Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

# Circunferências, Elipses, Parábolas e Hipérboles

## Definição, equação reduzida e curva transladada

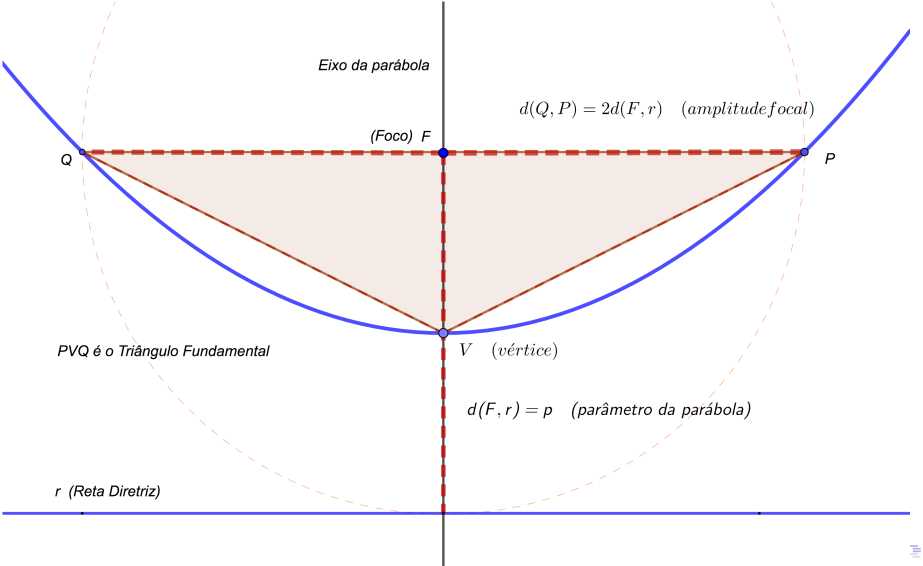
Cláudia Gentile

14 de outubro de 2021

# Parábola

Sejam $r$ uma reta e $F$ um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de $F$ e $r$ chama-se Parábola.

$F$ é o Foco, $r$ é a Reta Diretriz, $d(F, r) = p$ é o parâmetro da parábola. A reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz chama-se Eixo da Parábola, o ponto de intersecção do eixo com a parábola é o Vértice. Uma corda da parábola é qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à ela. A Amplitude Focal da parábola é o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo.


Eixo da parábola
d(Q, P) = 2d(F, r)   (amplitude focal)
(Foco) F
Q
P
PVQ é o Triângulo Fundamental
V   (vértice)
d(F, r) = p   (parâmetro da parábola)
r (Reta Diretriz)

# Equação reduzida da Parábola e translações

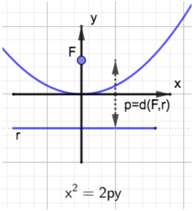
Caso em que a reta diretriz $r$ é paralela ao eixo x, o foco $F$ está sobre o semieixo positivo y, e o vértice é a origem do sistema de coordenadas, e a distância entre $F$ e $r$ é $p$ .

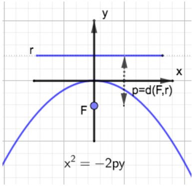
$$\boxed{x^2 = 2py}$$

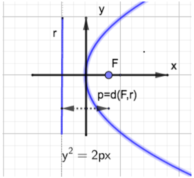
Se a parábola do caso acima for translada de forma que o vértice $V = (v_1, v_2)$ não seja a origem (translação sem rotação, mantendo a concavidade e a direção do eixo de simetria), a equação fica:

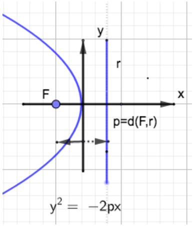
$$\boxed{(x - v_1)^2 = 2p(y - v_2)}$$

# Lembrete de equações reduzidas da parábola:



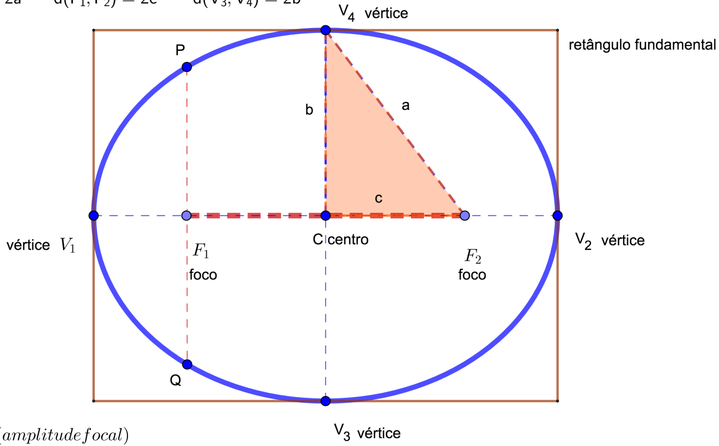
# Elipse

Sejam $F_1$ e $F_2$ dois pontos distintos e tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja $a$ um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico dos pontos $X$ tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ chama-se Elipse.

Os pontos $F_1$ e $F_2$ chamam-se Focos da elipse, o segmento $F_1F_2$ é chamado de Segmento Focal, o ponto médio do segmento focal é chamado de centro da elipse e a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ chama-se distância focal. A reta que contém os focos chama-se reta focal. A reta focal e a reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro da elipse intersectam a elipse em quatro pontos que são denominados Vértices. Qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à elipse chama-se corda. A corda que contém o segmento focal é chamada de Eixo Maior da elipse e a corda perpendicular ao eixo maior que passa pelo centro é chamada de Eixo Menor da elipse. A Amplitude Focal da elipse é a medida de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$\mathrm{d}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = 2\mathrm{a}$ $\quad$ $\mathrm{d}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) = 2\mathrm{c}$ $\quad$ $\mathrm{d}(\mathrm{V}_3, \mathrm{V}_4) = 2\mathrm{b}$

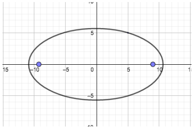



$d(P,Q) \quad (amplitude focal)$

# Equação reduzida da Elipse e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo x e o centro é a origem . $(a > b)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



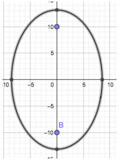
Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo x e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem . $(a > b)$

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

# Equação reduzida da Elipse e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo y e o centro é a origem . $(a > b)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$




Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo y e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem . $(a > b)$

$$\frac{(x - c_1)^2}{b^2} + \frac{(y - c_2)^2}{a^2} = 1$$

# Observação sobre Circunferência

A circunferência de centro na origem e raio $r$ tem equação da forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

A circunferência de centro $C = (c_1, c_2)$ e raio $r$ tem equação da forma

$$\frac{(x - c_1)^2}{r^2} + \frac{((y - c_2)^2}{r^2} = 1$$

# Excentricidade

A razão $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ é denominada excentricidade da elipse e é sempre menor do que 1. Existem duas retas paralelas (ambas perpendiculares ao eixo focal) que são as retas diretrizes da elipse. A razão da distância de um ponto $P$ da elipse a um dos focos pela distância de $P$ à reta diretriz mais próxima deste foco é a excentricidade $e$.

Além disso, $\boxed{e = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}}$, onde $\alpha$ é o ângulo entre uma geratriz e o eixo do cone e $\beta$ é o ângulo entre o plano que secciona o cone com o eixo do cone.

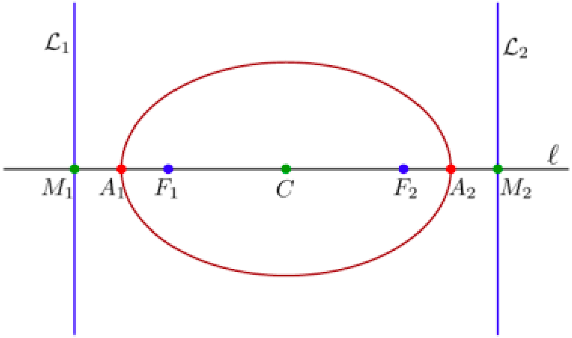



Fig. 1: Focos, vértices e diretrizes da elipse.

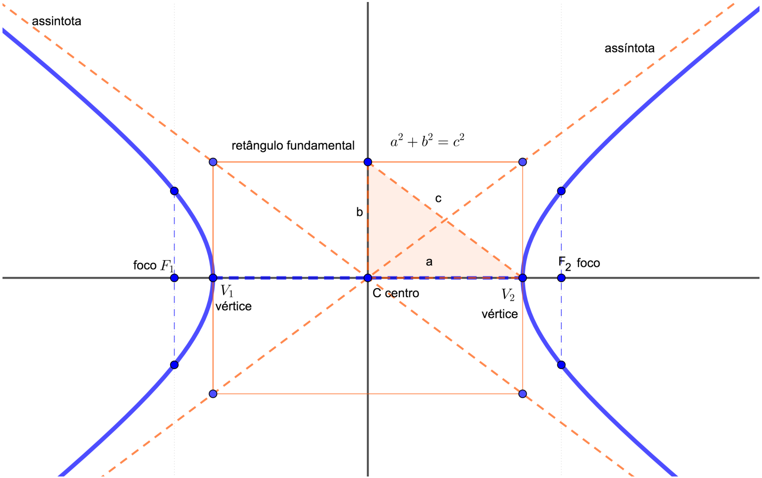
$$\boxed{\frac{d(P,F_1)}{d(P,\mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P,F_2)}{d(P,\mathcal{L}_2)}}$$

# Hipérbole

Sejam $F_1$ e $F_2$ dois pontos distintos e tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja $a$ um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico dos pontos $X$ tais que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ chama-se Hipérbole.

Cada um dos pontos $F_1$ e $F_2$ chama-se Foco da hipérbole, o segmento $F_1F_2$ é chamado de Segmento Focal, o ponto médio do segmento focal é chamado de centro da hipérbole e a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ chama-se distância focal. A reta que contém os focos chama-se reta focal. A reta focal intersecta a hipérbole em dois pontos que são denominados Vértices.

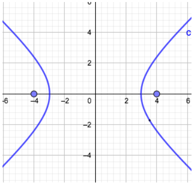
Qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à hipérbole chama-se corda. A corda que une os dois vértices é chamada de Eixo Transverso (ou eixo real). A Amplitude Focal da hipérbole é a medida de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal. O segmento perpendicular ao eixo transverso, com ponto médio no centro da hipérbole medindo $2b$, é denominado Eixo Conjugado (ou eixo imaginário).


assintota
assíntota
retângulo fundamental
$a^2 + b^2 = c^2$
c
b
a
foco $F_1$
$F_2$ foco
$V_1$
vértice
C centro
$V_2$
vértice

# Equação reduzida da Hipérbole e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo x e o centro é a origem.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



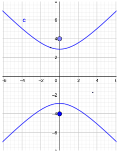

Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo x e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

# Equação reduzida da Hipérbole e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo y e o centro é a origem.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo y e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem:

$$\frac{(y - c_2)^2}{a^2} - \frac{(x - c_1)^2}{b^2} = 1$$

# Excentricidade

A razão $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ é denominada excentricidade da hipérbole e é sempre maior do que 1. Existem duas retas paralelas (ambas perpendiculares ao eixo focal) que são as retas diretrizes da hipérbole. A razão da distância de um ponto $P$ da hipérbole a um dos focos pela distância de $P$ à reta diretriz mais próxima deste foco é a excentricidade $e$.

Além disso, $\boxed{e = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}}$, onde $\alpha$ é o ângulo entre uma geratriz e o eixo do cone e $\beta$ é o ângulo entre o plano que secciona o cone com o eixo do cone.

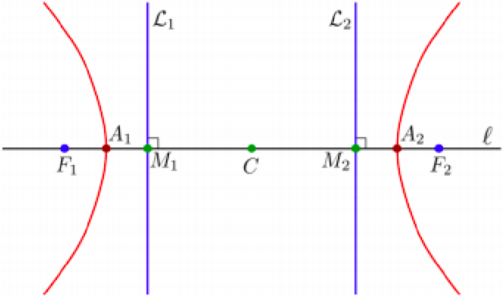
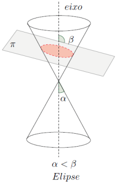
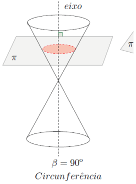
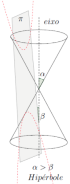
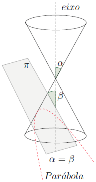



Fig. 4: Focos, vértices e diretrizes da hipérbole.

$$\boxed{\frac{d(P,F_1)}{d(P,\mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P,F_2)}{d(P,\mathcal{L}_2)}}$$

excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{cos\beta}{cos\alpha}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| elipse | $0 < e < 1$ |  | circunferência | $e = 0$ |  |
| hipérbole | $1 < e$ |  | Parábola | $e = 1$ |  |