Matemática Discreta

Indução Matemática

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Indução Matemática

- **Objetivo desta aula**
  - Apresentar o princípio da indução matemática
  - Apresentar a estratégia de prova por indução, que se baseia no princípio da indução matemática
  - Capacitar o aluno a decidir quando usar a prova por indução na demonstração de um teorema

Problema #5

- **Provar**

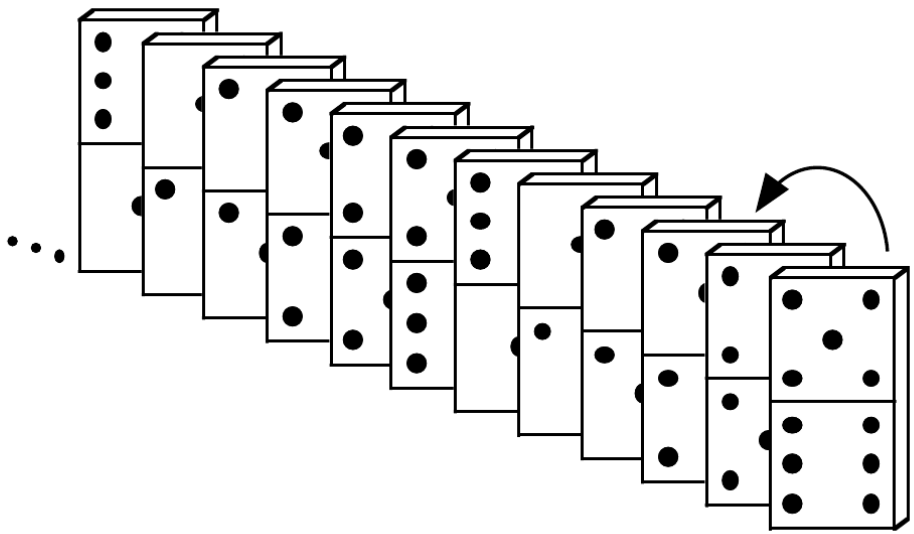
Para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Como provar?
Obviamente não podemos testar um por um todos os números naturais!

Indução Matemática

- **Prova por indução – Ideia geral**



Fonte: (MENEZES, 2005, p. 160)

- Efeito dominó
  - Derruba a primeira peça
  - A primeira peça ao cair derruba a segunda peça
  - A segunda peça ao cair derruba a terceira peça
  - e assim por diante

Indução Matemática

- **Prova por indução**
  - Baseia-se em duas hipóteses
    - A primeira peça é derrubada — Base da indução
    - Uma vez derrubada uma peça, a seguinte também é derrubada — Passo indutivo

Princípio da Indução Matemática

Seja P(n) uma proposição definida sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. P(0) é verdade — Base da indução
2. Sempre que P(k) é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que P(k+1) é verdade — Passo indutivo

Então, P(n) é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indução Matemática

- **Estrutura de uma prova por indução**

AFIRMAÇÃO na forma de se-então que traz a apresentação da prova, ou seja, o que vai ser provado e qual a estrutura dessa prova.

HIPÓTESES
- Base da indução: supor k = 0
- Hipótese de indução: supor que P(k) é verdade

CORPO
- Mostrar que P(0) é verdade
- Mostrar que P(k+1) é verdade

CONCLUSÃO
- P(n) é verdade

Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - Teoria dos Conjuntos – Tamanho do conjunto potência
    - Se um conjunto S tem *n* elementos, seu conjunto potência contém 2^n elementos (os subconjuntos de S)
      - Assim $|2^S| = 2^{|S|}$

➔ Vamos demonstrar que "Se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos"

Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Base da indução:** prova-se a veracidade do caso base
      - Para a base da indução tomamos n = 0.
      - O único conjunto com zero elementos é ø (S).
      - O único subconjunto de ø é ø.
      - Logo, 2^S = {ø} ou seja, um conjunto com 1 elemento.
      - Portanto, $|2^S| = 1 = 2^{n=0}$ quando S = ø, ou seja, quando n = 0.

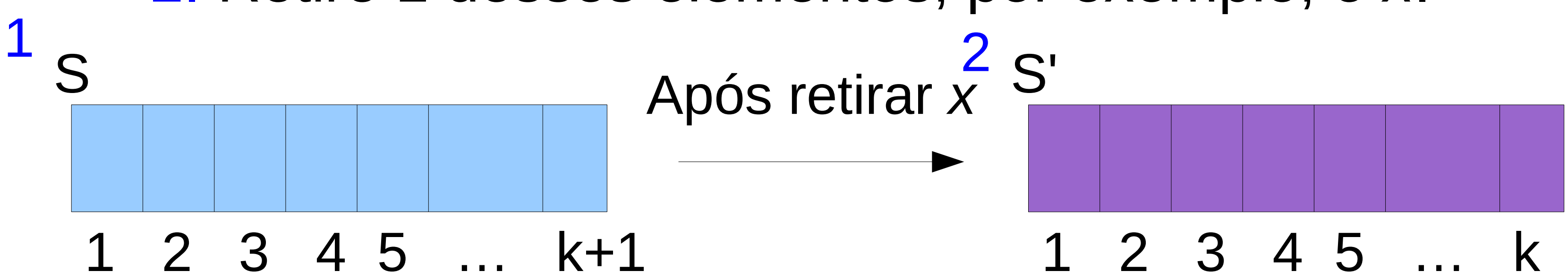
Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com n elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**: supõe-se que a hipótese de indução é verdadeira e prova-se para o próximo passo
      - **Hipótese de indução**: Vamos supor que, para qualquer conjunto com k elementos o conjunto potência tem 2^k elementos

Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**

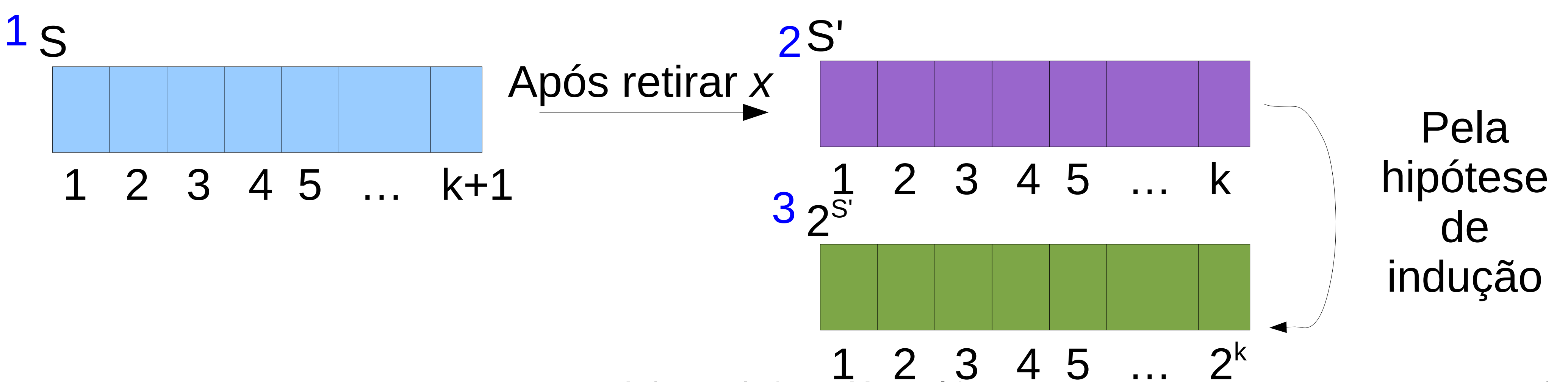
1. Seja S um conjunto com k+1 elementos.
2. Retire 1 desses elementos, por exemplo, o *x*.



Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que se S é um conjunto com *n* elementos, então seu conjunto potência 2^S contém 2^n elementos
    - **Passo indutivo**

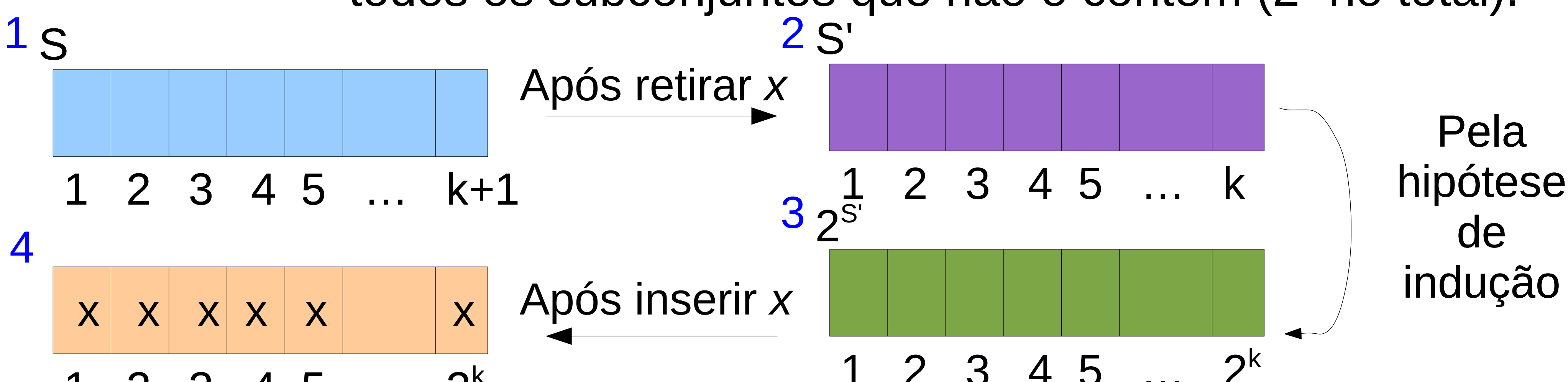
3. Qual é o conjunto potência do conjunto resultante?



Indução Matemática

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que ...
    - **Passo indutivo**

      4. Os únicos elementos de 2^S ainda não incluídos em $2^{S'}$ são os que contêm *x*. Todos os subconjuntos que contêm *x* podem ser encontrados colocando-se *x* em todos os subconjuntos que não o contêm (2^k no total).

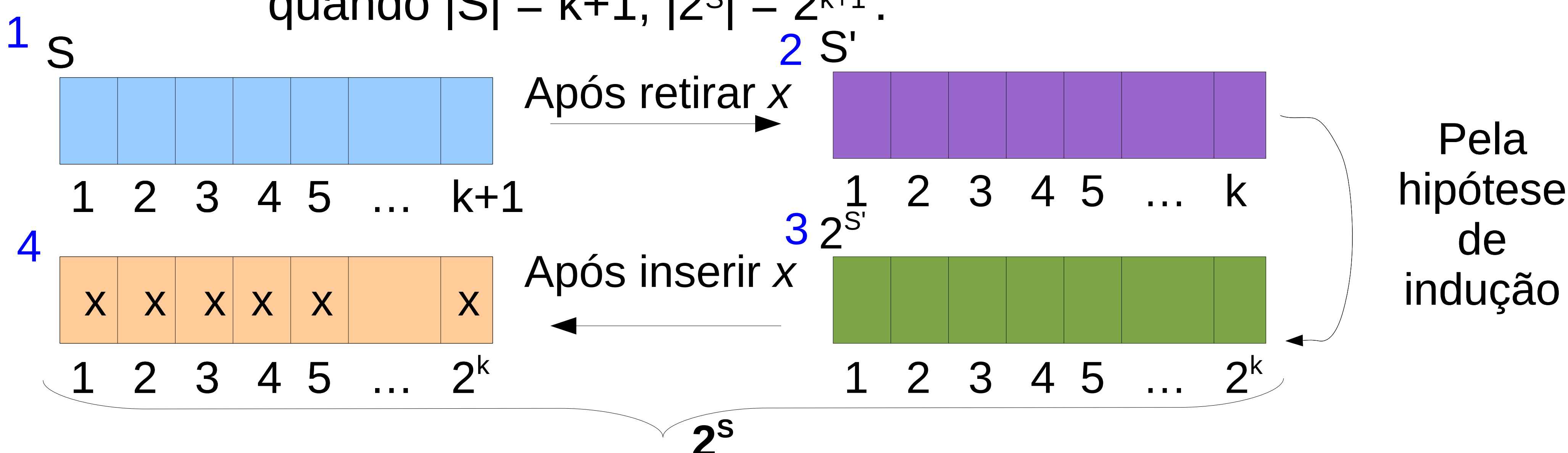


Indução Matemática

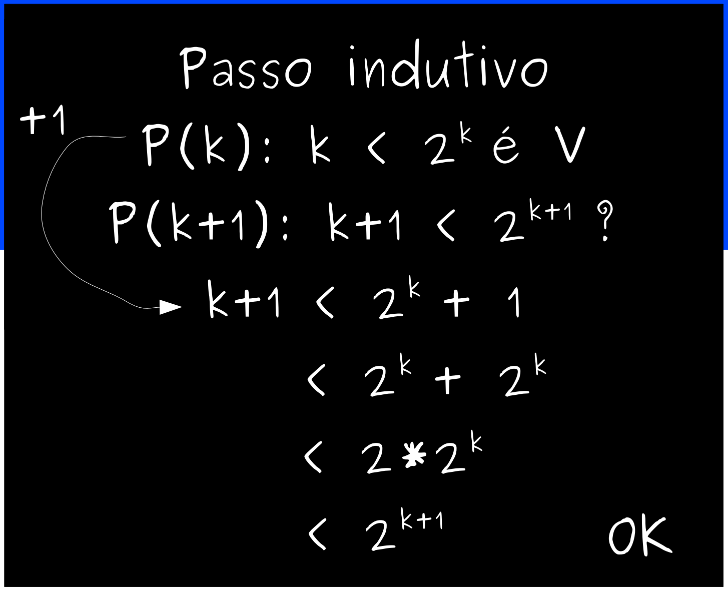
Veja descrição da prova em forma textual em (GOMIDE; STOLFI, 2011) pag. 75

- **Prova por indução – entendendo a ideia**
  - **Conjunto potência – Tamanho**
    - Vamos demonstrar por indução matemática que ...
    - **Passo indutivo**

5. Assim, temos 2^k conjuntos contendo *x* e 2^k conjuntos sem o *x*, ou seja, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos. Portanto, quando $|S| = k+1$, $|2^S| = 2^{k+1}$.



Indução Matemática



- **Prova por indução**

"<u>Se</u> n é um número natural, <u>então</u> n é menor do que 2^n."

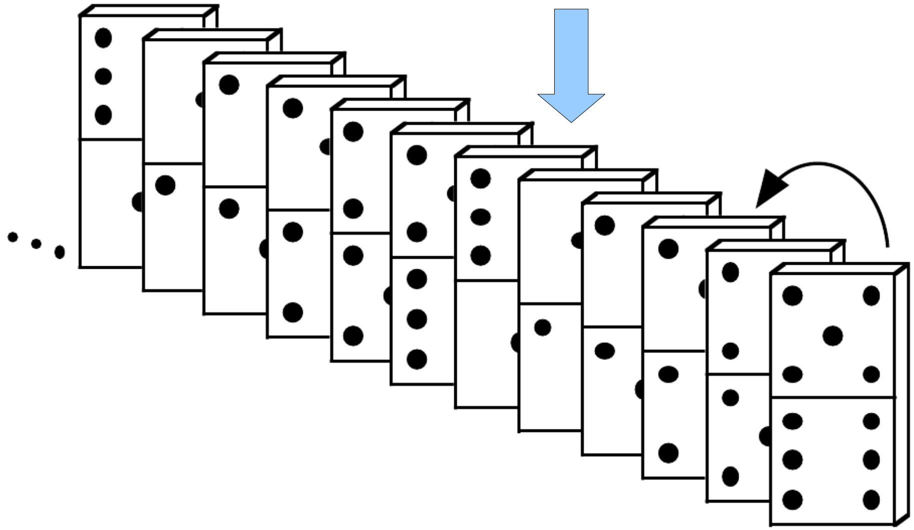
Prova:
Vamos demonstrar por indução que se n é um número natural então n é menor do que 2 elevado a n, ou seja: $n < 2^n$.
i) Base da indução: Seja $k = 0$. Então $0 < 2^0 = 1$. Portanto, $P(0)$ é verdade.
ii) Passo indutivo: Suponha que, para algum número natural k, $P(k)$: $k < 2^k$ é verdade. Vamos provar que para qualquer número natural $k+1$, $P(k+1)$ também é verdade, ou seja, que $k+1 < 2^{k+1}$.
Somando 1 em ambos os lados da desigualdade:

$$k+1 < 2^k+1 < 2^k + 2^k = 2 * 2^k = 2^{k+1}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdade.
Portanto, para qualquer número natural n tem-se que $n < 2^n$. ■

Indução Matemática

- **Generalização**
  - Muitas vezes precisamos demonstrar que uma proposição P(n) é válida <u>para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo n_0</u>
  - Nestes casos usamos n_0 no lugar do 0 na base de indução



Fonte: Adaptado de (MENEZES, 2005, p. 160)

Indução Matemática

- **Prova por indução**

"Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$."

Indução Matemática

Passo indutivo

$P(k): k^2 > 3k$

$P(k+1): (k+1)^2 > 3(k+1)$?

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&> 3k + 2k + 1 \\
&> 3k + 8 + 1 \\
&> 3k + 9 \\
&> 3(k + 3) \\
&> 3(k + 1) \quad \text{OK}
\end{aligned}
$$

- **Prova por indução**

“Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in$ N

Prova:

Vamos demonstrar por indução que se n é um núme

4 então $n^2 > 3n$.

i) Base da indução: Seja $k = 4$. Então $4^2 = 16$ é maior do que $3*4 = 12$. Portanto, P(4) é verdade.

ii) Passo indutivo: Suponha que, para algum número natural $k \geq 4$, $P(k)$: $k^2 > 3k$ é verdade. Vamos provar que para qualquer número natural $k+1$, $P(k+1)$ também é verdade, ou seja, que $(k+1)^2 > 3*(k+1)$.

Reescrevendo: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

Pela hipótese de indução, sabe-se que $k^2 > 3k$. Logo,

$$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1$$

Como $k \geq 4$, sabe-se que $2k \geq 8$. Logo,

$$3k + 8 + 1 = 3k + 9 = 3(k + 3) > 3(k + 1)$$

Assim,

$$(k+1)^2 > 3(k+1)$$

Portanto, para qualquer número natural tem-se que $n^2 > 3n$. ■

Indução Matemática

- **Indução completa/forte**

Princípio da Indução Completa

Seja $P(n)$ uma proposição definida sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. $P(0)$ é verdade
2. Sempre que para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(0), P(1), \ldots, P(k)$ é verdade, temos que $P(k+1)$ é verdade

Então, $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

X

Princípio da Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma proposição definida sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

1. $P(0)$ é verdade
2. Sempre que $P(k)$ é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k+1)$ é verdade

Então, $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indução Matemática

Passo indutivo

$2 \leq i \leq k$, $P(i)$ é V

$P(k+1)$ é V ?

=> ou $k+1$ é prod. prim.

$k+1 = a * b$

$1 < a < k+1$ $P(a)$ é V

$1 < b < k+1$ $P(b)$ é V

- **Prova por indução**

“Todo inteiro maior ou igual a 2 é primo o

primos.”

Prova:

Vamos demonstrar por indução completa que se n é um número inteiro maior ou igual a 2 então n é primo ou é um produto de primos.

i) Base da indução: Seja k = 2. Então P(k) é verdade, pois 2 é primo.

ii) Passo indutivo: Suponha que, para algum número natural $k \geq 2$, P(i) é verdade para todo $2 \leq i \leq k$. Vamos provar que P(k+1) também é verdade, ou seja, que k+1 é primo ou um produto de primos.

Se k+1 é primo, então P(k+1) é verdade.

Se k+1 não é primo então, ele deve ter algum divisor diferente de 1 e de k+1, ou seja,

$$k+1 = ab \text{ para algum } 1 < a < k+1 \text{ e } 1 < b < k+1$$

Pela hipótese de indução forte, sabe-se que a e b são produtos de primos.

Assim, multiplicando dois primos tem-se um produto de primos.

Portanto, para qualquer número inteiro maior ou igual a 2, esse número é primo ou um produto de primos. ■

Indução Matemática

- **Indução completa/forte X Indução**
  - A indução forte parece “mais forte” do que a indução comum/ordinária, uma vez que pode-se assumir muito mais a partir do passo indutivo
    - Mas a indução forte não é realmente mais forte, pois é possível reformatar qualquer prova originalmente usando indução forte em uma prova por indução ordinária
  - Mas é interessante indicar qual tipo de indução é usada para deixar claro se o passo indutivo para n+1 vem diretamente do caso n (indução ordinária) ou requer casos menores do que n (indução forte)
  - ➔ No fundo … as duas são equivalentes!

Demonstração de Teoremas

- **Resumo**

Estratégia de Demonstração	**Abordagem para provar p → q**	**Observações**
Demonstração por exaustão	Demonstre p → q para todos os casos possíveis	Pode ser usada apenas para provar um número finito de casos
Demonstração direta	Suponha p, deduza q	Abordagem padrão – o que se deve tentar em geral
Demonstração por contraposição	Suponha ¬q, deduza ¬p	Use essa estratégia se ¬q parece dar mais munição do que p
Demonstração por absurdo	Suponha p ∧ ¬q, deduza uma contradição	Use essa estratégia quando q disser que alguma coisa não é verdade
Demonstração por indução	Prove para o caso base da indução; suponha a hipótese de indução e prove o passo indutivo	Use a base de indução juntamente com a hipótese de indução para provar o passo indutivo

Problema #5

- **Provar**

Para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Prova:
Vamos demonstrar por indução que se n é um número natural então $1+3+5+\ldots+(2n+1)$ é igual a n+1 elevado ao quadrado, ou seja: $(n+1)^2$.

Portanto, para todo número natural n tem-se que $1+3+5+ \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$. ■