CÁLCULO DIFERENCIAL E SÉRIES 2022/1

E5- Teste da comparação e séries alternadas

Lista 5

Testes da comparação e para séries alternadas

A resolução das listas é fundamental para a assimilação dos conteúdos da referida leitura e para o consequente bom rendimento nas atividades avaliativas da unidade. Toda dúvida que tiver consulte o professor e/ou monitor através dos fóruns de dúvidas e/ou nos atendimentos disponibilizados.

Os exercícios são baseados nas listas de exercícios das referências [STEWART] e [GUIDORIZZI] onde se encontram esses exercícios.

😉 Bom trabalho!

Exercícios

1. Verifique que as séries abaixo são convergentes. Justifique.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+3}}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+3}}\right)$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+3}}\right)$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+5}{k^2+3} - 1\right)$;

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2+5}{k^2+3}\right)$.

2. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ duas séries de termos positivos.

a) Prove o item $c)$ do Teste de Comparação no Limite, isto é, se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty,$$

então a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Dê um exemplo de que o limite acima pode ser infinito com uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente e um outro com

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente. Por que isso não contradiz o Teste de Comparação no Limite?

3. Use o Teste de Comparação no limite para analisar a convergência das séries abaixo.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}-7}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{3n^2+2n-10}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n-1}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^r} \quad r>0$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n}$.

4. Seja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série de termos positivos tal que

$$k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \leq 1\,,\forall\, k \geq 1\,.$$

Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é divergente.

5. Use o Exercício anterior para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$$

é divergente.

6. Determine se as séries abaixo convergem ou divergem.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$;

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

l) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$;

m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}$.

7. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Suponha que existam um número real $r < 1$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \forall n \geq p\,.$$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

8. Teste a convergência ou divergência das séries abaixo.

a) $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \ldots$;
b) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \ldots$.

9. Por que o Teste para Séries Alternadas não se aplica para testar a convergência das séries abaixo.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{k+2}$;
b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^k}{k}$.

10. Estude a série dada com relação a convergência ou divergência

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1}{2k+1}$;
b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{4k^2+1}$;
c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{1+k^4}$;
d) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\ln k}$;

e) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$;

f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$;

g) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{k^2+k}-k)$

h) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^k}{k!}$;

i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{k!}$.

11. Para quais valores de p cada série abaixo é convergente?

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n^p}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+p}$;

c) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(\ln k)^k}{k}$.

12. Mostre que série $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}b_k$, onde $b_k=\frac{1}{k}$ se k for ímpar e $b_k=1/k^2$ se k é par, é divergente. Por que o Teste para Séries Alternadas não se aplica.

13. Mostre que a soma dos $2n$ primeiros termos da série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

é a mesma que a soma dos n primeiros termos da série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots) \ .$$

Essas séries convergem? Qual é a soma dos primeiros $2n+1$ termos da primeira série? Se a série converge, qual é a sua soma?

14. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, onde a_n é a sequência que começa com a e cada termo é obtido multiplicando o anterior alternadamente por b ou por a:

- $a, ab, a^2b, a^2b^2, a^3b^2, a^3b^3, \ldots$

onde $0<a<b<1$.

Prove que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

não existe.

Referências

[Guidorizzi] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo.* 5 ed.. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 4.

[Stewart] STEWART, James. *Cálculo.* 7. ed.. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

Status de envio

Status de envio	Esta tarefa não requer o envio online
Status da avaliação	Não há notas
Última modificação	-
Comentários sobre o envio	Comentários (0)

Atividade anterior

◀ E4- Testes da integral e da divergência

Seguir para...

Próxima atividade

E6- Testes da razão e da raiz ▶

Manter contato

Equipe Moodle - UFSCar

https://servicos.ufscar.br

Telefone : +55 (16) 3351-9586