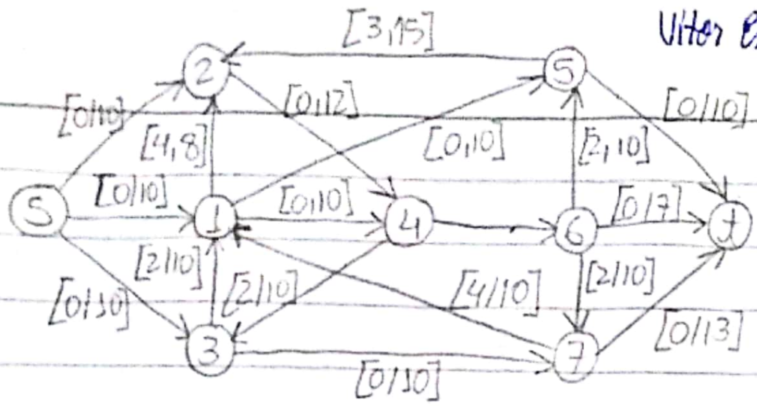
Aluno: Vinícius Guimarães 802431
Vitor Enzo 802123

① 

Para que seja um fluxo válido, temos que os tópicos abaixo devem ser verdadeiros:

i) $\forall e \in E,\ f(e) \leq c(e)$

ii) $v(f) = \sum_{e \in O(s)} f(e) = \sum_{e \in I(t)} f(e)$ (fluxo gerado na fonte é igual ao fluxo consumido no terminal)

iii) $\forall v \in V - \{s, t\}$ (nó interno)

$$\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e)$$ (conservação do fluxo)

Verificando:

i) Como pode-se perceber, todas as arestas possuem seu fluxo menor ou igual à capacidade máxima da aresta, portanto $\forall e \in E,\ f(e) \leq c(e)$

ii) Podemos observar que o fluxo consumido na fonte é igual ao fluxo consumido no terminal, pois:

$$\sum_{e \in O(s)} f(e) = 0+0+0 = \sum_{e \in I(t)} f(e) = 0+0+0,\ \text{Logo} \sum_{e \in O(s)} f(e) = \sum_{e \in I(t)} f(e)$$

Para $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

iii) • ① $\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e) \rightarrow 2+0+4 \neq 4+0+0 \rightarrow 6 \neq 4$

• ② $\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e) \rightarrow 0+4+3 \neq 0 \rightarrow 7 \neq 0$

Como já encontramos situações que não vão de acordo com a propriedade iii), então sabemos que o fluxo NÃO É VÁLIDO

tilibra

Digitalizado com CamScanner

② Dada a função

Augment (f, P) {
    b = gargalo (P)
    for each e = (u, v) in P {
        if e está a favor do fluxo s-t em G (F.E)
            f(e) = f(e) + b
        else (B.E)
            f(e) = f(e) − b
    }
    return f
}

Sabemos que o resultado da operação $f' = \text{Augment}(f, P)$ é um fluxo válido pois:

i) No caso de forward edges (F.E), f' não excede a capacidade

$f'(e) = f(e) + b \leq f(e) + (c(e) - f(e))$, uma vez que para qualquer aresta F.E do caminho, $c(e) - f(e)$ será maior ou igual que b. Ou seja $f'(e) = f(e) + b \leq c(e)$

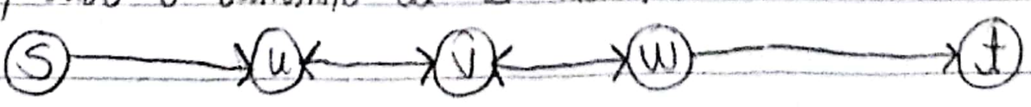
ii) No caso de B.E, f' nunca será inferior a zero, pois

$$f(e) \geq f'(e) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Gargalo é a} \\ \text{menor capacidade residual}}}{f(e) - b} \geq f(e) - \underbrace{f(e)}_{\substack{\text{E nesse caso, a capacidade} \\ \text{residual de uma aresta backward} \\ \text{é igual ao fluxo}}} = 0$$

Ou seja, para qualquer aresta B.E do caminho, $f(e)$ será maior do que b.

iii) Vamos verificar a conservação do fluxo: $f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$ para todo nó interno V

Ou seja, dado o caminho de s até T



temos esses 4 casos particulares

$$u \xrightarrow{F.E} v \xrightarrow{F.E} w$$

+b na entrada

+b na saída

$$f^{IN}(v) + \cancel{b} = f^{OUT}(v) + \cancel{b}$$

$$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$$

$$u \xrightarrow{F.E} v \xleftarrow{B.E} w$$

+b na entrada

−b na entrada

$$f^{IN}(v) + b - b = f^{OUT}(v)$$

$$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$$

$$u \xleftarrow{B.E} v \xleftarrow{B.E} w$$

−b na entrada

−b na saída

$$f^{IN}(v) - \cancel{b} = f^{OUT}(v) - \cancel{b}$$

$$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$$

$$u \xleftarrow{B.E} v \xrightarrow{F.E} w$$

−b na saída

+b na saída

$$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v) - b + b$$

$$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$$

Portanto, percebemos que a operação Augment(f, P) preserva fluxos, podendo ser utilizada para melhorar um fluxo.

Digitalizado com CamScanner

③ Mostrando que $v(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A)$

Dado que f é um fluxo s-t e (A, B) um corte s-t, então temos:

Considerando $v(f) = \sum_{e \in O(s)} f(e) = f^{OUT}(s)$ (Pois S é SOURCE / FONTE), como temos que $f^{IN}(s) = 0$, então, pode-se escrever $v(f) = f^{OUT}(s) - \underbrace{f^{IN}(s)}_{\to 0}$

Pela conservação do fluxo e considerando os nós intermediários, $\forall v \in V - \{s, t\}$:

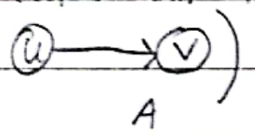
$f^{IN}(v) = f^{OUT}(v)$, ou seja, $f^{OUT}(v) - f^{IN}(v) = 0$

Dessa forma, podemos escrever $v(f)$ como sendo $v(f) = \sum_{v \in A} \left(f^{OUT}(v) - f^{IN}(v)\right)$.

Os termos desse somatório serão zero para todos os vértices, com exceção de S.

Entretanto, existem 4 tipos de arestas em G, que são:

i) $e = \langle u, v \rangle$ com $u, v \in A$

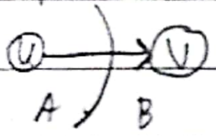


$+f(e)$ é considerado em $f^{OUT}(u)$

$-f(e)$ é considerado em $f^{IN}(v)$

(IRÃO SE ANULAR NO SOMATÓRIO)

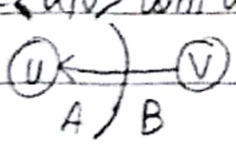
ii) $e = \langle u, v \rangle$ com $u \in A$ e $v \in B$



$+f(e)$ é considerado em $f^{OUT}(u)$

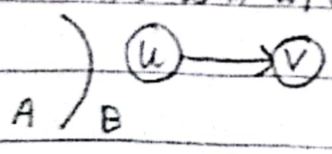
OBS: Estamos considerando apenas em A

iii) $e = \langle u, v \rangle$ com $u \in A$ e $v \in B$



$-f(e)$ é considerado em $f^{IN}(u)$

iv) $e = \langle u, v \rangle$ com $u, v \in B$



$f(e)$ não é considerado em $v(f)$

Digitalizado com CamScanner

Assim, podemos escrever $V(f)$ como sendo

$$V(f) = \sum_{e \in O(A)} f(e) - \sum_{e \in I(A)} f(e) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A)$$

Portanto, $V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A)$ ///

④ Seja um fluxo s-t qualquer e (A,B) um corte s-t. Mostre que $V(f) \leq c(A,B)$

Dado os cálculos da questão anterior, chegamos à relação em que $V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A)$. Assim, podemos escrever da seguinte forma:

$$V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A) \leq f^{OUT}(A)$$

Como $f^{OUT}(A)$ é dado por $\sum_{e \in O(A)} f(e)$, então:

$$V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A) \leq f^{OUT}(A) = \sum_{e \in O(A)} f(e)$$

Como o somatório dos fluxos que saem de A deve ser menor do que o somatório das capacidades das arestas que saem de A, então $\sum_{e \in O(A)} f(e) \leq \sum_{e \in O(A)} c(e)$. Ou seja:

$$V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A) \leq f^{OUT}(A) = \sum_{e \in O(A)} f(e) \leq \sum_{e \in O(A)} c(e)$$

Como o corte $c(A,B)$ é dado por $\sum_{e \in O(A)} c(e)$, então:

$$V(f) = f^{OUT}(A) - f^{IN}(A) \leq f^{OUT}(A) = \sum_{e \in O(A)} f(e) \leq \sum_{e \in O(A)} c(e) = c(A,B)$$

Portanto, temos que $V(f) \leq c(A,B)$ ///

Digitalizado com CamScanner

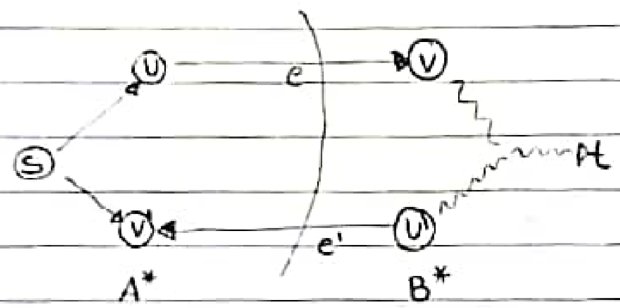
S T Q Q S S D ___/___/___

AA8 - Algoritmos gulosos (fluxo em redes)

Questão 05)

Prova: Seja $G_f = (V_f, E_f)$ o grafo residual no momento em que não há mais caminhos s-t. Então, podemos definir 2 subconjuntos de vértices.

$$A^* = \{v \in V_f \,/\, \exists P_{sv}\} \quad \text{(atingíveis a partir de s)}$$
$$B^* = V_f - A^* \quad \text{(não atingíveis)}$$



Note que:

$$t \in B^* \text{ pois } \nexists P_{st} \text{ em } G_f$$

Analisando a aresta e, percebe-se que $e = \langle u, v \rangle$ tem que estar saturada, isto é

$$f(e) = c(e),$$

caso contrário haveria em G_f uma aresta G_f Foward Edge com capacidade residual $c(e) - f(e)$, o que faria v atingível a partir de s.

$$\forall e \in O(A^*) \text{ tem } f(e) = c(e)$$

Analisando a reta $e' = \langle u', v' \rangle$, percebe-se que essa aresta tem que estar vazia, isto é

$$f(e') = 0,$$

pois senão haveria em G_f uma aresta Backward Edge com capacidade residual $f(e')$, resultando em um caminho P_{sv}.

spiral

Digitalizado com CamScanner

___ / ___ / ___ S T Q Q S S D

$\forall e \in I(A^*)$ tem $f(e) = 0$

Em resumo, se (A^*, B^*) é um corte, então:

$\forall e \in O(A^*)$, $f(e) = c(e)$
$\forall e \in I(A^*)$, $f(e) = 0$

Calculando o valor do fluxo temos:

$$v(f) = f^{out}(A^*) - f^{in}(A^*)$$

$$= \sum_{e \in O(A^*)} f(e) - \sum_{e \in I(B^*)} f(e)$$

$$= \sum_{e \in O(A^*)} c(e)$$

$$v(f) = c(A^*, B^*)$$

∴ Na prática, para encontrar o corte mínimo, basta passar uma busca em largura a partir de s em Gf.

Digitalizado com CamScanner

06)

a) Verificando validade do fluxo

i) $\forall e \in E$, $f(e) \leq c(e)$ OK

ii) $\sum_{e \in O(s)} f(e) = 6+3+1 = 10 = 5+5+0 = \sum_{e \in I(s)} f(e)$ OK

iii) Para $\{a, b, c, d\}$ temos

$$\sum_{e \in I(a)} f(e) = 6 = 5+0+1 = \sum_{e \in O(a)} f(e) \quad \text{OK}$$

$$\sum_{e \in I(b)} f(e) = 1+3+1 = 5 = \sum_{e \in O(b)} f(e) \quad \text{OK}$$

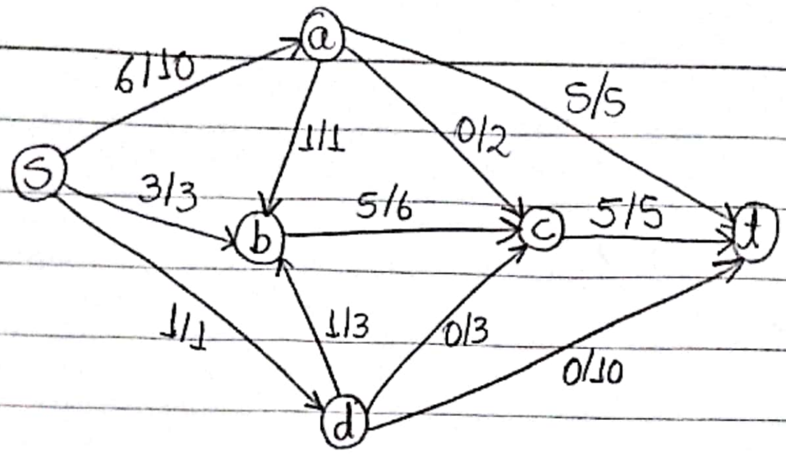
$$\sum_{e \in I(c)} f(e) = 0+5+0 = 5 = \sum_{e \in O(c)} f(e) \quad \text{OK}$$

$$\sum_{e \in I(d)} f(e) = 1 = 1+0+0 = \sum_{e \in O(d)} f(e) \quad \text{OK}$$

Portanto, temos um fluxo válido.

Digitalizado com CamScanner

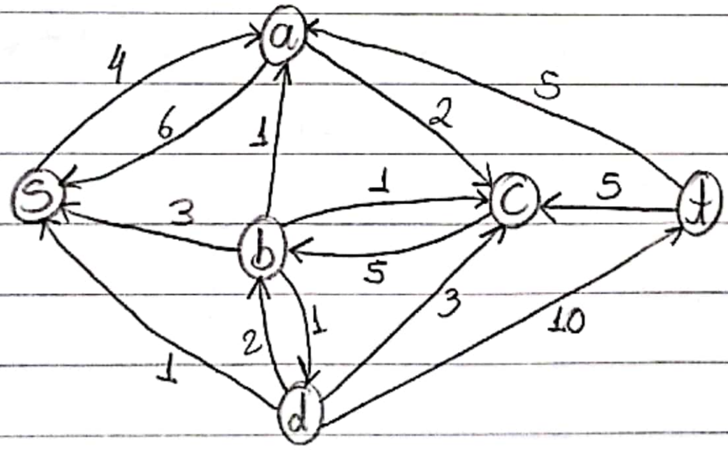
b)



Ao observar os fluxos saindo de S, temos que o somatório desses fluxos será dado como $6+3+1=10$. Da mesma forma, ao observar os fluxos que entram em t, temos que o somatório desse fluxo será dado por $5+5=10$. Assim, o valor do fluxo s-t em G é 10.

$$F.E \Rightarrow c(e') = c(e) - f(e)$$

Calculando grafo residual: $B.E \Rightarrow c(e'') = f(e)$



Analisando o grafo residual, percebe-se que existe um caminho P que sai de S e chega em t, dado por P= S a c b d t. Portanto, como nesse grafo residual existe um caminho que vai de S até t, então o fluxo S-t NÃO é máximo em G.

Calculando o fluxo máximo

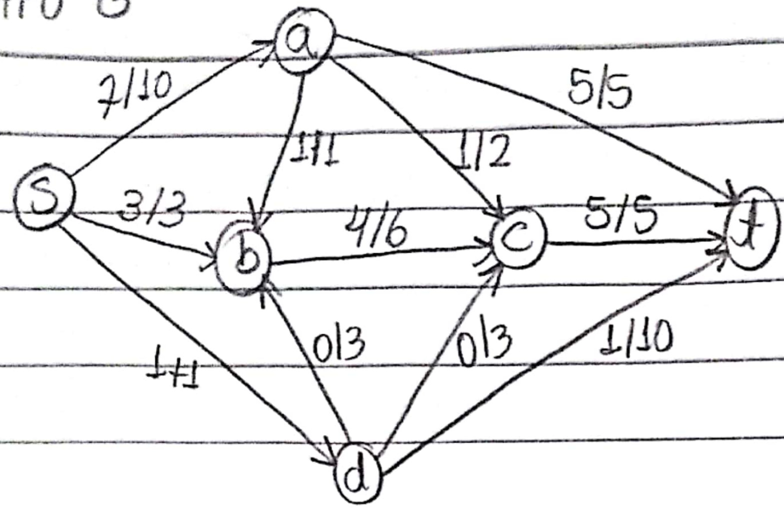
$i=1$
$P = s\,a\,c\,b\,d\,t$
$b=1$

- $f(sa) = 6+1 = 7$
- $f(ac) = 0+1 = 1$
- $f(bc) = f(bc) - 1 = 5-1 = 4$
- $f(db) = f(db) - 1 = 1-1 = 0$
- $f(dt) = 0+1 = 1$

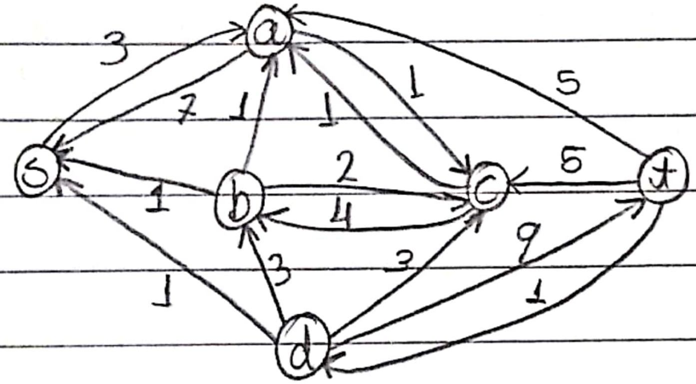
Atualizando os fluxos em G

Digitalizado com CamScanner

GRAFO G



GRAFO RESIDUAL CALCULADO



Como no grafo residual calculado na iteração 1 não possui caminho P que sai de s e chega em t, então já temos o fluxo máximo, que pode ser calculado da seguinte forma:

Fluxo máximo = Fluxo no grafo inicial G + b

Fluxo máximo = 10 + 1 = 1

$\boxed{\text{Fluxo máximo} = 11}$

Digitalizado com CamScanner