Aula 14

Taxas relacionadas. Diferenciais

14.1 Taxas relacionadas

Na linguagem do cálculo diferencial, se uma variável u é função da variável v, a *taxa de variação (instantânea) de* u*, em relação a* v, é a derivada $\dfrac{du}{dv}$.

Em várias problemas de cálculo, duas ou mais grandezas variáveis estão relacionadas entre si por uma equação. Por exemplo, na equação $v_1/v_2 = (\operatorname{sen}\theta_1)/(\operatorname{sen}\theta_2)$, temos quatro variáveis, v_1, v_2, θ_1 e θ_2, relacionadas entre si.

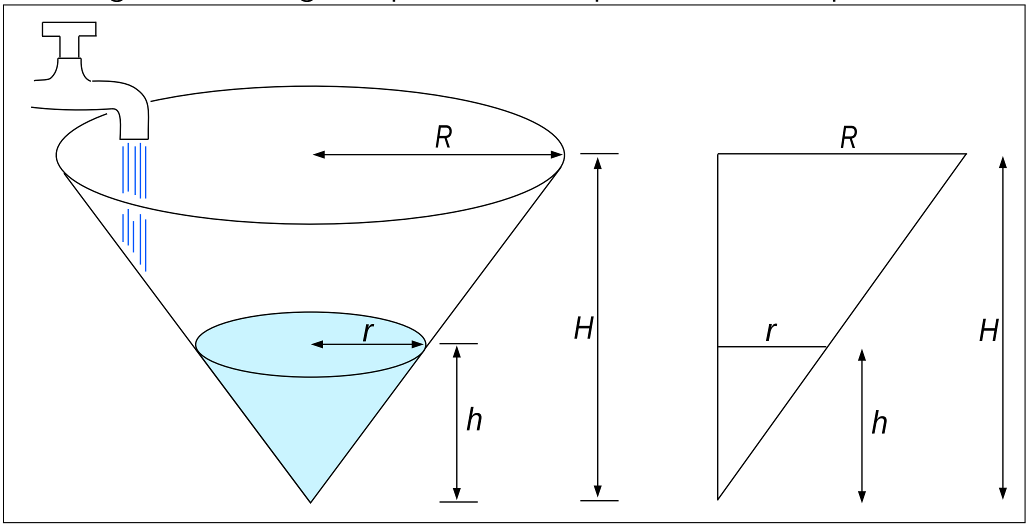
Se temos variáveis, digamos u, v e w, relacionadas entre si por uma equação, podemos ainda ter as três como funções de uma única variável s. Por derivação implícita, ou às vezes, por derivação em cadeia, podemos relacionar as várias derivadas $\dfrac{du}{ds}$, $\dfrac{dv}{ds}$ e $\dfrac{dw}{ds}$, ou ainda, por exemplo, $\dfrac{du}{dv}$, $\dfrac{dv}{dw}$, etc. Problemas em que duas ou mais grandezas variáveis estão inter-relacionadas, e nos quais são levadas em conta as taxas de variações instantâneas, de algumas grandezas em relação a outras, são chamados, na literatura do cálculo, de problemas de *taxas relacionadas*.

Exemplo 14.1. *Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura* H *e raio do topo circular igual a* R*. Encontrando-se inicialmente vazio, o tanque começa a encher-se de água, a uma vazão constante de* k *litros por minuto. Exprima a velocidade com que sobe o nível da água* (dh/dt)*, em função da profundidade* h*. Qual é o limite da velocidade de subida do nível da água quando* $h \to 0$ *?*

Solução. O volume da água quando esta tem profundidade h é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, sendo r o raio da superfície (circular) da água. Veja figura 14.1.

Sendo R o raio do topo da caixa, e H sua altura, por razões de semelhança de

Figura 14.1. Diagrama para estudo do problema do exemplo 14.1.



triângulos, temos $r/R = h/H$, daí $r = Rh/H$.

Assim sendo, obtemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 h = \frac{\pi R^2}{3H^2}h^3$$

A taxa de variação do volume de água no tempo, isto é, sua *vazão*, é constante, ou seja $\frac{dV}{dt} = k$ (litros por minuto).

Por derivação em cadeia, temos $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$. Como $\frac{dV}{dt} = k$, temos então

$$k = \frac{\pi R^2}{H^2}h^2 \cdot \frac{dh}{dt}, \text{ ou seja, } \frac{dh}{dt} = \frac{kH^2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{h^2}$$

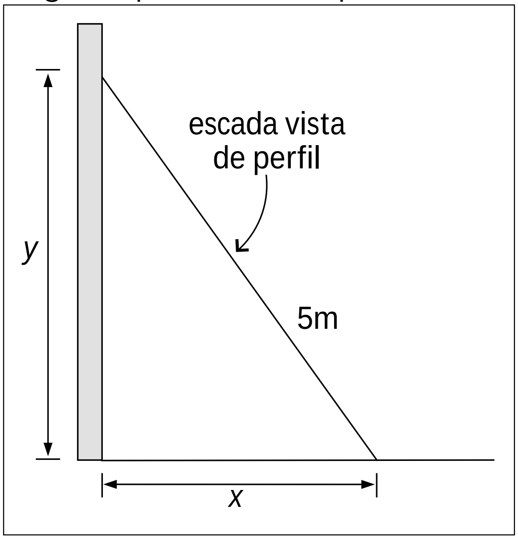
Assim, estabelecemos que a velocidade de subida do nível da água é inversamente proporcional ao quadrado de sua profundidade.

Quando $h \to 0$, temos, $\frac{dh}{dt} \to +\infty$. Na prática, este resultado nos diz que nossa modelagem matemática não nos permite determinar a velocidade de subida da água no instante em que o tanque começa a encher-se.

Exemplo 14.2. *Uma escada de* 5 *m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de* 2 *cm/s. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a* 3 *m da parede?*

Solução. Na figura 14.2 temos um diagrama geométrico para o problema, em que denotamos por x e y as distâncias da base e do topo da escada à base da parede, respectivamente.

Figura 14.2. Diagrama para estudo do problema do exemplo 14.2.



Temos $\dfrac{dx}{dt} = 2$ (cm/s).

Pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 250000$, daí, derivando implicitamente em relação a t, temos $2x \cdot \dfrac{dx}{dt} + 2y \cdot \dfrac{dy}{dt} = 0$, ou seja,

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 3\,\text{m} = 300\,\text{cm}$, temos $y = 4\,\text{m} = 400\,\text{cm}$, e então $\dfrac{dy}{dt} = -1{,}5\,\text{cm/s}$.

Nesse instante, a velocidade com que o topo da escada cai é igual a 1,5 cm/s.

14.2 Diferenciais

Quando uma função $f(x)$ é derivável em um ponto x_0, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Assim, se chamamos

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon$$

teremos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$.

Assim, sendo $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, temos $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$.

Como $\varepsilon \approx 0$ quando $|\Delta x|$ é suficientemente pequeno, temos, Δx suficientemente próximo de 0, a aproximação

$$\Delta f \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Chama-se *diferencial de* f *em* x_0 a expressão simbólica

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

O produto $f'(x_0) \cdot \Delta x$ é o valor da diferencial de f no ponto x_0, $df(x_0)$, quando $dx = \Delta x$.

A expressão dx, *diferencial da variável* x, pode assumir qualquer valor real. A importância da diferencial está no fato de que quando $dx = \Delta x$ e este é suficientemente pequeno, temos

$$\Delta f \approx df$$

ou, mais explicitamente,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

e em geral, é mais fácil calcular $f'(x_0) \cdot \Delta x$ do que $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Nos primórdios do cálculo, matemáticos diziam que dx seria uma variação "infinitesimal" de x, atribuída a x_0, e que $df(x_0)$ seria a variação infinitesimal, sofrida por $f(x_0)$, correspondente à variação dx atribuída a x_0. Esses matemáticos chegavam a escrever "$f(x + dx) - f(x) = f'(x)\,dx$".

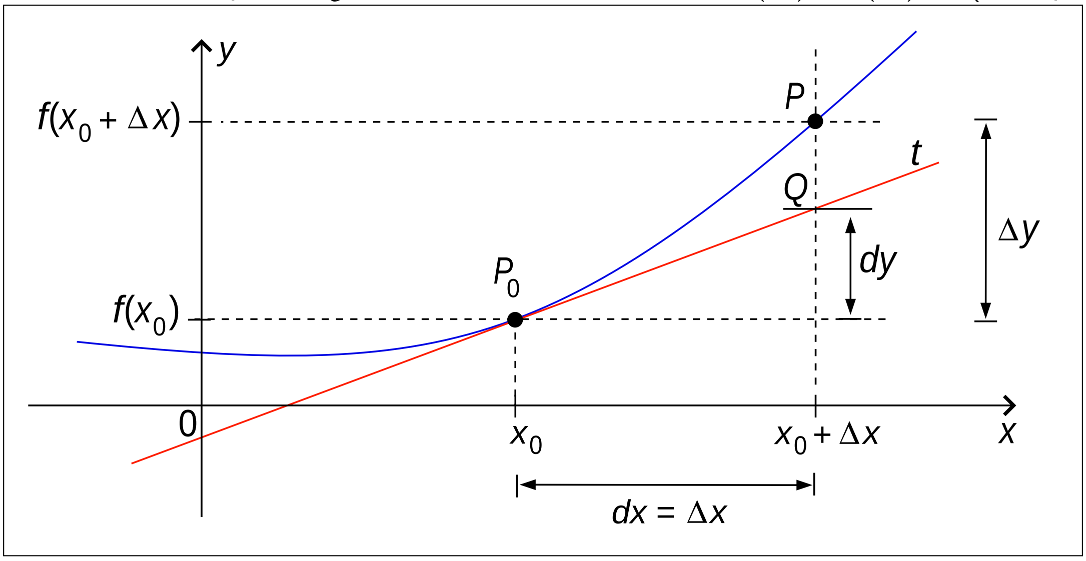
Ainda hoje, muitos textos de cálculo para ciências físicas, referem-se a "um elemento de comprimento dx," "um elemento de carga elétrica dq," "um elemento de massa dm," "um elemento de área dA," etc., quando querem referir-se a quantidades "infinitesimais" dessas grandezas.

Na figura 14.3 temos uma interpretação geométrica da diferencial de uma função f em um ponto x_0, quando dx assume um certo valor Δx.

Sumarizando, quando x sofre uma variação Δx,

1. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ é a variação sofrida por $f(x)$;
2. $dy = f'(x)\Delta x$ é a diferencial de f, em x, para $dx = \Delta x$;
3. $\Delta y \approx dy$, se Δx é suficientemente pequeno.

Figura 14.3. Note que, quanto mais próximo de zero tivermos Δx, melhor será a aproximação $dy \approx \Delta y$. Na figura, t é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. As coordenadas do ponto Q, sobre a reta t, são $x_0 + \Delta x$ e $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (verifique).



Convenciona-se também dizer que

4. $\dfrac{\Delta x}{x}$ é a *variação relativa* de x, correspondente à variação Δx;

5. $\dfrac{\Delta y}{y} \approx \dfrac{dy}{y}$ é a variação relativa de $y = f(x)$, correspondente à variação Δx sofrida por x.

Exemplo 14.3. *Mostre que se h é suficientemente pequeno, vale a aproximação*

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a} \quad (a > 0)$$

Com tal fórmula, calcule valores aproximados de $\sqrt{24}$ e $\sqrt{104}$. Compare com resultados obtidos em uma calculadora.

Solução. Sendo $y = f(x) = \sqrt{x}$, usamos a aproximação $\Delta y \approx dy$.

Temos $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ e $dy = f'(x)\, dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Tomando $x = a^2$ e $dx = \Delta x = h$, teremos

$\sqrt{a^2 + h} - \sqrt{a^2} \approx \frac{h}{2a}$, e portanto

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$$

Temos então

$$\sqrt{24} = \sqrt{5^2 + (-1)} \approx 5 + \frac{-1}{2 \cdot 5} = 4{,}9, \text{ e}$$

$$\sqrt{104} = \sqrt{10^2 + 4} \approx 10 + \frac{4}{2 \cdot 10} = 10{,}2.$$

Por uma calculadora, obteríamos $\sqrt{24} \approx 4{,}898979$ e $\sqrt{104} \approx 10{,}198039$.

Dizemos que um número real x está representado em notação científica quando escrevemos x na forma $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq |a| < 10$ e n inteiro (positivo ou negativo). Assim, por exemplo, em notação científica temos os números $2,46 \cdot 10^{-5}$ e $4,584 \cdot 10^{11}$, enquanto que, convertendo à notação científica os números $-0,023 \cdot 10^8$ e $452,36 \cdot 10^3$, teremos $-0{,}023 \cdot 10^8 = -2{,}3 \cdot 10^6$, e $452{,}36 \cdot 10^3 = 4{,}5236 \cdot 10^5$.

Exemplo 14.4. *Estimar, em notação científica, uma aproximação de* $\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2}$, *quando* $n = 10^{28}$.

Solução. (uma calculadora pode não dar conta desta tarefa)

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, temos $df = -\dfrac{2}{x^3}dx$.

$\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} = f(n+1) - f(n) = \Delta f$, para $x = n$ e $\Delta x = 1$.

Pela aproximação $\Delta f \approx df$, teremos, quando $n = 10^{28}$,

$\Delta f \approx f'(n)\Delta x = -\dfrac{2}{n^3} = \dfrac{-2}{10^{84}} = -2 \cdot 10^{-84}$.

Exemplo 14.5. *Quando estima-se que a medida de uma grandeza é* M *unidades, com possível erro de* E *unidades, o* erro relativo *dessa medição é* E/M. *O erro relativo da medição indica o erro médio (cometido na medição) por unidade da grandeza. Por exemplo, ao medir o comprimento de uma quadra de comprimento* $M = 100$ *m, com erro (para mais ou para menos)* $E = 1$ *m, o erro relativo dessa medição será* $E/M = 1/100 = 1\%$.

O raio r *de uma bolinha de aço é medido, com a medição sujeita a até* 1% *de erro. Determine o maior erro relativo que pode ocorre na aferição de seu volume.*

Solução. O volume de uma bola de raio r é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Sendo $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, temos $dV = 4\pi r^2\, dr$.

O erro ΔV, na aferição do volume, correspondente ao erro Δr na medição do raio, quando Δr é bem pequeno, é aproximadamente dV. Temos então

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2(\Delta r)}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r}$$

Para $\dfrac{\Delta r}{r} = \pm 0{,}01$ (erro máximo relativo na medição do raio), temos $\dfrac{\Delta V}{V} \approx \pm 0{,}03$, e portanto 3% é o maior erro possível na medição do volume.

Observação 14.1. *Se o gráfico de f afasta-se muito rapidamente da reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$, quando x afasta-se de x_0, a aproximação $\Delta y \approx dy$ pode falhar quando tomamos um valor de Δx que julgamos suficientemente pequeno, por não sabermos quão "suficientemente pequeno" devemos tomá-lo. Isto pode ocorrer quando a derivada $f'(x_0)$ tem valor absoluto muito grande.*

Como um exemplo, seja $f(x) = x^{100}$.

Temos $f(1{,}08) = (1{,}08)^{100} \approx 2199{,}76$, por uma calculadora confiável (confira).

No entanto, o uso de diferenciais nos dá $f(1 + \Delta x) \approx f(1) + f'(1)\Delta x = 1 + 100\Delta x$, e portanto, para $\Delta x = 0{,}08$, $f(1{,}08) \approx 1 + 100 \cdot 0{,}08 = 9$.

A razão dessa discrepância é que $f'(1) = 100$, o que torna o gráfico de f com alta inclinação no ponto $x_0 = 1$. Nesse caso, somente um valor muito pequeno de Δx torna válida a aproximação $\Delta f \approx df$. Por exemplo, $(1{,}0005)^{100} \approx 1{,}0513$, por uma calculadora, enquanto que, $(1{,}0005)^{100} \approx 1{,}05$, pela aproximação $\Delta f \approx df$.

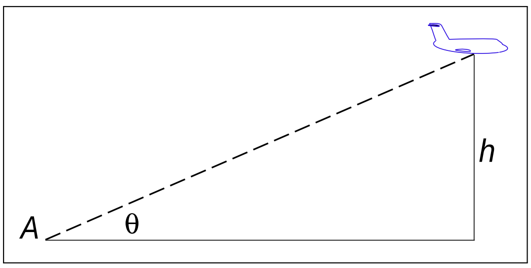
14.3 Problemas

14.3.1 Problemas sobre taxas relacionadas

1. Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de 5 m e raio da base (isto é, do topo) de 1 m (veja figura 14.1). O tanque se enche de água à taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade sobe o nível da água no instante em que ela tem 3 m de profundidade? *Resposta.* $\dfrac{50}{9\pi}$ m/min $\approx 1{,}77$ m/min.

2. O gás de um balão esférico escapa à razão de 2 dm^3/min. Mostre que a taxa de variação da superfície S do balão, em relação ao tempo, é inversamente proporcional ao raio. *Dado.* A superfície de um balão de raio r tem área $S = 4\pi r^2$.

3. Considere um avião em vôo horizontal, a uma altura h em relação ao solo, com velocidade constante v, afastando-se de um observador A que se encontra em terra firme. Seja θ a elevação angular do avião, em relação ao solo, a partir do observador, medida em radianos.



Determine, como função de θ, a taxa de variação de θ em relação ao tempo. *Resposta.* $\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{v}{h}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.

4. Um ponto móvel desloca-se, em um sistema de coordenadas cartesianas, ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ (r constante) com uma velocidade cuja componente em x é dada por $\dfrac{dx}{dt} = y$ (cm/s).

   Calcule a componente da velocidade em y, $\dfrac{dy}{dt}$.

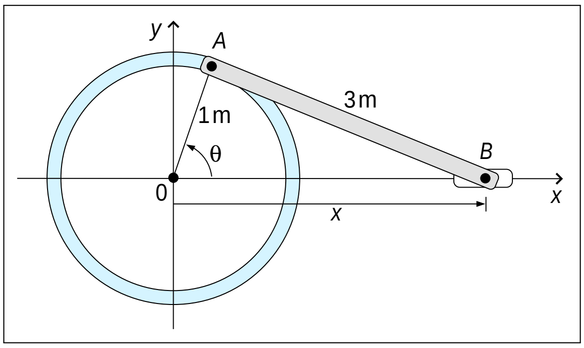
   Seja θ o deslocamento angular desse ponto móvel, medido em radianos a partir do ponto $(1, 0)$ no sentido anti-horário.

   Calcule a velocidade angular $\dfrac{d\theta}{dt}$.

   Em que sentido o ponto se desloca sobre a circunferência, no sentido horário ou no anti-horário?

   Respostas. $\dfrac{dy}{dt} = -x$, $\dfrac{d\theta}{dt} = -1$ (rad/s), portanto o ponto se desloca no sentido horário.

5. Prende-se a extremidade A de uma haste de 3 m de comprimento a uma roda de raio 1 m, que gira no sentido anti-horário à taxa de $0,3$ radianos por segundo. A outra extremidade da haste está presa em B a um anel que desliza livremente ao longo de uma haste horizontal que passa pelo centro da roda.



   Qual é a velocidade do anel em B quando A atinge a altura máxima? *Resposta.* $-0,3$ m/s.

6. No exemplo 14.2, uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. Mostre que é fisicamente impossível manter a base da escada escorregando-se, afastando-se da parede a uma velocidade constante, até o momento em que o topo da escada toque o chão. *Sugestão.* Avalie o limite da velocidade do topo da escada quando a distância entre o topo e o chão tende a 0.

14.3.2 Problemas sobre diferenciais

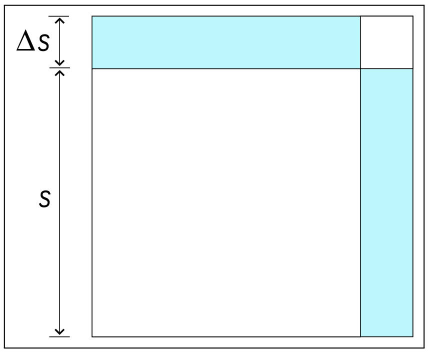
1. Se $w = z^3 - 3z^2 + 2z - 7$, use a diferencial dw para obter uma aproximação da variação de w quando z varia de 4 a $3,95$. *Resposta.* $\Delta w \approx -1,30$.

2. Estima-se em 8 polegadas o raio de um disco plano circular, com margem de erro de $\pm 0,06$ polegadas. Utilizando diferenciais, estime a margem de erro no cálculo da área do disco (uma face). Qual é o erro relativo no cálculo dessa área? *Resposta.* $\Delta A \approx dA = \pm 0,96\pi$ polegadas quadradas, com erro relativo de $\pm 1,5\%$.

3. Usando diferenciais, deduza a fórmula aproximada $\sqrt[3]{a^3 + h} \approx a + \frac{h}{3a^2}$. Utilize-a para calcular aproximações de $\sqrt[3]{63}$ e $\sqrt[3]{65}$. (Compare com os resultados obtidos em uma calculadora eletrônica.) *Respostas.* $3,98$ e $4,02$.

4. Mostre que aplicando-se uma fina camada de tinta de espessura h, à superfície de uma bola esférica de área externa S, o volume da esfera sofre um acréscimo de aproximadamente $S \cdot h$.

5. A área A de um quadrado de lado s é dada por s^2. Para um acréscimo Δs de s, ilustre geometricamente dA e $\Delta A - dA$.



Resposta. dA é a área da região sombreada. $\Delta A - dA$ é a área do quadrado menor, que aparece no canto superior direito.