Lógica

Lógica de Predicados
Aula 15 – Raciocínio

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

Sócrates é homem.

Todo homem é mortal.

Logo, Sócrates é mortal.

- Representando na Lógica Proposicional
  - p, q |– r

- Representando na Lógica de Predicados
  - $\underbrace{\text{homem(socrates)}, \forall X\ (\text{homem}(X) \rightarrow \text{mortal}(X))}_{\text{premissas (hipóteses)}} \vdash \underset{\text{conclusão}}{\underset{\downarrow}{\text{mortal(socrates)}}}$

Lógica de Predicados

- **Argumento**
  - É uma sequência α_1, α_2, α_3, …, α_n ($n \geq 1$) de fórmulas, na qual as fórmulas α_i ($1 \leq i \leq n-1$) são chamadas de **premissas** e a fórmula α_n é chamada de **conclusão**

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$$

  - Exemplo
    - homem(socrates), $\forall X$ (homem(X) $\rightarrow$ mortal(X)) |– mortal(socrates)

$\Downarrow$

então, logo, portanto, como consequência, conclui-se, etc.

Lógica de Predicados

- **Argumento válido**
  - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \mid\!- \alpha_n$ é um **argumento válido** se e somente se a fórmula

    $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n$ for uma **tautologia**
  - ou seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n$

  - Exemplo
    - homem(socrates), $\forall$X (homem(X) $\rightarrow$ mortal(X)) |– mortal(socrates)

Lógica de Predicados

Introdução da condicional

Dada a derivação de uma fbf β a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir a fbf $\alpha \rightarrow \beta$

- **Técnicas de prova**
  - **Prova direta**
    - A partir das premissas, aplicando-se as regras de inferência e equivalência, chega-se à conclusão
  - **Prova condicional**
    - Utilizando uma <u>hipótese</u> e as premissas, aplicando-se as regras de inferência e equivalência e a regra de <u>introdução da condicional</u>, chega-se à conclusão
  - **Prova indireta**
    - A partir das premissas e a <u>negação da conclusão</u> (hipótese), aplicando-se as regras de inferência e equivalência chega-se ao <u>absurdo</u> sendo possível descartar a hipótese e chegar à conclusão

Lógica de Predicados

- **Inferência com base em regras**
  - Regras de inferência + regras de equivalência

Regras de inferência e Leis de equivalência

Regra	Nome da regra
$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$	*modus ponens*
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$	*modus tollens*
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$	silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$ $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$	silogismo disjuntivo
$\alpha \wedge \beta \models \alpha$ $\alpha \wedge \beta \models \beta$	simplificação
$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$	conjunção (ou combinação)

Regra	Nome da regra
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$	de casos
$\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\beta \models \alpha \vee \beta$	adição
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$	dilema construtivo
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$	dilema destrutivo
$\alpha \rightarrow \beta \models \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	contraposição
$\alpha, \neg\alpha \models \beta$	da inconsistência
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$	introdução da equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \rightarrow \alpha$	eliminação da equivalência

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv F$ $\alpha \vee \neg\alpha \equiv V$	Lei da contradição Lei do terceiro excluído
$\alpha \wedge V \equiv \alpha$ $\alpha \vee F \equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \wedge F \equiv F$ $\alpha \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Leis de De Morgan

Lei	Nome da lei
$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$	Definição de $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\rightarrow$ e $\wedge$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$	Lei da absorção
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \equiv \beta$ $(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \equiv \beta$	--

Lógica de Predicados

- **Inferência com base em regras**
  - Regras de equivalência para quantificadores:
    - Seja
      - α uma fórmula expressa usando a variável X, $\alpha[X]$
      - β uma fórmula que não é expressa usando a variável X
      - Q qualquer um dos quantificadores: $\forall$ ou $\exists$

$(QX\ \alpha[X]) \vee \beta \equiv (QX\ (\alpha[X] \vee \beta))$
$(QX\ \alpha[X]) \wedge \beta \equiv (QX\ (\alpha[X] \wedge \beta))$
$\neg(\forall X\ \alpha[X]) \equiv (\exists X\ \neg\alpha[X])$
$\neg(\exists X\ \alpha[X]) \equiv (\forall X\ \neg\alpha[X])$

- Novas regras para lidar com os quantificadores ...

Lógica de Predicados

- **Eliminação** (Particularização ou Instanciação)
  - Universal

$$\frac{\forall X\ p(X)}{\therefore\ p(c)}$$

p(X) é verdade para todos os elementos do domínio, então é verdade para o elemento 'c'

  - Existencial

p(X) é verdade para pelo menos um elemento do domínio: o elemento 'c'

$$\frac{\exists X\ p(X)}{\therefore\ p(c) \text{ para algum } c}$$

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Demonstrando que

    homem(socrates), $\forall X$ (homem(X) $\rightarrow$ mortal(X)) $|-$ mortal(socrates)
  - é um argumento válido

  Dadas as premissas
  - α_1: homem(socrates)
  - α_2: $\forall X$ (homem(X) $\rightarrow$ mortal(X))

  Deduz-se
  - α_3: homem(socrates) $\rightarrow$ mortal(socrates) (α_2+ eliminação universal X = socrates)
  - α_4: mortal(socrates) (α_1+ α_3 + modus ponens)

Lógica de Predicados

- **Introdução** (Generalização)
  - Universal

$$\frac{p(c) \text{ para c arbitrário}}{\therefore\ \forall X\ p(X)}$$

Quando p(X) não foi deduzido a partir de uma hipótese na qual X é uma variável livre, nem usando eliminação existencial

Usos incorretos

Dada a hipótese
$p(X)$
Deduz-se
$\forall X\ p(X)$ (introdução univ.)
ERRADO! Pois X é uma variável livre na hipótese e, por isso, não há garantia de que ela signifique o mesmo que a quantificação universal

Dada a hipótese
$\forall X\ \exists Y\ q(X,Y)$
Deduz-se
$\exists Y\ q(a,Y)$ (elim. univ. X = a)
$q(a,b)$ (elim. exist. Y = b)
$\forall X\ q(X,b)$ (introdução univ.)
ERRADO! Pois não há garantia de que o predicado q(X,b) seja verdade para todo X

Lógica de Predicados

- **Introdução** (Generalização)
  - Universal

$$\frac{p(c) \text{ para c arbitrário}}{\therefore\ \forall X\ p(X)}$$

Quando p(X) não foi deduzido a partir de uma hipótese na qual X é uma variável livre, nem usando eliminação existencial

  - Existencial

$$\frac{p(c) \text{ para algum c}}{\therefore\ \exists X\ p(X)}$$

p(X) é verdade para o elemento 'c' então existe pelo menos um elemento do domínio para o qual o predicado é verdade

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    a) Um aluno desta sala não leu a apostila. Todos os alunos desta sala foram bem na prova. Logo, algum aluno desta sala que foi bem na prova não leu a apostila.

Argumento a ser demonstrado:

$\exists X\ (aluno(X) \wedge \neg leu(X,apostila)),$
$\forall X\ (aluno(X) \rightarrow foi(X,bem,prova)\ \vdash$
$\exists X\ (aluno(X) \wedge foi(X,bem,prova) \wedge \neg leu(X,apostila))$

Lógica de Predicados

Argumento a ser demonstrado:
$\exists X\,(aluno(X) \wedge \neg leu(X,apostila)),$
$\forall X\,(aluno(X) \rightarrow foi(X,bem,prova)\ \vdash$
$\exists X\,(aluno(X) \wedge foi(X,bem,prova) \wedge \neg leu(X,apostila))$

- **Prova (dedução**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos
    - a) Um aluno desta sala não leu a apostila. Todos os alunos

RESPOSTA

a) Dadas as premissas

α_1: $\exists X\,(aluno(X) \wedge \neg leu(X,apostila))$

α_2: $\forall X\,(aluno(X) \rightarrow foi(X,bem,prova))$

Deduz-se

α_3: $aluno(a) \wedge \neg leu(a,apostila)$ (α_1 + eliminação existencial X = a)

α_4: $aluno(a)$ (α_3 + simplificação)

α_5: $aluno(a) \rightarrow foi(a,bem,prova)$ (α_2 + eliminação universal X = a)

α_6: $foi(a,bem,prova)$ (α_4 + α_5 + modus ponens)

α_7: $\neg leu(a,apostila)$ (α_3 + simplificação)

α_8: $aluno(a) \wedge foi(a,bem,prova) \wedge \neg leu(a,apostila)$ (α_3 + α_6 + conjunção)

α_9: $\exists X\,(aluno(X) \wedge foi(X,bem,prova) \wedge \neg leu(X,apostila))$ (α_9 + introd. existencial)

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    b) $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X)),\ \forall X\ p(X) \mid\!-\ \forall X\ q(X)$

    c) $\forall X\ (p(X) \wedge q(X)) \mid\!-\ \forall X\ p(X) \wedge\ \forall X\ q(X)$

    d) $p(X) \rightarrow\ \forall Y\ q(X, Y) \mid\!-\ \forall Y\ (p(X) \rightarrow\ q(X, Y))$

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

b) $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X)),\ \forall X\ p(X)\ |\!-\ \forall X\ q(X)$

RESPOSTA

b) Dadas as premissas

α_1: $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X))$

α_2: $\forall X\ p(X)$

Deduz-se

α_3: $p(a) \rightarrow q(a)$ (α_1 + eliminação universal $X = a$)

α_4: $p(a)$ (α_2 + eliminação universal $X = a$)

α_5: $q(a)$ (α_3 + α_4 + modus ponens)

α_6: $\forall X\ q(X)$ (α_5 + introdução universal)

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos
    - c) $\forall X\,(p(X) \land q(X)) \mid\!-\ \forall X\, p(X) \land \forall X\, q(X)$

RESPOSTA

c) Dada a premissa

α_1: $\forall X\,(p(X) \land q(X))$

Deduz-se

α_2: $p(a) \land q(a)$ (α_1 + eliminação universal X = a)

α_3: $p(a)$ (α_2 + simplificação)

α_4: $q(a)$ (α_2 + simplificação)

α_5: $\forall X\, p(X)$ (α_3 + introdução universal)

α_6: $\forall X\, q(X)$ (α_4 + introdução universal)

α_7: $\forall X\, p(X) \land \forall X\, q(X)$ (α_5 + α_6 + conjunção)

Lógica de Predicados

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    d) $p(X) \rightarrow \forall Y\ q(X, Y) \mid\!-\ \forall Y\ (p(X) \rightarrow q(X, Y))$

RESPOSTA

d) Dada a premissa

α_1: $p(X) \rightarrow \forall Y\ q(X,Y)$

E a hipótese:

α_2: $p(X)$

Deduz-se

α_3: $\forall Y\ q(X,Y)$ (α_1 + α_2 + modus ponens)

α_4: $q(X,a)$ (α_3 + eliminação universal Y = a)

α_5: $p(X) \rightarrow q(X,a)$ (α_4 + α_2 + introdução da condicional)

α_6: $\forall Y\ (p(X) \rightarrow q(X,Y))$ (α_5 + introdução universal)