

Lógica

Lógica Proposicional

Aula 05 – Álgebra e Leis de Equivalência

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

$$x + y = y + x$$

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Análoga à álgebra matemática
 - Especifica como os elementos podem ser manipulados em fórmulas bem-formadas
 - Especifica como fórmulas equivalentes podem ser geradas para serem usadas na simplificação e na manipulação de expressões lógicas
 - Útil, principalmente, na prova da validade de argumentos

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**

- **Dual**

- O dual de uma fórmula definida em termos de símbolos atômicos (p, q, \dots), símbolos de verdade (V e F) e dos conectivos lógicos de conjunção (\wedge) e disjunção (\vee) é obtido substituindo-se todas as ocorrências de
 - V por F e vice-versa
 - \wedge por \vee (ou) e vice-versa
 - Exemplo: $(p \wedge q) \vee F$ tem como dual $(p \vee q) \wedge V$

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**

- Equivalências lógicas (leis) importantes

- $p \wedge \neg p \equiv F$

lei da contradição

- $p \vee \neg p \equiv V$

lei do terceiro (meio) excluído

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $p \wedge V \equiv p$
 - $p \vee F \equiv p$
- leis da identidade

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $p \wedge F \equiv F$
 - $p \vee V \equiv V$
- leis da dominação

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $p \wedge p \equiv p$
 - $p \vee p \equiv p$
- leis idempotentes

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $\neg(\neg p) \equiv p$ lei da dupla negação

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
 - $p \vee q \equiv q \vee p$

leis comutativas

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

\equiv

\equiv

Lógica Proposicional

■ Álgebra da Lógica Proposicional

■ Equivalências lógicas (leis) importantes

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

leis associativas

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Lógica Proposicional

■ Álgebra da Lógica Proposicional

■ Equivalências lógicas (leis) importantes

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

leis distributivas

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Lógica Proposicional

■ Álgebra da Lógica Proposicional

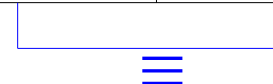
■ Equivalências lógicas (leis) importantes

- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

leis de De Morgan

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V



Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**
 - Equivalências lógicas (leis) importantes
 - $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
 - $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 - $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

≡

Lógica Proposicional

- **Álgebra da Lógica Proposicional**

- Equivalências lógicas (leis) importantes

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ leis da absorção

- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$ (generalização)

- $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$

Lógica Proposicional



■ Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilize as equivalências lógicas vistas anteriormente para demonstrar:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (absorção)

b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$

$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leis comutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leis associativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leis distributivas

Lógica Proposicional



■ Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilize as equivalências lógicas vistas anteriormente para demonstrar:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (absorção)

b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$

RESPOSTAS

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$	identidade
$\equiv p \vee (F \wedge q)$	distributiva
$\equiv p \vee (q \wedge F)$	comutativa
$\equiv p \vee F$	dominação
$\equiv p$	identidade

$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leis comutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leis associativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leis distributivas

Lógica Proposicional



■ Álgebra da Lógica Proposicional

- Utilize as equivalências lógicas vistas anteriormente para demonstrar:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (absorção)

b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$

$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes

RESPOSTAS

$$\begin{aligned} \text{b) } & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv ((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee q) \\ & \equiv ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q)) \\ & \equiv (V \wedge (q \vee \neg p)) \wedge (q \vee (p \wedge q)) \\ & \equiv (q \vee \neg p) \wedge q \\ & \equiv q \wedge (q \vee \neg p) \\ & \equiv q \end{aligned}$$

distributiva
distributiva e comutativa
terceiro excluído
identidade e absorção
comutativa
absorção

a negação

utativas

ociativas

ributivas