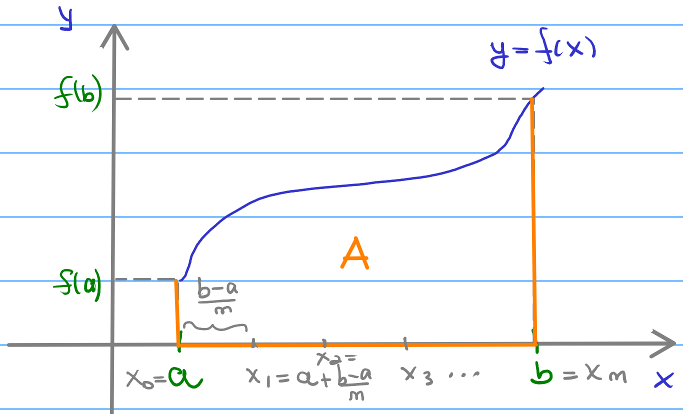
25/10 - Aula 27 - Teorema Fundamental do Cálculo

No espírito das ideias apresentadas no exemplo 17.1, para uma função f contínua no intervalo $[a, b]$ podemos definir a integral $\int_a^b f$ considerando uma sequência de partições $\wp_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$, com os pontos $x_0 = a$, x_1, x_2, $\ldots$, $x_n = b$ igualmente espaçados, ou seja, com $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = (b-a)/n$, tomando ainda como pontos "intermediários", $c_i = x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso teremos $x_i = c_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
Para cada partição $\wp_n$, teremos uma soma integral

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}}$$

e então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

Área abaixo do gráfico da função $y=f(x)$ quando $a \leq x \leq b$.

Seja $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{P} = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$

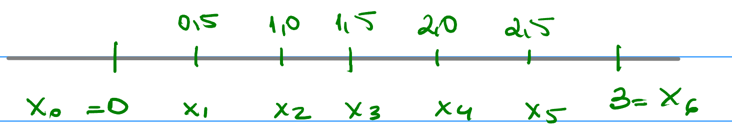
Seja $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_m = \dfrac{b-a}{m}$

$x_1 = a + \dfrac{b-a}{m}$; $x_2 = a + \dfrac{b-a}{m} + \dfrac{b-a}{m} = a + 2\left(\dfrac{b-a}{m}\right)$

$\ldots\ x_i = a + i\left(\dfrac{b-a}{m}\right), \ldots, x_m = a + \cancel{m}\left(\dfrac{b-a}{\cancel{m}}\right) = \cancel{a} + b - \cancel{a} = b$

Ex. Seja $a=0$, $b=3$ e $m=6$ obtenha a partição $\mathcal{P}$ correspondente.

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$



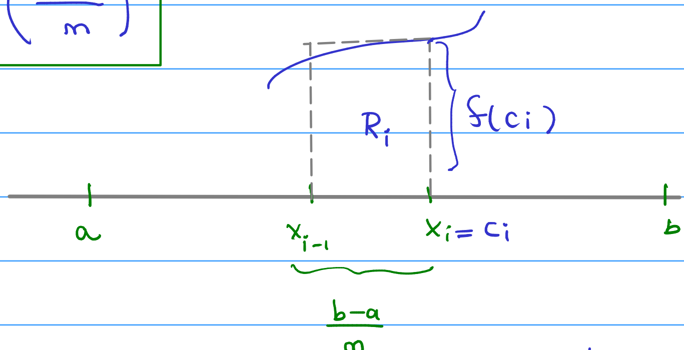
$x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0 + 2.0{,}5$; $x_3 = 3.0{,}5$; $x_4 = 4.0{,}5$

Dada uma partição $\mathcal{P}$ tq.

$$\mathcal{P} = \{(x_0, \dots, x_1) \mid x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b\}$$

e $\boxed{x_i = a + i\left(\frac{b-a}{m}\right)}$

$c_i = x_i = a + i\left(\frac{b-a}{m}\right)$



Note que a área do retângulo R_i que é dada por

$$R_i = f(c_i).\Delta x_i = f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\left(\frac{b-a}{m}\right)$$

$\Rightarrow R_i = f\left(a + i\frac{(b-a)}{m}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{m}\right)$ aproxima a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ou seja,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx R_i$$

A Soma de Riemann associada a partição $\mathcal{P}$ é dada por:

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} f\left(a + i\frac{(b-a)}{m}\right)\left(\frac{b-a}{m}\right)$$

Então, $\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f\left(a + i\frac{(b-a)}{m}\right)\left(\frac{b-a}{m}\right)}$

TFC $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, sendo $F'(x) = f(x)$

Ex.: a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ onde $a = 0$, $b = 3$ e $m = 6$.

$\Downarrow$

b) Calcular $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$

$f(0,5) = (0,5)^3 - 6.(0,5)$

Sol

(a) $S_6 = ?$

$\mathcal{P} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\}$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,5$, $x_4 = 2,0$, $x_5 = 2,5$, $x_6 = 3,0$

$\Delta x = \frac{b-a}{6} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$

$c_i = x_i$

$$S_6 = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\underbrace{\Delta x_i}_{\Delta x} = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\cdot\frac{1}{2} =$$

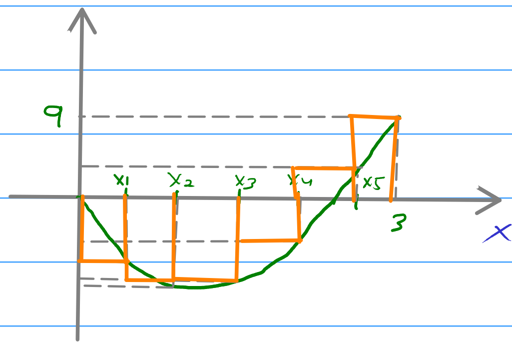
$$= f(c_1)\tfrac{1}{2} + f(c_2)\tfrac{1}{2} + \cdots + f(c_6)\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f(0,5) + f(1,0) + f(1,5) + f(2,0) + f(2,5) + f(3)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-2,875 - 5 - 5,625 - 4 + 0,625 + 9\Big) = -3,9375$$

$$\Rightarrow \boxed{S_6 = -3,9375}$$

$f(x) = x^3 - 6x = x(x^2 - 6)$



S_n

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} f\left(a + i\frac{(b-a)}{m}\right)\left(\frac{b-a}{m}\right) \quad ; \quad a = 0,\ b = 3,\ m \in \mathbb{N}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} f\left(0 + i\frac{3}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right) = \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{3i}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)$$

$$= 3\cdot\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{3i}{m}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{m}\right)\right]\cdot\frac{1}{m}$$

$$S_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27 i^3}{n^3} - \frac{18 i}{n}\right)$$

$$= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{18}{n} i$$

$$= \frac{81}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \Rightarrow$$

Fato 1: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ *

Fato 2: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

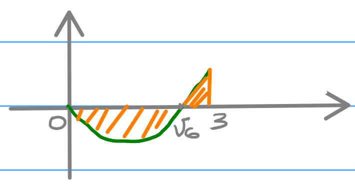
$$S_n = \frac{81}{n^4}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$\Downarrow$ Exercício

$$S_n = \frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \frac{81}{4} - 27 = -6{,}75$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = -6{,}75$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^3 \underbrace{(x^3 - 6x)}_{f(x)}\,dx = -6{,}75}$$



$$\int_0^3 f(x)\,dx = -6{,}75 \Rightarrow \underbrace{\int_0^{\sqrt{6}} f(x)\,dx}_{(-)} + \underbrace{\int_{\sqrt{6}}^3 f(x)\,dx}_{(+)} = -6{,}75$$

$$\text{TFC} \Rightarrow \int_0^3 \underbrace{(x^3 - 6x)}_{f(x)}\,dx = F(3) - F(0) \quad \text{onde } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{6x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + C \Rightarrow F(3) = \frac{3^4}{4} - 3.3^2 + C = \frac{81}{4} - 27 + C \;;\; F(0) = C$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (x^3-6x)\,dx = \frac{81}{4} - 27 + \cancel{c} - \cancel{c} = -6,75$$

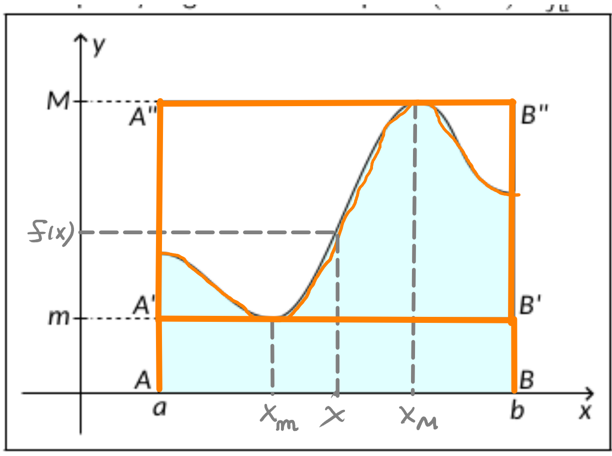
Exercício:

a) Escreva uma expressão para $\int_1^3 e^x\,dx$ como um limite de somas de Riemann

b) Calcule o limite desta expressão para obter o valor da integral do item a)

Proposição 17.1. *Se* f *é contínua no intervalo* $[a,b]$, *sendo* m *e* M *os valores mínimo e máximo de* f, *respectivamente, no intervalo* $[a,b]$, *então*

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$$



$f(x_m) = m \leq f(x)\,,\ \forall x \in [a,b]$

$f(x_M) = M \geq f(x)\,,\ \forall x \in [a,b]$

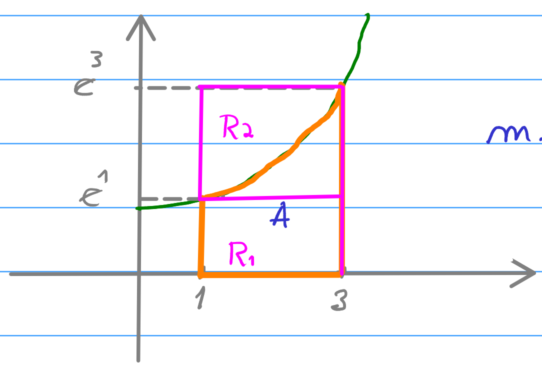
$\Downarrow$

$m \leq f(x) \leq M\,,\ \forall x \in [a,b]$

$$\boxed{m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)}$$

Ex $f(x) = e^x$; $[a,b] = [1,3]$

$$A = \int_1^3 e^x\,dx$$



$m = \min\limits_{1\leq x\leq 3} f(x) = e$

$M = \max\limits_{1\leq x\leq 3} f(x) = e^3$

Logo, $R_1 = e(3-1) = 2e$; $R_2 = e^3(3-1) = 2e^3 \Rightarrow 2e \leq \int_1^3 e^x\,dx \leq 2e^3$

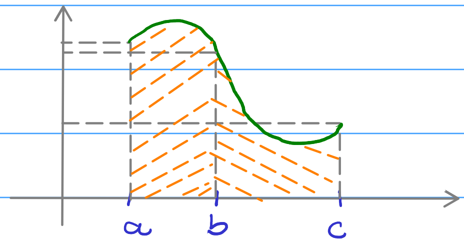
$$TFC \Rightarrow \int_1^3 e^x\,dx = e^3 - e^1 = F(3) - F(1)$$

$$\Rightarrow 2e \leq e^3 - e \leq 2e^3$$

Proposição 17.2. *Se* f *e* g *são contínuas em* $[a, b]$, *então, sendo* k *uma constante e* $a < c < b$,

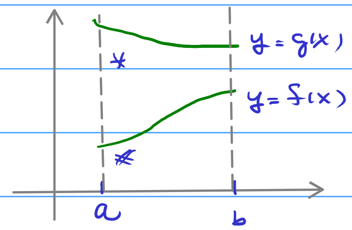
1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
4. *se* $f(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$, *então* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(3)



$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(4)



$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Obs.:

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, f contínua em $[a, b]$

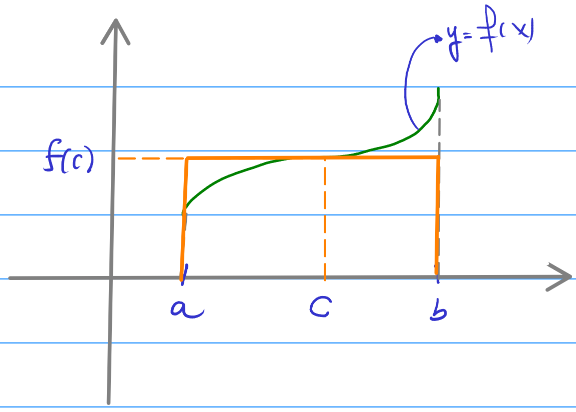
Ex

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\int_3^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_3^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{1}{3} - 9 = -\frac{26}{3} = -\int_1^3 x^2\,dx$$

Teorema 17.1 (Teorema do valor médio para integrais). *Se* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$, *existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\overbrace{(b-a)}^{\neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)}$$

Teorema 17.3 (Teorema fundamental do cálculo, primeira versão). *Seja* f *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$. *Para cada* $x \in [a, b]$, *seja*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Então

$$\varphi'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Teorema 17.4 (Teorema fundamental do cálculo, segunda versão). *Sendo* f *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$, (*)

$$\textit{se} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \textit{então} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$