24/08 - Aula 6 - Limites: Uma introdução intuitiva

Exemplo: Verifique primeiramente que o ponto P pertence à curva dada e ache a equação da reta tangente à curva no ponto P.

$2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0, \quad P = (2, -3)$

Sol Seja $x=2$ e $y=-3$ então, $2.2^3 - 2^2.(-3) + (-3)^3 - 1 =$

$= \underbrace{16+12}_{28} - \underbrace{27-1}_{-28} = 0 \Rightarrow P \in C \iff \boxed{y(2) = -3}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0\}$

Queremos obter a equação $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

para $x_0 = 2$ e $y_0 = -3$. Ou seja, $\boxed{y-(-3) = y'(2)(x-2)}$

$$\frac{d}{dx}[2x^3 - x^2y + y^3 - 1] = \frac{d}{dx}[0] = 0$$

$$6x^2 - \frac{d}{dx}[x^2.y(x)] + \frac{d}{dx}[y(x)^3] = 0 \iff$$

Regra da cadeia

$$6x^2 - [\underbrace{2x\,y(x) + x^2.y'(x)}] + 3y(x).y'(x) = 0 \iff$$

Regra do produto

$$6x^2 - 2x\,y(x) - x^2y'(x) + 3y(x)^2y'(x) = 0$$

Tomando $x=2$ na eq. acima obtemos

$$6.2^2 - 2.2.\underbrace{y(2)}_{-3} - 2^2y'(2) + 3y(2)^2.y'(2) = 0 \iff$$

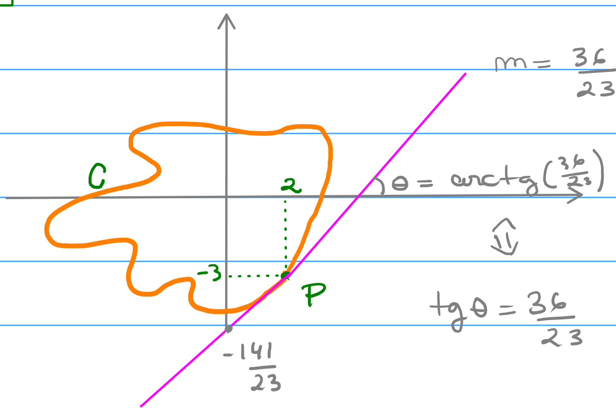
$$24 + 12 - 4y'(2) + 27y'(2) = 0 \iff$$

$$\boxed{y'(2) = \frac{36}{23}}$$

Logo, $\boxed{y + 3 = \frac{36}{23}(x-2)}$

$y = -3 + \frac{36}{23}x - \frac{72}{23}$

$y = \frac{36}{23}x - \underbrace{\frac{141}{23}}_{\text{coef. linear}}$



Regra 3.3- Sendo p e q números inteiros, com q>0, então

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

Seja $\boxed{y = x^{\frac{p}{q}}} \Rightarrow y^q = (x^{\frac{p}{\cancel{q}}})^{\cancel{q}} \Leftrightarrow \boxed{y^q = x^p}$ (1)

Queremos obter $y'(x) = \frac{d}{dx}(x^{p/q})$

Derivando os membros da eq (1) obtemos

$$\frac{d}{dx}[y(x)^q] = \frac{d}{dx}[x^p] \Leftrightarrow$$

Aplicando a Regra da cadeia no 1º membro obtemos

$$q \cdot y(x)^{q-1} \cdot y'(x) = p x^{p-1}$$

Fato Importante: $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

Como $q \cdot y^{q-1} y' = p x^{p-1} \Rightarrow y' = \dfrac{p x^{p-1}}{q y^{q-1}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{p x^{p-1}}{q \cdot [x^{\frac{p}{q}}]^{q-1}} = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot x^{p-1} \cdot x^{-\frac{p}{q}(q-1)} = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot x^{p-1-\frac{p}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q} + \frac{p}{q}} \Rightarrow$$

$$y' = \left(\frac{p}{q}\right) x^{\cancel{p}-1-\cancel{p}+\frac{p}{q}}$$

$$y' = \left(\frac{p}{q}\right) x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\boxed{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot x^{\frac{p}{q}-1}}$$

Ex. Calcule a derivada da seguinte função: $F(v) = \dfrac{5}{\sqrt[5]{v^5 - 32}}$

$$F(v) = \frac{5}{(v^5 - 32)^{\frac{1}{5}}} = 5 \cdot (v^5 - 32)^{-\frac{1}{5}}$$

Note que

$$F(v) = 5 \cdot u^{-\frac{1}{5}} \quad \text{sendo} \quad u = v^5 - 32$$

Regra da Cadeia $\Rightarrow$ $F'(v) = \dfrac{dF}{dv} = \dfrac{dF}{du} \cdot \dfrac{du}{dv}$

$$\frac{dF}{du} = \frac{d}{du}\left[5u^{-\frac{1}{5}}\right] = \cancel{5} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{5}}\right) \cdot u^{-\frac{1}{5}-1} = \boxed{-u^{-\frac{6}{5}}}$$

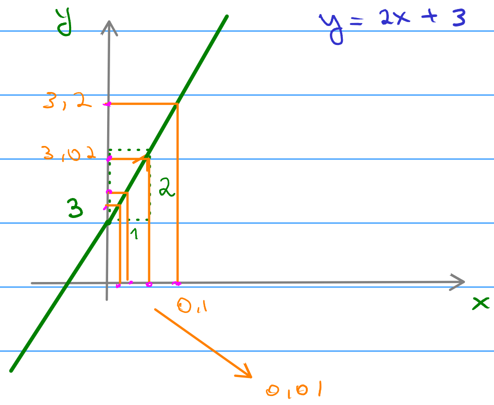
$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}\left[v^5 - 32\right] = \boxed{5v^4}$$

Logo, $F'(v) = -u^{-\frac{6}{5}} \cdot 5v^4 = -(v^5 - 32)^{-\frac{6}{5}} \cdot 5v^4$

$$\boxed{F'(v) = -\frac{5v^4}{\sqrt[5]{(v^5-32)^6}}}$$

Noção Intuitiva de Limite

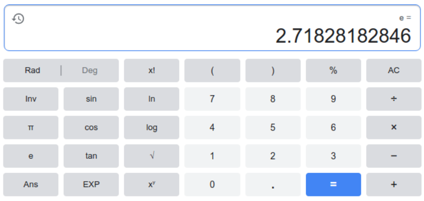
x	f(x)=2x+3
0,1	3,2
0,01	3,02
0,001	3,002
0,0001	3,0002
1E-05	3,00002
$\boxed{0}$	$\boxed{3}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x+3) = 3$$

x	f(x)=(x+1/x)^x
1	2
2	2,25
3	2,3703703704
4	2,44140625
5	2,48832
6	2,5216263717
7	2,546499697
8	2,565784514
9	2,5811747917
10	2,5937424601
100	2,7048138294
1000	2,7169239322
10000	2,7181459268
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	e

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$



$\approx$

e = Euler-Mascheroni

e

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^x = e \approx 2.71828182846$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{x^3-8}{x-2} = 12$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$

Se $F(x) = \frac{x^3-8}{x-2} \Rightarrow F(2) = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$\Rightarrow \boxed{F(2) = \nexists}$

Se $x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{x^3-2^3}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+2^2)}{\cancel{(x-2)}} = x^2+2x+4$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 2^2+2.2+4 = 12.$$

1. $\lim\limits_{x \to a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$

3. *Sendo* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $(n \in \mathbb{N},\ a_n, \ldots, a_0$ *todos reais*),

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 1)} = \dfrac{8 - 3}{4 + 1} = 1$

5. Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \quad \text{desde que } q(x_0) \neq 0$$

6. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções quaisquer então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad \text{desde que } g(a) \neq 0$$

Definição 4.1 (Continuidade de $f(x)$ em x_0). *Nos exemplos anteriores, de limites com* x *tendendo a* x_0, *tivemos sempre* x_0 *no domínio de* f *e* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Quando isto ocorre, dizemos que* f *é* contínua no ponto x_0.

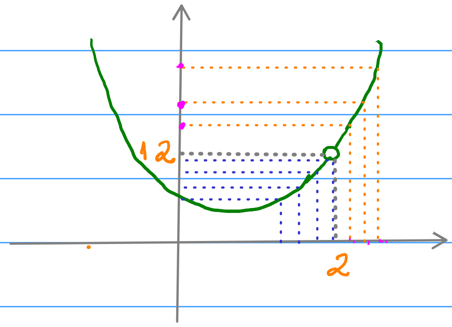
$F(x) = \dfrac{x^3 - 2^3}{x - 2}$

Obs. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2^3}{x - 2}$ Note que F(x) não é contínua em x=2, pois F(x) não está definida para x=2. Ou seja, $2 \notin D(F)$. domínio de F.

$$\lim_{x \to 2} F(x) = 12 \neq F(2)$$

$+\infty$

$$x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = (1)x^2 + 2x + 4$$



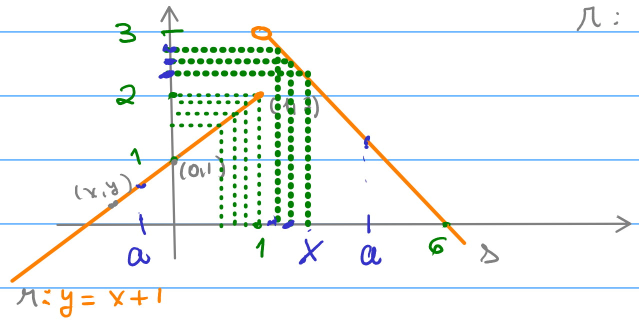
$$y = x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 < 0$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<0}} f(x)$$

Limite à direita do ponto x=a   Limite à esqueda do ponto x=a

Ex



$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 0 + y - 1 - 2x + 0 = 0$$

$$\boxed{r: \; y - x = 1}$$

$(0,1)$ e $(1,2) \in r$

$(1,3)$ e $(6,0) \in s$

$$s: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x + 6y - 18 - y = 0$$

$$5y = -3x + 18$$

$$\boxed{s: \; y = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1} \Big(\overbrace{-\frac{3}{5}x + \frac{18}{5}}^{\text{polinômio}} \Big) = -\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{18}{5} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \neq 2 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ dizemos que

$\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$. Logo, $f(x)$ não é contínua em $x=1$.

Para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é contínua. Então

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a\neq 1}} f(x) = f(a)$$