15/10 - Aula 23 - Integrais Indefinidas

Antiderivadas: $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, em $I=(a,b)$, se $F'(x)=f(x)$ para cada $x\in I$.

$F(x)$ também é chamada primitiva de $f(x)$

Ex: $F(x)=\frac{x^3}{3}$ é primitiva de $f(x)=x^2$ pois

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}=x^2=f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

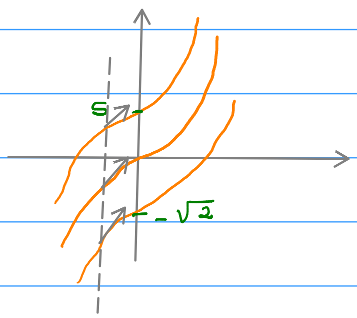
Ex. $F(x)=\operatorname{sen} x$ é primitiva de $f(x)=\cos x$ pois

$$F'(x)=(\operatorname{sen} x)'=\cos x$$

Obs: Se F é primitiva de $f(x)$ em I então para cada $C\in\mathbb{R}$ constante a função $F(x)+C$ também é primitiva de $f(x)$.

Por hipótese $F'(x)=f(x) \Rightarrow (F(x)+C)'=F'(x)+\underbrace{(C)'}_{=0}=F'(x)=f(x)$

Ex. As funções x^3, x^3+5, $x^3-\sqrt{2}$ são primitivas de $3x^2$



$(x^3)'=3x^2$

$(x^3+5)'=3x^2$

$(x^3-\sqrt{2})'=3x^2$

Proposição: Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são duas primitivas de $f(x)$ em I então, existe uma constante $C\in\mathbb{R}$ tais que

$$F_1(x)-F_2(x)=C$$

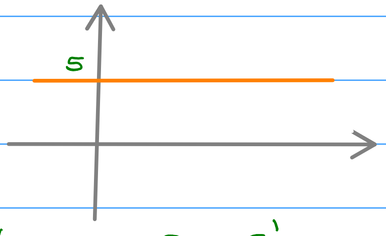
para cada $x\in I$

DEM Por hipótese $F_1'(x)=f(x)$ e $F_2'(x)=f(x)$ para cada $x\in(a,b)$

$\Rightarrow (F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$ para cada $x\in(a,b)$.

Logo, pelo Lema abaixo existe $C\in\mathbb{R}$ tal que $\boxed{F_1(x)-F_2(x)=C}$

Lema: Se $f(x)$ é contínua em $I=(a,b)$ e $f'(x)=0$ para cada $x\in(a,b)$ então, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=c$ para todo $x\in(a,b)$

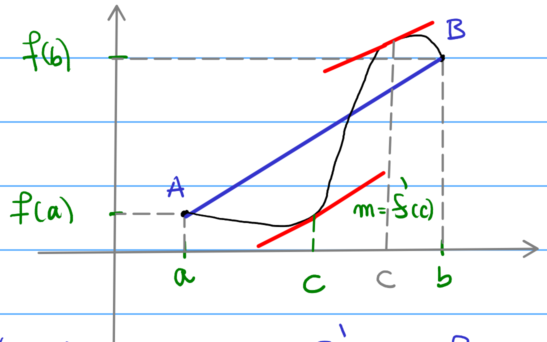


$f(x)=5\,,\quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=(5)'=0$

Lema $\Rightarrow$ Se $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)=c$ para alguma constante $c\in\mathbb{R}$.

> **Teorema 15.1** (Teorema do valor médio). *Suponhamos que f é uma função contínua no intervalo* $[a,b]$ *e derivável no intervalo* $]a,b[$. *Então existe* $c\in]a,b[$ *tal que*
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad\Rightarrow\quad \boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$$



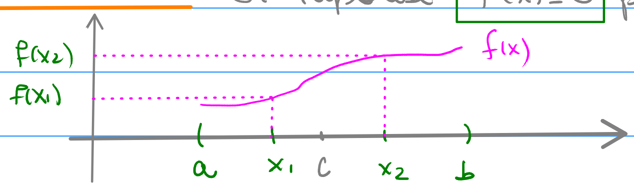
$A=(a,f(a))$ e $B=(b,f(b))$

$m=$ coef angular de $\overline{AB}$

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\exists\, c\in(a,b) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Prova do Lema: Por hipótese $\boxed{f'(x)=0}$ para cada $x\in(a,b)$



Seja $x_1,x_2\in(a,b)$ tais que $x_1<x_2$

Aplicando o TVM - Teor. do Valor Médio para $f(x)$ no intervalo $[x_1,x_2]$ temos que existe $c\in(x_1,x_2)$ tal que

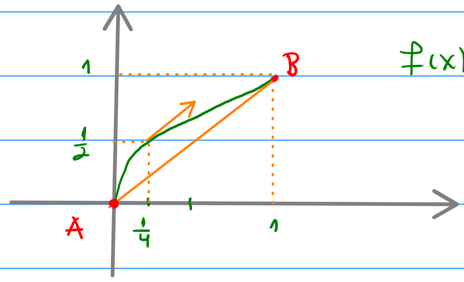
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{\neq 0}}=f'(c)=0 \iff f(x_2)-f(x_1)=0\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{\neq 0}=0$$

Então, para cada $x_1<x_2$ temos $f(x_1)=f(x_2)$.

Analogamente, para cada $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

Logo, para cada $x_1, x_2 \in (a,b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ é constante em (a,b).

Exemplo: Seja $f(x) = \sqrt{x}$ com $x \in [0,1]$



$f(x) = \sqrt{x}$, $A = (0,0)$, $B = (1,1)$

$m = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{0}}{1-0} = 1$

$TVM \Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$ tq $\frac{f(1) - f(0)}{\underbrace{1-0}_{=1}} = f'(c) \Rightarrow f'(c) = 1$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Definição 15.1 (Integral indefinida). *Sendo* F *uma primitiva de* f *no intervalo* I, *chama-se* integral indefinida de f, *no intervalo* I, *a primitiva genérica de* f *em* I, F(x) + C, *sendo* C *uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Em equações que exprimem integrais indefinidas, o intervalo I *não é mencionado.*

Ex: $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ pois $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$

$\Rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

A derivada de $\frac{x^3}{3} + c$ é igual a x^2 $\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$

A antiderivada ou primitiva de x^2 é igual a $\frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

dx = diferencial

Proposição 15.2.

1. $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, se $\alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.
3. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. $\int e^x\, dx = e^x + C$.
6. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.
7. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
9. $\boxed{\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C.}$
10. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
11. $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$.
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + C$.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \iff \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = x^\alpha$

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{\cancel{(\alpha+1)}\, x^{\alpha+\cancel{1-1}}}{\cancel{\alpha+1}} = x^\alpha$$

2. $x > 0$, $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\Big(\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}}_{e^{\frac{1}{x}}}\Big) = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x} \iff \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c \quad \text{se } x > 0$$

Ex Mostre que $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$.

Sol:

$$(\sec x + c)' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \left[(\cos x)^{-1}\right]' = (-1).(\cos x)^{-2}.(\cos x)'$$

$$= -(\cos x)^{-2}.(-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\sec x} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}_{\operatorname{tg} x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$$

Logo, $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + c$

$\square$

Proposição 15.3. *Se* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x) + C$, *então, sendo* $a, b, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$
2. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$
3. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$
4. $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C$
5. $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C$
6. $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
7. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$F(x) = \int f(x)\,dx - C$

$G(x) = \int g(x)\,dx - c$

$\Downarrow$

$C = 0$

$F(x) = \int f(x)\,dx$

$G(x) = \int g(x)\,dx$

1. $(F(x) + G(x) + c)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

$\Downarrow$

$\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$

$\Downarrow$

$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

Ex. Calcule $\int [1 + x + x^2 + 5x^3 - 7x^4]\,dx$

$= \int 1dx + \int x\,dx + \int x^2 dx + \int 5x^3 dx + \int -7x^4\,dx$

$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^5}{5} + c$

2. $\boxed{\int k f(x)\,dx = k F(x) + C} = k \int f(x)\,dx$

$(kF(x) + c)' = (k.F(x))' + (c)' = kF'(x) + 0 = kF'(x) = kf(x)$

Obs: Se $f(x)$ é derivável em cada $x \in (a,b)$, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R}$$

então, $\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$. Se $\boxed{f(x) = x}$ $\Rightarrow df(x) = \underbrace{(x)'}_{=1}dx = 1.dx$

$\boxed{f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h}$

$df(x)(h) = f'(x)h$

para cada $x \in (a,b)$ o diferencial $df(x)$ é uma função linear $df(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h \mapsto df(x)(h) \doteq f'(x)h$