UNIDADE V

Aula 26 - Extremos de funções de duas variáveis: máximos e mínimos

Prof. Alex Carlucci Rezende

Cálculo Diferencial e Séries

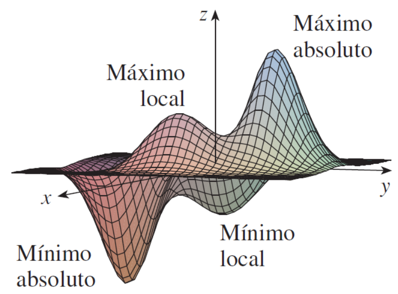
Período ENPE - Bloco C - 2020/1

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

Introdução

No curso de Cálculo 1 vimos que um dos principais usos da **derivada ordinária** é a determinação de máximo e mínimo (valores extremos).

Aqui, veremos como usar as **derivadas parciais** para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis.



Fonte: J. Stewart. Cálculo, v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Definição: extremos locais

Definição: Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b).

Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ *para todos os pontos* (x, y) *em alguma bola aberta com centro* (a, b).

O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**.

Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Observação: Se as inequações da Definição anterior valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

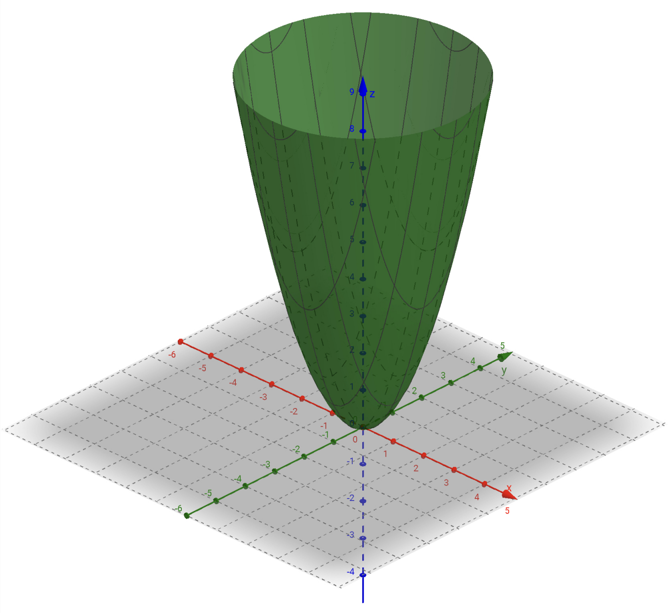
Exemplo 1: Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Observe que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0).$$

Dessa forma, o ponto $(0, 0)$ é um mínimo global da função f.

Definição: extremos locais



Definição: extremos locais

Calculemos as derivadas parciais de f:

$$f_x(x, y) = 2x \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 2y,$$

e aplicando no ponto $(0, 0)$:

$$f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0).$$

Será que é uma coincidência as derivadas parciais da função f se anularem no ponto de mínimo local (global) $(0, 0)$?

Caracterização para pontos extremos

Teorema: Se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesse ponto, então

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Notemos que, se impusermos $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ na equação do plano tangente, obteremos $z = z_0$ constante.

Assim, a interpretação geométrica desse Teorema é que, se o gráfico de f tem um plano tangente em um máximo ou mínimo local, então esse plano tangente deve ser horizontal (paralelo ao plano-xy).

Pontos críticos

Definição: Um ponto (a, b) é chamado **ponto crítico** (ou **ponto estacionário**) de f se $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir.

Observação: O Teorema anterior diz que se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f.

No entanto, nem todos os pontos críticos originam máximos ou mínimos. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local, ou ainda nenhum dos dois.

Exemplo 2

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 2y - 6.$$

Os pontos críticos de f são dados por

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 &\Rightarrow 2x - 2 = 2y - 6 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 3. \end{aligned}$$

O ponto $(1, 3)$ é máximo ou mínimo? Vamos completar quadrados:

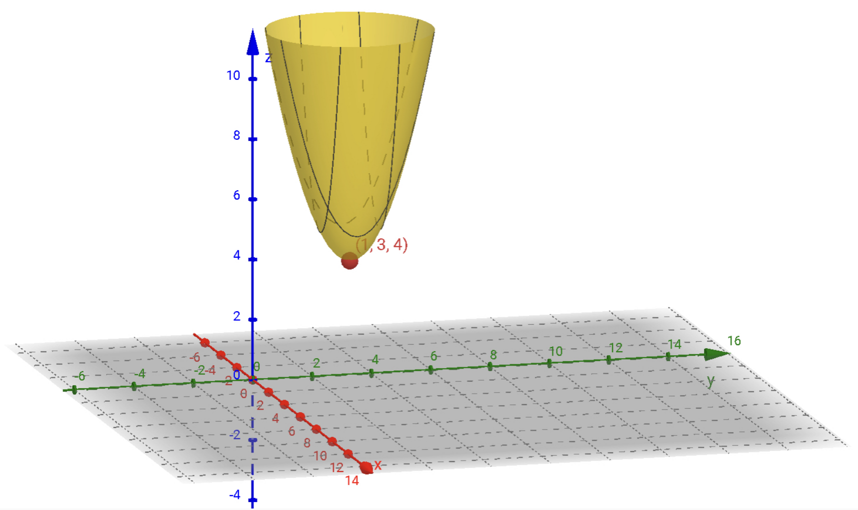
Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 \\
&= x^2 - 2x{\color{red}+1} + y^2 - 6y{\color{blue}+9} + 14{\color{red}-1}{\color{blue}-9} \\
&= (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4.
\end{aligned}
$$

Como $(x-1)^2 \geq 0$ e $(y-3)^2 \geq 0$, temos $f(x,y) \geq 4$, para todos os valores de x e y.

Logo, $f(1,3) = 4$ é um mínimo local (na verdade, é mínimo global/absoluto) de f.

Exemplo 2



Exemplo 3

Determine os valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Como

$$f_x(x, y) = -2x \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 2y,$$

o único ponto crítico é $(0, 0)$.

Observe que:

- para os pontos sobre o eixo-x, temos $y = 0$ e, portanto, $f(x, y) = -x^2 < 0$, se $x \neq 0$;
- para os pontos sobre o eixo-y, temos $x = 0$ e, portanto, $f(x, y) = y^2 > 0$, se $y \neq 0$.

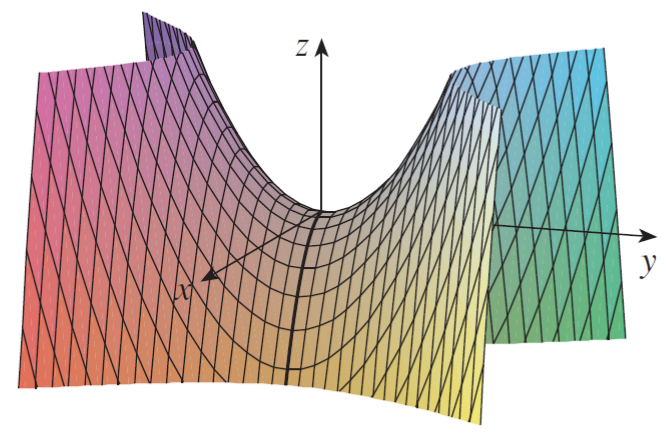
Exemplo 3

Logo, existem pontos (x, y) próximo de $(0, 0)$ tais que

$$\text{ou } f(x, y) < 0, \quad \text{ou } f(x, y) > 0.$$

Então, $f(0, 0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f. Portanto, f não tem valor extremo.

Exemplo 3



Fonte: J. Stewart. Cálculo, v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Teste da Derivada Segunda

Teorema: Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b), e suponha que $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ (ou seja, (a, b) é um ponto crítico de f. Seja

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

Então:

(a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(a, b) < 0$, então $f(a, b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a, b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Observação:

(i) No caso (c) o ponto (a, b) é chamado **ponto de sela** de f e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a, b).

(ii) Se $D = 0$, o Teorema não dá nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou mínimo local em (a, b), ou (a, b) pode ser um ponto de sela de f.

(iii) Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2,$$

que é chamado de determinante **Hessiano** da função f.

Exemplo 4

Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Localizamos os pontos críticos:

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 4y^3 - 4x = 0.$$

Fazendo $y = x^3$ na segunda equação, obtemos:

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1),$$

e temos três raízes reais: $x = 0, 1, -1$. O pontos críticos são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

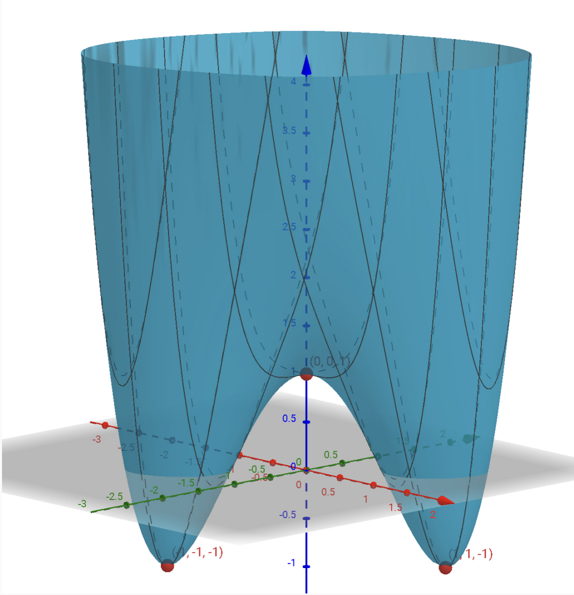
Exemplo 4

Calculando as segundas derivadas parciais e $D(x, y)$:

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = -4, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2,$$
$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16.$$

- $D(0, 0) = -16 < 0$. Pelo Teste da Derivada Segunda, a origem é um ponto de sela.
- $D(1, 1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$. Pelo Teste da Derivada Segunda, $(1, 1)$ é um mínimo local.
- $D(-1, -1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$. Pelo Teste da Derivada Segunda, $(-1, -1)$ também é um mínimo local.

Exemplo 4



Definição: Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ é **fechado** se seu completar é aberto.

Um conjunto fechado contém todos os seus pontos de fronteira. Por exemplo, o disco

$$D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$$

constituído de todos os pontos sobre e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto fechado porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$).

Definições

Definição: Um **conjunto limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em alguma bola aberta.

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é dito **compacto** se ele é fechado e limitado.

Teorema (Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis): Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Teorema do Valor Extremo para as Funções de Duas Variáveis

Roteiro para determinar os máximos e mínimos absolutos de uma função f sobre conjuntos compactos D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplo 5

Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função
$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo
$D = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$.

Como f é um polinômio, é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto o Teorema anterior nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto.

Passo 1. Calcular os pontos críticos:

$f_x = 2x - 2y = 0,\ f_y = -2x + 2 = 0 \ \Rightarrow\ (1,1)$ único ponto crítico,

com $f(1,1) = 1$.

Exemplo 5

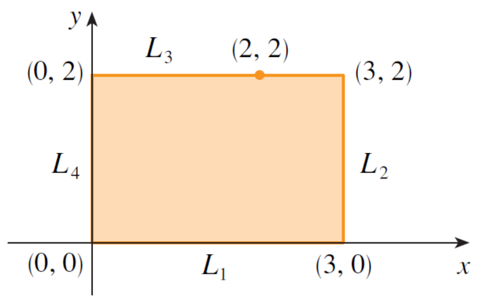
Passo 2. Olhamos para os valores de f na fronteira de D.

L_1: $y = 0,\ 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow$
$f(x, 0) = x^2$

L_2: $x = 3,\ 0 \leq y \leq 2 \Rightarrow$
$f(3, y) = 9 - 4y$

L_3: $y = 2,\ 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow$
$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4$

L_4: $x = 0,\ 0 \leq y \leq 2 \Rightarrow$
$f(0, y) = 2y$



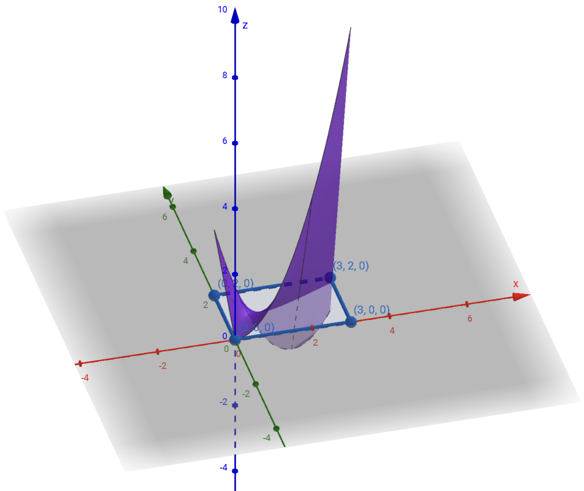
Exemplo 5

- Em L_1: $f(x,0) = x^2$ é uma função crescente, com valor mínimo $f(0,0) = 0$ e valor máximo $f(3,0) = 9$.
- Em L_2: $f(3,y) = 9 - 4y$ é uma função decrescente, com valor mínimo $f(3,2) = 1$ e valor máximo $f(3,0) = 9$.
- Em L_3: $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ tem valor mínimo $f(2,2) = 0$ e valor máximo $f(0,2) = 4$.
- Em L_4: $f(0,y) = 2y$ é uma função crescente, com valor mínimo $f(0,0) = 0$ e valor máximo $f(0,2) = 4$.

Observamos que, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

Exemplo 5

Passo 3. Comparamos esses valores com $f(1,1) = 1$ no ponto crítico e concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = f(2,2) = 0$.



Referência

Para esta aula, usamos a seguinte referência:

J. Stewart. Cálculo, v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.