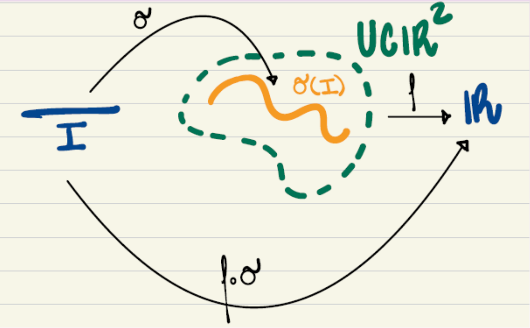
Regra da Cadeia

Regra da Cadeia

Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

Sejam $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis.

Suponhamos que $\sigma(I) \subset U$:



Como derivamos a função $f \circ \sigma : I \to \mathbb{R}$?

Regra da Cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): (Função de duas variáveis)

Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva tal que $\sigma(I) \subset U$.

Suponha que σ é diferenciável em $t_0 \in I$ e $f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) := \sigma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$.

Então, a função composta $z(t) = f(\sigma(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Outra notação: $z'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0)$.

Regra da Cadeia

Exemplo 1: Sejam $z = f(x,y) = x^3y^2$, $\sigma(t) = (e^{-t}, t\,\text{sen}\,t)$. Sendo $z(t) = f(\sigma(t))$, calcule $z'(t)$.

Resolução: A princípio, observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y,$$

e, desde que $(x(t), y(t)) = (e^{-t}, t\,\text{sen}\,t)$, tem-se

$$x'(t) = -e^{-t}, \quad y'(t) = \text{sen}\,t + t\cos t.$$

De acordo com a Regra da Cadeia,

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Regra da Cadeia

Assim,

$$\begin{aligned} z'(t) &= 3(x(t))^2(y(t))^2 x'(t) + 2(x(t))^3 y(t) y'(t) \\ &= 3(e^{-t})^2(t \operatorname{sen} t)^2(-e^{-t}) + 2(e^{-t})^3 t \operatorname{sen} t(\operatorname{sen} t + t \cos t) \\ &= e^{-3t}(-3t^2 \operatorname{sen}^2 t + 2t \operatorname{sen}^2 t + 2t^2 \operatorname{sen} t \cos t). \end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Exemplo 2: Considere uma chapa de metal aquecida. Denote por $T(x,y)$ a temperatura da chapa na posição (x,y). Uma formiga caminha por esta chapa de acordo com a trajetória

$$\sigma(t) = (t^2+1, 3t),$$

em que $\sigma(t)$ denota a posição da formiga no instante t. A temperatura tem as seguintes propriedades:

$$T(5,6) = 40, \quad T_x(5,6) = 4, \quad T_y(5,6) = -2.$$

Qual a taxa de variação desta temperatura em relação ao tempo no instante $t = 2$?

Regra da Cadeia

Resolução: A temperatura em cada instante t é

$$z(t) = T(\sigma(t)) = T(x(t), y(t)),$$

qem que $x(t) = t^2 + 1$ e $y(t) = 3t$. De acordo com a Regra da Cadeia,

$$z'(t) = T_x(x(t), y(t))x'(t) + T_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Para $t = 2$,

$$\begin{aligned} z'(2) &= T_x(x(2), y(2))x'(2) + T_y(x(2), y(2))y'(2) \\ &= T_x(5, 6)x'(2) + T_y(5, 6)y'(2) \\ &= 4x'(2) - 2y'(2) = -2. \end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): (Função de três variáveis)

Sejam $w = f(x, y, z)$ uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, uma curva tal que $\sigma(I) \subset U$.

Suponha que σ é diferenciável em $t_0 \in I$ e $f(x, y, z)$ é diferenciável em $(x_0, y_0, z_0) := \sigma(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Então, a função composta $w(t) = f(\sigma(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt}(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\frac{dy}{dt}(t_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\frac{dz}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

Outra notação: $w'(t_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)$.

Regra da Cadeia

Exemplo 3: Sejam $w = f(x, y, z) = (x + y)z^2$, $\sigma(t) = (e^t, t^2, t^3)$. Sendo $w(t) = f(\sigma(t))$, calcule $w'(t)$.

Resolução: A princípio, observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z(x + y)$$

e, desde que $(x(t), y(t), z(t)) = (e^t, t^2, t^3)$, tem-se

$$x'(t) = e^t, \quad y'(t) = 2t, \quad z'(t) = 3t^2.$$

De acordo com a Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t). \end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Assim,

$$\begin{aligned} w'(t) &= (z(t))^2 x'(t) + (z(t))^2 y'(t) + 2z(t)(x(t)+y(t))z'(t) \\ &= t^6 e^t + 2t^7 + 6t^5(e^t + t^2). \end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Exercício 1: Sejam $f(x, y)$ uma função diferenciável num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $g(u, v)$ e $h(u, v)$ funções diferenciáveis num aberto $V \subset \mathbb{R}^2$.

Suponha que $(x, y) = (g(u, v), h(u, v)) \in U$ sempre que $(u, v) \in V$. Assim, a função composta

$$F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)),$$

está bem definida.

Encontre as derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v)$.

Regra da Cadeia

Resolução: Temos $F(u, v) = f(x, y)$ em que

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial h}{\partial u}(u, v),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial h}{\partial v}(u, v).\end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Exemplo 4: Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável tal que

$$f_x(0,1) = 1, \quad f_y(0,1) = 0.$$

Sendo $F(u,v) = f(u^2 - 1, u + v)$, encontre $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1,0)$.

Resolução: Sejam $g(u,v) = u^2 - 1$ e $h(u,v) = u + v$. Pela Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(1,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(1,0),h(1,0))\frac{\partial g}{\partial u}(1,0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(g(1,0),h(1,0))\frac{\partial h}{\partial u}(1,0) \end{aligned}$$

Observemos qe $(g(1,0),h(1,0)) = (0,1)$ e $g_u(1,0) = 2$ e $h_u(1,0) = 1$.

Regra da Cadeia

Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1,0) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2.$$

Regra da Cadeia

Exercício 2: Sejam $f(x, y, z)$ uma função diferenciável num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ e $z(u, v, w)$ funções diferenciáveis num aberto $V \subset \mathbb{R}^3$.

Suponha que $(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in U$ sempre que $(u, v, w) \in V$. Assim, a função composta

$$F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

está bem definida.

Encontre as derivadas parciais $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v, w)$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v, w)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial w}(u, v, w)$.

Regra da Cadeia

Resolução: Temos

$$F(u, v) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u, v, x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w).
\end{aligned}$$

Regra da Cadeia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial v}(u,v,x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial z}{\partial v}(u,v,w).
\end{aligned}$$

Regra da Cadeia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial x}{\partial w}(u,v,w)\\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial y}{\partial w}(u,v,w)\\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\partial z}{\partial w}(u,v,w).
\end{aligned}$$

Referência:

Diomara Pinto, Maria Cândida Ferreira Morgado: Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis. Editora UFRJ, 2015.