Também na Questão 4

Classifique a cônica de equação
$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

Escolha uma opção:

- um único ponto
- elipse
- parábola
- duas retas paralelas
- duas retas concorrentes
- hipérbole
- conjunto vazio

→ Invariantes associado às cônicas.

-> Invariantes associados às cônicas

Foma matricial de escrever as cônicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Defina as matrizes $Q = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$, e $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$

$$V^t Q V = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

é a parte quadrática da cônica.

Truque: Podemos reescrever a cônica assim:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0$$

e fixar $z = 1$ e definir a matriz

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ (pois $z = 1$.)

$M = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$ assim a cônica fica igual a com $z=1$

forma matricial geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = \underbrace{P^t M P = 0}_{\text{vamos usar}}$$

na qual

$$\underline{P^t M P} = [x \;\; y \;\; 1] \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Rotação e translação na forma matricial

Rotação de eixos no sentido anti-horário:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \boxed{V = RV'}$$

$(c^2 + s^2 = 1)$

Obs $\det R = 1$

$$[x \;\; y] \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V^t Q V = (RV')^t Q (RV') =$$

$$= V'^t \cdot [R^t \cdot Q \cdot R] \cdot V' = V'^t Q' V'$$

$$\underline{Q' = R^t Q R}, \qquad Q' = \begin{bmatrix} A' & B'/2 \\ B'/2 & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} A' = A c^2 + B cs + C s^2 \\ B' = 2(C - A) cs + B(c^2 - s^2) = 0 \\ C' = A s^2 - B cs + C c^2 \end{cases}$$

$P^t M P = 0$ é a cônica geral

Obs: $\det \tilde{R} = 1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{P = \tilde{R} P'}$$

$$P^t M P = (\tilde{R} P')^t M \tilde{R} P' = P'^t \tilde{R}^t M \tilde{R} P' = P'^t M' P'$$

no qual: $\underbrace{M' = \tilde{R}^t M \tilde{R}}$ $= \begin{bmatrix} A' & 0 & D'/2 \\ 0 & C' & E'/2 \\ D'/2 & E'/2 & F' \end{bmatrix}$

Fórmulas usadas ↘

$$\boxed{\begin{cases} A' = A c^2 + B c s + C s^2 \\ B' = 0 \\ C' = A s^2 - B c s + C c^2 \\ D' = D c + E s \\ E' = -D s + E c \\ F' = F \end{cases}}$$

$$P'^t M' P = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 & D'/2 \\ 0 & C' & E'/2 \\ D'/2 & E'/2 & F' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Primeiro invariante $\Delta = B^2 - 4AC$

Da propriedade de determinante:

$$\begin{cases} \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \\ \det(A^t) = \det(A) \end{cases}$$

resulta que $Q' = R^t Q R$ $\qquad \det(R) = 1$

$$Q = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

$$\det Q' = \det(R^t Q R) =$$

$$= \underbrace{\det(R^t)}_{1} \cdot \det(QR) = \det(Q) \cdot \det(R) = \det(Q)$$

$$\det Q' = \det Q \qquad Q' = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{bmatrix}$$

$$\det Q = AC - \left(\frac{B}{2}\right)^2 = AC - \frac{B^2}{4} = \left(-\frac{1}{4}\right)\Delta$$

Translação:

$$\begin{cases} x'' = x' - h \\ y'' = y' - k \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}}_{P'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}}_{P''}$$

$$P' = T P''$$

$$\det(T) = 1$$

Assim, $P'^t M' P = (TP'')^t M' TP'' =$

$= (P'')^t T^t M' T P'' = P''^t (T^t M' T) P''$

$M'' = T^t M' T$

$$= \begin{bmatrix} x'' & y'' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'' & B'' & D''/2 \\ B'' & C'' & E''/2 \\ D''/2 & E''/2 & F'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$A''x''^2 + B''x''y'' + C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0$$

com

- $A'' = A'$
- $B'' = B'$
- $C'' = C'$
- $D'' = 2A'h + B'k + D'$
- $E'' = 2C'k + B'H + E'$
- $F'' = A'h^2 + B'hk + C'k^2 + d'h + E'k + F'$

• Segundo invariante: $\det M = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix}$

Recapitulando: $P^t M P = Ax^2 + Bxy + \cdots + F = 0$

$$P^t M P = P'^t M' P' = P''^t M'' P''$$

$$M' = \tilde{R}^t M R \quad \text{e} \quad M'' = T^t M' T.$$

(com $\det \tilde{R}^t = 1$, $\det R = 1$, $\det T^t = 1$, $\det T = 1$)

usando a propriedade de produto de det.

provamos que $\det(M) = \det(M'')$.

Ao chegar em M'' podemos ter várias formas

$$M'' = \begin{bmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & C'' & 0 \\ 0 & 0 & F'' \end{bmatrix} \qquad A''(x'')^2 + C''(y'')^2 = -F''$$

$$\underbrace{\det(M'')}_{A''.C''.F''} = \boxed{\det(M)}$$

$Q'' = \begin{bmatrix} A'' & 0 \\ 0 & C'' \end{bmatrix}$, $\det Q = \det Q''$, $\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$

$$\Delta = -\frac{1}{4}\det Q$$

Agora podemos classificar as cônicas. Por exemplo:

-> elípse / círculo se $\Delta < 0$ e $\det M < 0$

-> formas degeneradas da elipse $\begin{cases} \text{um ponto se } \Delta < 0 \text{ e } \det M = 0 \\ \text{vazio se } \Delta < 0 \text{ e } \det M > 0 \end{cases}$

Classificação das cônicas

primeiro invariante

$$\boxed{\Delta = B^2 - 4AC \;-\; \Delta'' = -4A''C''}$$

Geometria Analítica — Mozilla Firefox

https://www.dm.ufscar.br/profs/caetano/ead/vga/conica_classifi 120%

Como veremos a seguir, as cônicas são classificadas através dos valores desses dois discriminantes, Δ e $\det(M)$, da seguinte maneira:

1. se $\Delta < 0$ então a cônica é uma elipse ou degenerações, sendo:
   - uma elipse, se $\Delta < 0$ e $\det(M) < 0$
   - um ponto, se $\Delta < 0$ e $\det(M) = 0$
   - o conjunto vazio, se $\Delta < 0$ e $\det(M) > 0$
2. se $\Delta > 0$ então a cônica é uma hipérbole ou degenerações, sendo:
   - uma hipérbole, se $\Delta > 0$ e $\det(M) \neq 0$
   - duas retas concorrentes, se $\Delta > 0$ e $\det(M) = 0$
3. se $\Delta = 0$ então a cônica é uma parábola ou degenerações, sendo:
   - uma parábola, se $\Delta = 0$ e $\det(M) \neq 0$
   - uma única reta ou duas retas paralelas, se $\Delta = 0$ e $\det(M) = 0$

Caso $\Delta'' = -4A''C'' \neq 0$

$$\begin{cases} A''(x'')^2 + C''(y'')^2 = -F'' \\ \Delta = -4A''C'' \\ \underbrace{\det M'' = A''C''F''}_{} \end{cases}$$

$\boxed{\det M = \det M'' \text{ é o } 2^{\circ} \text{ invariante}}$

Ou $A'' = 0$ com $E'' \neq 0$

ou $C'' = 0$ com $D'' \neq 0$

$$M'' = \begin{bmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E''/2 \\ 0 & E''/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & D''/2 \\ 0 & C'' & 0 \\ D''/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A''(x'')^2 + E''y'' = 0 \qquad\qquad C''(y'')^2 + D''x'' = 0$$

Parábolas degeneradas:

$$M'' = \begin{bmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F'' \end{bmatrix} \text{ ou } M'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C'' & 0 \\ 0 & 0 & F'' \end{bmatrix}$$

$$A''(x'')^2 + F'' = 0 \qquad\qquad C''(y'')^2 + F'' = 0$$

Q 4 do Simulado

Classifique a cônica de equação
$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

Escolha uma opção:
- um único ponto
- elipse
- parábola
- duas retas paralelas
- duas retas concorrentes
- hipérbole
- conjunto vazio

$A = 1$
$B = -2$
$C = 1$
$D = 2$
$E = -4$
$F = 1$

$\Delta = B^2 - 4AC$

$\det M$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - \cancel{1} - 1 - \cancel{4} = -1$$

como $\Delta = 0$ e $\det M \neq 0$ esta cônica é uma parábola.