3.1 A reta. Equação vetorial da reta.

$$\left\{ y = -x + 2 \right., \text{ no plano } (x, y)$$

$$\begin{cases} y = -x + 2, \text{ no espaço } (x, y, z) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (t, -t+2, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\{ r: (x, y, z) = t(1, -1, 0) + (0, 2, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = (1, -1, 0), \quad A(0, 2, 0), \quad P(x, y, z)$$

$$\begin{cases} P = t\vec{v} + A \\ \overrightarrow{AP} = t\vec{v} \end{cases}$$

$$\vec{v} = (a, b, c), \quad A = (x_1, y_1, z_1)$$

$$r: (x, y, z) = t(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1)$$

3.1 A reta. Equação vetorial da reta.

$$\left\{ y = -x + 2 \right., \quad \text{no plano } (x, y)$$

$$\begin{cases} y = -x + 2, & \text{no espaço } (x, y, z) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (t, -t + 2, 0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$r: (x, y, z) = t\,(\underset{\vec{v}}{1, -1, 0}) + (\underset{A}{0, 2, 0}), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = (a, b, c), \quad A(x_1, y_1, z_1), \quad P(x, y, z)$$

$$P = t \cdot \vec{v} + A$$

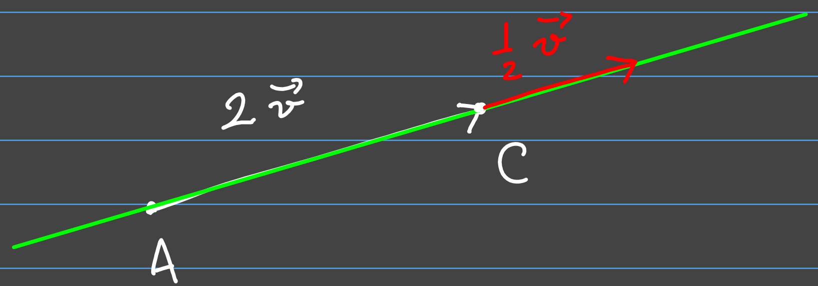
$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Identifique qual dos pontos pertence a reta r.

$$r: (x,y,z) = t\left(1, 2, -\tfrac{1}{2}\right) + (-1, 0, 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

pontos $B(1, 4, -1)$ e $C(1, 4, 1)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Para } t = 2 \\ (x,y,z) = 2\left(1, 2, -\tfrac{1}{2}\right) + (-1, 0, 2) = (1, 4, 1) \end{array}\right\}$$



$\vec{u} \,//\, \vec{v}$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right), \quad \vec{v} = \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$r: (x,y,z) = s\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}\right) + (1, 4, 1), \quad s \in \mathbb{R}$$

3.1 A reta. Equação paramétrica da reta e exemplos.

Passando da forma vetorial para a forma paramétrica:

$P = t\vec{v} + A, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = (a, b, c), \quad A(x_1, y_1, z_1)$

$r: (x, y, z) = t(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1)$

na forma paramétrica fica:

$$r: \begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

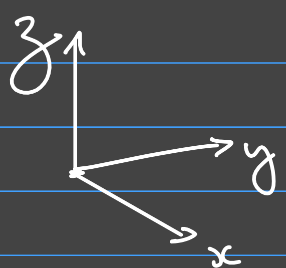
Exemplo: Dado que r é a reta que passa por $A(-2,2,0)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = \left(-2, 1, -\frac{3}{2}\right)$, determine os pontos em que r intercepta os planos xOy, xOz, yOz, quando houver interseção.

Na forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = 1t + 2 \\ z = -\frac{3}{2}t + 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

xOy, $\quad 0 = -\frac{3}{2}t + 0$, portanto $t = 0$

o ponto $(x,y,z) = (-2,2,0)$



xOz, $\quad 0 = t + 2 \Rightarrow t = -2$,

$(x,y,z) = (2,0,3)$, $B(2,0,3)$

yOz, $\quad 0 = -2t - 2 \Rightarrow t = -1$, $C\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

Exemplo, continuação: Nesta mesma reta r, determine o ponto da forma $D(5, y, z)$. Ou seja, o ponto em que a abscissa vale 5.

$$r: \begin{cases} x = -2t - 2 \\ y = 1t + 2 \\ z = -\frac{3}{2}t + 0 \end{cases}, \qquad \begin{aligned} 5 &= -2 \cdot t - 2 \\ 7 &= -2t \\ t &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

$$z = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{21}{4} = 5{,}25$$

O ponto D é dado por $D(5, -1{,}5, 5{,}25)$.

3.1 - A reta: equação simétrica da reta

A equação simétrica da reta tem a forma

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$\vec{v} = (a, b, c)$

$A = (x_1, y_1, z_1)$

mas para usá-la é necessário que
$a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

A equação paramétrica correspondente é

$$r: \begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}$$

Como passar da forma simétrica para a paramétrica.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a} = t \\ \dfrac{y - y_1}{b} = t \\ \dfrac{z - z_1}{c} = t \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Qual a interpretação geométrica da posição da reta quando $a=0$ ou $b=0$ ou $c=0$?

Exemplo: Suponha $a=0$
$b \neq 0$ e
$c \neq 0$.

$$r_1: \begin{cases} x = x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta reta r_1 é paralela ao plano yOz.

Suponha $a=0$
$b=0$ e
$c \neq 0$.

$$r_2: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta reta r_2 é paralela ao eixo Oz.

Em resumo:

$$\text{Se} \left\{ \begin{array}{l} a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0 \\ b=0,\ a\neq 0,\ c\neq 0 \\ c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0 \\ a=0,\ b=0,\ c\neq 0 \\ a=0,\ c=0,\ b\neq 0 \\ b=0,\ c=0,\ a\neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{então} \\ \text{a reta é} \\ \text{paralela ao} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{plano} & yOz \\ \text{plano} & xOz \\ \text{plano} & xOy \\ \text{eixo} & Oz \\ \text{eixo} & Oy \\ \text{eixo} & Ox \end{array} \right\}.$$

Resumo das diferentes formas de escrever a equação da reta.

Vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ e ponto $A(x_1, y_1, z_1)$

Forma vetorial: $P = t\vec{v} + A \quad t \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = t(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1)$$

Simétrica:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Paramétrica: $\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Forma reduzida, exemplo

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 6x - 11, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pode ser colocada na forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -t - 1 \\ z = 6t - 11 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Forma vetorial: $P = t\vec{v} + A \qquad t \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = t\,(a, b, c) + (x_1, y_1, z_1)$$

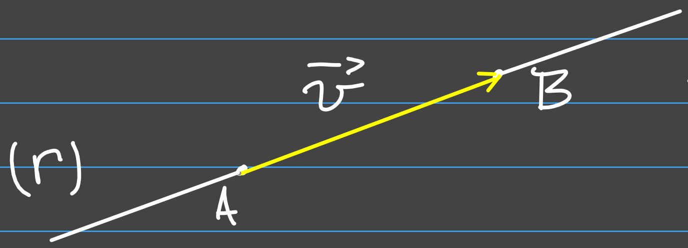
Simétrica:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Paramétrica: $\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1 \\ z = ct + z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

Exemplo de reta definida por dois pontos:

Escreva a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $A(2,1,0)$ e $B(-1,0,1)$.



Escolho $\vec{v} = B - A = (-3,-1,1)$

e a equação vetorial fica

$$r: (x,y,z) = t(-3,-1,1) + (2,1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo de reta paralela a outra reta:

Encontre a equação paramétrica da reta r_2 que passa por $A(-2,2,-2)$ e é paralela a reta r_1 dada por

$$r_1: \begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = mt + 7 \\ z = nt - 7 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

A reta r_2 é dada por

$$r_2: \begin{cases} x = -3s - 2 \\ y = ms + 2 \\ z = ns - 2 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

** Posição relativa entre duas retas no espaço **

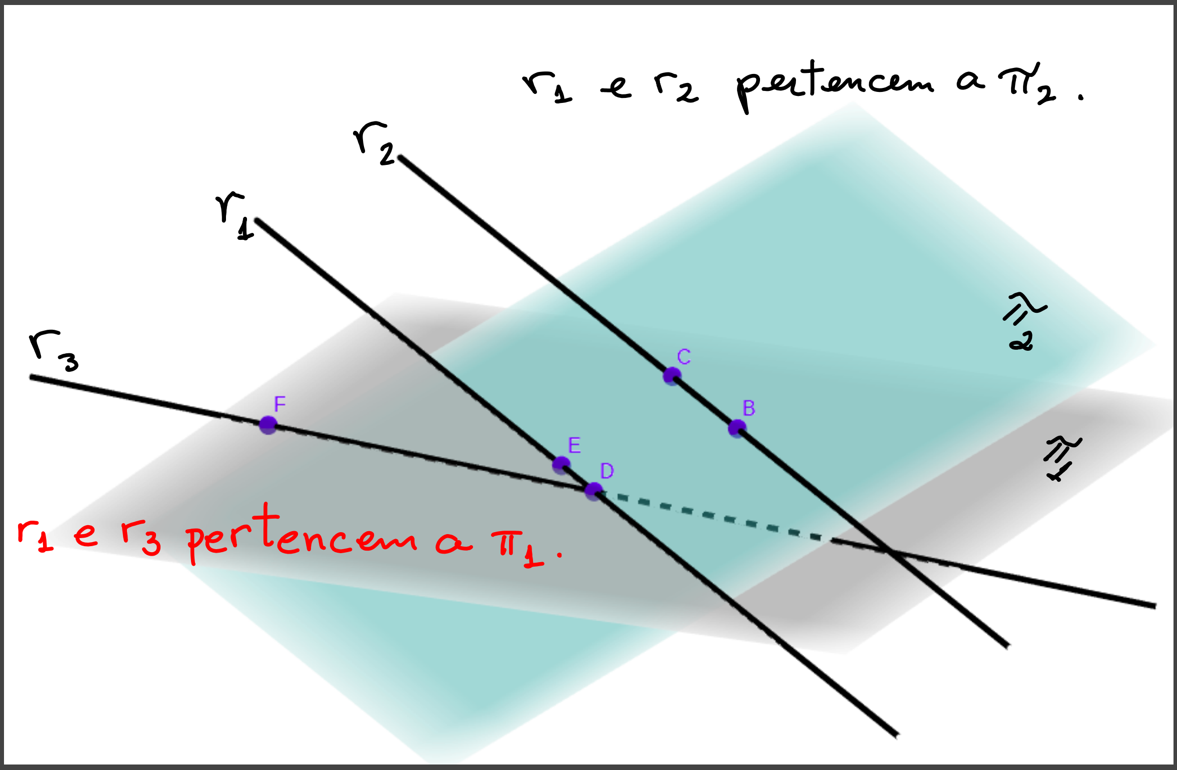
Duas retas no espaço podem ser: coincidentes, concorrentes, paralelas ou reversas.

(1) Retas coincidentes: na verdade são a mesma reta.

(2) Retas concorrentes: são aquelas que se interceptam em um único ponto.

(3) Retas paralelas: são retas que não se interceptam e pertencem a um mesmo plano.

(4) Retas reversas: são retas que não se interceptam e não estão contidas num mesmo plano.



Como descobrir a posição relativa usando as formas paramétricas das retas.

$$r_1: \begin{cases} x = a_1 t + x_1 \\ y = b_1 t + y_1 \\ z = c_1 t + z_1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad r_2: \begin{cases} x = a_2 s + x_2 \\ y = b_2 s + y_2 \\ z = c_2 s + z_2 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Igualamos para descobrir se há pontos em comum:

$$\begin{cases} a_1 t + x_1 = a_2 s + x_2 \\ b_1 t + y_1 = b_2 s + y_2 \\ c_1 t + z_1 = c_2 s + z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 t - a_2 s = x_2 - x_1 \\ b_1 t - b_2 s = y_2 - y_1 \\ c_1 t - c_2 s = z_2 - z_1 \end{cases}$$

tem a seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & -a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & -b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & -c_2 & z_2 - z_1 \end{array}\right]$$

número de variáveis 2.
número de equações 3.

Possíveis resultados:

(1) Se este sistema for possível e determinado, então as retas são concorrentes.

(2) Se este sistema for possível e indeterminado, então as retas são coincidentes.

(3) Se este sistema foi impossível então as retas são reversas ou paralelas.

O paralelismo entre as retas pode ser determinado examinando se os vetores diretores são paralelos.

Exemplo: Qual a posição relativa entre estas retas?

$$r_1 : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 2s - 2 \\ z = 1 \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

$(1,1,0)$ $\quad$ $(2,2,0)$

$$r_3 : \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 6\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \; \lambda \in \mathbb{R} \qquad r_4 : \begin{cases} x = -3\mu + 2 \\ y = -3\mu \\ z = 1 \end{cases}, \; \mu \in \mathbb{R}$$

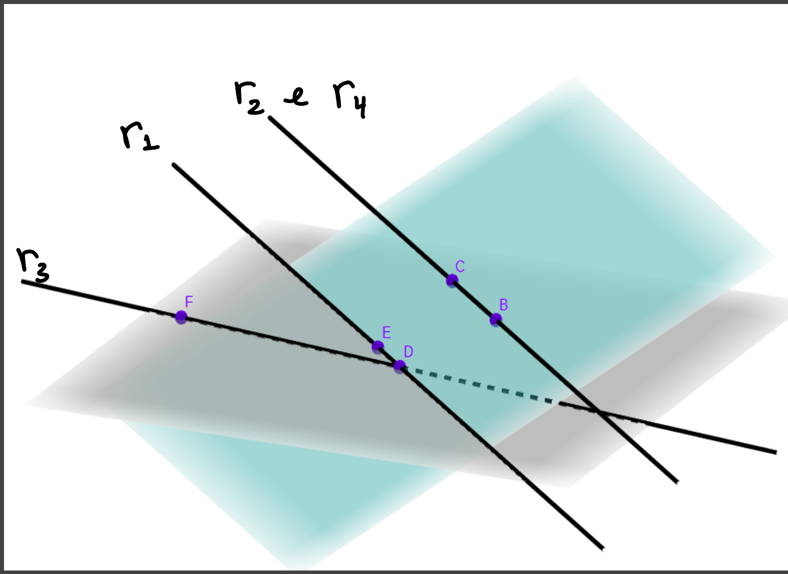
$(1,6,0)$ $\quad$ $(-3,-3,0)$

r_1 e r_2 são paralelas.

r_1 e r_3 são concorrentes

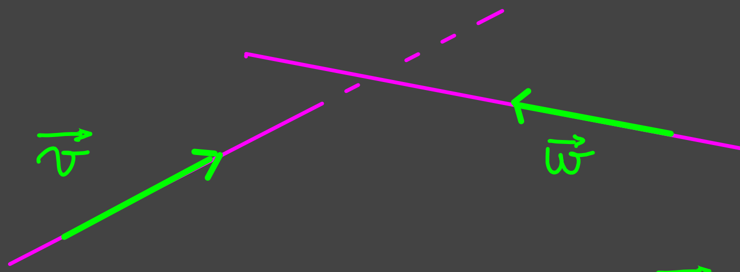
r_2 e r_3 são reversas

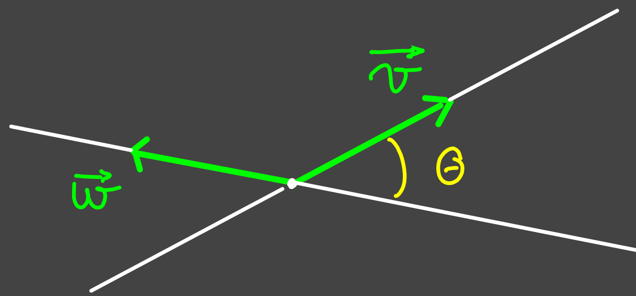
r_2 e r_4 são coincidentes: ponto em comum $(2,0,1)$



B=(0,-2,1) C=(2,0,1) D=(-1,0,0) E = (0,1,0) F=(0,6,0)

Ângulo entre duas retas (concorrentes, reversas, paralelas).





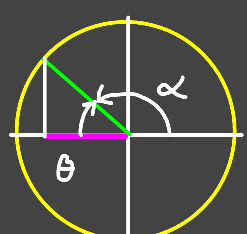
θ, um ângulo agudo, é o ângulo entre as retas.

Forma de cálculo de θ: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\theta$$

$\cos\alpha < 0$ se $90 < \alpha \leq 180$.

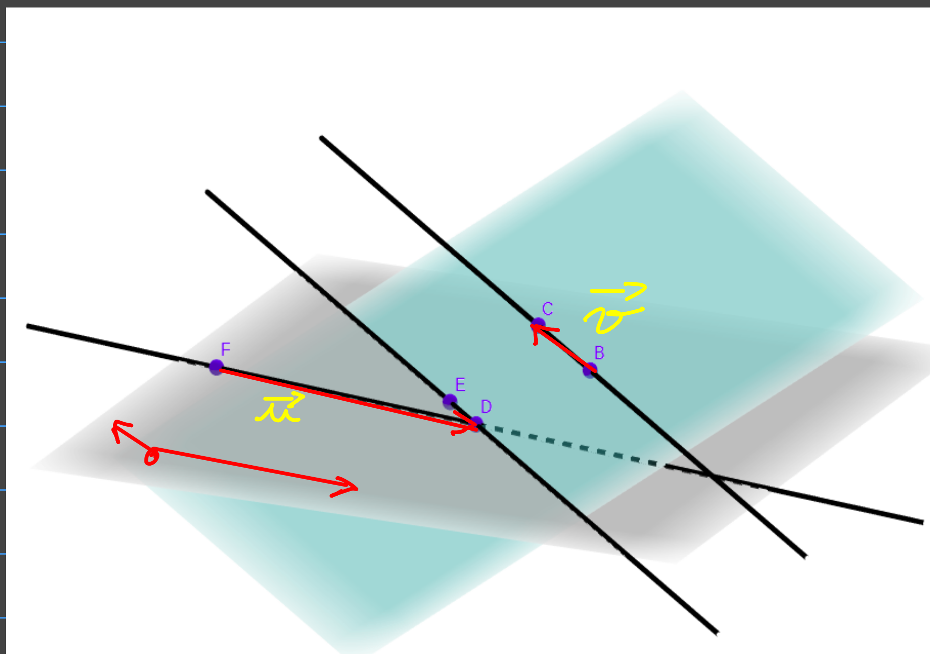
$-\cos\alpha = \cos(180-\alpha) = \cos\theta$ pois $\theta = 180-\alpha$.



$0 \leq \theta \leq 90$

Exemplo: Calcule o ângulo entre as retas que passam por CB e por FD (figura) sabendo que :

B=(0,-2,1)   C=(2,0,1)   D=(-1,0,0)   F=(0,6,0)



B=(0,-2,1)   C=(2,0,1)   D=(-1,0,0)   F=(0,6,0)

$$\vec{v} = C - B = (2, 2, 0) \qquad \vec{u} = D - F = (-1, -6, 0)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = -2 - 12 = -14, \qquad |\vec{v} \cdot \vec{u}| = 14$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8}, \qquad |\vec{u}| = \sqrt{1 + 36 + 0} = \sqrt{37}$$

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{37}} = 0,83173$$

$$\theta = \arccos(0,83173) = 0,62024 \text{ rad}$$

$$0,62024 \text{ rad} = 0,62024 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq 35,53 \text{ graus.}$$

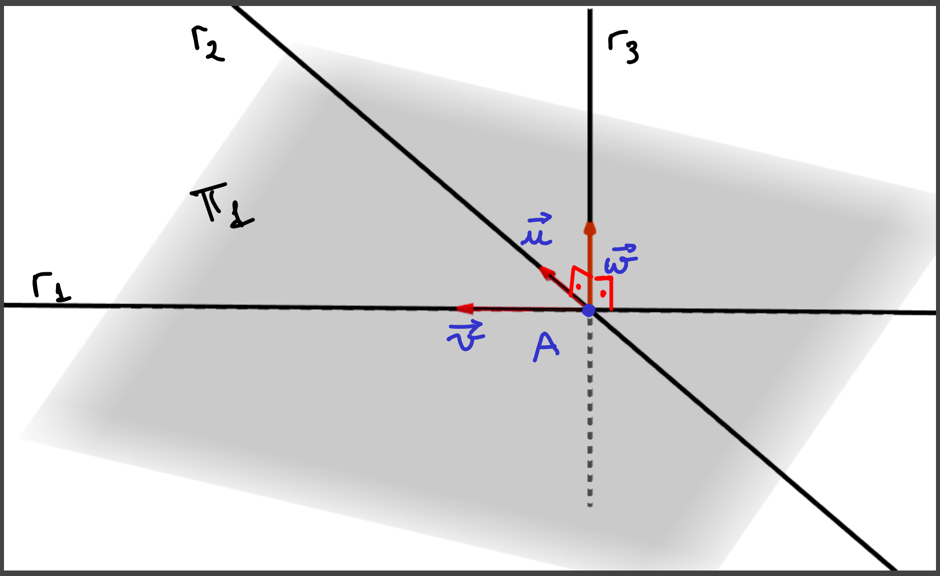
Diferença entre os termos "retas ortogonais" e "retas perpendiculares".

(1) Retas ortogonais são quaisquer duas retas com ângulo de 90 graus entre elas.
Podem ser concorrentes ou reversas.

(2) Retas perpendiculares: são as retas ortogonais que se cruzam num único ponto,
ou seja, são concorrentes.

Quando em dúvida se as retas se interceptam, ou não, dizemos "retas ortogonais".

Construindo uma reta ortogonal à outras duas retas



$$r_1: P = t\vec{v} + A, \ t \in \mathbb{R}$$

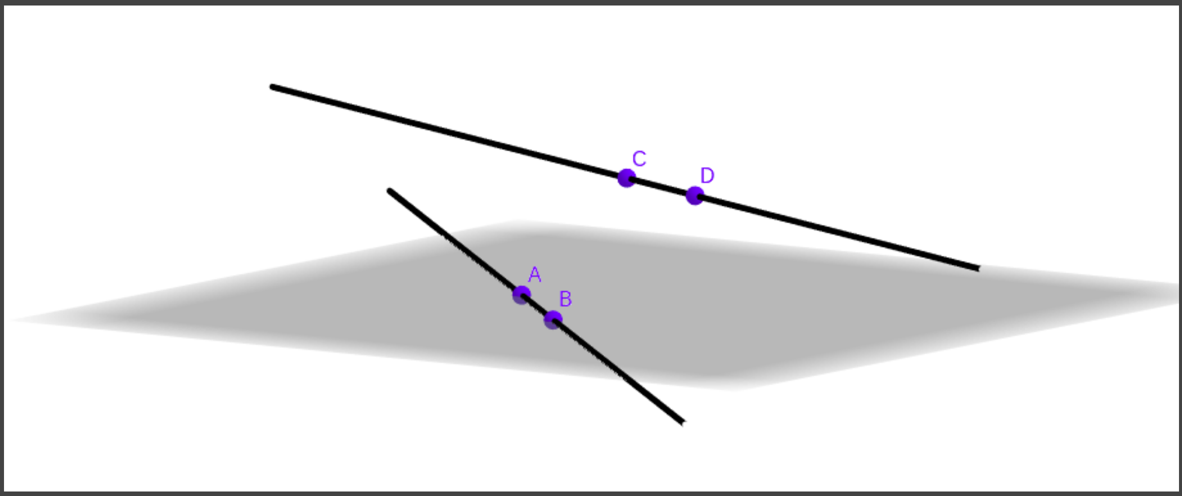
$$r_2: Q = s\vec{u} + A, \ s \in \mathbb{R}$$

$$r_3: M = \lambda\vec{w} + A, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

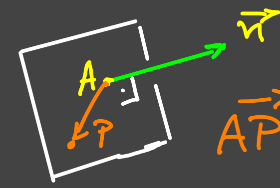
$$\vec{w} \perp \vec{v} \ \text{e} \ \vec{w} \perp \vec{u}$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Um bom exercício é, dado duas retas reversas, encontrar a equação paramétrica de uma terceira reta simultaneamente perpendicular às duas primeiras.



Lição 3.2 - O plano: equação geral do plano



$\vec{AP} \perp \vec{n}$

Dado um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{n} = (a, b, c)$, o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ tais que $\vec{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$ forma um plano.

Dizemos que

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$\vec{n}$ é chamado de vetor normal ao plano

é a equação geral deste plano.

Em termos das coordenadas temos

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

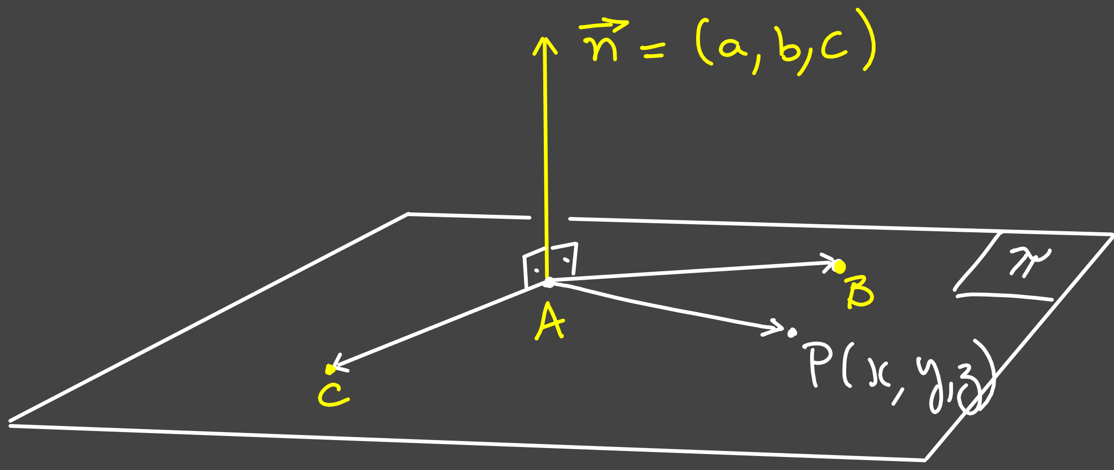
ou seja

$$(x - x_1)a + (y - y_1) \cdot b + (z - z_1) \cdot c = 0$$

$$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

denotando $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ temos

$$ax + by + cz + d = 0.$$



$$-2x+\sqrt{3}\,y-99z-1=0$$

Qual é o vetor normal a este plano? Em que ponto este plano corta o eixo x?

$$\vec{n} = (-2, \sqrt{3}, -99)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$\left(0, 0, -\frac{1}{99}\right)$$

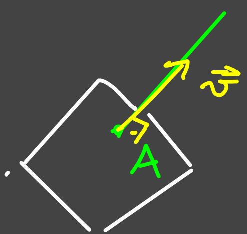
Exemplo: Obter a equação geral do plano que passa por A(1,-2,4) e tem vetor normal $\vec{n} = (-2,3,-1)$.

$$-2x + 3y - z + d = 0$$

$$-2\cdot 1 + 3\cdot(-2) - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 12$$

$$-2x + 3y - z + 12 = 0$$

Exemplo: Determinar a equação geral do plano que é perpendicular à reta



$$r: \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -5 \\ z = 7t - 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

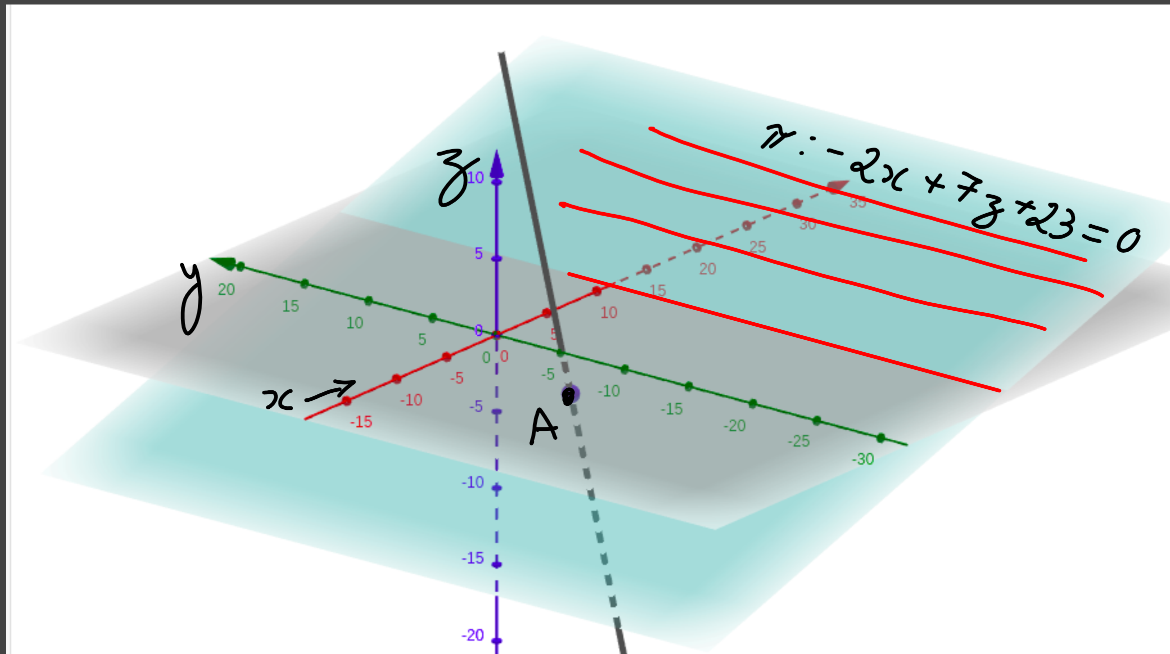
no ponto A(1,-5,-3).

$$\vec{v} = (-2,0,7)$$

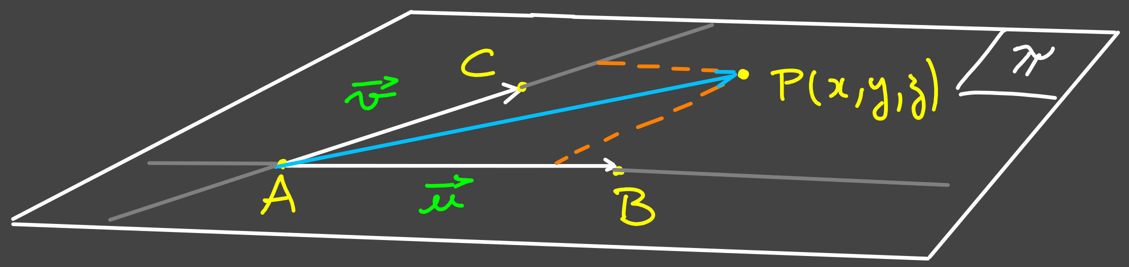
$$\vec{n} = (-2,0,7)$$

$$-2x + 0\cdot y + 7z = -2\cdot 1 + 0\cdot(-5) + 7(-3) = -23$$

$$-2x + 7z + 23 = 0$$



Equação vetorial e paramétrica do plano



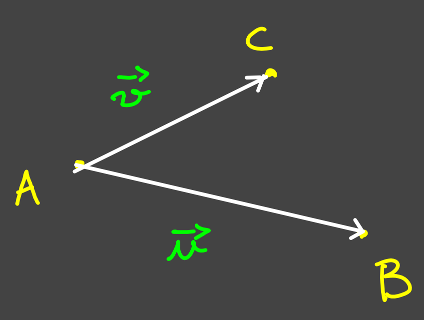
$$\vec{AP} = t\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{com } t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{v}$$

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2)$$

$$\pi : \begin{cases} x = ta_1 + sa_2 + x_0 \\ y = tb_1 + sb_2 + y_0 \\ z = tc_1 + sc_2 + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Encontre a equação paramétrica e a equação geral do plano que passa pelos pontos: A(0,0,1), B(-2,-3/2,0) e C(2,-9/2,0).



$$\vec{u} = B - A = \left(-2, -\frac{3}{2}, -1\right)$$

$$\vec{v} = C - A = \left(2, -\frac{9}{2}, -1\right).$$

$$P = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R}$$

$\vec{u} = \left(-2, -\frac{3}{2}, -1\right)$ $\qquad$ $A = (0, 0, 1)$

$\vec{v} = \left(2, -\frac{9}{2}, -1\right)$

A equação na forma paramétrica fica

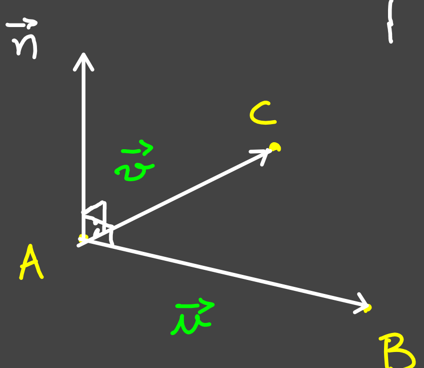
$$\pi: \begin{cases} x = -2t + 2s + 0 \\ y = -\frac{3}{2}t - \frac{9}{2}s + 0, \\ z = -t - s + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } s \in \mathbb{R}$$

$\vec{u} = \left(-2, -\frac{3}{2}, -1\right)$ $\qquad$ $A = (0, 0, 1)$

$\vec{v} = \left(2, -\frac{9}{2}, -1\right)$

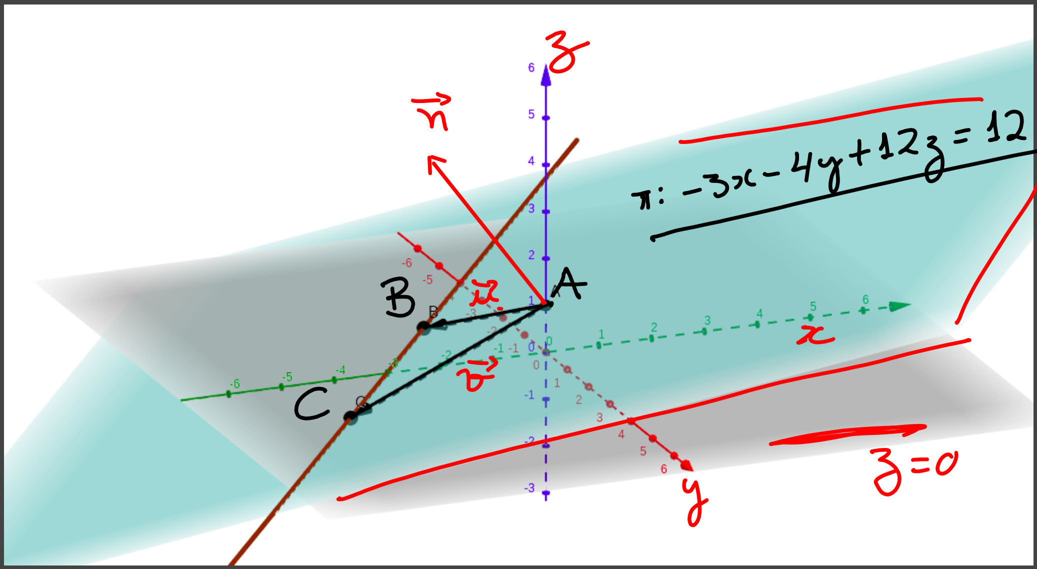
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -\frac{9}{2} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}, -2-2, 9+3\right)$$

$$\vec{n} = (-3, -4, 12)$$



$$-3x - 4y + 12z + d = 0$$

$$-3x - 4y + 12z - 12 = 0$$



z
$\vec{n}$
$\pi: -3x-4y+12z=12$
A
B
C
$\vec{u}$
$\vec{v}$
x
y
z=0

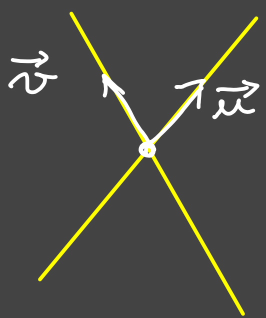
Exemplo: Determinar as equações paramétricas do plano que contém as retas

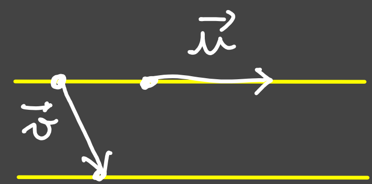
$$r_1: \begin{cases} x = -2t \\ y = -4t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2: \begin{cases} x = -s \\ y = -2s + 2 \\ z = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

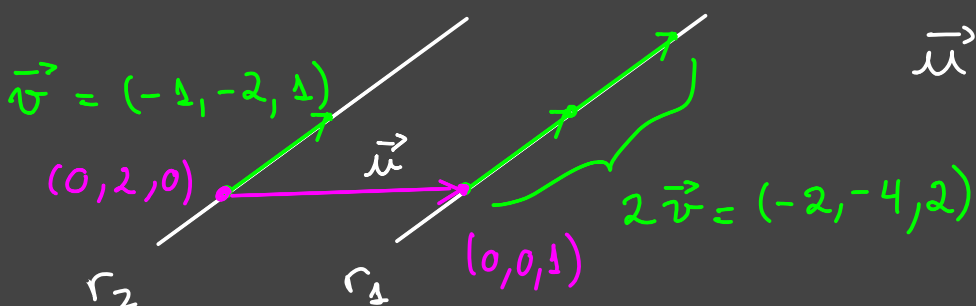
(Concorrentes ou paralelas?)

$(-2, -4, 2)$

$(-1, -2, 1)$



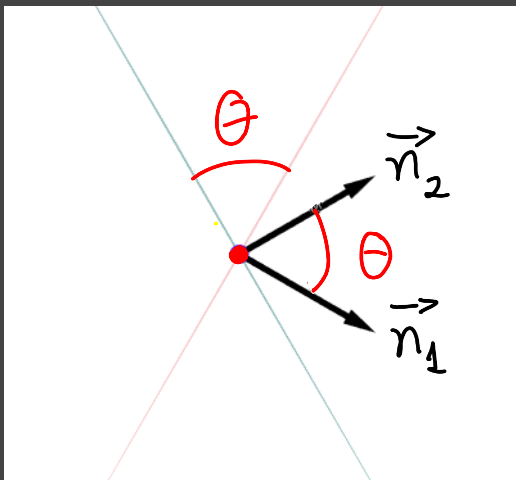


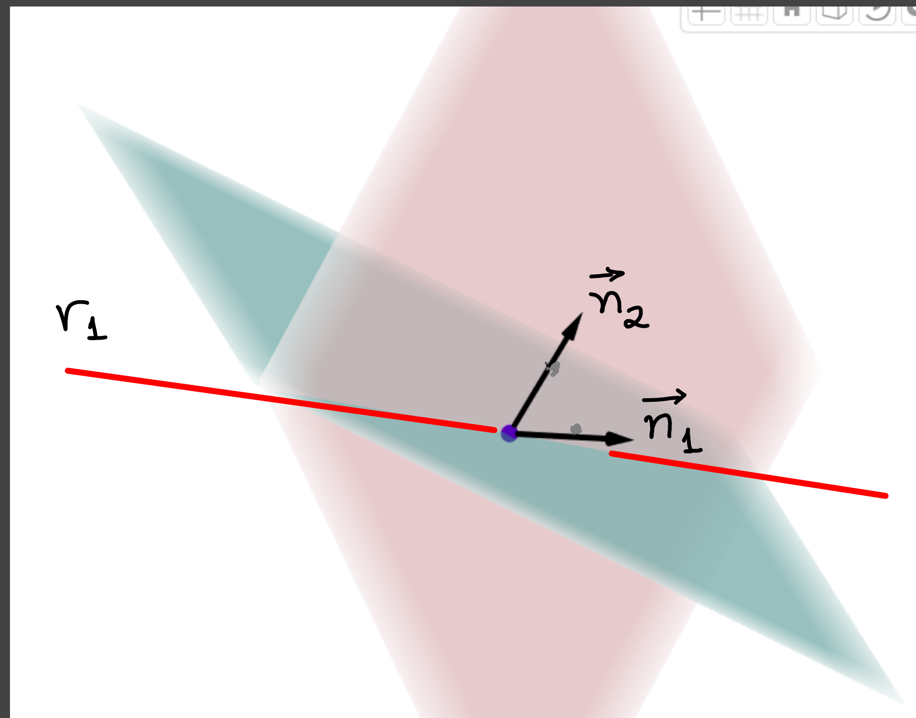


$\vec{u} = (0, -2, 1)$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2t - 2 \cdot s + 2 \\ z = t + s \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ângulo entre planos:





$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$\vec{n}_1 = (-2, 1, -1) \quad , \quad \vec{n}_2 = (-1, 2, 1)$$

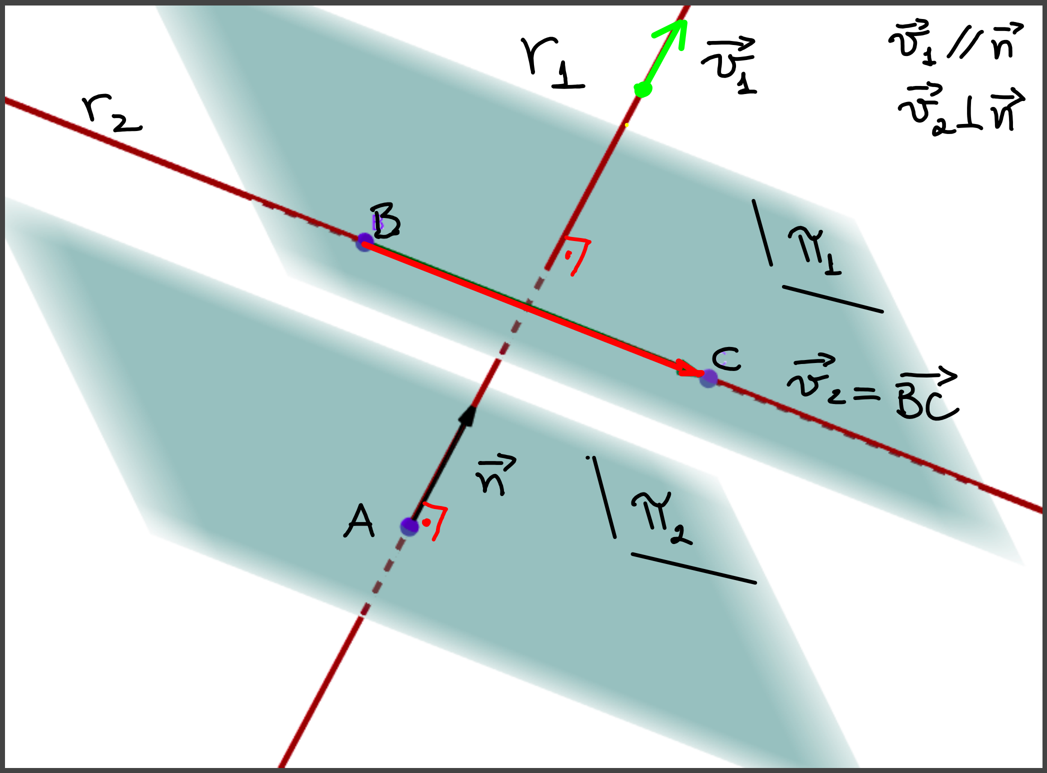
$$\cos\theta = \frac{|-2\cdot(-1) + 1\cdot 2 - 1|}{\sqrt{4+1+1}\ \sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

logo $\theta = 60^\circ$.

** Dois planos são perpendiculares se, e somente se, o produto escalar entre os vetores normais é zero.

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Planos e retas perpendiculares e paralelos:



$\vec{n} // \vec{v}$ reta perpendicular ao plano

$\vec{n} \perp \vec{v}$ reta paralela ou contida no plano.

Exemplo: Determine se a reta é perpendicular, paralela, ou se está contida no plano.

$$r : \begin{cases} x = -s + 2 \\ y = -2s + 2 \\ z = s + 1 \end{cases}, s \in \mathbb{R} \qquad \pi: y + 2z = 4$$

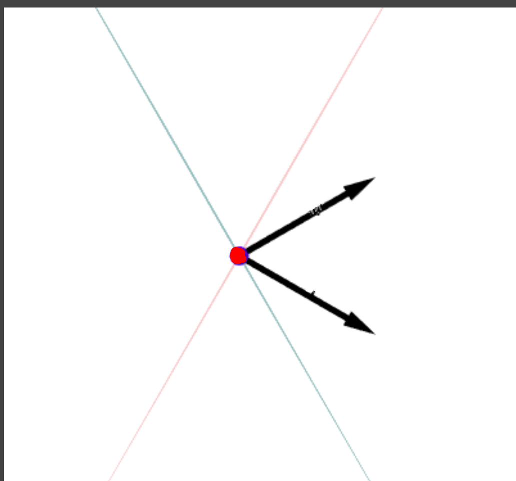
$2 + 2 \cdot 1 = 4$

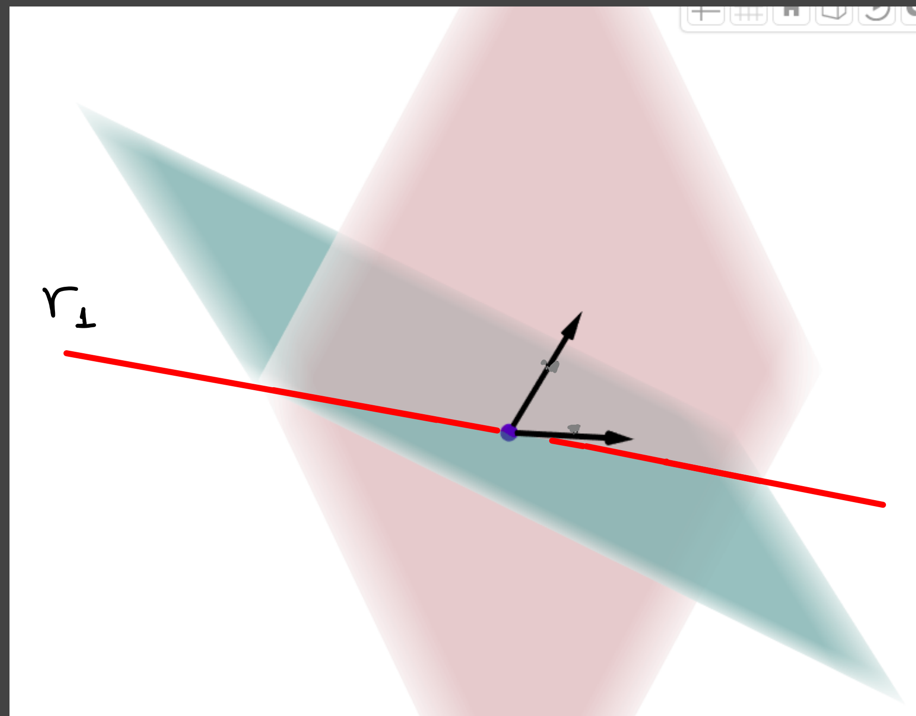
$\vec{v} = (-1, -2, 1)$ $\qquad$ $\vec{n} = (0, 1, 2)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-1, -2, 1) \cdot (0, 1, 2) = 0 - 2 + 2 = 0$ logo $\vec{v} \perp \vec{n}$

Verifico se $(2, 2, 1)$ pertence ao plano: r está contida em π.

Interseção de dois planos





Exemplo: Encontre a equação paramétrica da reta dada pela interseção destes dois planos:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

Matriz ampliada: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

fazendo Gauss-Jordan $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

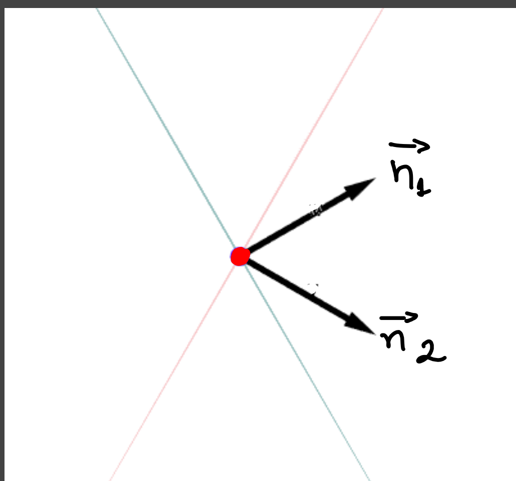
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

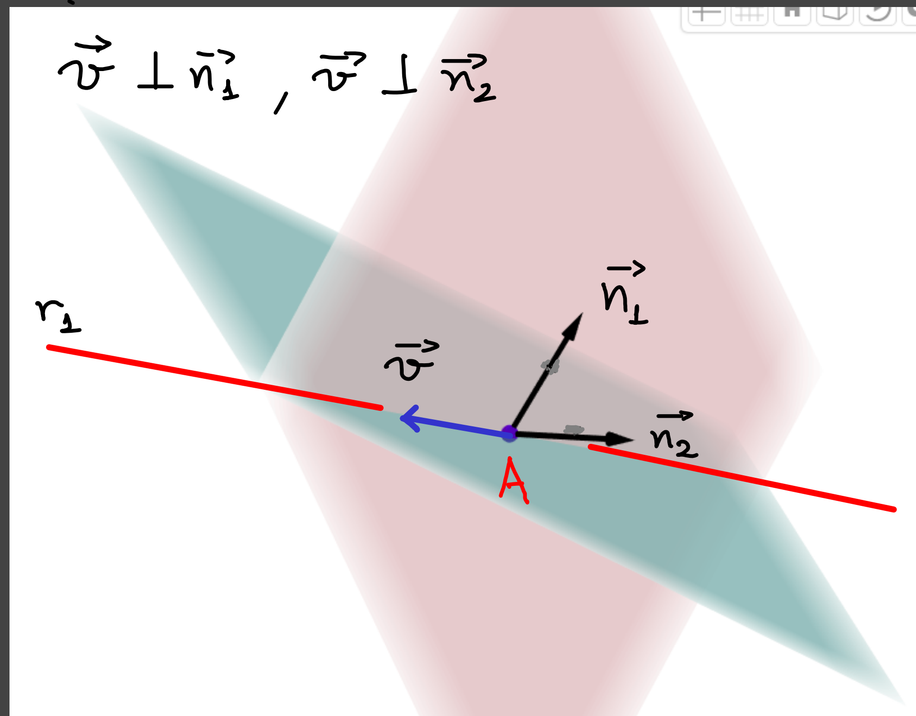
Resulta no sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

e o conjunto solução é a reta

$$r: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Segundo método:





$$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

Escolho, por exemplo $x = 0$, e resolvo

$$\begin{cases} -y - 3z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \end{cases}$$ para descobrir que $y = -1$ e $z = 0$.

Logo o ponto $(0, -1, 0)$ está na interseção.

Vetor diretor:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 4, 0)$$

equação paramétrica $r: \begin{cases} x = 4t \\ y = 4t - 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

$t =$

$s = -1$

resposta anterior: $r: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

Interseção de reta com plano:

$$r: \begin{cases} x = -2t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \pi: x + 2y - z = 0$$

Substitua $(-2t+1) + 2 \cdot 1 - t = 0$

logo $t = 1$ e o ponto de interseção é $(-1, 1, 1)$.

Caso a reta seja dada pela interseção de dois planos, então basta resolver o sistema

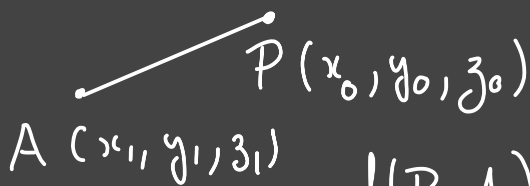
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases} \qquad \pi: x + 2y - z = 0$$

Matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

O sistema tem solução única $(-1, 1, 1)$.

3.3 Distâncias

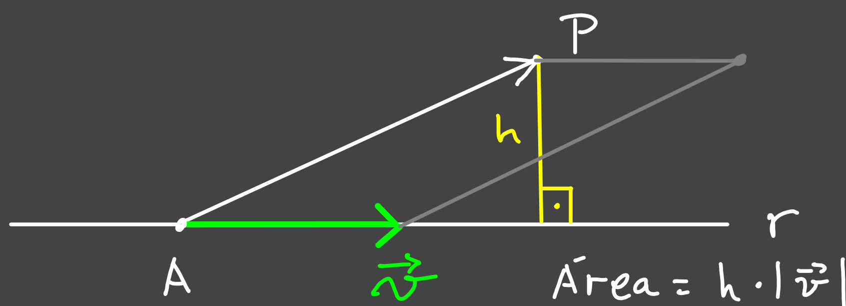
Distância entre pontos:



$$d(P,A) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Distância entre ponto e reta:

$d(P,r)$



$$\overbrace{d(P,r)}^{h} = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Exemplo: Calcule a distância da reta dada até a origem.

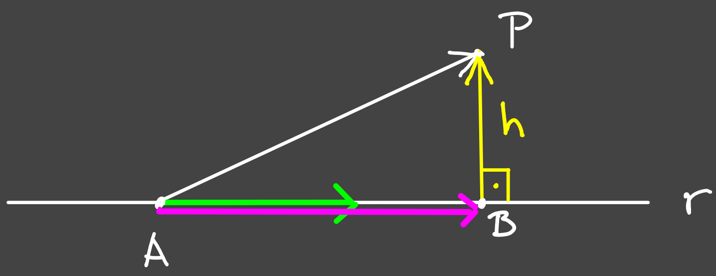
$$r: \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = -2 \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$P = (0,0,0)$, $A = (2,-2,1)$, $\overrightarrow{AP} = (-2,2,-1)$, $\vec{v} = (-3,0,1)$.

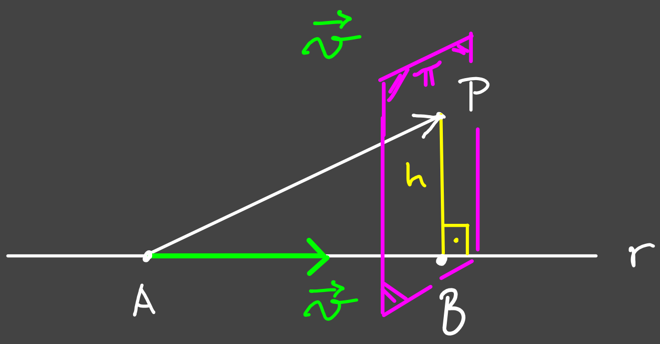
$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2,-5,-6).$$ Como $d(A,P) = \dfrac{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2}}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2}}$

temos $d(A,P) = \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{10}} = 2{,}54\ldots$

Outras formas de calcular distância de ponto a reta



$$h = \left| \vec{AP} - \text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{AP} \right|$$



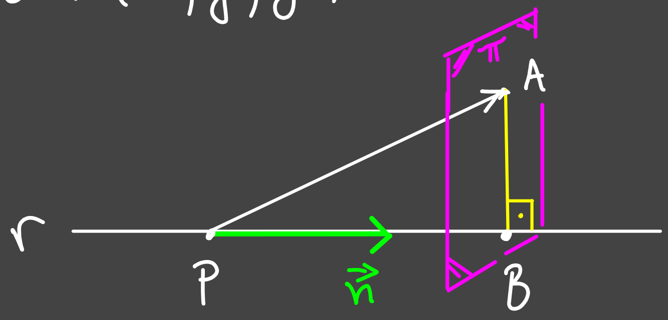
$\vec{v} = (a, b, c)$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ passa por P

B é o ponto de interseção da reta com o plano.

Distância de ponto a plano:

Plano π com normal $\vec{n}$ passando por A e P em (x_0, y_0, z_0):



$$\vec{PB} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{PA}$$

$$d(P,\pi) = \left| \text{proj}_{\vec{n}} \vec{PA} \right|$$

Obtendo uma fórmula para simplificar a conta:

Seja $\vec{n} = (a,b,c)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, temos, $d(P,\pi) =$

$$= \left| \text{proj}_{\vec{n}} \vec{PA} \right| = \left| \left(\frac{\vec{PA} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} \right| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|^2} |\vec{n}| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Observe que

$a x_1 + b y_1 + c z_1 + d = 0$, assim, $\vec{n} \cdot \vec{OA} = -d$.

Como $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP} \Rightarrow \vec{PA} \cdot \vec{n} = \vec{OA} \cdot \vec{n} - \vec{OP} \cdot \vec{n} = -d - (a x_0 + b y_0 + c z_0)$

logo $$d(P,\pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemplo: Calcule a disância da origem até o plano que passa pelos pontos (3,0,0), (0,2,0), (0,0,1).

Equação do plano $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}-1=0$ e

$P=(0,0,0)$. $\vec{n}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)$

Susbstituindo na fórmula:

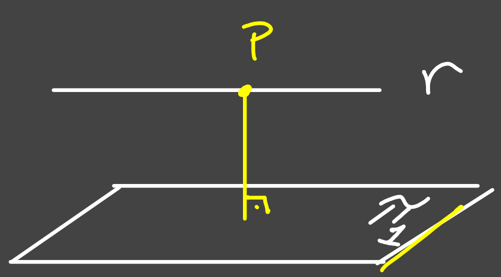
$$d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=$$

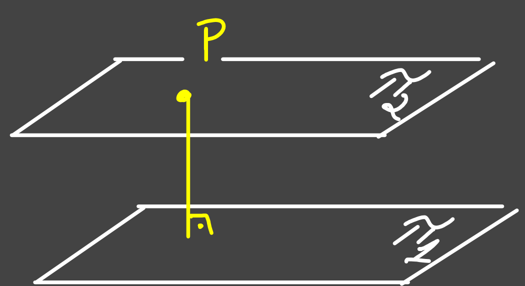
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1}}=0,857\ldots$$

Observe que a fórmula também é aplicável à distâncias:

* Entre planos paralelos.
* Entre reta e planos paralelos.

Para tanto basta pegar um ponto sobre a reta ou plano para calcular a distância.



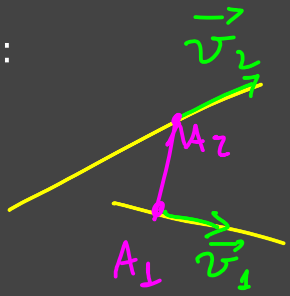


Distância entre duas retas:

* Se as retas forem concorrentes então a distância é zero.

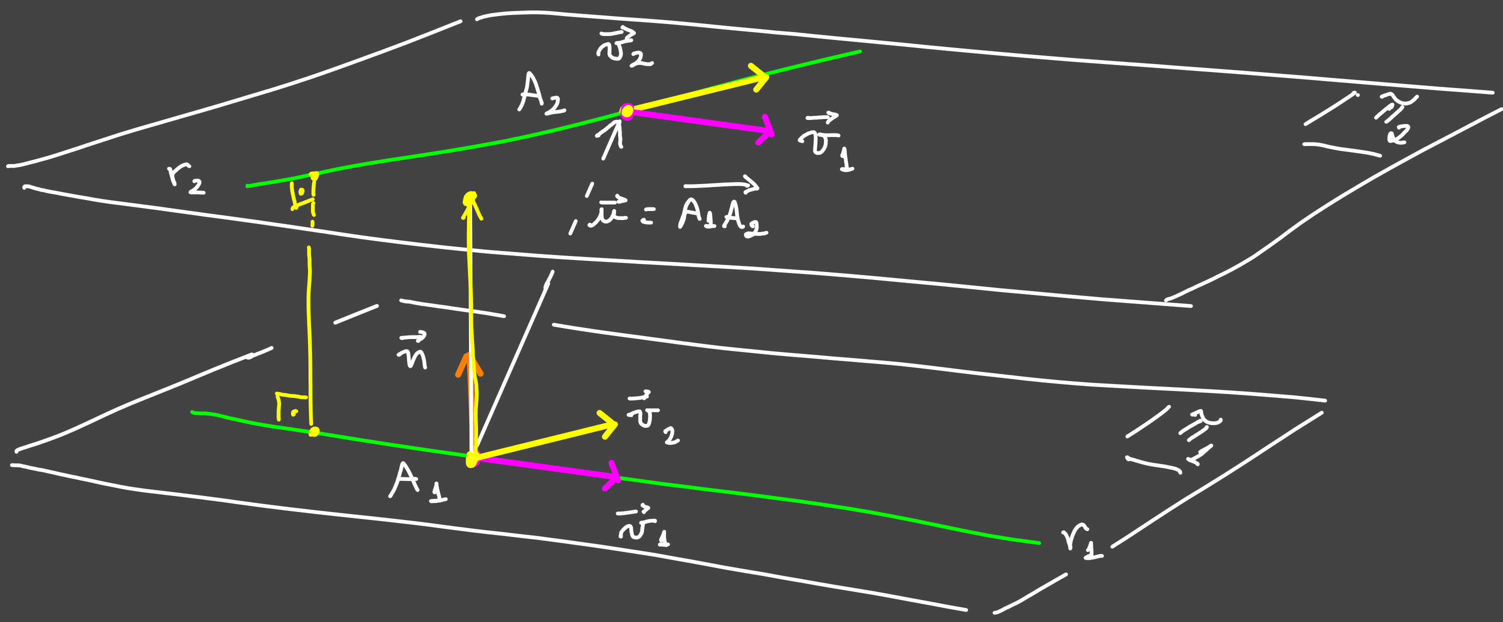
* Se as retas forem paralelas, basta calcular a distância de um ponto à outra reta.

* Se as retas forem reversas temos a seguinte fórmula:



$$d(r_1, r_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$$

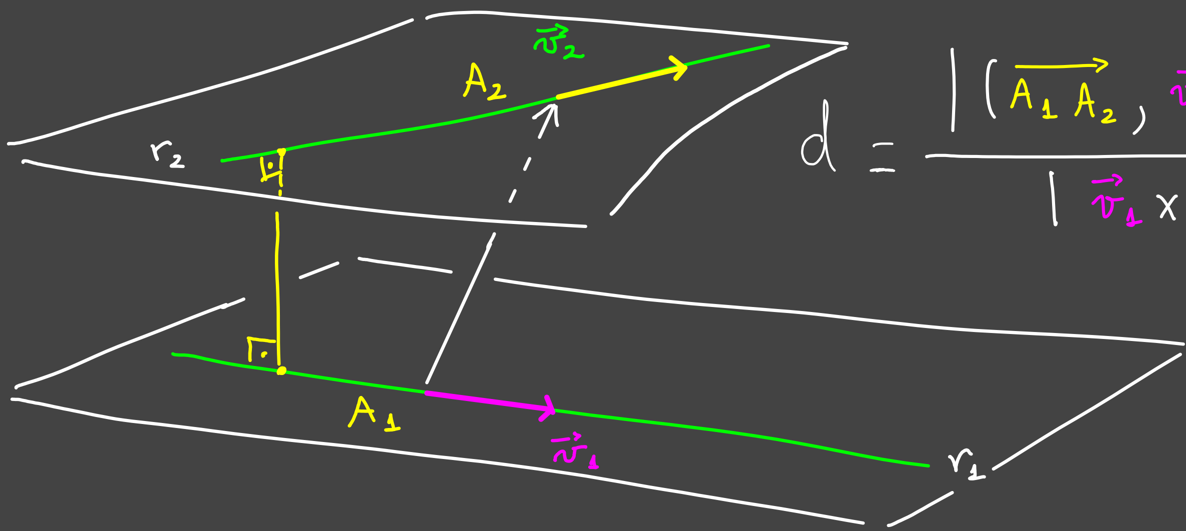
$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$



Vamos calcular o módulo da projeção ortogonal de $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$ na direção de $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\left| \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{u} \right| = \left| \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} \right| = \frac{\left| \vec{u} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \right|}{|\vec{n}|^2} |\vec{n}| = \frac{\left| (\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \right|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} =$$

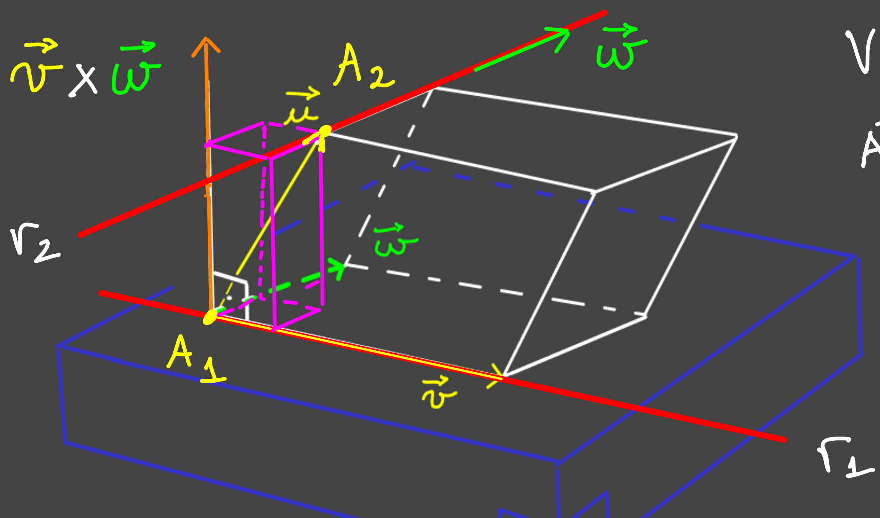
$$= \frac{\left| (\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \right|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$



$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\right)\right|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$$

Outra interpretação da fórmula

$$\frac{\left|\left(\underbrace{\overrightarrow{A_1A_2}}_{\vec{u}},\ \underbrace{\vec{v}_1}_{\vec{v}},\ \underbrace{\vec{v}_2}_{\vec{w}}\right)\right|}{|\underbrace{\vec{v}_1}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{v}_2}_{\vec{w}}|}$$



Volume $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$

Área da base $|\vec{v} \times \vec{w}|$

$$\text{Altura} = \frac{\text{Volume}}{\text{Área da base}}$$