Matemática Discreta

Demonstração de Teoremas
Definições

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Demonstração de Teoremas

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar conceitos, notações e terminologia importantes na demonstração de teoremas
  - Apresentar as formas mais usuais de expressar teoremas
    - se-então
    - se-e-somente-se (sse)
  - Apresentar estratégias simples
    - Prova por refutação (contraexemplo)
    - Prova por exaustão
  - Apresentar a prova como um “algoritmo”
  - Capacitar o aluno a compreender Teoremas

Problema #3

- **Provar/refutar**

Se n é um número primo, então 2^n-1 também é primo.

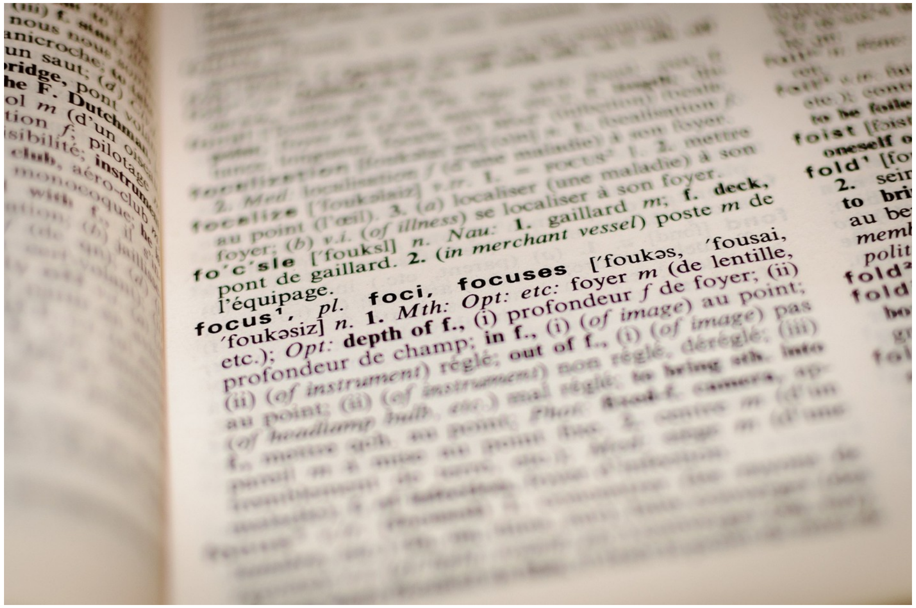
O que já sabemos e o que ainda precisamos saber para resolver este problema?

Demonstração de Teoremas

- **Definição**
  - Os objetos matemáticos são abstratos e, portanto, só passam a existir por meio das definições

Demonstração de Teoremas

- **Definição**



Fonte: https://pixabay.com/

➔ Uma **definição** estabelece condições específicas para que um objeto seja o que ele é de modo <u>completo</u> e <u>preciso</u>

Demonstração de Teoremas

- **Definição**
  - Os objetos matemáticos são abstratos e, portanto, só passam a existir por meio das definições
  - Exemplo:

"Um inteiro n é um múltiplo de um inteiro p se, e somente se, existe um inteiro q tal que n = pq"

$(\forall n, p \in \mathbb{Z})\ (n \text{ é um múltiplo de } p) \leftrightarrow ((\exists q \in \mathbb{Z})\ n = pq)$

➔ Essa definição estabelece, de forma clara, o que é um "múltiplo" para os números inteiros

Demonstração de Teoremas

- **Conjetura (ou conjectura)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **conjetura** é uma afirmação para a qual <u>ainda não existe prova</u>, mas que provavelmente é verdadeira

Demonstração de Teoremas

- **Conjetura (ou conjectura)**
  - Diz-se que uma conjetura ainda não demonstrada é uma conjetura aberta
    - Exemplo
      - A conjetura de Goldbach afirma que “todo número inteiro par maior que 2 é a soma de dois números primos”
      - Essa conjetura já foi demonstrada para todos os inteiros pares entre 4 e 4 x 10^{14}, mas isso não constitui uma prova

Demonstração de Teoremas

- **Teorema**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um **teorema** é uma afirmação (conjetura) <u>devidamente demonstrada</u>
- No nosso contexto, um **teorema** é uma afirmação sobre matemática, para a qual existe uma <u>prova</u>

Demonstração de Teoremas

- **Teorema – Outras designações**
  - Resultado – uma expressão modesta para teorema
  - Fato – um teorema de importância bastante limitada
    - Exemplo: 2+2=4
  - Proposição – um teorema de importância secundária. Mais importante ou mais geral que um fato, mas não tem tanto prestígio quanto um teorema
  - Lema (ou Alegação) – um teorema cujo objetivo principal é ajudar a provar outro teorema mais importante. Lemas são partes ou instrumentos usados para elaborar uma prova complicada
  - Corolário – resultado com uma prova rápida, cujo passo principal é o uso de outro teorema provado anteriormente

Demonstração de Teoremas

- **Teorema – Formas de expressar**
  - Se-então

Se A então B

- ➔ Sempre que a hipótese (condição ou premissa) A for verdadeira, a conclusão (tese) B também será
- Exemplo:

“A soma de dois números inteiros pares é par”

Se x e y são inteiros pares, então x+y também é par

Demonstração de Teoremas

- **Teorema – Formas de expressar**
  - Se-e-somente-se

A se e somente se B

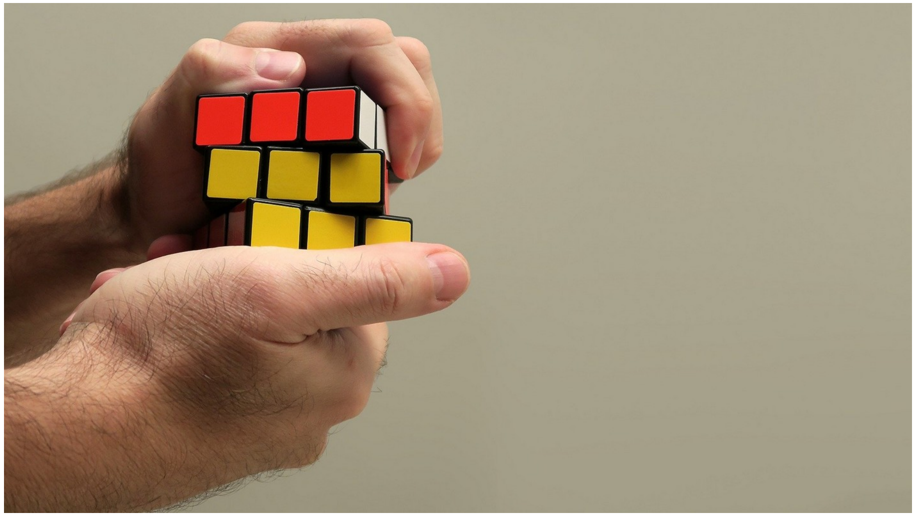
  - → É uma maneira concisa de expressar "Se A então B, e se B então A"
  - Exemplo:

"Se um inteiro x é par, então x+1 é ímpar, e se x+1 é ímpar, então x é par"

Um inteiro x é par <u>se e somente se</u> x+1 é ímpar

Demonstração de Teoremas

- **Prova**



Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **prova** é uma dissertação que mostra, de maneira <u>irrefutável</u>, que uma afirmação é verdadeira

Demonstração de Teoremas

- **Prova**
  - É possível encontrar várias demonstrações (provas) diferentes para um mesmo teorema
  - ➔ A prova é um excelente meio para se aprender a pensar claramente e logicamente
  - ➔ Auxilia a construção de raciocínio estruturado, útil para a formulação e resolução de problemas em computação

- **Prova**
  - Em geral, a prova:
    - ✔ Deve ser curta
    - ✔ Deve ser fácil de compreender
    - ✔ Deve envolver passos simples
    - ✔ Deve usar estratégias familiares para quem faz a prova
  - Para provar um teorema, **NÃO** é suficiente:
    - ✗ Afirmar que a conjetura é “óbvia”
    - ✗ Apresentar muitos exemplos específicos para uma afirmação genérica
    - ✗ Apresentar apenas evidências ou apelar para o bom senso

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Múltiplo**
    - Um inteiro *n* é *múltiplo* de um inteiro *p* se, e somente se, existe um inteiro *q* tal que $n = pq$.
  - **Divisor**
    - Um inteiro *b* *divide* um inteiro *a* (é um *divisor* de *a*) se, e somente se, *a* é múltiplo de *b*.
    - → Dizemos que *a* é *divisível* por *b*
    - → A notação correspondente é $b|a$

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Par**
    - Um inteiro n é *par* se ele é múltiplo de 2.
    - Um inteiro n é *par* se for divisível por 2.
  - **Ímpar**
    - Um inteiro a é *ímpar* desde que haja um inteiro x de modo que $a = 2x + 1$.
    - Se um inteiro não é par, dizemos que ele é *ímpar*.

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Primo**
    - Um inteiro p é *primo* se $p > 1$ e se os únicos divisores positivos de p são 1 e p.
  - **Composto**
    - Um número positivo a é *composto* se existe um inteiro b de modo que $1 < b < a$ e $b|a$.

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Positivo**
    - Um inteiro p é *positivo* se $p > 0$.
  - **Negativo**
    - Um inteiro p é *negativo* se $p < 0$.
  - **Neutro**
    - 0 é dito *neutro*, pois não é nem positivo nem negativo.

Demonstração de Teoremas

- **Provando um teorema**

Fonte: https://pixabay.com/

Demonstração de Teoremas

- **Provando um teorema**
  - Exemplo:

    "Todo número primo é ímpar"

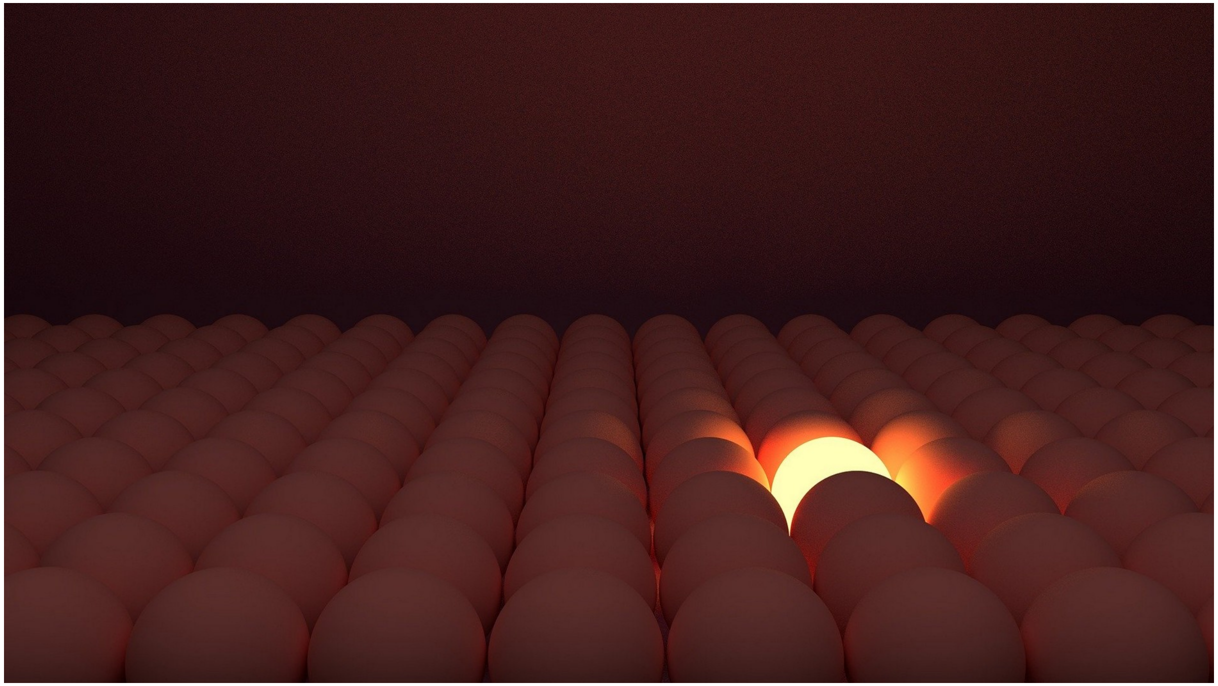
    - Essa afirmação é falsa, pois 2 é primo e 2 é par
    - Esse exemplo (chamado de <u>contraexemplo</u>) contradiz a afirmação acima, logo ela não pode ser verdadeira

Demonstração de Teoremas

- **Provando um teorema**
  - Uma prova de que uma afirmação é verdadeira não pode ser baseada em casos específicos
  - Ela deve ser válida para rigorosamente TODOS os objetos a que se refere
    - Basta um caso que “fure” a afirmação para que ela não seja verdadeira
  - No exemplo anterior, apresentou-se uma prova de que a afirmação é falsa, o que chamamos de refutação

Demonstração de Teoremas

- **Prova por refutação (contraexemplo)**



Fonte: https://pixabay.com/

Demonstração de Teoremas

- **Prova por refutação (contraexemplo)**
  - Refutar uma afirmação significa provar que ela é falsa, o que é geralmente muito mais fácil do que provar que uma afirmação é verdadeira
  - A maneira mais simples de provar que uma afirmação é falsa é apresentar um <u>contraexemplo</u> para aquela afirmação, isto é, mostrar um único caso específico para o qual a afirmação não seja verdadeira

Demonstração de Teoremas

- **Prova por refutação (contraexemplo)**
  - Exemplo:

“***<u>Se</u> um número inteiro x é maior que 2, <u>então</u> x é par***”

Verdadeiro → **Falso**

- Provar/refutar
  - Por contraexemplo, basta encontrar um inteiro que torne a <u>hipótese verdadeira</u> e a <u>conclusão falsa</u>
  - Hipótese verdadeira: 3 é um inteiro maior do que 2
  - Conclusão falsa: 3 é par (isso é falso!)

Demonstração de Teoremas

- **Prova por refutação (contraexemplo)**
  - Exemplo:

$$\text{“}\underbrace{\textit{Um número inteiro x é positivo}}_{}\ \underline{\textit{se e somente se}}\ \underbrace{\textit{x+1 é positivo}}_{}\text{”}$$

Verdadeiro → **Falso**

Falso → **Verdadeiro**

- Provar/refutar
  - Por contraexemplo, basta encontrar um número que torne a hipótese verdadeira e a conclusão falsa ou vice-versa
  - Hipótese falsa: x = 0 é positivo (isso é falso!)
  - Conclusão verdadeira: x+1=1 é positivo

Demonstração de Teoremas

- **Prova por exaustão**

Fonte: https://pixabay.com/

Demonstração de Teoremas

- **Prova por exaustão**
  - Embora provar a falsidade por um contraexemplo sempre funcione, provar por um ou poucos exemplos quase nunca funciona
  - Uma exceção ocorre quando a conjetura é uma asserção sobre uma coleção finita
  - Nesse caso a conjetura pode ser provada verificando-se que ela é verdadeira para cada elemento da coleção
  - ➔ Uma demonstração por exaustão significa que foram exauridos todos os casos possíveis

Demonstração de Teoremas

- **Prova por exaustão**

"Se um inteiro entre 1 e 15 é divisível por 6, então também é divisível por 3"

- Provar/refutar
  - Basta listar os números de 1 a 15 e sempre que encontrar um número que é divisível por 6 (= hipótese verdadeira) ele também terá de ser divisível por 3 (= conclusão verdadeira)

Número	Divisível por 6?	Divisível por 3?
1	não	não
...		
6	sim: 6 = 1*6	sim: 6 = 2*3
...		
12	sim: 12 = 2*6	sim: 12 = 4*3
...		

Demonstração de Teoremas

- **Prova como um "algoritmo"**
  - Entrada
    - Uma <u>conjetura</u>
  - Processamento = A prova
    - Cada um dos passos envolvidos na prova
      - Deve ser precisamente fundamentado, com base em definições, propriedades ou resultados já conhecidos
      - Deve também ser colocado de forma genérica, ou seja, válida para todos os objetos aos quais o teorema se refere
  - Saída
    - Quando é possível apresentar uma prova dessa conjetura, ela pode então ser chamada de <u>teorema</u>

Problema #3

- **Provar/refutar**

<u>Se</u> n é um número primo, <u>então</u> 2^n-1 também é primo.

Prova:
Vamos mostrar que, se n é um número primo, então $2^n - 1$ também é primo.
Seja n = 11 e, portanto, um número primo.
Contudo, observe $2^{11} - 1 = 2047$ e 2047 não é primo, uma vez que 2047 = 23 x 89.
Portanto, demonstramos por contraexemplo que a afirmação é falsa e, como tal, não é um teorema.