Universidade Federal de São Carlos – Departamento de Computação
Matemática Discreta – Profa. Helena Caseli

Lista de Exercícios – Relações

Exercícios de Definições e Operações

1) Dados A = {1, 2}, B = {x, y, z} e C = {3, 4} ache $A \times B \times C$.

2) São dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {x, y, z}. Seja R = {(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)}
   a) Determine a matriz retangular da relação.
   b) Desenhe os discos disjuntos de R.
   c) Ache a relação inversa R^{-1} de R.

3) Seja A = {1, 2, 3, 4, 6} e seja R a relação em A definida por "*x* divide *y*", escrita $x|y$.
   a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados.
   b) Desenhe seu grafo orientado.
   c) Ache a relação inversa R^{-1} de R. R^{-1} pode ser descrita por palavras?

4) Determine R^{-1} para cada uma das seguintes relações:
   a) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}
   b) R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}
   c) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x-y = 1\}$
   d) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x|y\}$
   e) $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy > 0\}$

Exercícios de Propriedades

5) Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, determine se a relação é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.
   a) *R* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)}
   b) *R* = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)}
   c) *R* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)}
   d) *R* = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)}
   e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

6) Suponha que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Represente esta relação como um conjunto de pares ordenados e verifique se R é reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva.

7) Seja R a relação *tem o mesmo tamanho que* definida sobre todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ (A R B se e somente se $|A| = |B|$). Quais das cinco propriedades (reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, e transitiva) R possui? Demonstre suas respostas.

8) Dê exemplos de relações R em A = {1, 2, 3} que têm a propriedade requerida.
   a) R é simétrica e antissimétrica.
   b) R não é nem simétrica nem antissimétrica.
   c) R é transitiva, mas $R \cup R^{-1}$ não é transitiva.

9) Cada uma das frases seguintes define uma relação nos inteiros positivos N^+:
   a) *x* é maior que *y*

b) xy é o quadrado de um inteiro
c) $x + y = 10$
d) $x + 4y = 10$
Determine quais relações são: i) reflexiva, ii) simétrica, iii) antissimétrica, iv) transitiva.

10) Sejam R e S relações em um conjunto A. Assumindo que A tem pelo menos três elementos, verifique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa. Se falsa, dê um contraexemplo no conjunto A = {1, 2, 3}.
a) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ é simétrica.
b) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ é simétrica.
c) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ é reflexiva.
d) Se R e S são reflexivas, então $R \cup S$ é reflexiva.
e) Se R é antissimétrica então R^{-1} é antissimétrica.
f) Se R é reflexiva, então $R \cap R^{-1}$ é não vazia.

Exercícios de Relações de Equivalência

11) Quais dos conjuntos a seguir são relações de equivalência?
a) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)} no conjunto {1, 2, 3}
b) R = {(1, 2), (2, 3), (3, 1)} no conjunto {1, 2, 3}
c) $|$ em $\mathbb{Z}$
d) $\leq$ em $\mathbb{Z}$
e) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ no conjunto {1, 2, 3}

12) Para cada relação de equivalência ache a classe de equivalência pedida.
a) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} em {1, 2, 3, 4}. Ache [1].
b) R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} em {1, 2, 3, 4}. Ache [4].

13) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e a relação de equivalência R sobre esse conjunto:
R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.
Encontre as classes de equivalência dessa relação.

14) Seja R a seguinte relação de equivalência no conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}:
R = {(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)}
Ache a partição de A induzida por R, isto é, ache todas as classes de equivalência de R.

15) Considere o conjunto de palavras W = {saúde, luva, sal, pato, peso, som}. Ache W/R onde R é a relação de equivalência em W definida por
a) “tem o mesmo número de letras que” ou
b) “começa com a mesma letra que”.

Exercícios de Relações de Ordem

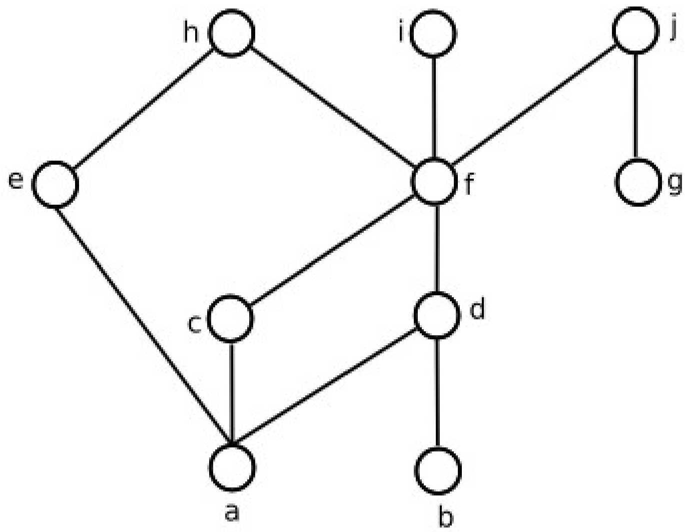
16) Desenhe o diagrama de Hasse para as seguintes ordens parciais:
a) A = {a, b, c} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)}
b) A = {a, b, c, d} e R = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (c, d)}
c) A = {$\emptyset$, {a}, {a, b}, {c}, {a, c}, {b}} e $B \mathrel{R} C \leftrightarrow B \subseteq C$

17) Para o exercício 17, encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimal, máximo e maximal.

18) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “x divide y” no conjunto {2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre um subconjunto totalmente ordenado com quatro elementos.

19) Desenhe o diagrama de Hasse para a ordem parcial “x divide y” no conjunto {3, 6, 9, 18, 54, 72, 108, 162}. Encontre (se existirem) os elementos mínimo, minimais, máximo e maximais. Encontre os pares de elementos que não estão relacionados.

20) Para cada par de elementos x, y relacionados a seguir, determine se x<y, y<x ou se x e y são não comparáveis, no conjunto PO ilustrado na figura dada.



a) a, b.
b) a, c.
c) c, g.
d) b, h.
e) c, i.
f) h, d.

21) Para o conjunto PO do exercício anterior, determine:
a) Uma cadeia de tamanho máximo.
b) Uma cadeia de tamanho mínimo.
c) Uma cadeia contendo dois elementos e que não pode ser estendida para uma cadeia maior.
d) Uma anti-cadeia de tamanho máximo.
e) Uma anti-cadeia de tamanho mínimo.
f) A largura do conjunto.
g) A altura do conjunto.
h) Os elementos (se houver) maximal, máximo, minimal e mínimo.

22) Denotando por P_n o conjunto de todos os divisores positivos do inteiro positivo n, ordenados por divisibilidade, trace o diagrama de Hasse de P_{16} .

23) Para o conjunto do exercício anterior, determine uma cadeia máxima, uma anti-cadeia máxima, a altura e a largura do conjunto PO.

24) Assinale como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, justificando.
a) Sejam x e y elementos de um conjunto PO que pertencem a uma mesma cadeia. Então exatamente um dos casos seguintes é verdadeiro: x<y, x=y ou x>y.

b) Sejam C e D cadeias em um conjunto PO, Então, C $\cup$ D também é uma cadeia.

c) Sejam C e D cadeias em um conjunto PO, Então, C $\cap$ D também é uma cadeia.

d) Dois pontos em um diagrama de Hasse (representando dois elementos de um conjunto PO) nunca podem ser unidos por um segmento horizontal.

e) Seja A um conjunto de elementos em um conjunto PO. Se A é uma anti-cadeia, então dois elementos quaisquer de A nunca são ligados por segmentos de reta no diagrama de Hasse.

25) Diga se a relação “é-comparável” em um conjunto PO tem alguma das propriedades: reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva. Justifique sua resposta.

26) Para cada um dos seguintes conjuntos PO, determine os elementos máximo, maximal, mínimo e minimal:
a) Os inteiros {1, 2, 3, 4, 5} ordenados por divisibilidade.

b) O conjunto de todos os subconjuntos de {1, 2, 3} ordenados pela relação “é-umsubconjunto-de”.

27) Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:
a) Se um conjunto PO tem um elemento máximo, este deve ser único.

b) É possível um conjunto PO ter um elemento que é, simultaneamente, máximo e mínimo.

c) É possível um conjunto PO ter um elemento que é, simultaneamente, maximal e minimal, mas não é nem máximo nem mínimo.

d) Se x é um elemento minimal e y é um elemento maximal em um conjunto PO, então $x \leq y$.