Aula 5

Limites laterais

5.1 Limites laterais através de exemplos

Para cada x real, define-se o *valor absoluto* ou *módulo de* x como sendo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+3| = +3$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$.

Para apresentar o conceito de limites laterais através de um exemplo, consideraremos a função

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

cujo campo de definição (domínio) é o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$.

Se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto $f(x) = x + 1$. Se $x < 0$, $|x| = -x$ e portanto $f(x) = x - 1$. O gráfico de f é esboçado na figura 5.1.

Se x tende a 0, mantendo-se > 0, $f(x) = x + 1$ tende a 1. Se tende a 0, mantendo-se < 0, $f(x) = x - 1$ tende a -1.

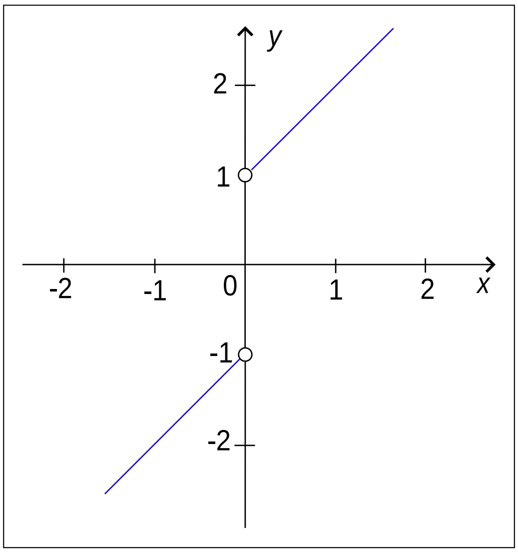
Dizemos então que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela direita*, é igual a 1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Dizemos também que o limite de $f(x)$, quando x *tende a* 0 *pela esquerda*, é igual a -1, e denotamos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Figura 5.1. Esboço do gráfico de $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$.



De um modo geral, sendo $f(x)$ uma função, se x_0 está no interior ou é extremo inferior de um intervalo contido em $D(f)$,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{significa} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Se x_0 está no interior ou é extremo superior de um intervalo contido em $D(f)$,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{significa} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Exemplo 5.1.

Consideremos agora a função $f(x) = 1/x$. Conforme já observado no exemplo 4.7, aula 4 (reveja-o), esta função não tem limite quando $x \to 0$.

Temos $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Assim, 0 é extremo superior do intervalo $]-\infty, 0[\subset D(f)$, e também é extremo inferior do intervalo $]0, +\infty[\subset D(f)$.

No esboço do gráfico de f, figura 5.2, ilustramos a ocorrência dos limites laterais

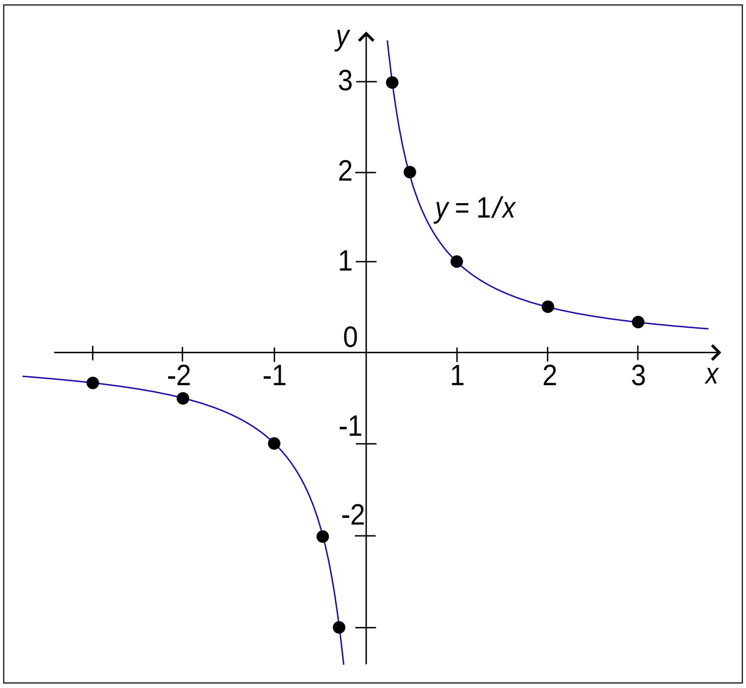
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

(Também ilustramos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.)

Neste caso, é conveniente denotar, introduzindo novos símbolos em nossa álgebra de limites,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Figura 5.2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.



Observação 5.1. *Em geral,*

> *Dizemos que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ *se*
>
> *(i)* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *e*
>
> *(ii)* $f(x)$ *mantém-se* > 0 *quando* $x \to x_0$, *ou seja,* $f(x) > 0$ *para todo* x *suficientemente próximo de* x_0.

> *Dizemos que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0^-$ *se*
>
> *(i)* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *e*
>
> *(ii)* $f(x)$ *mantém-se* < 0 *quando* $x \to x_0$, *ou seja,* $f(x) < 0$ *para todo* x *suficientemente próximo de* x_0.

> *Escrevemos ainda* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0^+$ *para indicar que*
> *(i)* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 0$, *e (ii)* $f(x) > 0$ *quando* $x \to x_0$ *e* $x > x_0$.

Analogamente, podemos também definir condições em que ocorrem os limites

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 0^-$, *e* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 0^+$.

Nossa álgebra de limites passa a contar agora com os seguintes novos resultados:

$$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Também é fácil intuir que

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

Exemplo 5.2.

$\lim_{x \to 1}(x-1)^2 = 0^+$, *portanto* $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2x-3}{x} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{5}{+\infty} = 0^+$

Exemplo 5.3. *Calcular* $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{x+2}{|x+2|}$ *e* $\lim_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{|x+2|}$

Solução. Observe que $x + 2 > 0$ se e somente se $x > -2$.

Assim sendo, se $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e então $|x + 2| = x + 2$.

Por outro lado, se $x < -2$, temos $x + 2 < 0$ e então $|x + 2| = -(x + 2)$.

Assim sendo, temos

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2} -1 = -1$$

Observação 5.2. *A afirmação*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

é equivalente às afirmações, simultâneas, de que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \quad e \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$$

Se no entanto $f(x)$ é definida para $x > x_0$, mas não é definida para $x < x_0$, então $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ significa $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$
Por exemplo, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, muito embora $\sqrt{x}$ não esteja definida para $x < 0$. Neste caso, afirmar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ é equivalente a afirmar que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, já que não se define o limite $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$

Observação 5.3 (O gráfico de uma função contínua em $[a, b]$).

No exemplo ao início da aula, vimos que a função $f(x) = x + x/|x|$ tem limites laterais diferentes no ponto $x_0 = 0$, sendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Assim, conforme podemos visualizar na figura 5.1, o gráfico de f apresenta um salto no ponto 0.

Também a função $f(x) = 1/x$ tem um salto no ponto 0. Agora porém o salto é infinito, sendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Na aula 4, estivemos observando que a função $f(x) = 1/x^2$ tem limite infinito no ponto 0: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Aqui, nas proximidades de 0, o gráfico "salta" para cima dos dois lados, apresentando uma quebra na curva do gráfico.

Quando uma função $f(x)$ é contínua nos pontos de um intervalo $[a, b]$, a curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, gráfico de f no intervalo $[a, b]$, não apresenta quebras ou saltos.

Intuitivamente falando, podemos desenhar o gráfico ligando o ponto inicial $A = (a, f(a))$ ao ponto final $B = (b, f(b))$ sem tirarmos o lápis do papel, tal como na figura 5.3.

Figura 5.3. f é contínua e diferenciável no intervalo $[a, b]$.

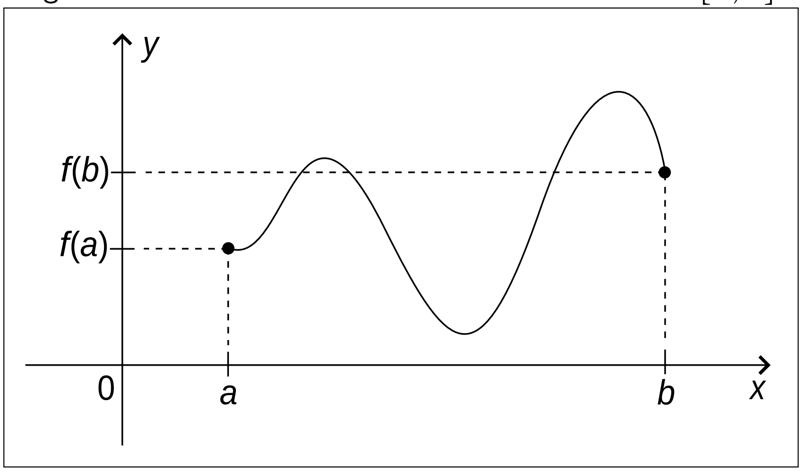
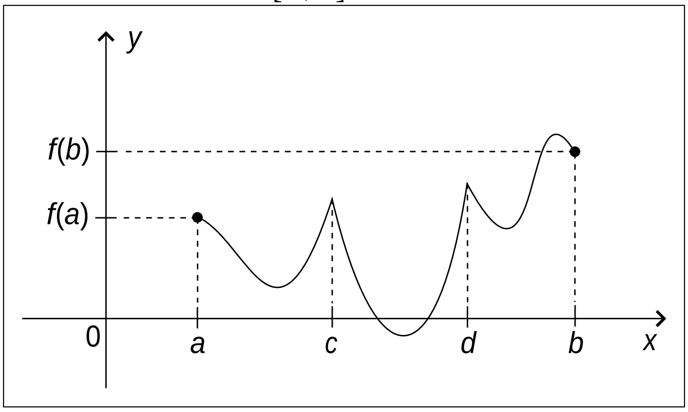


Figura 5.4. f é contínua no intervalo $[a, b]$, mas não tem derivadas nos pontos c e d.



Observação 5.4 (Uma função contínua pode não ter derivada sempre).

Já na figura 5.4 temos uma ilustração do gráfico de uma função f contínua no intervalo $[a, b]$ que, no entanto, não tem derivada em dois pontos desse intervalo. Note que nos pontos do gráfico de f de abscissas c e d não é possível definir retas tangentes ao gráfico.

Observação 5.5 (Continuidade significa $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$). *Na observação 2.1, aula 2, vimos que, quando $x_0 \in D(f)$, se existe $f'(x_0)$ então $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$. Na verdade, não é necessário termos f diferenciável x_0 para que tenhamos $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.*
A condição necessária e suficiente para que tenhamos $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ é que f seja contínua no ponto x_0.

Demonstraremos agora que a afirmação enunciada na observação 5.5 é verdadeira.

Temos $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Fazendo $x = x_0 + \Delta x$, temos $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Temos que $\Delta x \to 0$ se e somente se $x \to x_0$.

Se $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$, então $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, logo
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} [(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)] = 0 + f(x_0) = f(x_0)$. Assim, f é contínua em x_0.

Se f é contínua em x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Logo, $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, e então $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$.

Assim, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

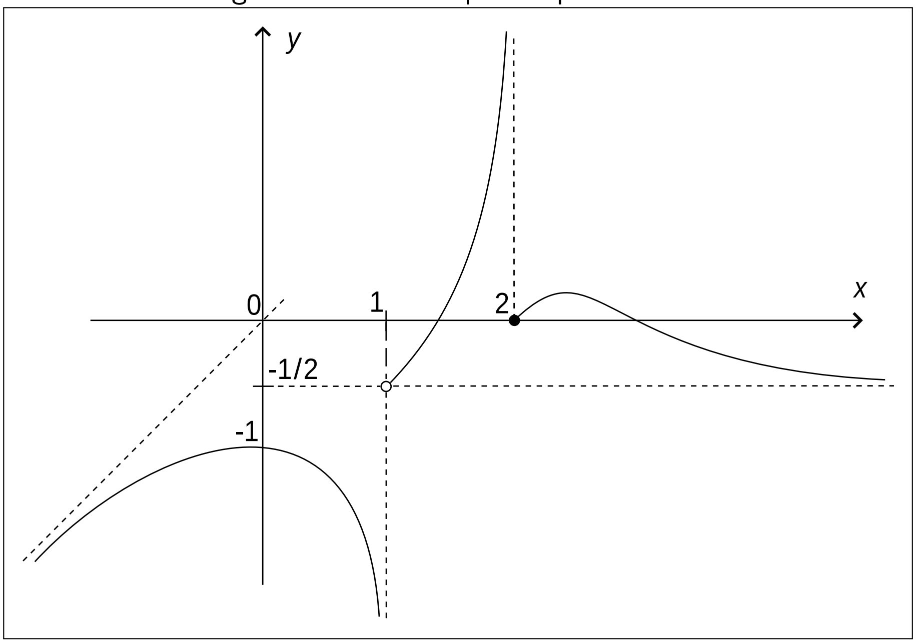
Quando existe $f'(x_0)$, temos $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ e então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, como já demonstrado na observação 2.1, temos a seguinte proposição.

Proposição 5.1 (Diferenciabilidade acarreta continuidade). *Se f tem derivada em x_0 então f é contínua em x_0.*

No entanto, podemos ter f contínua em x_0, sem ter derivada em x_0. Veja problemas 5 e 6 a seguir.

5.2 Problemas

Figura 5.5. Gráfico para o problema 1.



1. Na figura 5.5 está esboçado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Complete as igualdades:

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ (c) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

(d) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ (e) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ (f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

(g) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$ (h) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

2. Em que pontos a função f do problema anterior é definida? Em quais pontos é contínua?

3. Calcule os limites laterais

$$\text{(a)} \lim_{x\to\pi^-} \frac{|\pi - x|}{x-\pi} \quad \text{(b)} \lim_{x\to\pi^+} \frac{|\pi - x|}{x-\pi} \quad \text{(c)} \lim_{x\to 8^-} \frac{1}{x-8}$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} \quad \text{(e)} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+4}{2-x} \quad \text{(f)} \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$$

4. Calcule os limites $\lim_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ e diga se existe o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$. Diga também se f é contínua no ponto -3.

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-3x} & \text{se } x < -3 \\ \sqrt[3]{x+2} & \text{se } x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt[3]{4+x} & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

5. Verifique que a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x_0 = 0$, mas não existe $f'(0)$ (mostre que não existe o limite $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$). Mostre que existem os limites laterais $\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ e $\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$, chamados respectivamente de *derivada direita de* f *no ponto* 0 ($f'(0^+)$) e *derivada esquerda de* f *no ponto* 0 ($f'(0^-)$). Esboce o gráfico de f e interprete geometricamente os fatos deduzidos acima.

6. Verifique que a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $x_0 = 0$, mas $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = +\infty$. Neste caso, por abuso de linguagem, dizemos que $f'(0) = +\infty$. Esboce o gráfico de f, traçando-o cuidadosamente através dos pontos de abcissas 0, $\pm 1/8$, ± 1, ± 8, e interprete geometricamente o fato de que $f'(0) = +\infty$.

5.2.1 Respostas e sugestões

1. (a) $-\infty$ (b) $-1/2$ (c) $+\infty$ (d) 0 (e) -1 (f) -1 (g) $-1/2$ (h) $-\infty$

2. A função f é definida em $\mathbb{R} - \{1\}$. É contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

3. (a) -1 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) 0

4.

   (a) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1/11$. Não se define (não existe) o limite $\lim_{x\to -3} f(x)$. $f(-3) = -1$, mas como não existe $\lim_{x\to -3} f(x)$, f não é contínua no ponto -3.

   (b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -3} f(x) = 1$. f é contínua no ponto -3 pois $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$.

5. Ao esboçar o gráfico de f, notamos que $f(x) = x$, se $x \geq 0$, e $f(x) = x$, se $x \leq 0$. Assim, $f'(0^+) = 1$ indica a presença de uma reta tangente ao gráfico de f, "à direita do ponto $(0, 0)$", como sendo a reta tangente ao gráfico de $y = x$, $x \geq 0$, no ponto $(0, 0)$ (a reta tangente a uma reta é a própria reta). Analogamente, interpreta-se $f'(0^-) = -1$.

6. $f'(0) = +\infty$ significa que a reta tangente à curva $y = \sqrt[3]{x}$, no ponto $(0, 0)$, é vertical.