Lógica

Lógica de Predicados
Aula 17 – Cláusulas de Horn e FNC

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Literal**
  - Um literal é um átomo (literal positivo) ou a negação de um átomo (literal negativo)
    - Os literais L e $\neg$L são ditos **complementares**
- **Cláusula**
  - Uma cláusula é uma fórmula da forma:

$$\forall X_1 \; \forall X_2 \; \forall X_3 \; \ldots \; \forall X_p \; (L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots \vee L_q)$$

    - Na qual cada L_i ($1 \leq i \leq q$) é um literal e $X_1, X_2, \ldots, X_p$ são todas as variáveis que ocorrem em $L_1, L_2, \ldots, L_q$
    - Todas as variáveis são quantificadas universalmente

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula**
  - Exemplos
    - $\forall X1\ p(X1,a)$
    - $\forall X1\ \forall X2\ r(f(X1),X2)$
    - $\forall X1\ \forall X2\ (\neg p(X1,a) \vee r(f(X1),X2))$

CLÁUSULAS

    - $\neg X1 \vee p(a)$
    - $\forall X1\ \forall X2\ (\neg p(X1,a) \wedge r(f(X1),X2))$
    - $\forall X1\ p(X1,a) \rightarrow r(a,X1)$

NÃO CLÁUSULAS

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula**

$$\forall X_1\ \forall X_2\ \forall X_3 \ldots \forall X_p\ (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n)$$

  - Pode ser reescrita como

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$$

$\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$ comutatividade

$\neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$ ”fatoração” (De Morgan)

$(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$ equivalência de $\rightarrow$

Pode-se entender como uma disjunção de literais em que
A: literal positivo e B: literal negativo

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula**

$$\forall X_1 \ \forall X_2 \ \forall X_3 \ldots \forall X_p \ (A_1 \lor A_2 \lor \ldots \lor A_m \lor \neg B_1 \lor \neg B_2 \lor \ldots \lor \neg B_n)$$

  - Pode ser reescrita como

$$A_1 \lor A_2 \lor \ \ldots \ \lor A_m \leftarrow B_1 \land B_2 \land \ \ldots \ \land B_n$$

  - Se $m > 1$ as conclusões são indefinidas, ou seja, existe mais do que uma conclusão
  - Se $m = 1$, $n \geq 0$ a cláusula é definida
  - Se $m = 0$, $n = 0$, a cláusula é vazia (nil)

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula de Horn**
  - Cláusulas que contêm no máximo 1 literal positivo
    - **Cláusula definida de programa (regra)**
      - É uma cláusula de programa que contém exatamente 1 literal positivo

$$\underbrace{A}_{\text{cabeça}} \leftarrow \underbrace{B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n}_{\text{corpo}}$$

  - $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ são átomos

> Para toda atribuição de valores às variáveis que ocorrem na cláusula, se $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são todas verdadeiras então A é verdadeira

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula de Horn**
  - Cláusulas que contêm no máximo 1 literal positivo
    - **Cláusula definida de programa (regra)**
      - É uma cláusula de programa que contém exatamente 1 literal positivo

$$A \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$$

      - $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ são átomos
    - **Cláusula unária (fato) – corpo vazio**

$$A \leftarrow$$

A é sempre verdade, por isso é um fato!

Lógica de Predicados

SINTAXE

- **Cláusula de Horn**
  - Cláusulas que contêm no máximo 1 literal positivo
    - **Cláusula definida de programa (regra)**
      - É uma cláusula de programa que contém exatamente 1 literal positivo

$$A \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$$

      - $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ são átomos
    - **Cláusula unária (fato) – corpo vazio**

$$A \leftarrow$$

    - **Cláusula meta (consulta) – sem cabeça**

$$\leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Prenex (FNP)**
  - Uma fórmula α da Lógica de Predicados está na **Forma Normal Prenex** (FNP) se e somente se α estiver na forma

$$(Q_1X_1)(Q_2X_2)...(Q_nX_n)\ (M)$$

    - Em que cada (Q_iX_i), $i = 1, \ldots, n$ é $(\forall X_i)$ ou $(\exists X_i)$ e M é uma fórmula que não contém quantificadores
      - → $(Q_1X_1)(Q_2X_2)...(Q_nX_n)$ é o **prefixo** de α
      - → M é a **matriz** de α
    - Exemplo: $\forall X\ \exists Y\ p(X,Y)$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - α está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) se e somente se estiver na FNP e sua matriz for uma conjunção de disjunções de literais
  - Também conhecida como **Forma Clausal**
  - É empregada no método de inferência **resolução** que serve de base para a programação lógica

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Exemplos
    - $\forall X\ \forall Y\ ((p(X) \vee \neg q(Y)) \wedge (\neg r(a,b) \vee \neg p(a)))$
    - $\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (s(X,Y,Z) \wedge p(Y))$
    - $q(a) \wedge p(b)$

ESTÁ NA FNC

- $\forall X \neg \forall Y\ \forall Z\ (s(Z,Y,Z) \wedge p(X))$
- $\forall X\ (p(X) \rightarrow p(f(X)))$
- $\forall X\ \forall Y\ ((p(X) \wedge \neg q(Y)) \vee (\neg r(a,b) \wedge \neg p(a)))$

NÃO ESTÁ NA FNC

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC
    1. Eliminar variáveis livres
       - Se a fórmula α tiver uma variável livre, X, substitua α por $(\exists X\ \alpha)$
       - ➔ Esse procedimento deve ser repetido até que a fórmula não contenha variáveis livres

Entrada: $\forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\exists X\ \forall V\ q(U,V) \wedge \exists X\ p(f(X))))$

Saída – Passo 1: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\exists X\ \forall V\ q(U,V) \wedge \exists X\ p(f(X))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC
    2. Eliminar quantificadores desnecessários
       - Eliminar todo quantificador $\forall X$ ou $\exists X$ que não contenha nenhuma ocorrência de X em seu escopo

Saída – Passo 1: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\exists X\ \forall V\ q(U,V) \wedge \exists X\ p(f(X))))$

Saída – Passo 2: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\forall V\ q(U,V) \wedge \exists X\ p(f(X))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC
    3. Renomear variáveis quantificadas várias vezes
       - Se uma mesma variável é governada por dois quantificadores, substitua a variável de um deles e todas as suas ocorrências por uma nova variável que não ocorra na fórmula
       - ➔ Esse passo deve ser repetido até que todos os quantificadores governem variáveis diferentes

Saída – Passo 2: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\forall V\ q(U,V) \wedge \exists X\ p(f(X))))$

Saída – Passo 3: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\forall V\ q(U,V) \wedge \exists Y\ p(f(Y))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC

    4. Remover $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$
       - $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$
       - $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$

Saída – Passo 3: $\exists U\ \forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\forall V\ q(U,V) \wedge \exists Y\ p(f(Y))))$

Saída – Passo 4: $\exists U\ \forall X\ (\neg p(X) \vee \neg(\forall V\ q(U,V) \wedge \exists Y\ p(f(Y))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC

    5. Mover a negação para o interior da fórmula
       - $\neg(\forall X)(\alpha) \equiv (\exists X)(\neg\alpha)$
       - $\neg(\exists X)(\alpha) \equiv (\forall X)(\neg\alpha)$
       - $\neg(\alpha \land \beta) \equiv (\neg\alpha \lor \neg\beta)$
       - $\neg(\alpha \lor \beta) \equiv (\neg\alpha \land \neg\beta)$
       - $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$

Saída – Passo 4: $\exists U\ \forall X\ (\neg p(X) \lor \neg(\forall V\ q(U,V) \land \exists Y\ p(f(Y))))$

$\exists U\ \forall X\ (\neg p(X) \lor (\neg \forall V\ q(U,V) \lor \neg\exists Y\ p(f(Y))))$

Saída – Passo 5: $\exists U\ \forall X\ (\neg p(X) \lor (\exists V\ \neg q(U,V) \lor \forall Y\ \neg p(f(Y))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC

    6. Eliminar quantificadores existenciais – Skolemização
       - Substitua cada ocorrência da variável quantificada existencialmente por uma função de Skolem:
         - Uma função cujos argumentos são as variáveis quantificadas universalmente que influenciam o quantificador existencial sendo removido
         - Uma constante, se o quantificador existencial sendo removido não estiver no escopo de nenhum universal

Saída – Passo 5: $\exists U\ \forall X\ (\neg p(X) \vee (\exists V\ \neg q(U,V) \vee \forall Y\ \neg p(f(Y))))$

Saída – Passo 6: $\forall X\ (\neg p(X) \vee (\neg q(a,g(X)) \vee \forall Y\ \neg p(f(Y))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC
    7. Obter a forma normal Prenex e remover os quantificadores universais
       - Mova todos os quantificadores universais para a frente da fórmula fazendo com que o escopo de cada um deles seja a fórmula toda (FNP)
       - Elimine as ocorrências explícitas dos quantificadores universais

Saída – Passo 6: $\forall X\ (\neg p(X) \vee (\neg q(a,g(X)) \vee \forall Y\ \neg p(f(Y))))$

$\forall X\ \forall Y\ (\neg p(X) \vee \neg q(a,g(X)) \vee \neg p(f(Y)))$

Saída – Passo 7: $\neg p(X) \vee \neg q(a,g(X) \vee \neg p(f(Y)))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Regras para transformar uma fórmula para a FNC

    8. Colocar a matriz da FNP na forma conjuntiva
       - $(\alpha \land \beta) \lor \gamma \equiv (\alpha \lor \gamma) \land (\beta \lor \gamma)$
       - $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$

Entrada: $\forall X\ (p(X) \rightarrow \neg(\exists X\ \forall V\ q(U,V) \land \exists X\ p(f(X))))$

FNC equivalente: $\neg p(X) \lor \neg q(a,g(X)) \lor \neg p(f(Y))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Encontre as FNC para as fórmulas a seguir
    - a) $(\forall X\ (p(X))) \rightarrow (\exists X\ q(X))$
    - b) $(\forall X\ (\forall Y\ ((\exists Z\ (p(X,Z) \wedge p(Y,Z))) \rightarrow (\exists U\ q(X,Y,U)))))$
    - c) $(\forall X\ (\forall Y\ (s(X,Y) \leftrightarrow (\forall U\ (p(U,X) \rightarrow p(U,Y))))))$
    - d) $(\forall X\ (\exists Y\ (\forall Z\ (irma(Z,Y) \leftrightarrow (irma(Z,X) \wedge irma(X,Y))))))$

Lógica de Predicados

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Encontre as FNC para as fórmulas a seguir

    a) $(\forall X\ (p(X))) \rightarrow (\exists X\ q(X))$

    b) $(\forall X\ (\forall Y\ ((\exists Z\ (p(X,Z) \wedge p(Y,Z))) \rightarrow (\exists U\ q(X,Y,U)))))$

    c) $(\forall X\ (\forall Y\ (s(X,Y) \leftrightarrow (\forall U\ (p(U,X) \rightarrow p(U,Y))))))$

    d) $(\forall X\ (\exists Y\ (\forall Z\ (irma(Z,Y) \leftrightarrow (irma(Z,X) \wedge irma(X,Y))))))$

RESPOSTAS

a) $\neg p(a) \vee q(b)$

b) $\neg p(X,Z) \vee \neg p(Y,Z) \vee q(X,Y,f(X,Y))$

c) C_1: $\neg s(X,Y) \vee \neg p(U,X) \vee p(U,Y)$ C_2: $p(f(X,Y),X) \vee s(X,Y)$

C_3: $\neg p(f(X,Y),Y) \vee s(X,Y)$

d) C_1: $\neg irma(Z,f(X)) \vee irma(Z,X)$ C_2: $\neg irma(Z,f(X)) \vee irma(X,f(X))$

C_3: $\neg irma(Z,X) \vee \neg irma(X,f(X)) \vee irma(Z,f(X))$