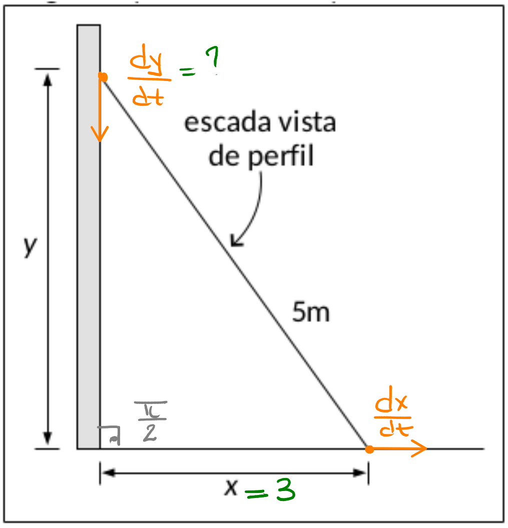
Exemplo 14.2. *Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de 2 cm/s. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a 3 m da parede?*

$4 =$



$\frac{dx}{dt}$ = velocidade com que a base da escada escorrega

$\frac{dy}{dt}$ = velocidade com que o topo da escada escorrega para baixo

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = ?$$

Aplicando Pitágoras temos $x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2 = 25$

Derivando em t obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)^2 + y(t)^2\right] = \frac{d}{dt}[25] = 0 \iff$$

$$2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0 \iff$$

$y'(t) = \frac{dy}{dt}$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \iff$$

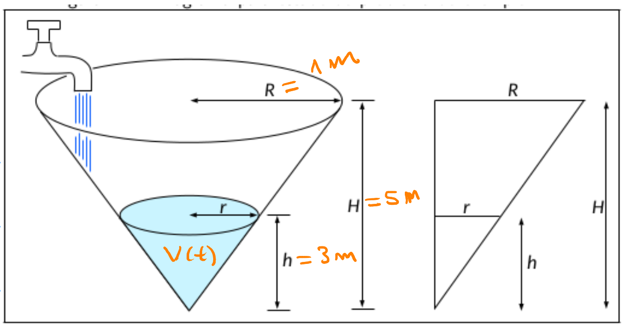
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}y}\frac{dx}{dt} \iff \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}} \quad (1)$$

$\{3, 4, 5\}$ é uma terna Pitagórica pois $3^2 + 4^2 = 5^2$

Substituindo $x = 3$, $y = 4$ e $\frac{dx}{dt} = 2$ cm/s $\Rightarrow$

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{3}{2} \text{ cm/s} = -1{,}5 \text{ cm/s}$$

1. Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de 5 m e raio da base (isto é, do topo) de 1 m (veja figura 14.1). O tanque se enche de água à taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade sobe o nível da água no instante em que ela tem 3 m de profundidade? *Resposta.* $\frac{50}{9\pi}$ m/min $\approx 1{,}77$ m/min.



V(t) = volume de água do tanque.

$$\boxed{\frac{dV(t)}{dt} = 2\ \frac{m^3}{min}}$$

$$\boxed{V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 h(t)}$$

Sabemos que $\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Rh}{H}}$

Logo, $V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h(t) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot h^3(t)$

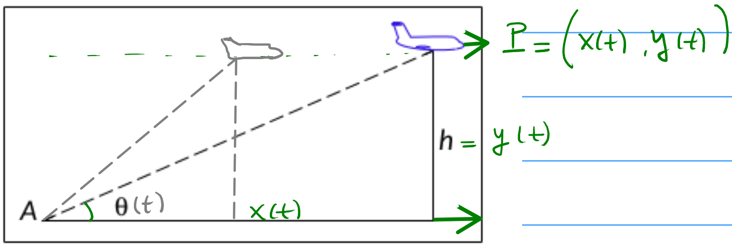
$\frac{dV}{dt} = \cancel{3}\cdot\frac{\pi}{\cancel{3}}\cdot\left(\frac{R}{H}\right)^2\cdot h(t)^2\cdot h'(t)$, $R = 1$, $\pi \approx 3{,}14$,

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = 3{,}14\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot h^2\cdot\frac{dh}{dt}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\left.\frac{dV}{dt}\right\} = 2}{3{,}14\cdot\frac{1}{25}\cdot 3^2} = \frac{2\cdot 25}{3{,}14\cdot 9} \approx 1{,}77\ \frac{m}{min}$$

□

3. Considere um avião em vôo horizontal, a uma altura h em relação ao solo, com velocidade constante v, afastando-se de um observador A que se encontra em terra firme. Seja θ a elevação angular do avião, em relação ao solo, a partir do observador, medida em radianos.



Determine, como função de θ, a taxa de variação de θ em relação ao tempo.

Resposta. $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{h}\operatorname{sen}^2\theta$.

θ(t): varia com o tempo.

$\boxed{\frac{dx}{dt} = v}$ $\quad tg\,\theta(t) = \frac{co}{ca} = \frac{h}{x(t)} \Rightarrow \boxed{tg\,\theta(t) = \frac{h}{x(t)}} \Rightarrow x(t) = \frac{h}{tg\,\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left[tg\,\theta(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{h}{x(t)}\right] \Leftrightarrow$$

$$sec^2\theta(t)\cdot\theta'(t) = \frac{-h\,x'(t)}{(x(t))^2} \Leftrightarrow \frac{1}{cos^2\theta}\cdot\theta'(t) = \frac{-h\cdot v}{(x(t))^2}$$

$$\theta'(t) = \frac{-hv}{(x(t))^2} \cdot \cos^2\theta = \frac{-hv}{\left(\frac{h}{tg\,\theta}\right)^2} \cdot \cos^2\theta = \frac{-\cancel{h}v.\cos^2\theta}{\frac{h^{\cancel{2}}}{tg^2\theta}} =$$

$$\theta'(t) = \frac{-v.\overbrace{\cos^2\theta \,.\, tg^2\theta}^{sen^2\theta}}{h} = -\frac{v}{h} \,.\, sen^2\theta$$

$$\boxed{\theta'(t) = -\frac{v}{h} \,.\, sen^2\theta}$$

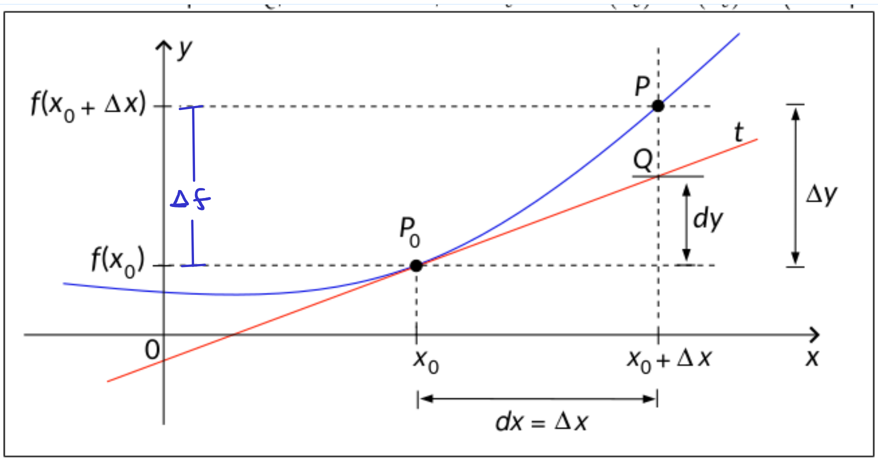
obs1 $\quad (tg\,\theta)' = \left(\frac{sen\,\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{\overbrace{(sen\,\theta)'}^{\cos\theta}\cos\theta - sen\,\theta.\overbrace{(\cos\theta)'}^{-sen\,\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\overbrace{\cos^2\theta + sen^2\theta}^{1}}{\cos^2\theta}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad\qquad = \frac{1}{\cos^2\theta} = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = sec^2\theta$$

obs2 $\quad (tg\,\theta(t))' = tg'\theta(t) \,.\, \theta'(t) = sec^2\theta(t) \,.\, \theta'(t)$

Regra da Cadeia □

Diferenciais



$f(x)$ é derivável em x_0 se: $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Quociente de Newton.}} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}} = f'(x_0) \iff$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\left[\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)\right]}_{\varepsilon(\Delta x)} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

Seja $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$

$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) \Leftrightarrow \varepsilon \Delta x = \Delta f - f'(x_0)\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x} \quad (*)$$

$$\begin{cases} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x \\ \qquad \varepsilon \to 0 \text{ qdo } \Delta x \to 0 \end{cases}$$

Sabendo que $\lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\varepsilon(\Delta x)}^{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \Delta x \approx 0 \Rightarrow \varepsilon \approx 0$

Fazendo $\Delta x \approx 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \Delta f \approx f'(x_0)\Delta x + 0 \cdot \Delta x \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x}$$

Exemplo: Mostre que se h é suficientemente pequeno, vale a aproximação

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a} \qquad (a > 0) \qquad h \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{5^2 + (-1)} \approx 5 + \frac{(-1)}{2 \cdot 5} = 5 - \frac{1}{10} = \frac{50-1}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9 \Rightarrow$$

$\underbrace{a = 5}_{(+)}$ e $\underbrace{h = -1}_{\in \mathbb{R}}$

$\boxed{\sqrt{24} \approx 4{,}9}$, usando calculadora $\boxed{\sqrt{24} \approx 4{,}898979486}$

$$\sqrt{104} = \sqrt{10^2 + 4} \approx 10 + \frac{4}{2 \cdot 10} = 10 + \frac{4}{20} = \frac{204}{20} \approx 10{,}2$$

$a = 10$ e $h = 4$

$$\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}$$

Seja $f(x) = \sqrt{x}$, Sabemos que

$$\boxed{f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0).h}$$

$\sqrt{a^2} = |a| = a$ pois $a>0$

tomando $x_0 = a^2$ e substituindo na expressão acima obtemos

$$f(a^2+h) - f(a^2) \approx f'(a^2).h$$

$$\sqrt{a^2+h} - \sqrt{a^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{a^2}} . h$$

$$\sqrt{a^2+h} - |a| \approx \frac{h}{2|a|}$$

$$\boxed{\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}}$$

$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

ou

$h = \Delta x$

$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$

$$\boxed{\Delta f(x_0) \simeq f'(x_0)\, h}$$

Obs $f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2}$

DEF. Chama-se diferencial de f em x_0 a expressão simbólica

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

Cálculo Formal: $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \iff df(x_0) = f'(x_0)\,dx$

Obs $a(x) + b(x)\frac{df}{dx}(x) = 0 \iff b(x)\frac{df}{dx}(x) = -a(x)$, $b(x) > 0$

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{a(x)}{b(x)} \iff df(x) = -\frac{a(x)}{b(x)}\,dx$$

Exemplo: Estimar, em notação científica, uma aproximação de

$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$ quando $n = 10^{28}$