Lista 14

e) $$\lim_{(x,y)\to(\pi/2,1)} \frac{y+1}{2-\cos x} = \frac{1+1}{2-\cos \pi/2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1.$$

f) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\overbrace{xy-2x-y+2}}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

Primeiro Passo: é possível fazermos uma substituição?

Rascunho: $\dfrac{1.2-2.1-2+2}{1^2+2^2-2.1-4.2+5} = ?$

A substituição, portanto, não é possível.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

Considere o caminho $y = x+1$. Note que se $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2$

Então:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\ y=x+1}} \underbrace{\frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x(x+1)-2x-(x+1)+2}{x^2+(x+1)^2-2x-4(x+1)+5}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2x-x-1+2}{x^2+x^2+2x+1-2x-4x-4+5}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-4x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

Considere o caminho $y = 2x$. Então

$$\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\ y=2x}} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x(2x)-2x-2x+2}{x^2+(2x)^2-2x-4(2x)+5}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 + 4x^2 - 2x - 8x + 5}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{5x^2 - 10x + 5}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\,(x-1)^2}{5\,(x-1)^2} = \frac{2}{5}$$

Logo, sendo os limites distintos, o limite em questão não existe!

k) $$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} = \lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{y(x-1)}{x(x-1) + 2y(x-1)}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{y(x-1)}{(x-1)(x+2y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{y}{x+2y} = \frac{2}{5}.$$