Regras de Derivação

Exemplo: Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

I) f admite derivadas parciais em $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=$$

$$\boxed{f(\Delta x,0)=\frac{\Delta x\cdot 0^3}{\Delta x^2+0^2}=\frac{0}{\Delta x^2}=0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

Portanto, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.}$$

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

II f admite derivadas parciais em $(x,y) \neq (0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 . (x^2+y^2) - 2x(x y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 y^3 + y^5 - 2x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2y(xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2 + 3xy^4 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

⚠ Domínio de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathbb{R}^2$

⚠ Domínio de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

é contínua em quais pontos?

$(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{(x^2+y^2)} \cdot \left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} \right)}_{2}$$

1 $\quad x^2+y^2 \geq y^2 \Rightarrow \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$

2 $\quad \left| \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|-x^2+y^2|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{|-x^2|+|y^2|}{|x^2+y^2|}$

$$= \frac{|x^2|+|y^2|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x^2+y^2|}{|x^2+y^2|} = 1$$

Lembrando:

limitada

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\cdot f(x,y) = 0$$

converge para zero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{y}\cdot\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)} = 0$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Isto é,

$\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é contínua,

pois é quociente de funções contínuas.

$$\boxed{\text{Conclução: } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ é contínua em todo } \mathbb{R}^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em quais pontos?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 \cdot (3x^2 + y^2)}{(x^2+y^2) \cdot (x^2+y^2)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Note que

$$3x^2 + y^2 \leq 3x^2 + 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = 3$$

Portanto, $\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}$ é limitada. Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua,

pois é quociente de

funções contínuas.

$$\boxed{\text{Conclução: } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ é contínua em todo } \mathbb{R}^2}$$

Conclusão: f é uma função tal que ambas as derivadas parciais existem e são contínuas. Portanto, f é diferenciável em todos os pontos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

As derivadas parciais de ordem superior existem na origem?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}^{f_x}\Big)(0,0) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0, 0+\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y^5)/\Delta y^4}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^{/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}^{f_y}\Big)(0,0) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)$$