Vetor Gradiente

Vetor Gradiente

Definição: Seja f uma função de n variáveis $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que possui derivadas parciais no ponto P_0.

O **vetor gradiente** de f em P_0, denotado por $\nabla f(P_0)$, é definido por

$$\nabla f(P_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right).$$

Vetor Gradiente

Em particular, se $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis que possui derivadas parciais no ponto (x_0, y_0), então

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Se $f(x, y, z)$ é uma função de três variáveis que possui derivadas parciais no ponto (x_0, y_0, z_0), então

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Vetor Gradiente

Exemplo 1: Seja $f(x, y, z) = z^2 + x \cos y$. Encontre $\nabla f(1, \pi, -1)$.

Resolução: A princípio, observemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (\cos y, -x \operatorname{sen} y, 2z).$$

Logo,

$$\nabla f(1, \pi, -1) = (\cos \pi, -\operatorname{sen} \pi, 2(-1)) = (-1, 0, -2).$$

Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Teorema 1: Sejam $z = f(x, y)$ uma função de classe C^1 em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de U tal que

$$\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}.$$

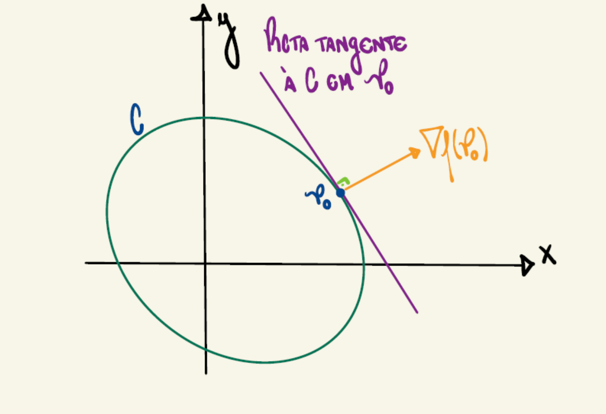
Seja k uma constante e C a curva de nível

$$f(x, y) = k.$$

Suponha que $P_0 \in C$. Então,

$\nabla f(P_0)$ é normal à curva de nível C em P_0, ou seja, $\nabla f(P_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente à C em P_0.

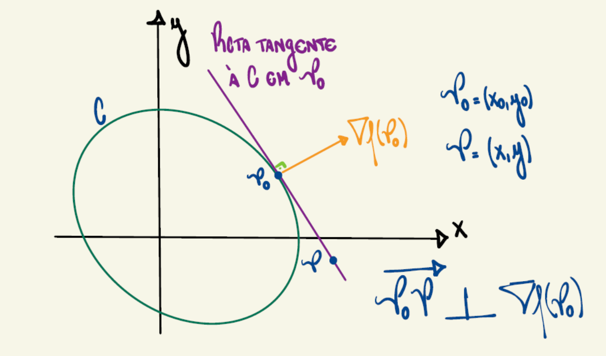
Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica



Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Uma equação para a reta tangente à C em P_0 é

$$\nabla f(P_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$



Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Exemplo 1: Seja C a curva de equação $x^2 + 4y^2 = 9$. Encontre a reta tangente à curva C no ponto $(1, 2)$.

Resolução: Observemos que C é a curva de nível $f(x, y) = 9$ em que f é a função de classe C^1: $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Temos,

$$\nabla f(x, y) = (2x, 8y), \quad \nabla f(1, 2) = (2, 16) \neq \mathbf{0}.$$

A reta tangente à curva C no ponto $(1, 2)$ é

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2) \cdot (x - 1, y - 2) &= 0, \\ (2, 16) \cdot (x - 1, y - 2) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2x + 16y = 34.$$

Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Teorema 2: Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que

$$\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}.$$

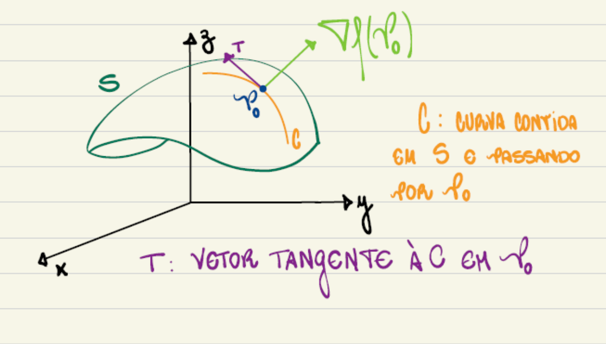
Seja k uma constante e S a superfície de nível de equação

$$f(x, y, z) = k.$$

Suponha que S contém P_0. Então,

$\nabla f(P_0)$ é normal à S em P_0, ou seja, $\nabla f(P_0)$ é normal a qualquer vetor tangente à S em P_0.

Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica



Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Nas condições do **Teorema 2**, o plano de equação

$$\nabla f(P_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

é chamado de **plano tangente** à S em P_0.

A reta de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(P_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

é chamada de **reta normal** à S em P_0.

Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Exemplo 2: Determine a equação do plano tangente à superfície S de equação

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$$

em $(1, -1, 1)$.

Resolução: Observemos que S é a superfície de nível $f(x, y, z) = 8$ em que f é a função de classe C^1: $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$. Temos,

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 6y, 8z), \quad \nabla f(1, -1, 1) = (2, -6, 8) \neq \mathbf{0}.$$

A equação do plano tangente à S em $(1, -1, 1)$ é

$$\nabla f(1, -1, 1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0,$$

ou seja,

$$2x - 6y + 8z = 16.$$

Vetor Gradiente: Interpretação Geométrica

Exemplo 3: Determine a equação da reta normal à superfície S de equação

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$$

em $(1, -1, 1)$.

Resolução: Observemos que S é a superfície de nível $f(x, y, z) = 8$ em que f é a função de classe C^1: $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$. Temos,

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 6y, 8z), \quad \nabla f(1, -1, 1) = (2, -6, 8) \neq \mathbf{0}.$$

A equação da reta normal à S em $(1, -1, 1)$ é

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda \nabla f(1, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 1: Seja C a curva de interseção de duas superfícies S_1 e S_2 de equações

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = 0,$$

respectivamente.

Suponha que F e G são de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contém o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$.

Encontre uma equação para a reta tangente à C em P_0.

Vetor Gradiente

Resolução: Sejam $N_1 = \nabla F(P_0)$ e $N_2 = \nabla G(P_0)$ os vetores normais às superfícies S_1 e S_2 em P_0, respectivamente.

A reta tangente à C em P_0 está contida em cada um dos planos tangentes às superfícies S_1 e S_2 em P_0, respectivamente. Observe que esta reta é a interseção destes dois planos tangentes.

Portanto, N_1 e N_2 são ortogonais à reta tangente à C em P_0.

Assim, o produto vetorial de N_1 com N_2, denotado por $N_1 \times N_2$, tem a mesa direção da reta tangente à C em P_0.

Logo, uma equação para a reta tangente à C em P_0 é

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(\nabla F(P_0) \times \nabla G(P_0)), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$