Matemática Discreta

Teoria dos Grafos
Classificação

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

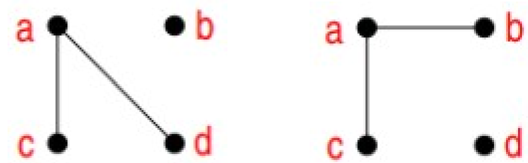
Teoria dos Grafos

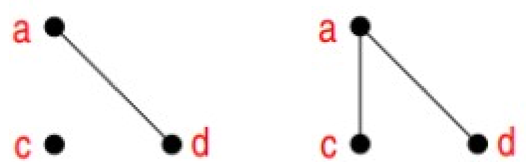
- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar diversas classificações possíveis para grafos
    - Grafo vazio e grafo sem arestas
    - Grafo finito X grafo infinito
    - Arestas paralelas e laços
    - Grafo simples e multigrafo
    - Grafo regular
    - Grafo completo
    - Subgrafo
  - Capacitar o aluno a classificar os grafos na modelagem de problemas computacionais

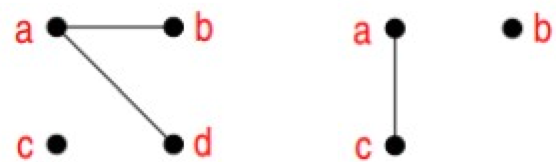
Problema #16

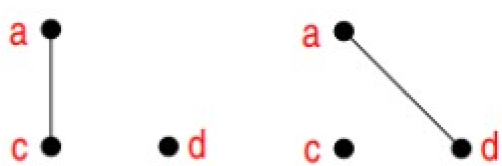
- **Marque todos os pares de grafos que são complementares**

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

Teoria dos Grafos

- **Grafo vazio**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo é **vazio** quando seu conjunto de vértices V é vazio (e, consequentemente o conjunto de arestas A também é vazio)
  - V = Ø e, logo, A = Ø
- Existe um <u>único</u> **grafo vazio**

Teoria dos Grafos

- **Grafo sem arestas**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo é **sem arestas** quando seu conjunto de vértices V não é vazio, mas o conjunto de arestas A é vazio
  - $V \neq \emptyset$ e $A = \emptyset$
- Nesse curso vamos considerar sempre $V \neq \emptyset$

Teoria dos Grafos

- **Grafo infinito**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo é **infinito** se ele contém **infinitos vértices** (|V| = infinito) e/ou **infinitas arestas** (|A| = infinito)
  - Tais grafos têm aplicações na matemática

Teoria dos Grafos

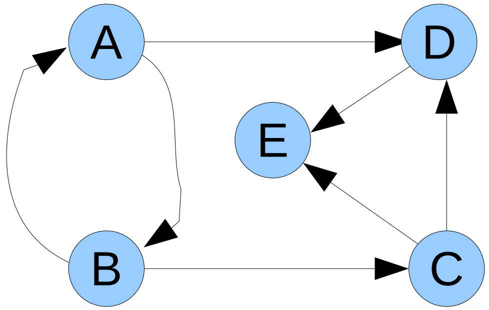
- **Grafo finito**

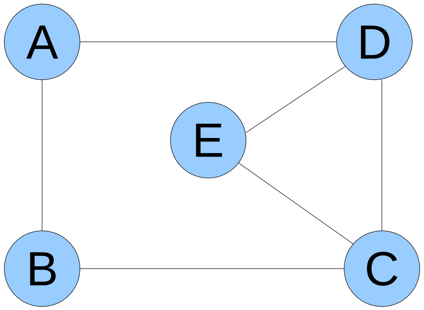
Fonte: https://pixabay.com/

- Na computação, contudo, geralmente os grafos são **finitos**
  - $|V| \in \mathbb{N}$ e $|A| \in \mathbb{N}$
  - As cardinalidades de V e de A são, ambas, **finitas**
  - Neste curso, lidaremos apenas com grafos finitos

Teoria dos Grafos

- **Recordando ...**
  - **Grafo orientado X Grafo não orientado**





Teoria dos Grafos

- **Arestas paralelas (ou múltiplas)**

Fonte: https://pixabay.com/

- **Grafo não orientado**
  - Duas arestas são paralelas se elas têm os <u>mesmos extremos</u>

Teoria dos Grafos

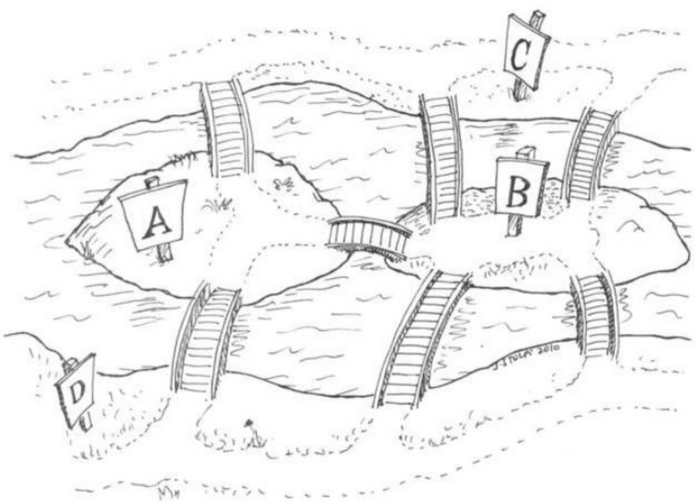
- **Arestas paralelas (ou múltiplas)**

Fonte: https://pixabay.com/

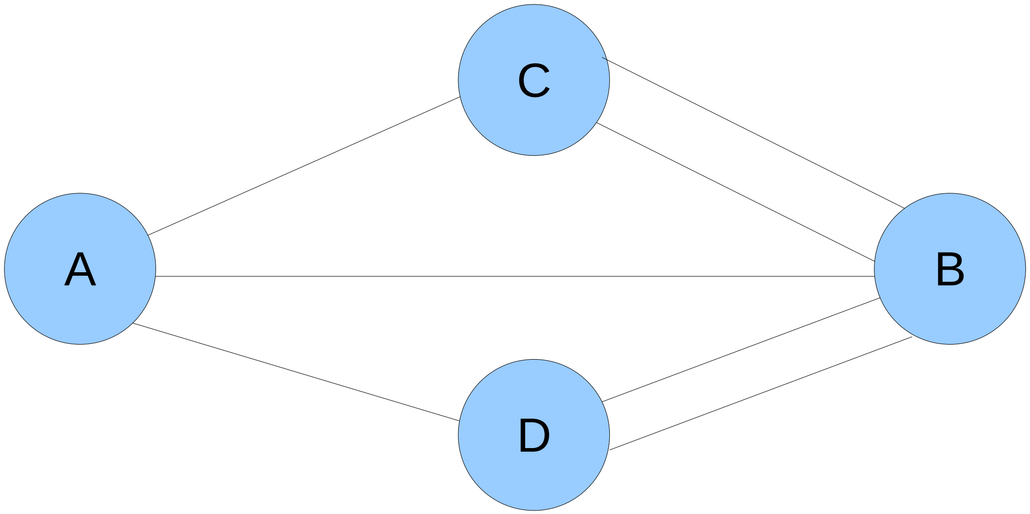
- **Grafo orientado**
  - Duas arestas são paralelas se elas têm os mesmos extremos e a mesma orientação
    - Se elas têm os mesmos extremos, mas orientações opostas, elas são ditas **antiparalelas**

Teoria dos Grafos

- **Arestas paralelas (ou múltiplas)**
  - Exemplo
    - Para representar o problema das pontes de Königsberg de Euler (1736) ilustrado abaixo



Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 168)



Teoria dos Grafos

- **Laços**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma aresta que liga um vértice a ele mesmo é um **laço**

Teoria dos Grafos

- **Laços**
  - Algumas definições de grafos permitem laços, outras proíbem, exigindo que os dois extremos de cada aresta sejam vértices distintos
  - ➔ Grafos sem arestas paralelas e sem laços são chamados, por alguns autores, de grafos “simples”

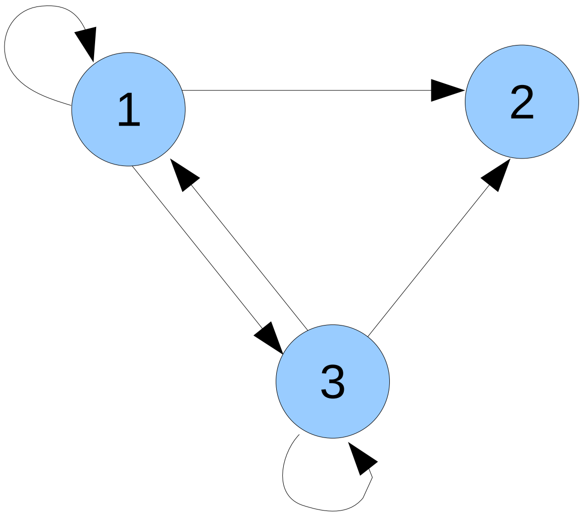
Teoria dos Grafos

- **Desenhe um grafo orientado**
  - Para representar a relação a seguir definida no conjunto { 1, 2, 3 }
    - R = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2),(3, 3) }

Teoria dos Grafos

- **Desenhe um grafo orientado**
  - Para representar a relação a seguir definida no conjunto { 1, 2, 3 }
    - R = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2),(3, 3) }

Esse grafo não é um grafo simples, pois possui laços



Teoria dos Grafos

- **Grafo simples**

Fonte: https://pixabay.com/

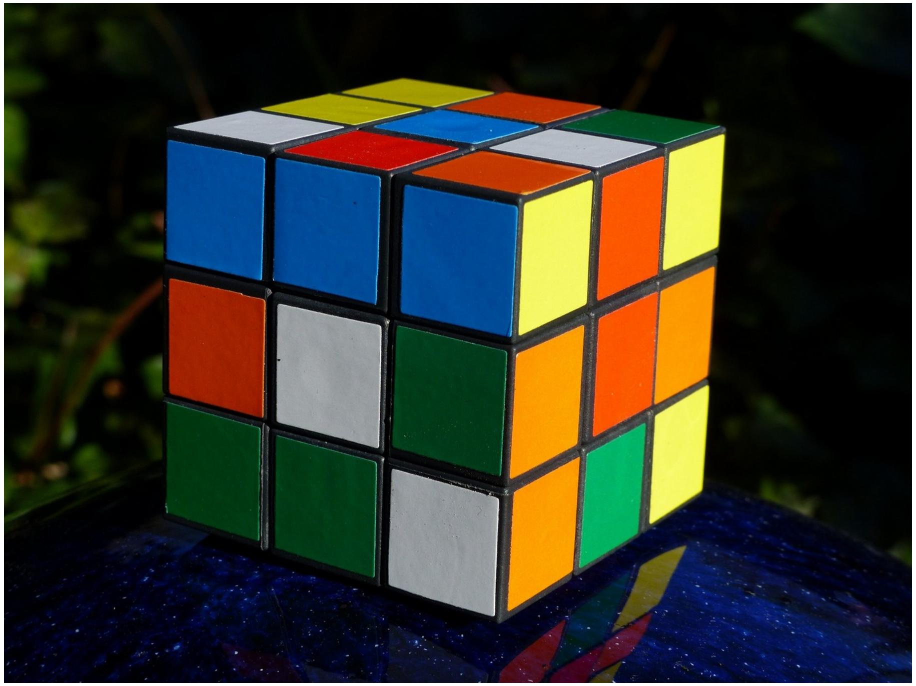
- Alguns autores definem como **grafos simples** aqueles grafos (orientados ou não) <u>sem laços</u> e <u>sem arestas paralelas</u>

Teoria dos Grafos

- **Grafo simples e Multigrafo**
  - Outros autores definem grafos sem considerar a possibilidade de arestas paralelas e denominam de **multigrafo** quando arestas paralelas estão presentes

Teoria dos Grafos

- **Grafo regular**



Fonte: https://pixabay.com/

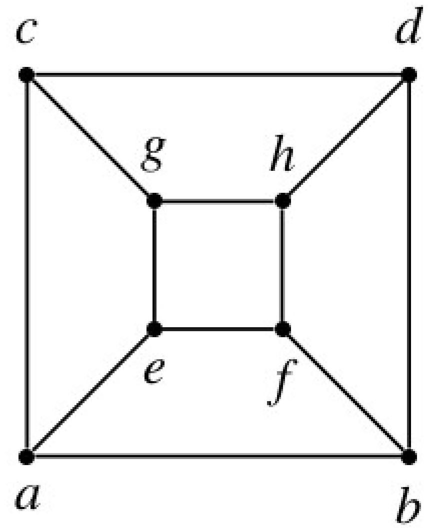
- Um grafo é **regular** se todos os seus vértices <u>têm o mesmo grau</u>

Teoria dos Grafos

- **Grafo regular**
  - Em um grafo regular G
    - Se o grau dos vértices é r, então G é chamado de r-regular (ou regular de grau r)
  - ➔ Um grafo G é regular sse $\Delta_G = \delta_G = r$
  - **Grafo orientado**
    - Os graus de entrada e de saída devem ser iguais

Teoria dos Grafos

- **Grafo regular**
  - Exemplo

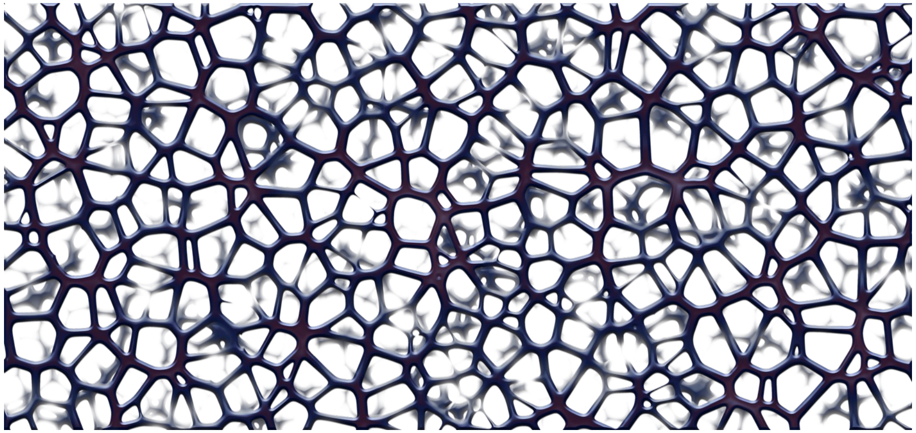


Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 175)

➔ O grafo do cubo é um grafo simples 3-regular

Teoria dos Grafos

- **Grafo completo**

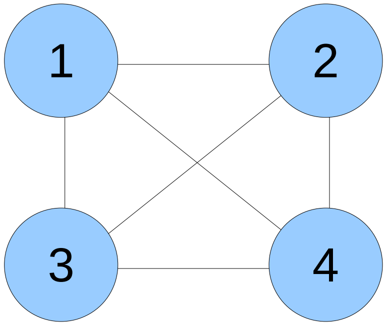


Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo G é **completo** se ele não tem laços e possui exatamente uma aresta entre **cada par de vértices**

Teoria dos Grafos

- **Grafo completo**
  - Um grafo completo com n vértices é sempre um grafo simples e (n-1)-regular
    - Também é denotado por K_n
  - Exemplo
    - Grafo simples 3-regular ou K_4



Teoria dos Grafos

- **Subgrafos**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo H = (T, B) é **subgrafo** de outro grafo G = (V, A) se
  a) $T \subseteq V$
  b) $B \subseteq A$
  c) Cada aresta de B tem os mesmos extremos em H e em G

➔ Se G é orientado, H também precisa ser orientado e as arestas precisam ter também a mesma orientação

Teoria dos Grafos

- **Subgrafo gerador**
  - Se T = V o subgrafo H é chamado de **subgrafo gerador** ou **subgrafo espalhado**
  - Exemplo

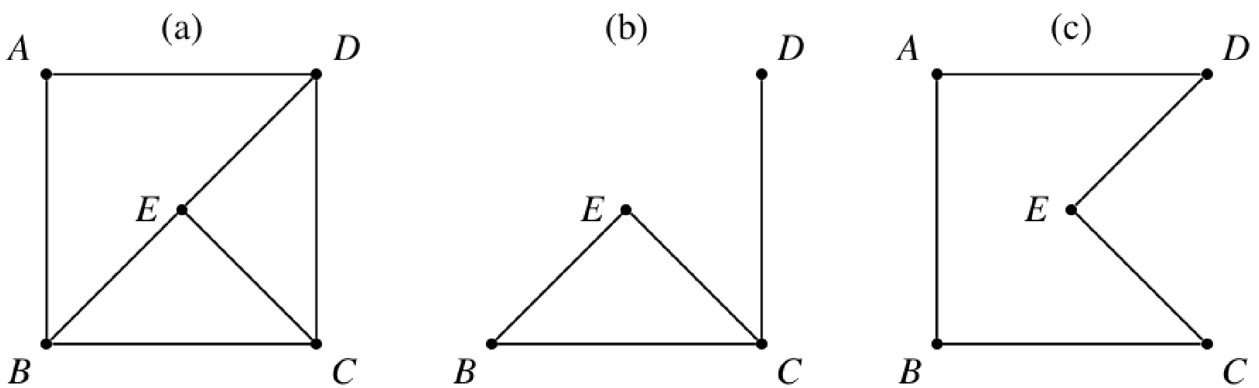


Figura 12.8: (a) Um grafo. (b) Um dos seus subgrafos. (c) Um subgrafo gerador.

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 178)

Teoria dos Grafos

- **Subgrafo induzido**
  - **Por um conjunto de vértices**
    - Se X é um subconjunto de V em G = (V, A), o <u>subgrafo de G induzido por X</u>, denotado por G[X], é o <u>maior</u> subgrafo de G no qual o conjunto de vértices é X
    - Exemplo

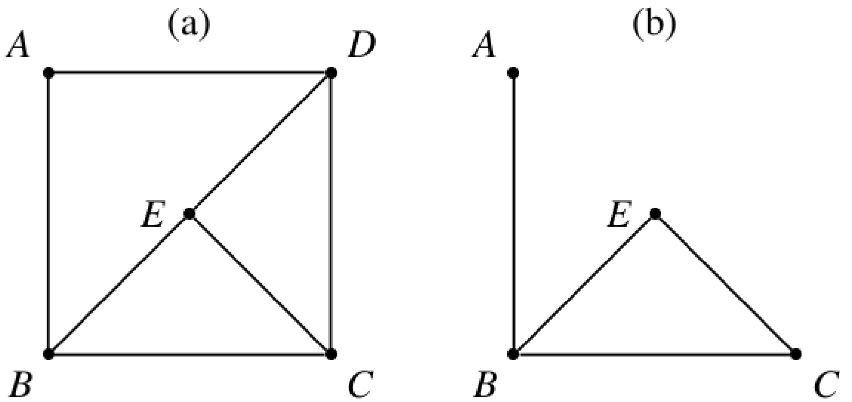
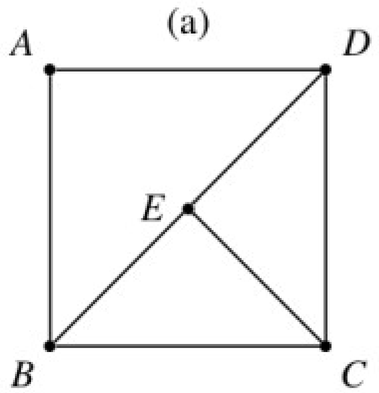


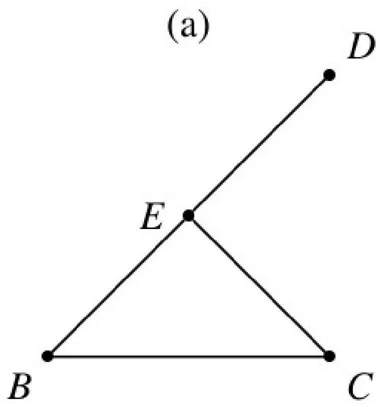
Figura 12.9: (a)Um grafo G. (b) O subgrafo induzido $G[X]$ onde $X = \{A, B, C, E\} \subseteq \mathcal{V}G$.

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 178)

Teoria dos Grafos

- **Subgrafo induzido**
  - **Por um conjunto de arestas**
    - Se Y é um subconjunto de A em G = (V, A), o <u>subgrafo de G induzido por Y</u>, denotado por G[Y], é o <u>menor</u> subgrafo de G no qual o conjunto de arestas é Y
    - Exemplo
      - Quando Y = { BC, BE, CE, DE } e G é:



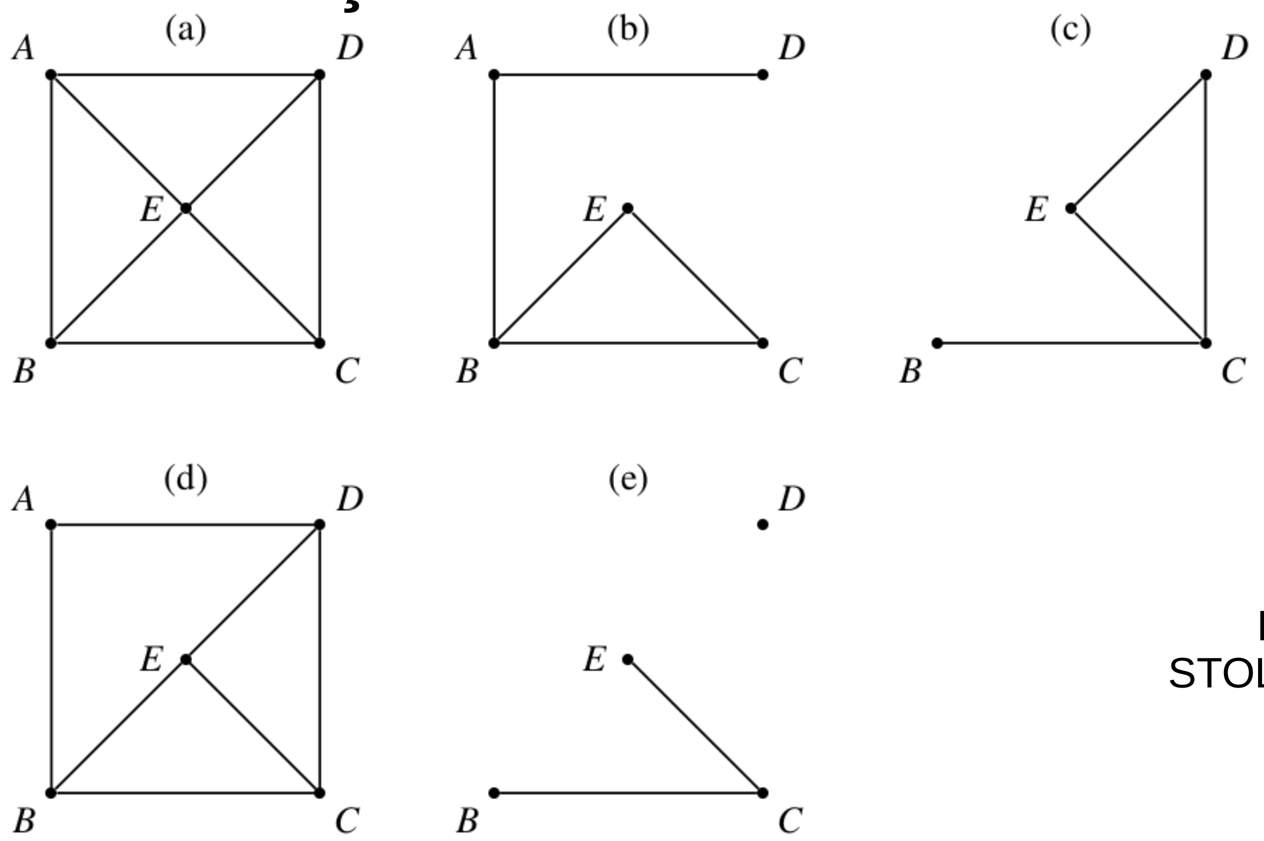


Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 179)

Teoria dos Grafos

- **Subgrafos**
  - **União e intersecção**
    - As operações de união e intersecção de conjuntos podem ser estendidas para os subgrafos de um grafo
      - **União** de dois subgrafos de um mesmo grafo G é obtida fazendo-se a união de seus conjuntos de vértices e a união de seus conjuntos de arestas
      - **Intersecção** de dois subgrafos de um mesmo grafo G é obtida fazendo-se a intersecção de seus conjuntos de vértices e a intersecção de seus conjuntos de arestas

- **Subgrafos**
  - **União e intersecção**



Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 179)

Figura 12.11: (a) Um grafo G. (b) Um dos seus subgrafos H. (c) Um dos seus subgrafos K. (d) O grafo $H \cup K$. (e) O grafo $H \cap K$.

Teoria dos Grafos

- **Grafos complementares**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dois grafos simples G e H são complementares se
  - Eles têm o mesmo conjunto de vértices V
  - Para qualquer par de vértices distintos u e v de V, a aresta uv ou (u, v) está em G sse ela não está em H
  - ➔ O complemento de G é denotado como $\overline{G}$

Teoria dos Grafos

- **Grafos complementares**
  - Exemplo

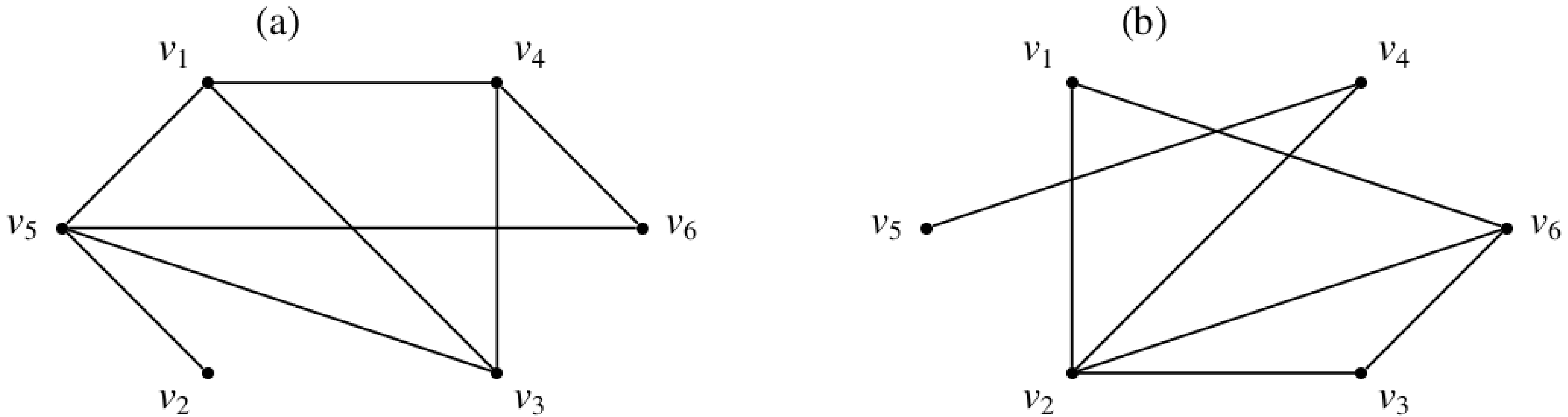


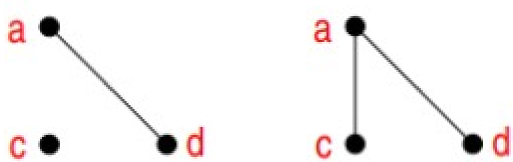
Figura 12.12: (a) Um grafo G. (b) O seu complemento $\bar{G}$

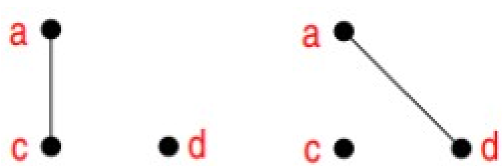
Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 180)

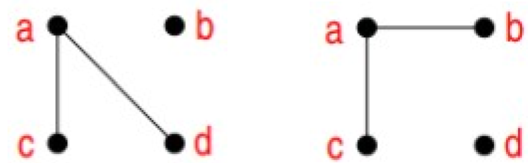
Problema #16

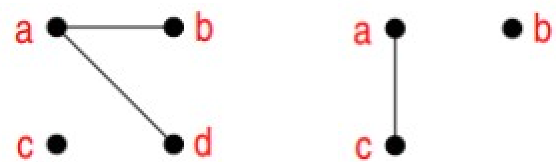
- **Marque todos os pares de grafos que são complementares**

a) 

b) 

c) 

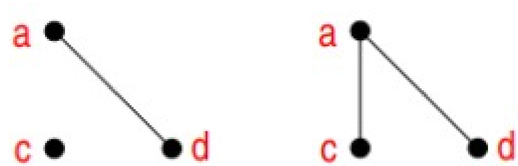
d) 

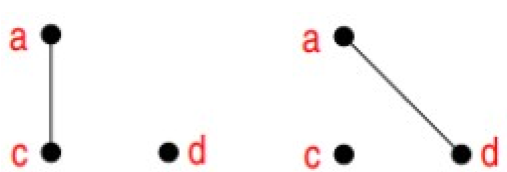
e) 

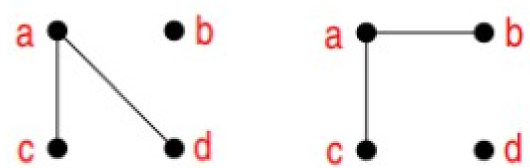
Problema #16

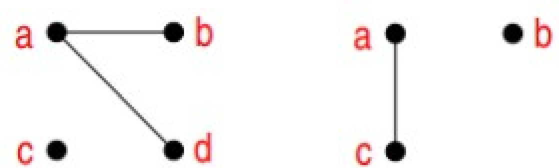
- **Marque todos os pares de grafos que são complementares**

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

RESPOSTAS

a) Sim
b) Não, pois ad pertence aos dois
c) Não, pois cd não pertence a nenhum dos dois
d) Não, pois ac pertence aos dois
e) Não, pois o conjunto de vértices é diferente

Fonte: Baseado em https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_LE9_Solucao.pdf - pág. 7