Matemática Discreta

Funções

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Funções

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar a definição de função
  - Mostrar a diferença entre função e relação binária
  - Apresentar o que são funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras
  - Relembrar conceitos de relações agora aplicados a funções
    - Função inversa e inversível
    - Composição de funções
  - Capacitar o aluno a utilizar conceitos e propriedades de Funções na resolução de problemas computacionais

Problema #11

- **Composição de funções**
  - Dados $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, calcule as composições a seguir
    a) $g \circ f$
    b) $f \circ g$
    c) $f \circ f$
    d) $g \circ g$

Funções

- **Função**
  - Informalmente
    - Mecanismo que transforma uma entrada em uma saída

$$2 \longrightarrow \boxed{f(x) = x^2} \longrightarrow 4$$

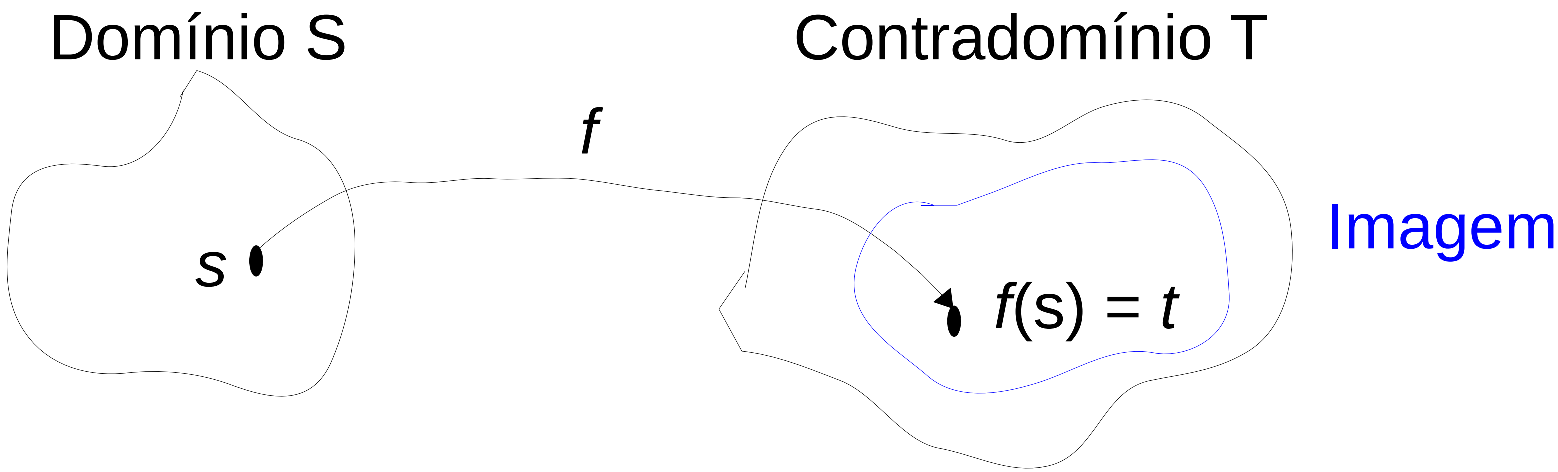
- Uma função está composta por 3 partes:
  1. **Domínio** – conjunto de valores iniciais
  2. **Contradomínio** – conjunto de onde saem os valores associados
  3. **Associação** propriamente dita

Funções

- **Função**
  - Definição formal
    - Sejam S e T conjuntos
      - Uma função f de S em T, f: S → T, é um subconjunto de S × T tal que <u>cada</u> elemento de S aparece <u>exatamente uma vez</u> como o <u>primeiro</u> elemento de um par ordenado
        - S é o **domínio** e T é o **contradomínio** da função
        - Se (s, t) pertence à função, então denotamos $t = f(s)$
        - t é a **imagem** de s sob f
        - s é uma **imagem inversa** de t sob f e f leva s em t

Funções

- **Função**
  - Domínio, Contradomínio e Imagem



- ➔ Os <u>primeiros</u> elementos dos pares ordenados de f vêm do **domínio**
- ➔ Os <u>segundos</u> elementos dos pares ordenados de f vêm do **contradomínio**
- ➔ O <u>conjunto de todos os segundos</u> elementos dos pares ordenados de f é a **imagem**
- ➔ A imagem é um subconjunto do contradomínio e não necessariamente igual a ele

Funções

- **Função**
  - Função X Relação binária
    - A propriedade de uma relação binária que a torna uma função é que <u>todo</u> elemento de S (domínio) tem um <u>único</u> valor em T (contradomínio) associado
      - <u>Todo</u> s $\in$ S <u>aparece exatamente uma vez</u> como <u>primeiro</u> elemento de um par (s, t)

    ➔ Os <u>primeiros</u> elementos dos pares ordenados da função vêm do <u>domínio</u>

    ➔ Os <u>segundos</u> elementos dos pares ordenados da função vêm do <u>contradomínio</u>

Funções

CUIDADO!
Para ser função a restrição é de que o primeiro elemento do par apareça apenas uma vez, o segundo pode repetir!

- **Função**
  - Exemplo
    - f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$
      - Domínio de f: conjunto de todos os inteiros
      - Imagem de f: conjunto de todos os quadrados perfeitos
      - Valor da imagem de -4, ou seja, f(-4) = 16
      - Imagens inversas de 9: -3 e 3
      - Cada $s \in S$ ($\mathbb{Z}$) aparece exatamente uma vez como primeiro elemento de um par ordenado

        …, (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), …
      - ➔ A imagem de dois inteiros pode ser a mesma!

Funções

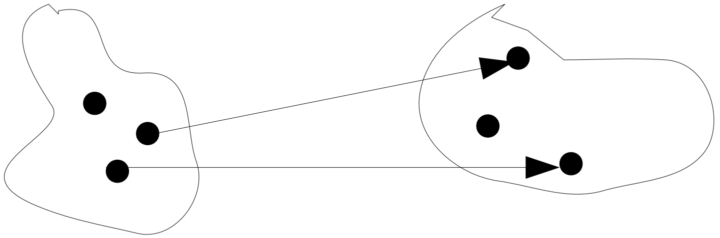
- **Função**
  - Diga quais das relações a seguir são funções

a) $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7) \}$

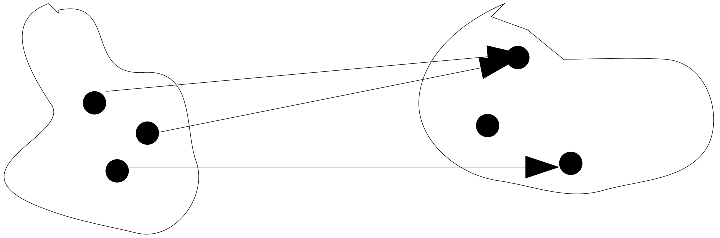
b) $g = \{ (1, 2), (1, 3), (4, 7) \}$

c) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(x) = x - 4$

d) j



e) k



Funções

- **Função**
  - Diga quais das relações a seguir são funções

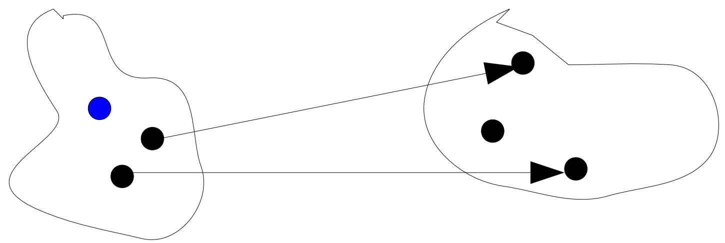
a) $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 7) \}$ SIM

b) $g = \{ (1, 2), (1, 3), (4, 7) \}$ NÃO

c) $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $h(x) = x - 4$ NÃO

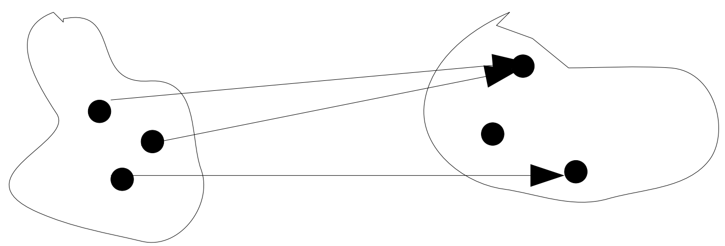
h não está definida para 0, 1, 2, 3

d) *j*



NÃO

e) *k*



SIM

Funções

- **Função**
  - Notação
    - Seja f uma função e seja a um objeto
    - A notação $f(a)$ é definida desde que exista um objeto b tal que $(a, b) \in f$
      - ➔ Nesse caso, $f(a) = b$
  - ➔ Se não existir par ordenado $(a, -)$ em f, $f(a)$ não está definida (e nesse caso alguns autores dizem que a função é parcial)
  - ➔ Logo, a notação $(1, 2) \in f$ é equivalente a notação $f(1) = 2$

Funções

- **Função sobrejetora (sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma função f: S $\rightarrow$ T é dita **sobrejetora** se sua imagem é igual ao seu contradomínio
  - Não há elementos de T sem associação com algum elemento de S

Funções

- **Função sobrejetora (sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)**
  - Exemplos

a) A = { 0, 1, 2, 3, 4 } e B = { 5, 7, 8, 9 }

f: A $\rightarrow$ B f = { (0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7) }

➔ **É sobrejetora = SIM**

b) A = { a, b, c, d } e B = { r, s, t, u }

f : A $\rightarrow$ B   f = { (a, s), (b, u), (c, r), (d, s) }

➔ **É sobrejetora = NÃO**, pois t $\in$ B não é imagem de nenhum elemento de A

Funções

- **Função sobrejetora (sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)**
  - Provando que uma função é sobrejetora
    - Tanto a imagem quanto o contradomínio de uma função são <u>conjuntos de elementos</u>
    - Assim, provar que a imagem (R) é igual ao contradomínio (T) é provar a igualdade de dois conjuntos

Funções

- **Função sobrejetora (sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)**
  - Provando que uma função é sobrejetora
    - $R = T$ sse $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$
    - onde R é a imagem e T o contradomínio
      - ($\Rightarrow$)

        Para provar que $R \subseteq T$ basta usar a definição de função que diz que a imagem R é subconjunto do contradomínio T, ou seja $R \subseteq T$
      - ($\Leftarrow$)

        Para provar que $T \subseteq R$, escolhe-se um elemento arbitrário t de T e mostra que ele também pertence a R, ou seja, é a imagem de algum elemento s do domínio S, $t = f(s)$

Funções

- **Função sobrejetora (sobrejetiva, sobrejeção ou sobre)**
  - Vamos provar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora

Prova:
Seja x um número real. Vamos mostrar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetora.
Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar um número real arbitrário r com $x = \sqrt[3]{r}$. Como x é a raiz cúbica de um número real, sabemos que x é um número real e, portanto, pertence ao domínio de f sendo possível calcular $f(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$, ou seja, r é imagem de x sob f.
Logo, qualquer elemento do contradomínio ($\mathbb{R}$) é a imagem, sob f, de um elemento do domínio ($\mathbb{R}$) e, assim, provamos que a função f é sobrejetora.
Portanto, f é sobrejetora. ■

Funções

- **Função injetora (injetiva, injeção ou um para um)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma função f: S → T é dita **injetora** se <u>nenhum</u> elemento de T é a imagem sob f de <u>dois</u> elementos distintos de S
  - Elementos diferentes de S têm imagens diferentes em T

Funções

- **Função injetora (injetiva, injeção ou um para um)**
  - Exemplos

a) A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { 1, 2, 3, 4, 5 }

f: A → B f = { (1, 2), (2, 5), (3, 1), (4, 4) }

➔ **É injetora = SIM**

b) A = { a, b, c, d } e B = { r, s, t, u }

f : A → B   f = { (a, s), (b, u), (c, r), (d, s) }

➔ **É injetora = NÃO**, pois o elemento *a* e o elemento *d* do conjunto A levam ao mesmo elemento *s* do conjunto B

Funções

- **Função injetora (injetiva, injeção ou um para um)**
  - Provando que uma função é injetora
    - Supomos que existem elementos s_1 e s_2 de S com $f(s_1) = f(s_2)$ e mostramos que $s_1 = s_2$

Prova

Seja *x* um número real. Vamos mostrar que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é injetora.

Para demonstrar essa propriedade, vamos considerar x e y números reais arbitrários, ou seja, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ com $f(x) = f(y)$.

Como consequência temos que $x^3 = y^3$, ou seja, $x*x*x = y*y*y$, o que só pode ser verdade se $x = y$.

Portanto, f é injetora. ■

Funções

- **Função bijetora (bijetiva ou bijeção)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma função *f*: S → T é dita **bijetora** se é, <u>ao mesmo tempo</u>, injetora e sobrejetora
    - <u>Todos</u> os elementos do contradomínio estão associados a <u>exatamente um</u> elemento do domínio

Funções

- **Função bijetora** **(bijetiva ou bijeção)**
  - Exemplos

    a) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e $B = \{ a, b, c, d, e \}$

    $f: A \rightarrow B \quad f = \{ (1, a), (2, e), (3, b), (4, c), (5, d) \}$

    - **É bijetora = SIM**

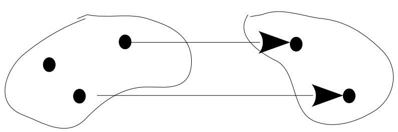
    b) $A = \{ a, b, c, d \}$ e $B = \{ r, s, t, u \}$

    $f : A \rightarrow B \quad f = \{ (a, s), (b, u), (c, r), (d, s) \}$

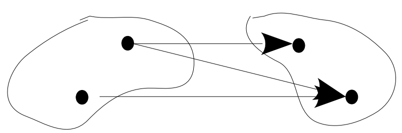
    - **É bijetora = NÃO**, pois não é nem sobrejetora nem injetora

Funções

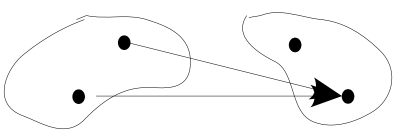
- **Dadas as representações gráficas a seguir**
  - Diga se são funções e se são (in|sobre|bi)jetoras



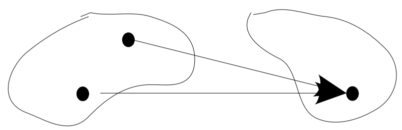
?



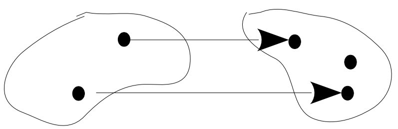
?



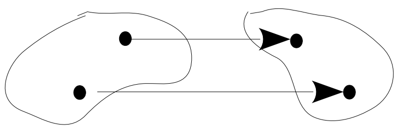
?



?



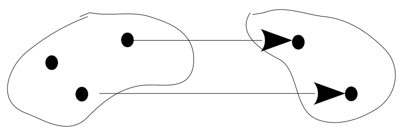
?



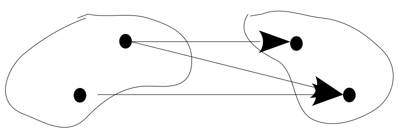
?

Funções

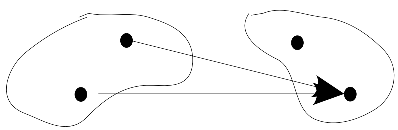
- **Dadas as representações gráficas a seguir**
  - Diga se são funções e se são (in|sobre|bi)jetoras



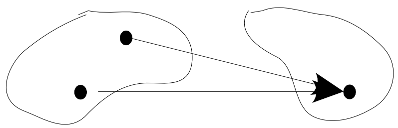
Não é função



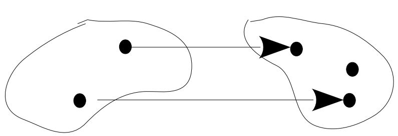
Não é função



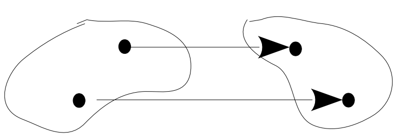
Função não injetora
Função não sobrejetora



Função não injetora
Função **sobrejetora**



Função **injetora**
Função não sobrejetora



Função **injetora**
Função **sobrejetora**
Função **bijetora**

Funções

- **Contagem de funções**
  - Proposições
    - Sejam A e B conjuntos finitos com $|A| = a$ e $|B| = b$. O número de funções de A para B é b^a
    - Sejam A e B conjuntos finitos e seja $f : A \rightarrow B$
      - Se $|A| > |B|$, então f <u>não</u> é injetora
      - Se $|A| < |B|$, então f <u>não</u> é sobrejetora
      - Se f é uma bijeção, então $|A| = |B|$
    - Como decorrência dessa proposição, podemos afirmar que:
      - Se $f: A \rightarrow B$ é injetora, então $|A| \leq |B|$ e
      - Se $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora, então $|A| \geq |B|$

Funções

- **Função inversa**

Fonte: https://pixabay.com/

- A **inversa** de uma função *f* é uma relação inversa f^{-1} obtida <u>invertendo-se a ordem de todos os pares ordenados em *f*</u>
  - Nem sempre a inversa de uma função é também uma função

Funções

- **Função inversa**
  - Exemplos

    a) $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$

    $f: A \rightarrow B$ $\quad f = \{ (0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7) \}$

    Calculando a f^{-1}: $f^{-1} = \{ (5, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (7, 4) \}$

    ➔ f^{-1} **NÃO é função**, pois tanto (7, 1) como (7, 4) estão em f^{-1} e, além disso, dom $f^{-1} = \{ 5, 7, 8, 9 \} \neq B$

Funções

- **Função inversível**

Fonte: https://pixabay.com/

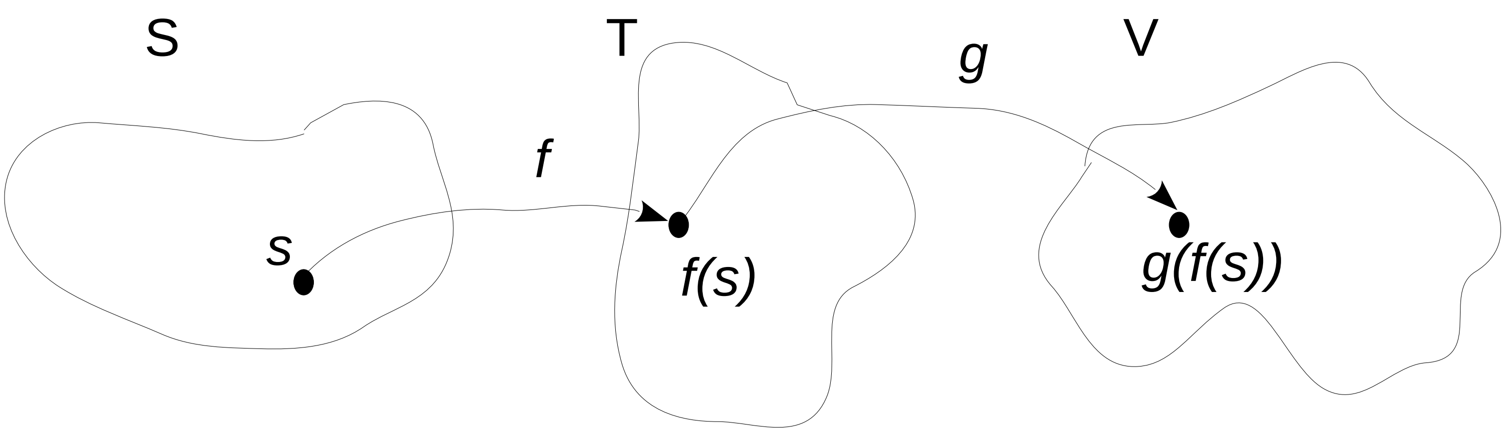
- Uma função f: S → T é **inversível** se sua inversa é uma função de T para S
- Uma função f: S → T é inversível se e somente se f é injetora e sobrejetora, ou seja, <u>bijetora</u>

Funções

- **Função inversível**
  - Exemplo
    - $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e $B = \{ a, b, c, d, e \}$
      $f: A \rightarrow B \quad f = \{ (1, a), (2, e), (3, b), (4, c), (5, d) \}$
    - **f é inversível, pois**
      $f^{-1}: B \rightarrow A \quad f^{-1} = \{ (a, 1), (e, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 5) \}$

Funções

- **Composição de funções**
  - Sejam f: S → T e g: T → V
    - A função composta $g \circ f$ é a função de S em V definida por $(g \circ f) = g(f(x))$



- Para todo s ∈ S, f(s) é um elemento de T que, por sua vez, é domínio de g
- Logo, pode-se calcular g(f(s)) que é um elemento de V

Funções

- **Composição de funções**
  - Exemplo

a) $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ $C = \{ a, b, c \}$

$f: A \rightarrow B$ com $f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6) \}$

$g: B \rightarrow C$ com $g = \{ (2, a), (4, c), (6, a), (8, b) \}$

Seja a composição de f e g como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)\ (1) = g(f(1)) = g(2) = a$

$(g \circ f)\ (2) = g(f(2)) = g(4) = c$

$(g \circ f)\ (3) = g(f(3)) = g(6) = a$

Logo, $(g \circ f) : A \rightarrow C$ com $(g \circ f) = \{ (1, a), (2, c), (3, a) \}$

Funções

- **Composição de funções**
  - IMPORTANTE
    - Nem sempre é possível fazer a composição de duas funções quaisquer
      - Os domínios e imagens têm que ser compatíveis
    - A ordem é importante na composição das funções
    - A composição de funções preserva as propriedades das funções serem injetoras ou sobrejetoras
      - A composição de duas bijeções é também uma bijeção

Problema #11

- **Composição de funções**
  - Dados $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, calcule as composições a seguir
    - a) $g \circ f$
    - b) $f \circ g$
    - c) $f \circ f$
    - d) $g \circ g$

Problema #11

- **Composição de funções**
  - Dados $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$, calcule as composições a seguir

    a) $g \circ f = g(f(x)) = g(2x+3) = 5(2x+3) = 10x+15$

    b) $f \circ g = f(g(x)) = f(5x) = 2(5x)+3 = 10x+3$

    $g \circ f \neq f \circ g$

    c) $f \circ f = f(f(x)) = f(2x+3) = 2(2x+3)+3 = 4x+6+3 = 4x+9$

    d) $g \circ g = g(g(x)) = g(5x) = 5(5x) = 25x$