Gráficos e curvas de Nível para funções de duas variáveis

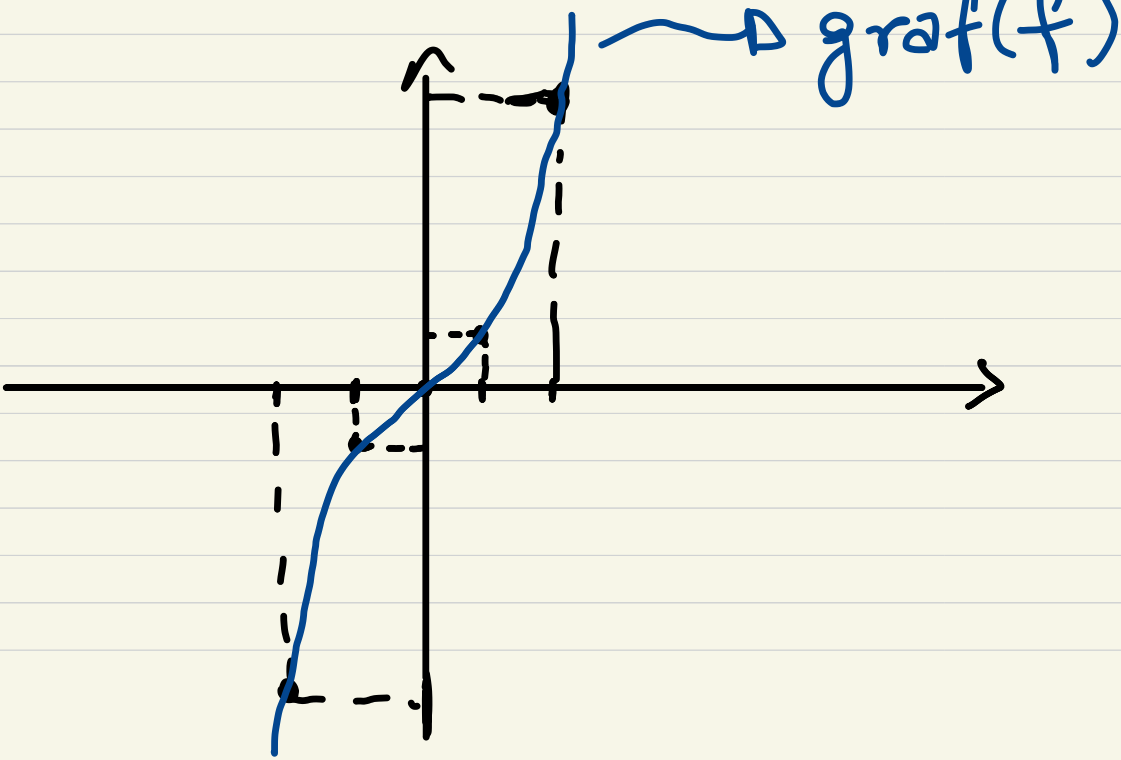
Lembrando...

$$f(x) = x^3$$

$x \in D_f$

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y) \,;\, \underline{y = f(x)}\}$$

$$\subset \mathbb{R}^2$$



Def: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f como o seguinte subconjunto

$$\left\{ (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\in D_f}, \overbrace{f(x_1, \dots, x_n)}^{\in \mathbb{R}}), \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in D \right\} := G_f$$

$$\subset \underline{\underline{\mathbb{R}^{n+1}}}$$

No caso $n=2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$

Quando $n=3$, não é possível visualizar o gráfico da f, pois este é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Exemplo: Determine o domínio e esboce o gráfico da função

$$f(x,y) = 1$$

Resolução: $D_f = \mathbb{R}^2$

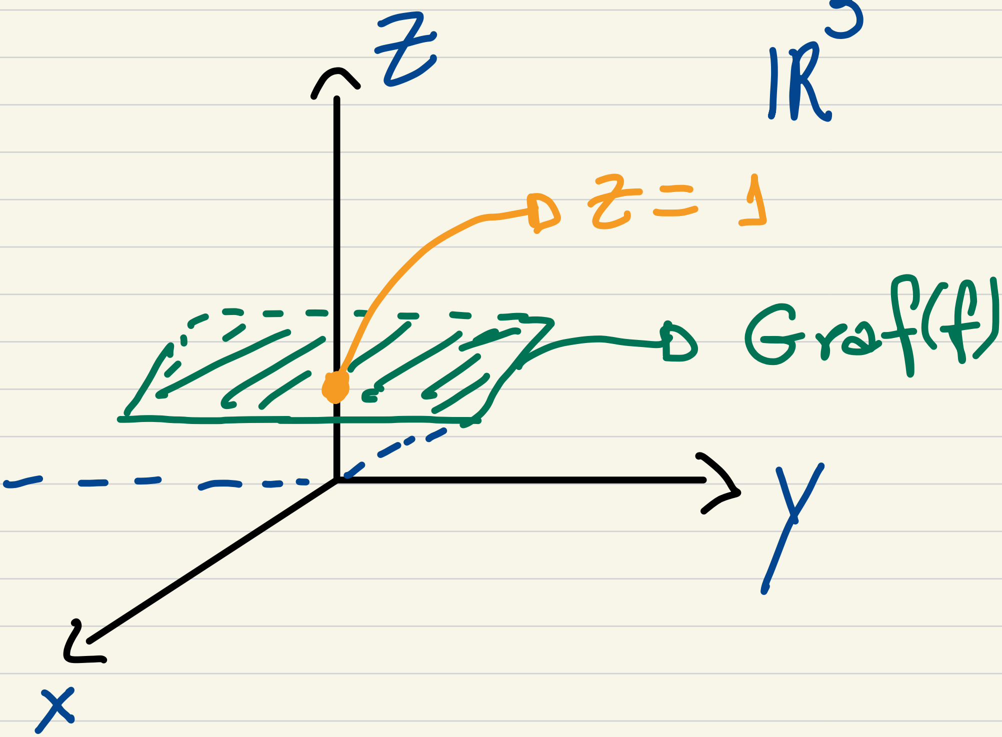
Escrevendo,

$$z = f(x,y) \Rightarrow z = 1$$

$$G_f = \{(x, y, 1);\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Em $\mathbb{R}^3$

$$G_f = \{(x, y, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\}$$



Exemplo: Determine o domínio e esboce o gráfico da função

$$f(x,y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$$

Solução:

$$D_f: \ 1-x^2-y^2 \geq 0 \quad \times(-1)$$

$$-1+x^2+y^2 \leq 0$$

$$x^2+y^2 \leq 1$$

$$D_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

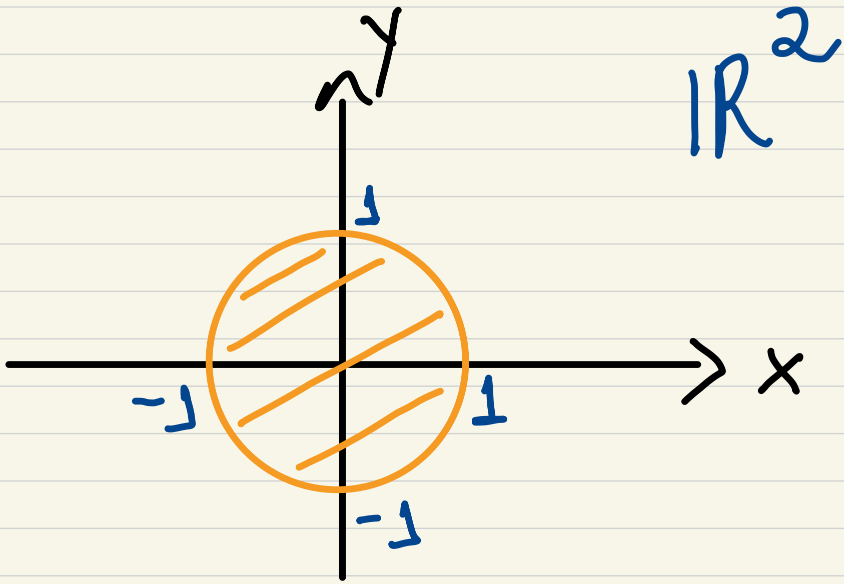


Gráfico:

$$\{(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{\in \mathbb{R}}) ; (x,y) \in D_f\}$$

Escrevendo $z = f(x,y)$

$$\Rightarrow z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2 , \quad \boxed{z \geq 0}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \quad z \geq 0$$

$\mathbb{R}^3$

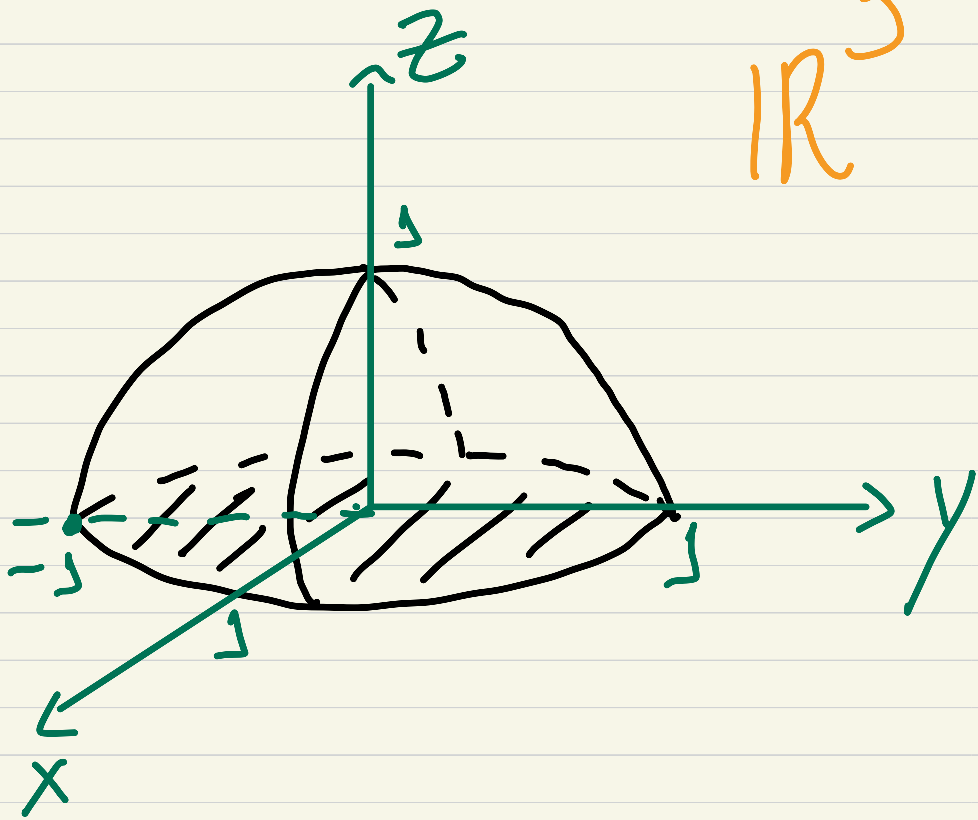


Gráfico de f consiste da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ acima do plano xy.

Exemplo: A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é
$T(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ graus.

(a) Encontre a temperatura no ponto $(1,2)$.

$$T(1,2) = 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2$$
$$= 9 + 4 \cdot 4 = 25$$

(b) Encontre a Equação da curva ao longo da qual a temperatura tem valor constante igual a 36.

$$T(x,y) = 36$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \qquad (\div 36)$$

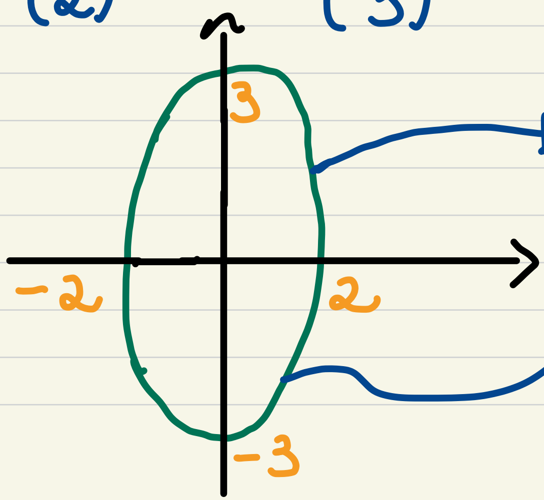
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(c) Esboce a curva do item (b).

A curva de Eq,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{(2)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$$



valor da Temperatura é 36

Def: Uma curva ao longo da qual a função $z = f(x,y)$ tem valor constante é denominada curva de nível da função f.

Eq da C.N. em $K \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = K$$