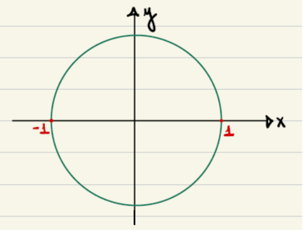
Derivação Implícita

Exemplo 1: Consideremos a equação

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

O conjunto dos pontos que a satisfazem é o círculo centrado na origem e de raio 1.



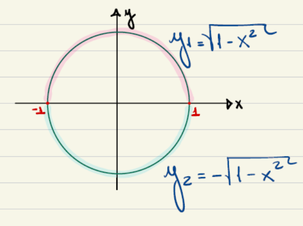
Para quais valores de (x_0, y_0) a relação (1) define y como função de x, $y = y(x)$, em uma vizinhança de (x_0, y_0)?

Resolvendo a equação (1), obtemos

(i) $y_1 = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$, ou

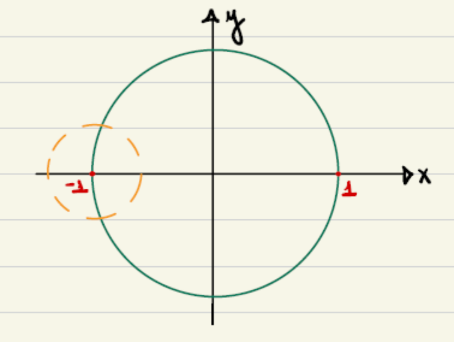
(ii) $y_2 = -\sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$.

A expressão em (i) descreve os pontos (x, y) do círculo com $y \geq 0$; a expressão em (ii) descreve os pontos (x, y) do círculo com $y \leq 0$.



As expressões em (i) e (ii) definem uma função $y = y(x)$ em uma vizinhança de qualquer ponto (x_0, y_0), com $y_0 \neq 0$. Isto significa que $(x_0, y_0) \neq (1, 0)$ e $(x_0, y_0) \neq (-1, 0)$.

Nas vizinhanças de $(1,0)$ e $(-1,0)$ é impossível se obter y como função de x.



Teorema da Função Implícita

O Teorema da Função Implícita nos permitirá estabelecer condições para que uma equação da forma

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

possa definir y como função de x, $y = y(x)$.

Nesse caso diremos que a equação (2) define implicitamente y como função de x.

Exemplo 2: Consideremos a função

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Vamos admitir que existe uma função $y = y(x)$ satisfaz a equação

$$F(x, y) = 0,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2(x) = 1.$$

Derivando esta equação em relação à x, obtemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Logo, para $y \neq 0$, temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Relembrando e Exemplo 1,

(i) $y_1 = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$, ou

(ii) $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$.

Chegaríamos ao mesmo resultado derivando diretamente as funções dadas em (i) e (ii). De fato, derivando, por exemplo, a expressão em (i), obtemos

$$(y_1(x))' = (\sqrt{1 - x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Supondo que uma equação genérica

$$F(x, y) = 0$$

define $y = y(x)$, para x pertencente a algum intervalo aberto, podemos, sob certas condições para F, calcular dy/dx em função de x e de $y(x)$.

De fato, usando a regra da cadeia para derivar a relação

$$F(x, y(x)) = 0$$

com respeito à x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0.$$

Logo, com a condição suplementar

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$$

podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Este procedimento para o cálculo de dy/dx é chamdao de **derivação implícita**.

Exemplo 3: Consideremos a equação

$$xy + \cos(xy) = 0. \tag{3}$$

Vamos admitir que existe uma função $y = y(x)$ que a satisfaz e encontrar dy/dx.
Derivando implicitamente a equação (3) com respeito à x, obtemos

$$y + x\frac{dy}{dx} - \left(y + x\frac{dy}{dx}\right)\operatorname{sen}(xy) = 0.$$

Logo, para x tal que $x - x\operatorname{sen}(xy) \neq 0$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\operatorname{sen}(xy) - y}{x - x\operatorname{sen}(xy)}.$$

Teorema da Função Implícita:(Função de duas variáveis) Seja $F(x, y)$ uma função com derivadas parcias contínuas $\partial F/\partial x$ e $\partial F/\partial y$ em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Seja $(x_0, y_0) \in U$ um ponto satisfazendo

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, existe um intervalo aberto I, contendo x_0, e uma única função, $f = f(x)$, definida em I que satisfaz

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad F(x, f(x)) = 0, \quad \text{para todo}\, x \in I.$$

Além disso, f é diferenciável em I e

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \qquad \text{para todo}\, x \in I.$$

Exemplo 4: Verifique que a equação

$$x^3y^3 - x - y + 1 = 0$$

define y implicitamente como função de x numa vizinhança do ponto $(1,1)$ e obtenha a derivada de $y = f(x)$ quando $x = 1$.

Resolução: Definimos $F(x,y) = x^3y^3 - x - y + 1$ e consideremos a equação $F(x,y) = 0$.

Temos $F(1,1) = 0$. As derivadas parciais

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^3 - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^3y^2 - 1,$$

são contínuas (em todo o plano $\mathbb{R}^2$). Ainda temos $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, a equação

$$F(x, y) = x^3y^3 - x - y + 1 = 0,$$

define $y = f(x)$ implicitamente como função de x e

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, f(1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, f(1))} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -1.$$

Teorema da Função Implícita:(Função de três variáveis) Seja $F(x,y,z)$ uma função com derivadas parcias contínuas $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ e $\partial F/\partial z$ em um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$. Seja $(x_0,y_0,z_0)\in U$ um ponto satisfazendo

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

Então, existe uma bola aberta B, contendo (x_0,y_0), e uma única função, $f=f(x,y)$, definida em B que satisfaz

$$f(x_0,y_0)=z_0 \quad \text{e} \quad F(x,y,f(x,y))=0, \quad \text{para todo}\,(x,y)\in B.$$

Além disso, f possui deivadas parciais em B e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))},$$

para todo $(x,y)\in B$.

Exemplo 5: Verifique que a equação

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 9 \tag{4}$$

define z como uma função de (x, y) numa vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$ e calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

Resolução: Seja $F(x, y, z) = x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y-9$. Observemos que $F(1, 0, 1) = 0$. As derivadas parcias

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 8z^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y - 3z^3, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 16xz - 9z^2y,$$

são contínuas (em $\mathbb{R}^3$). Também temos $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) = 16 \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, a equação (4) define $z = f(x, y)$ numa vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$.

Ainda mais,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = -\frac{11}{16}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = \frac{3}{16}.$$

Referências:

• Diomara Pinto, Maria Cândida Ferreira Morgado: Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis. Editora UFRJ, 2015.

• Jacques C. Bouchara, Vera L. Carrara, Ana Catarina P. Hellmeister, Reinaldo Salvitti: Cálculo Integral Avançado. edusp, 2016.