3ª Lista de Exercícios

1. Considere o alfabeto definido por:

   Constantes: a, b, c
   Variáveis: X, Y, Z
   Símbolos funcionais: f/3, g/2, h/1
   Simbolos predicados: p/3, q/2
   Quantificadores: $\forall$, $\exists$
   Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   Simbolos de pontuação: ( ) ,

   Verifique quais da expressões lógicas a seguir são fórmulas bem-formadas. Justifique sua resposta com base na definição de fórmula bem-formada (fbf ou wff) vista em aula:

   Uma fórmula bem-formada é:

   1. Um símbolo de verdade (V e F);
   2. Se p é um símbolo de predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos então $p(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica;
   3. Se α é uma fórmula, então $\neg\alpha$ é uma fórmula;
   4. Se α e β são fómulas, então também são fórmulas: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$
   5. Se α for uma fórmula e X for uma variável livre em α, então $\forall X\alpha$ e $\exists X\alpha$ são fómulas

   (a) $\exists X(\forall X p(X, a, b))$

   (b) $\forall Y(\forall X p(X, Y, b))$

   (c) $\forall Y(\exists X p(X, a, b))$

   (d) $\forall X(\exists Y p(X, a, Y) \rightarrow q(f(X), g(Y)))$

   (e) $(p(X, g(a, b), Y) \vee q(h(h(Z)), d) \wedge \neg q(c, d)$

   (f) $p(q(X, a), b, Y) \rightarrow q(c, d)$

   (g) $\forall X(\exists Z(\forall Y(p(a, b, X) \rightarrow q(g(X, Z), f(a, b, Y))))))$

   (h) $\neg h(p(a, b, c)) \vee f(d, d)$

   (i) $(\exists Y((\exists Z(p(Z, Z, Z) \vee \neg q(Y, Y))) \vee (\forall X q(X, X))))$

   (j) $\forall X(\exists Y(p(X, Y, f(a, b, Y)) \rightarrow (\exists Z p(Z, Z, d))))$

   (k) $\forall X(\exists Y(p(f(a, b, c), Y, X))) \rightarrow (\exists Y(\forall X q(h(Y), g(X, Y))))$

(l) $\forall X(f(X,b,c) \leftrightarrow q(h(X)))$

(m) $(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee c)$

(n) $\forall X(q(X,Y) \vee \neg p(f(a,b,X), g(Z,Z,X), h(a)))$

2. Identifique as variáveis livres e ligadas nas fórmulas a seguir, e quais fórmulas são fechadas.

(a) $\forall X(p(X,Y) \rightarrow (\exists Z(q(a,Z,M) \leftrightarrow r(Z,T,X))))$

(b) $\forall X(\forall Y(\neg p(a) \vee q(X,Y))) \wedge \forall X p(X) \wedge \forall Y(q(a,Y) \vee \neg p(Y))$

(c) $\exists Z(p(Z,a) \leftrightarrow q(Z,Z)) \rightarrow \forall Y(\exists X(p(a,X) \vee \neg r(X,Y) \vee \neg q(Y,b)))$

(d) $\forall X(\forall Y(\exists Z(r(X,Y) \wedge \neg r(a,Y))) \rightarrow \forall Z s(Z,b,Z))$

(e) $\forall X \forall Y(p(X,Y,Z) \wedge \neg r(y,X) \vee \neg q(X)) \leftrightarrow \forall Z q(Z)$

3. Construa o fechamento universal e o existencial das fórmulas:

(a) $\forall X p(X,Y)$

(b) $\forall X p(X,Y) \wedge \exists Y q(Y)$

(c) $(\forall X(\exists Y(q(X,Y) \vee p(Z))))$

(d) $(\forall X(\forall Z(p(X,Y,Z,T) \leftrightarrow q(Z,M))))$

(e) $\exists X(\forall Y(p(a,b,Y) \vee \neg q(X,b)))$

4. Mapeie as senteças a seguir, que estão em língua natural, para a Lógica de Predicados.

(a) Ganso e Neymar são jogadores.

(b) Neymar é jogador e é pai de Davi Lucca.

(c) Se Ganso é jogador então ele não é humorista.

(d) Qualquer um é humorista.

(e) Existe alguém que não é jogador e nem humorista.

(f) Se ninguém é jogador então não existem jogadores.

(g) Ana é estudiosa.

Cont.

(h) Pedro é advogado e Guilherme é estudante.

(i) Maria vai à festa ou ao teatro.

(j) Gabriel não é programador.

(k) Pedro e Guilherme são primos.

(l) Maria e Ana não são primas, elas são vizinhas.

(m) Se a função f for diferenciável, ela é contínua.

(n) A função f é contínua, mas não é diferenciável.

(o) Antônio faltou à aula, mas Ana não faltou.

(p) Se Pedro é mais alto que Ana, e Ana é mais alta que André, então Pedro é mais alto que André.

(q) Maria lê jornal.

(r) A mãe de Maria gosta de Maria.

(s) A mãe da mãe de Maria gosta da mãe de Maria e gosta de Maria.

(t) Todos os homens são mortais.

(u) Alguns homens são mortais.

(v) Nenhum homem é mortal.

(w) Alguns cachorros latem, outros não.

(x) Existem pessoas bondosas, no entanto nem todas as pessoas são bondosas.

(y) Se Pedro não é estudioso, nenhum dos rapazes é estudioso.

(z) Se Guilherme acordar tarde, então Gabriel irá ao mercado e alguém vai gastar dinheiro.

(aa) Se o abacate e o caqui engordam, então há alimentos que engordam.

(ab) Alguns alunos estudam, e nem todos os alunos estudam.

(ac) Todo aluno é mais novo que alguns professores.

(ad) Nem todas as aves podem voar.

Cont.

(ae) Toda criança é mais nova que a mãe da criança.

(af) Nenhum número natural é negativo.

(ag) Alguns números primos são pares.

(ah) Todos os números pares são maiores do que 1.

(ai) Números pares são primos apenas se forem menores do que 3.

(aj) Não existe número primo menor do que 3.

5. Considere uma linguagem de primeira ordem (linguagem da lógica de predicados) λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

   Constantes: {a, b, c, d}
   Variáveis: {X, Y, Z, W}
   Símbolos funcionais: {f/1, g/1, h/1}
   Símbolos predicados: {p/1, q/2, s/1}

   Seja I a seguinte interpretação:

   Domínio: {1,2}

   Atribuição a constantes:

a	b	c	d
1	2	1	2

   Atribuição a variáveis:

X	Y	Z	W
2	1	1	2

   Atribuição a símbolos funcionais:

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)
2	1	2	1

   Atribuição a símbolos predicados:

p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)	s(1)	s(2)
V	F	F	V	V	F	F	V

   Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I, ou seja, diga qual é o valor-verdade de cada fórmula na interpretação I.

   (a) $\forall X \forall Y (p(X) \vee q(Y, c) \vee \neg q(X, a) \vee s(f(W)))$

   (b) $\exists X \forall Z (p(X) \rightarrow q(Z, c))$

(c) $\forall W \exists Y \exists Z (p(Y) \lor q(W,W) \lor \neg s(Z))$

(d) $\forall X \exists Y (q(X,Y) \lor s(X)) \lor \forall W q(a,W)$

(e) $\exists X \exists Y ((p(X) \lor s(Y)) \rightarrow q(X,X)) \leftrightarrow \forall X q(X,W)$

(f) $\exists W p(g(W)) \lor \forall X \exists Y q(f(X),Y) \lor s(g(Z))$

(g) $\exists X (p(X) \leftrightarrow q(X,d)) \rightarrow \forall X \exists W q(g(X), f(W))$

6. Considere uma linguagem de primeira ordem (linguagem da lógica de predicados) λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

   Variáveis: {X, Y, Z}
   Simbolos predicados: {p/2}

   Seja I a seguinte interpretação:

   Domínio: {a,b,c}

   Atribuição:

X	Y	Z	p(a,a)	p(a,b)	p(a,c)	p(b,a)	p(b,b)	p(b,c)	p(c,a)	p(c,b)	p(c,c)
a	a	b	V	F	V	F	V	V	F	V	V

   Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I.

   (a) $\forall X \exists Y p(X,Y)$

   (b) $p(Y,Z)$

   (c) $\forall Y p(Y,Y)$

   (d) $\exists X \exists Y p(X,Y)$

   (e) $\forall Y p(Y,Y) \land \exists X \forall Y p(X,Y)$

7. Suponha que sejam válidas as seguintes assertivas:

   α_1 : Rex é um terrier.
   α_2 : Se Rex é um terrier, então ele late e morde.
   α_3 : Todos os terrier são cachorros.
   α_4 : Todo cachorro que late é barulhento.

   Usando inferência com base em regras, prove que a seguinte conclusão segue logicamente das assertivas:

   Existe cachorro barulhento.

8. Usando inferência com base em regras, prove a validade dos argumentos a seguir. Vários desses argumentos encontram-se descritos em Hegenberg (1976).

   (a) Todos os poetas são sensíveis. Há poetas. Logo, há (pessoas) sensíveis.
   OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

   (b) Alguns felinos são tigres. Todos os tigres são belos. Logo, alguns felinos são belos.
   OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

   (c) Nenhuma baleia é peixe. Moby Dick é baleia. Logo, Moby Dick não é peixe.
   OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

   (d) Nenhum jogador é pobre. Alguns pobres são felizes. Logo, alguns não jogadores são felizes.
   OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

   (e) Há uma pessoa em quem ninguém acredita. Logo, há uma pessoa que não acredita em si mesma.
   OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

   (f) Somente os répteis são cobras. Algumas cobras são perigosas. Assim, nem todo réptil deixa de ser perigoso.
   OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

   (g) Ou alguns carros são velozes ou não há carro que não seja bom. Ora, não é verdade que todos os carros são bons. Logo, alguns carros são velozes.
   OBS.: Considere o universo como o domínio, ou seja, todas as propriedades devem virar predicados.

   (h) Todos os franceses são amáveis. Só os generosos são amáveis. Para ser generoso é preciso ser honesto. Há empresários desonestos. Logo, nem todo empresário é francês.
   OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

9. Determine, em cada caso, o resultado da aplicação da substituição à fórmula:

	Fórmula	Substituição
a)	gosta(X, pai(Y)	$\theta = \{$mãe(Y)/X, maria/Y$\}$
b)	gosta(X, pai(Y))	$\theta = \{$mãe(maria)/X, maria/Y$\}$
c)	arvore(t(X, t(Y,Y)))	$\theta = \{$t(U,U)/X,U/Y$\}$
d)	p(X,Y,a)	$\theta = \{$Z/X, M/Y, K/T, a/N$\}$

   (a) gosta(X,pai(Y))

   (b) gosta(X, pai(Y))

   (c) arvore(t(X, t(Y,Y)))

   (d) p(X,Y,a)

Cont.

10. Verifique se cada um dos conjuntos de expressões a seguir é unificável. Para aqueles unificáveis, escreva se a substituição é a unificadora mais geral.

    (a) {p(X,g(Y),a),p(Z,M,N),p(c,K,T),p(X1,X2,X3)}

    (b) {q(a,b),q(M,Z),q(T,A),q(a,N)}

    (c) {q(g(M),K,L),q(a,b,c),q(N,b,Z)}

    (d) {p(f(f(g(a))),c,g(b)),p(X,Y,Z)}

    (e) {r(a,b,f(Z)),r(X,Y,Z),r(b,b,M)}

    (f) {s(Z1,Z2,f(f(Z4))),s(g(a),M,N,T),r(g(Z),c,d,K)}

11. Converta para a Forma Normal Conjuntiva (FNC) as seguintes fórmulas:
    (a) $\forall X \forall Y (p(X) \vee q(Y, c) \vee \neg q(X, a) \vee s(f(W)))$
    (b) $\exists X \forall Z (p(X) \rightarrow q(Z, c))$
    (c) $\forall W \exists Y \exists Z (p(Y) \vee q(W, W) \vee \neg s(Z))$
    (d) $\forall X \exists Y (q(X, Y) \vee s(X)) \vee \forall W q(a, W)$
    (e) $\exists X \exists Y ((p(X) \vee s(Y)) \rightarrow q(X, X)) \leftrightarrow \forall X q(X, W)$
    (f) $\exists W p(g(W)) \vee \forall X \exists Y q(f(X), Y) \vee s(g(Z))$
    (g) $\exists X (p(X) \leftrightarrow q(X, d)) \rightarrow \forall X \exists W q(g(X), f(W))$

12. Usando inferência por resolução prove que a conclusão do exercício 7 decorre das premissas dadas.

13. Usando inferência por resolução prove a validade dos argumentos do exercício 8.

    (a) Todos os poetas são sensíveis. Há poetas. Logo, há (pessoas) sensíveis.
    OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

    (b) Alguns felinos são tigres. Todos os tigres são belos. Logo, alguns felinos são belos.
    OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

    (c) Nenhuma baleia é peixe. Moby Dick é baleia. Logo, Moby Dick não é peixe.
    OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

    (d) Nenhum jogador é pobre. Alguns pobres são felizes. Logo, alguns não jogadores são felizes.
    OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

    (e) Há uma pessoa em quem ninguém acredita. Logo, há uma pessoa que não acredita em si mesma.
    OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

    (f) Somente os répteis são cobras. Algumas cobras são perigosas. Assim, nem todo réptil deixa de ser perigoso.
    OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

Cont.

(g) Ou alguns carros são velozes ou não há carro que não seja bom. Ora, não é verdade que todos os carros são bons. Logo, alguns carros são velozes.
OBS.: Considere o universo como o domínio, ou seja, todas as propriedades devem virar predicados.

(h) Todos os franceses são amáveis. Só os generosos são amáveis. Para ser generoso é preciso ser honesto. Há empresários desonestos. Logo, nem todo empresário é francês.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.