Lógica

Lógica Proposicional
Aula 10 – Resolução

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

Se eu estou com fome (p), então eu vou ao restaurante (q).

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer (r).

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

  premissas (ou hipóteses)

  Logo, $q \leftrightarrow p$ conclusão
- $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \mid\!- \; q \leftrightarrow p$

Lógica Proposicional

- **Derivação usando regras de inferência**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \mid\!- q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

Dadas as premissas

- α_1: $p \rightarrow q$
- α_2: $q \rightarrow r$
- α_3: $\neg r \vee p$

Deduz-se

- β_1: $r \rightarrow p$ (α_3: equivalência de $\rightarrow$)
- β_2: $q \rightarrow p$ (α_2+ β_1 + regra da cadeia)
- β_3: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (α_1+ β_2 + conjunção)
- α_4: $q \leftrightarrow p$ (β_3: equivalência de $\leftrightarrow$)

Lógica Proposicional

- **Derivação usando regras de inferência**
  - **Trabalhoso!**
  - **Solução ...**
  - **Resolução**
    - Usa uma simples regra de inferência
    - Aplicação fácil, vantajosa e computacionalmente conveniente
    - Só se aplica a **cláusulas**
    - Necessário converter as fórmulas para a **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - **Teorema 1.4 – Princípio da Resolução para Lógica Proposicional**
    - Considere duas cláusulas α e β e seja p um literal tal que $p \in \alpha$ e $\neg p \in \beta$. Então:

$$\{\alpha, \beta\} \models \text{resolvente}(\alpha, \beta; p)$$

      - ou seja, o resolvente de duas cláusulas α e β é consequência lógica das duas cláusulas

    ➔ resolvente(α, β; p) = $(\alpha - p) \cup (\beta - \neg p)$

    (é a cláusula obtida pela união de α e β, removendo-se os literais complementares = literais que são um a negação do outro)

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - Exemplo
    - Dadas as cláusulas
      - C_1: $\neg p \lor q$
      - C_2: $r \lor \neg q$
    - resolvente(C_1,C_2; q) = $\neg p \lor r$

Lógica Proposicional

- **Inferência (prova) por resolução**
  - Uma cláusula α pode ser inferida por resolução de um conjunto de cláusulas Γ ($\Gamma \vdash_{RES} \alpha$) se a partir do conjunto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ obtém-se a cláusula vazia (nil)
    - O método de inferência por resolução é um método de inferência por **refutação**
    - Pode-se refutar a **conclusão** ou **todo o teorema**
    - A prova por resolução **não é única**
      - A cláusula vazia nil pode ser obtida a partir de sequências diferentes de operações

Lógica Proposicional

- **Inferência (prova) por resolução**
  - **Negação da conclusão**

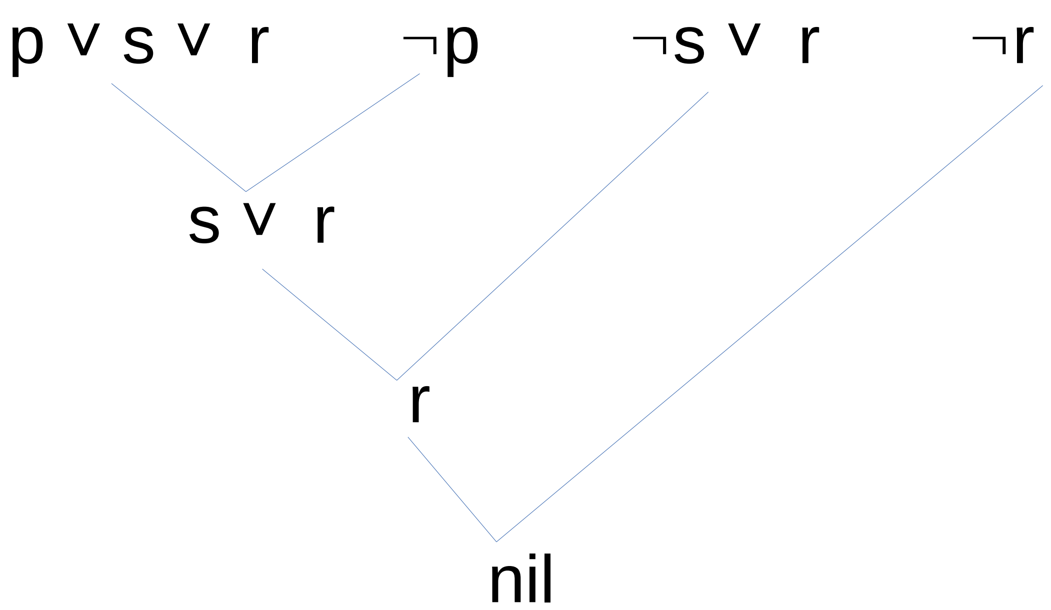
Entrada: conjunto de premissas e conclusão

1. Para cada premissa e a negação da conclusão, **encontre sua FNC**.
2. *(Neste ponto, todas as premissas e a negação da conclusão são conjunções de uma ou várias cláusulas)* **Identifique** e **isole** cada cláusula.
3. **Procure**, no conjunto de cláusulas, por duas que contenham **literais complementares**. **Aplique** a **regra da resolução** para eliminar os literais complementares das duas cláusulas gerando uma terceira, que passa a ser uma nova candidata junto às demais. *(Na prática, as duas cláusulas anteriores transformam-se em uma única, através de uma simples operação de cancelamento)*
4. **Repita** o processo descrito no **passo 3** até que se tenha duas cláusulas compostas por apenas literais complementares de tal modo que ao se aplicar a resolução, obtém-se a **cláusula vazia**, denotada (nil). Essa contradição finaliza a prova.

Fonte: Adaptado de (LEVADA, 2011, p. 139)

Lógica Proposicional

- **Inferência (prova) por resolução**
  - **Negação da conclusão**
    - Exemplo: $p \vee s \vee r, \neg s \vee r \mid\!-_{RES} p \vee r$
    - Inicialmente computamos $\neg(p \vee r) = \{\neg p, \neg r\}$



Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução
    - a) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow s \vdash r \vee s$
    - b) $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q$

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

a) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow s \vdash r \vee s$

$p \vee q$ $\quad$ $\neg p \vee r$ $\quad$ $\neg r$ $\quad$ $\neg q \vee s$ $\quad$ $\neg s$

$\neg p$

q

s

nil

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

    b) $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q$

$\neg p \vee q$ $\neg q \vee r$ $\neg r \vee p$ $p \vee q$ $\neg q \vee \neg p$

$\neg q \vee p$

$\neg p$

q

Exemplo do início da aula

$\neg q$

nil

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

a) (1) $\neg q \vee r$ premissa
(2) $r \rightarrow \neg s$ premissa
(3) $p \rightarrow q$ premissa
(4) s premissa
(5) $q \rightarrow r$ equivalência da condicional (1)
(6) $q \rightarrow \neg s$ regra da cadeia (5) e (2)
(7) $p \rightarrow \neg s$ regra da cadeia (3) e (6)
(8) $\neg p$ modus tollens (4) e (7)

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

b) Encontrando FNC de premissas e conclusão negada

FNC($\neg q \vee r$)	$\neg q \vee r$
FNC($r \rightarrow \neg s$)	$r \rightarrow \neg s \equiv \neg r \vee \neg s$
FNC($p \rightarrow q$)	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
FNC(s)	s
conclusão negada:	$\neg\neg p$
FNC($\neg\neg p$)	p

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

b) Prova por resolução:

(1) $\neg q \vee r$	cláusula da primeira premissa
(2) $\neg r \vee \neg s$	cláusula da segunda premissa
(3) $\neg p \vee q$	cláusula da terceira premissa
(4) s	cláusula da quarta premissa
(5) p	cláusula da negação da conclusão
(6) $\neg p \vee r$	resolvente da resolução de 1 e 3
(7) $\neg p \vee \neg s$	resolvente da resolução de 2 e 6
(8) $\neg p$	resolvente da resolução de 4 e 7
(9) nil	resolvente da resolução de 5 e 8