Matemática Discreta

Demonstração de Teoremas
Estratégias

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Demonstração de Teoremas

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar a estrutura de uma prova
  - Apresentar as estratégias de demonstração de teoremas mais utilizadas
    1. Prova direta
    2. Prova por contraposição
    3. Prova indireta (por absurdo)
  - Capacitar o aluno a escolher e utilizar corretamente a Estratégia mais adequada para uma Demonstração de Teorema

Problema #4

- **Provar/refutar**

*Se x e y são inteiros pares, então o produto x*y também é par.*

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Múltiplo**
    - Um inteiro n é *múltiplo* de um inteiro p se, e somente se, existe um inteiro q tal que $n = pq$.
      - Exemplo: 6 é múltiplo de 2, pois 6 = 2*3
  - **Divisor**
    - Um inteiro b *divide* um inteiro a (é um *divisor* de a) se, e somente se, a é múltiplo de b.

    → Dizemos que a é *divisível* por b ($b|a$)
      - Exemplo: 6 é divisível por 2 (2|6) porque 6 é múltiplo de 2

Demonstração de Teoremas

- **Algumas definições úteis**
  - **Par**
    - Um inteiro n é *par* se ele é múltiplo de 2.
    - Um inteiro n é *par* se for divisível por 2.
  - **Ímpar**
    - Um inteiro a é *ímpar* desde que haja um inteiro b de modo que $a = 2b + 1$.
    - Se um inteiro não é par, dizemos que ele é *ímpar*.

Demonstração de Teoremas

- **Estrutura de uma prova**

AFIRMAÇÃO na forma de se-então que traz a apresentação da prova, ou seja, o que vai ser provado e qual a estrutura dessa prova.

HIPÓTESE que rege a demonstração, ou seja, a condição da parte "se" do se-então.

CORPO da prova no qual são descritos os passos que compõem a demonstração.

CONCLUSÃO verdadeira, ou seja, a condição da parte "então" do se-então se mostrou válida.

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma sequência de passos baseados em definições e resultados já conhecidos, que permite nos levar da hipótese (P) até a conclusão (Q) para provar

Se P então Q

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Se-então

    "A soma de dois inteiros pares é um inteiro par"

Convertendo para a forma se-então

"<u>Se</u> x e y são dois inteiros pares, <u>então</u> x+y é um inteiro par"

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Se-então

“Se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par”

- ➔ Provar/refutar
  - ➔ Nesta prova serão usadas as definições de “par” e “múltiplo”

“Um inteiro é par se for múltiplo de 2”

“Um inteiro n é um múltiplo de um inteiro p se, e somente se, existe um inteiro q tal que n = pq”

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Se-então

"<u>Se</u> x e y são dois inteiros pares, <u>então</u> x+y é um inteiro par"

- afirmação na forma se-então
- apresentação da prova
- o que vai ser provado e qual a estrutura dessa prova

Prova:

Vamos mostrar que, se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par.

Sejam x e y inteiros pares. — Hipótese

....

....(corpo da prova)

....

....

Portanto, x+y é par. — Conclusão

Demonstração de Teoremas

x é par

x é múltiplo de 2

$x = 2m$

$x+y = 2m+2n = 2(\overbrace{m+n}^{\text{inteiro}})$

- **Prova direta**
  - Se-então

"<u>Se</u> x e y são dois inteiros pares, <u>então</u> x+y é um inteiro par"

Prova:
Vamos mostrar que, se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par.
Sejam x e y inteiros pares.
Como x é par e y é par, pela definição de números pares temos que x é múltiplo de 2 e y é múltiplo de 2.
Pela definição de múltiplo sabemos que "um inteiro n é múltiplo de um inteiro p sse existe um inteiro q tal que n = pq" e podemos reescrever x e y como x = 2m e y = 2n, onde m e n são inteiros.
Observe que x+y = 2m+2n = 2(m+n) onde m+n é um inteiro c tal que x+y = 2c. Por conseguinte, x+y é múltiplo de 2.
Portanto, x+y é par. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Se-e-somente-se

    “Um inteiro x é par <u>se e somente se</u> x+1 é ímpar.”

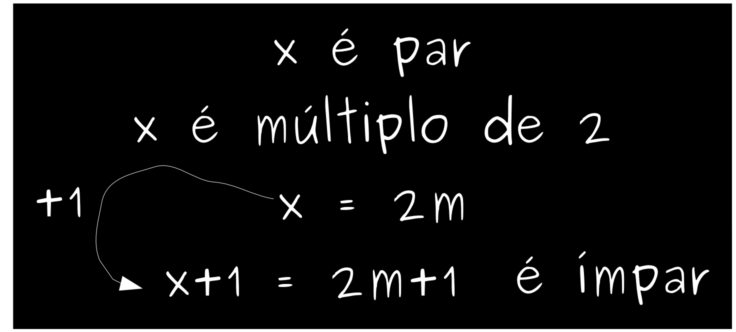
    - Provar/refutar
      - Nesta prova serão usadas as <u>definições</u> de “par”, “múltiplo” e “ímpar”

“Um inteiro é par se for múltiplo de 2”

“Um inteiro n é um múltiplo de um inteiro p se, e somente se, existe um inteiro q tal que n = pq”

“Um inteiro a é ímpar desde que haja um inteiro b de modo que a = 2b + 1”

Demonstração de Teoremas



- **Prova direta**
  - Se-e-somente-se

"Um inteiro x é par <u>se e somente se</u> x+1 é ímpar."

Prova:
Seja x um inteiro.
(⇒)
Suponhamos que x é par.
Isso significa que x é múltiplo de 2.
Logo, há um inteiro m tal que x = 2m.
Portanto, x+1 = 2m+1.
Sabemos que um inteiro a é ímpar se
há um inteiro b tal que a=2b+1.
Logo, x+1 é ímpar.
Portanto, x é par se e somente se x+1 é ímpar. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Se-e-somente-se

x+1 é ímpar

$$x+1 = 2b+1 \xrightarrow{-1} x = 2b \text{ é par}$$

"Um inteiro x é par se e somente se x+1 é ímpar."

Prova:
Seja x um inteiro.

($\Rightarrow$)
Suponhamos que x é par.
Isso significa que x é múltiplo de 2.
Logo, há um inteiro m tal que x = 2m.
Portanto, x+1 = 2m+1.
Sabemos que um inteiro a é ímpar se há um inteiro b tal que a=2b+1.
Logo, x+1 é ímpar.

($\Leftarrow$)
Suponhamos que x+1 é ímpar.
Isso significa que existe um inteiro b tal que x+1 = 2b+1.
Portanto, x = 2b, ou seja, x é múltiplo de 2.
Logo, x é par.

Portanto, x é par se e somente se x+1 é ímpar. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova direta**
  - Desigualdades

“*Se* $x > 2$, *então* $x^2 > x + 1$.”

Demonstração de Teoremas

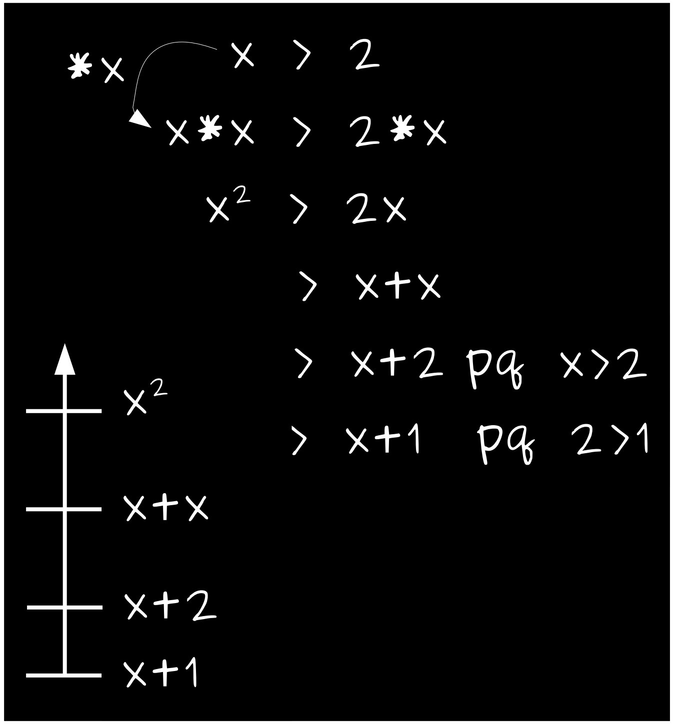
- **Prova direta**
  - Desigualdades

“<u>Se</u> $x > 2$, <u>então</u> $x^2 > x + 1$.”

Prova:
Vamos mostrar que, se $x > 2$, então $x^2 > x + 1$.
Seja x um inteiro tal que $x > 2$.
Como x é positivo, multiplicar ambos os lados por x resulta em $x^2 > 2x$.
Portanto, temos que

$$\begin{aligned} x^2 &> 2x \\ &> x + x \\ &> x + 2 && \text{porque } x > 2 \\ &> x + 1 && \text{porque } 2 > 1 \end{aligned}$$

Portanto, $x^2 > x + 1$. ■



Demonstração de Teoremas

- **Prova por contraposição**

Fonte: https://pixabay.com/

- A afirmação "Se A então B" é <u>logicamente equivalente</u> a "Se (não B) então (não A)"
- "Se (não B) então (não A)" é a <u>contrapositiva</u> de "Se A então B"

Demonstração de Teoremas

- **Prova por contraposição**
  - Para provar

“Se A então B” $p \rightarrow q$

  - é aceitável provar

“Se (não B) então (não A)” $\neg q \rightarrow \neg p$

Com base na tautologia:
$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Demonstração de Teoremas

$p \rightarrow q$

quad ímpar → inteiro ímpar

$\neg q \rightarrow \neg p$

inteiro par → quadrado par

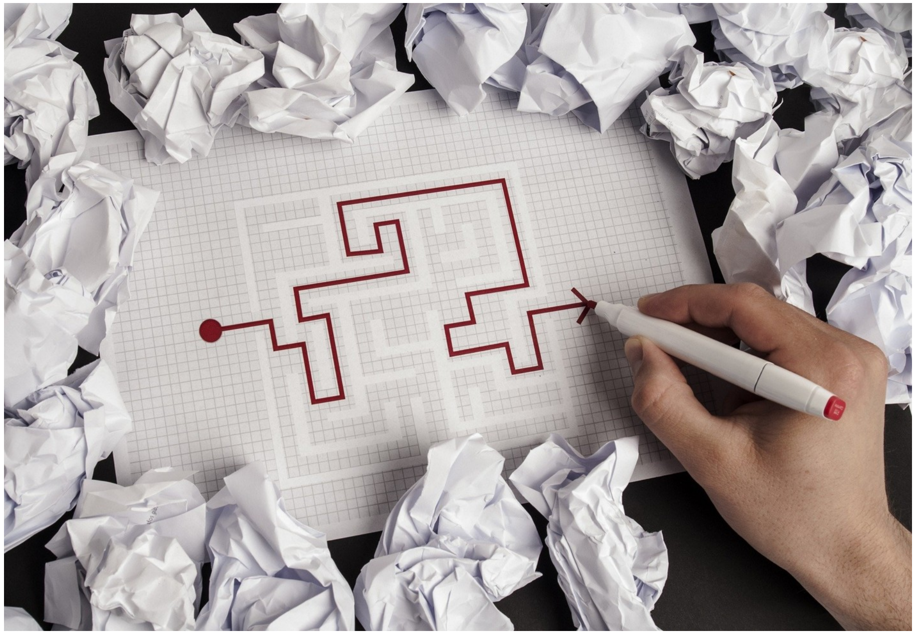
- **Prova por contraposição**

"<u>Se</u> o quadrado de um número inteiro é ímpar, <u>então</u> o inteiro é ímpar"

Prova:
Vamos mostrar por contraposição que se o quadrado de um número inteiro é ímpar, então o inteiro é ímpar.
Seja x um inteiro par.
Como x é par, pela definição de números pares temos que x é múltiplo de 2.
Pela definição de múltiplo sabemos que "Um inteiro n é um múltiplo de um inteiro p sse existe um inteiro q tal que n = pq" e podemos reescrever x como x = 2m.
Observe que $x^2 = 2m2m = 2(2mm)$ onde 2mm é um inteiro c tal que $x^2 = 2c$. Por conseguinte, x^2 é múltiplo de 2. Portanto, x^2 é par.
Logo, provamos, por contraposição, que se o quadrado de um número inteiro é ímpar, então o inteiro é ímpar. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova indireta (por absurdo)**



Fonte: https://pixabay.com/

- Para provar que “Se A então B”, mostramos que é <u>impossível</u>
  - <u>A ser verdadeiro</u>

    ao mesmo tempo em que
  - <u>B é falso</u>

Demonstração de Teoremas

- **Prova indireta (por absurdo)**
  - Para provar que "Se A então B"
    - Mostramos que é impossível "A e (não B)" ser verdade ao mesmo tempo
    - Admitimos que o impossível é verdadeiro e provamos que essa suposição conduz a uma conclusão absurda
    - → Se uma afirmação implica em algo errado, então a afirmação deve ser falsa
  - → Supomos que a <u>hipótese</u> e a <u>negação da conclusão</u> são <u>ambas verdadeiras</u>

Demonstração de Teoremas

- **Prova indireta**

"Se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par"

- Provar/refutar
  - Nesta prova serão usadas as definições de "par", "múltiplo" e "ímpar"

"Um inteiro é par se for múltiplo de 2"

"Um inteiro n é um múltiplo de um inteiro p se, e somente se, existe um inteiro q tal que n = pq"

"Um inteiro a é ímpar desde que haja um inteiro b de modo que a = 2b + 1"

Demonstração de Teoremas

x+y é impar, logo $x+y = 2b+1$
$x = 2m$ e $y = 2n$ inteiro
$x+y = 2m+2n = 2(m+n) = 2c$
$2c = 2b+1$ e $c = b+0,5$

- **Prova indireta**

"Se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par"

Prova:
Vamos demonstrar por absurdo que, se x e y são dois inteiros pares, então x+y é um inteiro par.
Sejam x e y inteiros pares.
Suponha, para demonstrar por absurdo, que x+y é um inteiro ímpar.
Se x+y é ímpar, então existe um inteiro b tal que $x+y = 2b+1$.
Como x é par e y é par, pela definição de números pares temos que x e y são múltiplos de 2 e podem ser reescritos como $x = 2m$ e $y = 2n$.
Observe que $x+y = 2m+2n = 2(m+n)$ onde m+n é um inteiro c tal que $x+y = 2c$.
Assim, $x+y = 2c = 2b+1$ e $c = b+1/2$ o que é um absurdo já que c é um inteiro.
Por conseguinte, (x par e y par) → x+y par.
Portanto, x+y é par. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova indireta**
  - Provar/refutar

"<u>Se</u> um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, <u>então</u> esse número é 0."

→ Supor que a <u>hipótese</u> e a <u>negação da conclusão</u> são <u>ambas verdadeiras</u>

Demonstração de Teoremas

- **Prova indireta**
  - Provar/refutar

"<u>Se</u> um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, <u>então</u> esse número é 0."

Prova:
Vamos demonstrar por absurdo que se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo então esse número é 0.
Seja x um número qualquer tal que $x = x+x$.
Suponha, para demonstrar por absurdo, que $x \neq 0$.
Então $x = 2x$ e $x \neq 0$.
Como $x \neq 0$ podemos dividir ambos os lados da equação por x, obtendo $1 = 2$, uma contradição (um <u>absurdo</u>).
Por conseguinte, $(x = x + x) \rightarrow (x = 0)$.
Portanto, $x = 0$. ■

Demonstração de Teoremas

- **Prova por vacuidade**

Fonte: https://pixabay.com/

- Se A é um conjunto vazio, a afirmação

$$\forall x \in A\ Q(x)$$

- é verdadeira, qualquer que seja o predicado Q
- → Essa afirmação é verdadeira por **vacuidade**

Demonstração de Teoremas

- **Prova por vacuidade**
  - Assim, teoremas como

    Todos os pares primos maiores do que dois são quadrados perfeitos.

    → São verdadeiros por vacuidade

Demonstração de Teoremas

- **Resumo**

Estratégia de Demonstração	**Abordagem para provar $p \rightarrow q$**	**Observações**
Demonstração por exaustão	Demonstre $p \rightarrow q$ para todos os casos possíveis	Pode ser usada apenas para provar um número finito de casos
Demonstração direta	Suponha p, deduza q	Abordagem padrão – o que se deve tentar em geral
Demonstração por contraposição	Suponha $\neg q$, deduza $\neg p$	Use essa estratégia se $\neg q$ parece dar mais munição do que p
Demonstração por absurdo	Suponha $p \wedge \neg q$, deduza uma contradição	Use essa estratégia quando q disser que alguma coisa não é verdade

Problema #4

- **Provar/refutar**

*Se x e y são inteiros pares, então o produto x*y também é par.*