CÁLCULO DIFERENCIAL E SÉRIES 2022/1

E2- Sequências monótonas

Lista 2

Sequências Monótonas

A resolução das listas é fundamental para a assimilação dos conteúdos da referida leitura e para o consequente bom rendimento nas atividades avaliativas da unidade. Toda dúvida que tiver consulte o professor e/ou monitor através dos fóruns de dúvidas e/ou no atendimento remoto.

Os exercícios são baseados nas listas de exercícios das referências [STEWART] e [GUIDORIZZI] onde se encontram esses exercícios.

😉 Bom trabalho!

Exercícios

1. Mostre que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ao mesmo tempo não crescente e não decrescente, então é necessariamente uma sequência constante.

2. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

a) $a_n = (-2)^{n+1}$;
b) $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$;
c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$;
d) $a_n = ne^{-n}$.

3. Mostre que a sequência de Fibonacci é não decrescente.

4. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de Fibonacci. Defina a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ para $n \geq 0$.

a) Calcule os 10 primeiros termos da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Mostre que $a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}}$ para todo $n \geq 2$.
c) Mostre que a subsequência $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada pelos elementos de ordem par é não crescente.

5. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida por

- $a_1 = 2$ e $a_n = \dfrac{a_{n-1}+4}{2}, \forall\, n \geq 1.$

a) Mostre a sequência é limitada por 4

b) Mostre que a sequência é não decrescente;

c) Conclua pelo Teorema da Sequência Monótona que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d) Calcule o limite da sequência.

6. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida por

- $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \geq 1$

a) Determine os três primeiros termos da sequência.

b) Mostre por indução que a sequência é monótona não decrescente e limitada superiormente por 2.

c) Conclua pelo Teorema da Convergência Monótona que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d) Encontre o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Sejam a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1 sua média geométrica,

- $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$.

Indutivamente, defina

- $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

a) Use indução matemática para mostrar que
$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$.

b) Deduza que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes.

c) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Gauss chamou esse valor comum de *média aritmética-geométrica* dos números a e b.

Referências

[GUIDORIZZI] GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de cálculo.* 5 ed.. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 4.

[STEWART] STEWART, James. *Cálculo.* 7. ed.. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

Status de envio

Status de envio	Esta tarefa não requer o envio online
Status da avaliação	Não há notas
Última modificação	-
Comentários sobre o envio	Comentários (0)