Matemática Discreta

Teoria dos Conjuntos
Operações

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Teoria dos Conjuntos

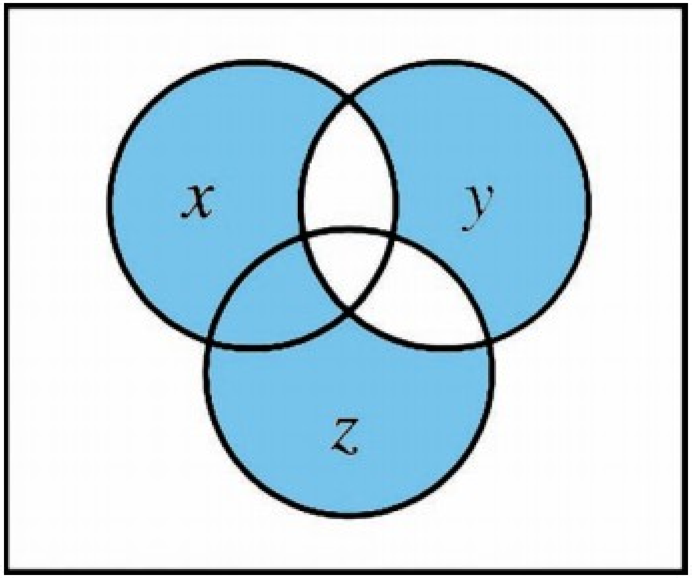
- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar uma forma de ilustrar graficamente operações entre conjuntos chamada Diagrama de Venn
  - Apresentar as principais operações entre conjuntos
    - União ($\cup$)
    - Intersecção ($\cap$)
    - Complementar absoluto (**'**)
    - Complementar relativo ou diferença (**–**)
    - Diferença simétrica ($\oplus$)
    - Produto cartesiano ($\times$)
  - Apresentar definições de Classe (coleção) de Conjuntos, Conjunto potência, Partição
  - Capacitar o aluno a usar operações de Teoria dos Conjuntos para modelar problemas computacionais

Problema #2

- **Questão do ENADE 2011**
  - Considere
    - Soma (+) = união
    - Produto = intersecção
    - Barrado (¯) = complementar

QUESTÃO 14

Observe o diagrama de Venn a seguir.



A função representada em azul no diagrama também poderia ser expressa pela função lógica $f(x, y, z) =$

A $(x + z)\,y + x\,\overline{y}\,z$.

B $(x + z)\,y + \overline{x}\,y\,\overline{z}$.

C $(x + z)\,y + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

D $(x + z)\,\overline{y} + x\,\overline{y}\,z$.

E $(x + z)\,\overline{y} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$.

Teoria dos Conjuntos

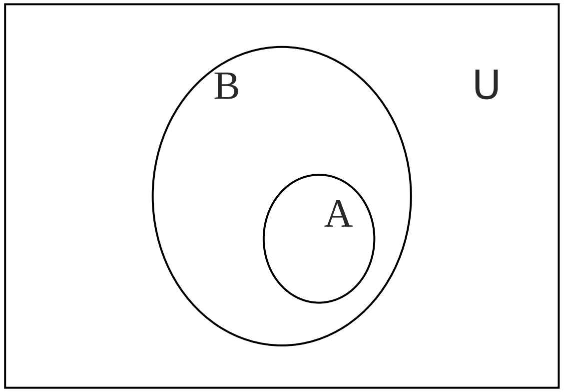
- **Diagrama de Venn**

Fonte: https://pixabay.com/

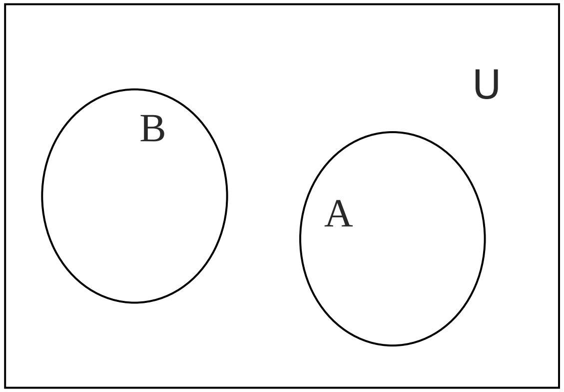
- O **diagrama de Venn** é uma representação gráfica de conjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Diagrama de Venn**
  - Forma de representação gráfica de conjuntos
    - Conjuntos são representados por áreas indicadas como curvas no plano
    - Um retângulo representa o conjunto universo e os demais conjuntos são representados por discos



$A \subseteq B$



A e B são disjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **União**

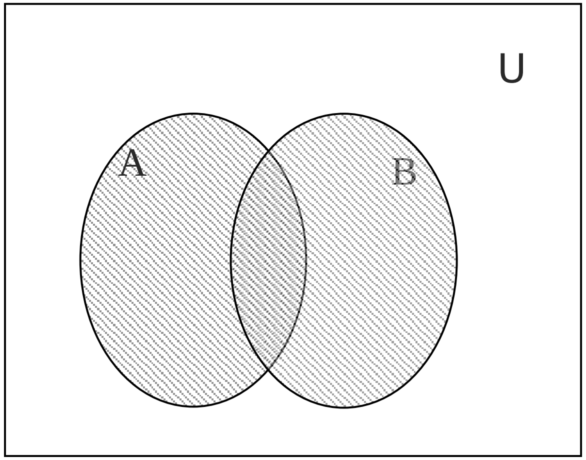
Fonte: https://pixabay.com/

- A **união** de conjuntos é um conjunto formado por <u>todos</u> os elementos dos conjuntos iniciais

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **União**
    - A união de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$ ou $A + B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A <u>ou</u> a B:

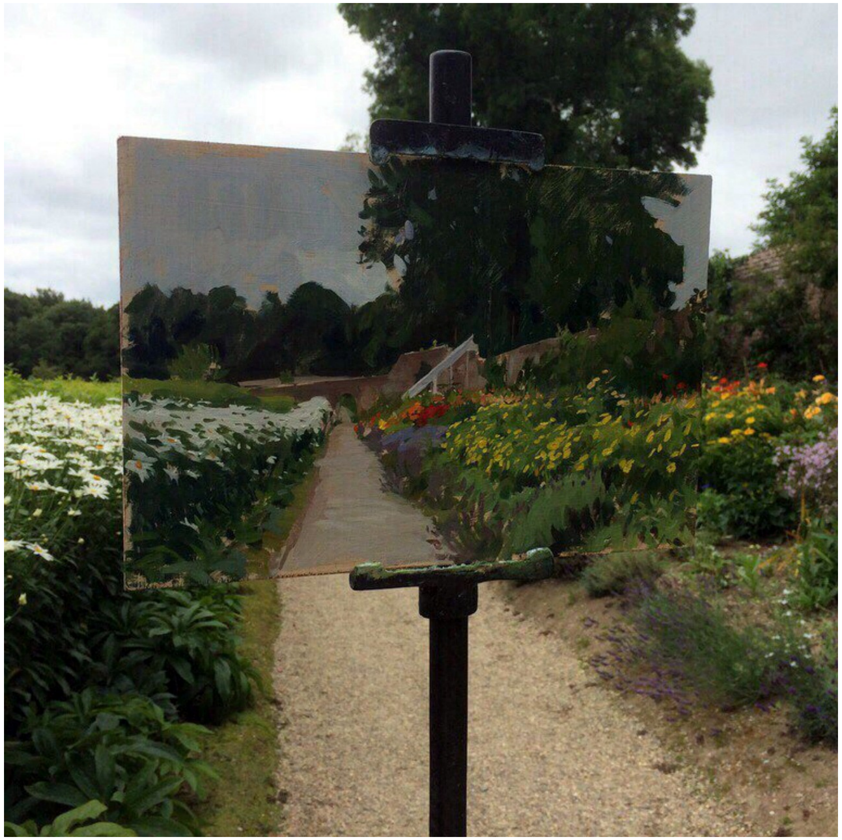
$$\mathbf{A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \underline{ou} \ x \in B \}}$$



$A \cup B$

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Intersecção**



Fonte: https://pixabay.com/

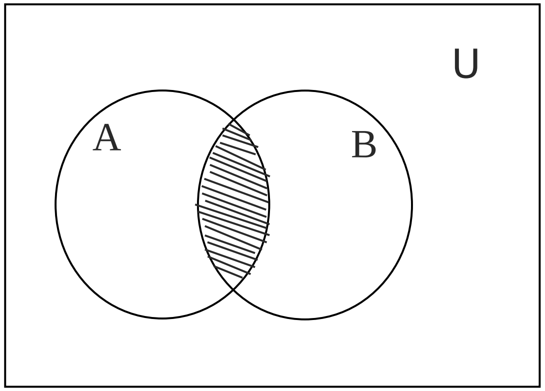
- A **intersecção** de conjuntos é um conjunto formado pelos elementos que pertencem a todos os conjuntos iniciais

Teoria dos Conjuntos

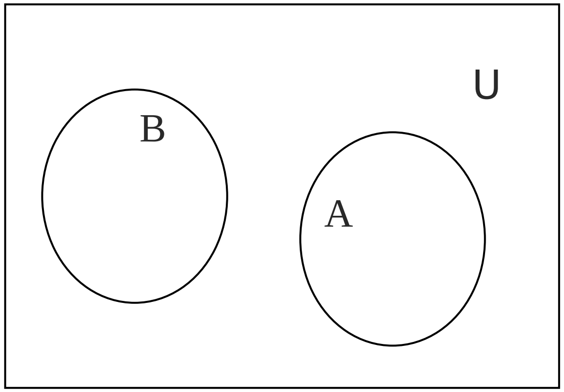
- **Operações entre Conjuntos**
  - **Intersecção**
    - A intersecção de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$ ou AB, é o conjunto dos elementos que pertencem a A <u>e</u> a B:

$$\mathbf{A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \underline{e}\ x \in B \}}$$

➔ Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são ditos **disjuntos**



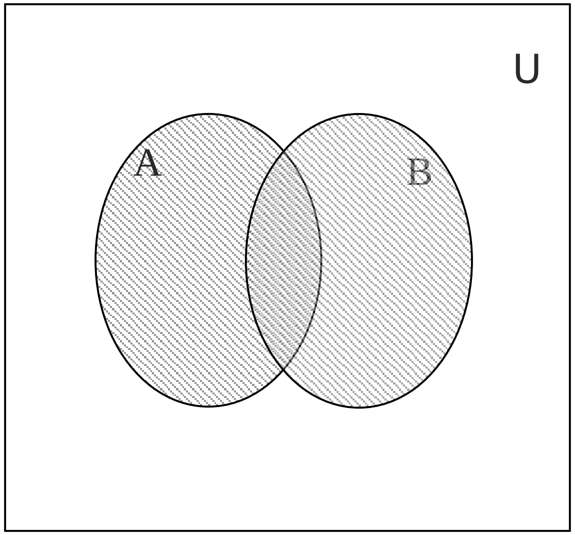
$A \cap B$



A e B são disjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Qual o tamanho de $A \cup B$, ou seja, $|A \cup B|$?
    - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$A \cup B$

Exemplo:

- Sejam os conjuntos
  $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e
  $B = \{ 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $A \cap B = \{ 3, 4 \}$
- $|A \cup B| = 6$ ($|A| + |B| - |A \cap B|$)

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar absoluto (complementar)**

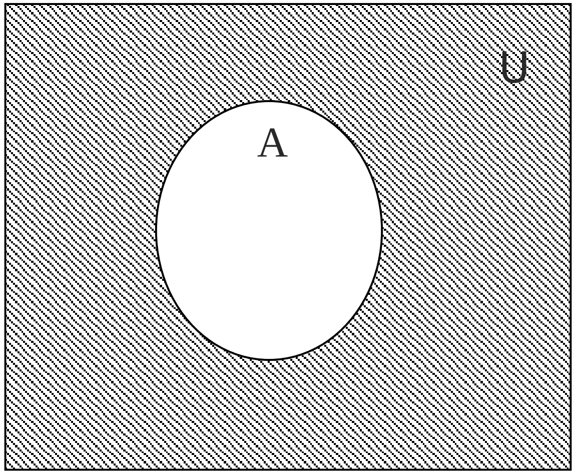
Fonte: https://pixabay.com/

- O **complementar absoluto** de um conjunto é um conjunto formado por todos os elementos que não pertencem ao conjunto inicial

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar absoluto (complementar)**
    - O complementar de um conjunto A, denotado por A^C, $\overline{A}$ ou A', é o conjunto dos elementos que pertencem a **U** mas não pertencem a A:

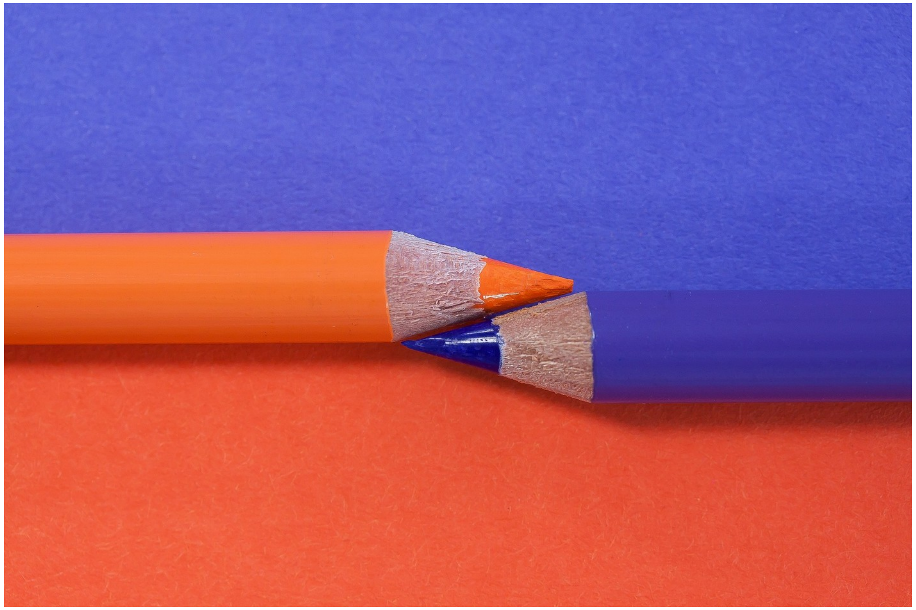
$$\mathbf{A' = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \}}$$



A'

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar relativo (diferença)**



Fonte: https://pixabay.com/

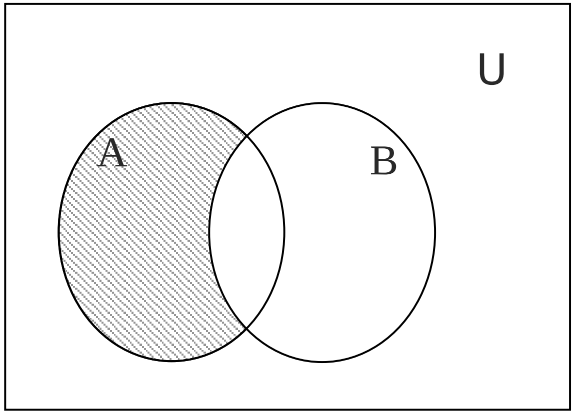
- O **complementar relativo** é a diferença de um conjunto em relação a outro

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Complementar relativo (diferença)**
    - A diferença entre A e B, denotada por A\B ou A – B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$\mathbf{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}}$$

$$\mathbf{A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B' \} \text{ ou } A - B = A \cap B'}$$



A – B

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Diferença simétrica**

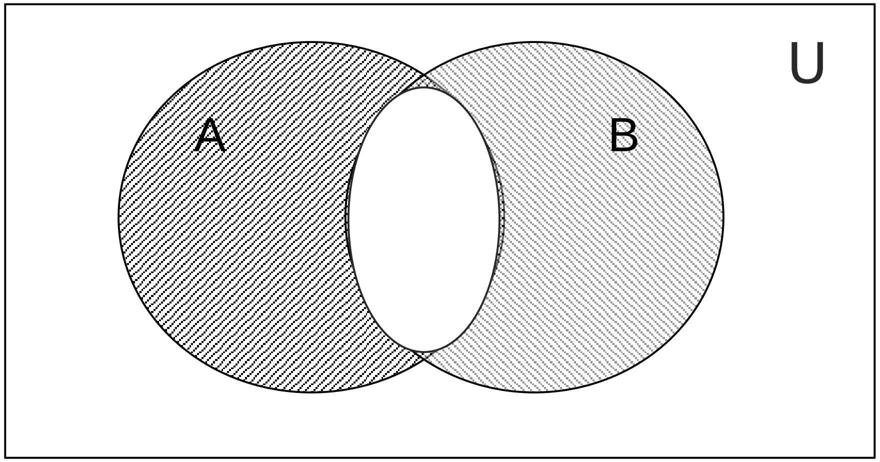
Fonte: https://pixabay.com/

- A **diferença simétrica** entre dois conjuntos contém os elementos que estão em um ou em outro conjunto, mas não em ambos ao mesmo tempo

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - **Diferença simétrica**
    - A diferença simétrica dos conjuntos A e B, denotada por $A \oplus B$, consiste em todos os elementos que pertencem a A <u>ou</u> B mas <u>não a ambos</u>:

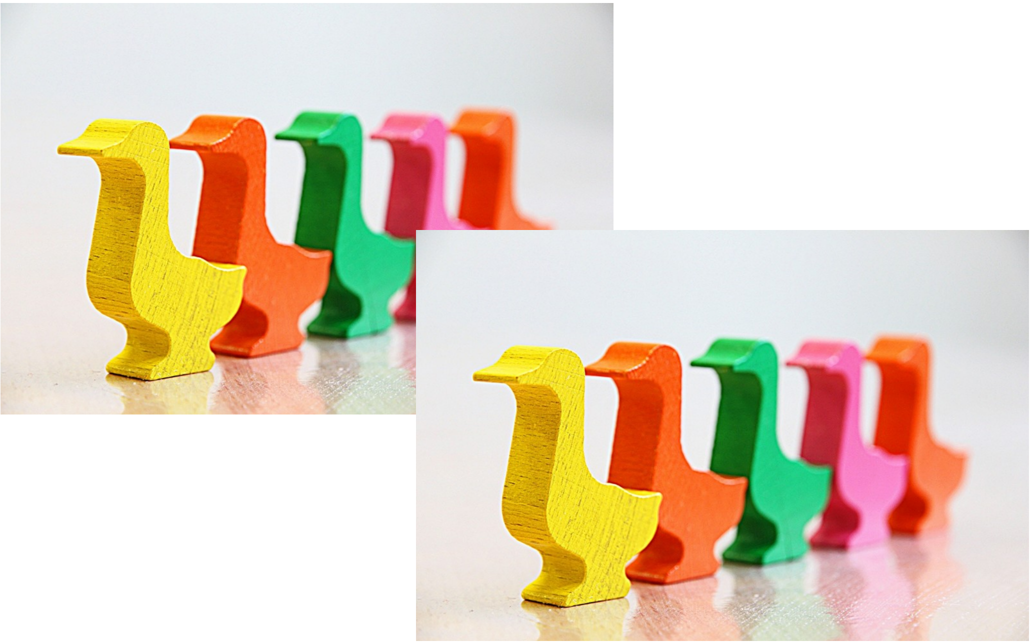
$$\mathbf{A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)}$$



$A \oplus B$

Teoria dos Conjuntos

- **Produto cartesiano**



Fonte: https://pixabay.com/

- O **produto cartesiano** de dois conjuntos é o conjunto de **pares ordenados**
- O primeiro elemento do par vem do primeiro conjunto
- O segundo elemento do par vem do segundo conjunto

Teoria dos Conjuntos

- **Produto cartesiano**
  - Sejam A e B dois conjuntos
    - O produto cartesiano A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) nos quais
      - $a \in A$
      - $b \in B$
    - Exemplo
      - A = { 1, 2, 3 } e B = { 0, 1 }
      - $A \times B$ = { (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1) }
    - ➔ O produto cartesiano de um conjunto A com ele mesmo ($A \times A$) é denotado como A^2

Teoria dos Conjuntos

- **Produto cartesiano**
  - IMPORTANTE
    - A ordem dos conjuntos altera o resultado do produto cartesiano

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

    - Para conjuntos A e B finitos, o número de elementos no produto cartesiano é:

$$\mathbf{| A \times B | = |A| * |B|}$$

    - Exemplo
      - $A = \{ 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 0, 1 \}$
      - $A \times B = \{ (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1) \}$
      - $| A \times B | = |A| * |B| = 3 * 2 = 6$

Teoria dos Conjuntos

- **Produto cartesiano**
  - O produto cartesiano pode ser estendido para qualquer número finito de conjuntos
  - Para quaisquer conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, o conjunto de todas as *n*-tuplas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ onde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$ é chamado de produto cartesiano de $A_1, A_2, ..., A_n$
    - Denotado por $A_1 \times A_2 \times ... A_n$ ou $\prod_{i=1}^{n} A_i$
    - Produto cartesiano de
      - Três conjuntos = conjuntos de triplas
      - …
      - *n* conjuntos = conjunto de *n*-tuplas

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Sejam A = { 1, 3, 5, 7, 9 }, B = { 3, 5, 6, 10, 11 } e U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }
  - Calcule

    a) $A \cup B$

    b) $A \cap B$

    c) $A - B$

    d) $A \oplus B$

    e) A'

    f) $A' - B$

    g) $A \times B$

Teoria dos Conjuntos

- **Operações entre Conjuntos**
  - Sejam A = { 1, 3, 5, 7, 9 }, B = { 3, 5, 6, 10, 11 } e U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }
  - Calcule

a) $A \cup B =$ { 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 }

b) $A \cap B =$ { 3, 5 }

c) $A - B =$ { 1, 7, 9 }

d) $A \oplus B =$ { 1, 6, 7, 9, 10, 11 }

e) $A' =$ { 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12 }

f) $A' - B =$ { 2, 4, 8, 12 }

g) $A \times B =$ { (1, 3), (1, 5), (1, 6), (1, 10), (1, 11), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (3, 10), (3, 11), (5, 3), (5, 5), (5, 6), (5, 10), (5, 11), (7, 3), (7, 5), (7, 6), (7, 10), (7, 11), (9, 3), (9, 5), (9, 6), (9, 10), (9, 11)}

Teoria dos Conjuntos

- **Classe (coleção) de Conjuntos**

  - Uma **classe de conjuntos** ou **coleção de conjuntos** é um conjunto de conjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Classe (coleção) de Conjuntos**
  - Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto
    - ➔ Uma **classe de conjuntos** pode ser denotada entre colchetes ou entre chaves
  - Exemplo
    - { {1, 2}, {3, 4} } é um conjunto de dois conjuntos:
      1. o conjunto {1, 2}
      2. o conjunto {3, 4}

➔ Uma **subclasse** ou **subcoleção** é formada por alguns conjuntos de uma classe de conjuntos

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência (ou conjunto das partes)**
  - O conjunto das partes de S é aquele formado por <u>todos</u> os subconjuntos de S
    - Denotado por 2^S ou $\wp(S)$
    - Qual é o conjunto potência de { 1, 2, 3 }?
      - { ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} }

    - Para qualquer conjunto S, 2^S sempre tem, pelo menos, ∅ e S como elementos já que sempre é verdade que
      - $\emptyset \subseteq S$ e
      - $S \subseteq S$

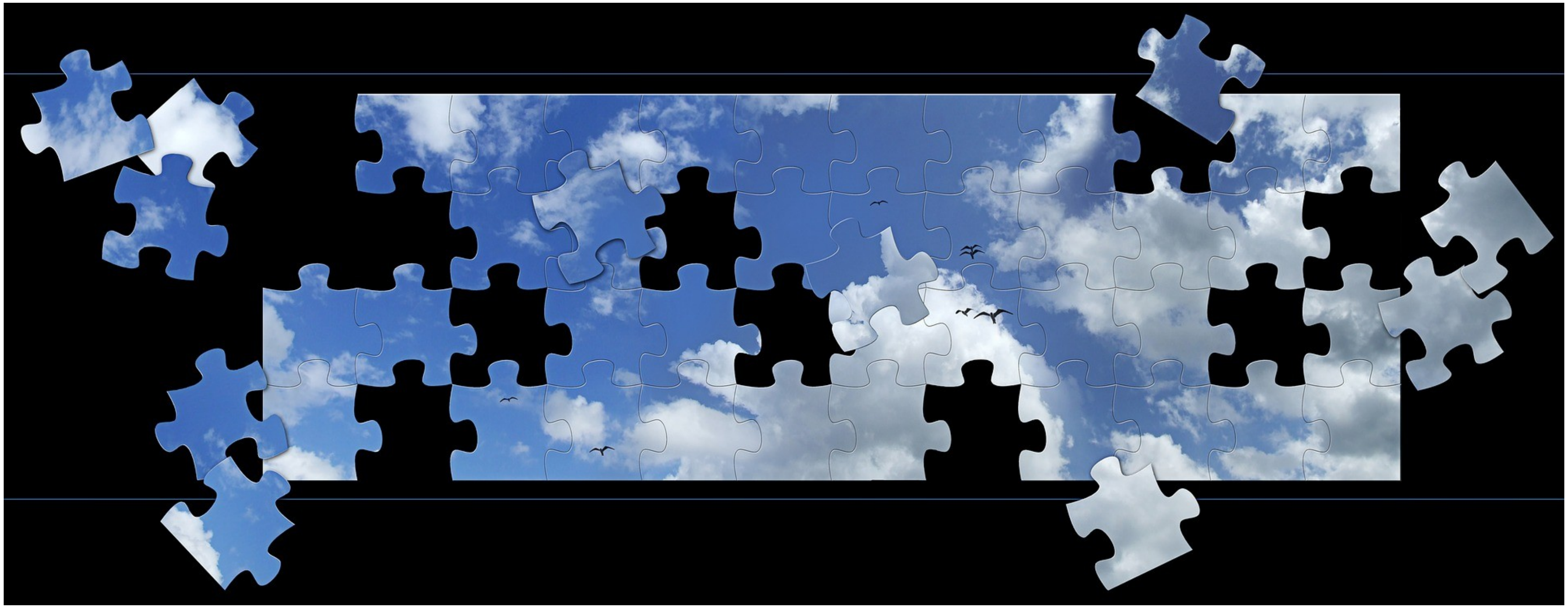
Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência – Tamanho**
  - Se um conjunto S tem *n* elementos, seu conjunto potência contém 2^n elementos (os subconjuntos de S)
    - Assim $|2^S| = 2^{|S|}$

→ Isso será demonstrado por **indução matemática**

Teoria dos Conjuntos

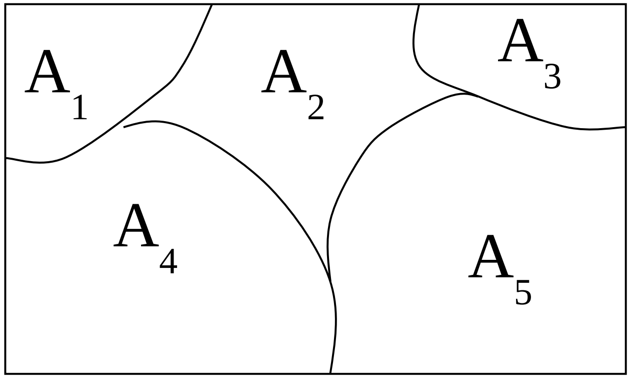
- **Partição**



Fonte: https://pixabay.com/

Teoria dos Conjuntos

- **Partição**
  - Dado um conjunto não-vazio A, uma **partição** P de A é uma subdivisão de A em conjuntos não-vazios, disjuntos dois a dois de tal forma que a união de todos os elementos de P é A
  - Graficamente:



Partições de A: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

Teoria dos Conjuntos

- **Partição**
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }
    - Uma partição para ele seria
      - { {1, 3, 5, 7, 9}, {2, 4, 6, 8, 10} }
    - Outra partição possível seria
      - { {1, 2, 5, 6, 7}, {3}, {4, 8, 10}, {9} }
    - ➔ Entre outras respostas possíveis

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência e Partição**
  1. Qual é o conjunto potência de A quando A = ∅ ?
  2. Qual é o conjunto potência de A quando A = {∅} ?
  3. Dado o conjunto A = { 10, 100, 1000 }, escreva todas as partições possíveis para ele.

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto potência e Partição**
  1. Qual é o conjunto potência de A quando A = ∅ ?
  2. Qual é o conjunto potência de A quando A = {∅} ?
  3. Dado o conjunto A = { 10, 100, 1000 }, escreva todas as partições possíveis para ele.

RESPOSTAS

1. $\wp(A) = \{\emptyset\}$

2. $\wp(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

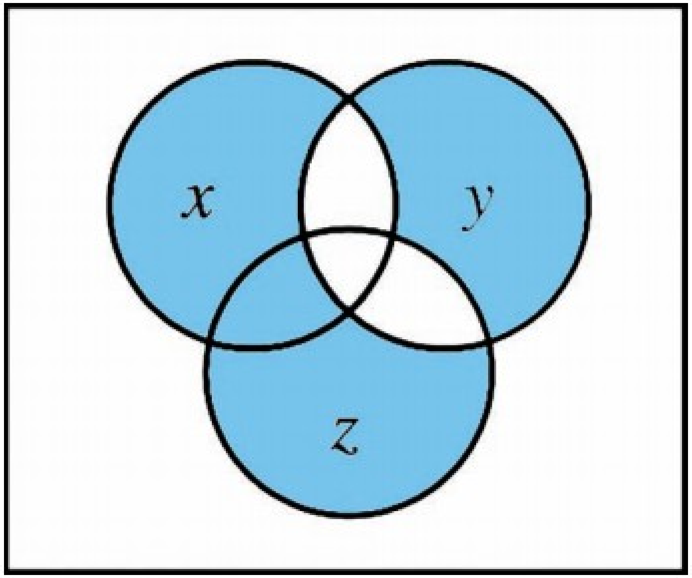
3. { {10}, {100, 1000} } ou { {100}, {10, 1000} } ou { {1000}, {10, 100} } ou { {10}, {100}, {1000} } ou { {10, 100, 1000 } }

Problema #2

- **Questão do ENADE 2011**
  - Considere
    - Soma (+) = união
    - Produto = intersecção
    - Barrado (¯) = complementar

QUESTÃO 14

Observe o diagrama de Venn a seguir.



A função representada em azul no diagrama também poderia ser expressa pela função lógica $f(x, y, z) =$

A) $(x + z)\,y + x\,\overline{y}\,z$.

B) $(x + z)\,y + \overline{x}\,y\,\overline{z}$.

C) $(x + z)\,y + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

D) $(x + z)\,\overline{y} + x\,\overline{y}\,z$.

E) $(x + z)\,\overline{y} + \overline{x}\,y\,\overline{z}$.