Funções contínuas

Definição: Sejam f uma função de duas variáveis e (x_0, y_0) um ponto do domínio de f. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Dizemos que f é contínua em D se f é contínua em todos os pontos de D.

Exemplo: Seja f a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \text{ se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & , \text{ se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

Mostre que:

a) f é contínua nos pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

Se $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$, temos duas possibilidades: ou $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ou $x_0^2 + y_0^2 < 1$.

Caso 1: $x_0^2 + y_0^2 < 1$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + y^2$$

$$= x_0^2 + y_0^2$$

$$= f(x_0, y_0)$$

Caso 2 : $x_0^2 + y_0^2 > 1$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$$

$$= 0$$

$$= f(x_0, y_0)$$

Portanto, f é contínua em (x_0, y_0) se $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

b) f é descontínua nos pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

Temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2+y^2$$

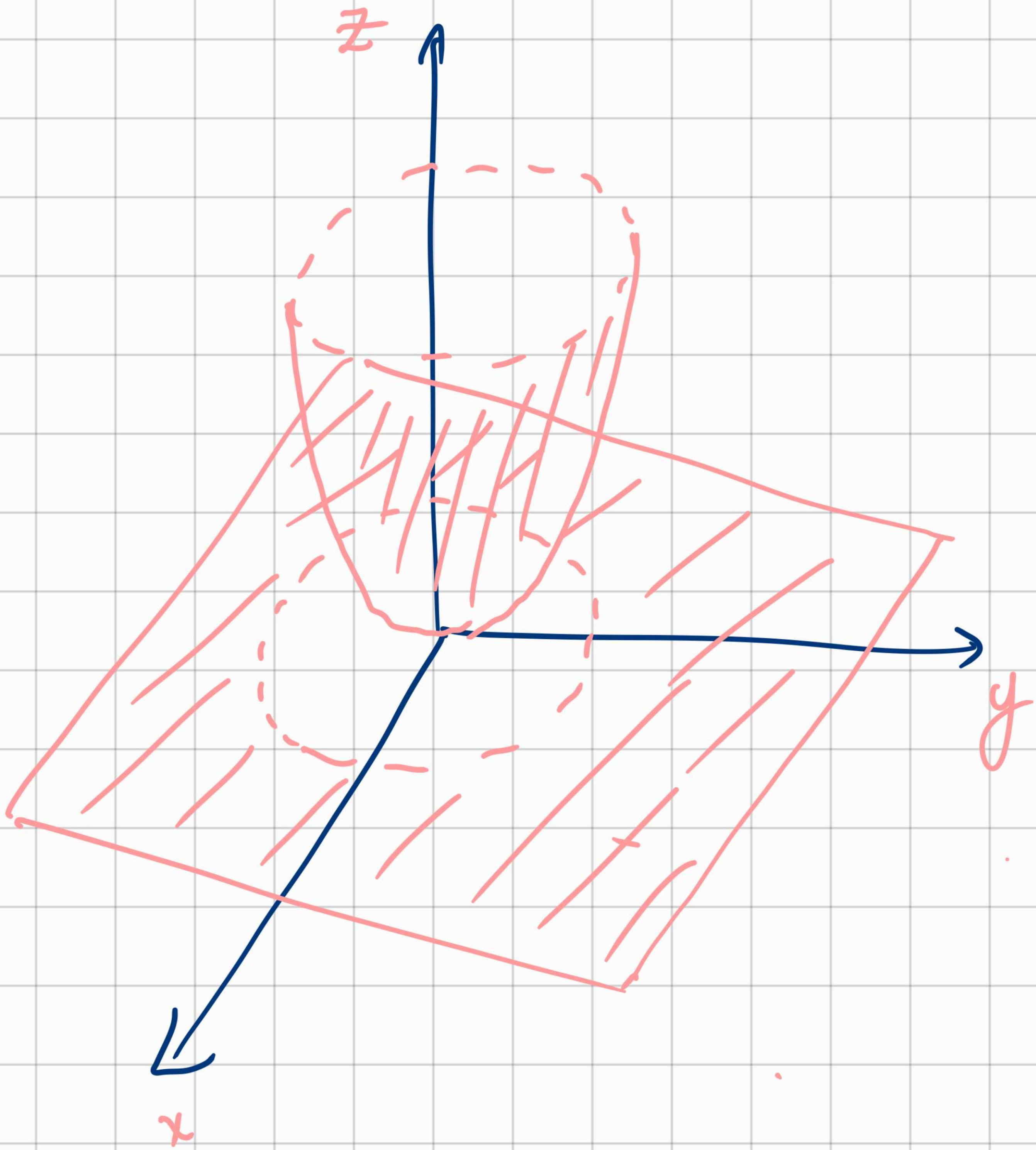
$$= x_0^2 + y_0^2$$

$$= 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2+y^2>1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$$

$$= 0$$

Como os limites acima são distintos, o limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe para $x_0^2+y_0^2=1$. Logo, f não é contínua nos pontos $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tais que $x_0^2+y_0^2=1$.


z
y
x