))^2 - (g(c_i))^2] \Delta x}{\sum (f(c_i) - g(c_i)) \Delta x} \right)\end{aligned}$$

Portanto, as duas coordenadas de $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, são dadas por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{A} \\ \bar{y} &= \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx}{A}\end{aligned}$$

sendo A a área da região plana.

Exemplo 20.7. Determinar o centro de massa de uma região plana semicircular de raio R .

Solução. A região pode ser representada pela região do plano Oxy delimitada pela semicircunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ e pelo eixo x , com $-R \leq x \leq R$.

Para calcular as integrais que definem do centro de massa $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, tomamos $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $g(x) = 0$.

A área da região semicircular será $A = \pi R^2/2$.

Pelas fórmulas estabelecidas na seção anterior, para obter as coordenadas do centro de massa de região semicircular de raio R , calculamos

$$\int_{-R}^R x(f(x) - g(x)) dx = \int_{-R}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^0 \sqrt{u} du = 0$$

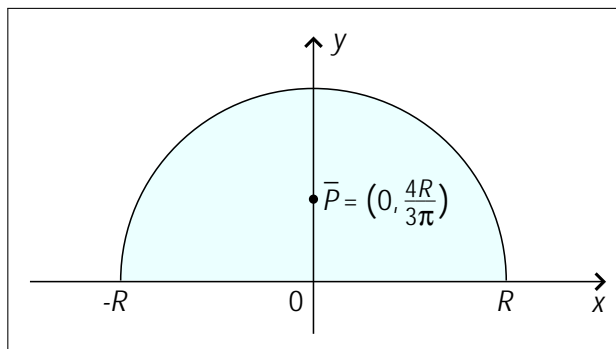
pela mudança de variável $u = R^2 - x^2$.

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{1}{2} [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)_{-R}^R \\ &= \frac{1}{2} \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2R^3}{3} \end{aligned}$$

As coordenadas do centro de massa da região serão então

$$\bar{x} = \frac{0}{\pi R^2/2} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi} R$$

sendo então o centro de massa o ponto $\bar{P} = (0, \frac{4}{3\pi} R)$.



20.7 Problemas

Áreas de regiões planas

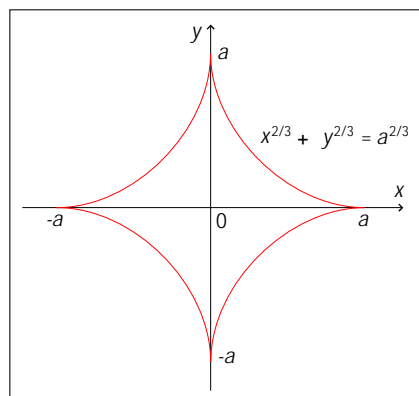
1. Calcule a área delimitada pelas curvas $y^2 = 9x$ e $y = 3x$. *Resposta.* $1/2$.
2. Calcule a área delimitada pelas curvas $xy = a^2$, $x = a$, $x = 2a$ ($a > 0$) e o eixo x . *Resposta.* $a^2 \ln 2$.
3. Calcule a área delimitada pela curva $y = x^3$, pela reta $y = 8$ e pelo eixo y . *Resposta.* 12 .
4. Calcule a área total delimitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$. *Resposta.* $3/2$.
5. Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Resposta.* πab .

Sugestão. A área é delimitada pelos gráficos de funções $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, com $-a \leq x \leq a$. Faça a substituição $x = a \sin t$. Na integral resultante, use a fórmula de redução de potências $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

6. Calcule a área delimitada pela curva fechada (hipociclóide) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$). *Resposta.* $\frac{3}{8} \pi a^2$.

Sugestão. A área é delimitada pelos gráficos das funções $y = \pm \sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})^3}$, com $-a \leq x \leq a$. Faça a substituição $x = a \sin^3 \theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Na integral resultante, use as fórmulas de redução de potências $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.



Valor médio de uma função contínua

Determinar o valor médio da função dada, no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^3$, $a \leq x \leq b$. *Resposta.* $\bar{f} = \frac{1}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a \leq x \leq b$ ($0 \leq a < b$). *Resposta.* $\frac{2(a+b+\sqrt{ab})}{3(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$.
3. $f(x) = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$. *Resposta.* $1/2$.

Volumes de sólidos

Em cada problema, calcule o volume do sólido obtido por revolução, conforme descrito.

1. A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gira em torno do eixo x . *Resposta.* $\frac{4}{3}\pi ab^2$.
2. O segmento de reta da origem $(0,0)$ ao ponto (a,b) gira ao redor do eixo x , obtendo-se assim um cone. *Resposta.* $\frac{1}{3}\pi ab^2$.
3. A região plana delimitada pela hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira ao redor do eixo x . *Resposta.* $32\pi a^3/105$.
4. O arco de senóide $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x . *Resposta.* $\pi^2/2$.
5. A região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$, pela reta $x = 4$ e pelo eixo x , gira em torno do eixo x . *Resposta.* 32π .

Comprimentos de curvas

Calcule os comprimentos das curvas descritas abaixo.

1. $y = \frac{1}{\sqrt{a}}x^{3/2}$, de $x = 0$ a $x = 5a$. *Resposta.* $335a/27$.
2. $y = \ln x$, de $x = \sqrt{3}$ a $x = \sqrt{8}$. *Resposta.* $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
3. $y = 1 - \ln(\cos x)$, de $x = 0$ a $x = \pi/4$. *Resposta.* $\ln(\sqrt{2} + 1)$.

Áreas de superfícies de revolução

Em cada problema, calcule a área da superfície obtida por revolução da curva dada em torno do eixo especificado.

1. $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$, rotacionada em torno do eixo x . *Resposta.* $\frac{56}{3}\pi a^2$.
2. $y = 2x$, $0 \leq x \leq 2$,
 (a) rotacionada em torno do eixo x (b) rotacionada em torno do eixo y .
Respostas. (a) $8\pi\sqrt{5}$ (b) $4\pi\sqrt{5}$.
3. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, rotacionada em torno do eixo x .
Resposta. $2\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

Centro de massa (ou de gravidade) de uma região plana

Determine as coordenadas do centro de gravidade da região plana especificada.

1. Região no primeiro quadrante, delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
Resposta. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$.
2. Área delimitada pela curva $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ e o eixo x . *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 8/5)$.
3. Área delimitada pela parábola $y^2 = ax$ e pela reta $x = a$. *Resposta.* $(\bar{x}, \bar{y}) = (3a/5, 0)$.