Aula 6

Esboçando gráficos: primeiros passos

Existe o processo simples de esboçar-se o gráfico de uma função contínua ligando-se um número finito de pontos $P_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots, P_n = (x_n, f(x_n))$, de seu gráfico, no plano cartesiano Oxy, por uma curva suave. Mas este procedimento nem sempre revela as nuances do gráfico. Nesta aula veremos como as derivadas são ferramentas fundamentais para o esboço de gráficos de funções deriváveis. As derivadas nos dão informações qualitativas que não podem ser descobertas através de uma simples plotagem de pontos.

6.1 Crescimento e decrescimento

Definição 6.1.
A função $f(x)$ é crescente no intervalo I ($I \subset \mathbb{R}$) se, nesse intervalo, quando x aumenta de valor, $f(x)$ também aumenta de valor.
Em outras palavras, f é crescente se vale a implicação

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

A função $f(x)$ é decrescente no intervalo I ($I \subset \mathbb{R}$) se, nesse intervalo, quando x cresce em valor, $f(x)$ decresce. Em outras palavras, f é decrescente se vale a implicação

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

Figura 6.1. f é crescente em um certo intervalo I.

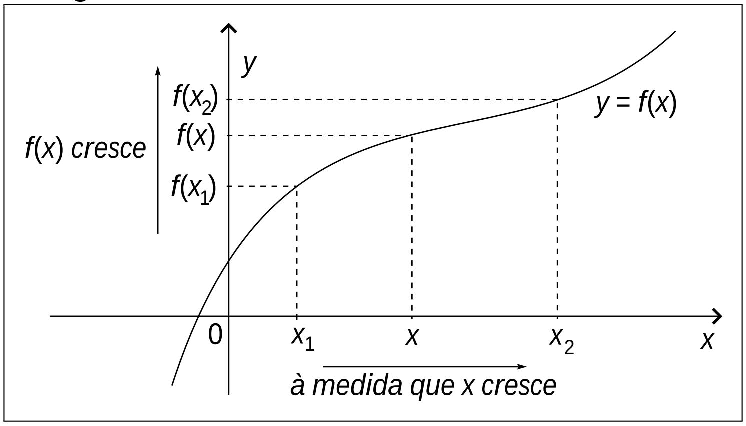
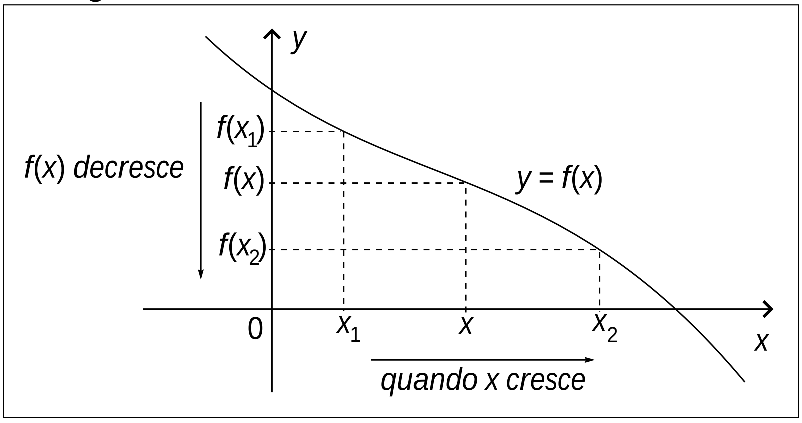


Figura 6.2. f é decrescente em um certo intervalo I.



Teorema 6.1. *Suponhamos que* f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e tem derivada nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$.

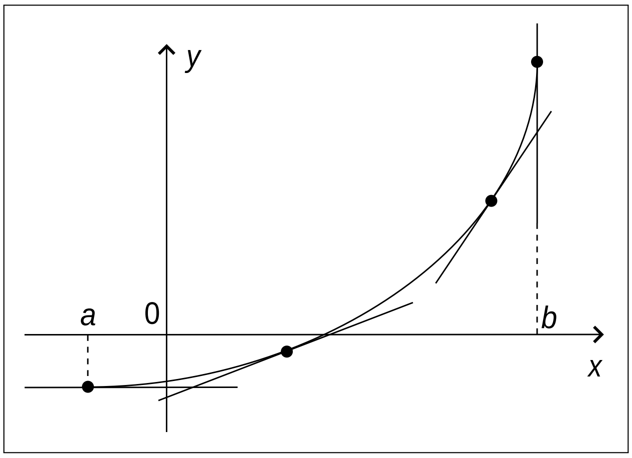
1. *Se* $f'(x) > 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$ *, então* f *é crescente no intervalo* $[a, b]$.
2. *Se* $f'(x) < 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$ *, então* f *é decrescente no intervalo* $[a, b]$.

Não iremos demonstrar o teorema 6.1 aqui. Iremos apenas ilustrar geometricamente o fato de que esse teorema é bastante plausível.

Na figura 6.3, em que f é crescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a direita. Daí os coeficientes angulares dessas retas são todos positivos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) > 0$ para cada $c \in]a, b[$.

O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser levado em

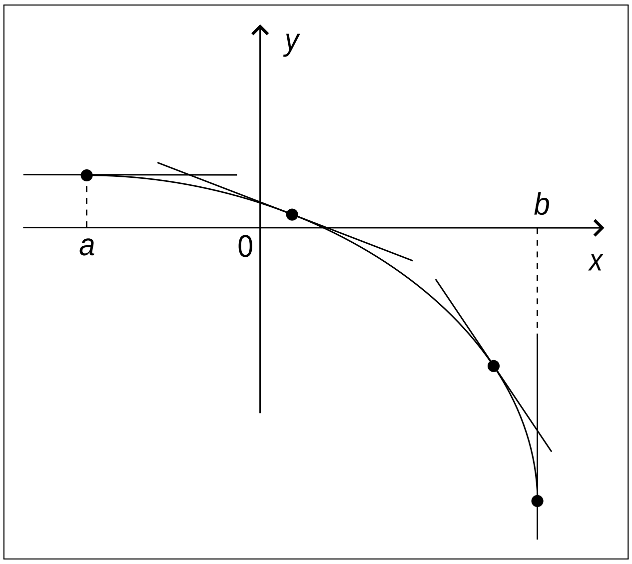
Figura 6.3. Os coeficientes angulares, das retas tangentes, sempre positivos, é indicativo de função crescente.



consideração. Na figura 6.3, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = +\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$).

Na figura 6.4, em que f é decrescente em um certo intervalo $[a, b]$, todas as retas tangentes ao gráfico de f, no intervalo $]a, b[$, são inclinadas para a esquerda. Daí os coeficientes angulares dessas retas são todos negativos. Como o coeficiente angular em um ponto $P = (c, f(c))$ é $f'(c)$, temos $f'(c) < 0$ para cada $c \in]a, b[$.

Figura 6.4. Os coeficientes angulares, das retas tangentes, sempre negativos, é indicativo de função decrescente.

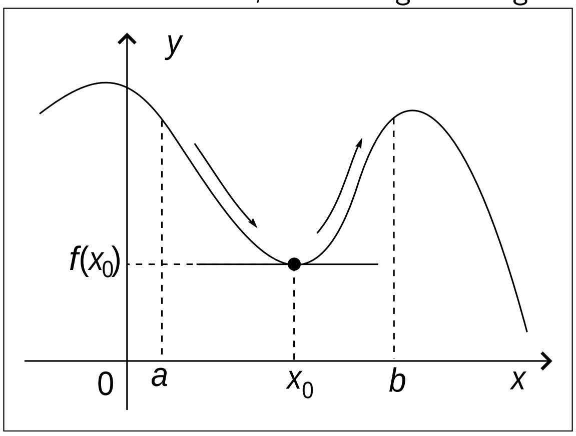


O comportamento de $f'(x)$ nos extremos do intervalo não precisa ser levado em consideração. Na figura 6.4, temos $f'(a) = 0$ e $f'(b) = -\infty$ (a reta tangente em $(b, f(b))$ é vertical, $\lim_{x\to b^-} f'(x) = -\infty$).

Definição 6.2 (Pontos de máximo e pontos de mínimo locais).
Um ponto x_0*, no domínio da função* f*, é um* ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo* $[a, b]$ *contido no domínio de* f*, com* $a < x_0 < b$*, tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* x *em* $[a, b]$*.*
Isto ocorre, por exemplo, no caso em que existem intervalos $[a, x_0]$ *e* $[x_0, b]$ *contidos em* $D(f)$ *tais que* f *é decrescente em* $[a, x_0]$ *e é crescente em* $[x_0, b]$*. Veja figura 6.5.*

Se, ao contrário, $f(x) \leq f(x_0)$, para todo x em $[a, b]$, x_0 é um *ponto de máximo local de* f.
Isto se dá, por exemplo, quando existem intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em $D(f)$ tais que f é crescente em $[a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b]$. Veja figura 6.6.

Figura 6.5. x_0 é um ponto de mínimo local de f. Note que $f'(x_0) = 0$ se f tem derivada em x_0 pois, em um ponto de mínimo local, a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.



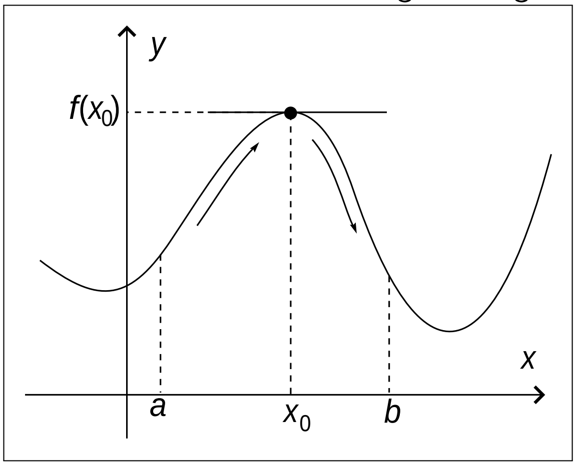
6.2 Derivadas de ordem superior e concavidades do gráfico

Sendo f uma função, definimos f' como sendo a função derivada de f, e f'' (lê-se "f duas linhas") como sendo a derivada da derivada de f, ou seja

$$\boxed{f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}}$$

É costume denotar também, sendo $y = f(x)$,

Figura 6.6. x_0 é um ponto de máximo local de f. Note que $f'(x_0) = 0$ se f tem derivada em x_0 pois, em um ponto de máximo local, a reta tangente ao gráfico deve ser horizontal.



$$\boxed{f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

A notação $\frac{d^2y}{dx^2}$ é lida "de dois y de x dois".

Analogamente, definem-se

$$\boxed{f'''(x) = f^{(3)}(x) = (f''(x))' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

e para cada $n \geq 2$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}$$

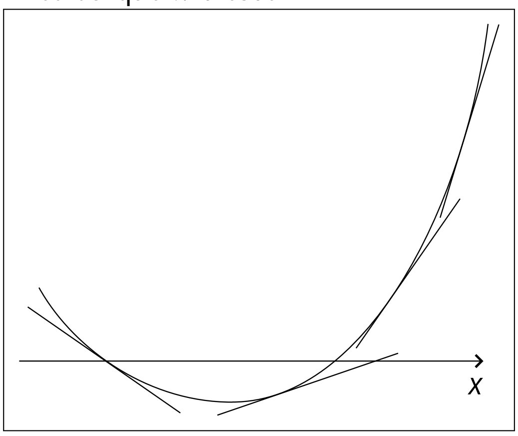
Para a próxima definição, recapitulamos que um intervalo I é aberto quando I tem uma das formas: $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,+\infty[$.

Definição 6.3 (Direções de concavidade do gráfico de uma função). *Suponhamos que* f *é uma função derivável em um intervalo aberto* I.

1. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para cima *(ou* tem concavidade voltada para cima*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela nesse intervalo (veja figura 6.7).*

2. *O gráfico de* $y = f(x)$ *é* côncavo para baixo *(ou* tem concavidade voltada para baixo*) no intervalo aberto* I *se, exceto pelos pontos de tangência, a curva* $y = f(x)$ *está, nesse intervalo, sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela (veja figura 6.8).*

Figura 6.7. A curva $y = f(x)$ é côncava para cima, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Isto quer dizer que, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ (para $x \in I$) está sempre no semi-plano acima de cada reta tangente a ela. Neste caso, à medida em que x cresce, cresce também o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$. Na figura vemos esse coeficiente angular passando de negativo a positivo à medida que x cresce.



Teorema 6.2. *Suponhamos que* $f(x)$ *é derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto* I.

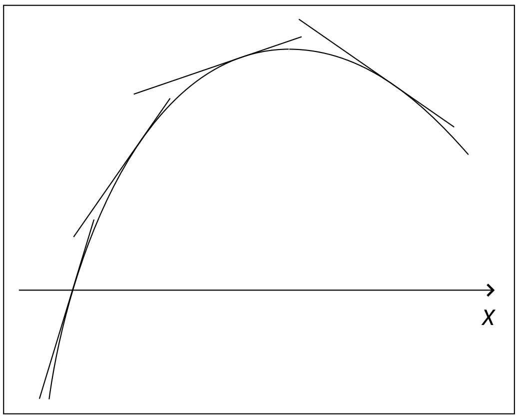
1. *Se* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, então a curva* $y = f(x)$ *é côncava para cima no intervalo* I*;*

2. *se* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, então a curva* $y = f(x)$ *é côncava para baixo no intervalo* I.

Não demonstraremos o teorema 6.2 aqui, mas faremos a seguinte observação.

Se $f''(x) > 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 6.1, a função $f'(x)$ é crescente

Figura 6.8. A curva $y = f(x)$ é côncava para baixo, para valores de x em um certo intervalo aberto I. Isto quer dizer que, exceto pelos pontos de tangência, a curva $y = f(x)$ (para $x \in I$) está sempre no semi-plano abaixo de cada reta tangente a ela. Neste caso, à medida em que x cresce, decresce o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(x, f(x))$. Na figura vemos esse coeficiente angular passando de positivo a negativo à medida que x cresce.



em I. Assim, $f'(x)$ cresce à medida em que x cresce, como na figura 6.7. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para cima em I.

Se $f''(x) < 0$ nos pontos $x \in I$ então, pelo teorema 6.1, a função $f'(x)$ é decrescente em I. Assim, $f'(x)$ decresce à medida em que x cresce, como na figura 6.8. Desse modo, temos a curva $y = f(x)$ côncava para baixo em I.

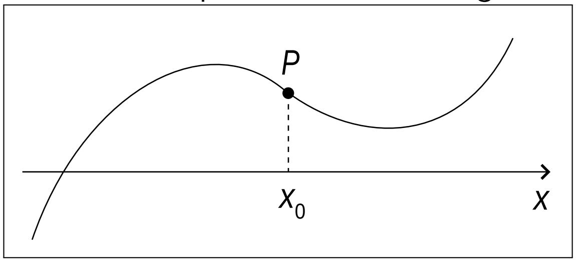
Definição 6.4 (Pontos de inflexão da curva $y = f(x)$).
O ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um* ponto de inflexão *da curva* $y = f(x)$ *se esta curva é côncava para cima (ou para baixo) em um intervalo* $]\alpha, x_0[$ (α *real ou* $-\infty$) *e côncava para baixo (respectivamente, para cima) em um intervalo* $]x_0, \beta[$ (β *real ou* $+\infty$).
Adicionalmente, requer-se que f *tenha derivada em* x_0 *ou uma reta tangente vertical ao gráfico em* P.
Isto quer dizer que o ponto $P = (x_0, f(x_0))$ *é um ponto de mudança do sentido de concavidade do gráfico de* f*, e que o gráfico é "suave" no ponto* P*. Veja figura 6.9.*

Tendo em vista o resultado do teorema 6.2, se $f''(x)$ é contínua, os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $(x, f(x))$ para os quais $f''(x) = 0$.

Exemplo 6.1. *Consideremos a função* $f(x) = x^2 - 3x$.

Temos $f'(x) = 2x - 3$ e $f''(x) = 2$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Figura 6.9. P é um ponto de inflexão do gráfico de f.



Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3/2$$

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $x \geq 3/2$ (ou seja, no intervalo $[3/2, +\infty[$).

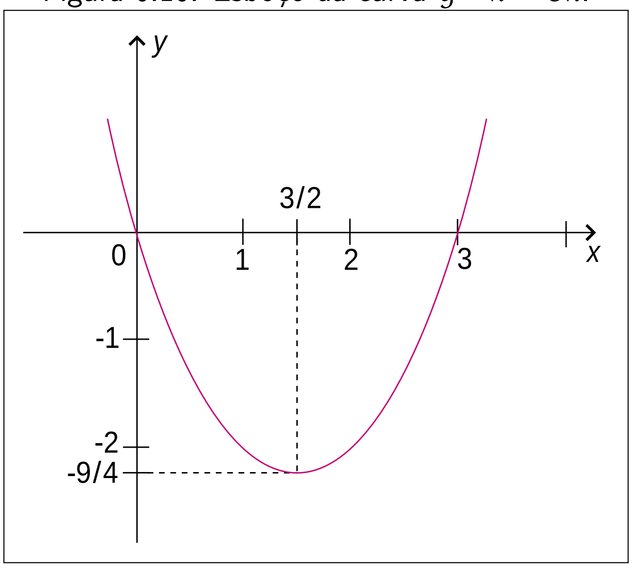
Por outro lado, $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-\infty, 3/2]$.

Desse modo, em $x_0 = 3/2$, temos um ponto mínimo local, que acontece ser o ponto de mínimo de $f(x)$. Note que $f'(3/2) = 0$, pois se x_0 é um ponto de máximo ou mínimo local, de uma função derivável, a reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$ deve ser horizontal.

Como $f''(x) = 2 > 0$ para todo x, o gráfico de f tem a concavidade sempre voltada para cima.

Com os elementos deduzidos acima, notando que $f(3/2) = -9/4$, e que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^2 - 3x$ na figura 6.10.

Figura 6.10. Esboço da curva $y = x^2 - 3x$.



Aqui levamos em conta também que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplo 6.2. *Consideremos a função* $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Temos $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. Assim, f e suas derivadas f' e f'' são todas contínuas em $\mathbb{R}$.

Analisando a variação de sinal de $f'(x)$, deduzimos:

$$f'(x) = 3x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 2$$

Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty, 0]$ e também é crescente no intervalo $[2, +\infty[$, sendo decrescente no intervalo $[0, 2]$. Desse modo 0 é ponto de máximo local de f e 2 é ponto de mínimo local. Repare que 0 e 2 são raízes de $f'(x)$. Assim, nos pontos $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(2, f(2)) = (2, -4)$ as retas tangentes ao gráfico de f são horizontais.

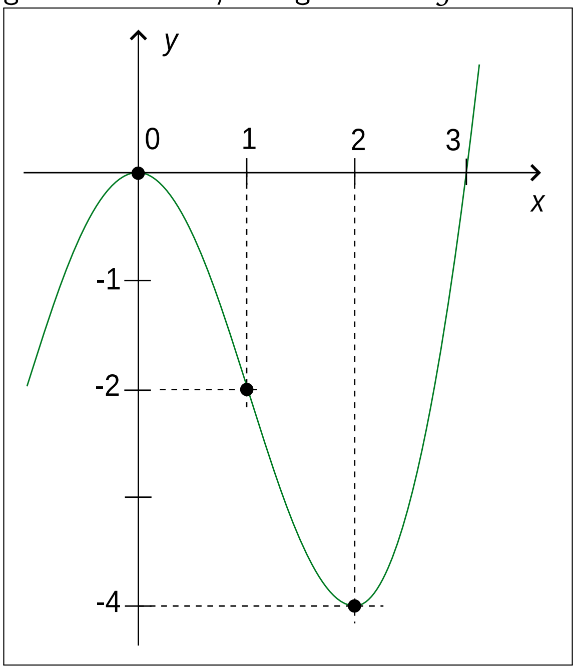
Analisando a variação de sinal de $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Assim, a curva $y = x^3 - 3x^2$, gráfico de f, tem concavidade voltada para cima quando $x > 1$, e para baixo quando $x < 1$. O ponto $P = (1, f(1)) = (1, -2)$ é ponto de inflexão do gráfico.

Com os elementos deduzidos acima, notando que 0 e 3 são as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), temos o esboço da curva $y = x^3 - 3x^2$ na figura 6.11.

Figura 6.11. Esboço do gráfico de $y = x^3 - 3x^2$.



Aqui levamos em conta também que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

6.3 Problemas

Cada uma das funções $f(x)$, enumeradas a seguir de 1 a 6, tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$. Para cada uma delas, siga o roteiro descrito nos itens de (a) a (g) para analisar a função e finalmente esboçar seu gráfico.

(a) Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente;

(b) Determine os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de f, bem como os valores de $f(x)$ nesses pontos;

(c) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a curva $y = f(x)$ é côncava para cima e aqueles em que ela é côncava para baixo;

(d) Determine os pontos de inflexão da curva $y = f(x)$;

(e) Calcule as raízes de f (soluções da equação $f(x) = 0$), quando isto não for difícil;

(f) Calcule os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(g) A partir dos dados coletados acima, faça um esboço bonito do gráfico de f.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$
6. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

6.3.1 Respostas e sugestões

1. (a) $f'(x) = -2x+2$. $f \nearrow$ (é crescente) em $]-\infty, 1]$, e $\searrow$ (é decrescente) em $[1, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f. $f(1) = 2$. (c) $f''(x) = -2$. A curva $y = f(x)$ é sempre côncava para baixo. (d) A curva $y = f(x)$ não tem pontos de inflexão. (e) As raízes de f são $1-\sqrt{2} \approx -0,6$ e $1+\sqrt{2} \approx 2,4$. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 3]$, e $\nearrow$ novamente em $[3, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f, 3 é ponto de mínimo local. $f(1) = 4$, $f(3) = 0$. (c) $f''(x) = -6x - 12$. A curva $y = f(x)$ é $\frown$ (côncava para baixo) em $]-\infty, 2[$ e $\smile$ (côncava para cima) em $]2, +\infty[$. (d) $P = (2, 2)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f. (e) As raízes de f são 0 e 3. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3. (a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12(x^3 - x^2 - 2x)$. $f \searrow$ em $]-\infty, -1]$, $\nearrow$ em $[1, 0]$, $\searrow$ em $[0, 2]$ e $\nearrow$ em $[2, +\infty[$. (b) -1 e 2 são pontos de mínimo locais de f, 0 é ponto de máximo local. $f(-1) = 3$, $f(0) = 8$, $f(2) = -24$. (c) $f''(x) = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]-\infty, x_1[$ e em $]x_2, +\infty[$, e é $\frown$ em $]x_1, x_2[$, sendo $x_1 = (1-\sqrt{7})/3 \approx -0,5$ e $x_2 = (1+\sqrt{7})/3 \approx 1,2$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. (e) As raízes de f não podem ser determinadas com facilidade. Graficamente, poderemos notar que f tem uma raiz entre 0 e 1, e uma outra entre 2 e 3. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

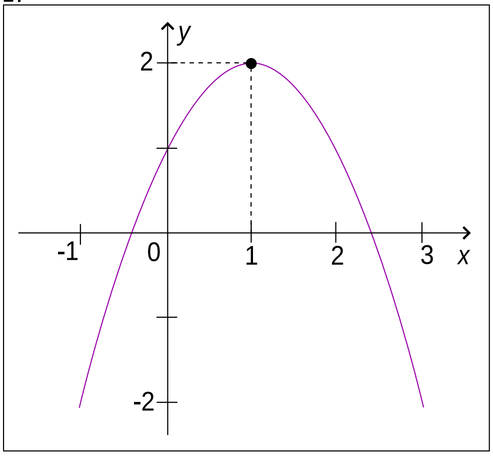
4. (a) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 0]$, e $\searrow$ em $[0, +\infty[$. (b) 0 é ponto de máximo local de f. $f(0) = 3$. (c) $f''(x) = \dfrac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]-\infty, -\sqrt{3}/3[$ e em $]\sqrt{3}/3, +\infty[$, e é $\frown$ em $]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3[$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3}/3, 5/2)$ e $(\sqrt{3}/3, 5/2)$, sendo $\sqrt{3}/3 \approx 0,6$. (e) f não tem raízes: $f(x) > 0$ para todo x real. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

5. (a) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$. $f \nearrow$ em $]-\infty, 1]$, $\searrow$ em $[1, 2]$, e $\nearrow$ em $[2, +\infty[$. (b) 1 é ponto de máximo local de f, 2 é ponto de mínimo local. $f(1) = -1$, $f(2) = -2$. (c) $f''(x) = 12x - 18 = 6(2x-3)$. A curva $y = f(x)$ é $\smile$ em $]3/2, +\infty[$ e é $\frown$ em $]-\infty, 3/2[$. (d) O ponto de inflexão do gráfico é $(3/2, -3/2)$. (e) As raízes de f não podem ser determinadas com facilidade. Graficamente, poderemos notar que f tem uma raiz entre 2 e 3 (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

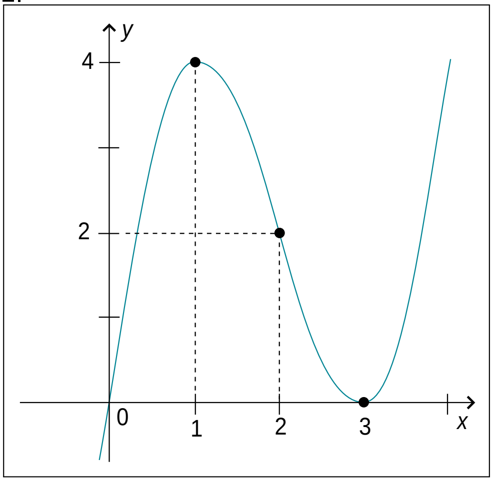
6. (a) $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $f \searrow$ em $]-\infty, -1]$, $\nearrow$ em $[-1, 1]$, e $\searrow$ em $[1, +\infty[$. (b) -1 é ponto de mínimo local de f, 1 é ponto de máximo local. $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$. (c) $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. A curva $y = f(x)$ é $\frown$ em $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $\smile$ em $]-\sqrt{3}, 0[$, $\frown$ em $]0, \sqrt{3}[$ e $\smile$ em $\sqrt{3}, +\infty[$. (d) Os pontos de inflexão do gráfico são $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (e) A única raíz de f é 0. (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Esboços dos gráficos:

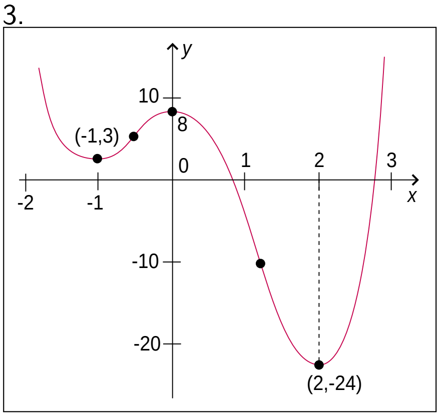
1.



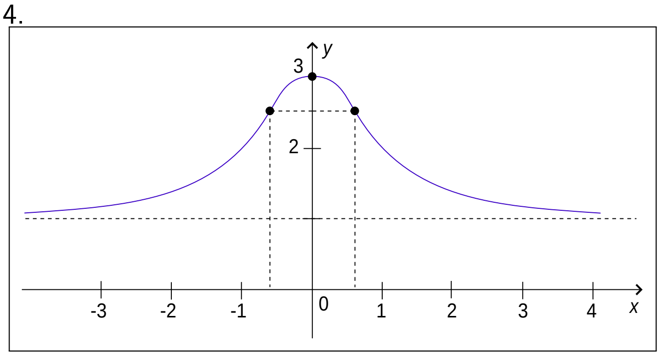
2.



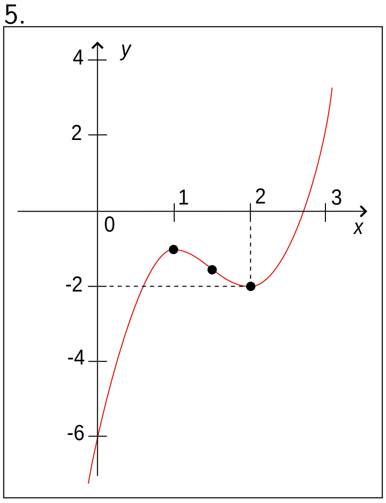
3.



4.



5.



6.