UNIDADE V

Aula 25 - Fórmula de Taylor para funções de várias variáveis

Prof. Alex Carlucci Rezende

Cálculo Diferencial e Séries

Período ENPE - Bloco C - 2020/1

Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

Introdução

Quando estudamos séries de potências, vimos que uma função

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

pode ter uma expansão em série de Taylor, centrada em x_0, dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

em que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Introdução

O truncamento de ordem n na série de Taylor,

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

é chamado de polinômio de Taylor de grau n.

Observação: Dado que o resto R_n da série de Taylor é infinitesimal, o polinômio $T_n(x)$ é uma boa aproximação para a função $f(x)$.

Aproximações de Taylor

Seja

$$
\begin{aligned}
f : & A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
& (x, y) \mapsto f(x, y),
\end{aligned}
$$

uma função de duas variáveis definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$.

Se a função f é diferenciável em (x_0, y_0), já vimos que uma aproximação linear para f ao redor do ponto (x_0, y_0) é dada por

$$
f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),
$$

que geometricamente representa o plano tangente à superfície $f(x, y) = 0$ no ponto (x_0, y_0).

Usaremos as derivadas segundas para construir aproximações de Taylor quadráticas.

Aproximações de Taylor quadráticas

Obtemos uma melhor aproximação para $f(x,y)$ usando um polinômio quadrático.

Polinômio de Taylor de grau 2 aproximando $f(x,y)$ ao redor de (x_0,y_0)

Se f possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (x_0,y_0), então

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx Q(x,y) = & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}(x-x_0)^2 \\ & + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ & + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}(y-y_0)^2. \end{aligned}$$

Exemplo

Considere $f(x, y) = \cos(2x + y) + 3\,\mathrm{sen}(x + y)$.

(a) Calcule os polinômios de Taylor linear L e quadrático Q que aproximam f próximo de $(0, 0)$.

(b) Explique porque as curvas de nível de L e de Q para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$ têm essa aparência.

Resolução:

(a) Temos $f(0, 0) = \cos 0 + \mathrm{sen}\, 0 = 1$. As derivadas que precisamos são:

$$f_x(x, y) = -2\,\mathrm{sen}(2x + y) + 3\cos(x + y) \;\Rightarrow\; f_x(0, 0) = 3,$$

$$f_y(x, y) = -\,\mathrm{sen}(2x + y) + 3\cos(x + y) \;\Rightarrow\; f_y(0, 0) = 3,$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= -4\cos(2x+y) - 3\,\mathrm{sen}(x+y) \;\Rightarrow\; f_{xx}(0,0) = -4,\\
f_{xy}(x,y) &= -2\cos(2x+y) - 3\,\mathrm{sen}(x+y) \;\Rightarrow\; f_{xy}(0,0) = -2,\\
f_{yy}(x,y) &= -\cos(2x+y) - 3\,\mathrm{sen}(x+y) \;\Rightarrow\; f_{yy}(0,0) = -1.
\end{aligned}
$$

Logo, a aproximação linear $L(x,y)$ para $f(x,y)$ próximo de $(0,0)$ é dada por

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + 3x + 3y.$$

Exemplo

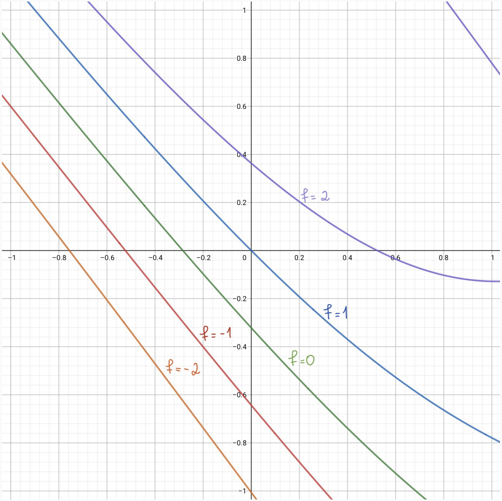
A aproximação quadrática $Q(x, y)$ para $f(x, y)$ próximo de $(0, 0)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
f(x, y) \approx Q(x, y) =& f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\
& + \frac{f_{xx}(0,0)}{2}x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{f_{yy}(0,0)}{2}y^2 \\
=& 1 + 3x + 3y - 2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2.
\end{aligned}
$$

Observe que os termos lineares em $Q(x, y)$ são os mesmos termos lineares em $L(x, y)$. Os termos quadráticos em $Q(x, y)$ podem ser pensados como "termos de correção" à aproximação linear.

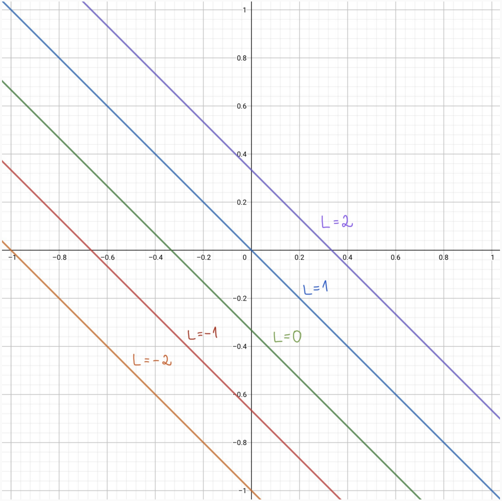
Exemplo

(b) Observemos as curvas de nível de $f(x, y)$, $L(x, y)$ e $Q(x, y)$ para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.



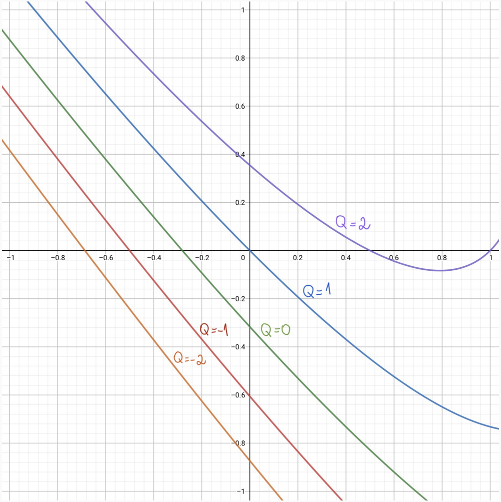
Exemplo

(b) Observemos as curvas de nível de $f(x, y)$, $L(x, y)$ e $Q(x, y)$ para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.



Exemplo

(b) Observemos as curvas de nível de $f(x, y)$, $L(x, y)$ e $Q(x, y)$ para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.



Exemplo

A semelhança entre as curvas de nível de Q e de f é maior que entre as curvas de nível de L e de f.

Como L é linear, suas curvas de nível consistem em retas paralelas igualmente espaçadas.

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Sejam f de classe C^{n+1} no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ de forma que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ esteja contido em A. Então,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-p} \partial y^p}(x_0, y_0)(\Delta x)^{k-p}(\Delta y)^p \right] \\ &+ R(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} &R(\Delta x, \Delta y) \\ &\quad = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p} \partial y^p}(\bar{x}, \bar{y})(\Delta x)^{n+1-p}(\Delta y)^p \right]. \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

A função $R(\Delta x, \Delta y)$ é chamada de resto de Lagrange para o polinômio de Taylor de uma função $f(x, y)$.

Para algumas funções $f(x, y)$, pode-se provar que o resto $R(\Delta x, \Delta y)$ aproxima-se de zero quando $n \to \infty$.

Tais funções podem ser expressas como séries de Taylor em uma vizinhança reduzida ao redor do ponto (x_0, y_0) e são denominadas funções analíticas.

Referência

Para esta aula, usamos as seguintes referências:

[1] D. Hughes-Hallet, W.G. McCallum, A.M. Gleason, et at. *Cálculo - A Uma e a Várias Variáveis*, v.2, 5.ed., Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[2] J. Stewart. *Cálculo*, v.2., 5.ed., São Paulo: Cengage Learning, 2013.