Matemática Discreta

Relações
Operações

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Relações

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar algumas relações importantes
    - Relação de igualdade
    - Relação inversa
  - Apresentar as operações envolvendo relações
    - Operações de conjuntos
    - Composição de relações
  - Capacitar o aluno a usar operações de Relações para modelar problemas computacionais

Problema #7

- **Dados os conjuntos**
  - A = { a, b, c, d }
  - B = { 1, 2, 3 }
- **E as relações**
  - R = { (a, 1), (a, 3), (b, 2), (d, 3) }
  - S = { (a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 1) }
- **Calcule**
  - $S^{-1} \circ R$

Relações

- **Relação de igualdade**

Fonte: https://pixabay.com/

- Também conhecida como **identidade** ou **relação diagonal**
- A relação igualdade I sobre A é a relação em A definida por

$$I = \{ (a, a) \mid a \in A \}$$

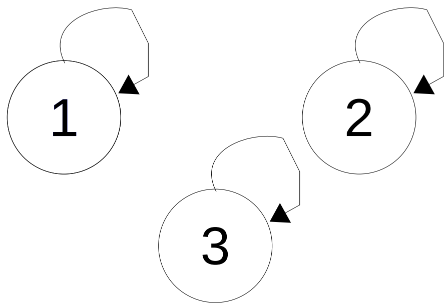
Relações

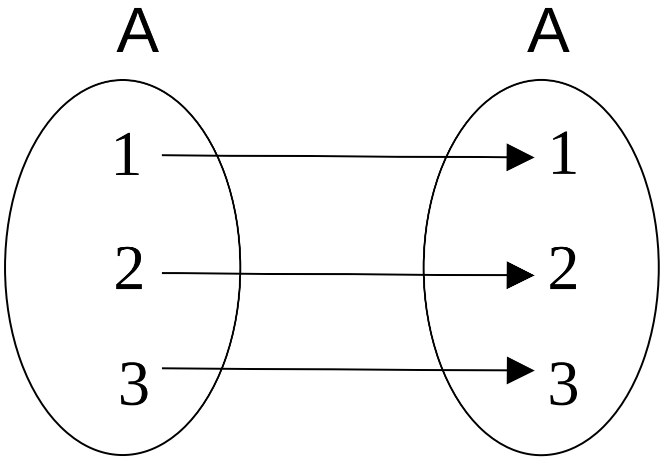
- **Relação de igualdade**
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A = {1, 2, 3}
    - A relação de igualdade em A é I = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Relações

- **Relação de igualdade – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A = {1, 2, 3}
    - A relação de igualdade em A é I = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1





Relações

- **Relação inversa**

Fonte: https://pixabay.com/

- A **inversa** de uma relação R de A para B é a relação formada de B para A invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em R

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$$

$$Dom(R^{-1}) = Img(R) \text{ e}$$

$$Img(R^{-1}) = Dom(R)$$

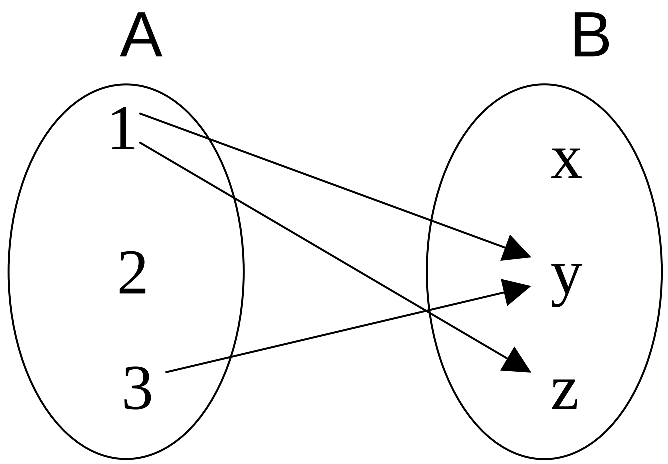
Relações

- **Relação inversa**
  - Exemplo
    - Sejam $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ x, y, z \}$ conjuntos e $R = \{ (1, y), (1, z), (3, y) \}$
    - $R^{-1} = \{ (y, 1), (z, 1), (y, 3) \}$

Relações

- **Relação inversa – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { x, y, z } conjuntos e R = { (1, y), (1, z), (3, y) }

	x	*y*	*z*
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0



Relações

- **Relação inversa – Representação gráfica**
  - Exemplo
    - Sejam A = { 1, 2, 3 } e B = { x, y, z } conjuntos e R = { (1, y), (1, z), (3, y) }
    - R^{-1} = { (y, 1), (z, 1), (y, 3) }

	1	2	3
x	0	0	0
y	1	0	1
z	1	0	0

Matriz transposta da matriz original

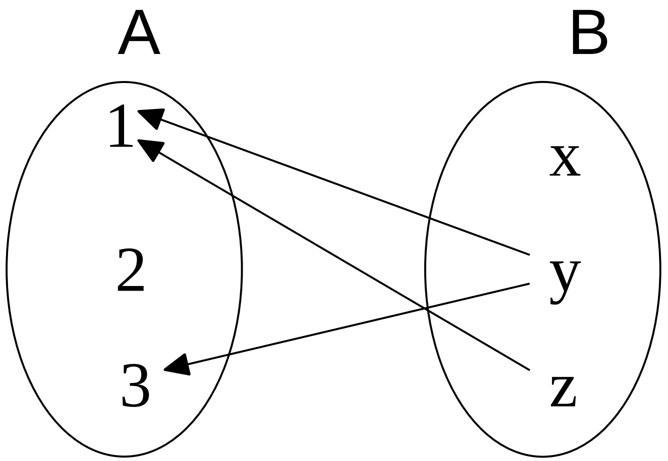


Diagrama obtido invertendo-se o sentido de todas as setas

Relações

- **Relação de igualdade**
  - Dado o conjunto A = { a, b, x, z }
    - a) Liste os elementos presentes na relação de igualdade (I) em A
    - b) Represente graficamente a relação I
- **Relação inversa**
  - Sejam A = { a, b, c } e B = { x, a, z } conjuntos e R = { (a, x), (a, a), (c, z), (b, a) }
    - a) Liste os elementos presentes na relação inversa R^{-1}
    - b) Represente graficamente a relação R^{-1}

- **Relação de igualdade**
  - Dado o conjunto A = { a, b, x, z }

    a) Liste os elementos presentes na relação de igualdade (I) em A

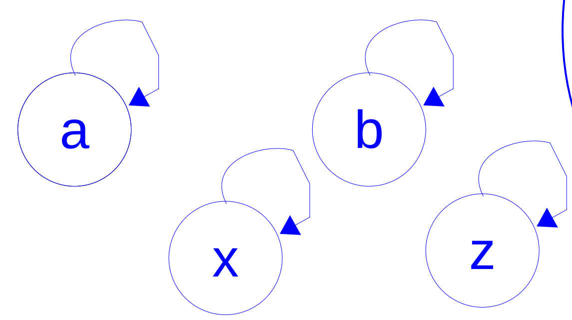
    b) Represente graficamente a relação I

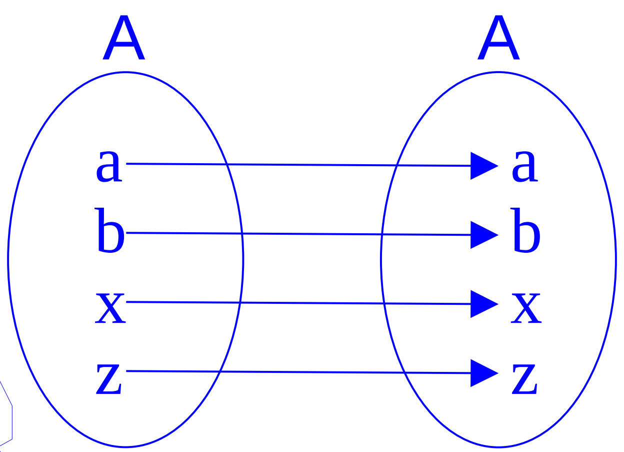
RESPOSTAS

a) I = { (a, a), (b, b), (x, x), (z, z) }

b)

	a	b	x	z
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
x	0	0	1	0
z	0	0	0	1





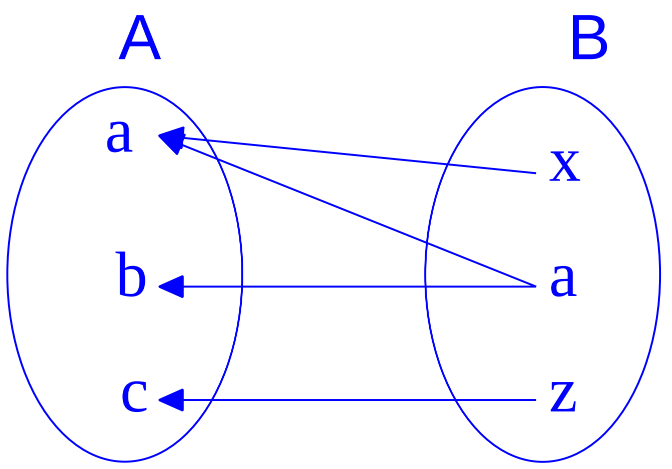
- **Relação inversa**
  - Sejam A = { a, b, c } e B = { x, a, z } conjuntos e R = { (a, x), (a, a), (c, z), (b, a) }
    - a) Liste os elementos presentes na relação inversa R^{-1}
    - b) Represente graficamente a relação R^{-1}

RESPOSTAS

a) R^{-1} = { (x, a), (a, a), (z, c), (a, b) }

b)

	a	b	c
x	1	0	0
a	1	1	0
z	0	0	1



Relações

- **Operações**

Fonte: https://pixabay.com/

- Todas as **operações** sobre conjuntos se aplicam às relações
  - Já que uma relação nada mais é do que um <u>conjunto de pares ordenados</u>

Relações

- **Operações**
  - Exemplo
    - Sejam R e S duas relações em $\mathbb{N}$ definidas por $x\ R\ y \leftrightarrow x = y$ e $x\ S\ y \leftrightarrow x < y$. Então

      a) a relação $R \cup S$ é descrita como: $x\ (R \cup S)\ y \leftrightarrow x \leq y$

      b) a relação R' é descrita como: $x\ R'\ y \leftrightarrow x \neq y$

      c) a relação S' é descrita como: $x\ S'\ y \leftrightarrow x \geq y$

      d) o conjunto que representa a relação $R \cap S$ é $\varnothing$

Relações

- **Operações**
  - **União**
    - Sejam R e S duas relações de A para B representadas por matrizes booleanas M e N
    - A união $R \cup S$ é represenada pela matriz booleana P onde
      - $P_{i,j} = 1$ sse $M_{i,j} = 1$ ou $N_{i,j} = 1$
      - Denotada por $M \vee N$

Relações

- **Operações**
  - **Intersecção**
    - Sejam R e S duas relações de A para B representadas por matrizes booleanas M e N
    - A intersecção R ∩ S é represenada pela matriz booleana Q onde
      - $Q_{i,j} = 1$ sse $M_{i,j} = 1$ <u>e</u> $N_{i,j} = 1$
      - ➔ Denotada por M ∧ N

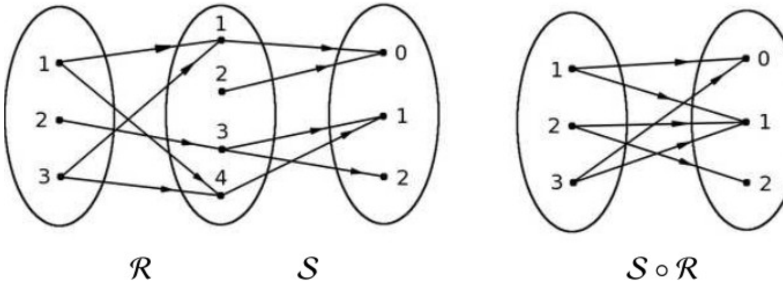
Relações

- **Composição de relações**

Fonte: https://pixabay.com/

Relações

- **Composição de relações**
  - Sejam R e S duas relações
  - A composição de R com S é a relação denotada por $S \circ R$ definida como
    $$S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b \; (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S \}$$
  - Exemplo
    - Sejam R e S duas relações
      - $R = \{ (1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4) \}$
      - $S = \{ (1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1) \}$
    - $S \circ R = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1) \}$



Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, Fig. 6.2)

Relações

- **Composição de relações**
  - Algumas propriedades
    - Para quaisquer relações R e S
      - $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$
      - $Img(S \circ R) \subseteq Img(S)$
    - A composição de relações não é comutativa, ou seja,
      - $S \circ R \neq R \circ S$ em alguns casos
    - A inversa da composição das relações é a composição das inversas, na ordem inversa
      - $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Relações

- **Composição de relações**
  - Sejam as relações
    - $R = \{ (1, 20), (1, 30), (2, 40), (3, 20) \}$
    - $S = \{ (20, 200), (20, 300), (40, 200) \}$
  - Calcule:

    a) $S \circ R =$

    b) $R \circ S =$

    c) $R^{-1} =$

    d) $S^{-1} =$

    e) $(S \circ R)^{-1} =$

    f) $R^{-1} \circ S^{-1} =$

Relações

- **Composição de relações**
  - Sejam as relações
    - $R = \{ (1, 20), (1, 30), (2, 40), (3, 20) \}$
    - $S = \{ (20, 200), (20, 300), (40, 200) \}$
  - Calcule:

    a) $S \circ R = \{ (1, 200), (1, 300), (2, 200), (3, 200), (3, 300) \}$

    b) $R \circ S = \varnothing$

    c) $R^{-1} = \{ (20, 1), (30, 1), (40, 2), (20, 3) \}$

    d) $S^{-1} = \{ (200, 20), (300, 20), (200, 40) \}$

    e) $(S \circ R)^{-1} = \{ (200, 1), (300, 1), (200, 2), (200, 3), (300, 3) \}$

    f) $R^{-1} \circ S^{-1} = \{ (200, 1), (300, 1), (200, 2), (200, 3), (300, 3) \}$

Problema #7

- **Dados os conjuntos**
  - A = { a, b, c, d }
  - B = { 1, 2, 3 }
- **E as relações**
  - R = { (a, 1), (a, 3), (b, 2), (d, 3) }
  - S = { (a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 1) }
- **Calcule**
  - $S^{-1} \circ R$

Problema #7

- **Dados os conjuntos**
  - $A = \{ a, b, c, d \}$
  - $B = \{ 1, 2, 3 \}$
- **E as relações**
  - $R = \{ (a, 1), (a, 3), (b, 2), (d, 3) \}$
  - $S = \{ (a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 1) \}$
- **Calcule**
  - $S^{-1} \circ R = \{ (a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (d, b) \}$