Lógica

Lógica Proposicional
Aula 04 – Consequência e Equivalência Lógicas

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

- **Semântica dos conectivos lógicos**
  - Tabela-verdade

	p	q	¬p	¬q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
I_1	V	V	F	F	V	V	V	V
I_2	V	F	F	V	F	V	F	F
I_3	F	V	V	F	F	V	V	F
I_4	F	F	V	V	F	F	V	V

Lógica Proposicional

- **Consequência lógica**
  - Uma fórmula β é **consequência lógica** de outra fórmula α (ou α implica logicamente β) se <u>toda</u> interpretação que <u>satisfaz</u> α também <u>satisfaz</u> β
    - Representada por $\alpha \models \beta$
    - Se não houver consequência lógica utiliza-se $\alpha \not\models \beta$
    - Exemplo: $p \models p \vee q$

	p	q	$p \vee q$
I_1	**V**	V	**V**
I_2	**V**	F	**V**
I_3	F	V	V
I_4	F	F	F

Lógica Proposicional

- **Consequência lógica**
  - Uma fórmula α é **consequência lógica** de um conjunto de fórmulas Γ se toda interpretação que satisfaz todas as fórmulas de Γ também satisfaz α
    - Representado por $\Gamma \models \alpha$
    - Exemplo: $\{ p, q \} \models p \vee q$

	p	q	$p \vee q$
I_1	**V**	**V**	**V**
I_2	V	F	V
I_3	F	V	V
I_4	F	F	F

Lógica Proposicional

- **Consequência lógica**
  - Verifique se as seguintes consequências lógicas são verdadeiras
    - a) $p \rightarrow q \models q$
    - b) $p \leftrightarrow \neg q \models p \wedge q$
    - c) $p \models p \vee q$
    - d) $\neg p \rightarrow q \models p \vee q$

Lógica Proposicional

- **Consequência lógica**
  - Verifique se as seguintes consequências lógicas são verdadeiras

a) $p \rightarrow q \models q$

b) $p \leftrightarrow \neg q \models p \wedge q$

c) $p \models p \vee q$

d) $\neg p \rightarrow q \models p \vee q$

RESPOSTAS

a) FALSA, pois quando I[p]=F e I[q]=F, I[p $\rightarrow$ q] = V, mas I[q] = F

b) FALSA, pois quando I[p]=V e I[q]=F, I[p $\leftrightarrow$ $\neg$q]=V, mas I[p $\wedge$ q] = F

c) VERDADEIRA

d) VERDADEIRA

Lógica Proposicional

- **Equivalência lógica**
  - Duas fórmulas α e β são **logicamente equivalentes** se as interpretações que satisfazem α são exatamente as mesmas que satisfazem β
    - Representada por $\alpha \equiv \beta$ (ou $\alpha \Leftrightarrow \beta$) ocorre se $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$
  - ➔ Para demonstrar a equivalência lógica de duas fórmulas α e β, construímos uma tabela-verdade simultaneamente para α e β e verificamos que <u>as colunas para α e β são idênticas</u>

Lógica Proposicional

- **Equivalência lógica**
  - Exemplo: $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$

	p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
I_1	V	V	**V**	F	**V**
I_2	V	F	F	F	F
I_3	F	V	**V**	V	**V**
I_4	F	F	**V**	V	**V**

colunas idênticas

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas β_1, β_2, β_3, …, β_n e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de β_1, β_2, β_3, …, β_n se, e somente se, a fórmula

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$$

for uma tautologia

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia
      - Parte "se"
        - Se α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ então a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia
      - Parte "somente-se"
        - Se a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia então α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia
    - Prova (parte "se"):
      - Sejam as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e α e considere que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$. Seja I uma interpretação qualquer, então:
        i. Se $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ forem todas avaliadas V em I, então α também é V em I, uma vez que é consequência lógica das fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$. Portanto, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é avaliada V em I.

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia
    - Prova (parte "se"):
      - Sejam as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e α e considere que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$. Seja I uma interpretação qualquer, então:

        ii. Se uma das fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ for avaliada F em I, a conjunção $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ também será F em I. Assim, independente da avaliação de α, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é avaliada V em I.

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia
    - Prova (parte “se”):
      - De (i) e (ii) tem-se que $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é avaliada V em qualquer interpretação, ou seja, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é uma tautologia.

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.1**
    - Dadas as fórmulas β_1, β_2, β_3, …, β_n e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de β_1, β_2, β_3, …, β_n se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia
    - Prova (parte “somente-se”):
      - Do fato de $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ ser uma tautologia tem-se que a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ é avaliada V em qualquer interpretação.
      - Para isso é preciso que, sempre que $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ seja avaliada V em uma interpretação I, α também seja avaliada V em I, ou seja, α deve ser consequência lógica de β_1, β_2, β_3, …, β_n.

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.2**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula

      $$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$$

      for uma contradição
    - Prova … tente fazer em casa!

Lógica Proposicional

- **Teoremas interessantes**
  - **Teorema 4.2**
    - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, a fórmula $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$ for uma contradição
    - Prova

4.1

Sabe-se pelo Teorema que a fórmula α é consequência lógica das fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se, e somente se, $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma tautologia. De modo equivalente, α é consequência lógica das fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se e somente se a negação de $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha$ for uma contradição. Mas,

$$\neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \rightarrow \alpha) \equiv$$
$$\neg(\neg(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n) \vee \alpha) \equiv$$
$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$$

Fonte: (NICOLETTI, 2017, p. 21)

ou seja, $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$ é uma contradição.