

Capítulo 10 | Testes de hipóteses em uma e duas amostras

10.1 Hipótese estatística: conceitos gerais

Definição 10.1

Uma *hipótese estatística* é uma afirmação ou conjectura sobre uma ou mais populações.

Definição 10.2

A rejeição da hipótese nula quando ela é verdadeira é chamada de *erro tipo I*.

Definição 10.3

A não rejeição da hipótese nula quando ela é falsa é chamada de *erro tipo II*.

Tabela 10.1 Situações possíveis ao testar uma hipótese estatística

	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão correta

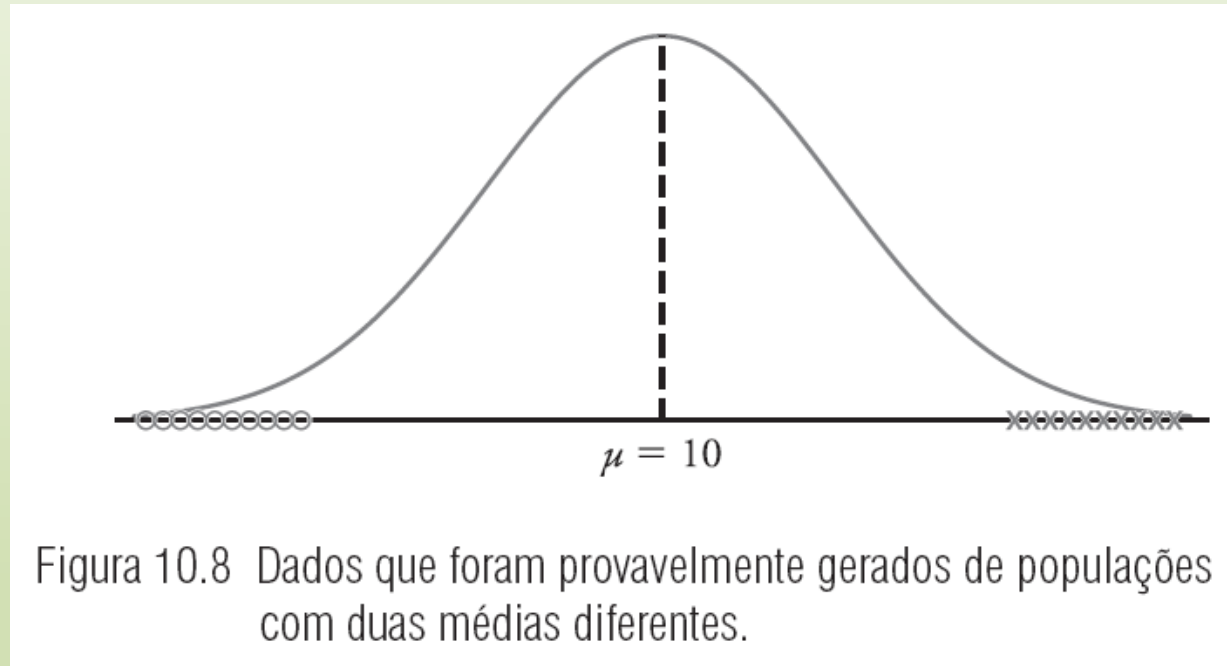
Importantes propriedades de um teste de hipóteses

1. Os erros tipo I e II são relacionados. Uma redução na probabilidade de um geralmente resulta num aumento da probabilidade do outro.
2. O tamanho da região crítica, e, portanto, a probabilidade de se cometer um erro tipo I, pode ser sempre reduzido ajustando-se o(s) valor(es) crítico(s).
3. Um aumento no tamanho da amostra n reduzirá α e β simultaneamente.
4. Se a hipótese nula é falsa, β é máximo quando o valor real de um parâmetro se aproxima do valor hipotético. Quanto maior a distância entre o valor real e o hipotético, menor será o valor de β .

Definição 10.4

O *poder* de um teste é a probabilidade de se rejeitar H_0 dado que uma alternativa específica é verdadeira.

10.4 Uso de valores P para tomada de decisão em testes de hipóteses



Definição 10.5

Um valor P é o nível (de significância) mais baixo para o qual o valor observado da estatística de teste é significativo.

Abordagem para teste de hipóteses com probabilidade fixa de erro tipo I

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa.
2. Escolha o nível de significância α .
3. Escolha uma estatística de teste apropriada e estabeleça a região crítica de α .
4. A partir da estatística de teste calculada, rejeite H_0 se o valor de tal estatística estiver na região crítica. Caso contrário, não rejeite.
5. Tire conclusões científicas ou de engenharia.

Teste de significância (abordagem do valor P)

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa.
2. Escolha uma estatística de teste apropriada.
3. Calcule o valor P com base no valor calculado da estatística de teste.
4. Use o julgamento baseado no valor P e o conhecimento do sistema científico.

10.5 Amostra única: testes referentes a uma única média (variância conhecida)

Procedimento de teste para uma única média

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -z_{\alpha/2}$$

Se $-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$, não rejeite H_0 . A rejeição de H_0 , é claro, implica a aceitação da hipótese alternativa $\mu \neq \mu_0$. Com essa definição da região crítica, deve estar claro que haverá uma probabilidade α de rejeitar H_0 (estar na região crítica) quando, na verdade, $\mu = \mu_0$.

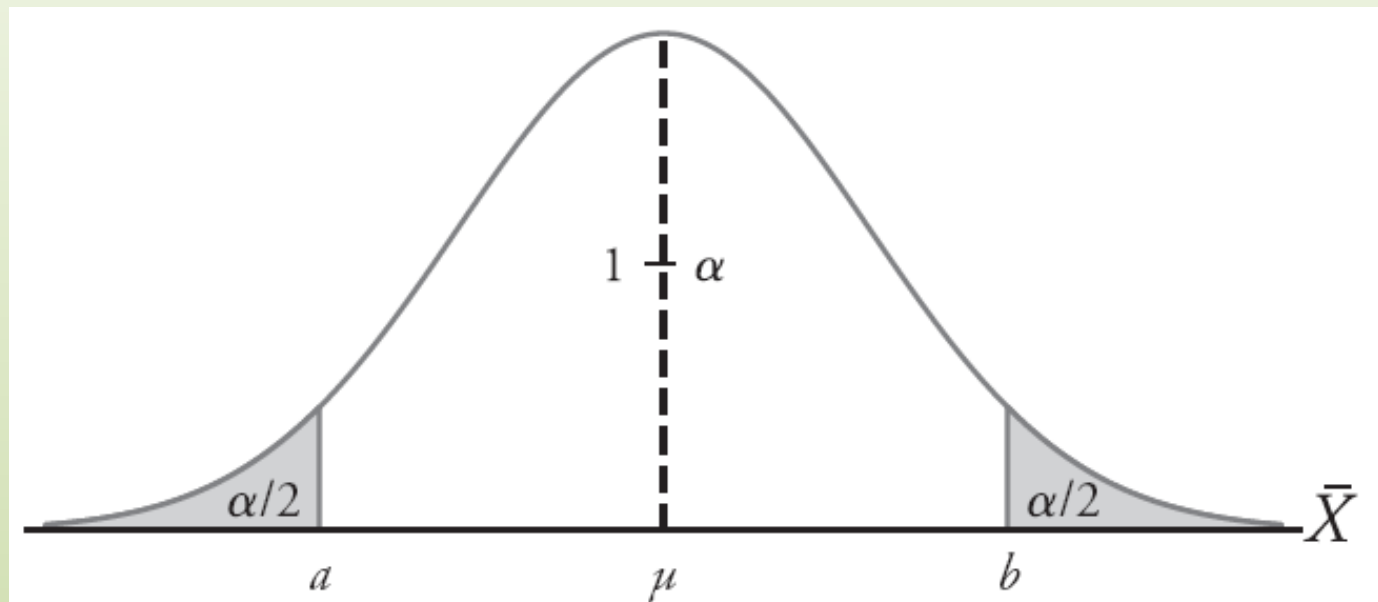


Figura 10.9 Região crítica para as hipóteses alternativas $\mu \neq \mu_0$.

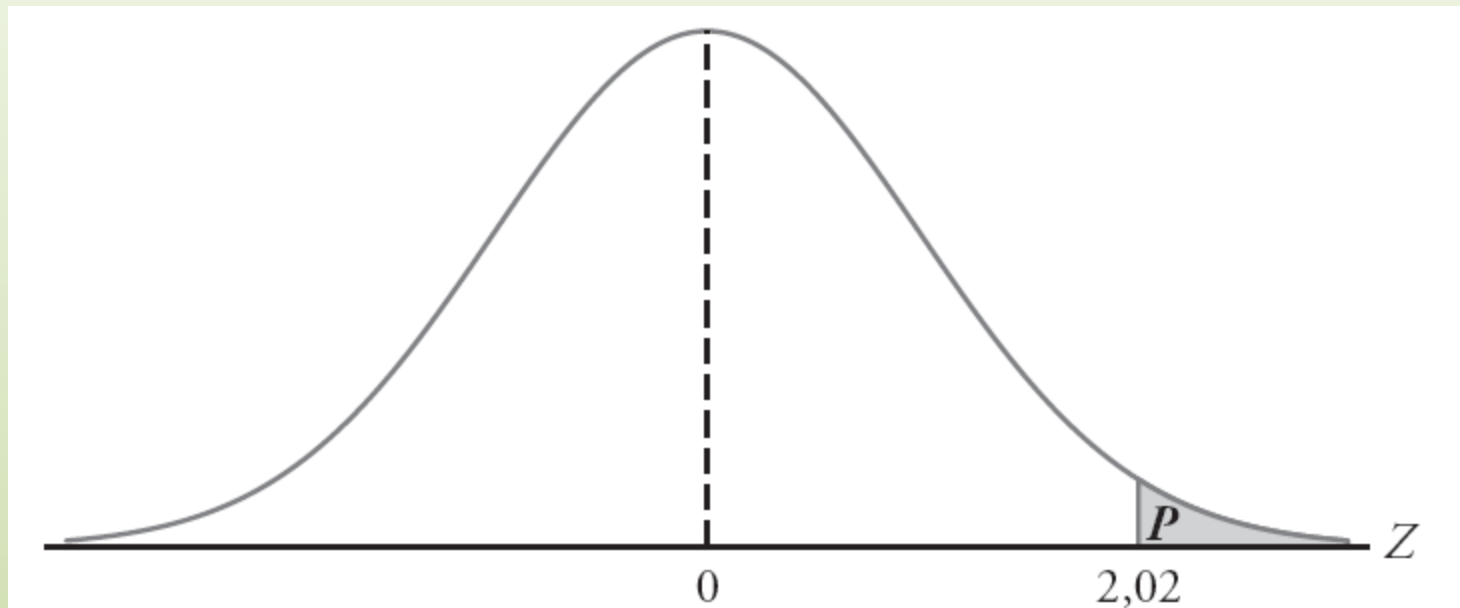


Figura 10.10 Valores P para o Exemplo 10.3.

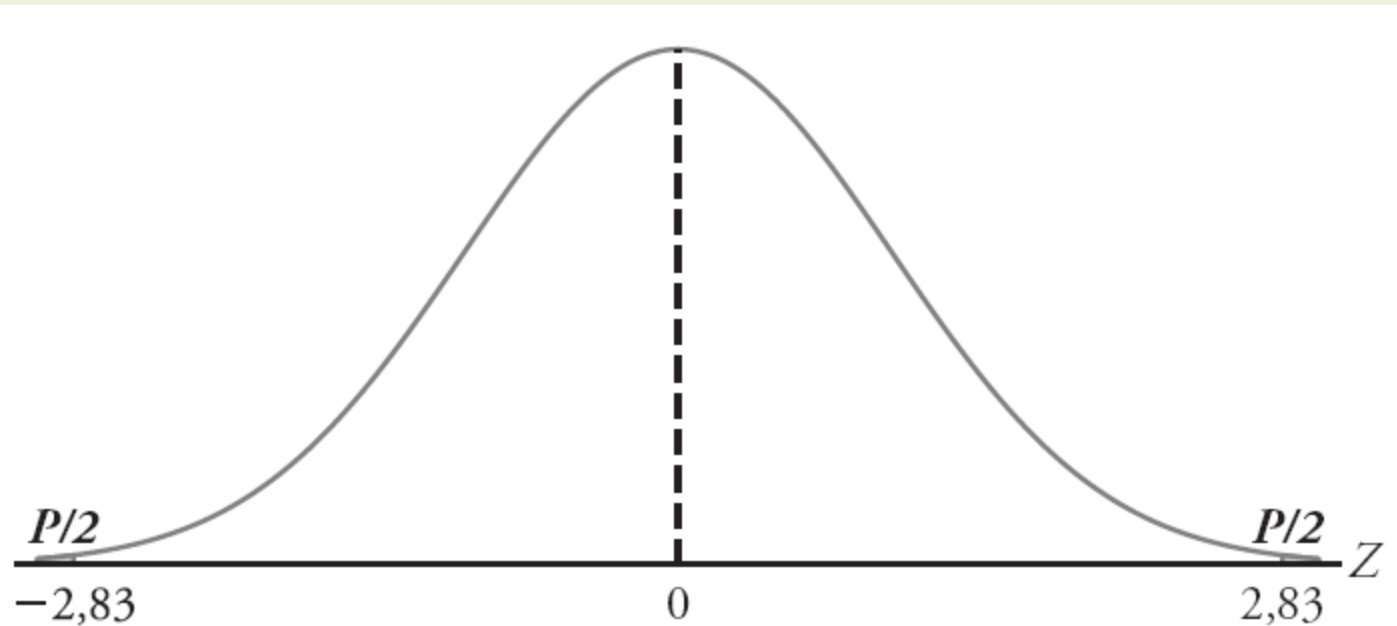


Figura 10.11 Valor P para o Exemplo 10.4.

10.7 Amostra única: testes para uma única média (variância desconhecida)

Estatística t para um teste de uma única média (variância desconhecida)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Teste t combinado para duas amostras

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}},$$

onde

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Tabela 10.2 Dados para o Exemplo 10.7

Veado	Tempo de injeção	Andrógeno (ng/l) 30 minutos após injeção	d_i
1	2,76	7,02	4,26
2	5,18	3,10	2,08
3	2,68	5,44	2,76
4	3,05	3,99	0,94
5	4,10	5,21	1,11
6	7,05	10,26	3,21
7	6,60	13,91	7,31
8	4,79	18,53	13,74
9	7,39	7,91	0,52
10	7,30	4,85	-2,45
11	11,78	11,10	-0,68
12	3,90	3,74	-0,16
13	26,00	94,03	68,03
14	67,48	94,03	26,55
15	17,04	41,70	24,66

Tabela 10.3 Testes sobre as médias.

H_0	Valor da estatística de teste	H_1	Região crítica
$\mu = \mu_0$	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}; \sigma \text{ conhecido}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2} \text{ ou } z > z_{\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}; v = n - 1,$ $\sigma \text{ desconhecido}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2} \text{ ou } t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}};$ $\sigma_1 \text{ e } \sigma_2 \text{ conhecidos}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $z < -z_{\alpha/2} \text{ ou } z > z_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}};$ $v = n_1 + n_2 - 2,$ $\sigma_1 = \sigma_2 \text{ mas desconhecidos}$ $s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2} \text{ ou } t > t_{\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}};$ $v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}};$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \text{ e desconhecidos}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$t' < -t_\alpha$ $t' > t_\alpha$ $t' < -t_{\alpha/2} \text{ ou } t' > t_{\alpha/2}$
$\mu_D = d_0$ observações	$t = \frac{\bar{d} - d_0}{s_d/\sqrt{n}}; v = n - 1$	$\mu_D < d_0$ $\mu_D > d_0$ $\mu_D \neq d_0$	$t < -t_\alpha$ $t > t_\alpha$ $t < -t_{\alpha/2} \text{ ou } t > t_{\alpha/2}$

10.9 Escolha do tamanho da amostra para testar médias

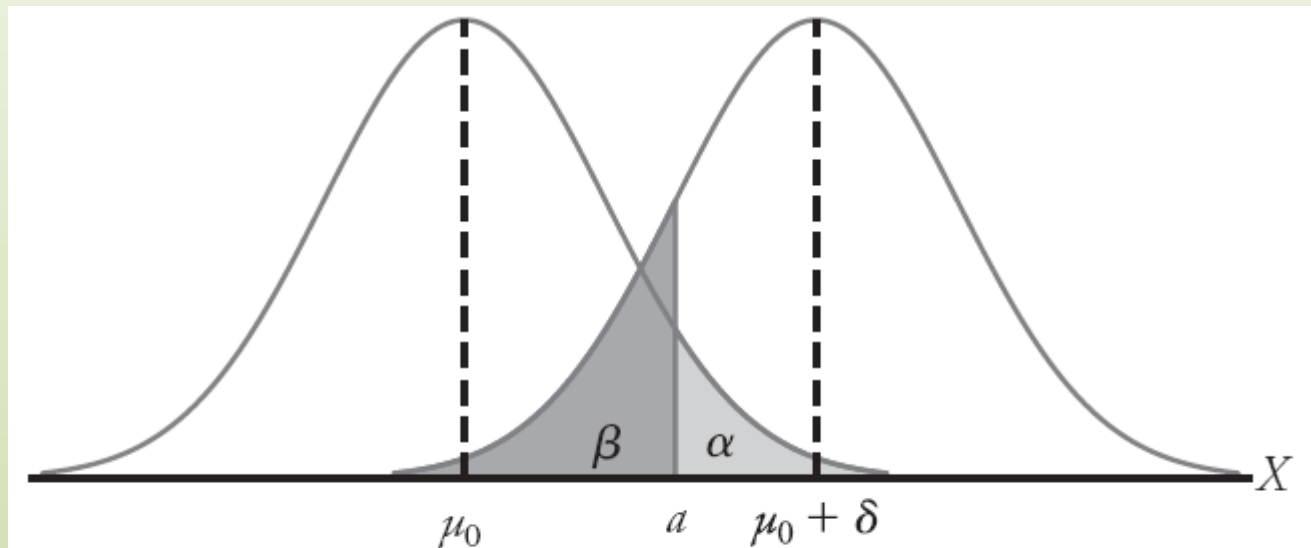


Figura 10.14 Teste de $\mu = \mu_0$ versus $\mu = \mu_0 + \delta$.

O tamanho da amostra é escolhido para atingir um bom poder para α fixo e alternativas específicas fixas.

Suponha que desejamos testar a hipótese

$$H_0: \mu = \mu_0,$$

$$H_1: \mu > \mu_0,$$

com nível de significância α quando o desvio-padrão σ é conhecido.

Para uma alternativa específica, digamos, $\mu = \mu_0 + \delta$, o poder do teste é

$$1 - \beta = P(\bar{X} > a \mid \mu = \mu_0 + \delta)$$

$$\beta = P(\bar{X} < a \mid \mu = \mu_0 + \delta)$$

$$= P \left[\frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{a - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0 + \delta \right].$$

Sob a hipótese alternativa, temos que $\frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}}$ tem distribuição normal padrão.

$$\beta = P \left(Z < \frac{a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$

$$\beta = P \left(Z < z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$

$$-z_\beta = z_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

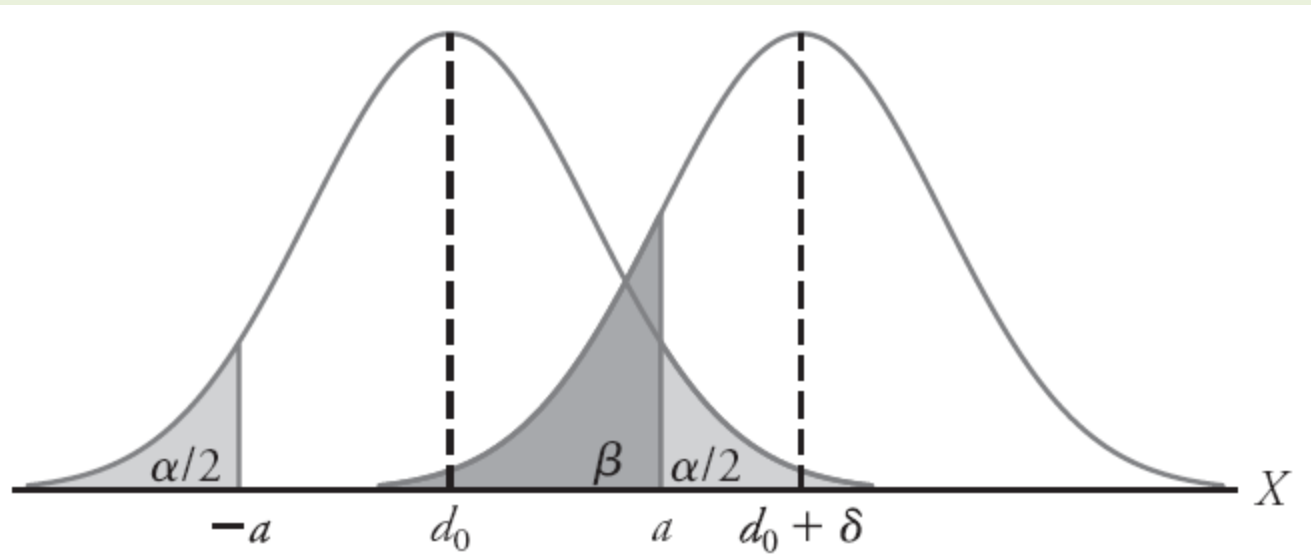
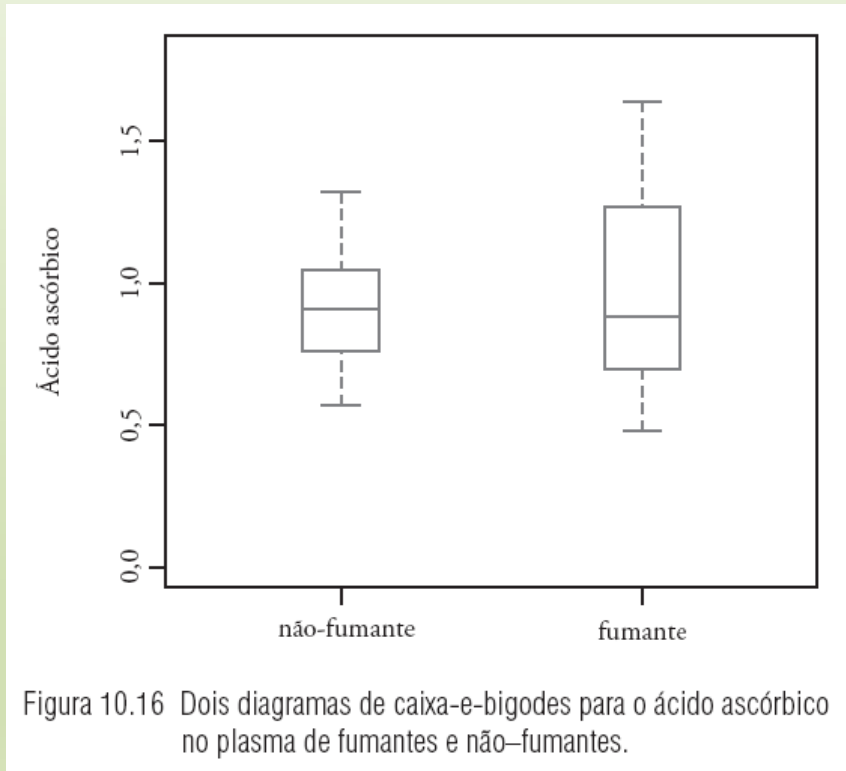


Figura 10.15 Teste de $\mu_1 - \mu_2 = d_0$ versus $\mu_1 - \mu_2 = d_0 + \delta$.

10.10 Métodos gráficos para a comparação de médias



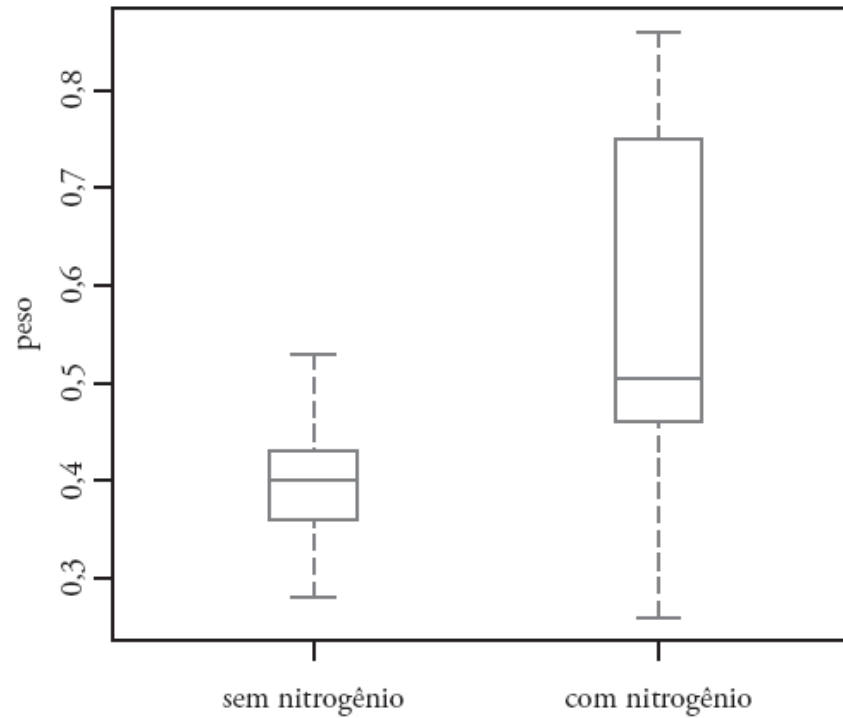


Figura 10.17 Dois diagramas de caixa-e-bigode para os dados das mudas.

10.11 Amostra única: teste para uma única proporção

Testando uma proporção: amostras pequenas

1. $H_0: p = p_0$.
2. Uma das alternativas $H_1: p < p_0, p > p_0$ ou $p \neq p_0$.
3. Escolha um nível de significância igual a α .
4. Estatística de teste: variável binomial X com $p = p_0$.
5. Cálculos: determine x , o número de sucessos, e calcule o valor P apropriado.
6. Decisão: chegue às conclusões apropriadas com base no valor P .

A estatística de teste para testarmos uma única proporção é:

$$H_0: p = p_0 \text{ vs } H_1: p < p_0,$$

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

$$p_1 - p_2 = 0$$

A estatística de teste para testarmos a diferença de proporções é:

$$H_0: p_1 - p_2 = 0 \text{ vs } H_1: p_1 - p_2 \neq 0,$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}, \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Para testarmos se a variância populacional σ^2 é igual a um valor específico σ_0^2 contra as alternativas usuais, usamos a estatística

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs } \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

n é o tamanho da amostra, s^2 é a variância amostral e σ_0^2 é o valor da variância sob a hipótese nula.

$$\chi^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

Para construir um teste de hipótese para diferença de duas variâncias, usamos a distribuição F, que é dada por

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Com n_1 graus de liberdade no numerador e n_2 graus de liberdade no denominador.

As tabelas referentes a distribuição F estão no apêndice A, A.6.