01/10 - Aula 19 -Taxas Relacionadas

Exercício: Calcule os seguintes limites, aplicando as regras de L'Hopital se necessárias.

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\text{sen } 2x)}{\ln(\text{sen } 3x)} =$

$\dfrac{\ln(\text{sen } 0)}{\ln(\text{sen } 0)} = \dfrac{\ln 0}{\ln 0} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } 2x)}{\ln(\text{sen } 3x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\text{sen } 2x))'}{(\ln(\text{sen } 3x))'} \overset{*}{=}$$

Recorde que:

$$\boxed{(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}} \Rightarrow (\ln(\text{sen } 2x))' = \frac{(\text{sen } 2x)'}{\text{sen } 2x} = \boxed{\frac{2\cos 2x}{\text{sen } 2x}}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{2\cos 2x}{\text{sen } 2x}}{\dfrac{3\cos 3x}{\text{sen } 3x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos 2x \cdot \text{sen } 3x}{3\cos 3x \cdot \text{sen } 2x} \overset{**}{=}$$

Recorde que: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } \beta x}{\beta x} = 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R} \neq 0$ (Fundamental)

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos 2x}{\cos 3x}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cancel{2}\,\text{sen } 3x}{3x} \cdot \cancel{3x}}{\dfrac{\cancel{3}\,\text{sen } 2x}{2x} \cdot \cancel{2x}}$$

$$= \underbrace{\frac{\cos 2\cdot 0}{\cos 3\cdot 0}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\text{sen } 3x}{3x}}{\dfrac{\text{sen } 2x}{2x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen } 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\text{sen } 2x)}{\ln(\text{sen } 3x)} = 1$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\lambda}\cdot e^{-x}$, ($\lambda$ real positivo)

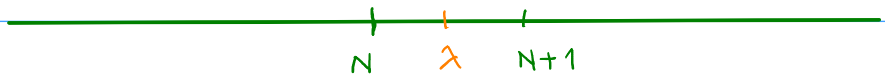
Seja $\lambda=\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\sqrt{2}}}{e^{x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^{\sqrt{2}})'}{(e^{x})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}\cdot x^{\overbrace{\sqrt{2}-1}^{(+)}}}{e^{x}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\cdot x^{\overbrace{\sqrt{2}-2}^{(-)}}}{e^{x}}$

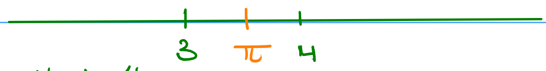
$\sqrt{2}>1 \Rightarrow \sqrt{2}-1>0$

$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}\cdot x^{\overset{+}{(2-\sqrt{2})}}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{(2-\sqrt{2})}\, e^{x}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{+\infty} = 0$

Caso geral:



$N\in\mathbb{N}$



$N=3,\ N+1=4$

Dado qq $\lambda\in\mathbb{R}$ positivo existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$N\leq\lambda<N+1$

$x>0$, $x\to+\infty$, $\lambda>0$

$\left|\dfrac{x^{\lambda}}{e^{x}}\right| = \dfrac{x^{\lambda}}{e^{x}} < \dfrac{x^{(N+1)}}{e^{x}}$, $\boxed{|y|<\beta \Leftrightarrow -\beta<y<\beta}$

$\Downarrow$

$-\dfrac{x^{N+1}}{e^{x}} < \dfrac{x^{\lambda}}{e^{x}} < \dfrac{x^{N+1}}{e^{x}}$

$\downarrow \qquad$ Teor. do Confronto $\qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

$f=x^{3}$
$f'=3x^{2}$
$f''=6x$
$f'''=6=3!$

$f(x)=x^{N}$
$\Downarrow$
$f^{(N)}(x)=N!$
$\Downarrow$
$f^{(N+1)}(x)=(N+1)!$

Fato. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{N+1}}{e^{x}} = 0$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(N+1)\,x^{N}}{e^{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(N+1)N\,x^{N-1}}{e^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{(N+1)N(N-1)}^{\to (N+1)!}\,x^{N-2}}{e^{x}}$

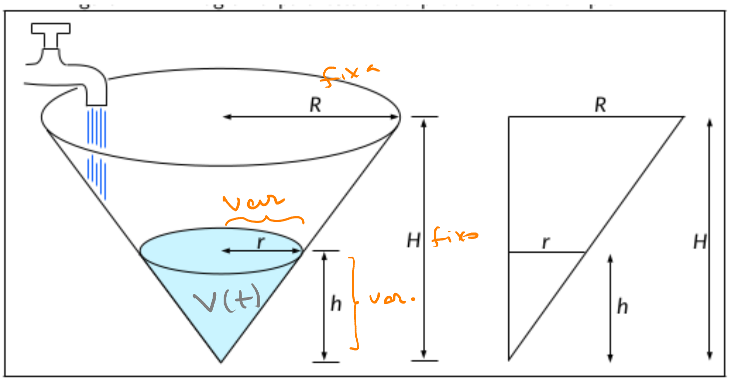
$= \dots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(N+1)!}{e^{x}} = 0$

$\square$

Taxas Relacionadas

Se a variável u é uma função da variável v então $\frac{du}{dv}$ é a taxa de variação de u em relação a v.

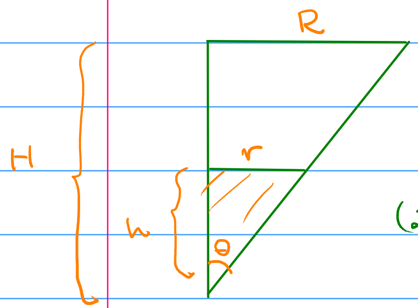
Exemplo 14.1. *Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura* H *e raio do topo circular igual a* R. *Encontrando-se inicialmente vazio, o tanque começa a encher-se de água, a uma vazão constante de* $\boxed{k \text{ litros por minuto.}}$ *Exprima a velocidade com que sobe o nível da água* (dh/dt), *em função da profundidade* h. *Qual é o limite da velocidade de subida do nível da água quando* $h \to 0$ *?*



(1)

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$ (volume de água de profundidade h)

Nosso objetivo consiste em escrever a taxa de variação $\frac{dh}{dt}$ em função de h.



$$\operatorname{tg}\theta = \frac{co}{ca} = \frac{r}{h} = \frac{R}{H} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{h} = \frac{R}{H}} \ (2)$$

$(2) \Rightarrow r = \frac{Rh}{H}$ substituindo em (1) obtemos

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h = \frac{\pi R^2}{3H^2} \cdot h^3$$

$$V(t) = \frac{\pi R^2}{3H^2} \cdot h(t)^3 \quad (3)$$

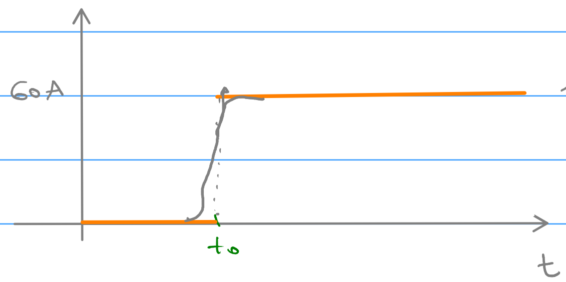
$$\frac{dV(t)}{dt} = \text{vazão} = k \ \frac{\text{litro}}{\text{min}}$$

Derivando (3) obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\pi R^2}{3H^2} h(t)^3\right\} = \boxed{\frac{\pi R^2}{\cancel{3}H^2} \cancel{3} \cdot h^2(t) \cdot \frac{dh}{dt} = k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{kH^2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{h^2}}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{dh}{dt} = \lim_{h\to 0^+} \frac{kH^2}{\pi R^2}\,\frac{1}{h^2} = \frac{kH^2}{\pi R^2}\,\overbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}}^{+\infty} = +\infty \qquad \square$$



$$i(t) \Rightarrow \left.\frac{d\,i(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = +\infty$$