DERIVADAS PARCIAIS

Funções de uma variável : $y = f(x)$

Exemplos:

- $f(x) = x^2 - 5x$

$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = 2x - 5$

- $g(x) = e^x(\cos x)$

$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \operatorname{sen} x$

Seja $y = f(x)$, sua derivada pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.

A derivada é definida por:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Seja $z = f(x,y)$. Necessitamos de uma definição semelhante que determine a taxa com que z muda quando x e y variam.

O procedimento é é variar apenas uma variável de cada vez, enquanto a outra é mantida constante.

Definição: Sejam $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in D_f$.

A **derivada parcial** de f **em relação a x** no ponto (x_0, y_0) é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Se este limite existir.

Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) é definida por:

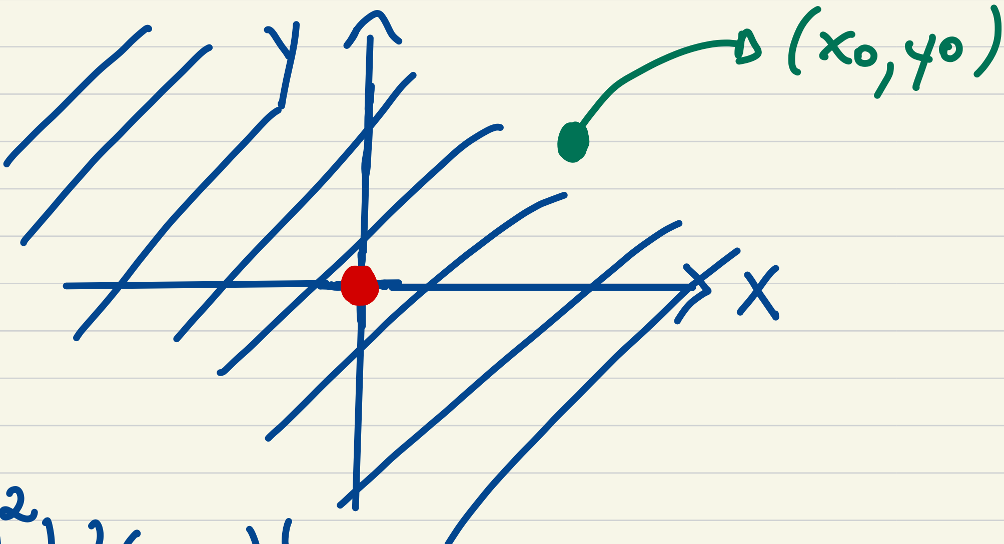
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Se esse limite existir.

Exemplo: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Se $(x,y) \neq (0,0)$



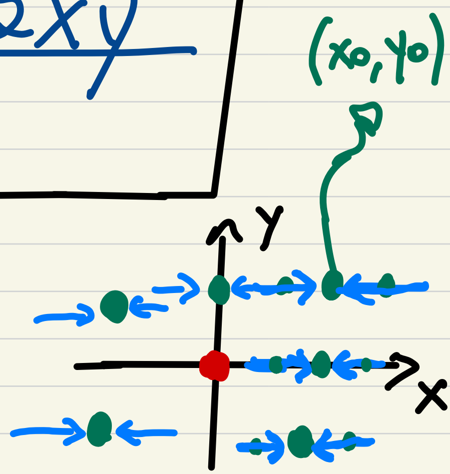
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

I Se $(x,y) \neq (0,0)$

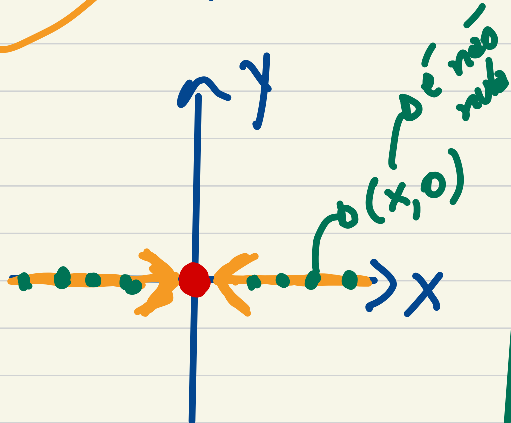
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}\right)' =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2+y^2) - (x^3 - y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$



II Para $(x,y) = (0,0)$



Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f(\Delta x, 0) = \frac{\Delta x^3 + 0^2}{\Delta x^2 + 0^2} = \Delta x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\underset{x_0}{0}, \underset{y_0}{0}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + 0, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

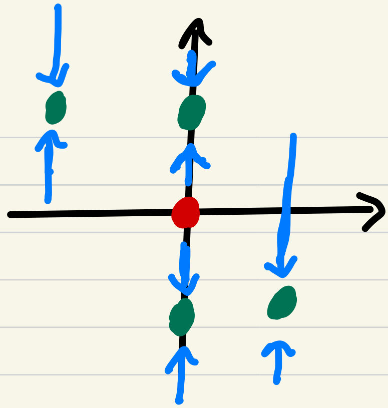
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

↳ Domínio $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2$

III

$$(x,y) \neq (0,0)$$

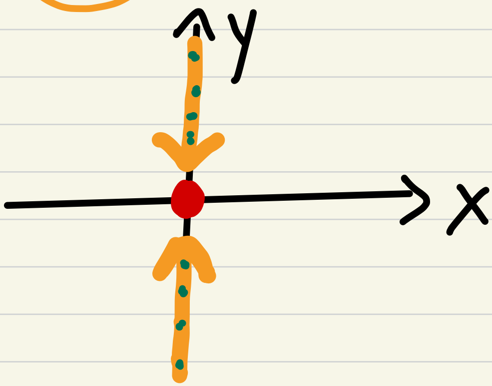


$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}\right)' =$$

$$= \frac{(-2y)(x^2+y^2) - (x^3 - y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= - \frac{2x^2 y (1+x)}{(x^2+y^2)^2}$$

IV $\quad (x,y)=(0,0)$



$(x,y)\neq(0,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, \\ f(0,\Delta y) &= \frac{-(\Delta y)^2}{\Delta y^2} = -1 \end{aligned}}$$

x_0

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

y_0

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\overbrace{f(0,\Delta y)}^{=-1} - 0}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{1}{\Delta y} \quad \nexists$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^2y(1+x)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \nexists, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

A interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis é análoga àquela para função de uma variável real.

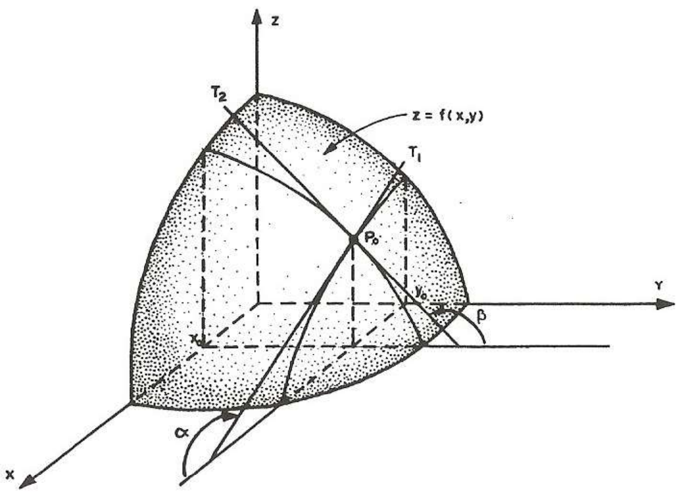
Seja $(x_0, y_0) \in D_f$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Graf(f)$

$z_0 \to f(x_0, y_0)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\,\alpha$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = tg\,\beta$



Observação: Se

$f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

é uma função de 3 variáveis, também podemos definir as derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.