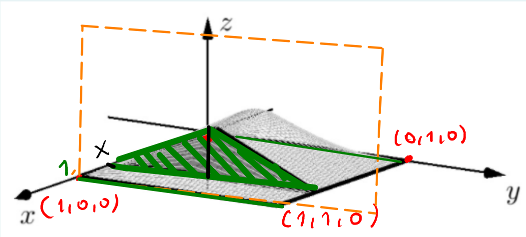
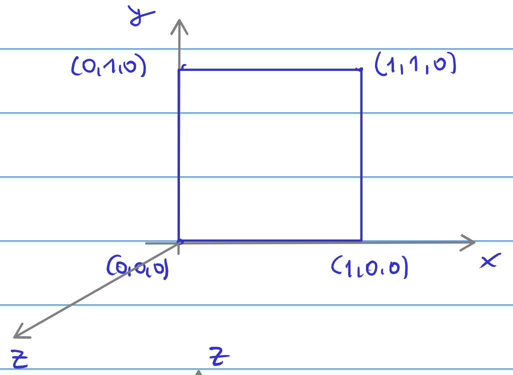
26/11 - Aula 36 - Aplicações da Integral Definida

Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,0,0)$, e cujas secções perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles de altura $x - x^2$.

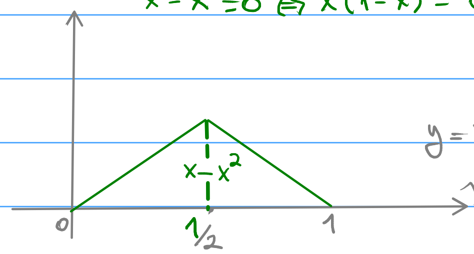


ATENÇÃO. Digite como resposta um número em representação decimal, truncando ou arredondando na terceira casa após a vírgula, se necessário.

Resposta:



$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x=0$
$x=1$



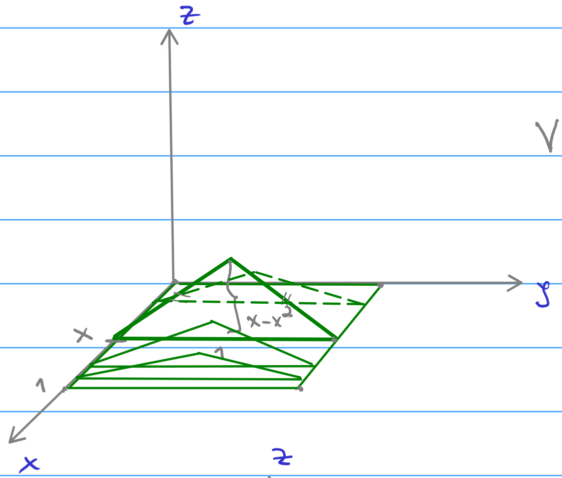
$y = x - x^2$

$y' = 1-2x = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$y''(\frac{1}{2}) < 0$

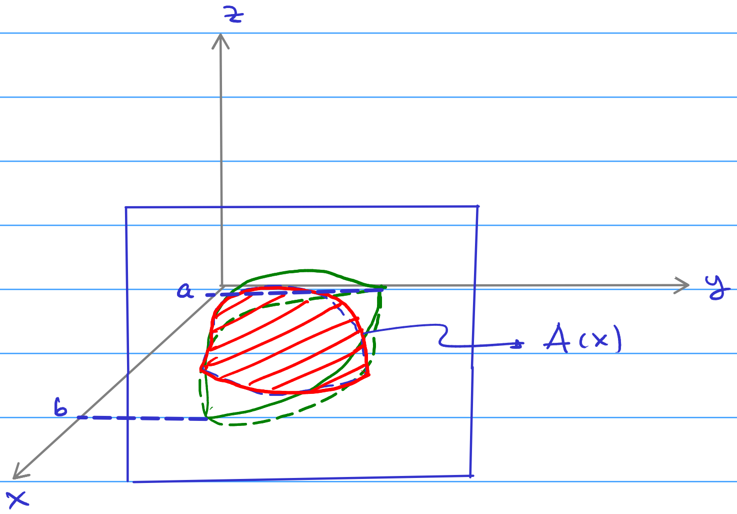
$$A(x) = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \cdot (x-x^2)}{2} = \frac{x-x^2}{2}$$



$$V = \int_{a=0}^{b=1} A(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x-x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$\overset{TFC}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{12}}$$



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

A região delimitada pelo arco de senóide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, gira em torno do eixo x. Qual é o valor numérico do volume do sólido resultante?

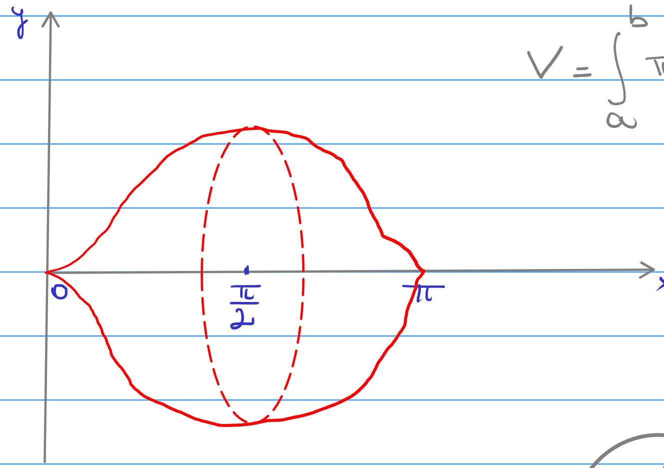
Escolha uma opção:

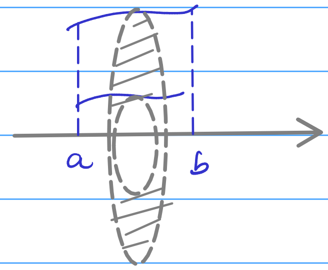
- ○ π^2
- ○ $\pi^2/4$
- ○ $3\pi^2/2$
- ◉ $\pi^2/2$
- ○ $\pi^2/3$

Limpar minha escolha

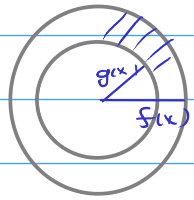
$$Gr(f) = \{(x,y) \mid y = \operatorname{sen} x \ , \ 0 \leq x \leq \pi\}$$

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x)^2 - g(x)^2\right] dx$$





$f(x) = \operatorname{sen} x \ , \ g(x) = 0$



$\pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$

$\pi \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]$

$$V = \int_0^\pi \pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \ldots$$

Questão 1

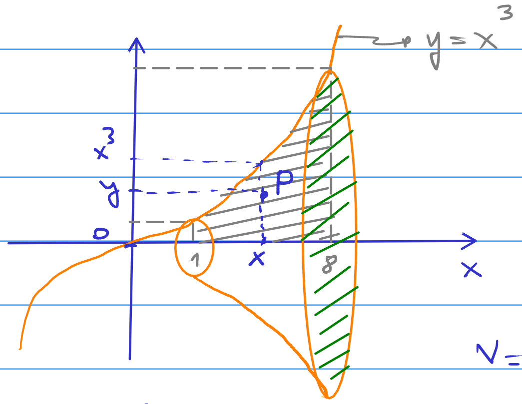
Completo

Atingiu 0,00 de 2,50

Marcar questão

O volume V do sólido de revolução (em torno do eixo x) determinado pela função $f : [1, 8] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é dado por,

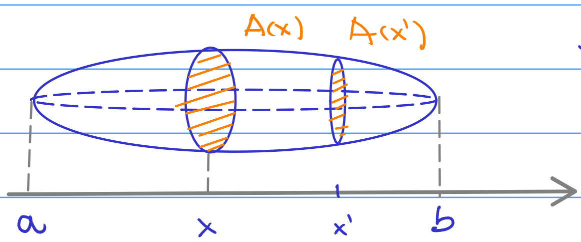
299586 $\cdot \pi$



$$R = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 8,\ 0 \le y \le x^3\}$$

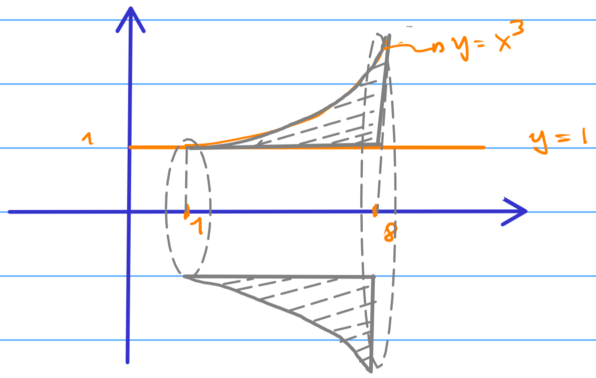
$$V = \int_1^8 \pi [f(x)^2 - g(x)^2]\, dx$$

$$\Rightarrow V = \int_1^8 \pi [x^3]^2\, dx = \int_1^8 \pi x^6\, dx = \ldots$$



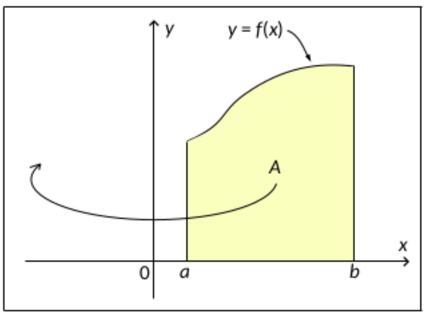
$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Ex. $R = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 8 \text{ e } 1 \le y \le x^3\}$

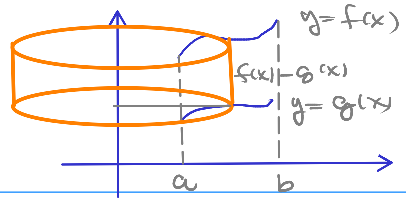


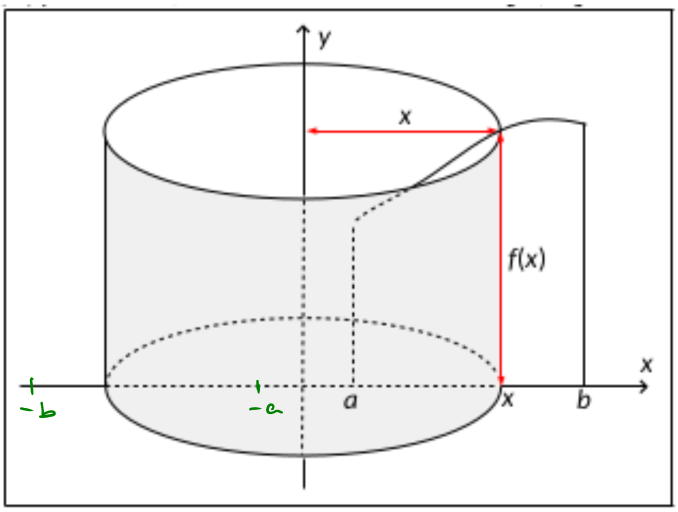
$$V = \int_1^8 \pi [(x^3)^2 - 1^2]\, dx$$

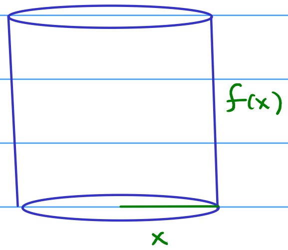
Volume de um sólido de revolução pelo método das cascas cilíndricas em torno do eixo y.



$$V = \int_a^b 2\pi x\,[f(x)-g(x)]\,dx$$





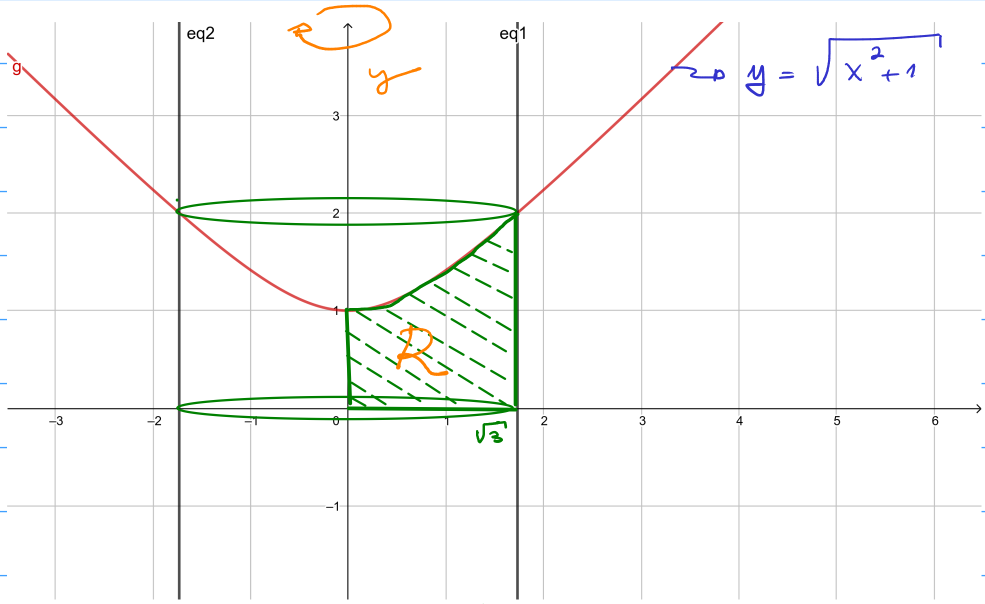


$$A(x) = 2\pi x f(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\,dx$$

Ex. Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região em torno do eixo y.

a) Região delimitada pela curva $y=\sqrt{x^2+1}$, pelos eixos x e y e pela reta $x=\sqrt{3}$. Resp. $V = \dfrac{14\pi}{3}$ ✓



$$V = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x\, f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^4 \pi \sqrt{u}\,du$$

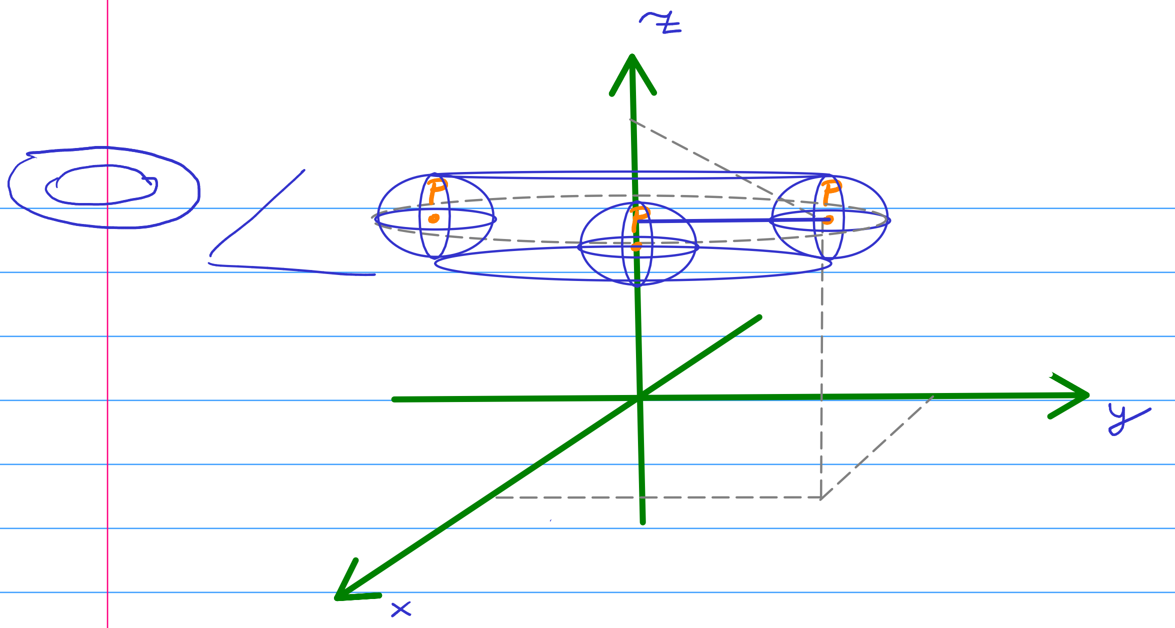
$u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$= \pi \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\,du \underset{\text{TFC}}{=} \pi \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4$$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow u = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$

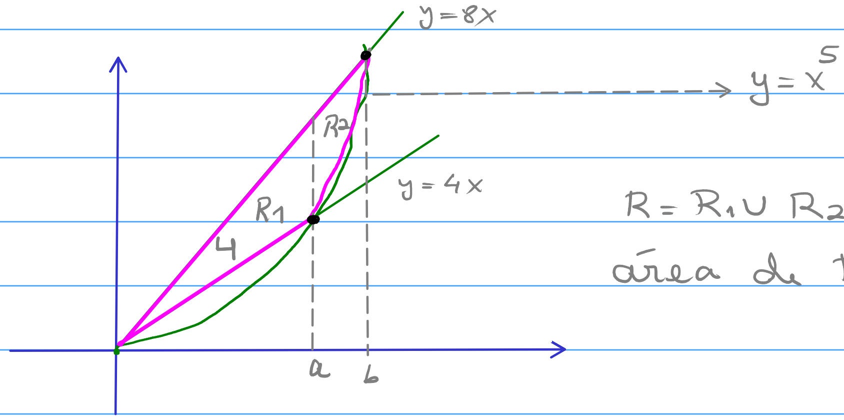
$$= \frac{2\pi}{3}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right] = \frac{2\pi}{3}\left[8-1\right] = \frac{14\pi}{3}$$ ✓



P = (1, 1, 1)

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = R^2}$$

Ex



$R = R_1 \cup R_2$

área de $R = ?$

$R_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a \text{ e } 4x \leq y \leq 8x\}$

$R_2 = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ e } x^5 \leq y \leq 8x\}$

1) Cálculo de a: $\begin{cases} y = 4x \\ y = x^5 \end{cases} \Rightarrow x^5 = 4x \Leftrightarrow x^5 - 4x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^4 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\boxed{x = \sqrt[4]{4}}$

$\Rightarrow a = \sqrt[4]{4}$

2) Cálculo de b: $\begin{cases} y = x^5 \\ y = 8x \end{cases} \Rightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt[4]{8}$

$$\text{área de } R_1 = \int_0^{\sqrt[4]{4}} (8x - 4x)\,dx = 4\int_0^{\sqrt[4]{4}} x\,dx = 4 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt[4]{4}} = 2(4^{\frac{2}{4}}) = 4$$

$$\text{área de } R_2 = \int_{\sqrt[4]{4}}^{\sqrt[4]{8}} (8x - x^5)\,dx \underset{TFC}{=} \left[4x^2 - \frac{x^6}{6}\right]_{\sqrt[4]{4}}^{\sqrt[4]{8}} = \alpha$$

área de R = área de R_1 + área de R_2 = $4 + \alpha$