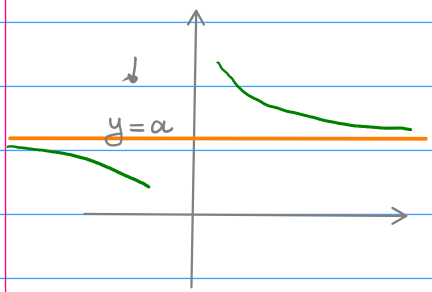
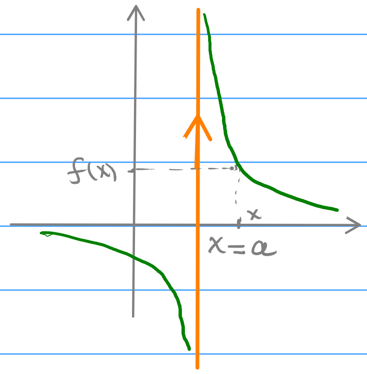
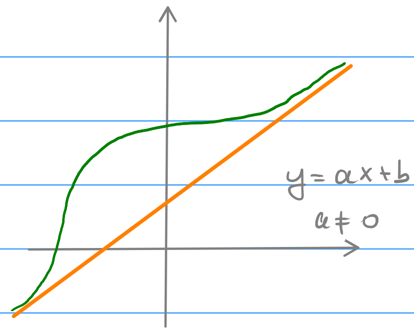
10/09 - Aula 11 - Máximos e mínimos

Dada uma função f(x) pode ser que existam retas tais que o gráfico de f(x) se se aproxima do gráfico desta reta. Tais retas são chamadas assíntotas, as assíntotas se dividem em categorias, aqui estudaremos as assíntotas horizontais, verticais e inclinadas







$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

assíntota horizontal

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

assíntota vertical

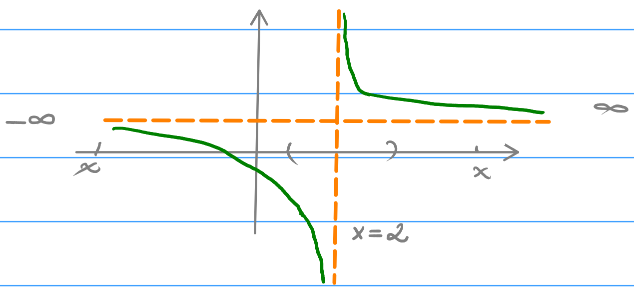
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

assíntota inclinada

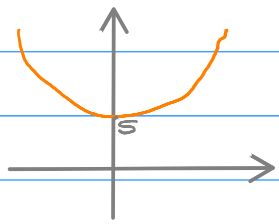
Ex. Mostre que a função $F(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ possui assíntotas

$D(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow$ $x = 2$ é uma assíntota vertical

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{\overbrace{2x+1}^{(+)}}{\underbrace{x-2}_{(+)}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty$$



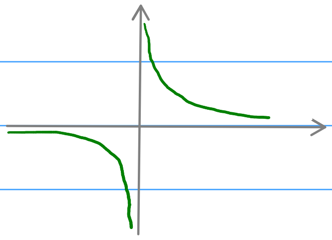
obs $G(x) = \dfrac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2+5)}{\cancel{(x-2)}} = \dfrac{x^3 + 5x - 2x^2 - 10}{x-2} \Rightarrow G(x) = x^2 + 5$

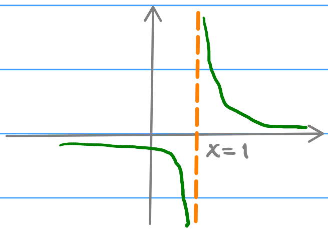


obs: $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

x=0 é ass. vertical x=1 é ass. vertical





Ex. Verifique se a função abaixo possui assíntota inclinada

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

Temos que encontrar uma reta y=ax+b tal que:

$$\lim_{x\to+\infty}[\underbrace{\frac{x^2}{x+1}}_{f(x)} - (ax+b)] = 0$$

$\boxed{\text{assíntota à direita}}$

Etapa 1: $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

$x^2 + x = x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

Etapa 2: $b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{x}{1}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - x}{x+1}$

$\Rightarrow b = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

Logo, a reta $y = ax+b = 1.x-1 = x-1$ é uma assíntota inclinada a direita

Pergunta: Os gráficos das funções acima possuem algum interseção?

Se sim teríamos que resolver a equação $\frac{x^2}{x+1} = (x-1)$

Mas, $x^2 = (x-1)(x+1) \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 = -1$ (absurdo).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\neq 0}} \frac{\cancel{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

$\Rightarrow y=2$ é uma assíntota horizontal

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1)-x^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

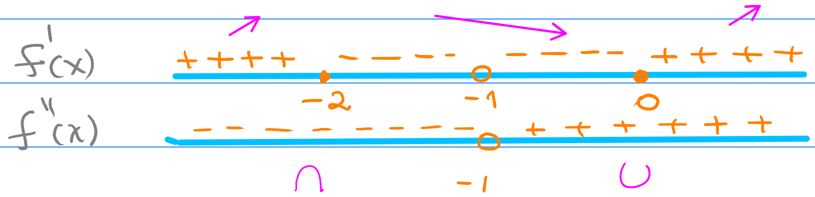
Pontos Críticos $\Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$

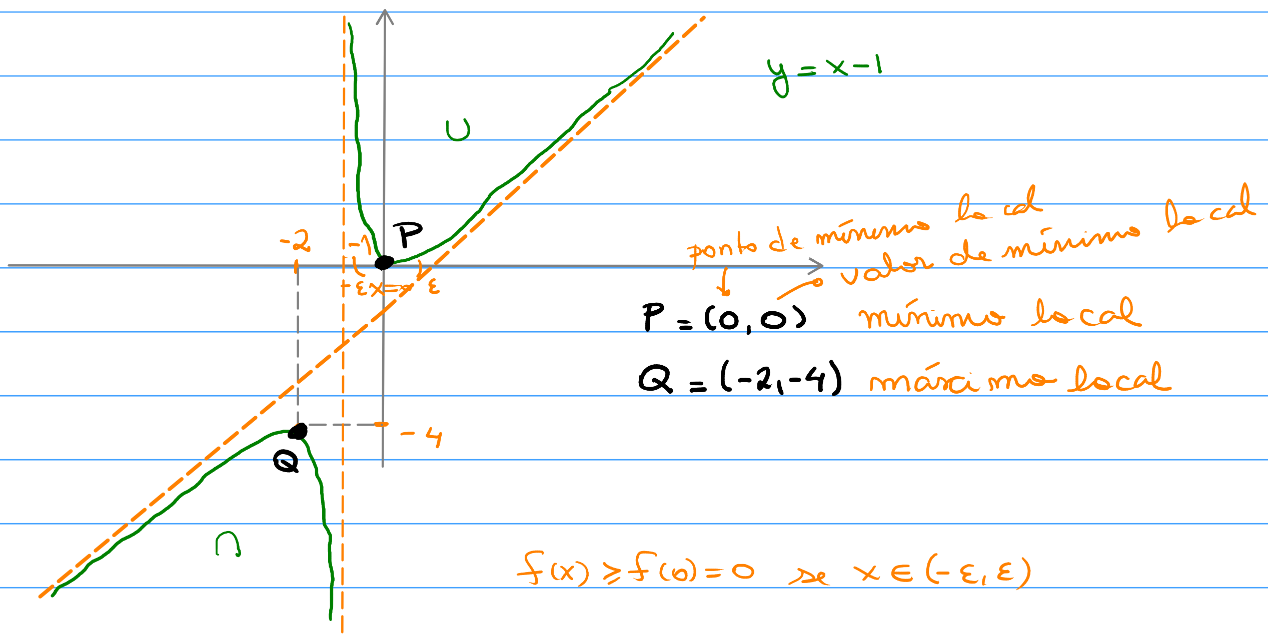
Pontos Críticos $= \{0, -2, -1\} = \{(0,0); (-2,-4); (-1,?)\}$

$f(0)=0$; $f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$; $f(-1) = \nexists$

$$f''(x) = \frac{(2x+2).(x+1)^2 - (x^2+2x).2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$\nexists\, x \in D(f)$ tq $f''(x)=0 \Rightarrow f(x)$ não possui pontos de inflexão





P = (0,0) mínimo local

Q = (-2,-4) máximo local

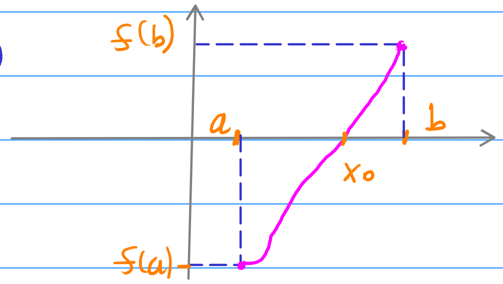
$f(x) \geq f(0) = 0$ se $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Teorema de Bolzano ou Teorema do anulamento: Seja f(x) uma função contínua no intervalo I=[a,b] com:

(1) $f(a)<0$ e $f(b)>0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ tq $f(x_0)=0$

(2) $f(a)>0$ e $f(b)<0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ tq $f(x_0)=0$

(1)



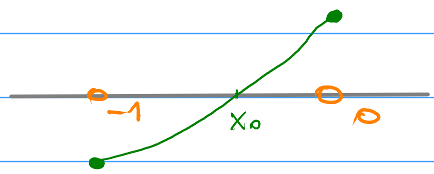
$f(x_0)=0$

Ex: Mostre que a função abaixo possui uma raíz no intervalo]-1,0[

$$f(x) = x^5 + x + 1 \quad \text{(contínua)}$$

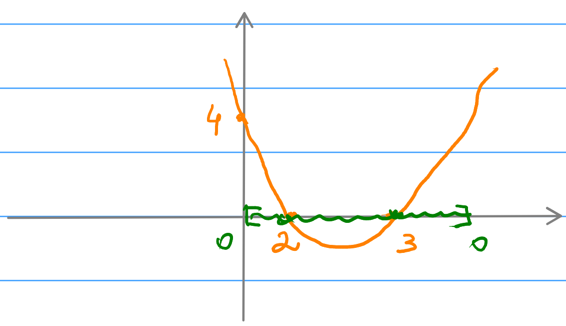
$f(-1) = (-1)^5 - 1 + 1 = -1-1+1 = -1 < 0$

$f(0) = 0^5 + 0 + 1 = 1 > 0$



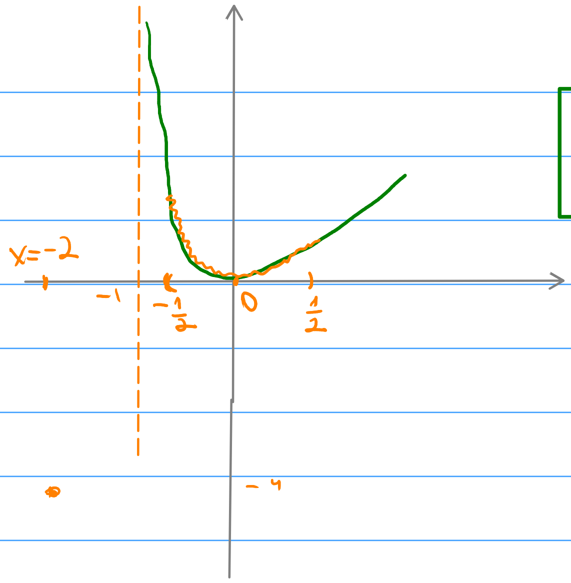
Logo, pelo teor. do Bolzano a eq. $x^5+x+1=0$ possui uma raíz

obs: $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$, $I = [0, 4]$



$f(0) = 6 > 0$

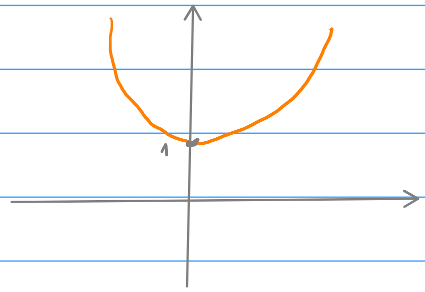
$f(4) = 16 - 20 + 6 = 2 > 0$



$$\boxed{\forall x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = \frac{4}{-1} = -4 < 0$$

$y = x^2 + 1$



$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 1 \Rightarrow P = (0, 1)$

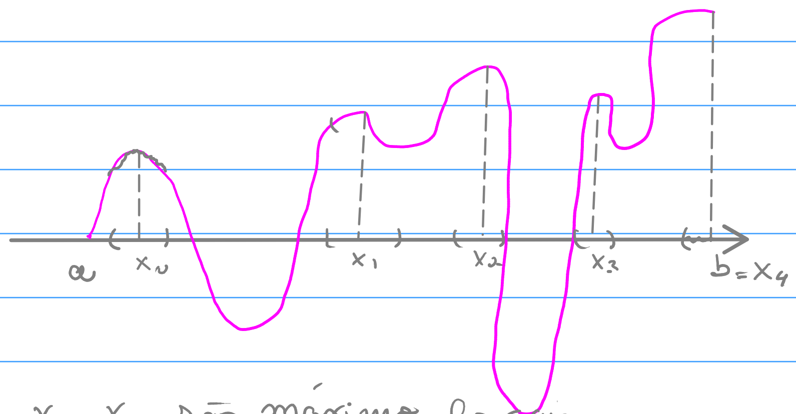
↳ valor de min. local

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto de mínimo local

Neste caso dizemos que $x=0$ é ponto de mínimo global

$\Rightarrow f(x) \geq f(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$



x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 são máximo locais

$x_4 = b$ é o máximo global

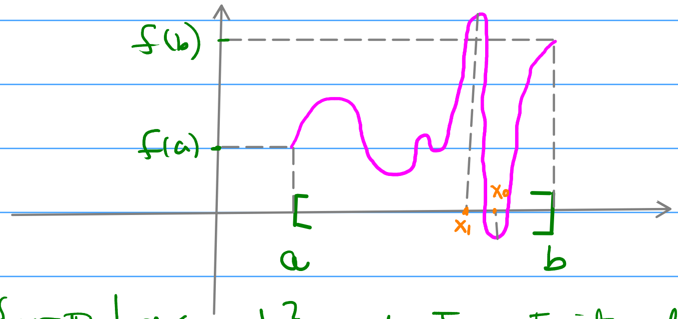
Teorema de Weierstrass: Se uma função f(x) é contínua num intervalo I=[a,b]

Então existem pontos x0 e x1 em [a,b] tais que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{para cada } x \in I$$

$$f(x_1) \geq f(x), \quad \text{para cada } x \in I$$

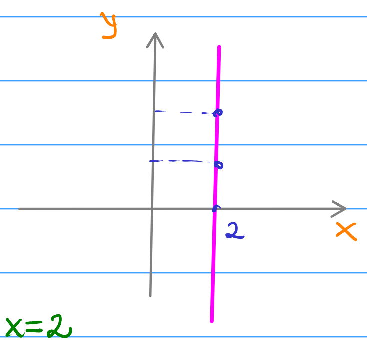
ou seja, $f(x_0)$ é valor do mínimo e $f(x_1)$ é valor do máximo

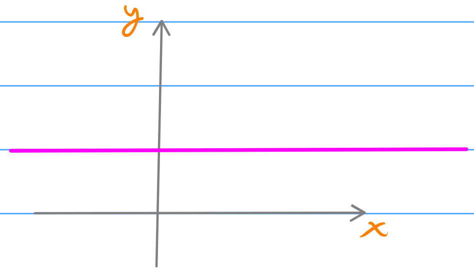


$f(x_0) \leq f(x)$

$f(x_1) \geq f(x), \; x \in I$

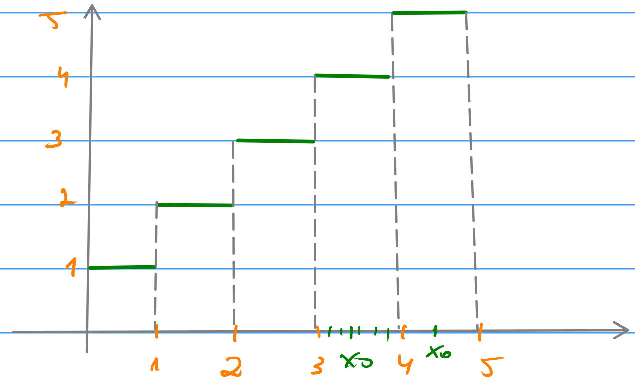
$I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $a, b \in I$, I intervalo fechado



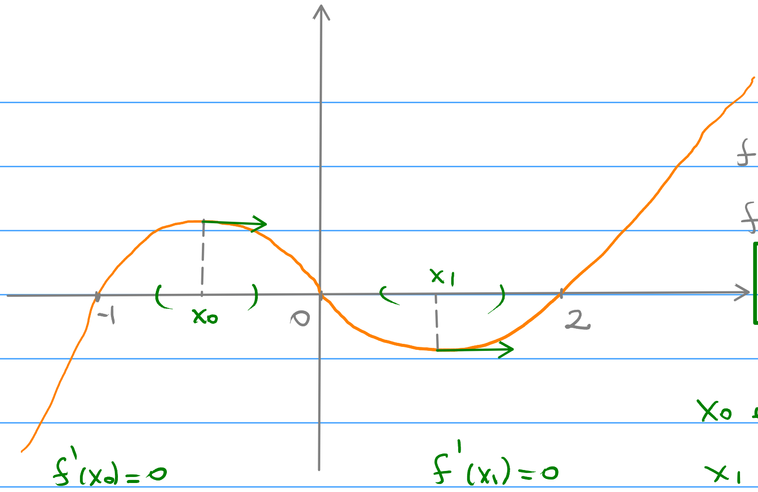


$x = 2$ $\qquad$ $y = 2$

não é função $\qquad$ Não possui máximos ou mínimos



$I = [0, 4] \Rightarrow f(x) \leq 4, \; \forall x \in [0, 4]$



$f(x) = x(x+1)(x-2)$

$f(x) = x(x^2 - x - 2)$

$$\boxed{f(x) = x^3 - x^2 - 2x}$$

x_0 é pto de máx. local

x_1 é pto de min. local.

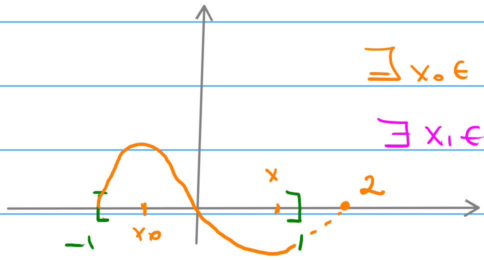
$f'(x_0) = 0$ $\qquad$ $f'(x_1) = 0$

$f''(x_0) < 0$ $\qquad$ $f''(x_1) > 0$

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $D(f) = \mathbb{R}$

$\nexists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ex: $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $D(f) = [-1, 1]$



$\exists\, x_0 \in [-1,1]$ tq $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in [-1,1]$

$\exists\, x_1 \in [-1,1]$ tq $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in [-1,1]$

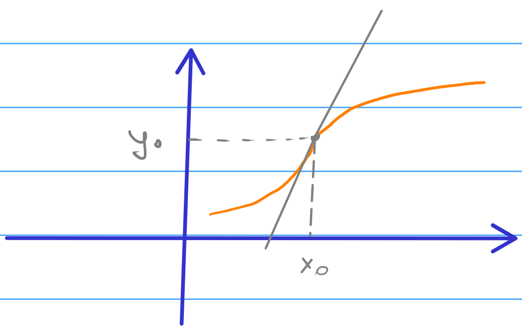
$f(x) = x^3 - x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 4 + 24 = 28 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{28}}{6}$

$x_0 = \dfrac{2 - \sqrt{28}}{6}$ e $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{28}}{6}$

$f''(x_0) < 0$, $f''(x_1) > 0$.

obs.



$\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$