Capítulo 3 | Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade

3.1 Conceito de variável aleatória

Definição 3.1

Uma *variável aleatória* é uma função que associa um número real a cada elemento do espaço amostral.

Exemplo 3.1

Duas bolas são retiradas, sucessivamente, de uma urna que contém quatro bolas vermelhas e três pretas, sem serem repostas. Os resultados possíveis e os valores y da variável aleatória Y, onde Y é o número de bolas vermelhas, são

Espaço amostral	y
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

Exemplo 3.3

Considere a situação simples na qual componentes estão saindo de uma linha de produção e são classificados como defeituosos ou não defeituosos. Defina a variável aleatória X por:

$$X = \begin{cases} 1, \text{ se o componente apresentar defeito} \\ 0, \text{ se o componente não apresentar defeito} \end{cases}$$

Claramente, a designação 1 e 0 é arbitrária, mas bastante conveniente. Isso ficará mais claro nos próximos capítulos. A variável aleatória na qual 0 e 1 são escolhidos para descrever os dois valores possíveis é chamada de *variável aleatória de Bernoulli*.

Definição 3.2

Se o espaço amostral contém um número finito de possibilidades ou uma seqüência infinita com tantos elementos quanto são os números inteiros, ele é chamado de *espaço amostral discreto*.

Definição 3.3

Se um espaço amostral contém um número infinito de possibilidades igual ao número de pontos em um segmento de linha, ele é chamado de *espaço amostral contínuo*.

3.2 Distribuições de probabilidades discretas

Definição 3.4

O conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ é a *função de probabilidade*, *função de massa de probabilidade* ou *distribuição de probabilidade* da variável discreta X, se, para cada resultado possível x,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

Definição 3.5

A *função de distribuição acumulada* $F(x)$ de uma variável aleatória discreta X, que tem distribuição de probabilidade $f(x)$ é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \quad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

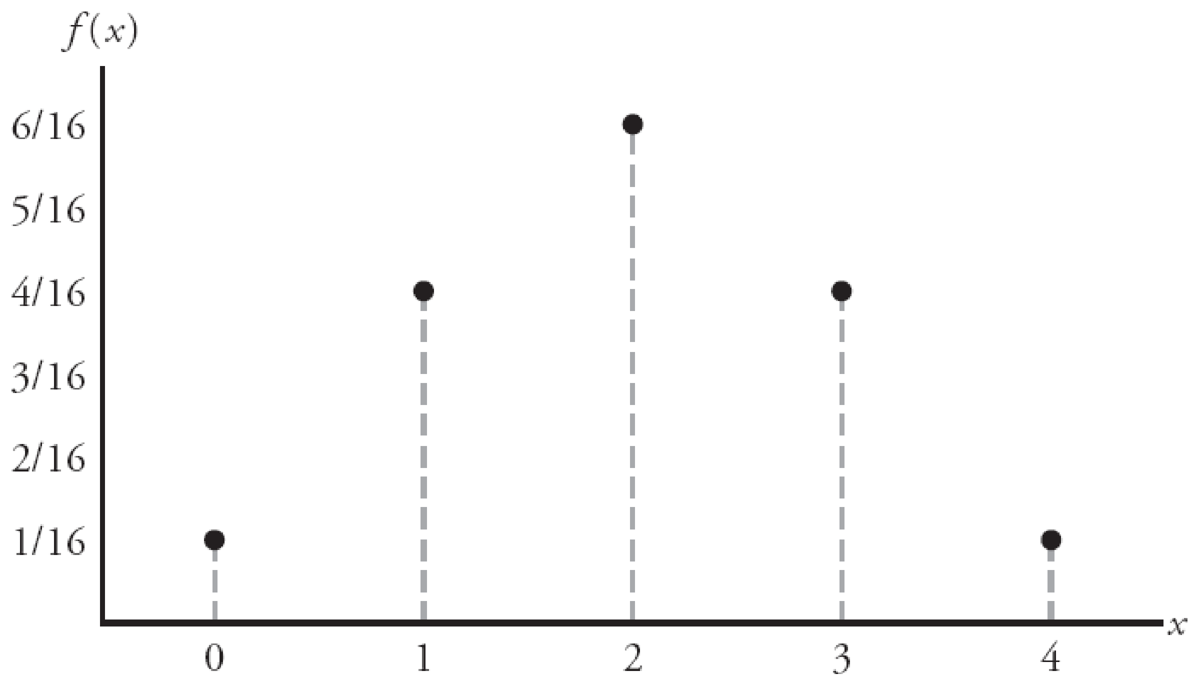

Figura 3.1 Gráfico de barras.

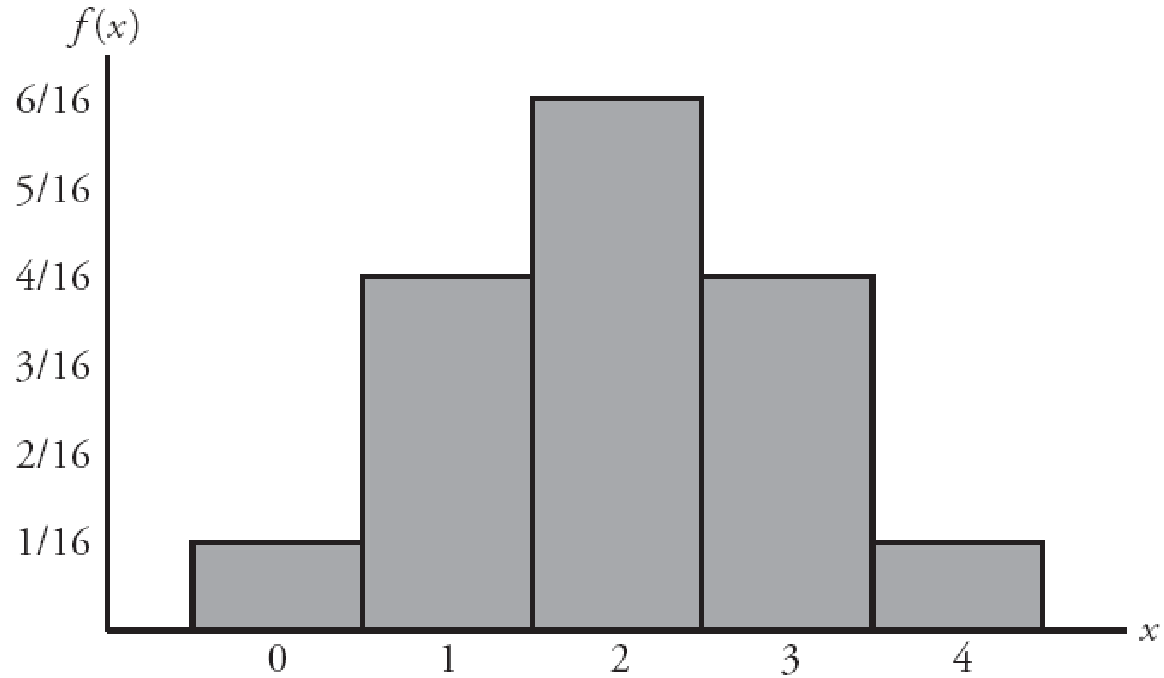

Figura 3.2 Histograma de probabilidade.

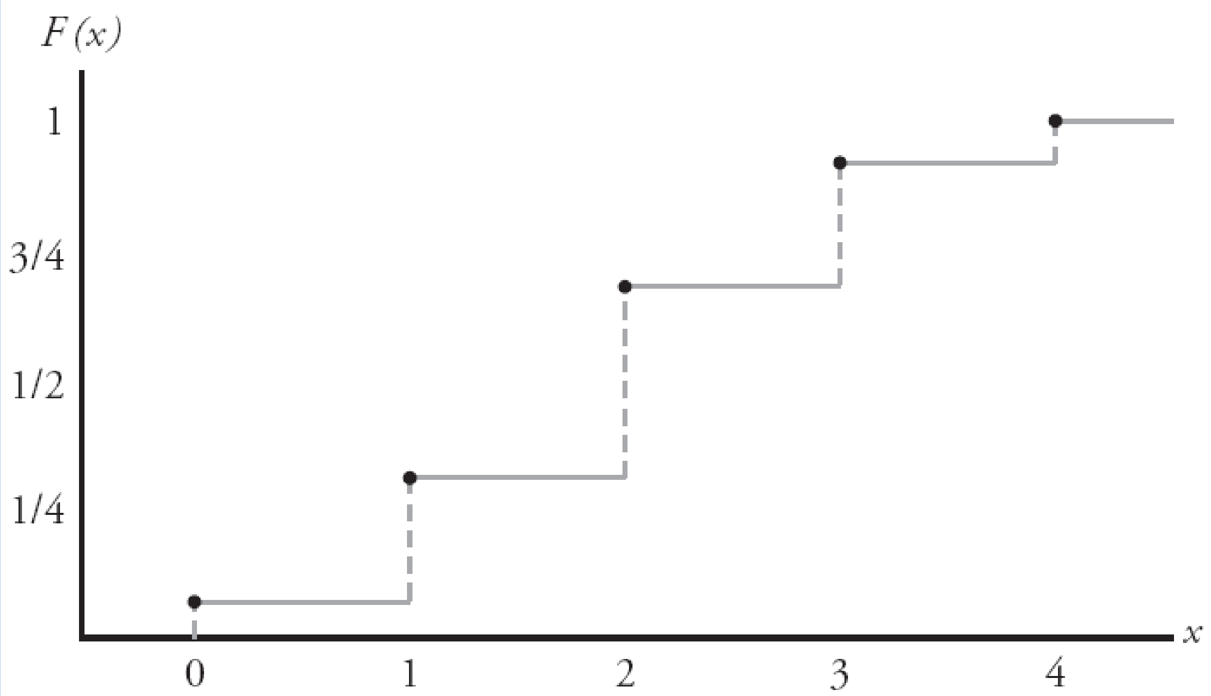

Figura 3.3 Função de distribuição acumulada discreta.

3.3 Distribuições de probabilidades contínuas

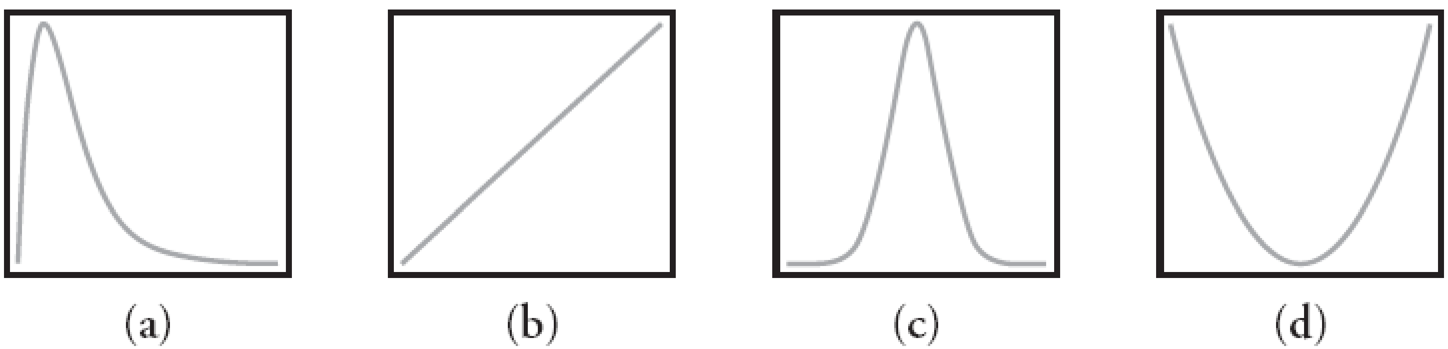

Figura 3.4 Funções de densidade típicas.

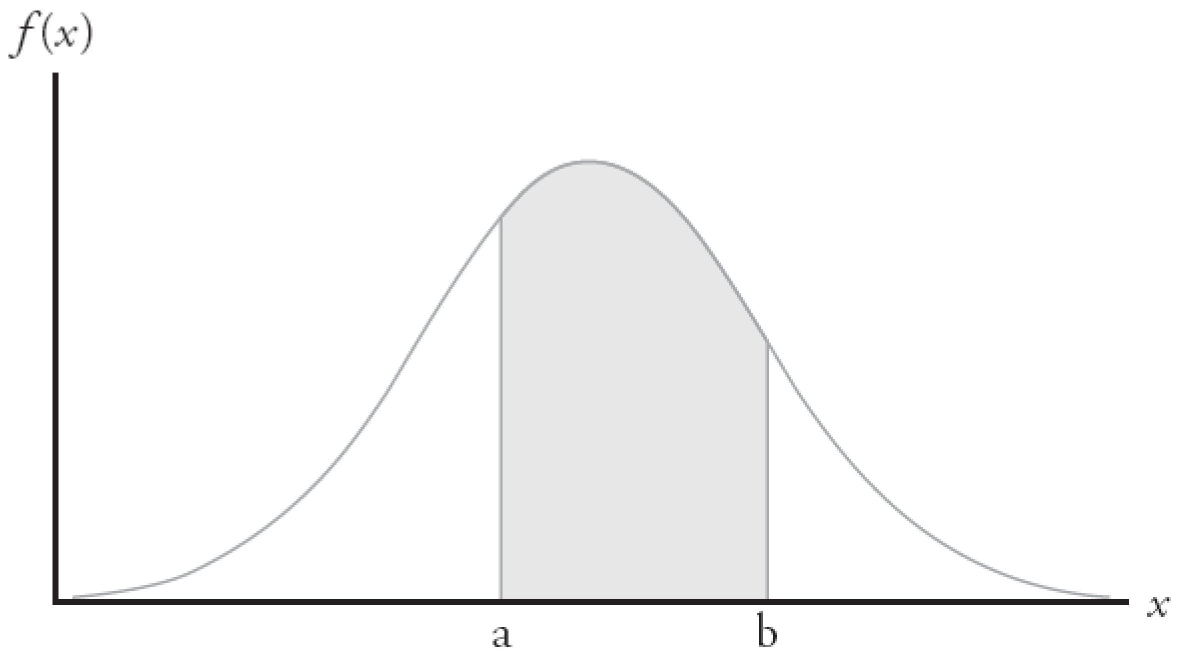

Figura 3.5 $P(a < X < b)$.

Definição 3.6

A função $f(x)$ é a *função de densidade de probabilidade* para a variável aleatória contínua X, definida no conjunto de números reais R, se

1. $f(x) \geq 0, \quad$ para todo $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Definição 3.7

A *função de distribuição acumulada* $F(x)$ de uma variável aleatória contínua X, com função densidade $f(x)$, é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad \text{para } -\infty < x < \infty.$$

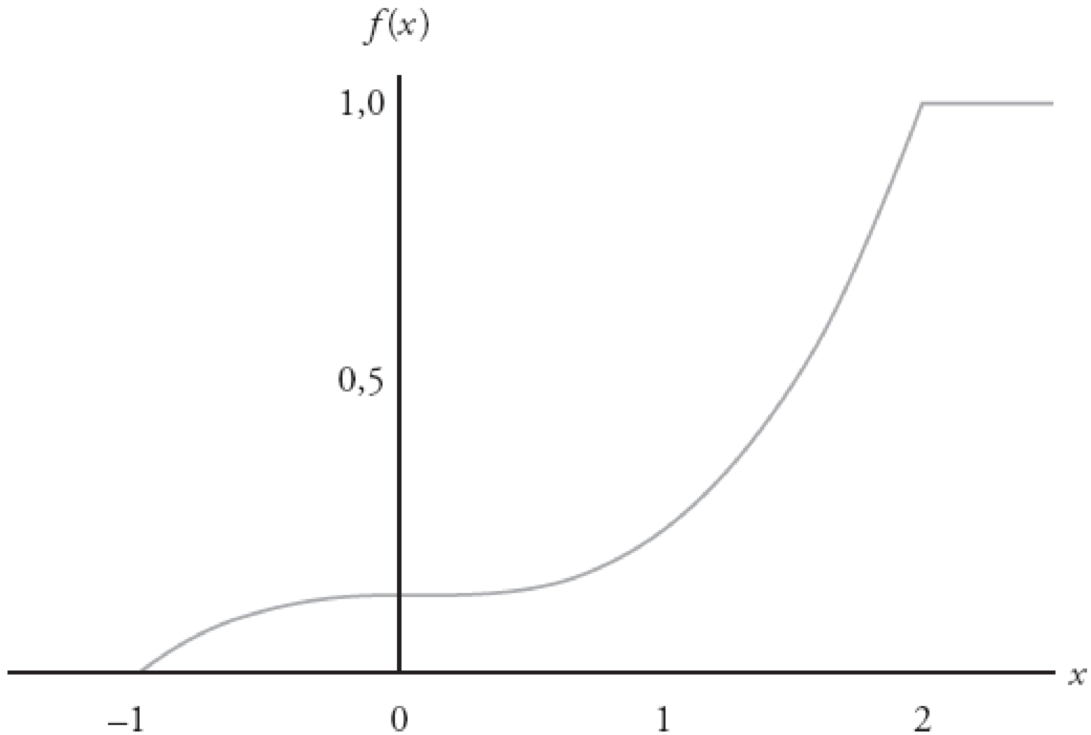

Figura 3.6 Função de distribuição acumulada contínua.

Capítulo 3 | Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade

3.4 Distribuição de probabilidade conjunta

Definição 3.8

A função $f(x, y)$ é a *distribuição de probabilidade conjunta* ou *função de massa de probabilidade conjunta* das variáveis aleatórias discretas X e Y se

1. $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y),
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$,
3. $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$.

Para qualquer região A no plano xy, $P[(X, Y) \in A] = \sum \sum_A f(x, y)$.

Tabela 3.1 Distribuição de probabilidade conjunta para o Exemplo 3.14.

$f(x, y)$		x			Total das linhas
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
Total das colunas		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Definição 3.9

A função $f(x, y)$ é uma *função de densidade conjunta* das variáveis aleatórias contínuas X e Y se

1. $f(x, y) \geq 0, \quad \text{para todo } (x, y),$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1,$
3. $P[(X, Y) \in A] = \int\int_A f(x, y)\, dx\, dy,$

para qualquer região A no plano xy.

Definição 3.10

As *distribuições marginais* de X somente e de Y somente são

$$g(x) = \sum_{y} f(x, y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_{x} f(x, y),$$

para o caso discreto, e

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,$$

para o caso contínuo.

Definição 3.11

Considere X e Y duas variáveis aleatórias, contínuas ou discretas. A *distribuição condicional* da variável aleatória Y, dado que $X = x$, é

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0.$$

De modo similar, a distribuição condicional da variável aleatória X, dado que $Y = y$, é

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0.$$

Se $f(x|y)$ não depende de y, como é o caso do Exemplo 3.20, então $f(x|y) = g(x)$ e $f(x, y) = g(x)h(y)$. A prova segue abaixo, substituindo

$$f(x, y) = f(x|y)h(y)$$

na distribuição marginal de X. Ou seja,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)h(y)\ dy.$$

Se $f(x|y)$ não depende de y, podemos escrever

$$g(x) = f(x|y)\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\ dy.$$

Agora

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\ dy = 1,$$

já que $h(y)$ é a função densidade de probabilidade de Y. Portanto,

$$g(x) = f(x|y) \quad \text{e então} \quad f(x, y) = g(x)h(y).$$

Deve fazer sentido para o leitor que, se $f(x|y)$ não depende de y, então, é claro, o resultado da variável aleatória Y não tem impacto no resultado da variável aleatória X. Em outras palavras, dizemos que X e Y são variáveis aleatórias independentes.

Definição 3.12

Considere X e Y duas variáveis aleatórias, discretas ou contínuas, com distribuição de probabilidade conjunta $f(x, y)$ e distribuições marginais $g(x)$ e $h(y)$, respectivamente. As variáveis aleatórias X e Y são ditas *estatisticamente independentes* se e somente se

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

para todo (x, y) dentro de seu domínio.

Definição 3.13

Considere as n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, discretas ou contínuas, com função de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e distribuições marginais $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$, respectivamente. As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são ditas mutuamente *estatisticamente independentes* se e somente se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dentro de seu domínio.