Matemática Discreta

Somatórios e Produtórios

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Somatórios e Produtórios

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar o que são somatórios
  - Apresentar as técnicas para manipulá-los
  - Apresentar exemplos de manipulação e cálculo de somatórios
  - Apresentar o que são produtórios
  - Apresentar exemplos de manipulação e cálculo de produtórios
  - Capacitar o aluno a usar Somatórios e Produtórios para realizar/formalizar cálculos em problemas computacionais

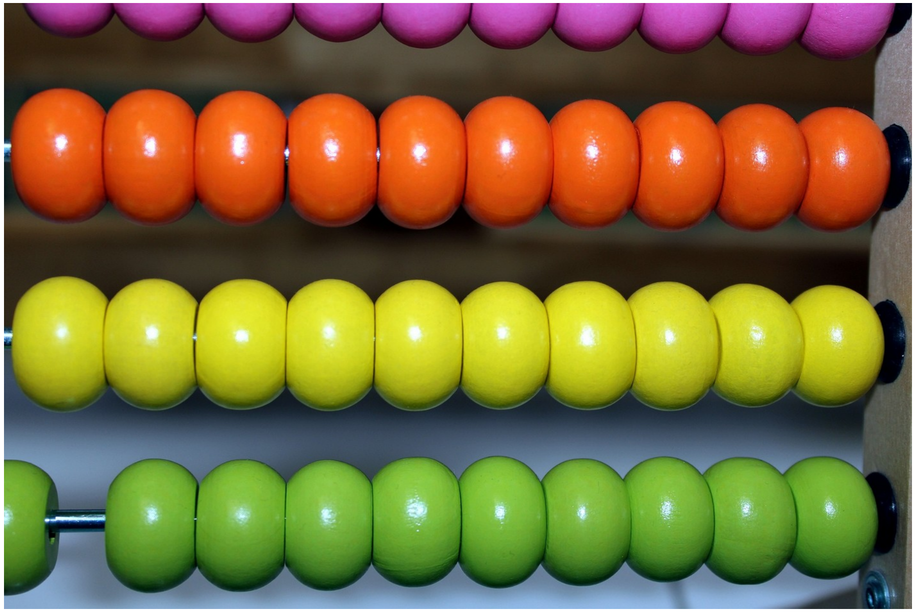
Problema #12

- **Encontre a fórmula explícita para o somatório a seguir**

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$

Somatórios

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**



Fonte: https://pixabay.com/

- Notação utilizada para indicar a **soma** de parcelas que obedecem um padrão

Somatórios

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**
  - Forma geral

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

    - onde
      - k é o índice (variável indexadora)
      - f(k) é uma fórmula que depende de k (termo geral)
      - m, n são inteiros que não dependem de k
    - ➔ O somatório no qual m > n sempre será 0

Somatórios

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**
  - Outras formas

$$\sum_{m \leqslant k \leqslant n} f(k) \quad \text{e} \quad \sum_{\substack{m \leqslant k \leqslant n \\ P(k)}} f(k)$$

    - onde
      - k é o índice (variável indexadora)
      - f(k) é uma fórmula que depende de k (termo geral)
      - m, n são inteiros que não dependem de k
      - P é algum predicado sobre inteiros que deve ser satisfeito para o termo entrar no somatório
      - Ex: $\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 10 \\ k\ ímpar}} k^2$

Somatórios

$k = 1$
$1 * (9 - 1) = 1 * 8$
$k = 2$
$2 * (9 - 2) = 2 * 7$
$k = 7$
$7 * (9 - 7) = 7 * 2$
$k = 8$
$8 * (9 - 8) = 8 * 1$

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**
  - Domínio do somatório
    - É o conjunto dos índices dos termos do somatório
    - Exemplo
      - Seja K = { 1, 2, 7, 8 }

$$\sum_{k \in K} k(9-k) = 1*8+2*7+7*2+8*1 = 44$$

    - → O valor do somatório muda se mudar o domínio
    - → Se o domínio for vazio, o valor do somatório é 0

Somatórios

$$NT = LS - LI + 1$$
$$NT = 6 - 1 + 1 = 6$$
$$K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**
  - Número de termos (ou parcelas) do somatório
    - É dado pela seguinte expressão

$$NT = LS - LI + 1$$

    - onde LS e LI são os limites superior e inferior do somatório
    - Exemplo

$$\sum_{k=1}^{6} k$$

    → É a cardinalidade do domínio do somatório

Somatórios

$$NT = LS - LI + 1 - r$$
$$NT = 6 - 1 + 1 - 3 = 3$$
$$K = \{\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, 6\}$$

- **Somatório (somatória ou notação sigma)**
  - Número de termos (ou parcelas) do somatório
    - Se o somatório está sujeito a restrições r, então

$$NT = LS - LI + 1 - r$$

    - Exemplo

$$\sum_{k=1,\, k\ par}^{6} k$$

→ É a cardinalidade do domínio do somatório

Somatórios

- **Calcule**

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k(5-k)$

b) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 10 \\ k\ \text{ímpar}}} k^2$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$

d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} 4i$

Somatórios

- **Calcule**

a) $\sum_{k=1}^{4} k(5-k)$

b) $\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 10 \\ k \text{ ímpar}}} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{n} 1$

d) $\sum_{i=2}^{5} 4i$

RESPOSTAS

a) 4 + 6 + 6 + 4 = 20

b) 1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165

c) 1 + 1 + 1 + … + 1 = n*1 = n

d) 4*2 + 4*3 + 4*4 + 4*5 = 56

Somatórios

$$S = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n}$$

$$S = n * c$$

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório de uma constante

$$S=\sum_{i=1}^{n} c$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = nc}$$

Somatórios

$$+\quad \begin{cases} S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \end{cases}$$

$$S + S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório do índice

$$S = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

➔ Essa foi a ideia de Gauss para resolver o somatório!

Somatórios

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório dos quadrados dos índices

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  - Infelizmente, a ideia de Gauss não funciona neste caso!
  - Para resolver esse somatório, precisamos aprender algumas manipulações ...

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Colocando a constante em evidência**
    - Para K ⊆ ℤ
    - Para qualquer número c em

$$\sum_{k \in K} c f(k) = c \sum_{k \in K} f(k)$$

    - Exemplo

$$\sum_{k=1}^{4} 3k$$

$$\sum_{k=1}^{4} 3k = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$$

$$3\sum_{k=1}^{4} k = 3(1+2+3+4) = 3\cdot 10 = 30$$

➔ Esta propriedade nos permite mover fatores constantes (que não dependem do índice) para dentro ou para fora do somatório

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Associatividade**
    - Para K ⊆ $\mathbb{Z}$

$$\sum_{k \in K} (f(k) \pm g(k)) = \sum_{k \in K} f(k) \pm \sum_{k \in K} g(k)$$

    - Exemplo

$$\sum_{k=1}^{3} k + k^2$$

$$\sum_{k=1}^{3} k + k^2 = (1+1) + (2+4) + (3+9) = 2 + 6 + 12 = 20$$

$$\sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2 = (1+2+3) + (1+4+9) = 6 + 14 = 20$$

    → Esta propriedade nos permite substituir um somatório de somas (subtrações) pela soma (subtração) de somatórios ou vice-versa, desde que seja sobre os mesmos índices

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Comutatividade**
    - Para K ⊆ ℤ

$$\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in K} f(p(k))$$

    - em que p(k) é uma permutação de K
    - ➔ Esta propriedade nos permite colocar os termos em qualquer ordem

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Decomposição do domínio**
    - Para $K \subseteq \mathbb{Z}$
    - Se $\{K_1, K_2\}$ é uma partição de K, então

$$\sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in K_1} f(k) + \sum_{k \in K_2} f(k)$$

→ Esta regra nos permite quebrar um somatório em somatórios parciais, desde que cada valor do índice pertença ao domínio de apenas uma dessas partes

→ Esta regra pode ser generalizada para uma partição de K de qualquer tamanho

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Trocando o domínio**
    - Para $K \subseteq \mathbb{Z}$
    - Se p é uma função bijetora de K para um conjunto $J \subseteq \mathbb{Z}$, então

$$\sum_{k \in K} f(p(k)) = \sum_{j \in J} f(j)$$

    - Ou, refraseando, trocando a variável indexadora ...

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - **Trocando a variável indexadora**
    - A variável k pode ser substituída por qualquer outra (i, j, …) que não tenha significado no contexto
    - Podemos trocar a variável k por uma variável relacionada a ela desde que o intervalo de variação seja devidamente ajustado
    - Exemplo

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k$$

      - Trocando k por i = k – 1 temos $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - Seja x uma sequência de números com x_i indicando o i-ésimo elemento
  - Usando as regras anteriores ...

$$\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=1}^{n}x_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}x_k$$

Associatividade

$$\sum_{i=2}^{n+1}x_i-\sum_{k=1}^{n}x_k$$

Troca de índice para i = k+1

$$\cancel{\sum_{i=2}^{n}x_i}+x_{n+1}-x_1\cancel{-\sum_{k=2}^{n}x_k}$$

Associatividade

$$x_{n+1}-x_1$$

Cancelando termos comuns com polaridades opostas

Somatórios

- **Manipulação de somatórios**
  - Seja x uma sequência de números com x_i indicando o i-ésimo elemento
  - **Somatório telescópico**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(x_{k+1} - x_k\right) = x_{n+1} - x_1}$$

    - Uma parte de cada parcela “se encaixa em” (cancela) uma parte da parcela maior
    - Essa identidade pode ser usada para provar as fórmulas dos somatórios de quadrados e cubos

Somatórios

$$\begin{aligned}(k+1)^3 &= (k+1)(k+1)^2\\ &= (k+1)(k^2+2k+1)\\ &= k^3+2k^2+k+k^2+2k+1\\ &= k^3+3k^2+3k+1\\ (k+1)^3-k^3 &= 3k^2+3k+1\end{aligned}$$

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório dos quadrados dos índices

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  - Considerando que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ e, portanto, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=(n+1)^3-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=x_{n+1}-x_1$$

Somatório telescópico

Somatórios

Onde queremos chegar:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

O que estamos trabalhando:

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2+3k+1)=(n+1)^3-1$$

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório dos quadrados dos índices

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  - O que sabemos até agora ...

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2+3k+1)=(n+1)^3-1$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1=(n+1)^3-1$$

Associatividade separando somatórios e a constante

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 1$$

Reorganizando a equação

Somatório do índice: $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Somatório de uma constante: $\sum_{i=1}^{n} c=nc$

Somatórios

Onde queremos chegar:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

O que estamos trabalhando:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n$$

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório dos quadrados dos índices

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  - Substituindo os somatórios por suas fórmulas explícitas ...

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n$$

Arrumando denominador

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{2(n^3+3n^2+3n+1)-2-3n(n+1)-2n}{2}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{2n^3+6n^2+6n+2-2-3n^2-3n-2n}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

Somatórios

- **Desvendando alguns somatórios**
  - Somatório dos quadrados dos índices

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

  - Passando o 3 pra o lado de lá e fazendo algumas continhas ...

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Somatórios

- **Somatórios múltiplos**
  - Os termos de um somatório podem ser definidos em função de mais de uma variável indexadora
  - Exemplo

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 5 \leqslant j \leqslant 8}} f(i,j) = \sum_{1}^{3} \sum_{5}^{8} f(i,j)$$

    - Expandindo esse somatório:
      - f(1,5) + f(1,6) + f(1,7) + f(1,8) + f(2,5) + f(2,6) + f(2,7) + f(2,8) + f(3,5) + f(3,6) + f(3,7) + f(3,8)

Produtórios

- **Produtório (produtória)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Notação utilizada para indicar o **produto** de várias parcelas

Produtórios

- **Produtório (produtória)**
  - Forma geral

$$\prod_{k=m}^{n} f(k)$$

    - onde
      - k é o índice (variável indexadora)
      - f(k) é uma fórmula que depende de k (termo geral)
      - m, n são inteiros que não dependem de k
    - → O produtório no qual m > n sempre será 1 (e não 0)

Produtórios

$$(-2^2+1)*(-1^2+1)*(0^2+1)*(1^2+1)*(2^2+1) =$$
$$(4+1)*(1+1)*(0+1)*(1+1)*(4+1) =$$
$$5*2*1*2*5 =$$
$$100$$

- **Produtório (produtória)**
  - Exemplos

$$\prod_{k=-2}^{2}(k^2+1) = 5*2*1*2*5 = 100$$

$$\prod_{k=1}^{n} 3 = 3^n$$

➔ As propriedades e regras vistas para a manipulação de somatórios podem ser adaptadas para produtórios

Produtórios

- Calcule

a) $\prod_{k=0}^{n} 3$

b) $\prod_{k=m}^{n} 3$

c) $\prod_{k=1}^{n} k$

RESPOSTAS

a) 3^{n+1}

b) 3^{n-m+1}

c) $n!$

Problema #12

- **Encontre a fórmula explícita para o somatório a seguir**

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$