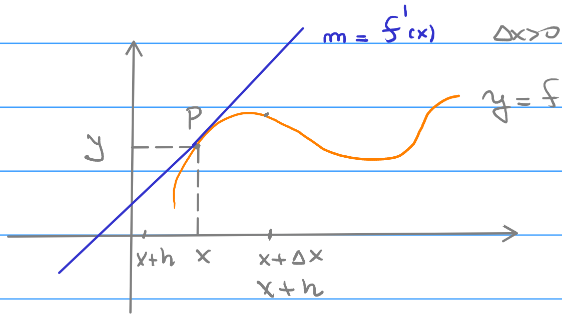
03/09 - Aula 9 - Concavidade do gráfico de uma função



$y = f(x)$;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Notação : $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \dot{f}(x)$

$$f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(f''(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(f^{(2)}(x)\right)$$

Ex. Seja $z = f(y) \Rightarrow \frac{dz}{dy} = f'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$

$$f(y) = y^2 - 2y \Rightarrow \frac{df}{dy}(y) = 2y - 2$$

10:24 Wed 1 Sep 70%

Back **Review**

V. A função tem derivada segunda positiva no intervalo $(2/3, \infty)$.

Question 5 **Completo** **Atingiu 1,09 de 2,00**

A fábrica de parafusos "Girando São Carlos", utilizando 2400 centímetros quadrados de folhas de madeira, gostaria de construir uma caixa sem tampa para alocar os parafusos de sua fabricação. A base precisa ser retangular com um lado sendo o dobro do outro. Para alocar o máximo possível de parafusos, a fábrica gostaria que a caixa tivesse o volume máximo.

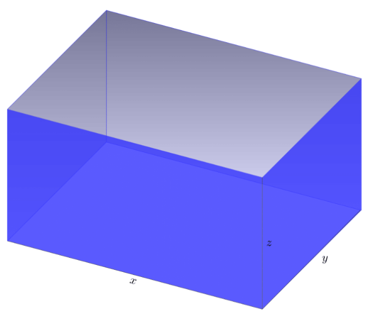


Figura: caixa sem tampa.

Baseado no problema da "Girando São Carlos",

(a) Usando que $x = 2y$, a relação obtida entre y e z é dada por
$\boxed{1}\, y^2 + \boxed{3}\, yz = 1200$.

(b) O volume $V(y)$ em função de y é dada por
$V(y) = -(\boxed{2}/\boxed{3})\, y^3 + \boxed{80}\, y$.

(c) A derivada da função $V(y)$ em relação em y é dada por
$V'(y) = -\boxed{2}\, y^2 + \boxed{80}$.

(d) As dimensões x, y e z que proporcionam a caixa que maximiza o volume são dadas por
$x = \boxed{10}$, $y = \boxed{20}$ e $z = (\boxed{55}/\boxed{2})$.

ATENÇÃO: Em cada caixa digite como resposta um número inteiro. Quando for uma fração, deve representá-la na forma irredutível.

A = área lateral

$A = xy + 2xz + 2yz$

$V = xyz$

$x = 2y$

$A = 2y^2 + 4yz + 2yz$

$V = 2y^2 z$

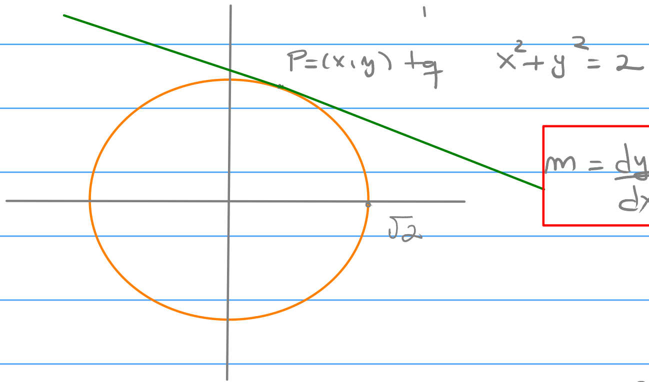
⋮

Exemplo 3.2 Obtendo $\frac{dy}{dx}$, a partir da equação $x^2 + y^2 = 2$, por derivação implícita.

Denotaremos por $(*)'$ a derivada da expressão $*$ (a expressão que estiver entre parênteses), em relação a x. Inicialmente notamos que, sendo y uma função de x temos, pela regra da cadeia, $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Para obtermos $\frac{dy}{dx}$ (ou y') no caso da equação $x^2 + y^2 = 2$, fazemos

Note que a equação ~~abaixo~~ é de uma circunferência centrada na origem e raio $\sqrt{2}$



$\boxed{m = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$

Supondo que $y = y(x)$ na eq $x^2 + y(x)^2 = 2$, $\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y(x)^2] = \frac{d}{dx}[2]$$

$$2x + 2y(x).\, y'(x) = 0$$

$$y'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y(x)} = -\frac{x}{y(x)} \quad \text{ou} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Regra: $(f(x)^2)' = 2f(x).\, f'(x)$

$(y(x)^2)' = 2y(x).\, y'(x).$

Dem:

$$y = (\underbrace{f(x)}_{u})^2 = u^2 \Rightarrow \begin{cases} y = u^2 \\ u = f(x) \end{cases} \quad e \quad \boxed{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot f'(x) \Rightarrow \qquad \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}[u^2] = 2u$$

Regra da Cadeia

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u\, f'(x) = 2.f(x).\, f'(x)$$

$$\boxed{(f(x)^n)' = n.\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)}$$

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

SOLUÇÃO 1

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Logo,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora isole dy/dx nessa equação:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$P = (3, 4) \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{4}}$, com $x = 3$, $y = 4$

$y - y_0 = \dfrac{dy}{dx}(x_0)\,(x - x_0)$

$y - 4 = -\dfrac{3}{4}(x - 3) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}$

$y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4} + 4$

$\boxed{y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{25}{4}}$

$Q = (3, -4) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

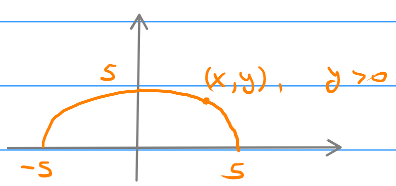
obs: $x^2 + y^2 = 25$

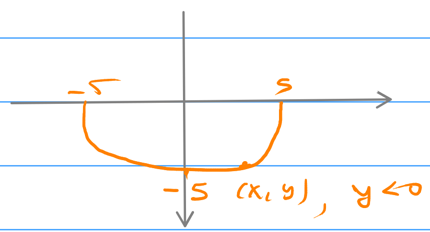
$y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

(1) $y = +\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow y \geq 0$

(2) $y = -\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow y \leq 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\}$



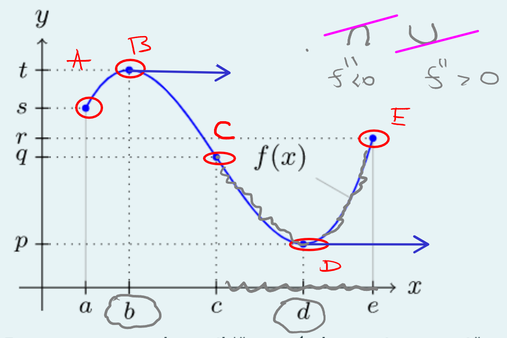


$P = (3,4) \Rightarrow y = 4 > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{25-x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left[(25-x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\cancel{2}}(25-x^2)^{\overbrace{\frac{1}{2}-1}^{-1/2}} \cdot (-\cancel{2}x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^{=3}}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3) = \frac{-3}{\sqrt{25-3^2}} = \frac{-3}{4}$$

(Aula 06) Considere a ilustração abaixo exibindo o gráfico de uma função f que é contínua no intervalo fechado $[a, e]$.



Descreva com a maior exatidão possível os pontos que estão em destaque na ilustração.

B e D são pontos críticos pois $f'(b) = f'(d) = 0$

C é ponto de inflexão $\Leftrightarrow f''(c) = 0$

$f'(x) > 0$ se $x \in [a,b] \cup [d,e)$

$f'(x) < 0$ se $b \leq x \leq d$

$f''(x) > 0$ se $x \in (c,e]$

$f''(x) < 0$ se $x \in [a,c)$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^4}$

(p) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h} = ?$

Calcule $f'(x) = \dfrac{(x)' \cdot (x^2-1)^4 - x \cdot [(x^2-1)^4]'}{[(x^2-1)^4]^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-1)^4 - x\,[4(x^2-1)^3 \cdot 2x]}{(x^2-1)^8} = \frac{(x^2-1)^4 - 8x^2(x^2-1)^3}{(x^2-1)^8}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)^4} - \frac{8x^2}{(x^2-1)^5}$$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h}}_{\text{quociente de Newton em } x=2} = f'(2) \quad \text{onde} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -\frac{2}{2^3} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Logo, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h} = -\frac{1}{4}$

Por simplificação temos:

$$\frac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h} = \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{2^2}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{1}{4+4h+h^2} - \frac{1}{4} \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (4+4h+h^2)}{4(4+4h+h^2)} \right] = \frac{1}{h} \left[\frac{\cancel{4} - \cancel{4} - 4h - h^2}{4.(4+4h+h^2)} \right] =$$

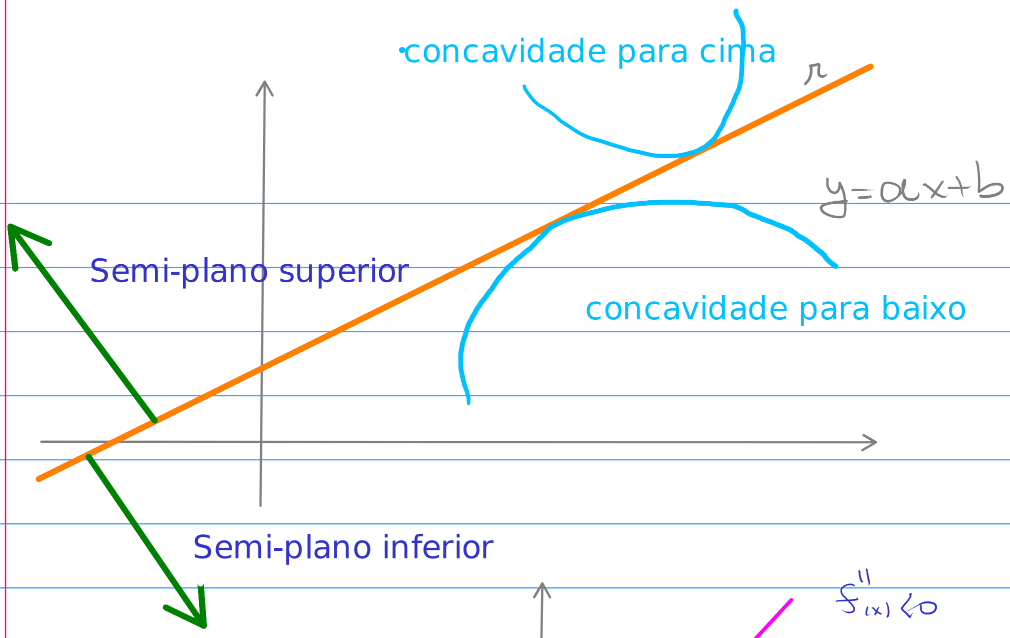
$$= \frac{\cancel{h}(-4-h)}{\cancel{h}[16+16h+4h^2]} = \frac{-4-h}{16+16h+4h^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^{-2} - 2^{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-4-h}{16+16h+4h^2} = \frac{-4}{16} = \frac{-1}{4}$$

Concavidade

Teorema 6.2. *Suponhamos que $f(x)$ é derivável duas vezes nos pontos do intervalo aberto I.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então a curva $y = f(x)$ é côncava para cima no intervalo I;*
2. *se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então a curva $y = f(x)$ é côncava para baixo no intervalo I.*



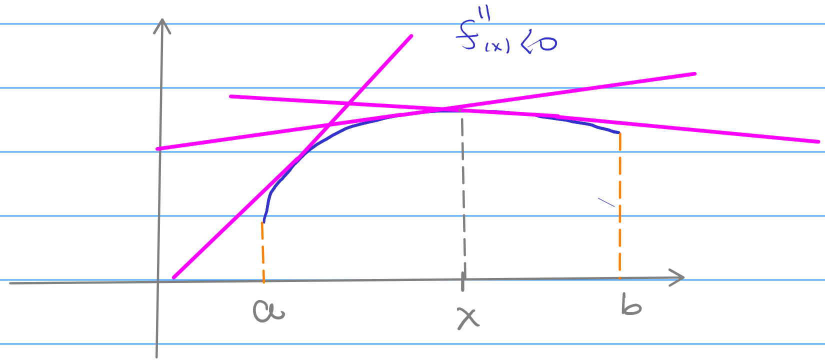
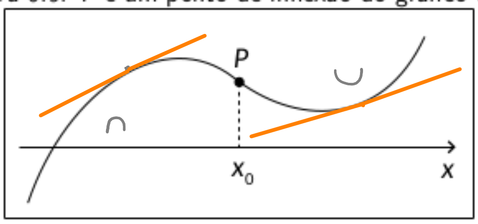


Figura 6.9. P é um ponto de inflexão do gráfico de f.



$f''(x) > 0$ se $x \in (x_0, +\infty)$

$f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, x_0)$

Exemplo: Esboce o gráfico da função abaixo:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1} = \frac{p}{q} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p' \cdot q - p \cdot q'}{q^2}$$

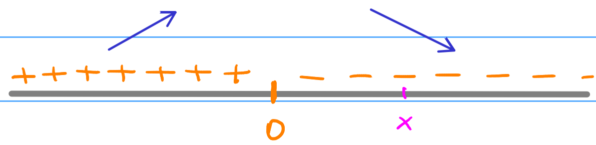
$D(f) = \mathbb{R}$

Etapa 1: Cálculo dos pontos críticos. $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{(+)}}$$



$\boxed{x = 0 \text{ é ponto de máximo}}$

Etapa 2: Cálculo do ponto de inflexão e análise da concavidade

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2+1)^2 - (-4x).2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \iff 3x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pontos de inflexão $= \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

$$f''(x) = \frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$\cup$ $\cap$ $\cup$

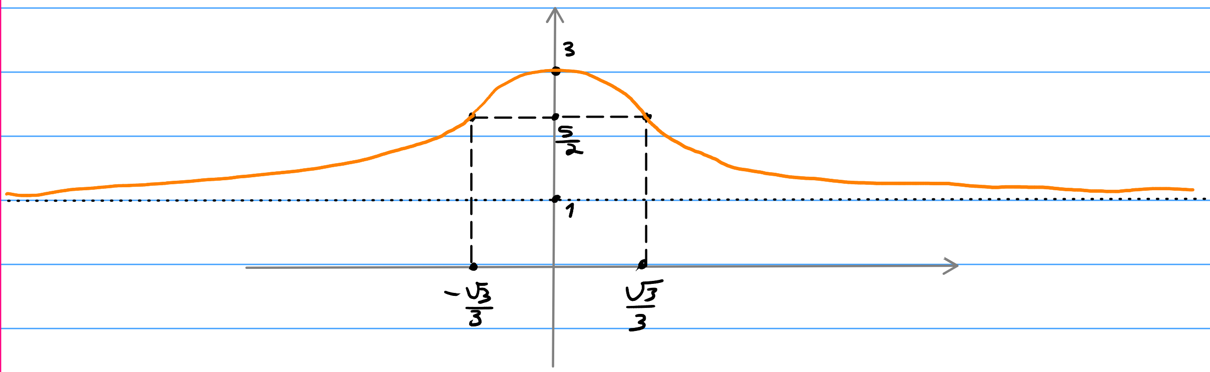
+ + + + + $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ − − − − − − $+\frac{\sqrt{3}}{3}$ + + + +

Etapa 3: Esboçar o gráfico

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$f(0) = 3 \quad , \quad f\left(\pm\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+3}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1} = \frac{+\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}+1} = \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow (0,3), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{2}\right), \left(+\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{2}\right) \in Gr(f)$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$