Aula 10

Derivando funções exponenciais e logarítmicas

Nesta aula estaremos deduzindo as derivadas das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, sendo a uma constante real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

O que faz do número e uma constante tão especial? A resposta está no seguinte teorema

Teorema 10.1.

1. *Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$. Ou seja, a derivada da função exponencial de base e coincide com a própria função.*

2. *Se $f(x) = a^x \quad (a > 0)$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.*

Demonstração. Seja $f(x) = e^x$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x
\end{aligned}$$

Para justificar o último passo na dedução acima, nos resta demonstrar:

Proposição 10.1.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Demonstração. Faremos o cálculo do limite através de uma estratégica mudança de variável.

Fazendo $e^h - 1 = z$, temos $e^h = 1 + z$, e então $h = \log_e(1 + z)$

Assim sendo, $h \to 0$ se e somente se $z \to 0$, e então

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_e(1+z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\dfrac{\log_e(1+z)}{z}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\log_e\left[(1+z)^{1/z}\right]} = \frac{1}{\log_e e} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \square$$

Continuação da demonstração do teorema 10.1.

Em virtude da proposição 10.1, sendo $f(x) = e^x$, temos $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = e^x$.

Para calcular a derivada de a^x, fazemos

$$a^x = e^{\log_e a^x} = e^{x \log_e a} = e^{x \ln a} = e^{(\ln a)x}$$

Pela regra da cadeia, $(e^u)' = e^u \cdot u'$, logo

$$(a^x)' = \left[e^{(\ln a)x}\right]' = e^{(\ln a)x} \cdot ((\ln a)x)' = e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$\square$

Em se tratando de funções logarítmicas, temos as seguintes propriedades com relação às suas derivadas.

Teorema 10.2. *Sendo* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ *2.* $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ *4.* $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Demonstração. Se $y = \ln x$, então $y = \log_e x$, e portanto $x = e^y$.

Por derivação implícita em relação a x, temos $(x)' = (e^y)'$, logo $1 = e^y \cdot y'$.

Portanto $y' = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$, ou seja, $(\ln x)' = 1/x$.

Assim sendo, $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Para derivar $\ln|x|$, ou $\log_a |x|$, lembremo-nos de que $|x| = x$ quando $x > 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Assim, se $x > 0$, recaímos nos itens 1 e 3.

Se $x < 0$, empregando derivação em cadeia,

$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{-1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. O item 4 é deduzido analogamente. □

Vimos anteriormente que α é um número racional, então $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Com o emprego da função $\ln$ podemos generalizar este resultado para expoentes irracionais.

Proposição 10.2. *Sendo α uma constante real, racional ou irracional, e $x > 0$,*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Demonstração. Se $y = x^\alpha$ então $\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

Por derivação implícita, em relação a x, temos $(\ln y)' = (\alpha \ln x)'$.

Logo, $\dfrac{1}{y}\cdot y' = \alpha\cdot\dfrac{1}{x}$.

Portanto, $y' = y\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x} = \alpha x^\alpha\cdot\dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. □

Observação 10.1 (Derivação em cadeia envolvendo funções exponenciais e logarítmicas). *Combinando a regra de derivação 3.1 (regra da cadeia) com os resultados estabelecidos nos teoremas 10.1, 10.2 e na proposição 10.2, podemos imediatamente estabelecer que se $u = u(x)$ é uma função derivável, e $a > 0$, $a \neq 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

1. $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$
2. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot\ln a$
3. $(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, *quando* $u(x) > 0$
4. $(\ln|u(x)|)' = \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, *quando* $u(x) \neq 0$
5. $((u(x))^\alpha)' = \alpha\cdot(u(x))^{\alpha-1}\cdot u'(x)$

Cautela portanto com cálculo de derivadas de funções envolvendo potências. Em notação abreviada, sendo u função derivável e a uma constante real, $a > 0$, temos

- $(u^a)' = a\cdot u^{a-1}\cdot u'$
- $(a^u)' = a^u\cdot u'\cdot\ln a$

No exemplo seguinte, fazemos uso da função $\ln$ para derivar uma função exponencial de base e expoente variáveis.

Exemplo 10.1 (Derivada de uma função exponencial de base e expoente variáveis). *Calcular a derivada de* $f(x) = x^x$.

Solução. Sendo $y = x^x$, temos $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$.

Derivando ambos os membros em relação a x, temos

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = y\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).$$

Portanto $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$.

Observação 10.2. *De um modo geral, sendo* $u(x)$ *e* $v(x)$ *duas funções deriváveis,* $u(x) > 0$*, para derivar* $y = u(x)^{v(x)}$*, podemos também escrever*

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$$

e então aplicar derivação em cadeia conforme a observação 12.1: $(e^u)' = e^u \cdot u'$*. Na expressão final da derivada, substituímos* $e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$ *por* $u(x)^{v(x)}$*. Estamos usando o fato de que sendo* $a \in \mathbb{R}$ *e* $a > 0$*,* $a = e^{\ln a}$*.*

10.1 Problemas

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $y = e^{-3x}$ (b) $y = e^{4x+5}$ (c) $y = a^{x^2}$ (d) $y = 7^{x^2+2x}$
   (e) $y = e^x(1 - x^2)$ (f) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ (g) $y = x^{1/x}$ (h) $y = x^\pi \pi^x$

   Respostas.
   (a) $-3e^{-3x}$ (b) $4e^{4x+5}$ (c) $2xa^{x^2} \ln a$ (d) $2(x + 1)7^{x^2+2x} \ln 7$ (e) $e^x(1 - 2x - x^2)$
   (f) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ (g) $x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$ (h) $\pi x^{\pi-1}\pi^x + x^\pi \pi^x \ln \pi$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $y = \ln|ax + b|$ (b) $y = \log_a(x^2 + 1)$ (c) $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$
   (d) $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$ (e) $y = \ln|x^2 + x|$ (f) $y = \log_{10}(3x^2 + 2)^5$
   (g) $y = x \ln x$ (h) $y = (\ln x)^3$ (i) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + \lambda})$ $(\lambda \neq 0)$
   (j) $y = \log_{10}(\ln x)$ (k) $y = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ $(a \neq 0)$

Respostas. (a) $\frac{a}{ax+b}$ (b) $\frac{2x}{(x^2+1)\ln a}$ (c) $\frac{1}{1+e^x}$ (d) $\frac{4x}{1-x^4}$ (e) $\frac{2x+1}{x^2+x}$
(f) $\frac{30x}{(3x^2+2)\ln 10}$ (g) $1+\ln x$ (h) $\frac{3(\ln x)^2}{x}$ (i) $\frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}$ (j) $\frac{1}{x\ln x\ln 10}$ (k) $\frac{1}{a^2-x^2}$

3. Calcule y', calculando $\ln y$, expandindo o segundo membro, utilizando propriedades de logaritmos, e então derivando implicitamente em relação a x.

   (a) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$ (b) $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ (c) $y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
   (d) $y = \sqrt{(3x^2+2)\sqrt{6x-7}}$

   Respostas. (a) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)$. *Sugestão.* Como sugerido no enunciado do problema, faça $\ln y = \ln\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Expandindo o segundo membro, obtemos $\ln y = \frac{1}{3}(\ln x + \ln(x^2+1) - 2\ln|x-1|)$. Por derivação implícita, em relação a x, obteremos $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}$.
   (b) $-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$ (c) $\frac{1+3x^2-2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ (d) $\left(\frac{3x}{3x^2+2}+\frac{3}{2(6x-7)}\right)\sqrt{(3x^2+2)\sqrt{6x-7}}$

4. Calcule dy/dx, se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação

   (a) $3y - x^2 + \ln(xy) = 2$
   (b) $x\ln y - y\ln x = 1$
   (c) $e^{xy} - x^3 + 3y^2 = 11$

   Respostas. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2-1)y}{x(3y+1)}$ (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$ (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}+6y}$

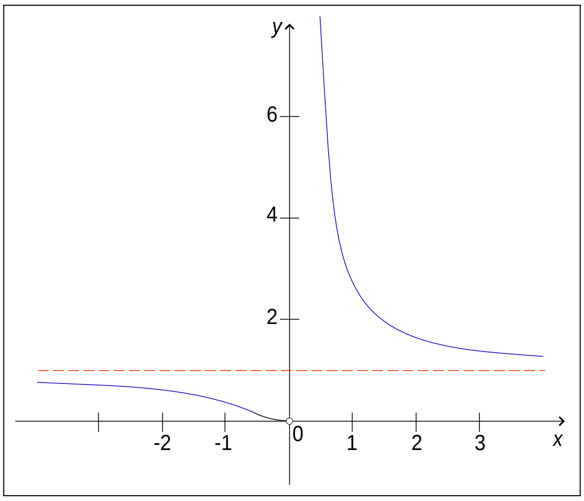
5. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + \ln(2x-5)$ no ponto dessa curva de abcissa 3. *Resposta.* $y = 8x - 15$

6. Mostre que a função $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ é solução da equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

7. A posição s de um ponto móvel P sobre um eixo horizontal s é dada por $s(t) = t^2 - 4\ln(1+t)$, $t \geq 0$, sendo s dado em centímetros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P em um instante t qualquer. Determine os intervalos de tempo em que o ponto P se move (a) para a esquerda, isto é, em direção contrária à do eixo s, e (b) para a direita. *Resposta.* $v(t) = \frac{2(t^2+t-2)}{t+1}$, $a(t) = 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$. (a) $0 \leq t < 1$, (b) $t > 1$.

8. Esboce o gráfico de $f(x) = e^{1/x}$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

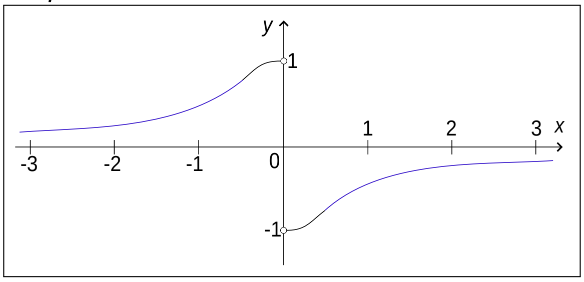
   Resposta.



A reta $x = 0$ (eixo y) é assíntota vertical do gráfico (somente para $x > 0$).
A reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico.
$f'(x) = -e^{1/x}/x^2$
$f''(x) = e^{1/x}(2x+1)/x^4$

9. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{2}{1+e^{1/x}} - 1$, analisando a função f através de derivadas e cálculos de limites apropriados.

Resposta.



Será útil saber que f é uma função *ímpar*, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, para cada $x \neq 0$ (verifique).

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2e^{1/x}[e^{1/x}(2x-1)+2x+1]}{(1+e^{1/x})^3x^4}$$

Dado numérico. Raízes de f'': $\approx \pm 0,4$. Sendo f uma função ímpar, temos que f' é uma função *par* ($f'(-x) = f'(x)$), e f'' é também função ímpar (veja problema 9, aula 3).

10. (a) Qual número real é maior, $(0,1)^{0,1}$ ou $(0,2)^{0,2}$?

    (b) Qual é o menor valor de x^x, sendo x real e positivo?

Respostas. (a) $(0,1)^{0,1} > (0,2)^{0,2}$ (b) $(1/e)^{1/e}$. *Sugestão para ambos os itens.* Verifique os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^x$.

11. Mostre que $\pi^e < e^\pi$, sem o uso de máquinas de calcular.

Sugestão. Considere $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Mostre que f é crescente no intervalo $]0, e]$ e decrescente no intervalo $[e, +\infty[$. Use então o fato de que $\pi > e$.