08/10 - Aula 22 - Aula de Exercícios

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x$

Não funciona a $\boxed{\dfrac{3x+1}{2x+3} = 1 + \dfrac{1}{y}}$

Fato 1: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1$ já provado em sala de aula

Fato 2: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \ \forall a\in\mathbb{R}$

prova do fato 2: seja $\dfrac{a}{x} = \dfrac{1}{u} \Rightarrow \boxed{x = au}$

Caso 1: $a>0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{u\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{au} = \lim_{u\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^a = e^a$

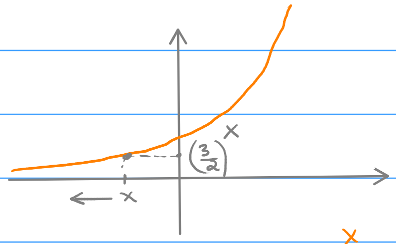
Caso 2: $\underline{a<0} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^a = e^a$

Logo,

$3x+1 = 3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 3(x+a)$

$$\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x = \left(\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}\right)^x = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^x}_{\to 0}\cdot\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x \quad \text{com } \boxed{a=\frac{1}{3}} \text{ e } \boxed{b=\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{x+a}{x}\right)^x}{\left(\frac{x+b}{x}\right)^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{b}{x}\right)^x}$$



$f(x) = a^x, \ a>1$

$\Downarrow$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

Logo,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{2x+3}\right)^x = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x}_{=0}\cdot\frac{\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}^{\text{usar o fato 2}}}{\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x}_{\text{usar o fato 2:}}} = 0\cdot\frac{e^a}{\underbrace{e^b}_{\neq 0}} = 0$$

$\square$

Ex: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+2}{4x+7}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}\right)^x = 0\ \frac{e^a}{e^b} = 0$

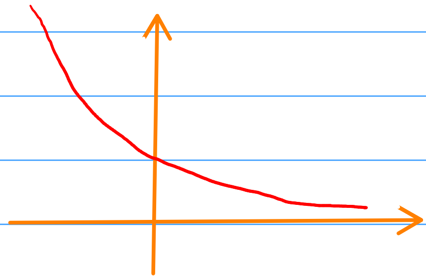
$\frac{5}{4}>1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = 0$; $\quad a=\frac{2}{5}$ e $b=\frac{7}{4}$

Fato: Seja $a > 1$ então $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

x	a^x
-1	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
-2	$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
-10	$a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}$
-1000	$a^{-1000} = \frac{1}{a^{1000}}$

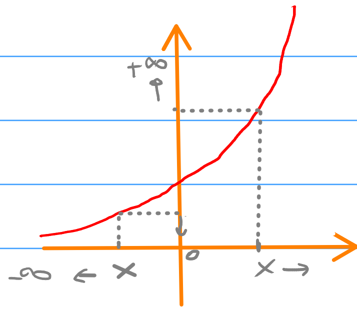
$\downarrow$ $-\infty$ $\qquad$ $\downarrow$ 0

$$a = 2 \Rightarrow \{a^x\} = \{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-10}, 2^{-1000}\}$$
$$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^{10}}, \frac{1}{2^{1000}}, \dots\right\}$$



$f(x) = a^x$

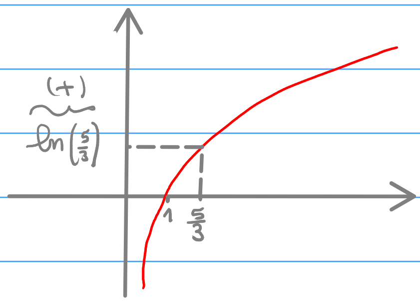
$0 < a < 1$

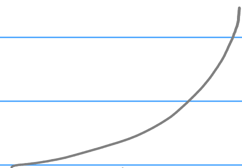


$f(x) = a^x$

$a > 1$

$$a = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\left(\frac{5}{3}\right)^x}_{(+)} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}_{(+)} \Rightarrow$$





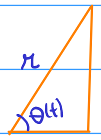
$f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ é crescente

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 0$$

$$\left(\frac{5x+2}{4x+7}\right)^x = \left[\frac{5\left(x+\frac{2}{5}\right)}{4\left(x+\frac{7}{4}\right)}\right]^x = \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \left[\frac{\frac{x+2/5}{x}}{\frac{x+7/4}{x}}\right]^x$$

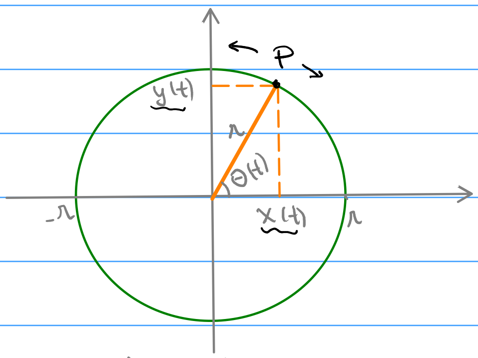
$$= \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \frac{\left(1+\frac{2/5}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{7/4}{x}\right)^x} \longrightarrow 0 \cdot \frac{e^{2/5}}{e^{7/4}} = 0.$$

4. Um ponto móvel desloca-se, em um sistema de coordenadas cartesianas, ao longo da circunferência $x^2+y^2=r^2$ (r constante) com uma velocidade cuja componente em x é dada por $\boxed{\frac{dx}{dt}=y\,(\text{cm/seg})}$. Calcule a componente da velocidade em y, $\frac{dy}{dt}$. Seja θ o deslocamento angular desse ponto móvel, medido a partir do ponto $(1,0)$ no sentido anti-horário. Calcule a velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$. Em que sentido o ponto se desloca sobre a circunferência, no sentido horário ou no anti-horário? *Respostas*. $\frac{dy}{dt}=-x$, $\frac{d\theta}{dt}=-1$ (rad/seg), portanto o ponto se desloca no sentido anti-horário.



$\operatorname{sen}\theta(t)=\frac{y(t)}{r}$

$\cos\theta(t)=\frac{x(t)}{r}$



$x(t)^2+y(t)^2=r^2$

$\operatorname{tg}\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$

$\frac{d\theta}{dt}=\,?$

$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d\theta}{dt}$

hip: $\frac{dx}{dt}=y$

Parte 1: $\frac{dy}{dt}=-x$;

Parte 2: $\frac{d\theta}{dt}=-1$

Para o calculo de $\frac{dy}{dt}$ vamos derivar a eq. $x(t)^2+y(t)^2=r^2$

para obter $2x(t)\,x'(t)+2y(t)\,y'(t)=0 \Rightarrow$

$$y'(t)=-\frac{x(t)\,x'(t)}{y(t)}$$

Como $x'(t)=y(t)$ temos que $y'(t)=\frac{-x(t)\cancel{y(t)}}{\cancel{y(t)}} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt}=-x}$

$\Downarrow$

$y'(t)=-x(t)$

Para o cálculo de $\frac{d\theta}{dt}$ considere a igualdade

$$\operatorname{sen}\theta(t)=\frac{y(t)}{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}[\operatorname{sen}\theta(t)]=\frac{d}{dt}\left[\frac{y(t)}{r}\right] \Rightarrow$$

$$\cancel{\cos\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)}{r}\overset{*}{=}-\frac{x(t)}{r}=-\cancel{\cos\theta(t)} \Rightarrow \boxed{\theta'(t)=-1}$$

Logo, $\frac{d\theta}{dt}=-1$ (rad/seg)

$$(\operatorname{sen}\theta(t))'=\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta(t))=\operatorname{sen}'\theta(t)\cdot\theta'(t)=\cos\theta(t)\cdot\theta'(t)$$

$$(\operatorname{tg}\theta(t))'=\sec^2\theta(t)\cdot\theta'(t).$$

$$f(x) = g(x)^{x} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{g(x)^{x} . \ln g(x)}_{g(x)\ \text{const.}} + \underbrace{x . g(x)^{x-1} . g'(x)}_{x\ \text{constante}}$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} . \ln a$$

$$\left(x^{a}\right)' = a\, x^{a-1}$$

$$\operatorname{sen} \theta(t) = \frac{y(t)}{r} \Rightarrow \cos\theta(t) . \theta'(t) = \frac{y'(t)}{r} \Rightarrow$$

Pela Parte 1, $y'(t) = -x(t) \Leftrightarrow y' = -x$

$$\cos\theta(t) . \theta'(t) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta \Rightarrow \cancel{\cos\theta} . \theta'(t) = -\cancel{\cos}\,\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\theta'(t) = -1$$

Limit

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{2}\cancel{i\left(-i+\sqrt{3}\right)}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Seja $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ note que

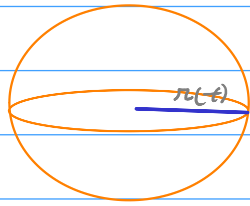
$f(-1) = \dfrac{2(-1)+3}{(-1)+\sqrt[3]{-1}} = \dfrac{1}{-1-1} = -\dfrac{1}{2}$. Como $f(x)$ é contínua $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ temos

$$\lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}}_{f(x)} = f(-1) = -\frac{1}{2}$$

□

2. O gás de um balão esférico escapa à razão de $\boxed{2\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{min}.}$ Mostre que a taxa de variação da superfície S do balão, em relação ao tempo, é inversamente proporcional ao raio. *Dado.* A superfície de um balão de raio r tem área $S = 4\pi r^2$.



$S(r) = 4\pi r^2$

$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = S(r)$

$\Rightarrow V(r(t)) = \dfrac{4\pi r^3(t)}{3} \Rightarrow$

$$\begin{cases} S(r) = 4\pi r^2 \\ V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3} \end{cases}$$

$(*)\quad \dfrac{d}{dt}\{V(r(t))\} = \boxed{4\pi r^2(t) \cdot \dfrac{dr}{dt} = -2\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{min}}$

$\Rightarrow 2\pi r^2 \dfrac{dr}{dt} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{-1}{2\pi r^2}}$

$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{d}{dt}\{S(r(t))\} = \dfrac{d}{dt}\{4\pi r(t)^2\} = 8\pi r(t) \cdot \dfrac{dr}{dt} \Rightarrow$

$\dfrac{dS}{dt} = \overset{4}{\cancel{8}}\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \dfrac{(-1)}{\cancel{2\pi} r^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{-4}{r}}$

$S(t)$ é decrescente com o tempo $\Rightarrow \dfrac{dS}{dt} < 0$

□

ATENÇÃO: Quando a resposta não for um número inteiro, digite o número em representação decimal com pelo menos três casas após a vírgula. Por exemplo, 12,345 ou -1,234.

Sejam $f, g, F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quatro funções. Responda cada um dos itens abaixo. Para cada resposta, use representação decimal com apenas uma casa depois da vírgula.

a) Se $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-3}{x-3} = 4$ então, $\lim_{x\to 3} f(x) =$ ☐

b) Se $\lim_{x\to 3} \frac{g(x)-3}{x-3} = 5$ então, $\lim_{x\to 3} g(x) =$ ☐

c) Se $\lim_{x\to -1} \frac{F(x)}{x^2} = 4$ então, $\lim_{x\to -1} F(x) =$ ☐

d) Se $\lim_{x\to -1} \frac{G(x)}{x^2} = 4$ então, $\lim_{x\to -1} \frac{G(x)}{x} =$ ☐

a) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (f(x)-3+3) = \lim_{x\to 3} \frac{[(f(x)-3)+3](x-3)}{x-3}$

$= \lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-3}{x-3}\cdot(x-3) + 3\right] =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-3}{x-3} \cdot \lim_{x\to 3}(x-3) + 3$

$= 4 \cdot 0 + 3 = 3$ ☐

$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-3}{x-3} - 4$, por hipótese $\boxed{\lim_{x\to 3} \varepsilon(x) = 0}$

$\Downarrow$

$\frac{f(x)-3}{x-3} = \varepsilon(x) + 4 \Rightarrow f(x) = 3 + (\varepsilon(x)+4)(x-3) \Rightarrow$

$\lim_{x\to 3} f(x) = 3 + \lim_{x\to 3}(\varepsilon(x)+4) \cdot \lim_{x\to 3}(x-3)$

$= 3 + (0+4)\cdot 0 = 3$ ☐

$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x) \neq 0}$

$\lim_{x\to a} c = c$

Sejam x e y funções deriváveis de t e seja $s = \sqrt{x^2+y^2}$ a distância entre os pontos $(x,0)$ e $(0,y)$ no plano xy.

Como $\frac{ds}{dt}$ está relacionada a $\frac{dx}{dt}$ se y é constante?

- $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$
- $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$
- $-\frac{x}{y}\frac{dy}{dt}$
- $-\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$
- $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$
- $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$

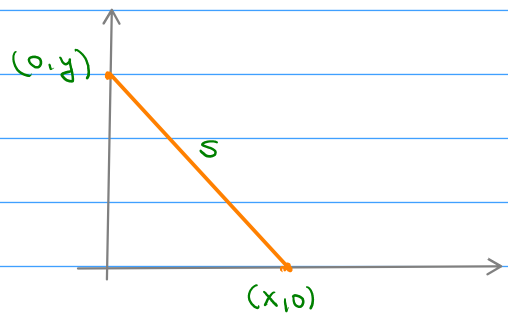
$$S(t)^2 = x(t)^2 + y^2$$

$$2S(t)S'(t) = 2x(t)x'(t)$$

$$S'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{S(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}}$$



L'Hopital: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)} + h(x)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} + \lim_{x\to a}h(x) = \beta + \alpha$$

(1°) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\underbrace{g(x)}_{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta \in \mathbb{R}$

(2°) $\lim_{x\to a}h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{50}(x-i)^2 = \sum_{i=1}^{50}\frac{d}{dx}\left[(x-i)^2\right]$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{N}f_i(x) = \frac{d}{dx}\left[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_N(x)\right]$$

$$= \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx} + \dots + \frac{df_N}{dx} = \sum\frac{df_i}{dx}$$