

Lógica

Lógica Proposicional Aula 01 – Sintaxe

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

- **O que é?**

- Um sistema formal que usa fórmulas (sequências) bem formadas (fbfs) proposicionais
- Também conhecida como
 - Cálculo proposicional
 - Cálculo sentencial
 - Lógica declarativa

Lógica Proposicional

- **Exemplo**

- Premissas

- “Se eu nadar, então eu vou me molhar”
 - “Se eu tomar banho, então eu vou me molhar”

- Conclusão

- “Se eu nadar ou tomar banho, então eu vou me molhar”

- Lógica Proposicional

- “eu nadar” = **p**
 - “eu vou me molhar” = **r**
 - “eu tomar banho” = **q**

- Cada uma dessas sentenças pode ser tanto verdadeira como falsa

Lógica Proposicional

*A mãe de Pedro entrou com seu carro na garagem.
Os alunos insatisfeitos reclamaram da nota.
O aluno disse ao professor que era carioca.
A mãe pegou o filho correndo na rua.*

- **Lógica Proposicional X Linguagem Natural**
 - A Lógica Proposicional utiliza uma linguagem formal com regras de formação precisamente definidas
 - ➔ Na linguagem formal é possível atribuir um único sentido, sem ambiguidade

Fonte dos exemplos de ambiguidade: <http://www.portugues.com.br/redacao/ambiguidade.html>

Lógica Proposicional

■ Proposição

- Uma proposição (ou declaração) é um enunciado completo ao qual podemos atribuir um valor-verdade (verdadeiro ou falso)

- a) Nesta sala existe exatamente 10 alunos. ✓ **Proposição**
- b) O carro é vermelho. ✗ **Qual carro?**
- c) O chão desta sala está molhado. ✓ **Proposição**
- d) Que dia é hoje? ✗ **Interrogação**
- e) Existe vida em outros planetas do universo. ✓ **Proposição**
- f) Essa sentença é falsa. ✗ **Paradoxo**

Princípio da (não)-contradição: uma proposição não pode ser V e F ao mesmo tempo

Princípio do terceiro excluído: qualquer proposição que não tenha valor-verdade V necessariamente terá de ter valor-verdade F (a Lógica Proposicional é bivalente)

Lógica Proposicional

- **Proposição**

- **Proposição atômica (ou átomo)**

- Não possui nenhum conectivo lógico

- Expressa fatos simples sobre o mundo

- Nesta sala existe exatamente 10 alunos.*

- A soma dos números 5 e 6 é igual a 11.*

- **Proposição composta**

- Possui pelo menos um conectivo lógico

- Expressa os relacionamentos lógicos entre as proposições atômicas que a compõem

- Se** eu como muito **então** eu engordo.*

- A mesa é de madeira **ou** o chapéu é de palha.*

Lógica Proposicional

- **Como qualquer linguagem, é composta por**
 - **Sintaxe** (ou gramática)
 - Especifica como os símbolos se combinam para formar uma sequência válida
 - **Semântica**
 - Especifica como as sequências válidas se relacionam entre si e qual o valor-verdade dessa relação

■ Alfabeto

- Conjunto de símbolos a partir dos quais as sequências válidas (bem-formadas) são construídas
- É composto por:
 - 2 símbolos de pontuação: (e)
 - 2 símbolos de verdade: verdadeiro (V) e falso (F)
 - Um conjunto não-vazio de átomos: p, q, r, s, t, etc.
 - 5 conectivos lógicos: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow e \leftrightarrow
- Exemplo
 - “Se eu nadar ou tomar banho, então eu vou me molhar”
 - Se p ou q, então r $(p \vee q) \rightarrow r$

- **Proposição composta**
 - Negação
 - Conjunção
 - Disjunção
 - Condicional
 - Bicondicional

- **Proposição composta**

- **Negação**

- Uma proposição simples ou composta acompanhada pelo operador de negação \neg

$(\neg p)$

*Messi **não** é o melhor jogador do mundo.*

***não** (Messi é o melhor jogador do mundo).*

- **Proposição composta**

- Negação

- **Conjunção**

- Uma sequência de proposições simples ou compostas separadas pelo operador de conjunção \wedge

$(p \wedge q)$

Messi é o melhor jogador do mundo e joga no Barcelona.

- **Proposição composta**

- Negação
- Conjunção
- **Disjunção**

- Uma sequência de proposições simples ou compostas separadas pelo operador de disjunção \vee

$(p \vee q)$

O melhor jogador do mundo é argentino **ou** português.

Lo... do mundo é

- **Proposição composta**

- Negação
- Conjunção
- Disjunção

- **Condicional**

- Um par de proposições separadas pelo operador de implicação \rightarrow

$$(p \rightarrow q)$$

*Se Messi nasceu em Buenos Aires, **então** ele é argentino.*

- A proposição à esquerda do operador é denominada **antecedente** e a proposição à direita, **consequente**

- **Proposição composta**

- Negação
- Conjunção
- Disjunção
- Condicional

- **Bicondicional**

- Uma combinação de implicação (\rightarrow) e redução (\leftarrow) indicada pelo operador de bi-implicação \leftrightarrow

$$(p \leftrightarrow q)$$

*Messi é o melhor jogador do mundo **se e somente se** Cristiano Ronaldo não é.*

■ Fórmula

- Uma fórmula bem-formada (ou apenas fórmula) é
 1. Um símbolo de verdade (V e F)
 2. Um átomo
 3. Se ϕ é uma fórmula, então $(\neg\phi)$ é uma fórmula
 4. Se ϕ e ψ são fórmulas, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas
- Se for um átomo é denominada **fórmula atômica** senão é chamada de **fórmula composta**
- Uma **subfórmula** de uma fórmula α é uma parte de α que é uma fórmula

■ Fórmula

■ Exemplos

- p
 - $(p \vee q)$
 - $(\neg(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \vee q))$
-

FÓRMULAS

- $(p \vee (q \vee \rightarrow r))$
- $((p \vee q) \leftrightarrow \neg \rightarrow q)$
- pq

NÃO FÓRMULAS

■ Fórmula

■ Parênteses são sempre necessários?

- $((p \wedge q) \wedge r)$ é o mesmo que $p \wedge q \wedge r$?

SIM, pois os operadores são associativos à esquerda

- $(p \wedge (q \vee r))$ é o mesmo que $p \wedge q \vee r$?

NÃO, pois $p \wedge q \vee r$ é o mesmo que $(p \wedge q) \vee r$

O conectivo \wedge tem maior precedência em relação ao \vee

- $((p \vee q) \wedge r)$ é o mesmo que $p \vee q \wedge r$?

NÃO, pois $p \vee q \wedge r$ é o mesmo que $p \vee (q \wedge r)$

O conectivo \wedge tem maior precedência em relação ao \vee

■ Precedência de operadores

■ Ordem de precedência dos conectivos lógicos

1. Expressões dentro dos parênteses
mais internos

2. \neg

3. \wedge

4. \vee

5. \rightarrow

6. \leftrightarrow

MAIOR



MENOR

*Todos os conectivos lógicos binários são
associativos à esquerda*

Lógica Proposicional

■ Lógica Proposicional X Língua Natural

Expressão em português	Conectivo Lógico	Expressão Lógica
e; mas; também; além disso	Conjunção	$p \wedge q$
ou	Disjunção	$p \vee q$
se p então q ; p implica q ; p logo q ; p é uma condição suficiente para q ; basta p para q ; q é uma condição necessária para p	Condicional	$p \rightarrow q$
p se e somente se q ; p é condição necessária e suficiente para q	Bicondicional (equivalência)	$p \leftrightarrow q$
não p ; é falso que p ; não é verdade que p	Negação	$\neg p$

- **Linguagem proposicional**

- Conjunto de todas as **fórmulas** que podem ser construídas a partir dos símbolos de um determinado **alfabeto**
 - Duas linguagens proposicionais são diferentes se seus alfabetos forem diferentes
 - É sempre um conjunto **infinito**



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional
 - a) Messi não é brasileiro.
 - b) Brasil e Argentina são os favoritos para ganhar a Copa.
 - c) Uma boa dieta é condição necessária para alguém ser saudável.
 - d) Comer pouco é uma condição suficiente para emagrecer.



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional
 - e) Messi não é brasileiro além disso joga no Barcelona.
 - f) Eu gosto de suco de maracujá ou de laranja.
 - g) Amanhã não é feriado mas eu vou viajar.
 - h) Ser professor implica em dar aula.



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional
 - i) Se Ana é mãe de Maria, então Maria não é mãe de Ana.
 - j) Se Ana é mãe de Maria então Maria é filha de Ana.
 - k) Lili é uma cachorrinha que tem cauda e cor branca.
 - l) X é o resultado da soma de 1 e 2.



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional
 - a) Messi não é brasileiro.
 - b) Brasil e Argentina são os favoritos para ganhar a Copa.
 - c) Uma boa dieta é condição necessária para alguém ser saudável.
 - d) Comer pouco é uma condição suficiente para emagrecer.

RESPOSTAS

- | | |
|---|-------------------|
| a) p: Messi é brasileiro | $\neg p$ |
| b) p: Brasil é favorito para ganhar a Copa | $p \wedge q$ |
| q: Argentina é favorita para ganhar a Copa | |
| c) p: Uma boa dieta, q: Alguém ser saudável | $q \rightarrow p$ |
| d) p: Comer pouco, q: Emagrecer | $p \rightarrow q$ |



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional

e) Messi não é brasileiro além disso joga no Barcelona.

f) Eu gosto de suco de maracujá ou de laranja.

g) Amanhã não é feriado mas eu vou viajar.

h) Ser professor implica em dar aula.

RESPOSTAS

e) p: Messi é brasileiro $\neg p \wedge q$

q: Messi joga no Barcelona

f) p: Eu gosto de suco de maracujá $p \vee q$

q: Eu gosto de suco de laranja

g) p: Amanhã é feriado, q: Amanhã eu vou viajar $\neg p \wedge q$

h) p: Ser professor, q: Dar aula $p \rightarrow q$



■ Lógica Proposicional X Língua Natural

- Transforme as sentenças em língua natural usando o formalismo da Lógica Proposicional
 - i) Se Ana é mãe de Maria, então Maria não é mãe de Ana.
 - j) Se Ana é mãe de Maria então Maria é filha de Ana.
 - k) Lili é uma cachorrinha que tem cauda e cor branca.
 - l) X é o resultado da soma de 1 e 2.

RESPOSTAS

- | | |
|--|------------------------|
| i) p: Ana é mãe de Maria | $p \rightarrow \neg q$ |
| q: Maria é mãe de Ana | |
| j) p: Ana é mãe de Maria | $p \rightarrow q$ |
| q: Maria é filha de Ana | |
| k) p: Lili é uma cachorrinha, q: Lili tem cauda, | $p \wedge q \wedge r$ |
| r: Lili é branca | |
| l) p: X é o resultado da soma de 1 e 2 | p |



■ Exercícios adicionais

1. Dê um exemplo de uma sentença em língua natural que é uma proposição e outra sentença que não é uma proposição
2. Dê um exemplo de uma proposição atômica e um exemplo para cada tipo de proposição composta (negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional)
3. Transforme cada um dos exemplos da questão 2 de língua natural para o formalismo da Lógica Proposicional
4. Combine as fórmulas geradas na questão 3 para gerar fórmulas ainda maiores seguindo a definição de fórmula bem formada