Derivada Direcional

Derivada Direcional

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis, $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do domínio de f e $\vec{u}$ um vetor não nulo do plano xy.

Denote por L a reta que passa por P_0 e tem a direção de $\vec{u}$:

$$P_0 + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

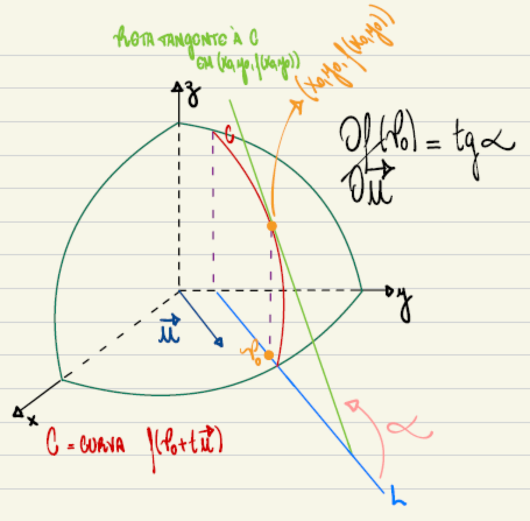
A **derivada direcional** de f em P_0 na direção de $\vec{u}$, denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0),$$

é a taxa de variação de f em P_0 na direção de $\vec{u}$.

Seja C a curva de equação $z = f(P_0 + t\vec{u})$, $t \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva C no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Derivada Direcional

Em outras palavras, a **derivada direcional** de $f(x, y)$ no ponto P_0 e na direção do vetor $\vec{u}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t\|\vec{u}\|},$$

se esse limite existir.

Derivada Direcional

Em particular,

• a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ é a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto P_0 e na direção do vetor $(1, 0)$;

• a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ é a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto P_0 e na direção do vetor $(0, 1)$.

Derivada Direcional

Teorema 1: Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

ou seja, a derivada direcional de f em P_0 na direção de $\vec{u}$ é o produto escalar entre o gradiente da função f no ponto P_0 e o vetor unitário $\vec{u}/\|\vec{u}\|$.

Derivada Direcional

Demonstração: Desde que f é diferenciável em P_0, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0) - \nabla f(P_0)\cdot(t\vec{u})}{t\|\vec{u}\|} = 0.$$

De forma equivalente,

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t\|\vec{u}\|} - \frac{\nabla f(P_0)\cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right| = 0.$$

Mas isto implica que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t\|\vec{u}\|} = \nabla f(P_0)\cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

$\square$

Derivada Direcional

Seja $f(x, y, z)$ uma função de três variáveis, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do domínio de f e $\vec{u}$ um vetor não nulo do espaço $\mathbb{R}^3$.

Denote por L a reta que passa por P_0 e tem a direção de $\vec{u}$:

$$P_0 + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A **derivada direcional** de $f(x, y, z)$ no ponto P_0 e na direção do vetor $\vec{u}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t\|\vec{u}\|},$$

se esse limite existir.

Derivada Direcional

Versão tridimensional do **Teorema 1**:

Teorema 2: Se $f(x, y, z)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

ou seja, a derivada direcional de f em P_0 na direção de $\vec{u}$ é o produto escalar entre o gradiente da função f no ponto P_0 e o vetor unitário $\vec{u}/\|\vec{u}\|$.

Derivada Direcional

Exemplo 1: Determine a taxa de variação de $f(x,y,z) = xyz + e^{2x+y}$ no ponto $P_0 = (-1,2,1)$ e na direção do vetor $\vec{u} = (1,1,\sqrt{2})$.

Resolução: O gradiente da função f é

$$\nabla f(x,y,z) = \left(yz + 2e^{2x+y}, xz + e^{2x+y}, xy\right).$$

Como f é diferenciável em $P_0 = (-1,2,1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,1) &= \nabla f(-1,2,1) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\
&= (4,0,-2) \cdot \frac{(1,1,\sqrt{2})}{2} \\
&= 2 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Derivada Direcional

Teorema 3: Seja f uma função diferenciável em P_0 tal que

$$\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}.$$

Então, o valor **máximo** de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ ocorre quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o valor máximo.

Derivada Direcional

Demonstração: Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= \|\nabla f(P_0)\| \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \cos\theta \\ &= \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta,\end{aligned}$$

em que θ é o ângulo entre $\nabla f(P_0)$ e $\vec{u}$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ assume seu valor máximo quando $\cos\theta = 1$, ou seja, $\theta = 0$. Assim, $\vec{u}$ tem a direção e o sentido de $\nabla f(P_0)$. Ainda mais, seu valor máximo é $\|\nabla f(P_0)\|$. $\square$

Derivada Direcional

Exemplo 2: Seja $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2/4$. Encontre a direção segundo a qual $f(x, y)$ cresce mais rapidamente no ponto $(1, 2)$ e determine a taxa máxima de crescimento de f em $(1, 2)$.

Resolução: O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y) = (2x, y/2).$$

Em $(1, 2)$,

$$\nabla f(1, 2) = (2, 1).$$

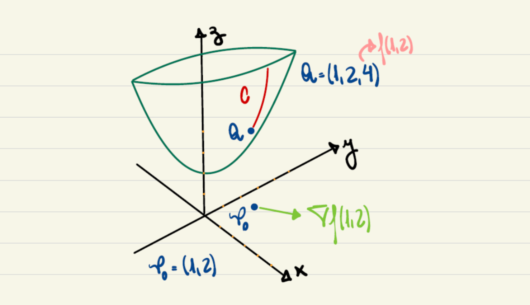
Este vetor define a direção segundo a qual $f(x, y)$ aumenta mais rapidamente em $(1, 2)$.

A taxa de aumento de f em $(1, 2)$ é

$$\|\nabla f(1, 2)\| = \|(2, 1)\| = \sqrt{5}.$$

Derivada Direcional

Geometricamente:



Se um ponto se move no plano xy passando por P_0 e na direção de $\nabla f(1,2)$, o ponto correspondente o gráfico descreve uma curva C de máximo aclive no parabolóide.

Derivada Direcional

Similarmente ao **Teorema 3**,

Teorema 4: Seja f uma função diferenciável em P_0 tal que

$$\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}.$$

Então, o valor **mínimo** de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ ocorre quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido de $-\nabla f(P_0)$, sendo $-\|\nabla f(P_0)\|$ o valor mínimo.