Matemática Discreta

Teoria dos Grafos
Grafos não orientados

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Teoria dos Grafos

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar conceitos e definições na teoria dos grafos para grafos **não orientados**
    - Vértices e Arestas
    - Incidência e Adjacência
    - Grau, ordem, tamanho
    - Representação matricial
  - Capacitar o aluno a usar os conceitos de grafos não orientados para modelar problemas computacionais

Problema #14

- **Demonstre o corolário a seguir usando o Teorema 1**
  - **Corolário 1.** Em todo grafo $G = (V, A)$, o número de vértices de grau ímpar é par.

Teoria dos Grafos

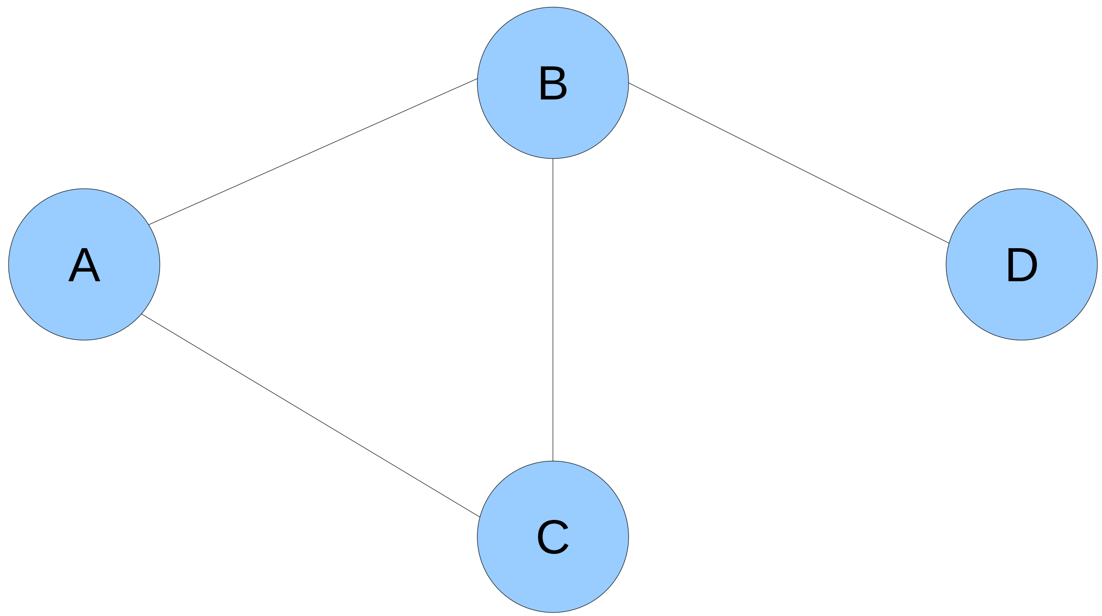
- **Grafo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Modelo matemático para representar uma coleção de objetos (vértices) que são ligados **aos pares** por outra coleção de objetos (arestas)

Teoria dos Grafos

- **Grafo**



  - V = {A, B, C, D} ➡ Conjunto de vértices
  - A = { {A, B}, {A, C}, {B, C}, {B, D} } ➡ Conjunto de arestas

Teoria dos Grafos

- **Grafo**
  - A posição dos vértices e a forma das linhas que os conectam são irrelevantes
  - O grafo representa apenas a topologia dos vértices e arestas, ou seja, indica quem está ligado a quem

Teoria dos Grafos

- **Grafo**
  - **Definição**
    - Um par (V, A) onde
      - V é um conjunto de vértices
      - A é um conjunto de subconjuntos de V contendo exatamente dois elementos

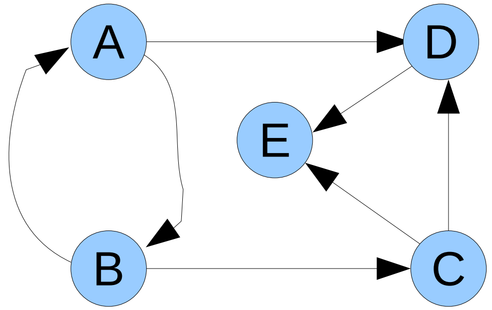
➔ Existem diversas variações dependendo da definição dada para as arestas ...

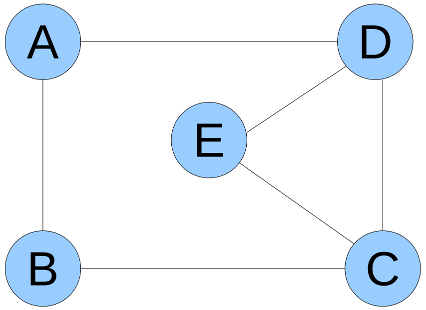
Teoria dos Grafos

- **Grafo orientado X não orientado**
  - **Grafo orientado**
    - Quando as arestas especificam claramente quem é o vértice de partida e quem é o vértice de chegada
    - Nesse caso, as arestas são indicadas como setas que vão da **origem** para o **destino**
    - Assunto para a próxima aula
  - **Grafo não orientado**
    - Quando as arestas não tem direção definida

Teoria dos Grafos

- **Grafo orientado   X   Grafo não orientado**





Teoria dos Grafos

- **Grafo não orientado**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um **grafo é não orientado** quando suas arestas não têm direção definida

Teoria dos Grafos

- **Grafo não orientado**
  - **Definição**
    - Um par (V, A) onde
      - V é um conjunto de vértices
      - A é um conjunto de subconjuntos de V contendo exatamente dois elementos
        - O conjunto A contém elementos da forma {u, v} onde u e v são elementos de V
        - Variações dessa definição permitem considerar {u, v} e {v, u} como arestas distintas, mas é importante dizer que as arestas **não têm direção definida**
        - Quando não tiver ambiguidade, as arestas podem ser representadas como uma sequência de seus vértices (ex: uv)

Teoria dos Grafos

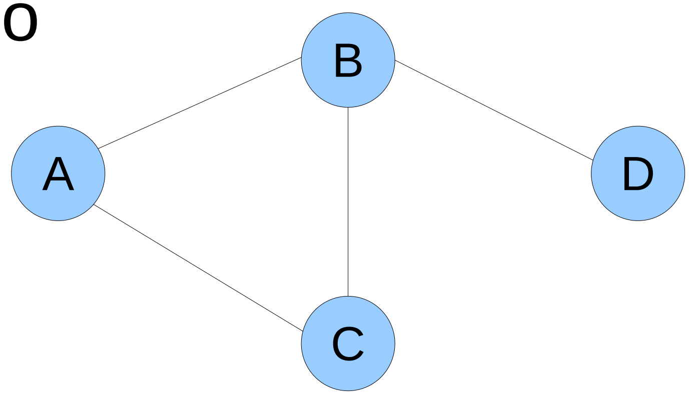
- **Grafo não orientado**
  - **Incidência**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dizemos que uma aresta com **extremos** v e w (denotada como vw) **incide** em v e em w

Teoria dos Grafos

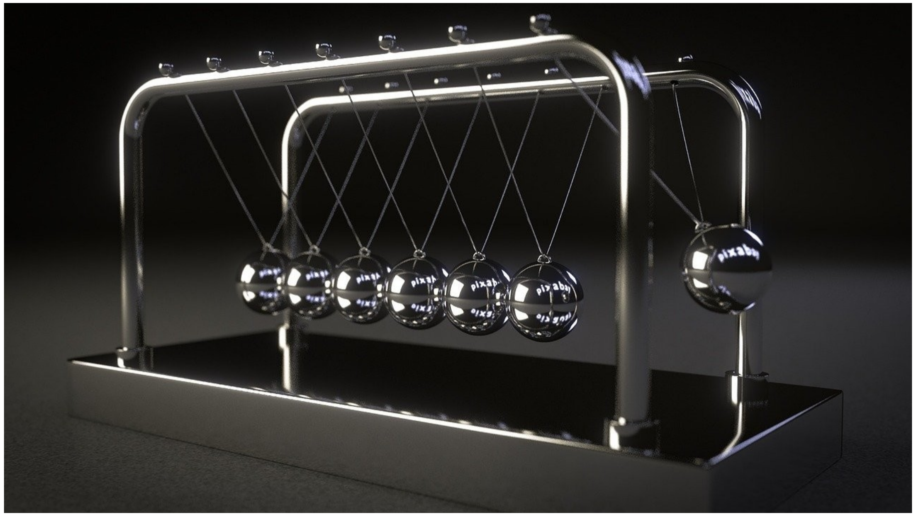
- **Grafo não orientado**
  - **Incidência**
    - Pode ser vista como uma relação entre o conjunto de arestas A e o conjunto de vértices V denominada <u>relação de incidência</u>
    - ➔ É uma relação de aresta para vértice
    - Exemplo



      - A aresta AB incide em A e em B

Teoria dos Grafos

- **Grafo não orientado**
  - **Adjacência**

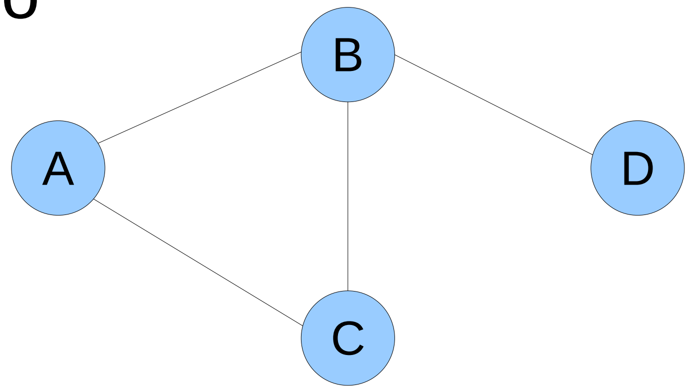


Fonte: https://pixabay.com/

- Dizemos que os vértices v e w são **vizinhos** (ou adjacentes) em um grafo G sse existe uma aresta em G com extremos v e w

Teoria dos Grafos

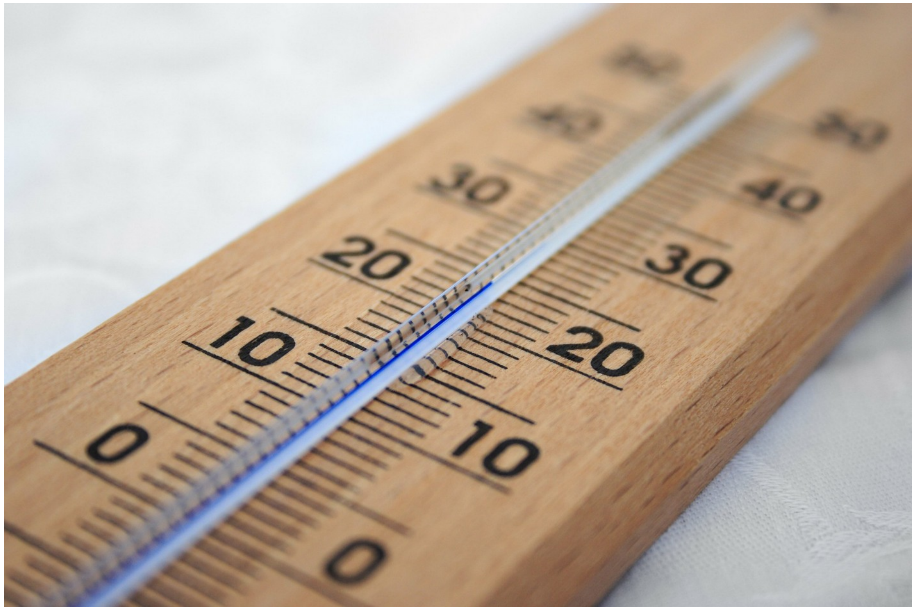
- **Grafo não orientado**
  - **Adjacência**
    - Trata-se de uma relação de adjacência (não orientada) do grafo G que é simétrica entre vértices
    - ➔ A adjacência é uma relação de vértice para vértice
    - Exemplo



      - O vértice A é adjacente ao vértice B

Teoria dos Grafos

- **Grafo não orientado**
  - **Grau do vértice**



Fonte: https://pixabay.com/

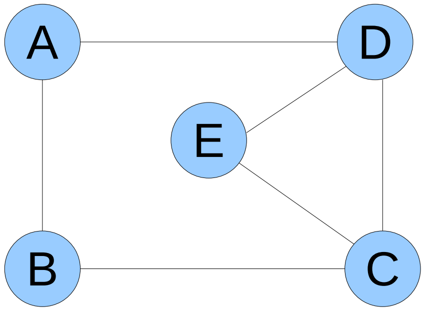
- O **grau** de um vértice v de G é o <u>número de arestas</u> de G que incidem em v
  - Denotado como $d_G(v)$ ou apenas $d(v)$

Teoria dos Grafos

- **Grafo não orientado**
  - **Maior e menor grau do grafo G**
    - O símbolo Δ_G é frequentemente usado para denotar o maior grau dos vértices de um grafo G
    - O símbolo δ_G é frequentemente usado para denotar o menor grau dos vértices de um grafo G
  - **Ordem do grafo G**
    - A ordem de G é o número de vértices de G, ou seja, $|V|$
  - **Tamanho do grafo G**
    - O tamanho de G é o número de arestas de G, ou seja, $|A|$

Teoria dos Grafos

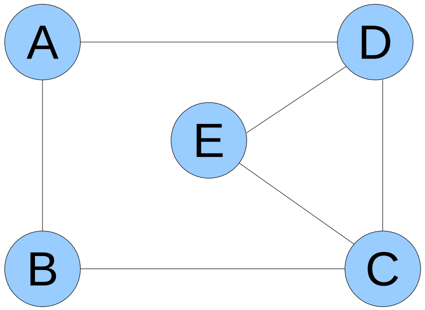
- **Dado o grafo**
  - G



  - Dê
    a) Arestas que incidem no vértice E
    b) Vértices vizinhos de C
    c) Grau do vértice A
    d) Vértice(s) com maior grau
    e) Ordem e tamanho de G

Teoria dos Grafos

- **Dado o grafo**
  - G



  - Dê

RESPOSTAS

a) Arestas que incidem no vértice E — DE e CE

b) Vértices vizinhos de C — B, E e D

c) Grau do vértice A — $d(A) = 2$

d) Vértice(s) com maior grau — C e D ($\Delta_G = 3$)

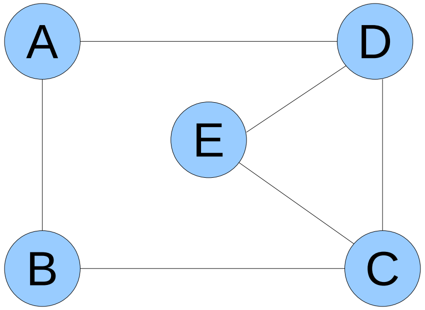
e) Ordem e tamanho de G — ordem = 5 e tamanho = 6

Teoria dos Grafos

- **Teorema 1**
  - Em qualquer grafo G = (V, A), a soma dos graus de todos os vértices de G é igual ao dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|A|$$

    - ➔ Isso porque cada aresta conta duas vezes
  - Exemplo



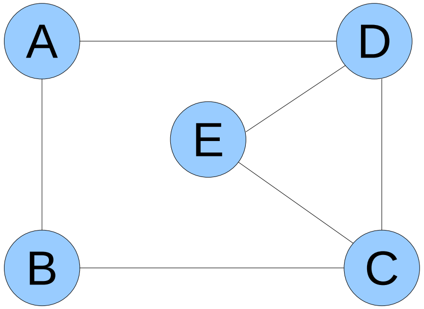
d(A) = 2, d(B) = 2, d(C) = 3,
d(D) = 3, d(E) = 2
Soma = 12 = 2*|A| = 2*6

Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos não orientados**
  - **Matriz de adjacência**
    - A matriz de adjacência de um grafo G com n vértices (|V| = n) é a dada por uma matriz booleana M de n linhas e n colunas (n x n)
    - M_{ij} – célula (i,j) – é
      - 1 sse A contém uma aresta com extremos v_i e v_j ou v_j e v_i
      - 0 caso contrário
      - ➔ M será simétrica, ou seja, $M_{ij} = M_{ji}$

Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos não orientados**
  - **Matriz de adjacência**
    - Exemplo



	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	1
D	1	0	1	0	1
E	0	0	1	1	0

Pode ser usada para demonstrar o Teorema1

Quantidade de 1s na coluna ou na linha indica o grau

Teoria dos Grafos

- **Teorema 1**
  - Em qualquer grafo G = (V, A), a soma dos graus de todos os vértices de G é igual ao dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|A|$$

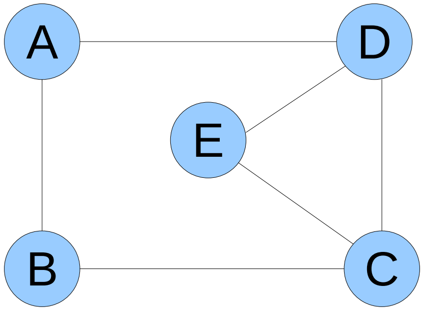
    - ➔ Quantos 1s há na matriz de adjacência de G?
      - Para cada aresta de G, há exatamente dois 1s na matriz. Assim, o número de 1s nessa matriz é exatamente **2|A|**
      - Para cada vértice v_i de G, seu grau $d(v_i)$ é dado pela quantidade de 1s na linha que o representa. Assim, o número de 1s nessa matriz é a **soma dos 1s nas linhas**
      - Como essas duas respostas são corretas, concluímos que o resultado de uma deve ser igual à outra

Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos não orientados**
  - **Matriz de incidência**
    - A matriz de incidência de um grafo G com n vértices (|V| = n) e m arestas (|A| = m) é a dada por uma matriz booleana M de n linhas e m colunas (n x m)
    - M_{ik} – célula (i, k) – é
      - 1 sse o vértice v_i é um extremo da aresta e_k
      - 0 caso contrário

Teoria dos Grafos

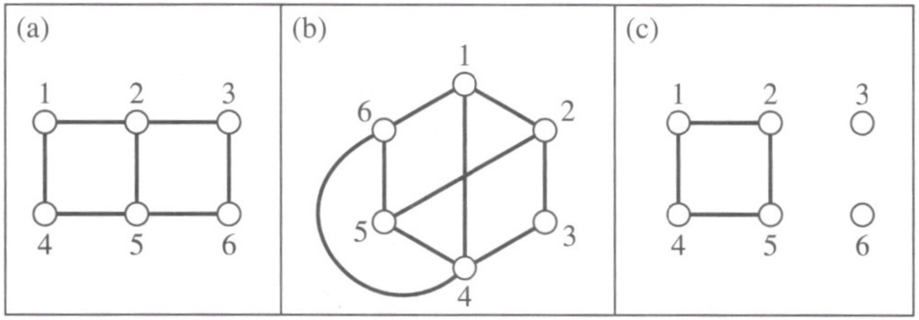
- **Representação matricial de grafos**
  - **Matriz de incidência**
    - Exemplo



	AB	AD	BC	CD	CE	DE
A	1	1	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	0	1	1	1	0
D	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	0	1	1

Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos**
  - Dados os grafos a seguir:



Fonte: (SCHEINERMAN, p. 453, ex. 46.1)

  - Represente cada um deles usando
    a) Matriz de adjacência
    b) Matriz de incidência

Problema #14

- **Demonstre o corolário a seguir usando o Teorema 1**
  - **Corolário 1.** Em todo grafo G = (V, A), o número de vértices de grau ímpar é par.

Problema #14

- **Demonstre o corolário a seguir usando o Teorema 1**
  - **Corolário 1.** Em todo grafo G = (V, A), o número de vértices de grau ímpar é par.
    - O Teorema 1 nos diz que $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|A|$
    - Da nossa aula de somatórios sabemos que podemos manipular esse somatório original pra quebrá-lo em dois: um para os vértices de grau par (conjunto P) e outro para os vértices de grau ímpar (conjunto I). Então:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in P} d_G(v) + \sum_{v \in I} d_G(v) = 2|A|$$

Problema #14

- **Demonstre o corolário a seguir usando o Teorema 1**
  - **Corolário 1.** Em todo grafo G = (V, A), o número de vértices de grau ímpar é par.
    - Logo, $$\sum_{v \in I} d_G(v) = 2|A| - \sum_{v \in P} d_G(v)$$
    - Como o lado direito dessa equação é par (é um número par menos a soma de números pares), o lado esquerdo também é par
    - Como o lado esquerdo é uma soma de números ímpares, essa soma só vai dar par se a quantidade de parcelas for par, ou seja, se |I| for par
    - Portanto, o número de vértices de grau ímpar é par