

## Capítulo 2 | Probabilidade

## 2.1 Espaço amostral

### Definição 2.1

O conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento estatístico é chamado de espaço amostral e é representado pelo símbolo  $S$ .

### ■ Exemplo 2.1

Considere o experimento de jogo de dados. Se estivermos interessados no número que aparecerá no topo, o espaço amostral será:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Se estivermos interessados em saber se o número será par ou ímpar, o espaço amostral será simplesmente:

$$S_2 = \{\text{par}, \text{ímpar}\}.$$

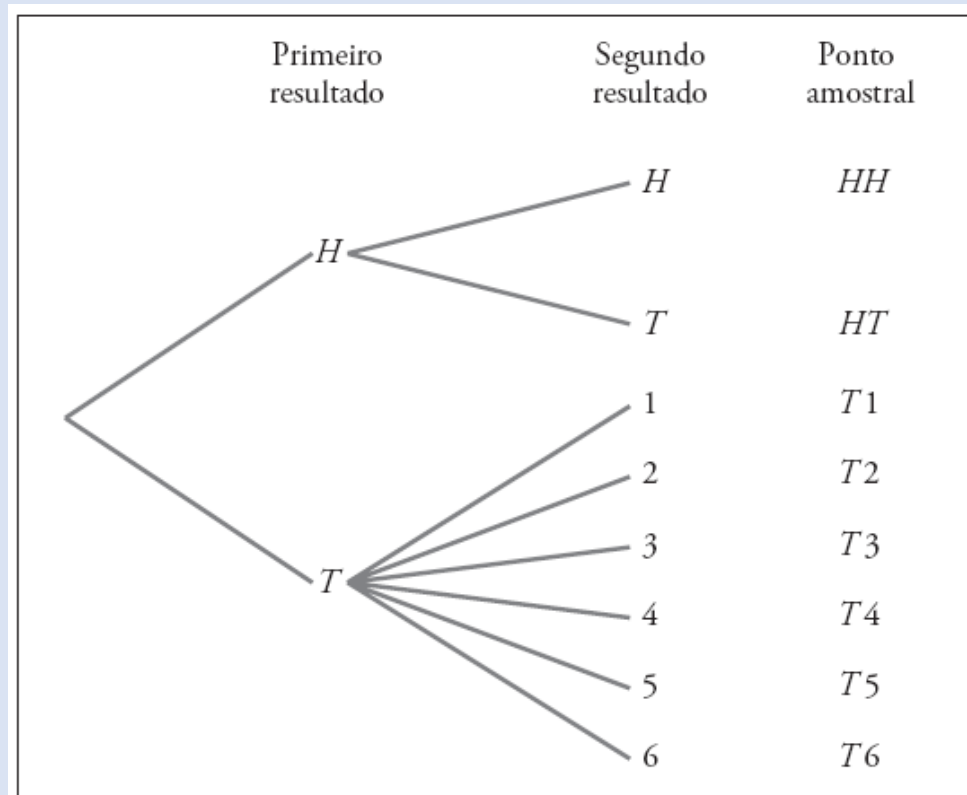


Figura 2.1 Diagrama de árvore para o Exemplo 2.2.

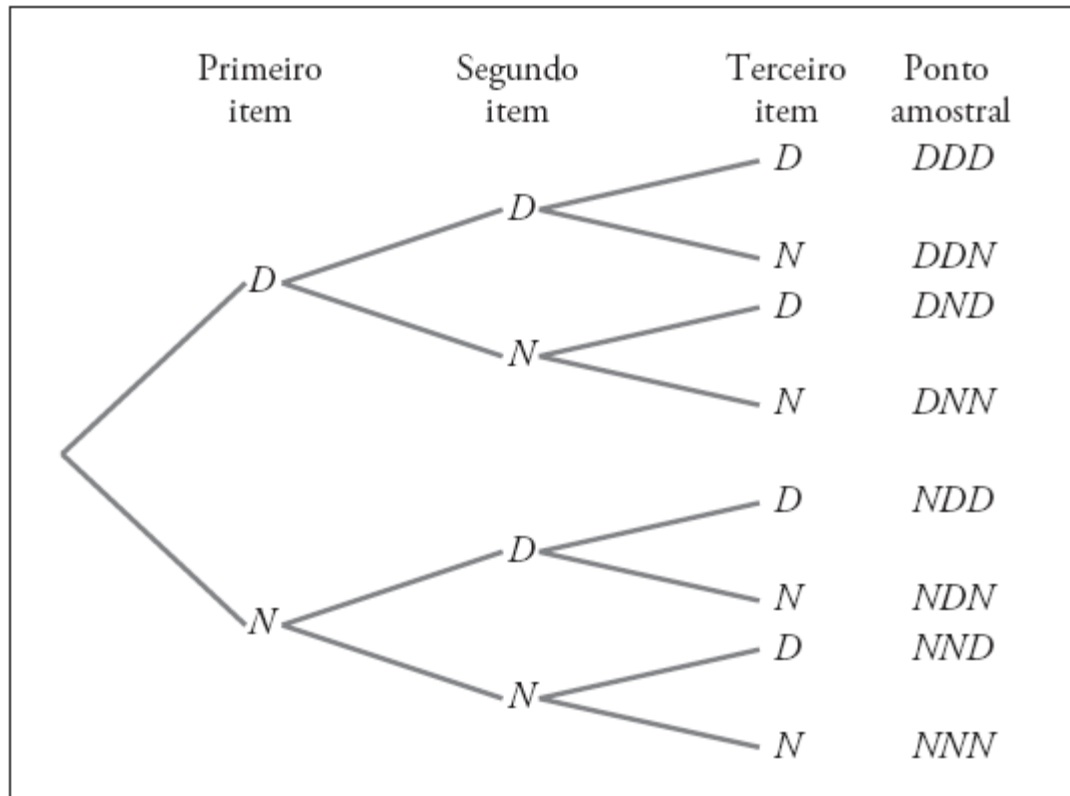


Figura 2.2 Diagrama de árvore para o Exemplo 2.3.

## 2.2 Eventos

### Definição 2.2

Um *evento* é um subconjunto de um espaço amostral.

### Definição 2.3

O *complemento* de um evento  $A$  relacionado a  $S$  é o subconjunto de todos os elementos de  $S$  que não estão em  $A$ . Denotamos o complemento de  $A$  pelo símbolo  $A'$ .

### ■ Exemplo 2.6

---

Considere o espaço amostral

$$S = \{\text{livro, catalisador, cigarro, precipitado, engenheiro, rebite}\}.$$

Considere  $A = \{\text{catalisador, rebite, livro, cigarro}\}$ . Então, o complemento de  $A$  é  $A' = \{\text{precipitado, engenheiro}\}$ .

---



### **Definição 2.4**

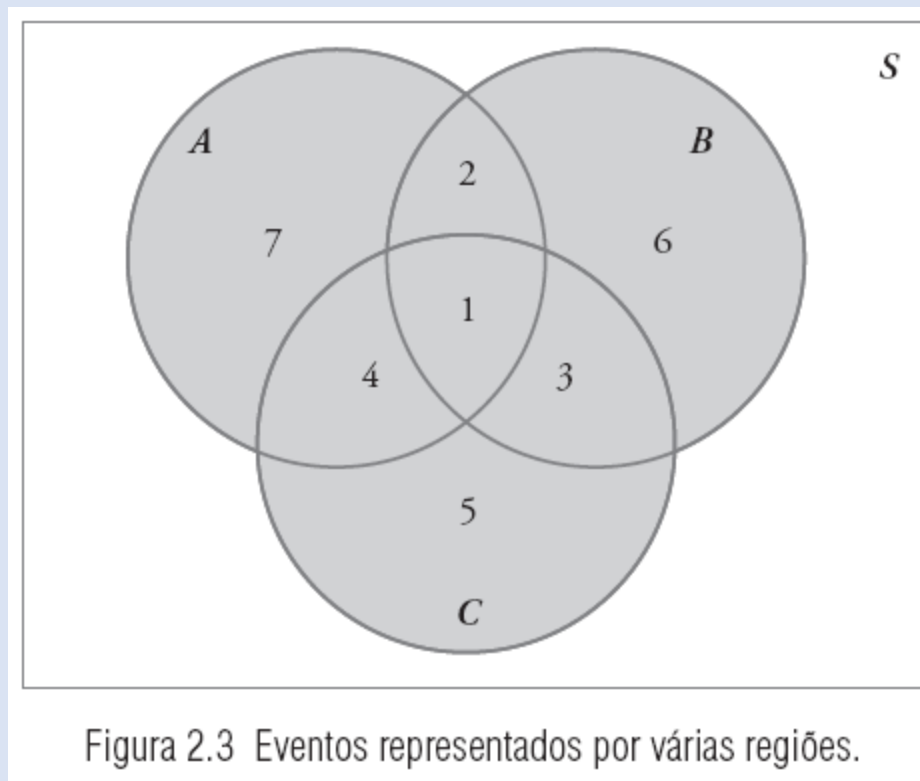
A *intersecção* de dois eventos  $A$  e  $B$ , denotada pelo símbolo  $A \cap B$ , é o evento que contém todos os elementos comuns a  $A$  e  $B$ .

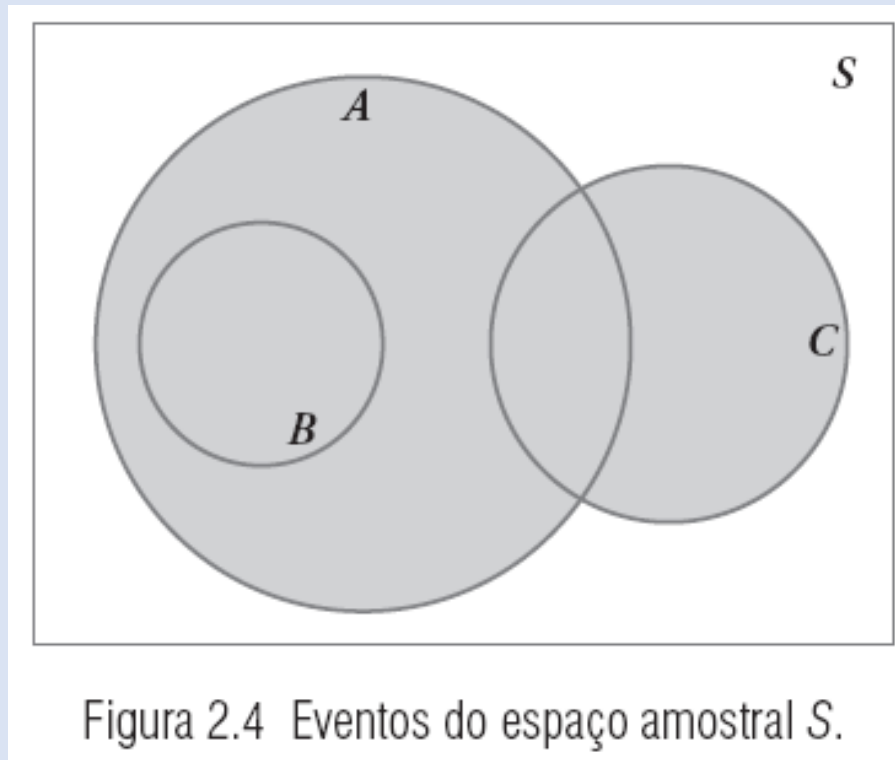
### **Definição 2.5**

Dois eventos  $A$  e  $B$  são *mutuamente exclusivos*, ou *disjuntos*, se  $A \cap B = \phi$ , ou seja, se  $A$  e  $B$  não tiverem elementos em comum.

### **Definição 2.6**

A *união* de dois eventos  $A$  e  $B$ , denotada pelo símbolo  $A \cup B$ , é o evento que contém todos os elementos que pertencem a  $A$  ou  $B$ , ou a ambos.





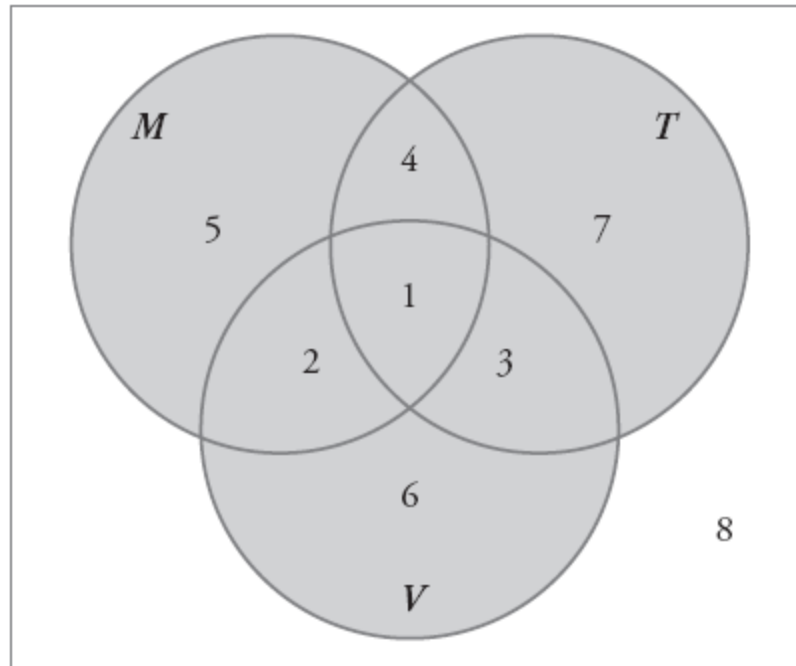


Figura 2.5 Diagrama de Venn para os exercícios 2.19 e 2.20.

## 2.3 Contagem de pontos amostrais

### Teorema 2.1

Se uma operação pode ser realizada de  $n_1$  maneiras, e se para cada uma dessas maneiras uma segunda operação pode ser realizada de  $n_2$  maneiras, então as duas operações podem ser realizadas em conjunto de  $n_1 n_2$  maneiras.

**■ Exemplo 2.13**

Quantos pontos amostrais existem no espaço amostral quando um par de dados é jogado uma vez?

**Solução:** O primeiro dado pode cair de qualquer uma das  $n_1 = 6$  maneiras. Para cada uma dessas seis maneiras, o segundo dado também pode cair de  $n_2 = 6$  maneiras. Então, o par de dados pode cair de

$$n_1 n_2 = (6)(6) = 36 \text{ maneiras possíveis.}$$



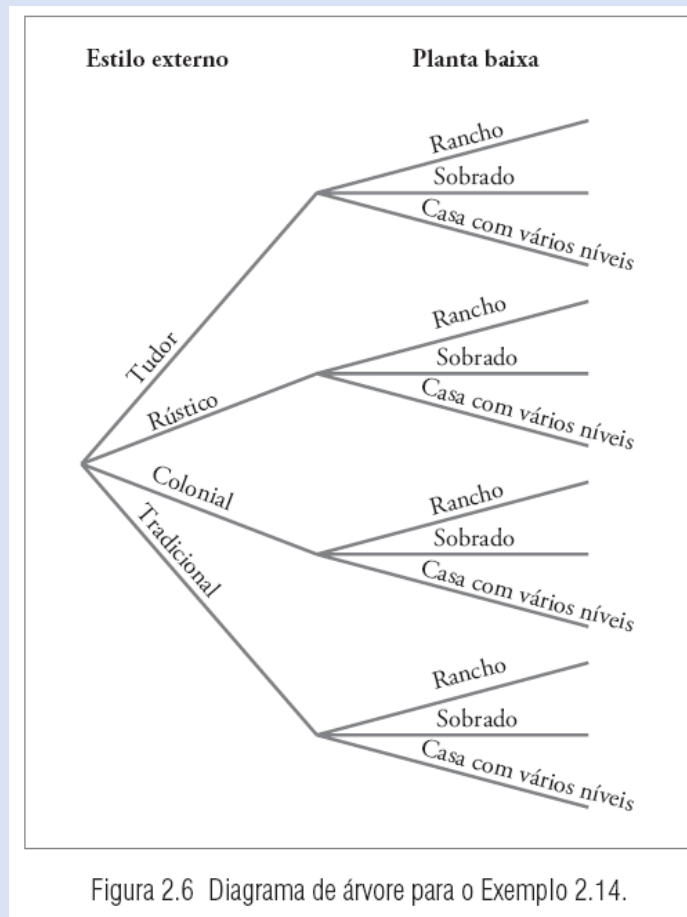


Figura 2.6 Diagrama de árvore para o Exemplo 2.14.

## Teorema 2.2

Se uma operação pode ser realizada de  $n_1$  maneiras, e se para cada uma delas uma segunda operação pode ser realizada de  $n_2$  maneiras, e se, para cada uma das duas primeiras, uma terceira operação pode ser realizada de  $n_3$  maneiras, e assim por diante, então a sequência de  $k$  operações pode ser realizada de  $n_1 n_2 \dots n_k$  maneiras.

**■ Exemplo 2.15**

Sam vai montar um computador sozinho. Ele tem a opção de pedir *chips* de duas marcas diferentes, o disco rígido de quatro, a memória de três e o grupo de acessórios de cinco lojas locais. De quantas maneiras diferentes Sam pode pedir os equipamentos?

**Solução:** Já que  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n_3 = 3$  e  $n_4 = 5$ , há

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$$

maneiras diferentes para pedir os equipamentos.

## 2.4 Probabilidade de um evento

### Definição 2.8

A probabilidade de um evento  $A$  é a soma das probabilidades de todos os pontos amostrais em  $A$ . Por isso,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\phi) = 0 \quad \text{e} \quad P(S) = 1.$$

Além disso, se  $A_1, A_2, A_3, \dots$  é uma seqüência de eventos mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots.$$

**■ Exemplo 2.24**

Um dado é adulterado de tal modo que um número par tem duas vezes mais chance de ocorrer do que um número ímpar. Se  $E$  é o evento no qual um número menor que 4 ocorre numa única jogada do dado, determine  $P(E)$ .

**Solução:** O espaço amostral é  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Atribuímos uma probabilidade  $\omega$  para cada número ímpar e uma probabilidade  $2\omega$  para cada número par. Já que a soma das probabilidades deve ser 1, temos  $9\omega = 1$  ou  $\omega = 1/9$ . Portanto, probabilidades de  $1/9$  e  $2/9$  são atribuídas para cada número ímpar e par, respectivamente. Assim,

$$E = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

### Teorema 2.9

Se um experimento pode resultar em qualquer um de  $N$  diferentes resultados equiprováveis, e se exatamente  $n$  desses resultados correspondem ao evento  $A$ , então a probabilidade do evento  $A$  é

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

## 2.5 Regras aditivas

### Teorema 2.10

Se  $A$  e  $B$  são dois eventos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

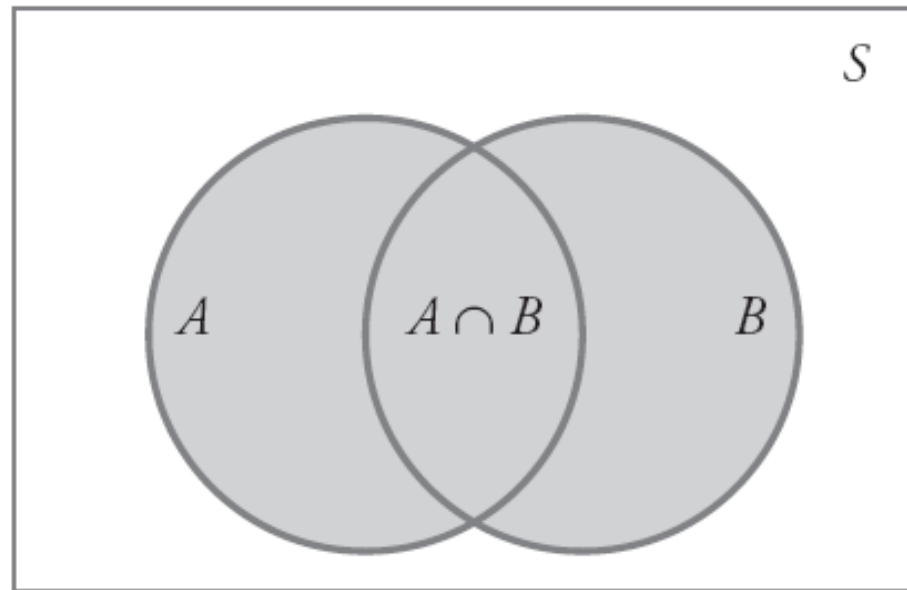


Figura 2.7 Regra aditiva de probabilidade.



### **Corolário 2.1**

Se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

### Corolário 2.2

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**Corolário 2.3**

Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é uma partição do espaço amostral  $S$ , então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

### **Teorema 2.11**

Para três eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

## Teorema 2.12

Se  $A$  e  $A'$  são eventos complementares, então

$$P(A) + P(A') = 1$$

## 2.6 Probabilidade condicional

A probabilidade de um evento  $B$  ocorrer quando sabemos que algum evento  $A$  ocorreu é chamada de *probabilidade condicional* e é denotada por  $P(B|A)$ . O símbolo  $P(B|A)$  normalmente é lido como ‘a probabilidade de que  $B$  ocorra dado que  $A$  ocorre’ ou, simplesmente, ‘a probabilidade de  $B$  dado  $A$ ’.

**Definição 2.9**

A probabilidade condicional de  $B$  dado  $A$ , denotada por  $P(B|A)$ , é definida por

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ desde que } P(A) > 0.$$

Tabela 2.1 Categorização de adultos de uma pequena cidade.

	<b>Empregados</b>	<b>Desempregados</b>	<b>Total</b>
Homem	460	40	500
Mulher	140	260	400
Total	600	300	900



### Definição 2.10

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se

$$P(B|A) = P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A),$$

desde que as probabilidades condicionais existam. Caso contrário,  $A$  e  $B$  serão *dependentes*.

## 2.7 Regras multiplicativas

### Teorema 2.13

Se em um experimento ambos os eventos  $A$  e  $B$  podem ocorrer, então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \text{ desde que } P(A) > 0.$$

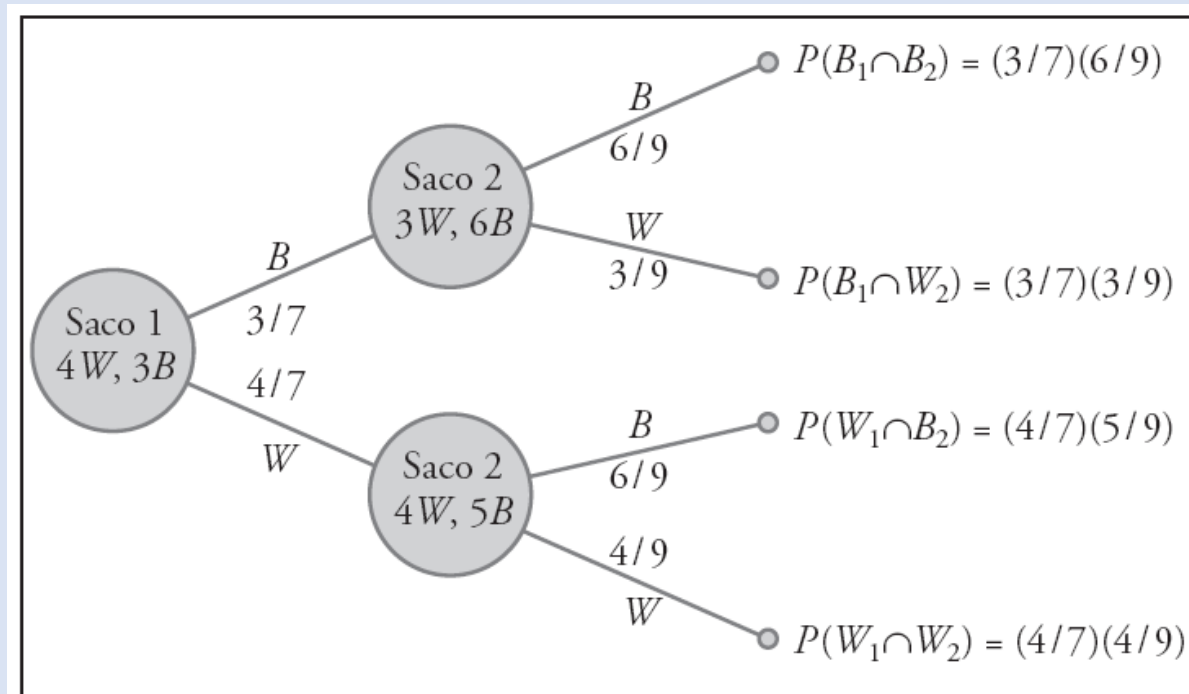


Figura 2.8 Diagrama de árvore para o Exemplo 2.36.

### **Teorema 2.14**

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Portanto, para obter a probabilidade de que ambos os eventos ocorrerão, simplesmente determinamos o produto de suas probabilidades individuais.

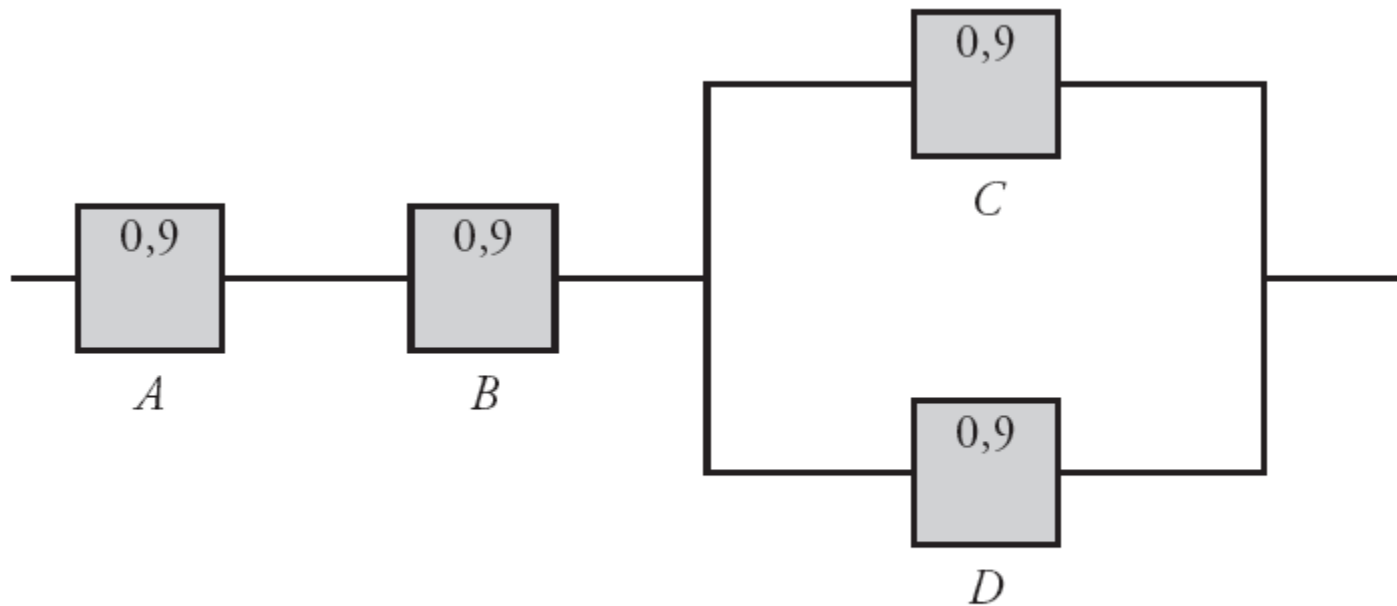


Figura 2.9 Sistema elétrico para o Exemplo 2.38.

**Teorema 2.15**

Se, em um experimento, os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  podem ocorrer, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$

Se os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são independentes, então

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k).$$

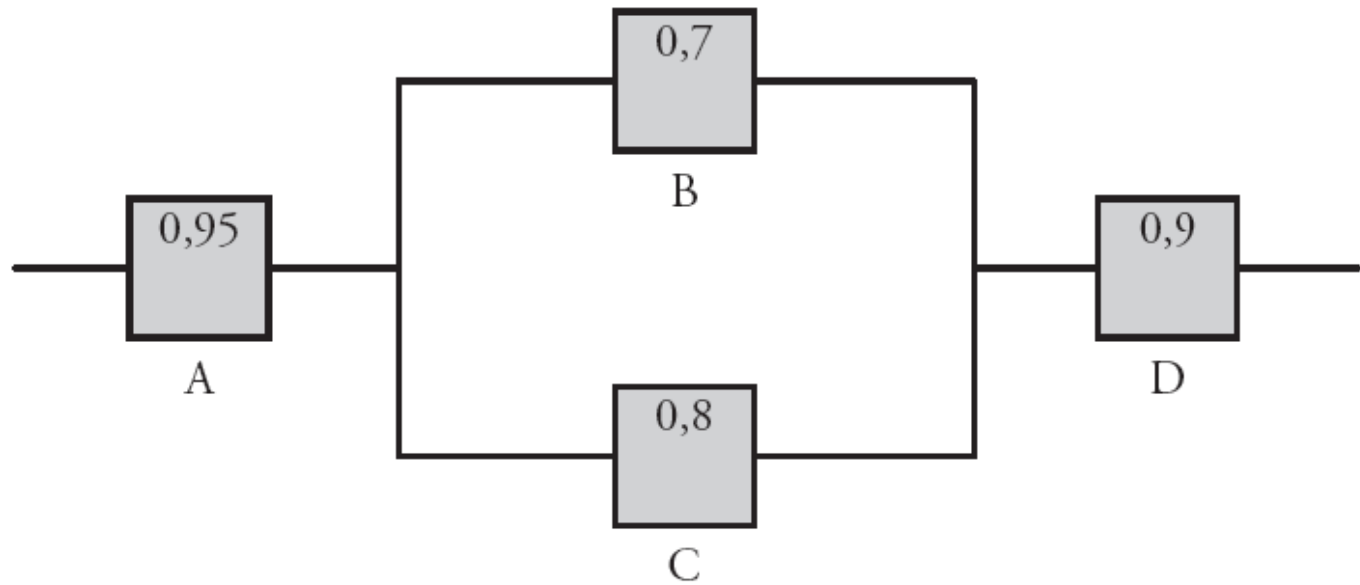
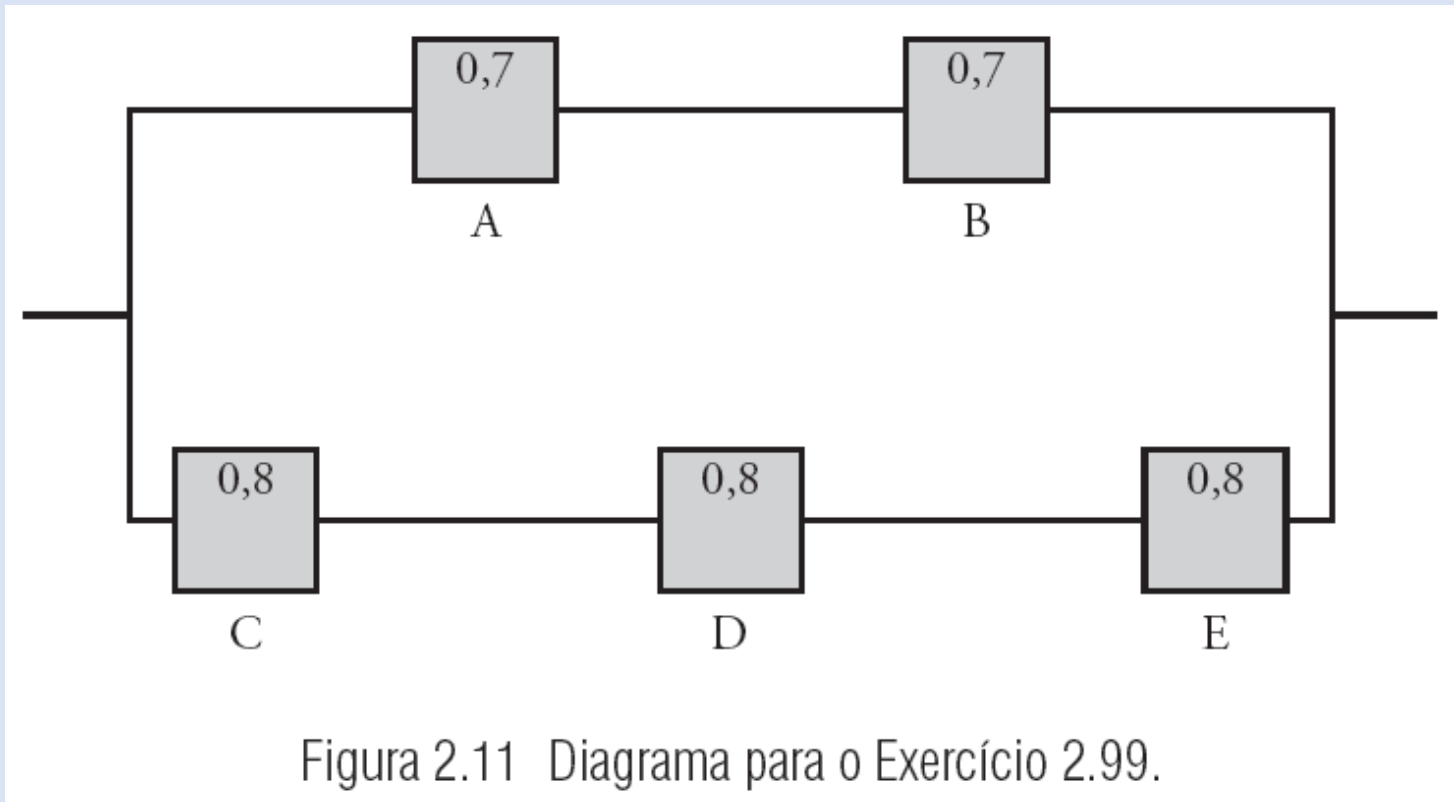


Figura 2.10 Diagrama para o Exercício 2.98.





## 2.8 Regra de Bayes

### Teorema 2.16

Se os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  constituem uma partição do espaço amostral  $S$ , de modo que  $P(B_i) \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , então para qualquer evento  $A$  de  $S$ ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i).$$

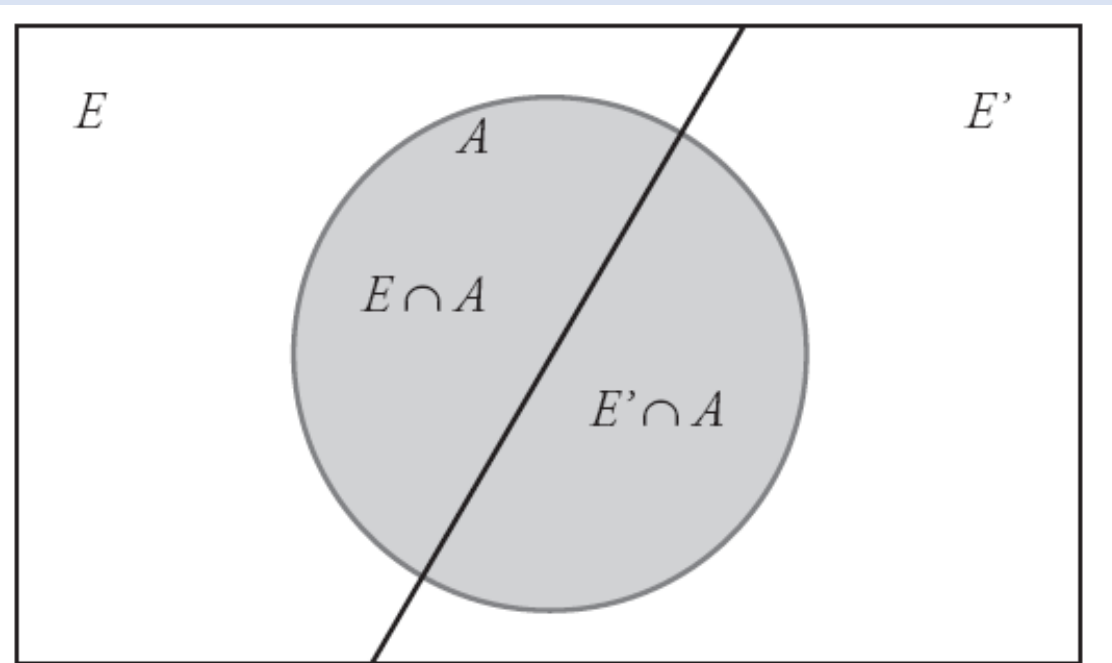


Figura 2.12 Diagrama de Venn para eventos  $A$ ,  $E$  e  $E'$ .

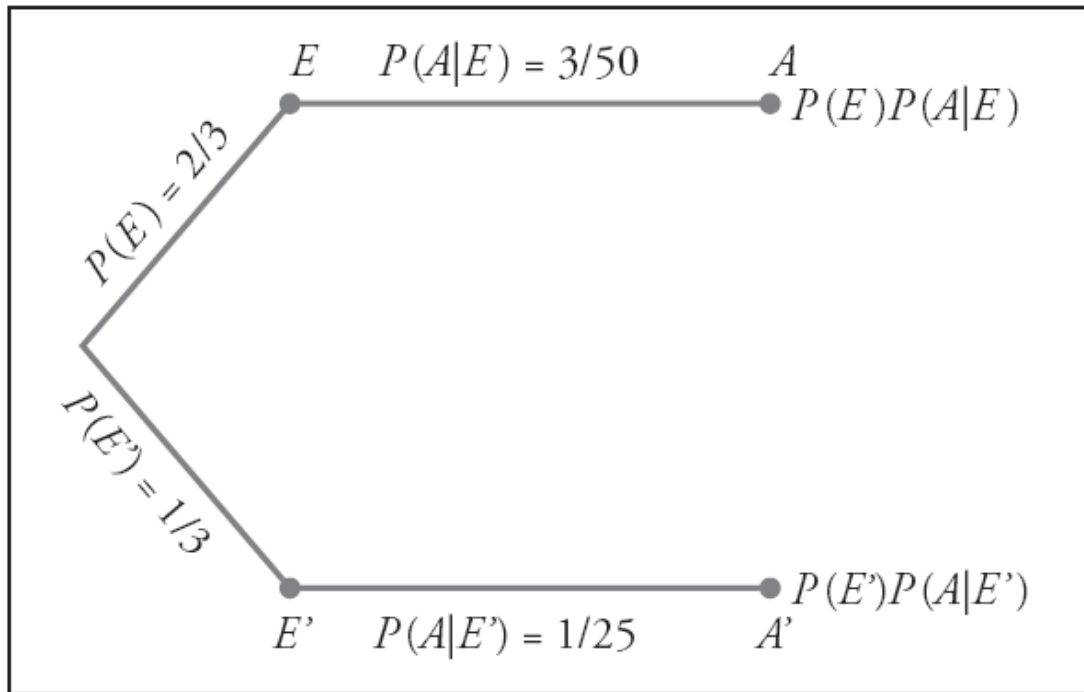


Figura 2.13 Diagrama de árvore para os dados da p. 38, usando a informação adicional da Seção 2.8.

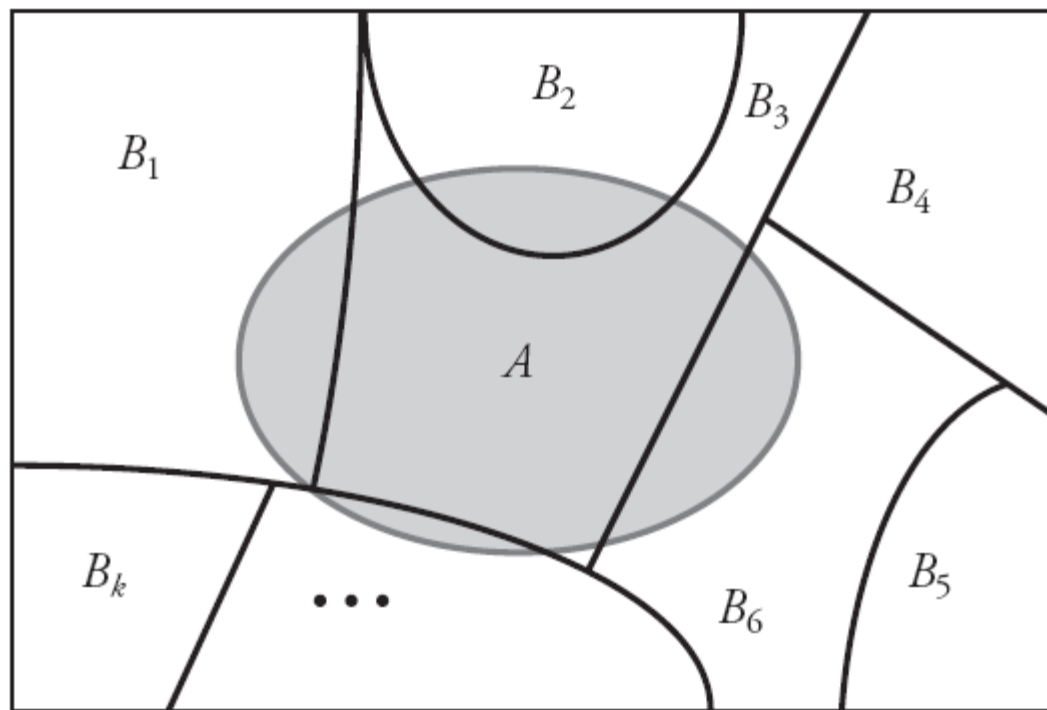


Figura 2.14 Partição do espaço amostral  $S$ .

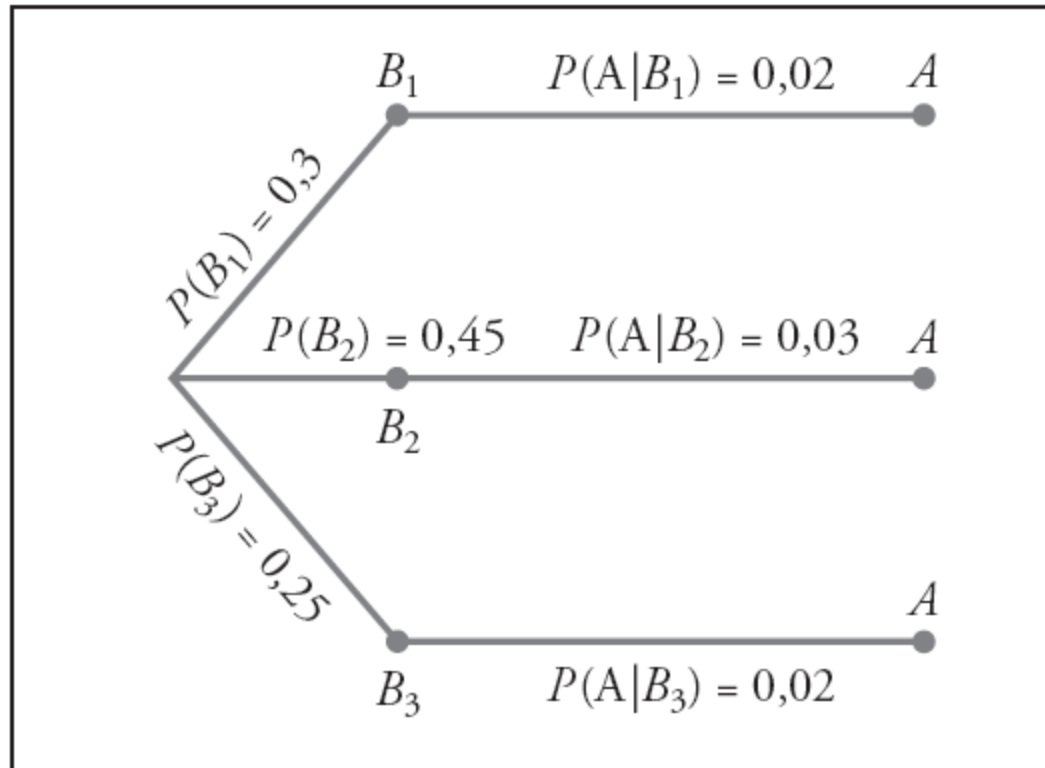


Figura 2.15 Diagrama de árvore para o Exemplo 2.41.

**Teorema 2.17**

(*Regra de Bayes*) Se os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  constituem uma partição do espaço amostral  $S$ , de modo que  $P(B_i) \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , então, para qualquer evento  $A$  em  $S$ , tal que  $P(A) \neq 0$ , temos que

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$$

para  $r = 1, 2, \dots, k$ .