PLANO TANGEN-TE E APROXI-MAÇÃO LINEAR:

PARTE I

Após o estudo das derivadas parciais, estamos em condições de definir diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Seja $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

uma função de duas

variáveis e $(x_0, y_0) \in D_f$:

$f(x_0, y_0)$

Derivadas Parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \left(f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y\right)}$$

↳ por definição essa expressão é o erro

$$E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$$

- $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - (f(x_0, y_0) + a\Delta x + b\Delta y.)$$

- $$\frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

- $\|(\Delta x, \Delta y)\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

$$f(x_0, y_0)$$

Definição: Seja $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\mathcal{U}$ aberto. Dizemos que f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, se existem constantes reais a e b tais que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0.$$

TEOREMA 1: Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) então $z = f(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0).

Lembrando: $P \Rightarrow Q$

$\underbrace{\text{NÃO } Q \Rightarrow \text{NÃO } P}_{\text{contrapositiva}}$

Então, a contrapositiva do TEOREMA 1 é

+00

Se $z = f(x,y)$ não é contínua em (x_0, y_0), então $f(x,y)$ não é diferenciável em (x_0, y_0).

$f(0,0) = 0$

Exemplo: A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(x_0, y_0) = (0,0)$?

I f é contínua em $(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \; ?$$

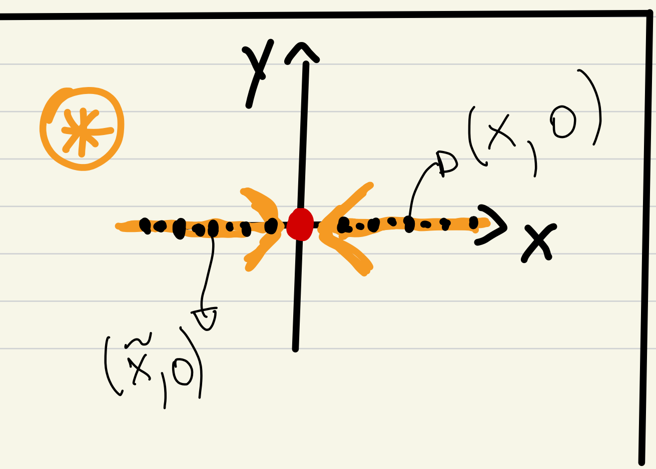
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

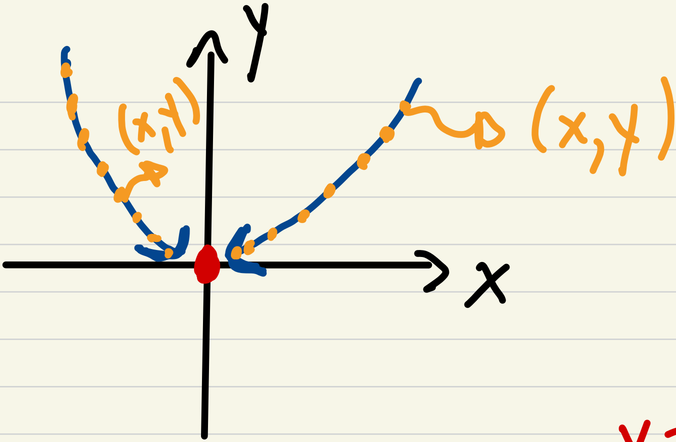
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{*}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \overset{y=0}{=} \lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0} 0 = 0$$





$y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Logo, f não é contínua em $(0,0)$ e consequentemente, f não é diferenciável em $(0,0)$.

TEOREMA 1: Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) então $z = f(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0).

CONTRAPOSITIVA:

Se f não for contínua em (x_0, y_0) então f não é diferenciável em (x_0, y_0).

NÃO EXISTE UMA TERCEIRA AFIRMAÇÃO!

Se f não for diferenciável em (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f não é contínua em (x_0, y_0).

$\hookrightarrow$ FALSO!

Exemplo: A função $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ é diferenciável em $(0,0)$?

- Veremos na próxima aula que não!
- f é contínua em $(0,0)$ pois é produto de funções contínuas

PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR:

PARTE II

- $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - (f(x_0, y_0) + $$
$$+ a\Delta x + b\Delta y.$$

- $$\frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

- $$\|(\Delta x, \Delta y)\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Definição: Seja $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\mathcal{U}$ aberto. Dizemos que f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, se existem constantes reais a e b tais que

$$\boxed{\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0. \qquad \text{I}}$$

TEOREMA 2: Se $z=f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então $z=f(x,y)$ possui derivadas parciais em (x_0,y_0).

⚠ Parte central da demonstração do TEO 2 é mostrar que se $z=f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$ e

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$ são os

únicos números reais para os quais o limite I é nulo.

Exemplo: A função $\boxed{f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}$ é diferenciável em $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot 0^{\frac{1}{3}} - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0^{\frac{1}{3}} \cdot (\Delta y)^{\frac{1}{3}} - 0}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Logo, $a = 0$ e $b = 0$

MAS

- $E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \left(f(x_0, y_0) + a\Delta x + b\Delta y\right.$$

- $(x_0, y_0) = (0,0)$

- $E(\Delta x, \Delta y) = f(\Delta x, \Delta y) -$

$$- \cancelto{0}{f(0,0)} - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y$$

$$= f(\Delta x, \Delta y)$$

$$= (\Delta x)^{1/3} \cdot (\Delta y)^{1/3}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0 \,?$$

$$\frac{E(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{E(\Delta x,\Delta x)}{\|(\Delta x,\Delta x)\|} \qquad \underline{\underline{\Delta y = \Delta x}}$$

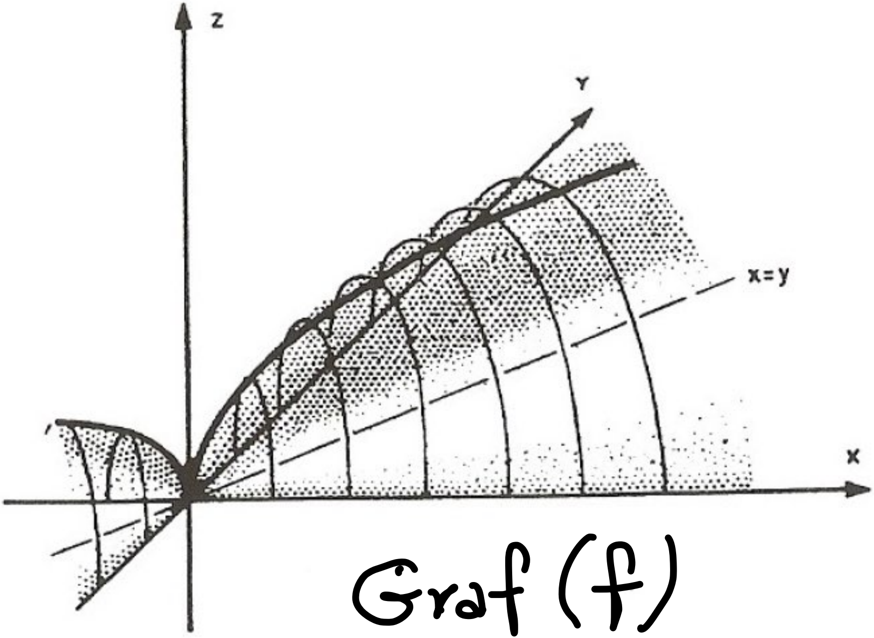
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\left[2(\Delta x)^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|(\Delta x)^{2/3}\right|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}$$

$$(\Delta x)^{2/3} = \sqrt[3]{(\Delta x^2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}\,|\Delta x|^{1/3}} = +\infty$$

Portanto, tal limite não existe e consequentemente $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.



Graf (f)

Observação: A fonte da figura anterior é o Livro: Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis

Autoras: Diomara Pinto
Maria C. F. Morgado

TEOREMA 2: Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então $z = f(x,y)$ possui derivadas parciais em (x_0, y_0).

Como acabamos de ver a "recíproca" do Teorema 2 não é verdadeira!

TEOREMA 3: Sejam $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ aberto em $\mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem numa bola aberta $B_r(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}$ e <u>são contínuas</u> em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (x_0, y_0).

PLANO TANGEN-TE E APROXI-MAÇÃO LINEAR:

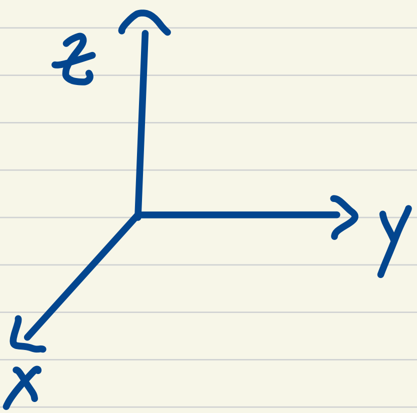
PARTE III

Revisão de G.A

1 Equação Geral do Plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$



Plano yz:

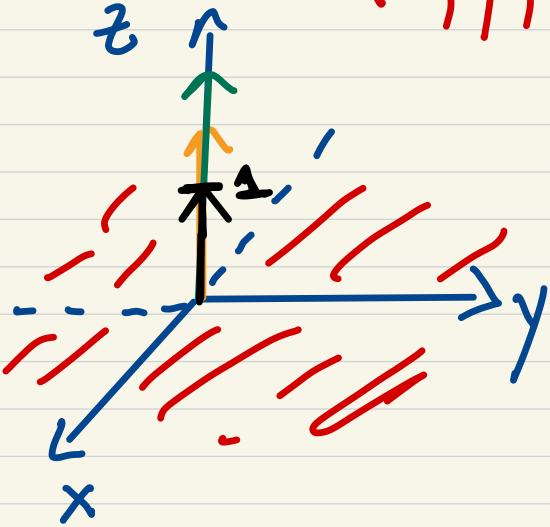
$$x = 0$$

$$a = 1, \quad b = c = d = 0$$

(x, y, z)

$(x, y, 0)$

Plano xy:



$z = 0$

$a = b = d = 0$

$c = 1$

Um vetor perpendicular ao plano xy é:

$(0, 0, 1)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$a \quad b \quad c$

De forma geral:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

é a equação geral de um plano, então o vetor cujas coordenadas são $\boxed{(a, b, c)}$ é perpendicular a tal plano.

2 Produto Escalar

$\vec{u} = (m, n, p)$

$\vec{v} = (q, r, s)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (m, n, p) \cdot (q, r, s)$

$= mq + n \cdot r + p \cdot s$

Definição: Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano de equação

$$\boxed{z = T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \quad \Delta}$$

é chamado plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

$$\boxed{z = T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

Reescrevendo:

$$a x + b y - z + \underbrace{\left(-a x_0 - b y_0 + f(x_0,y_0)\right)}_{\text{constante}} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}}$$

Um vetor normal ao plano tangente é:

$$(a, b, -1)$$

Ou seja, o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é perpendicular à direção do vetor normal

$$N(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

A reta que passa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é paralela ao vetor $N(x_0, y_0)$ é chamada reta normal ao gráfico da função f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, e sua eq. é:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\, N(x_0, y_0) \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Exemplo:

$$z = f(x,y) = +\sqrt{-x^2 - y^2 + 1}$$

Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $P_0 = (0,0,1)$.

$$z = f(x,y) = +\sqrt{-x^2 - y^2 + 1}$$

$$P_0 = (0,0,1) = (0,0,\underbrace{f(0,0)}_{1})$$

- f é diferenciável em $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(-x^2 - y^2 + 1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (-\cancel{2}x) \cdot (-x^2 - y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -x \cdot (-x^2 - y^2 + 1)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{-x^2-y^2+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Além disso, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas

em $(0,0)$.

Logo, pelo TEOREMA 3, temos que f é diferenciável em $(0,0) = (x_0, y_0)$.

Portanto:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\boxed{z = 1}$ $\rightsquigarrow$ $P_0 = (0, 0, 1)$

$$z = f(x,y) = +\sqrt{-x^2-y^2+1}$$

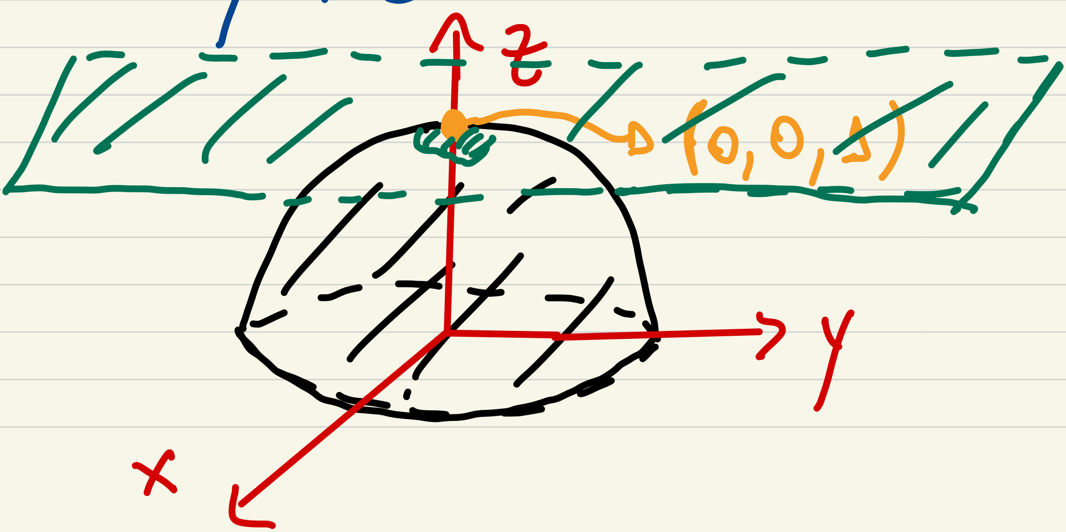
$Df: (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$-x^2-y^2+1 \geq 0$$

$$-x^2-y^2 \geq -1 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

$$z = +\sqrt{-x^2-y^2+1} \iff z^2 = -x^2-y^2+1$$

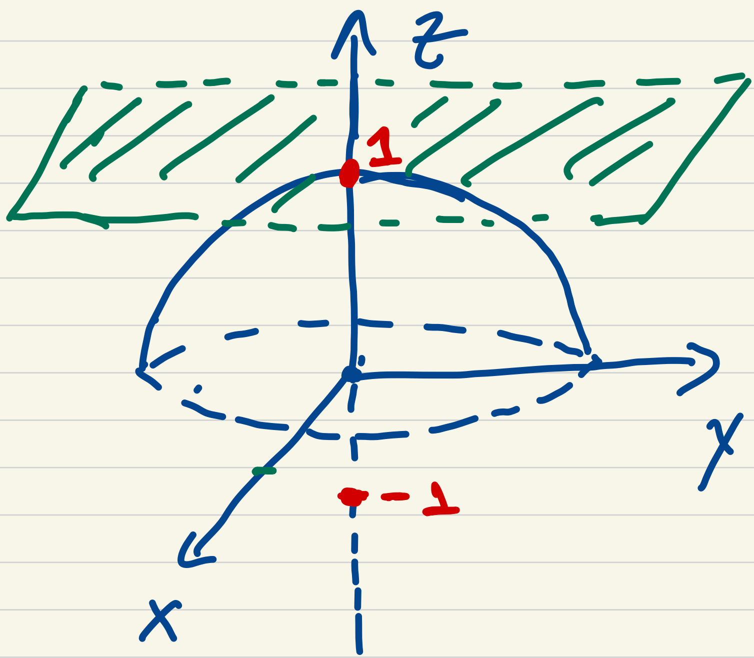
$$\iff x^2+y^2+z^2 = 1$$



Reta normal:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(0, 0, -1)$$

$t \in \mathbb{R}$



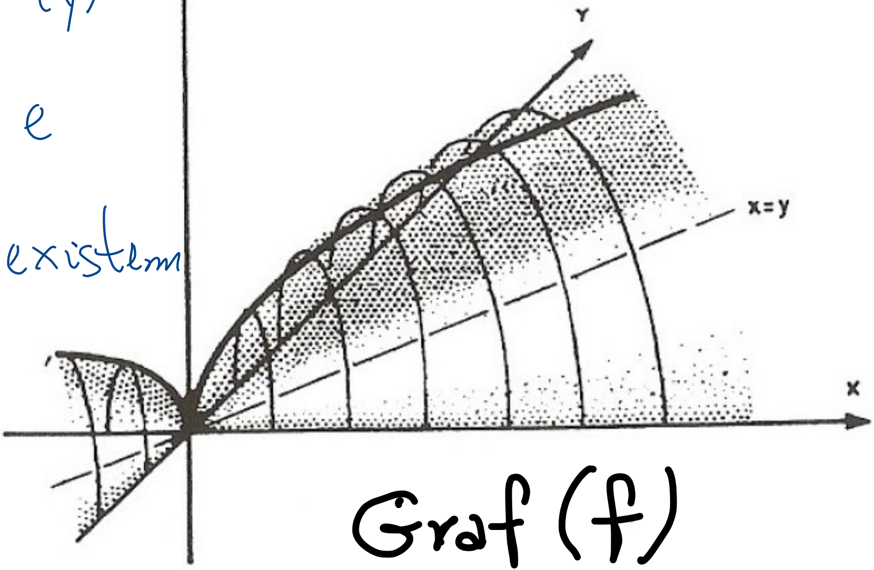
Observação: Definimos o plano tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ apenas no caso em que f é diferenciável em (x_0, y_0).

$f(x,y) = (x)^{\frac{1}{3}} (y)^{\frac{1}{3}}$

Mas f não é dif. em (0,0)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem



Graf(f)