17/09 - Aula 14 - Derivando funções exponenciais e logarítmicas

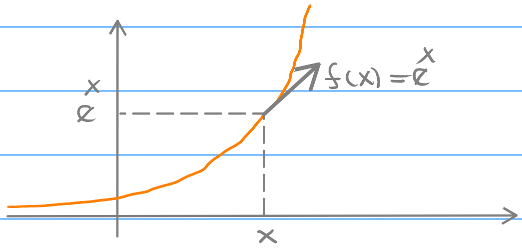
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad , \quad e \approx 2{,}71 \quad , \quad e \notin \mathbb{Q} \ , \ (\text{irracional transcendente})$$

$$\text{Se } \underset{\sim}{x = 10^{10}} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10^{10}}\right)^{10^{10}} \approx 2{,}71 \approx e$$

Teorema 10.1.

1. *Se* $f(x) = e^x$, *então* $f'(x) = e^x$. *Ou seja, a derivada da função exponencial de base e coincide com a própria função.*
2. *Se* $f(x) = a^x \quad (a > 0)$, *então* $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

(1) Seja $f(x) = e^x$, $e > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente



$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

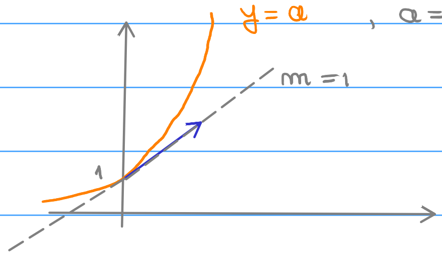
$$= \lim_{h\to 0} e^x \cdot \left[\frac{e^h - 1}{h}\right] = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h-1}{h}\right]}_{1} = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$\Rightarrow (e^x)' = e^x \quad ; \quad (ce^x)' = c(e^x)' = ce^x \Rightarrow \text{Se } f(x) = ce^x \Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x)}$$

Proposição 10.1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$y = a^x$, $a = ?$, $a > 1$, $a = e$



$f(x) = e^x$

Se $f(x) = e^x$

$$\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{e^h + 1}{h}}_{\text{quociente de Newton}} = f'(0) = m = 1$$

Seja $\dfrac{\overbrace{e^h - 1}^{z}}{h}$ e defina $z = e^h - 1 \Rightarrow e^h = 1 + z \Rightarrow h = \log_e (1+z)$

$\Rightarrow h = \log_e (1+z) = \ln (1+z)$. Então,

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{z}{\ln(1+z)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{z} \cdot \ln(1+z)} =$$

$$= \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}, \qquad \boxed{\beta \log_a x = \log_a x^\beta}$$

Então,

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} \stackrel{*}{=}$$

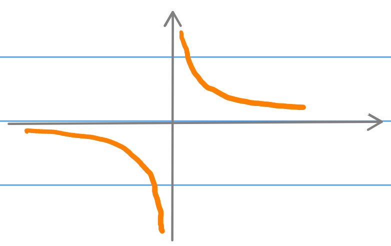
Mas, $z = e^h - 1 \to 0$ qdo $h \to 0$

$$\stackrel{*}{=} \frac{1}{\ln\left[\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}\right]} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{\underbrace{\log_e e}_{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$e^1 = e$

Fato: $\boxed{\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e}$

Seja $z = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\square$

(2) Se $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

Exemplo: Se $f(x) = \pi^x \Rightarrow f'(x) = \pi^x \cdot \ln \pi$

Note que para todo $y \in \mathbb{R}$ $\quad e^{\ln y} = y$

Seja $y = a^x \Rightarrow e^{\ln a^x} = a^x \Rightarrow$

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' =$$

Regra da Cadeia

Seja $u = (\ln a)\, x$

$$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) \underset{RC}{=} \underbrace{\frac{d}{du}\left(e^u\right)}_{e^u} \cdot \frac{d}{dx}(u) \underset{(1)}{=} e^u \cdot \frac{d}{dx}\left((\ln a) \cdot x\right) =$$

$$= e^u \cdot \ln a = e^{x(\ln a)} \cdot \ln a = \underbrace{e^{\ln a^x}}_{a^x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Portanto, $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a}$

$a > 0$, $a \neq 1$

Teorema 10.2. *Sendo* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

1. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
2. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
4. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

(1) $\quad (\ln x)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \ldots = \dfrac{1}{x}$ (p/ casa)

Se $y = \ln x \Rightarrow x = e^{y(x)} \Rightarrow$

Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}[x] = \frac{d}{dx}\left[e^{y(x)}\right] \Rightarrow$$

$$1 = e^{y(x)} \cdot \underbrace{y'(x)}_{?} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{e^{y(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Portanto, $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$

Proposição 10.2. *Sendo α uma constante real, racional ou irracional, e $x > 0$,*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\Downarrow$

DEM

$$\boxed{y = x^\alpha} \Rightarrow \log_x y = \log_x x^\alpha \Rightarrow \log_x y = \alpha \cdot \underbrace{\log_x x}_{=1} = \alpha$$

Então $\log_x y(x) = \alpha$ (1)

Mudança de base no logaritmo

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \qquad \log_x y = \frac{\log_e y}{\log_e x} = \frac{\ln y}{\ln x}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\ln y = \alpha \cdot \ln x}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[\alpha \ln x] \iff$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{\alpha y}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Logo, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ $\square$

Ex $f(x) = x^\pi \Rightarrow f'(x) = \pi x^{\pi-1}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad e \quad (a+b)^\pi = e^{\pi \ln(a+b)}$$

obs $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \stackrel{*}{=}$

$$(x+h)^2 = \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} x^j . h^{2-j} = 1x^0 h^2 + 2x^1 . h^1 + 1 x^2 h^0 = h^2 + 2xh + x^2$$

$n=0$ 1
$n=1$ 1 1
$n=2$ 1 2 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$$= \lim_{h\to0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to0} (2x+h) = 2x$$

$$\Rightarrow (x^2)' = 2x = 2x^{2-1}$$

Observação 10.1 (Derivação em cadeia envolvendo funções exponenciais e logarítmicas). *Combinando a regra de derivação 3.1 (regra da cadeia) com os resultados estabelecidos nos teoremas 10.1, 10.2 e na proposição 10.2, podemos imediatamente estabelecer que se $u = u(x)$ é uma função derivável, e $a > 0$, $a \neq 1$, e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

1. $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
2. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$
3. $(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, *quando* $u(x) > 0$ $*$
4. $(\ln|u(x)|)' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, *quando* $u(x) \neq 0$
5. $((u(x))^{\alpha})' = \alpha \cdot (u(x))^{\alpha-1} \cdot u'(x)$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u} \cdot u' \Rightarrow \left(e^{x^4+2x-1}\right)' = e^{x^4+2x-1} \cdot (x^4+2x-1)' = e^{x^4+2x-1} \cdot (4x^3+2)$$

$$(\ln u(x))' = \frac{d}{dx}[\ln u] = (\ln u)' \cdot u'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\boxed{(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

$$(\ln\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{1}} = \frac{1}{2x} \quad ///$$

$$(\ln\sqrt{x})' = \left(\ln x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{1}{2}(\ln x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$f(x) = x^x$$

Seja $y = f(x) \Rightarrow \boxed{y = x^x}$ (2) $\qquad x > 0$

Aplicando o ln em ambos lados de (2) obtemos

$$\ln y = \ln x^x \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\ln y = x \cdot \ln x} \quad (3)$$

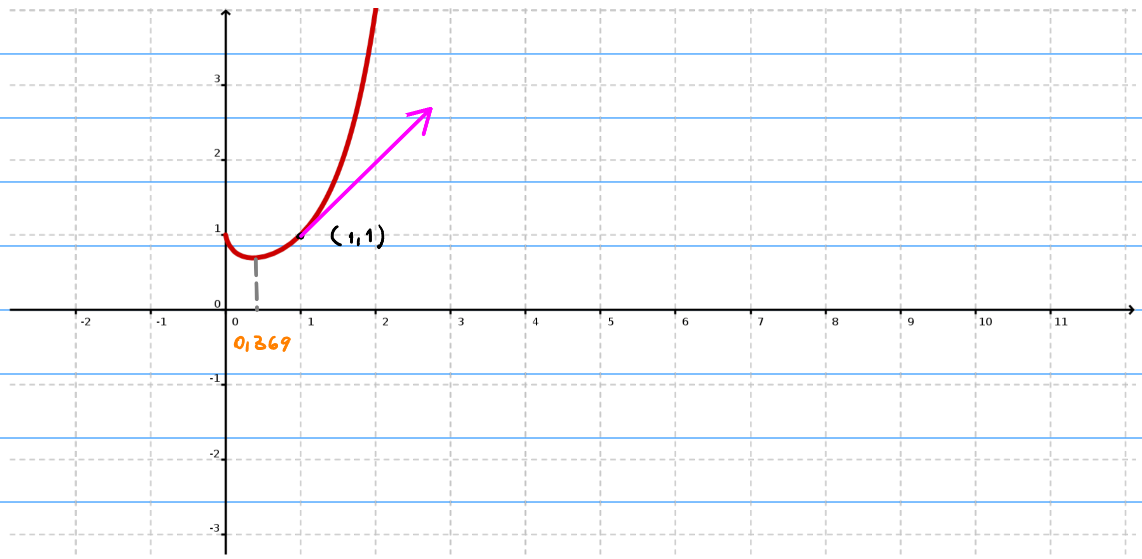
Derivando (3) em x obtemos

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[x \cdot \ln x] \Leftrightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln x + 1)y \Leftrightarrow (x^x)' = (\ln x + 1) \cdot x^x \Rightarrow$$

Logo, $(x^x)' = x^x \cdot (1 + \ln x)$



$$(x^x)' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^x}_{\neq 0} \cdot (1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\log_e x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx \frac{1}{2{,}71} \approx 0{,}369$$

$$(x^x)'\Big|_{x=1} = x^x(\ln x + 1)\Big|_{x=1} = 1^1 (\underbrace{\ln 1}_{0} + 1) = 1$$

Proposição: Seja $y = u(x)^{v(x)}$ tal que $u(x) > 0$, $\forall x \in D(u)$

Então

$$\boxed{\left[u(x)^{v(x)}\right]' = u(x)^{v(x)} \ln u(x) + v(x)\, u(x)^{v(x)-1}}$$

$(a^x)' = a^x \ln x$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$y = u^v \Rightarrow \underbrace{\ln y}_{\text{RC}} = \underbrace{v \cdot \ln u}_{\text{derivada do produto}}$

Exercício: Considere a equação $\boxed{y'' + 3y' + 2y = 0}$ mostre que $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}}$ é solução da equação se, e somente se,

$$\boxed{\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0}$$ equação característica

Seja $y(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow y'(x) = e^{\alpha x} \cdot \alpha = \alpha e^{\alpha x} \Rightarrow y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$

Supondo que $y(x)$ seja solução então

$$(e^{\alpha x})'' + 3(e^{\alpha x})' + 2(e^{\alpha x}) = 0 \iff$$
$$\alpha^2 e^{\alpha x} + 3\alpha e^{\alpha x} + 2e^{\alpha x} = 0 \iff$$
$$\underbrace{e^{\alpha x}}_{\neq 0} \cdot (\alpha^2 + 3\alpha + 2) = 0 \iff \boxed{\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0}$$

$\Delta = 3^2 - 4.1.2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -1}$ ou $\boxed{\alpha_2 = -2}$

$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} = e^{-x}$

$y_2(x) = e^{\alpha_2 x} = e^{-2x}$ Soluções são $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$

Obs. $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u$

$$(e^{f(x)})' = \frac{d}{dx}(e^{\overbrace{f(x)}^{u}}) = \frac{d}{dx}(e^u) = \frac{d}{du}[e^u] \cdot \frac{d}{dx}[u] = e^u \cdot u' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$(e^{\overbrace{\alpha x}^{f}})' = e^f \cdot f' = e^{\alpha x} \cdot \alpha$$

$f(x) = \alpha x \Rightarrow f'(x) = \alpha$

Exercício: Esboce o gráfico da função $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$