Matemática Discreta

Relações
Propriedades

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Relações

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar as propriedades das relações
    - Reflexiva
    - Antirreflexiva
    - Simétrica
    - Antissimétrica
    - Transitiva
  - Capacitar o aluno a identificar as propriedades das Relações em problemas computacionais

Problema #8

- **Dada a matriz**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Que representa a relação R sobre o conjunto $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$
  - Essa a relação é reflexiva? É simétrica? É antissimétrica?
  - ➔ Justifique suas respostas com base nas características da matriz

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação reflexiva**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - R é **reflexiva** se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \, R \, x$
  - → R é **reflexiva** se <u>todo</u> elemento de A está relacionado com ele mesmo

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação reflexiva** – Exemplos
    - Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 1) }

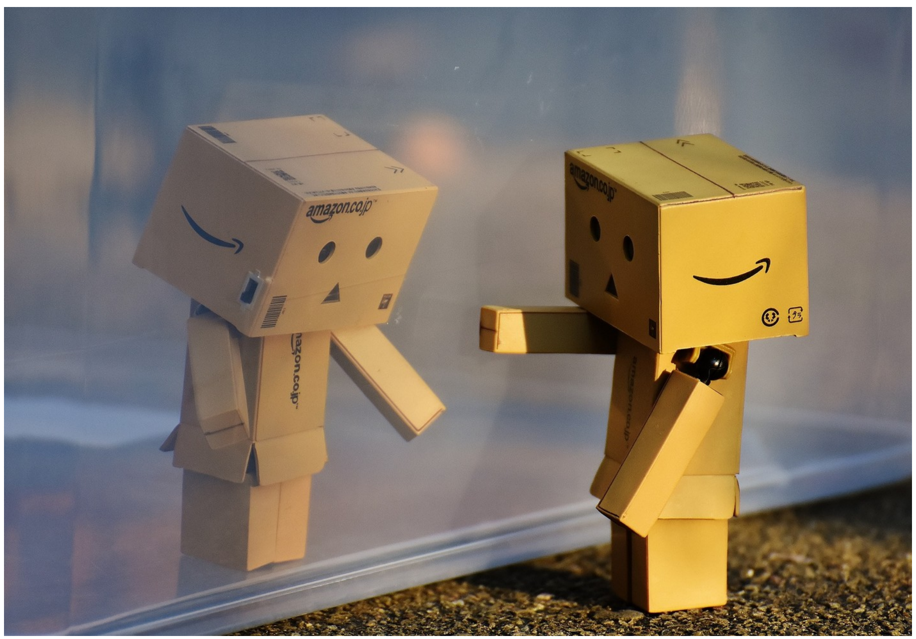
é reflexiva, pois todos os elementos de A estão relacionados com eles mesmos

b) R = { (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3) }

não é reflexiva, pois (2, 2) não está presente em R

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação antirreflexiva** (ou irreflexiva)



Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - R é **antirreflexiva** se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not R x$
  - ➔ R é **antirreflexiva** se <u>nenhum</u> elemento de A está relacionado com ele mesmo

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação antirreflexiva** – Exemplos
    - Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 1) }

não é antirreflexiva, pois é reflexiva

b) R = { (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3) }

não é antirreflexiva,
pois (1,1) está presente em R

c) R = { (1, 3), (2, 3), (1, 2), (3, 1) }

é antirreflexiva, pois nenhum elemento de A está relacionado com ele mesmo

Relações

IMPORTANTE
Relação reflexiva <u>e</u> antirreflexiva → IMPOSSÍVEL
Relação não reflexiva <u>e</u> não antirreflexiva → POSSÍVEL

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação reflexiva X Relação antirreflexiva**
    - Relação reflexiva → relação não antirreflexiva
    - Relação antirreflexiva → relação não reflexiva
    - Relação não reflexiva → ?
      - Uma relação não é reflexiva se <u>existe um</u> $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$
      - ➔ existe um ≠ para todo
    - Relação não antirreflexiva → ?
      - Uma relação não é antirreflexiva se <u>existe um</u> $a \in A$ tal que $(a, a) \in R$
      - ➔ existe um ≠ para todo

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **reflexiva** e **antirreflexiva**:
    - a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }
    - b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }
    - c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **reflexiva** e **antirreflexiva**:
    - a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }
    - b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }
    - c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

RESPOSTAS

a) **Não é reflexiva**, pois falta o par (c, c). **Não é antirreflexiva** porque tem o par (a, a).

b) **Não é reflexiva**, pois faltam todos os pares reflexivos, como o par (a, a). **É antirreflexiva** porque nenhum elemento de A está relacionado com ele mesmo.

c) **É reflexiva**, pois todos os elementos de A estão relacionados com eles mesmos. **Não é antirreflexiva**, porque é reflexiva.

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação simétrica**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - R é **simétrica** se <u>para todo</u> x, y ∈ A temos

$$x \; R \; y \Rightarrow y \; R \; x$$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação simétrica**
    - A expressão x R y ⇒ y R x deve ser lida como *“<u>sempre</u> que x está relacionado a y por R, <u>então</u> y está relacionado a x por R”*
      - A exigência é a de que o par (y, x) apareça na relação quando o par (x, y) estiver na relação
      - Não é necessário que todos os pares (x, y) com x ≠ y estejam relacionados

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação simétrica** – Exemplos
    - Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }

é simétrica, pois sempre que x R y, y R x

b) R = { (1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 2), (2, 3) }

não é simétrica,

pois (1, 2) $\in$ R mas (2, 1) $\notin$ R

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação antissimétrica**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - R é **antissimétrica** se <u>para todo</u> x, y $\in$ A temos $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação antissimétrica**
    - O símbolo ^ representa o conectivo "e", logo a expressão x R y ^ y R x significa *"x está relacionado com y por R* ***e*** *y está relacionado com x por R"*
      - A propriedade antissimétrica estabelece que não é possível inverter a ordem dos elementos do par ordenado a menos que eles sejam iguais

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação antissimétrica** – Exemplos
    - Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }

é antissimétrica, pois sempre que
x R y e y R x, x = y

b) R = { (1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 2), (2, 3) }

não é antissimétrica,
pois (3, 2) $\in$ R e (2, 3) $\in$ R e 2 $\neq$ 3

Relações

IMPORTANTE

Relação simétrica <u>e</u> antissimétrica → POSSÍVEL

Relação não simétrica <u>e</u> não antissimétrica → POSSÍVEL

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação simétrica X Relação antissimétrica**
    - As propriedades de simetria e antissimetria não são mutuamente excludentes
      - Uma relação pode não ser simétrica nem antissimétrica, ou pode ser simétrica e antissimétrica ao mesmo tempo (veja exemplos anteriores)
    - Uma relação não é simétrica se existe $(a, b) \in R$ mas $(b, a) \notin R$, ou seja, existe pelo menos um par (a, b) na relação R tal que seu inverso (b, a) não esteja em R
      - Isso não basta para afirmar que a relação é antissimétrica
    - R não é antissimétrica se existem $a, b \in A$ tais que (a, b) e $(b, a) \in R$ mas $a \neq b$

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **simétrica** e **antissimétrica**:
    - a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }
    - b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }
    - c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **simétrica** e **antissimétrica**:

    a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }

    b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }

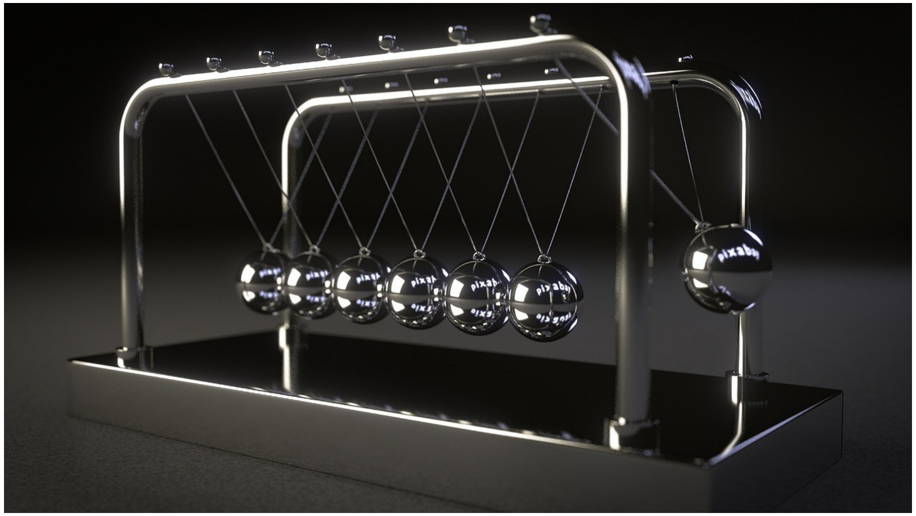
    c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

RESPOSTAS

a) **Não é simétrica**, pois tem o par (a, b) mas não tem o par (b, a).
É antissimétrica porque toda vez que x R y e y R x é porque x = y.
b) **Não é simétrica**, pois tem o par (b, c) mas não tem o par (c, b).
Não é antissimétrica porque tem os pares (a, b) e (b, a) e a ≠ b.
c) **É simétrica**, pois toda vez que x R y, y R x.
Não é antissimétrica, pois tem os pares (c, a) e (a, c) e a ≠ c.

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação transitiva**



Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação definida em um conjunto A
  - R é **transitiva** se <u>para todo</u> x, y, z $\in$ A temos (x R y ∧ y R z) $\Rightarrow$ x R z

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - **Relação transitiva** – Exemplos
    - Seja A = { 1, 2, 3 }

a) R = { (1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3) }

é transitiva, pois sempre que
x R y e y R z, temos x R z

b) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3) }

não é transitiva,
pois (1, 2) $\in$ R, (2, 3) $\in$ R mas (1, 3) $\notin$ R

c) R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }

é transitiva, pois sempre que
x R y e y R z, temos x R z

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **transitiva**:
    - a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }
    - b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }
    - c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Para cada uma das relações em A = { a, b, c } a seguir, verifique se ela é **transitiva**:

    a) { (a, a), (a, b), (b, c), (b, b) }

    b) { (a, b), (b, a), (b, c), (c, a) }

    c) { (a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (a, c) }

RESPOSTAS

a) **Não é transitiva**, pois tem os pares (a, b) e (b, c) mas não tem o par (a, c).

b) **Não é transitiva**, pois tem os pares (a, b) e (b, a) mas não tem o par (a, a).

c) **É transitiva**, pois toda vez que x R y e y R z, então x R z.

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:

    a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$

    b) Relação de menor ou igual ($\leq$) sobre $\mathbb{Z}$

    c) Relação divide (x|y) sobre $\mathbb{Z}$*

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:
    - a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$

RESPOSTAS

a)

- Reflexiva (qualquer inteiro é igual a si mesmo)
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva
- Simétrica (se x = y então y = x)
- Antissimétrica (se x = y e y = x então x e y são o mesmo elemento)
- Transitiva (se x = y e y = z então x = z)

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:

    a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$

    b) Relação de menor ou igual ($\leq$) sobre $\mathbb{Z}$

RESPOSTAS

b)

- Reflexiva (para qualquer inteiro x, é verdade que $x \leq x$)
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva
- Não simétrica ($x \leq y \not\leftrightarrow y \leq x$)
- Antissimétrica (se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$)
- Transitiva ($x \leq y$ e $y \leq z$ implicam $x \leq z$)

- **Propriedades de autorrelações**
  - Diga quais propriedades as autorrelações a seguir possuem:
    - a) Relação de igualdade (=) sobre $\mathbb{Z}$
    - b) Relação de menor ou igual ($\leq$) sobre $\mathbb{Z}$
    - c) Relação divide (x|y) sobre $\mathbb{Z}$*

RESPOSTAS

c)

- Reflexiva (por exemplo, 3|3 e -3|-3)
- Não antirreflexiva, pois é reflexiva
- Não simétrica (por exemplo, 3|9 mas 9 não divide 3)
- Não antissimétrica (por exemplo, 3|-3 e -3|3 e 3 $\neq$ -3)
- Transitiva (por exemplo, 2|4 e 4|8 então 2|8)

Relações

- **Propriedades de autorrelações**
  - IMPORTANTE
    - As propriedades são atributos de uma relação R definida em um conjunto A
    - O conhecimento do conjunto A é fundamental para que se determine se a relação é ou não **reflexiva**
    - Para as outras propriedades, contudo, é suficiente olhar apenas para os pares ordenados em R

Relações

- **Resumo das propriedades**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
    - R é **reflexiva** se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \, R \, x$
    - R é **antirreflexiva** se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not R \, x$
    - R é **simétrica** se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
    - R é **antissimétrica** se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
    - R é **transitiva** se <u>para todo</u> $x, y, z \in A$ temos $(x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$

Problema #8

- **Dada a matriz**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Que representa a relação R sobre o conjunto $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$
  - Essa a relação é reflexiva? É simétrica? É antissimétrica?
  - ➔ Justifique suas respostas com base nas características da matriz

Problema #8

- **Dada a matriz**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Que representa a relação R sobre o conjunto $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$

- $\mathcal{R}$ é reflexiva sobre A pois $m_{i,i} = 1$ para todo i.
- $\mathcal{R}$ é simétrica pois M é simétrica.
- $\mathcal{R}$ não é anti-simétrica pois $m_{1,2} = m_{2,1} = 1$.

Os elementos da diagonal de M são todos 1.

Ou seja, M é igual a sua transposta.

Basta um contraexemplo.

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, pag. 96)