Gráficos e superfícies de nível para funções de três variáveis.

Definição: Uma função real f de 3 variáveis associa a cada tripla $(x_1, x_2, x_3) \in D \subset \mathbb{R}^3$ um único nº real $w = f(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{aligned} f: \underbrace{D}_{\text{Domínio}} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \underbrace{f(x_1, x_2, x_3)}_{w \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Exemplo: A temperatura em um ponto (x,y,z) é dada por

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2+3z^2}$$

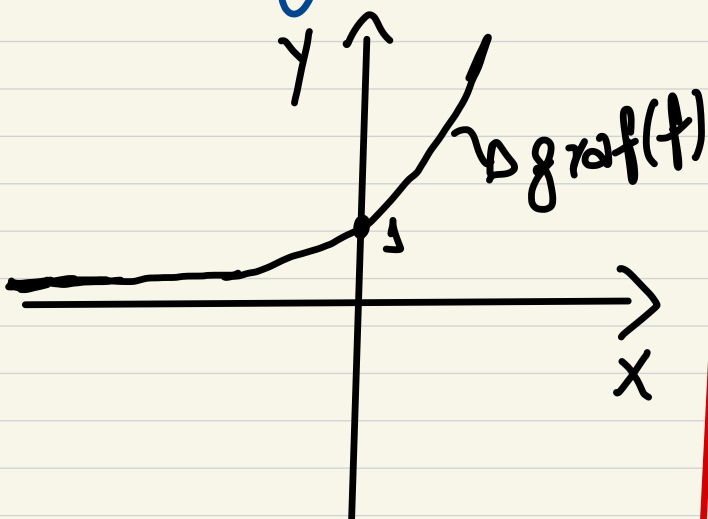
graus.

$$T: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2+3z^2}$$

Domínio $D_T = \mathbb{R}^3$

Imagem $T = (0,+\infty)$



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x$$

$$y = e^x$$

$$T: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2+3z^2}$$

Pergunta: Qual o valor da Temperatura no ponto $(1,-1,1)$?

$$T(1,-1,1) =$$

$$= e^{-1^2-2(-1)^2+3(1)^2}$$

$$= e^{-1-2+3} = e^0 = 1$$

$$T: D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T(x,y,z) = e^{-x^2 - 2y^2 + 3z^2}$$

Domínio $D_T = \mathbb{R}^3$

Imagem $T = (0, +\infty)$

$\boxed{G_T} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;$

$w = f(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

→ podemos desenhar?

Para funções de 3 variáveis

$$w = f(x, y, z)$$

não podemos visualizar seu gráfico.

No entanto, podemos considerar as superfícies de Equação

$$f(x, y, z) = K$$

quando $K \in \operatorname{Im} f$.

$$\boxed{\text{superfícies de nível de } f}$$

$T : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(x,y,z) = e^{-x^2 - 2y^2 + 3z^2}$

$\operatorname{Im} T = (0, +\infty)$

Observe que $1 \in \operatorname{Im} T$

$T(x,y,z) = 1$

$N_1 = \{ (x,y,z) \in D_T ;$

$T(x,y,z) = 1 \}$

$$\underbrace{e^{-x^2-2y^2+3z^2} = 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 0$$

$$3z^2 = x^2 + 2y^2$$

$$z^2 = \frac{x^2 + 2y^2}{3}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{x^2+2y^2}{3}}$$

$$N_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;$$

$$T(x, y, z) = 1\} =$$

$$= \left\{\left(x, y, \pm\sqrt{\frac{x^2 + 2y^2}{3}}\right); \right.$$

$$\left. x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$