Variância Amostral

Sílvia

2021/2

Média Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n

Média Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A média amostral é dada por $\bar{X}$

Média Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A média amostral é dada por $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Média Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A média amostral é dada por $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

e temos que

Média Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A média amostral é dada por $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

e temos que

$$n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Variância Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n

Variância Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A variância populacional é calculada como

Variância Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A variância populacional é calculada como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Variância Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n

A variância populacional é calculada como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Já a variância amostral é

Variância Amostral

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável Aleatória X, X_1, X_2, ..., X_n
A variância populacional é calculada como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Já a variância amostral é

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Sabemos, do Teorema Central do Limite que

Sabemos, do Teorema Central do Limite quepara uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória, cuja média seja μ e a variância conhecida σ^2, a estatística média amostral $\bar{X}$ tem distribuição

Sabemos, do Teorema Central do Limite quepara uma amostra aleatória de tamanho n de uma variável aleatória, cuja média seja μ e a variância conhecida σ^2, a estatística média amostral $\bar{X}$ tem distribuição

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Isto pois queremos um estimador não viesado.

Isto pois queremos um estimador não viesado.
Pela definição de estimador não viesado (não tendencioso, não viciado, justo) devemos ter

Isto pois queremos um estimador não viesado.
Pela definição de estimador não viesado (não tendencioso, não viciado, justo) devemos ter

$$E(S^2) = \sigma^2$$

.

Vamos escrever

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right\}^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[n\bar{X} - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right\}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\left[\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right]+n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\bar{X}-\mu)\left[n\bar{X}-n\mu\right]+n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n(\bar{X}-\mu)^2+n(\bar{X}-\mu)^2$$

Vamos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i-1}^{n}\left\{(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right\}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\left[n\bar{X} - n\mu\right] + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$E[S^2] \;=\; E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - nE(\bar{X}-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - nE(\bar{X}-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - nE(\bar{X}-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - nE(\bar{X}-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\right) = \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2
\end{aligned}
$$