Notas sobre mudança de coordenadas

Olimpio Hiroshi Miyagaki
Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos
São Carlos, SP, CEP:13565-905, Brazil
olimpio@ufscar.br

UFSCAR- 2021[1]

 Texto baseados nos textos

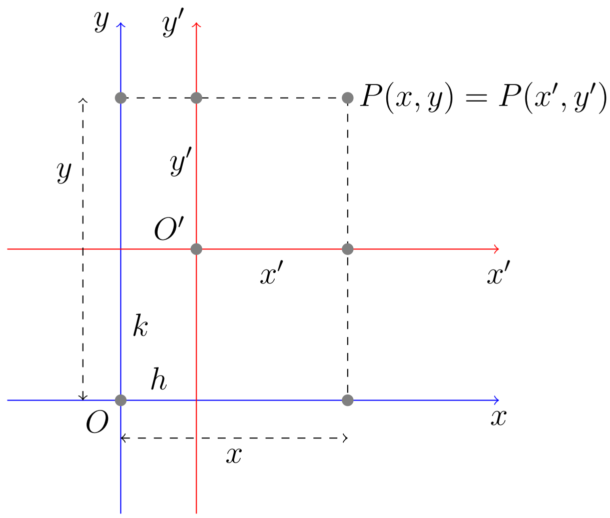
1. Paulo Boulos, Geometria analítica – Um tratamento vetorial, Mc Graw Hill 1986.
2. K.Frensel e J. Delgado, notas IM-UFF – www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/aula21.pdf- 20/04/2021
3. Reginaldo J. Santos, Matrizes vetores e Geometria analıtica, UFMG, 2010, disponivel em: www.mat.ufmg.br/- regi

O objetivo é apresentar alguns procedimentos de mudança de coordenadas para simplificar uma equação geral das cônicas.

1 Translação dos eixos coordenados

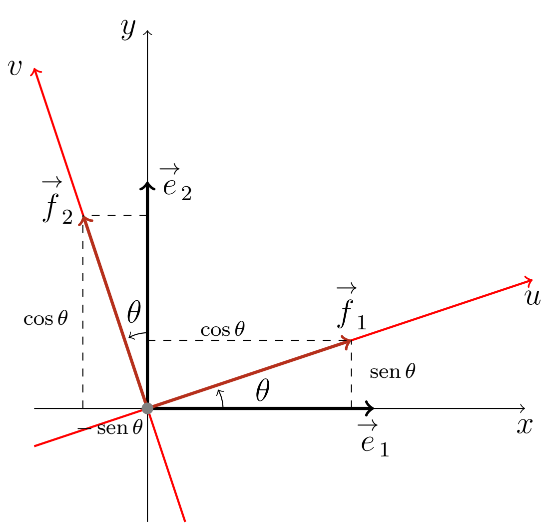
Considere a origem $O(0,0)$ origem no sistema Oxy, e um novo sistema de origem $O'(h,k)$, cujo eixos $O'x'$ e $O'y'$ são paralelos aos eixos originais. Seja $P(x,y) = P(x',y')$ um ponto nas coordenadas x e y, e nas novas coordenadas x' e y'. Temos a formula de translação

$$\begin{array}{lcl} x = x' + h & \text{e} & y = y' + k \\ x' = x - h & \text{e} & y' = y - k \end{array} \tag{1}$$



2 Rotação dos eixos coordenados

Seja θ a medida do ângulo de rotação (considerado "positivo" sempre o sentido anti-horário) que transforma o sistema Oxy, ou seja, $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, no sistema Ouv), ou seja, $(0, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$.



Considere $\vec{e}_1 = \vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = \vec{j} = (0, 1)$, e escolha $\| \vec{f}_1 \| = \| \vec{f}_2 \| = 1$.

Então, como cada vetor $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ é a soma de suas projeções sobre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$,

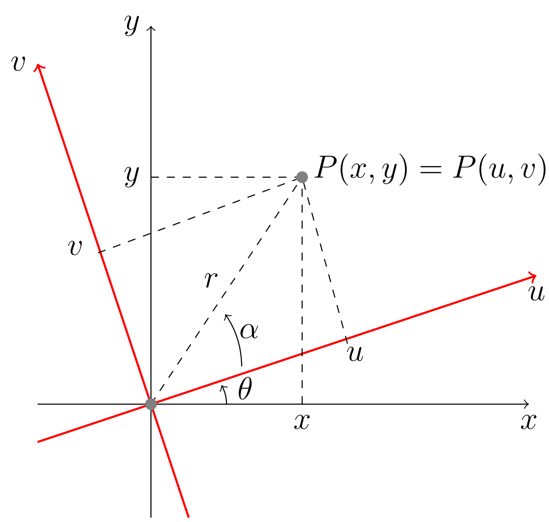
$$\begin{array}{l} \vec{f}_1 = \cos\theta\ \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\ \vec{e}_2 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ \vec{f}_2 = -\operatorname{sen}\theta\ \vec{e}_1 + \cos\theta\ \vec{e}_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \end{array} \tag{2}$$

Um ponto P de coordenadas (x, y) no sistema Oxy, no novo sistema Ouv terá as coordenadas (u, v), dadas por

$$\begin{array}{l} u = (\cos\theta)x + (\operatorname{sen}\theta)y \\ v = -(\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y \end{array} \tag{3}$$

Manipulando o sistema temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (\cos\theta)u - (\operatorname{sen}\theta)v \\ y = (\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v. \end{array} \right. \tag{4}$$



De fato,

$$\left\{ \begin{array}{l} u = r\cos\alpha \\ v = r\operatorname{sen}\alpha \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = r(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta) \end{array} \right. .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos\theta\ u - \operatorname{sen}\theta\ v \\ y = \operatorname{sen}\theta\ u + \cos\theta\ v \end{array} \right.$$

Manipulando o sistema temos

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \cos\theta\ x + \operatorname{sen}\theta\ y \\ v = -\operatorname{sen}\theta\ x + \cos\theta\ y \end{array} \right.$$

Na notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (A = R_\theta \overline{A})$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (\overline{A} = R_{-\theta}A, R_\theta^{-1} = R_{-\theta})$$

2.1 Exemplos

1. No sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ no plano, considere o ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$. Determine uma rotação de eixos de modo que as novas coordenadas de P sejam $(\sqrt{3}, -1)$.

Resolução Aqui $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ e $(u, v) = (\sqrt{3}, -1)$, de (3)

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \\ -1 = -\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta. \end{cases}$$

Multicando-se a primeira equação por $\sqrt{3}$, vem

$$\begin{cases} 3 = 3\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ -1 = -\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta. \end{cases}$$

Portanto, somando membro a membro obtemos $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Ou seja, tomemos $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2. Faça uma rotação no plano de modo que a reta $x + y - 1 = 0$ fique paralela ao novo eixo das ordenadas.

Resolução De (4) vem

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\ u - \operatorname{sen}\theta\ v \\ y &= \operatorname{sen}\theta\ u + \cos\theta\ v \end{aligned}$$

Substituindo na expressão $x + y - 1 = 0$, temos

$$(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)v - 1 = 0.$$

Para que seja paralela ao eixo das ordenadas, devemos impor que $v = 0$. Donde

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \iff \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

Escolha $\theta = \frac{\pi}{4}$. Portanto, no novo sistema de coordenadas, a equação da reta fica

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})u = 1 \iff u = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Seja C circunferência dada por $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, no sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Mostre que C, em qualquer sistema obtido por rotação de eixos tem a equação $u^2 + v^2 = r^2$.

Resolução Da relação

$$\begin{aligned} u &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ v &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned},$$

segue-se trivialmente, que

$$u^2 + v^2 = r^2.$$

3 O estudo da equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ no plano. O objetivo é simplificar a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{5}$$

eliminando os termos de 1º grau e o termo misto de 2º grau.

3.1 Eliminar, por meio de uma translação, os termos de 1º grau.

Consiste em encontrar o ponto (h, k), fazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k, \end{cases} \tag{6}$$

para o qual se deve transladar o sistema de coordenadas de modo que a equação (5) se transforme numa equação sem os termos de 1º grau, da forma

$$\overline{A}u^2 + \overline{B}uv + \overline{C}v^2 + \overline{F} = 0 \tag{7}$$

Substituindo (6) em (5) , temos

$$A(u+h)^2 + B(u+h)(v+k) + C(v+k)^2 + D(u+h)x + Ey(v+k) + F = 0.$$

Reescrevendo, ordenando em relação u e v, obtemos

$$Au^2+Buv+Cv^2+(Bk+2Ah+D)u+(2Ck+Bh+E)v+Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F = 0. \tag{8}$$

Portanto devemos escolher h e k de modo que

$$\begin{cases} Bk + 2Ah + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0. \end{cases} \tag{9}$$

A escolha de h e k depende da existência de solução do sistema (9), ou seja, do determinante

$$\begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC.$$

Se o sistema é impossível, não é possível eliminar os termos de 1º grau, via translação. Isto ocorre quando $B^2 - 4AC = 0$.

Exemplo Seja equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0.$$

Neste caso, $A = C = E = 1, D = -1$, e $B = 2$, o determinante, o seja

$$B^2 - 4AC = 0$$

por inspeção fica impossível eliminar os termos de 1º grau, via translação. Veremos um outro método na próxima seção.

3.2 Eliminar, por meio de uma rotação, o termo misto de 2º grau.

Consiste em determinar um ângulo de rotação tal que a equação (5) se transforma, após rotação, numa equação da forma

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0, \tag{10}$$

onde

$$\left\{\begin{array}{llcl} (a) & A' & = & A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ (b) & B' & = & (C-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta \\ (c) & C' & = & A\,\mathrm{sen}^2\,\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ (d) & D' & = & D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta \\ (e) & E' & = & E\cos\theta - D\,\mathrm{sen}\,\theta \\ (f) & F' & = & F \end{array}\right. \tag{11}$$

Para eliminar o termo misto de 2º grau, impomos $B' = 0$, ou seja,

$$(C-A)\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta = 0, \tag{12}$$

onde estamos supondo $B \neq 0$, (caso contrário já não teríamos o termo misto).

Daí,

- se $A = C$, entao $\cos 2\theta = 0$, então, podemos escolher, $\theta = \frac{\pi}{4}$, e por (11(a,c)) temos

$$A' = \frac{1}{2}(A+B+C) \quad \text{e} \quad C' = \frac{1}{2}(A-B+C),$$

  se escolhermos $\theta = \frac{3\pi}{4}$, e por (11(a,c)) temos

$$A' = \frac{1}{2}(A-B+C) \quad \text{e} \quad C' = \frac{1}{2}(A+B+C),$$

- se $A \neq C$, então por (11b),

$$\mathrm{tg}\,2\theta = \frac{B}{A-C} \tag{13}$$

Para auxiliar na determinação do θ temos várias ferramentas

- da relação $1 + \mathrm{tg}^2\,2\theta = \sec^2 2\theta$, e como $\mathrm{tg}\,2\theta$ e $\sec 2\theta$ tem o mesmo sinal, $2\theta \in (0,\pi)$ temos

$$\cos 2\theta = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,2\theta}}, & \text{se} \quad \frac{B}{A-C} > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,2\theta}}, & \text{se} \quad \frac{B}{A-C} < 0. \end{array}\right.$$

- Combinando as relações $\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ e $\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta = \cos 2\theta$, temos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}.$$

A relação acima permite obter os valores do $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.

Esses valores obtidos, substituindo-se em (11), temos os valores de

$$A', B', C', D', E' \text{ e } F'.$$

Veremos a seguir, um outro modo de obter os valores de A' e C'.

Uma vez obtido θ, em vista(11), combinando (12) com as relações trigonométricas já mencionadas acima acrescidas com

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \text{ e } \cos^2 2\theta = \operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta,$$

obtemos

- $A' + C' = A + C$
- $A'C' = AC - \dfrac{B^2}{4}$

Desta forma, A' e C' são raízes da equação quadrática

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B/2 \\ B/2 & C-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

A escolha das raízes A' e C' depende da escolha do θ, o qual, por (11), está vinculada à relação,

$$\cos 2\theta = \frac{A-C}{A'-C'} \tag{15}$$

determinando o sinal de $A' - C'$.

Observação: O determinante acima, quando $\lambda = 0$, vale:

$$I = B^2 - 4AC.$$

Dizemos que uma equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é do tipo:

elíptico se $I < 0$.

parabólico se $I = 0$.

hiperbólico se $I > 0$.

Finalizando, uma vez escolhido θ, de (11), temos, a escolha para D' e E', dadas por

$$\begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Volta ao exemplo 1.

Exemplo 2 No Exemplo foi considerado a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0.$$

Neste caso, $A = C = E = 1, D = -1$, e $B = 2$, o determinante, o seja

$$B^2 - 4AC = 0$$

Assim, sendo $A = C$, escolhemos $\theta = \pi/4$, então

$$A' = \frac{1}{2}(A + B + C) = 2 \quad \text{e} \quad C' = \frac{1}{2}(A - B + C) = 0,$$

e da relação

$$\begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix},$$

com. $\theta = \pi/4$, temos

$$D' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ e } D' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Assim a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$$

torna

$$2u^2 + 0v^2 + 0u + \sqrt{2}v + 1 = 0$$

ou seja, temos uma forma canônica de uma parábola,

$$u^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(v + \frac{\sqrt{2}}{2}). \tag{17}$$

Esta parábola, nas coordenadas u e v, possui os seguintes elementos:

- vértices: $V(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$,
- reta focal: $\ell : u = 0$,
- parâmetro: $2p = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow p = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,
- foco: $F(0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}) = (0, -5\frac{\sqrt{2}}{8})$,

- diretriz: $v = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = -3\frac{\sqrt{2}}{8}$,

Para obter os elementos nas coordenadas x e y, usando

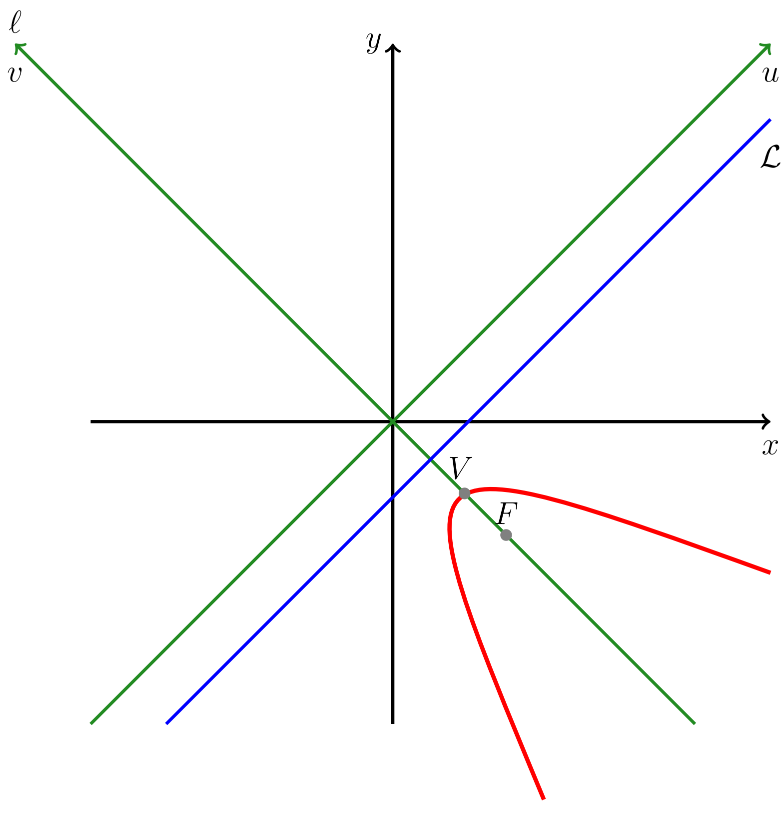
$$\begin{cases} x = \cos(\pi/4)u - \operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y = \operatorname{sen}(\pi/4)u + \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u = \cos(\pi/4)u + \operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ v = -\operatorname{sen}(\pi/4)u + \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$$

temos

- vértice:$V(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,
- foco $F(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8})$,
- reta focal $\ell : x + y = 0$,
- diretriz $\mathcal{L} : x - y = \frac{3}{4}$,



Exemplo 3 Considere a equação

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0.$$

Neste caso, $A = C = 5$, e $B = -26$. Assim, sendo $A = C$, escolhemos $\theta = \pi/4$, então

$$A' = \frac{1}{2}(A + B + C) = -8 \quad \text{e} \quad C' = \frac{1}{2}(A - B + C) = 18,$$

e temos a equação da hipérbole

$$\frac{u^2}{3^2} - \frac{v^2}{2^2} = 1.$$

Assim $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$ Esta hiipérbole nas coordenadas u e v, possui os seguintes elementos:

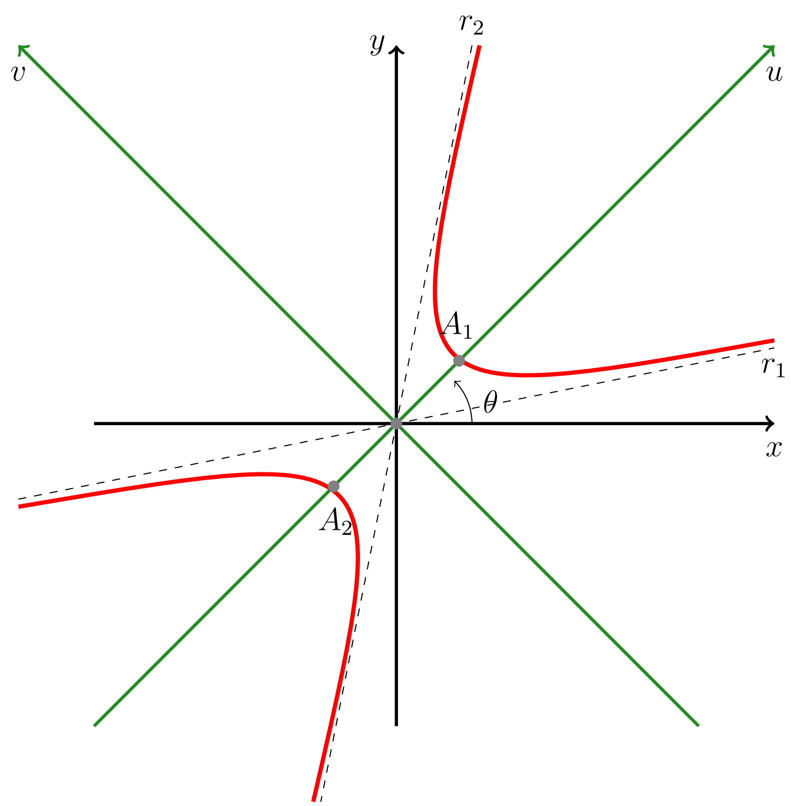
- centro $C(0, 0)$,
- vértices: $A_1(-3, 0)$ e $A_2(3, 0)$,
- vértices imaginários: $B_1(0, -2)$ e $B_2(0, 2)$,
- reta focal: $\ell : v = 0$,
- reta não focal: $\ell' : u = 0$,
- assíntotas: $v = \pm\frac{2}{3}u$.
- focos: $F_1(-\sqrt{13}, 0))$ e $F_2(\sqrt{13}, 0))$,

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{cases}$$

temos, os elementos nas coordenadas x e y,

- centro $C(0, 0)$,
- vértices: $A_1(-3\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $A_2(3\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2})$,
- vértices imaginários: $B_1(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$ e $B_2(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}})$,
- reta focal: $\ell : -x + y = 0$,
- reta não focal: $\ell' : x + y = 0$,
- assíntotas: $r_1 : \ y = \frac{1}{5}x, \ r_2 : \ y = 5x$.
- focos: $F_1(\frac{-\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, 0))$ e $F_2(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, 0))$,



Exemplo 4 Considere a equação

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0.$$

Neste caso, $A = 5, C = 2, D = E = 20, F = 44$ e $B = 4$. Assim $I = B^2 - 4AC < 0$, então a equação e do tipo elíptico.

Como $A \neq C$, temos que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{4}{3} > 0,$$

Logo $\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}} = \frac{3}{5} > 0$, temos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

Inserindo em (11), temos

$$A' = A\cos^2\theta + \frac{B}{2}\operatorname{sen} 2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta = 6$$

$$C' = A\operatorname{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\operatorname{sen} 2\theta + C\cos^2\theta = 1$$

$$D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta = 12\sqrt{5}$$

e

$$E' = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta = 4\sqrt{5}.$$

Logo temos a elípse, nas coordenadas u e v, dada por ,

$$6u^2 + v^2 + 12\sqrt{5}u + 4\sqrt{5}v + 44 = 0$$

o qual é equivalente, completando os quadrados, a equação

$$(u+\sqrt{5})^2 + (\frac{v+2\sqrt{5})^2}{6} = 1.$$

Os elementos dessa elípse, com $a = \sqrt{6}$, $b = 1$ e $c = \sqrt{5}$, nas coordenadas u e v são:

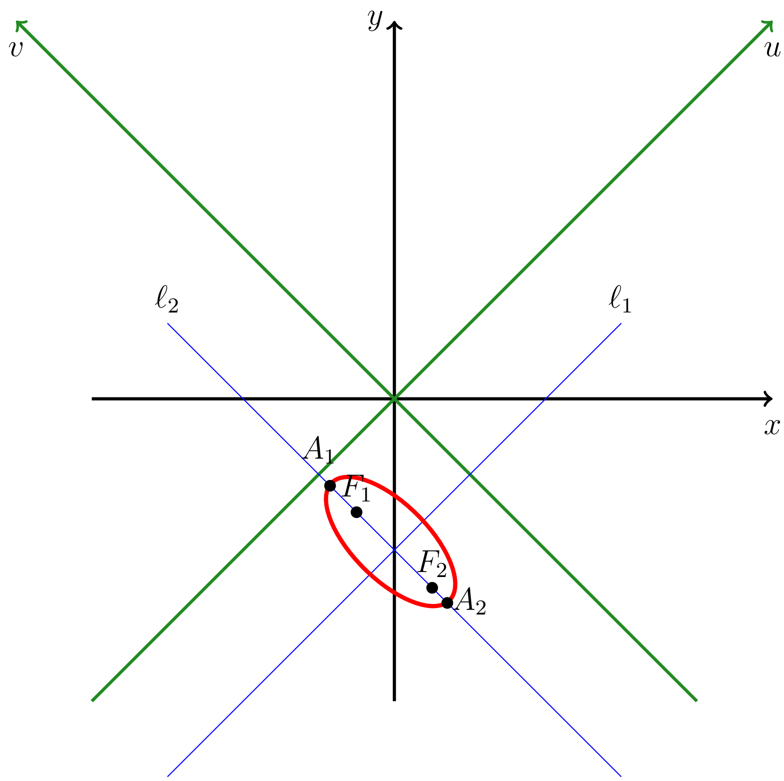
- Centro $C(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$,
- Reta focal $\ell_2 : u = -\sqrt{5}$, paralela ao eixo OU
- Reta não focal $\ell_1 : v = -2\sqrt{5}$, paralela ao eixo OV,
- vértices sobre o eixo focal: $A_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{6})$ e $A_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{6})$,
- vértices sobre o eixo não focal: $B_1 = (-\sqrt{5} - 1, -2\sqrt{5})$ e $B_2 = (-\sqrt{5} + 1, -2\sqrt{5})$,
- focos: $F_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$ e $F_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$,
- excentricidade: $e = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x+y) \\ v = \frac{\sqrt{5}}{5}(-x+2y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(2u-v) \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(u+2v) \end{cases}$$

temos, os elementos dessa elípse nas coordenadas x e y,

- Centro $C(0, -5)$,
- Reta focal $\ell_2 : 2x + y = -5$,
- Reta não focal $\ell_1 : x - 2y = 10$,
- vértices sobre o eixo focal: $A_1 = (\frac{\sqrt{30}}{5}, -5 - 2\frac{\sqrt{30}}{5})$ e $A_2 = (-\frac{\sqrt{30}}{5}, -5 + \frac{2\sqrt{30}}{5})$,
- vértices sobre o eixo não focal: $B_1 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -5 - \frac{\sqrt{5}}{5})$ e $B_2 = (\frac{2\sqrt{5}}{5}, -5 + \frac{\sqrt{5}}{5})$,
- focos: $F_1 = (1, -7)$ e $F_2 = (-1, -3)$,



Exemplo 5 Considere a equação

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0.$$

Neste caso, $A = 11, C = 1, D = -(22 + 10\sqrt{3}), E = -(2 + 10\sqrt{3}), F = -(4 - 10\sqrt{3}$ e $B = 10\sqrt{3}$. Assim $I = B^2 - 4AC > 0$, então a equação é do tipo hiperbólico.

Como $A \neq C$, temos que

$$\text{tg}\, 2\theta = \frac{B}{A - C} = \sqrt{3} > 0,$$

Logo $\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{tg}^2\, 2\theta}} = \frac{1}{2} > 0$, temos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{2},$$

ou seja $\theta = \frac{\pi}{6}$. Inserindo em (11), temos

$$A' = A\cos^2\theta + \frac{B}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + C\text{sen}^2\theta = 16$$

$$C' = A\,\text{sen}^2\,\theta - \frac{B}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + C\cos^2\theta = -4$$

$$D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta = -16(\sqrt{3}+1)$$

e

$$E' = -D\,\mathrm{sen}\,\theta + E\cos\theta = 4(\sqrt{3}-1).$$

Logo temos a elípse, nas coordenadas u e v, dada por

$$16u^2 - 4v^2 - 16(\sqrt{3}+1)u - 4(1-\sqrt{3})v - (4-10\sqrt{3}) = 0$$

o qual é equivalente, completando os quadrados, a equação

$$(u - \frac{\sqrt{3}+1}{2})^2 - \frac{(v + \frac{1-\sqrt{3}}{2})^2}{4} = 1.$$

Os elementos dessa hipérbole, com $a^2 = 1$, $b^2 = 4$ e $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, nas coordenadas u e v são:

- Centro $C(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$,
- Reta focal $\ell : v = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, paralela ao eixo OU
- Reta não focal $\ell' : u = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, , paralela ao eixo OV,
- vértices: $A_1 = (\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ e $A_2 = (\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$,
- vértices imaginários: $B_1 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2})$ e $B_2 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2})$,
- focos: $F_1 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ e $F_2 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$,
- excentricidade: $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5},$.
- assíntotas: $2(u - \frac{\sqrt{3}+1}{2}) \pm (v - \frac{\sqrt{3}-1}{2}) = 0$.

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ v = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}u - v) \\ y = \frac{1}{2}(u + \sqrt{3}v) \end{cases}$$

temos, os elementos dessa hipérbole nas coordenadas x e y,

- Centro $C(1,1)$,
- Reta focal $\ell : x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$,
- Reta não focal $\ell' : \sqrt{3}x + y = 1 + \sqrt{3}$,
- vértices : $A_1 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $A_2 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$,
- vértices imaginários: $B_1 = (2, 1 - \sqrt{3})$ e $B_2 = (0, 1 + \sqrt{3})$,
- focos: $F_1 = (1 - \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2})$ e $F_2 = (1 + \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2})$,

- assíntotas: $\begin{cases} r_1 : (2\sqrt{3}-1)(x-1)+(\sqrt{3}+2)(y-1)=0 \\ r_2 : (2\sqrt{3}+1)(x-1)+(2-\sqrt{3})(y-1)=0 \end{cases}$