

Funções Reais

de Várias Variáveis

Lembrando....

Cálculo 1

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

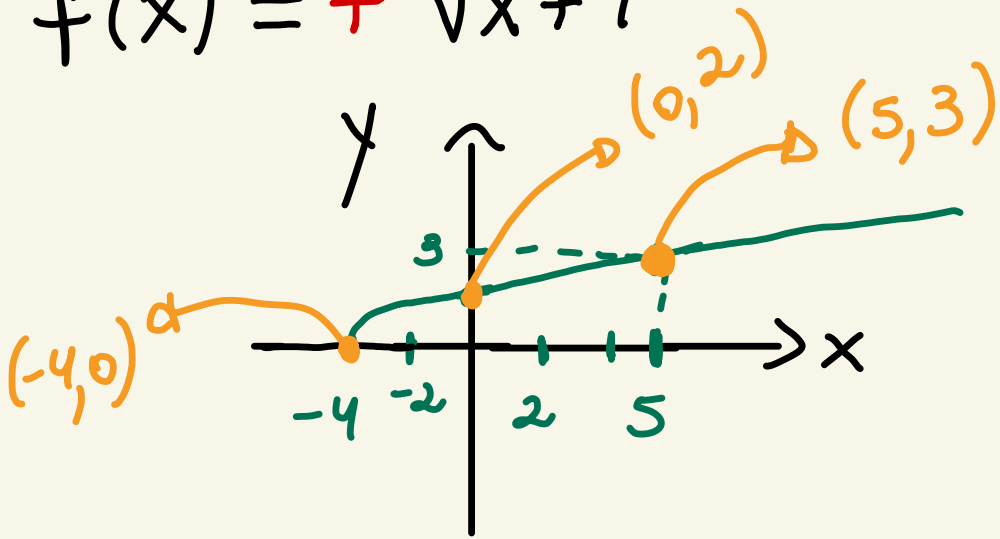
$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} \longmapsto \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$y = f(x) \text{ com } x \in D \} \\ \subset \mathbb{R}^2$$

Exemplo: $f: [-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = + \sqrt{x+4}$$



$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 3$$

Definição: Uma função real f de n variáveis associa a cada n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$

Um único n^o real $w = f(x_1, \dots, x_n)$.

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

\hookrightarrow Domínio $\in \mathbb{R}$

Exemplo 1:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{x-y}$$

Lei de f : $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$

$$(0, -2) \xrightarrow{f} \frac{1}{0 - (-2)} = \frac{1}{2}$$

Domínio: todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \neq y$.

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$$

Imagem: $\text{Im}(f)$

$$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$$



contradomínio

Dado $a \in \mathbb{R}$, tq $a \neq 0$

Pergunta: a pode ser

escrito como $f(x, y)$

para algum $(x, y) \in D$?

Resp: $\frac{1}{1/a} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

tomando $x = \frac{1}{a}$

$y = 0$, então

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{a}, 0\right) = a.$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Observações:

① Como $\text{Im}(f) \neq$ contradomínio, f não é sobrejetora.

② Tomando $x = 0$

$$\text{e } y = -1/a$$

$$f(x, y) = f(0, -1/a) =$$

$$= \frac{1}{0 - (-1/a)} = \frac{1}{1/a} = a$$

$\therefore f$ não é injetora.

$$(1/a, 0) \xrightarrow{f} a$$

$$(0, -1/a) \xrightarrow{f} a$$

Exemplo 2:

$$g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \quad g(1, 1) = 0$$

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$$

g é sobrejetora,
mas não injetora

Obs: Note que

$$(f, D_f, \mathbb{R}) \neq (g, D_g, \mathbb{R})$$

Exemplo 3: Determine o domínio da função

$$f(x, y) = (x^2 - y)^{-\frac{1}{2}}$$

Resolução: Notemos que

$$f(x, y) = (x^2 - y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 - y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$$

Portanto,

$$x^2 - y > 0$$

$$x^2 > y$$

$$(1, 2) \notin Df$$

$$1^2 = 1 < 2$$

$$1 - 2 = -1$$

$$Df = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 > y \}$$

