Geometria Analítica. ENPE-3 2021.
Um resumo sobre produtos de vetores em 20 itens. João Sampaio.

Produto escalar, definição e propriedades

Em todos os quadros deste resumo, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal do espaço euclidiano.

Se $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, escrevemos $\vec{u} = (x, y, z)$. Temos $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

O QUE É E COMO CALCULAR O PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES

1. O **produto escalar de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$** é definido *geometricamente* como sendo o número real $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta}$ sendo $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$.
   $\boxed{\text{Se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ então } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.}$
   Em alguns textos o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

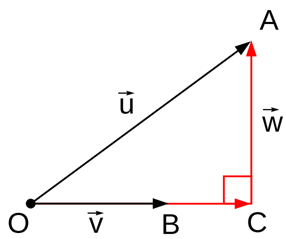
2. **Cálculo prático de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.** Se $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal e $\boxed{\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}}$, então podemos calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pela fórmula $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$

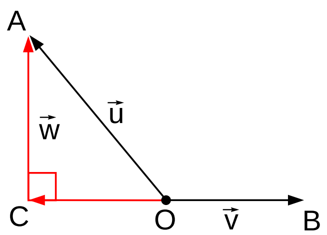
O PRODUTO ESCALAR PARA O CÁLCULO DE ÂNGULOS E PROJEÇÕES DE VETORES

3. Se queremos calcular o **ângulo θ, $0 \le \theta \le 180°$, entre dois vetores não nulos** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calculamos $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$ e então $\boxed{\theta = \operatorname{arccos} \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos^{-1} \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}}$

4. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **vetores ortogonais** $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

5. A **projeção de um vetor $\vec{u}$ na direção de um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$** é o vetor $\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\, \vec{v}}$





Na ilustração, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \overrightarrow{OC}$.
O vetor $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ é caracterizado por duas propriedades:
(a) $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$;
(b) $\vec{w} = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ é um vetor ortogonal ao vetor $\vec{v}$.

ÂNGULOS DIRETORES E COSSENOS DIRETORES DE UM VETOR.

6. Sendo $\vec{u} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$,
os ângulos α, β e γ entre o vetor $\vec{u}$ e os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente (chamados **ângulos diretores** de $\vec{u}$), são calculados pelos seus cossenos (chamados **cossenos diretores** de $\vec{u}$)
$\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|} = \dfrac{x}{|\vec{u}|}$ $\qquad \cos\beta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{j}|} = \dfrac{y}{|\vec{u}|}$ $\qquad \cos\gamma = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{k}|} = \dfrac{z}{|\vec{u}|}$
Mas $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{x}{|\vec{u}|}, \dfrac{y}{|\vec{u}|}, \dfrac{z}{|\vec{u}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ é o vetor versor de $\vec{u}$.
Portanto, **as coordenadas de** $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ **são os cossenos diretores de** $\vec{u}$.

ALGUMAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO ESCALAR.

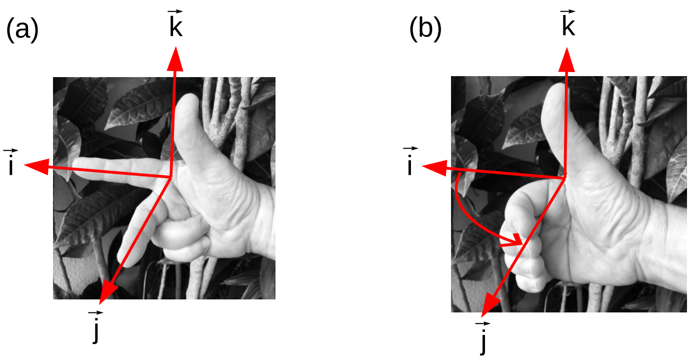
Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, a e b escalares reais,

7. $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
$(a\vec{u} + b\vec{v})\cdot\vec{w} = a\,(\vec{u}\cdot\vec{w}) + b\,(\vec{u}\cdot\vec{w})$

Produto vetorial, definição e propriedades

O QUE É E COMO CALCULAR O PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES

8. Uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é positiva se seus vetores satisfazem a regra da mão direita. Veja figura. Em termos práticos, se os dedos indicador, médio e polegar, da mão direita, posicionam-se em direções ortogonais, como em (a), eles apontam para as direções de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamento. Ou se fazemos, como em (b), um movimento girando juntos os dedos mindinho a indicador da mão direita, da posição (imaginária) do vetor $\vec{i}$ ao vetor $\vec{j}$, o nosso polegar apontará para direção e sentido do vetor $\vec{k}$



Nesta seção e nas seguintes a base ortonormal considerada é uma base positiva.

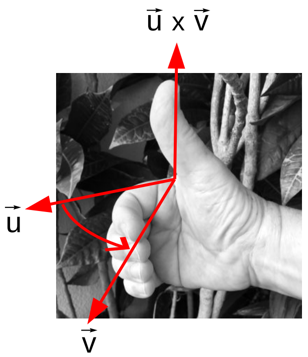
9. **Cálculo do produto vetorial.** Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, o **produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$**, $\vec{u} \times \vec{v}$, é definido desenvolvendo-se o determinante (pela primeira linha, ou pela regra de Sarrus)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

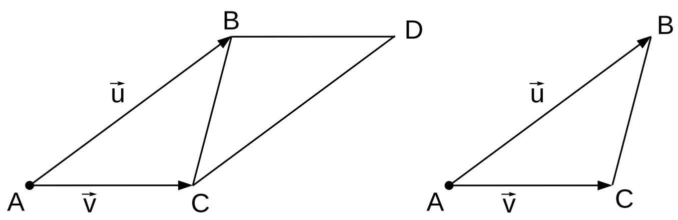
PROPRIEDADES ÚTEIS DO PRODUTO VETORIAL

10. $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores paralelos.

11. **Direção e sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.**
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são vetores paralelos, então os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ satisfazem a regra da mão direita, como ilustrado na figura abaixo.



12. **Módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$. Áreas de paralelogramos e triângulos por cálculo vetorial.**
Se $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, então o comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela fórmula
$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}\theta}$ Isto é consequência da identidade $\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2}$
Mas a expressão $|\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$ também é a área do paralelogramo $ABDC$ quando $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Ou seja, sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, temos

$\boxed{\textit{área do paralelogramo } ABDC = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

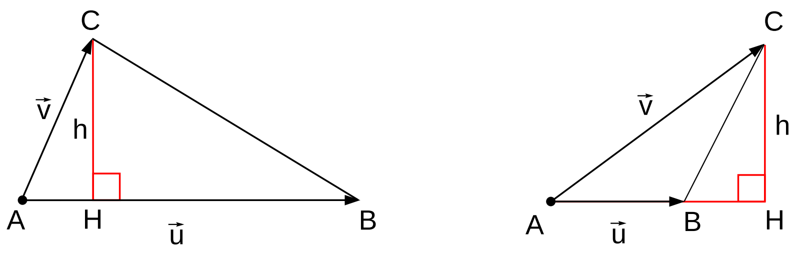
$\boxed{\textit{área do triângulo } ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$

Estes resultados nos levam a concluir que

$\boxed{\text{os pontos } A,\ B \text{ e } C \text{ estão alinhados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}}$

13. **Altura de um triângulo (e distância de um ponto a uma reta) por cálculo vetorial.** Dado um triângulo ABC, sendo $h = \overline{CH}$ sua altura relativamente ao lado AB, temos

área do triângulo $ABC = \dfrac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h}{2}$



Pelo resultado do item 12, também temos *área do triângulo* $ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Temos então que a **altura do triângulo** ABC **relativamente ao lado** AB é dada por

$$\boxed{h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}}$$

Note que h também é a **distância do ponto** C **à reta passando por** A **e** B.

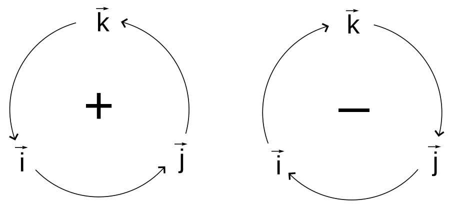
ALGUMAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO VETORIAL.

14. O produto vetorial é *anticomutativo*, isto é, $\boxed{\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}.}$

"Tabuada" do produto vetorial.

$$\begin{array}{ll} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$



Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores, a e b escalares reais, $(a\vec{u} + b\vec{v}) \times \vec{w} = a\,(\vec{u} \times \vec{w}) + b\,(\vec{u} \times \vec{w})$

$(2\vec{i} - 3\vec{j}) \times (4\vec{j} - 5\vec{k}) = 8\,\vec{i} \times \vec{j} - 10\,\vec{i} \times \vec{k} - 12\,\vec{j} \times \vec{j} + 15\,\vec{j} \times \vec{k} = 8\vec{k} + 10\vec{j} + 15\vec{i} = (15, 10, 8).$

Produto misto, definição e propriedades

O QUE É E COMO CALCULAR O PRODUTO MISTO DE TRÊS VETORES

15. O **produto misto de três vetores** $\vec{u}$, $\vec{v}$ **e** $\vec{w}$, denotado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ou por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é definido como sendo o número real

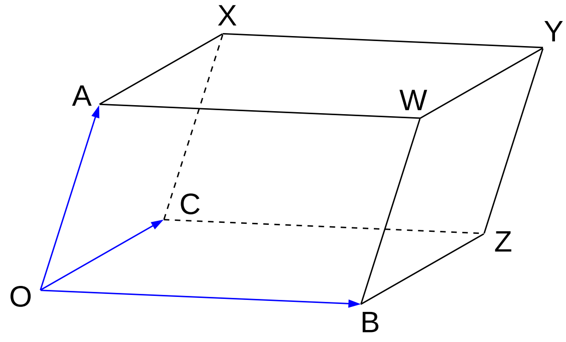
$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}$

Como calcular. Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, o produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é facilmente calculado por um determinante:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

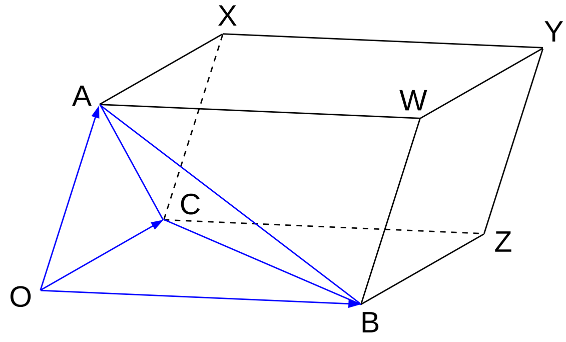
A PROPRIEDADE GEOMÉTRICA DO PRODUTO MISTO – VOLUMES

16. Sendo dado um **paralelepípedo cujas arestas definem três vetores não coplanares** $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, como na figura abaixo, o volume do paralelepípedo é o módulo do produto misto desses três vetores.



volume do paralelepipedo$= |(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|$

17. O **volume de um tetraedro** $OABC$ é $1/6$ do volume do paralelepípedo que o contém compartilhando esses quatro vértices. Assim sendo, temos a fórmula



volume do tetraedro $OABC = \dfrac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|$

18. Em virtude dos resultados nos dois itens anteriores, temos que sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores,

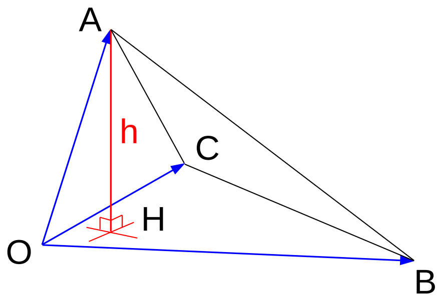
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são coplanares $\iff (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Quatro pontos O, A, B, C são coplanares $\iff (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$

ALTURA DE UM TETRAEDRO. DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO.

19. Da geometria espacial elementar temos que o volume de um tetraedro é dado também por

$\boxed{\textit{volume do tetraedro } OABC = \frac{1}{3}(\textit{área da base})\cdot(\textit{altura})}$



Da figura acima, temos que a área da base triangular OBC é dada por $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}|$.

Assim, o volume do tetraedro é igual a $\boxed{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| \cdot h = \dfrac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| \cdot h}$

sendo $h = \overline{AH}$ a altura do tetraedro em relação à base OBC.

Comparando esta expressão com a do item 17, temos então

$\dfrac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| \cdot h = \dfrac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|$.

Obtemos então a fórmula para a **altura do tetraedro** $OABC$ **em relação à base** OBC, como sendo

$$\boxed{h = \frac{|(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})|}{|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}|}}$$

Esta altura h é também a **distância do ponto** A **ao plano dos pontos** O, B **e** C.

Repetindo, o ponto A estará nos plano dos pontos O, B e C se, e somente se, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$.

ALGUMAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DO PRODUTO MISTO.

Sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ vetores quaisquer, a e b escalares reais,

20. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$

$(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = a(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}) + b(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x})$

$(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{x}) = a(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) + b(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x})$

$(\vec{u}, \vec{v}, a\vec{w} + b\vec{x}) = a(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$

$(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = 0$