Capítulo 8 | Distribuições amostrais fundamentais e descrição de dados

8.4 Distribuição amostral

Definição 8.10

A distribuição de probabilidade de uma estatística é chamada de *distribuição amostral*.

8.5 Distribuição amostral das médias

Teorema 8.2

Teorema central do limite: se $\bar{X}$ é a média da amostra aleatória de tamanho n, retirada de uma população com média μ e variância σ^2, então a forma limite da distribuição de

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

quando $n \to \infty$, é a distribuição normal $n(z; 0, 1)$.

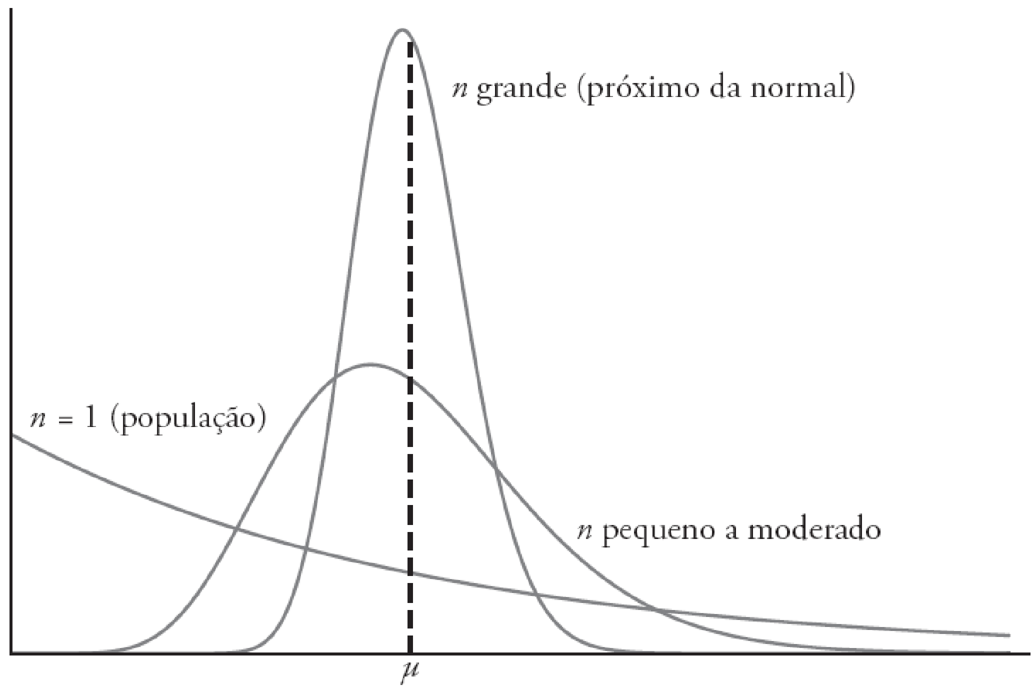

Figura 8.7 Ilustração do teorema central do limite (distribuição de $\bar{X}$ para $n = 1$, n moderado e n grande).

Teorema 8.3

Se amostras independentes de tamanho n_1 e n_2 são selecionadas aleatoriamente de duas populações, discretas ou contínuas, com médias μ_1 e μ_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente, então a distribuição amostral das diferenças entre as médias, $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, é aproximadamente normal, com média e variância dadas por

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{e} \quad \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Assim,

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$$

tem distribuição aproximadamente normal padrão.

8.6 Distribuição amostral de S^2

Teorema 8.4

Se S^2 é a variância de uma amostra aleatória de tamanho n, retirada de uma população normal, com variância σ^2, então a estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

tem distribuição qui-quadrado com $v = n - 1$ graus de liberdade (g.l.).

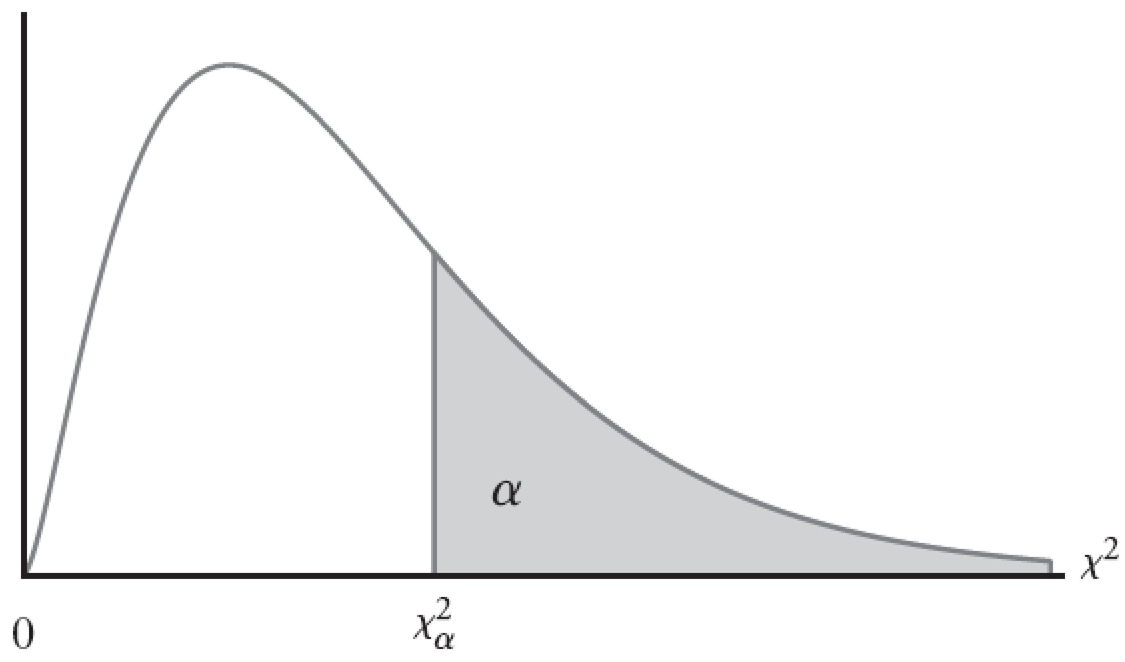

Figura 8.12 A distribuição qui-quadrado.

Corolário 8.1

Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, todas normais com média μ e desvio-padrão σ. Considere

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{e} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Assim, a variável aleatória $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ tem distribuição t com $v = n - 1$ graus de liberdade.

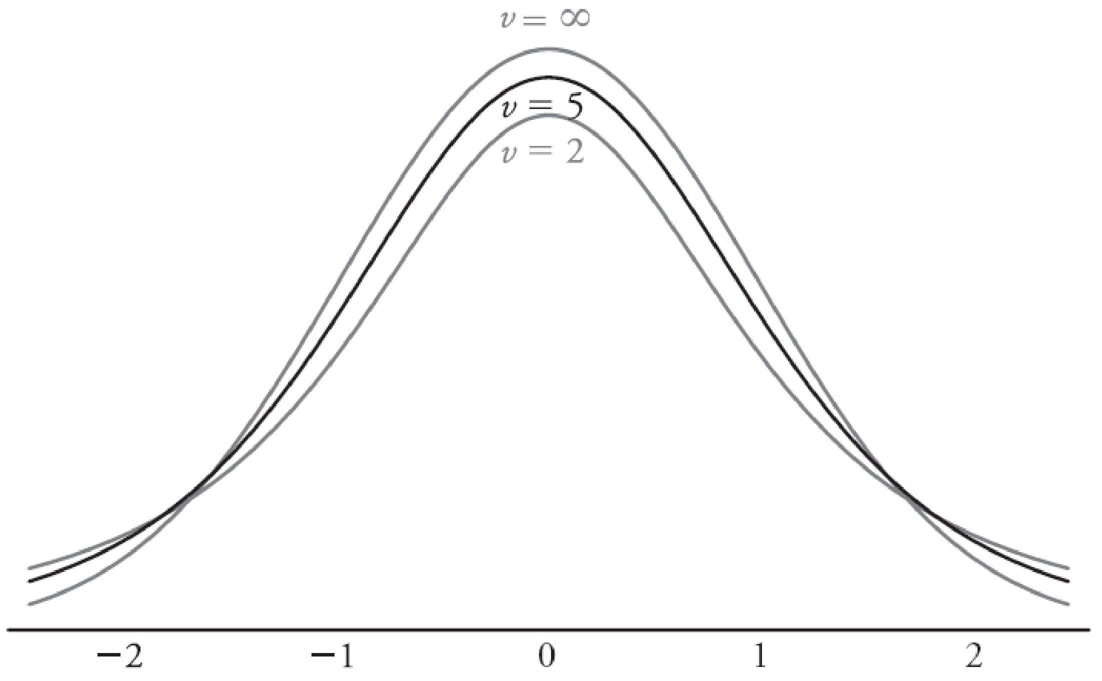

Figura 8.13 As curvas da distribuição t para $v = 2$, 5 e ∞.

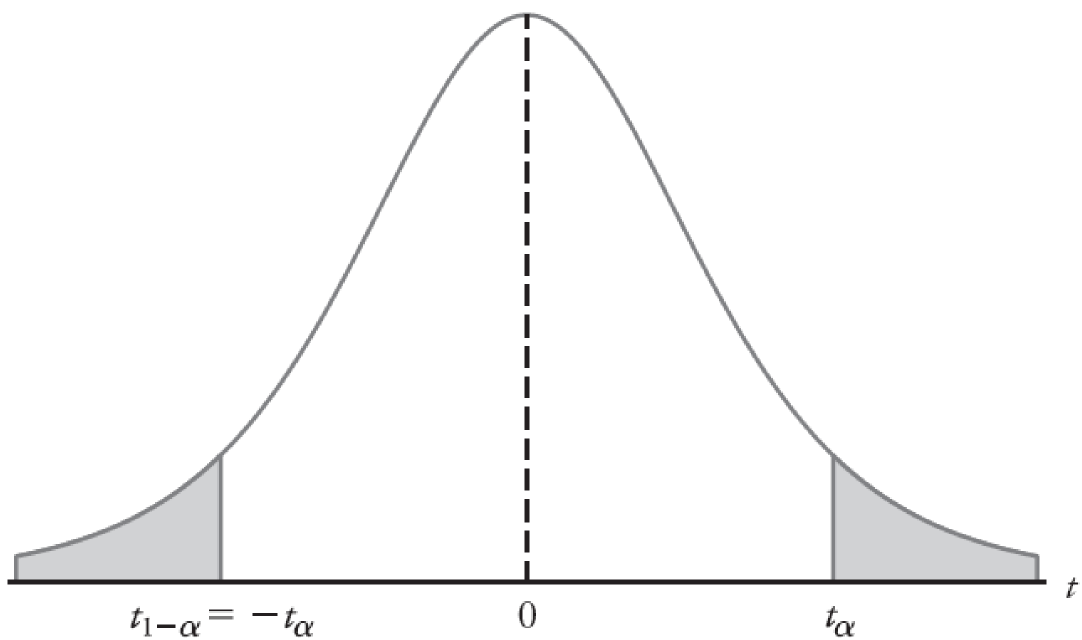

Figura 8.14 Propriedade de simetria da distribuição t.

8.8 Distribuição *F*

Teorema 8.6

Considere U e V duas variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado com v_1 e v_2 graus de liberdade, respectivamente. A distribuição da variável aleatória $F = \dfrac{U/v_1}{V/v_2}$ é dada pela densidade

$$h(f) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma[(v_1+v_2)/2](v_1/v_2)^{v_1/2}}{\Gamma(v_1/2)\Gamma(v_2/2)} \dfrac{f^{(v_1/2)-1}}{(1+v_1 f/v_2)^{(v_1+v_2)/2}}, & f > 0, \\ 0, & f \leq 0, \end{cases}$$

conhecida como *distribuição F* com v_1 e v_2 graus de liberdade (g.l.).

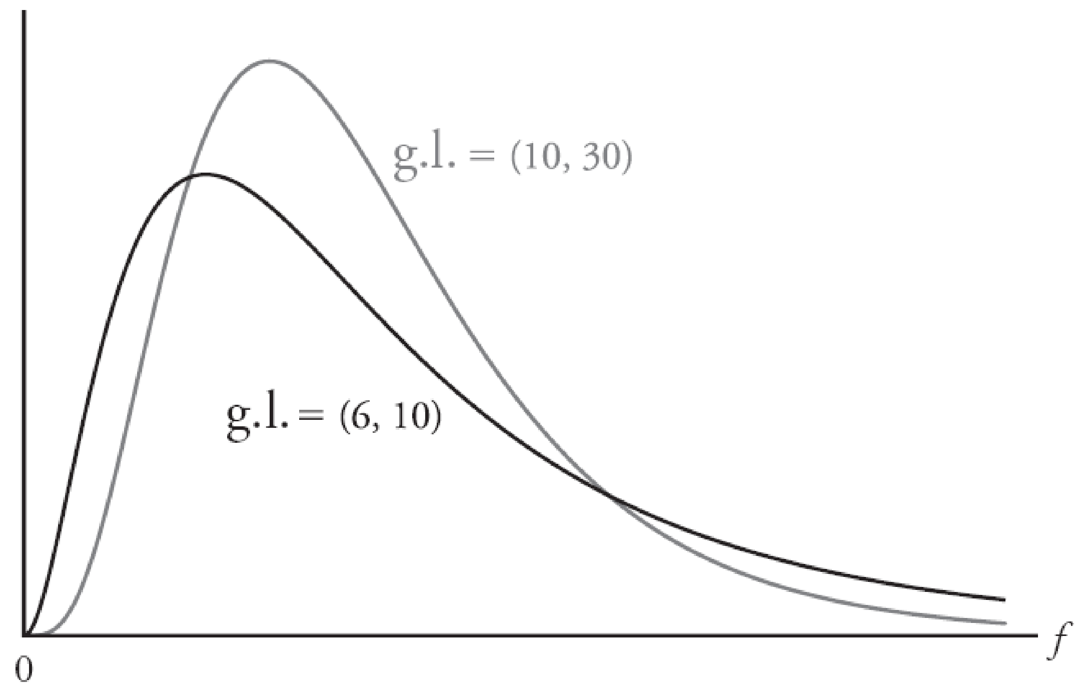

Figura 8.16 Distribuições F típicas.

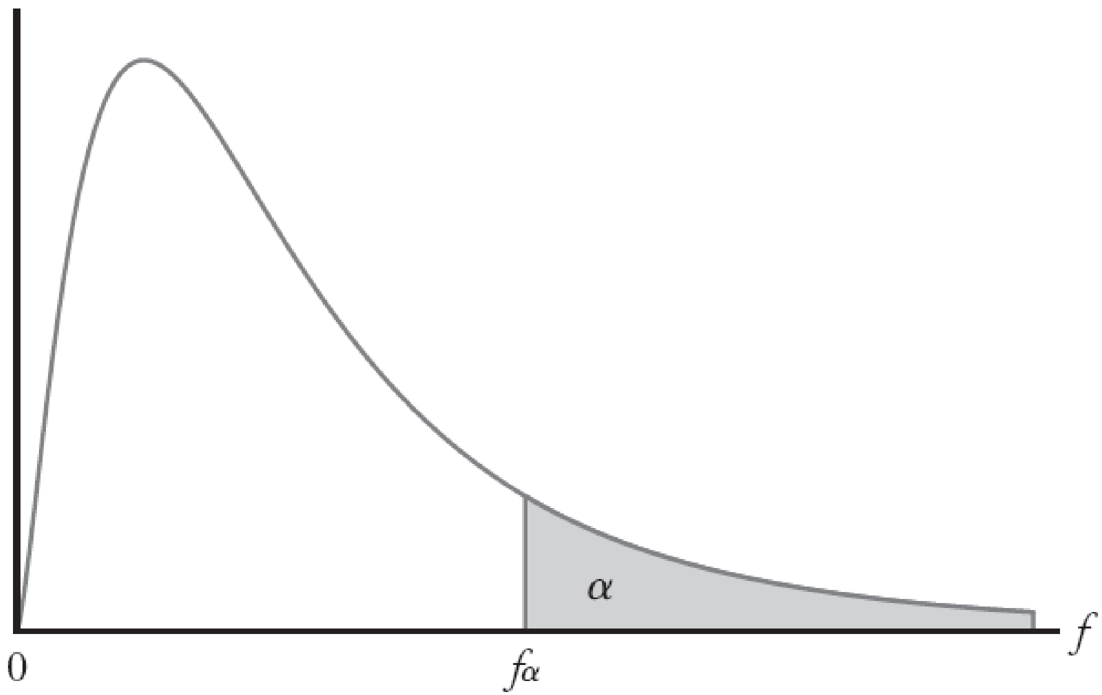

Figura 8.17 Ilustração do f_α para a distribuição F.

Teorema 8.8

Se S_1^2 e S_2^2 são variâncias de amostras aleatórias independentes, de tamanho n_1 e n_2, retiradas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente, então

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

tem uma distribuição F com $v_1 = n_1 - 1$ e $v_2 = n_2 - 1$ graus de liberdade.