

# Matemática Discreta

## Teoria dos Grafos Grafos orientados

Profa. Helena Caseli  
[helenacaseli@ufscar.br](mailto:helenacaseli@ufscar.br)

# Teoria dos Grafos

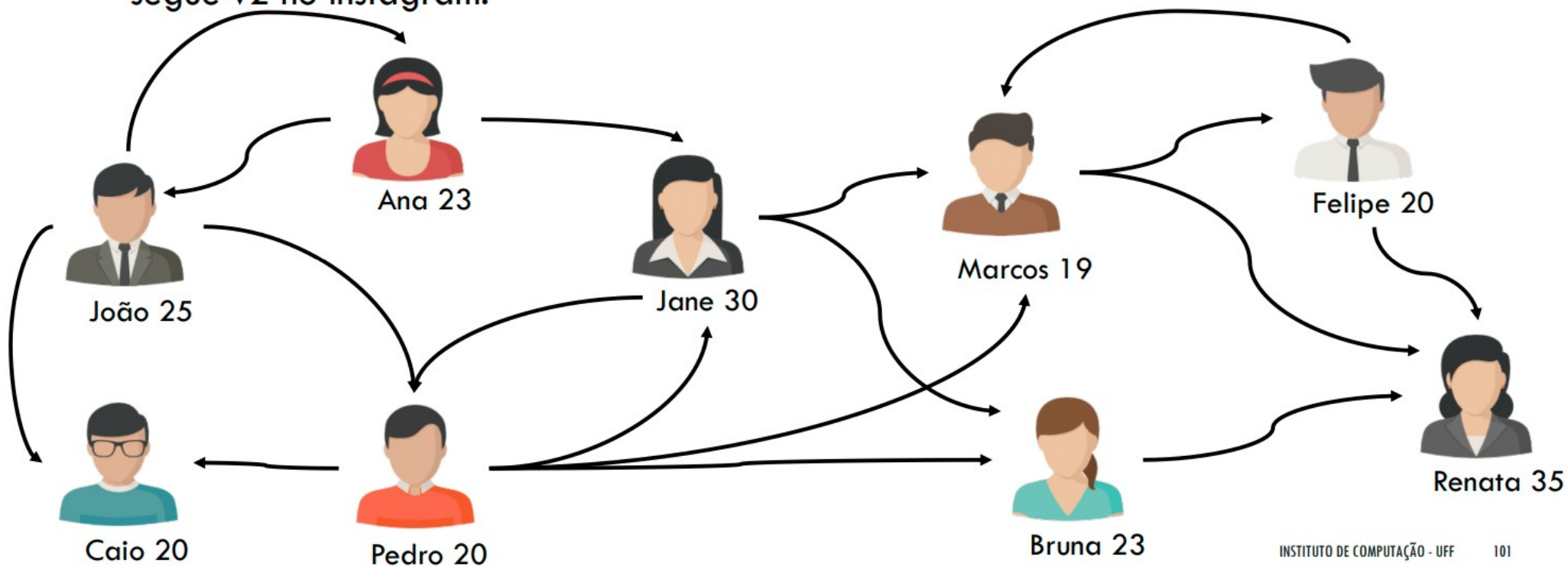
- **Objetivos desta aula**

- Apresentar conceitos e definições na teoria dos grafos para **grafos orientados**
  - Vértices e Arestas
  - Incidência e Adjacência
  - Grau de entrada e Grau de saída
  - Representação matricial
- Capacitar o aluno a usar os conceitos de grafos orientados para modelar problemas computacionais

# Problema #15

- **Represente o grafo orientado a seguir em uma matriz de adjacência**

Considere o grafo a seguir, que representa seguidores no Instagram. Cada pessoa tem nome e idade (**nome** é o **id do vértice**). Uma aresta  $(v1, v2)$  significa que  $v1$  segue  $v2$  no Instagram.



Fonte: <http://www2.ic.uff.br/~vanessa/material/ed/06-Grafos.pdf> (slide 101)

# Teoria dos Grafos

## ■ Grafo orientado



Fonte: <https://pixabay.com/>

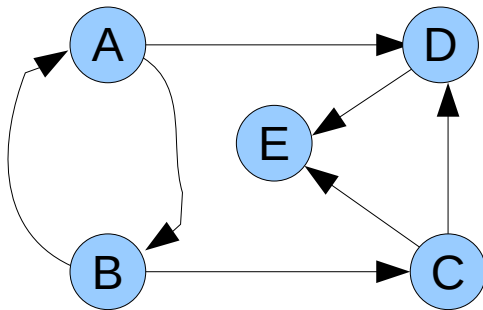
- Um **grafo é orientado** (ou dirigido) quando suas arestas especificam claramente quem é o vértice de partida (origem) e quem é o vértice de chegada (destino)

# Teoria dos Grafos

## ■ Grafo orientado

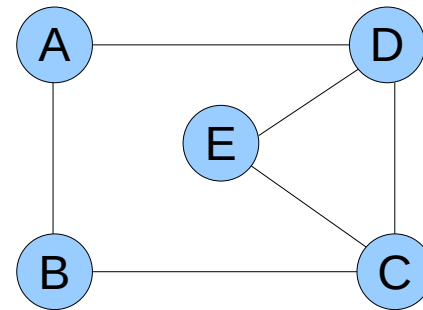
- Em um grafo orientado (ou dirigido ou dígrafo), as arestas são indicadas como setas que vão da origem para o destino

**Grafo orientado**



X

**Grafo não orientado**



# Teoria dos Grafos

## ■ Grafo orientado

### ■ Definição

- Um par  $(V, A)$  onde
  - $V$  é um conjunto de vértices
  - $A$  é uma relação binária em  $V$ , ou seja, um subconjunto do produto cartesiano de  $V$  por  $V$  ( $V \times V$ )
    - Se  $u$  e  $v$  são vértices distintos do grafo  $G$ , os pares  $(u, v)$  e  $(v, u)$  são arestas distintas
    - A aresta  $(u, v)$  **tem uma orientação definida** onde
      - $u$  é a origem e
      - $v$  é o destino

# Teoria dos Grafos

- **Grafo orientado**
  - **Incidência**



Fonte: <https://pixabay.com/>

- Dizemos que uma aresta  $vw$  **parte** (ou sai) do vértice  $v$  e **chega** (ou entra) no vértice  $w$

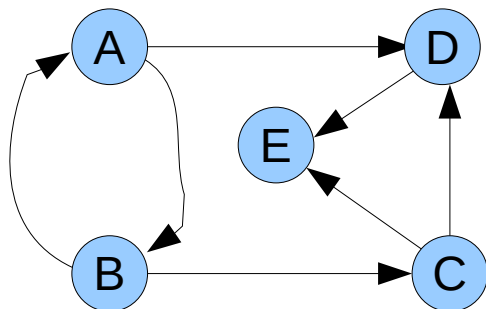
# Teoria dos Grafos

## ■ Grafo orientado

### ■ Incidência

- Pode ser vista como uma relação entre o conjunto de arestas  $A$  e o conjunto de vértices  $V$  denominada relação de incidência
- Isso define duas relações de  $A$  para  $V$ 
  - A relação de saída e
  - A relação de chegada
- É uma relação de aresta para vértice

### ■ Exemplo



- A aresta AB parte de A e chega em B
- A aresta BA parte de B e chega em A



# Teoria dos Grafos

- Grafo orientado
  - Adjacência



Fonte: <https://pixabay.com/>

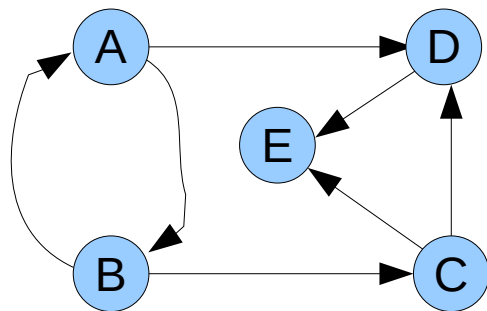
- Dizemos que o vértice  $v$  **domina** (ou atinge) o vértice  $w$  sse existe uma aresta de  $G$  com origem  $v$  e destino  $w$

# Teoria dos Grafos

- **Grafo orientado**

- **Adjacência**

- Trata-se da relação de adjacência orientada (ou dominância) do grafo  $G$
    - A adjacência é uma relação de vértice para vértice
    - Exemplo



- O vértice A domina o vértice B na aresta AB
      - O vértice B domina o vértice A na aresta BA

# Teoria dos Grafos

## ■ Grafo orientado

### ■ Grau de entrada do vértice $v$

- Número de arestas que chegam a  $v$
- Denotado por  $d_G^+(v)$  ou apenas  $d^+(v)$



Fonte: <https://pixabay.com/>

### ■ Grau de saída do vértice $v$

- Número de arestas que partem de  $v$
- Denotado por  $d_G^-(v)$  ou apenas  $d^-(v)$



Fonte: <https://pixabay.com/>

# Teoria dos Grafos

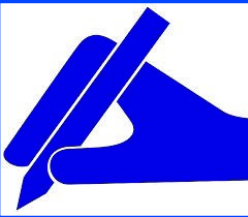
- **Grafo orientado**

- **Grau do vértice**

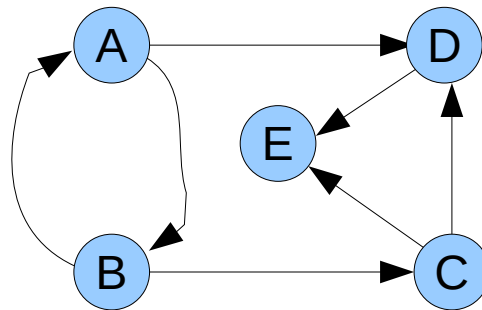
- Para um vértice  $v$

$$d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$$

- O símbolo  $\Delta_G$  é frequentemente usado para denotar o maior grau dos vértices de um grafo  $G$ 
        - Maior grau de entrada  $\Delta_G^+$  e de saída  $\Delta_G^-$
      - O símbolo  $\delta_G$  é frequentemente usado para denotar o menor grau dos vértices de um grafo  $G$ 
        - Menor grau de entrada  $\delta_G^+$  e de saída  $\delta_G^-$



## ▪ Dado o grafo

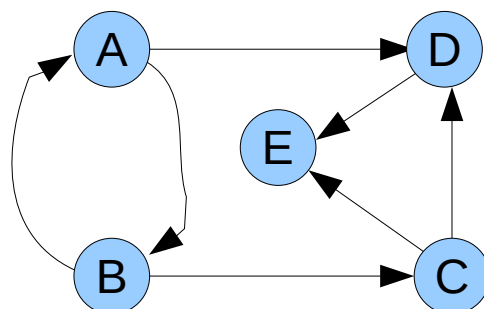


## ▪ Dê

- a) Arestas que partem do vértice E
- b) Vértices dominados por C
- c) Grau de entrada do vértice A
- d) Grau de saída do vértice A
- e) Vértice(s) com maior grau de entrada
- f) Vértice(s) com menor grau de saída



## ■ Dado o grafo



## ■ Dê

- a) Arestas que partem do vértice E
- b) Vértices dominados por C
- c) Grau de entrada do vértice A
- d) Grau de saída do vértice A
- e) Vértice(s) com maior grau de entrada
- f) Vértice(s) com menor grau de saída

## RESPOSTAS

nenhuma

D e E

1

2

D e E ( $\Delta_G^+ = 2$ )

E ( $\delta_G^- = 0$ )

# Teoria dos Grafos

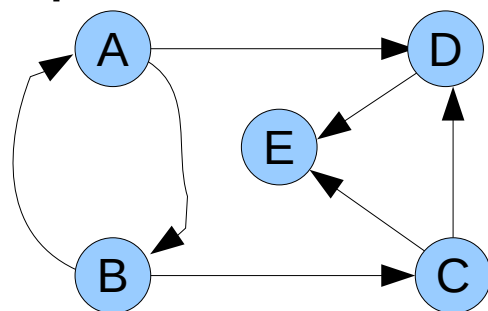
## ■ Teorema 2

- Em qualquer grafo orientado  $G = (V, A)$ , a soma dos graus de entrada (ou de saída) de todos os vértices é igual ao número de arestas.

$$\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = |A|$$

- Isso porque cada aresta conta apenas uma vez no cálculo do grau de entrada ou de saída

- Exemplo



$$d^+(A) = 1, d^+(B) = 1, d^+(C) = 1, \\ d^+(D) = 2, d^+(E) = 2$$

$$d^-(A) = 2, d^-(B) = 2, d^-(C) = 2, \\ d^-(D) = 1, d^-(E) = 0$$

$$\text{Soma entrada} = 7 = |A|$$

$$\text{Soma saída} = 7 = |A|$$

# Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos orientados**
  - **Matriz de adjacência**
    - A matriz de adjacência de um grafo  $G$  com  $n$  vértices ( $|V| = n$ ) é dada por uma matriz booleana  $M$  de  $n$  linhas e  $n$  colunas ( $n \times n$ )
    - $M_{ij}$  – célula  $(i,j)$  – é
      - 1 se  $A$  contém uma aresta com origem em  $v_i$  e destino em  $v_j$
      - 0 caso contrário

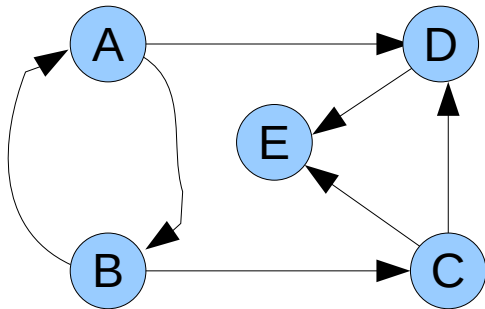


# Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos orientados**

- **Matriz de adjacência**

- **Exemplo**



	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	1	0	1	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0

Quantidade de 1s na coluna indica o grau de entrada

Quantidade de 1s na linha indica o grau de saída

# Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos orientados**
  - **Matriz de incidência**
    - A matriz de incidência de um grafo  $G$  com  $n$  vértices ( $|V| = n$ ) e  $m$  arestas ( $|A| = m$ ) é dada por uma matriz booleana  $M$  de  $n$  linhas e  $m$  colunas ( $n \times m$ )
    - $M_{ik}$  – célula  $(i, k)$  – é
      - 1 sse o vértice  $v_i$  é um extremo da aresta  $e_k$
      - 0 caso contrário

# Teoria dos Grafos

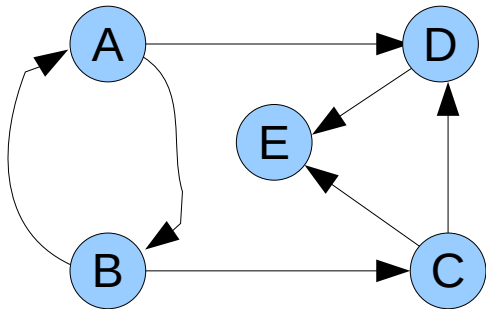
## ■ Representação matricial de grafos orientados

### ■ Matriz de incidência

- É possível construir duas matrizes de incidência, uma de entrada ( $M^+$ ) e outra de saída ( $M^-$ )
  - O elemento  $M_{ik}^+$  é 1 sse a aresta  $e_k$  entra no vértice  $v_i$
  - O elemento  $M_{ik}^-$  é 1 sse a aresta  $e_k$  sai do vértice  $v_i$
- Em algumas aplicações é conveniente combinar essas duas matrizes em uma única matriz  $M$  cujos elementos são inteiros no conjunto  $\{-1, 0, +1\}$ 
  - O elemento  $M_{ik}$  é 1 se a aresta  $e_k$  entra no vértice  $v_i$
  - O elemento  $M_{ik}$  é -1 se a aresta  $e_k$  sai do vértice  $v_i$
  - O elemento  $M_{ik}$  é 0 se a aresta  $e_k$  não incide no vértice  $v_i$

# Teoria dos Grafos

- **Representação matricial de grafos orientados**
  - **Matriz de incidência**
    - Exemplo



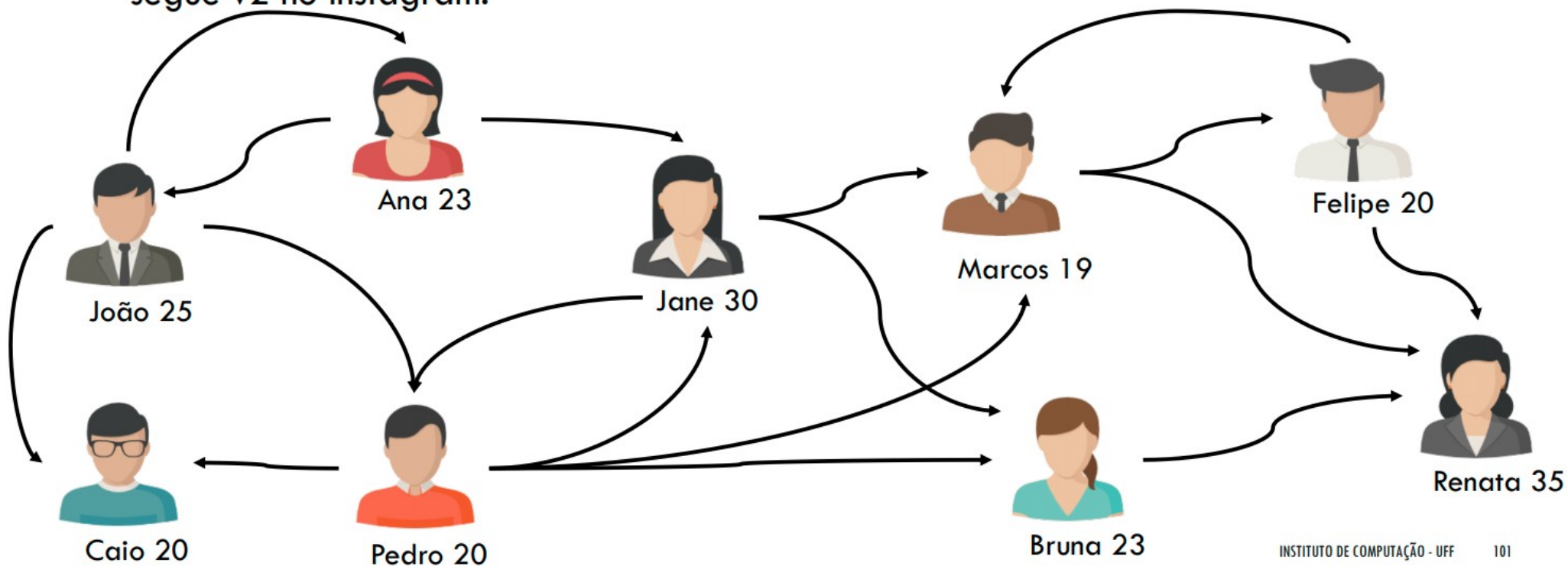
	AB	BA	AD	BC	CD	CE	DE
A	-1	+1	-1	0	0	0	0
B	+1	-1	0	-1	0	0	0
C	0	0	0	+1	-1	-1	0
D	0	0	+1	0	+1	0	-1
E	0	0	0	0	0	+1	+1

- Quantidade de +1s indica o grau de entrada do vértice representado naquela linha
- Quantidade de -1s indica o grau de saída do vértice representado naquela linha

# Problema #15

- **Represente o grafo orientado a seguir em uma matriz de adjacência**

Considere o grafo a seguir, que representa seguidores no Instagram. Cada pessoa tem nome e idade (**nome** é o **id do vértice**). Uma aresta  $(v1, v2)$  significa que  $v1$  segue  $v2$  no Instagram.



Fonte: <http://www2.ic.uff.br/~vanessa/material/ed/06-Grafos.pdf> (slide 101)

# Problema #15

## ■ Matriz de adjacência

	Ana	Bruna	Caio	Felipe	Jane	João	Marcos	Pedro	Renata
Ana	0	0	0	0	1	1	0	0	0
Bruna	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Caio	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Felipe	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Jane	0	1	0	0	0	0	1	1	0
João	1	0	1	0	0	0	0	1	0
Marcos	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Pedro	0	1	1	0	1	0	1	0	0
Renata	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Quantidade de 1s na linha indica o grau de saída. Nesse caso, o Pedro é a pessoa que segue o maior número de outras pessoas (grau saída = 4)

Quantidade de 1s na coluna indica o grau de entrada, nesse caso, a Renata e o Marcos são as pessoas com o maior número de seguidores (grau de entrada = 3)