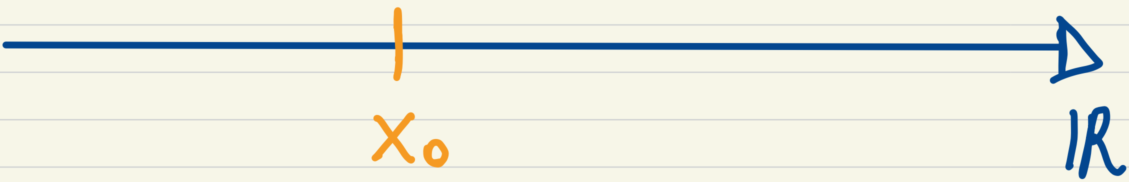
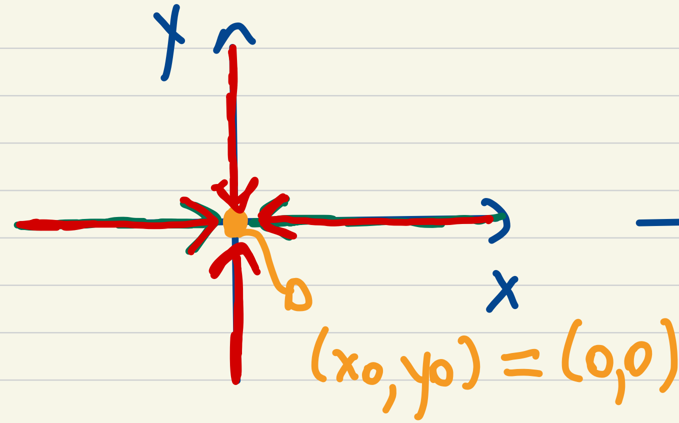
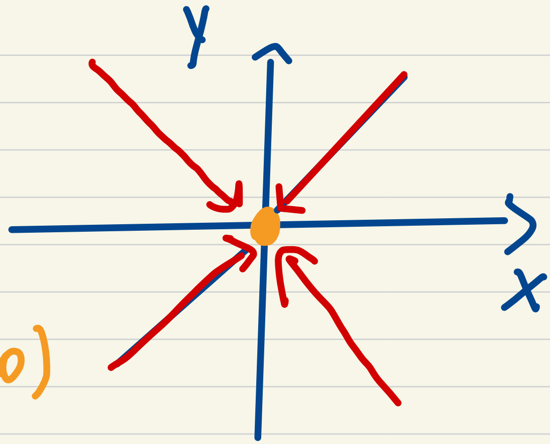
Limites de Funções de duas Variáveis

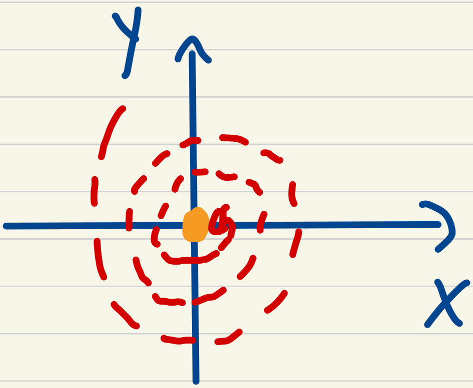
Um ponto variável x no eixo coordenado pode se aproximar de um ponto fixo x_0 de dois modos: à direita de x_0 ou à esquerda de x_0.

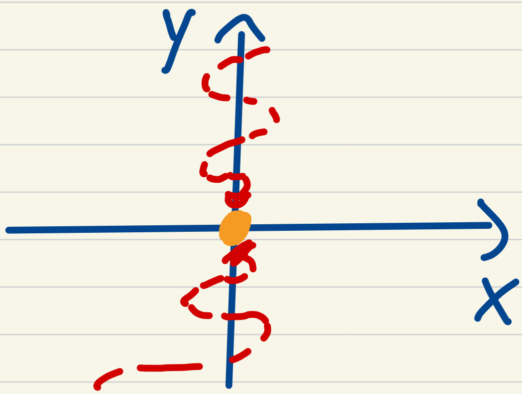


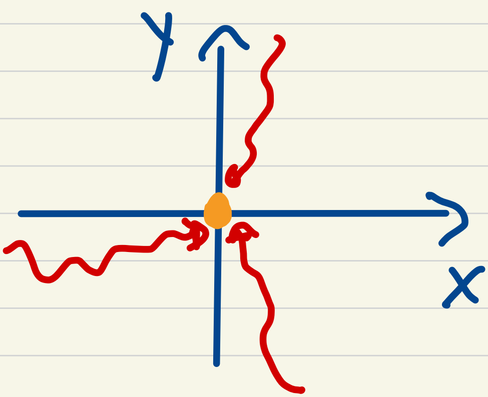
Um ponto variável (x,y) no plano coordenado pode se aproximar de um ponto fixo (x_0,y_0) por um nº infinito de caminhos.

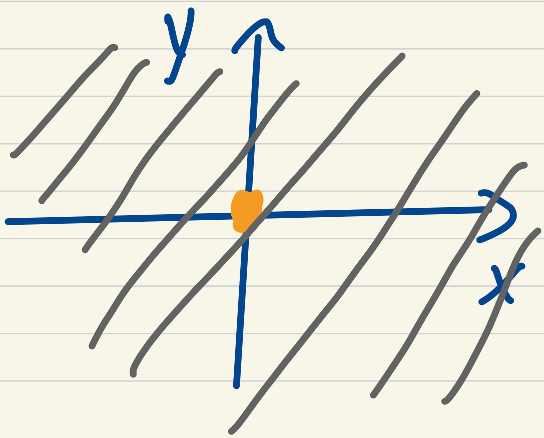

y
x
0
$(x_0, y_0) = (0,0)$


y
x


y
x

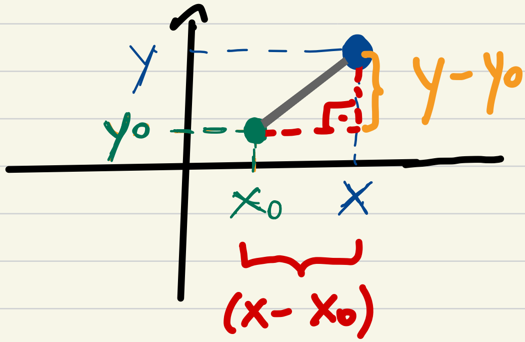

y
x


y
x


y
x

Diremos que (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) se a distância entre eles tende a zero, independente-mente do percurso feito por (x, y).

Definição: A distância entre (x,y) e (x_0,y_0) é dada por:



$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| =$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

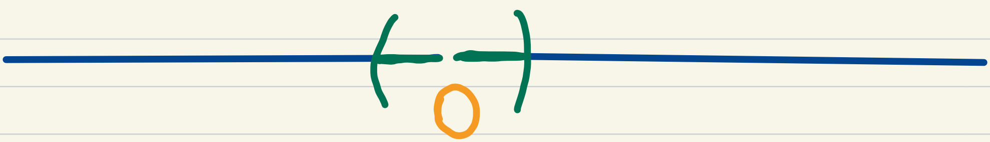
Recordemos que, para funções f de uma variável, podemos falar do limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, mesmo quando f não esta definida em x_0.

Exemplo:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$



Analogamente, para definir o limite de uma função $f(x,y)$ de duas variáveis, quando (x,y) tende a (x_0,y_0), não é necessário que $(x_0,y_0) \in D_f$.

Exigimos apenas que (x_0, y_0) seja um ponto de acumulação do domínio D_f de f, isto é, que cada subconjunto da forma:

$$\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < r\}}_{\circledast}$$

contenha pelo menos
um ponto de D_f
distinto de (x_0, y_0).

Obs: O subconjunto
$\circledast$ é chamado bola
aberta de centro em
(x_0, y_0) e raio r

é denotado por

$B_r(x_0, y_0)$.

Por que esse objeto tem esse nome?

Exemplo: $B_1(0,0)$

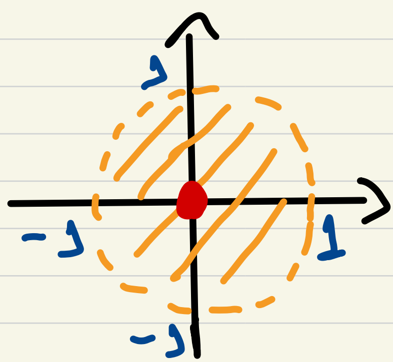
$(x,y) \in B_1(0,0) \iff$

$\|(x,y)-(0,0)\| < 1 \iff$

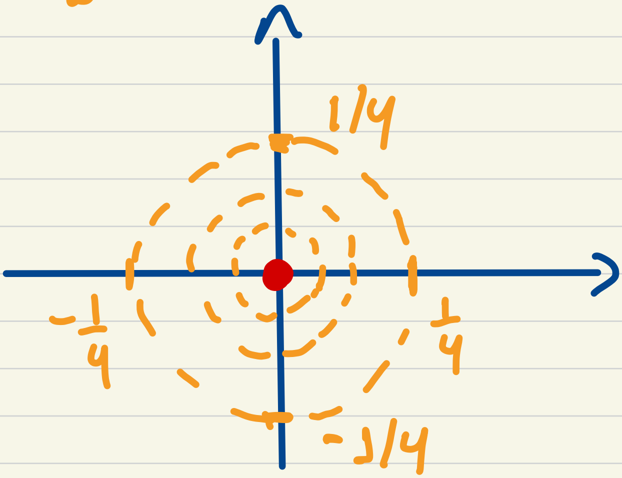
$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < 1$

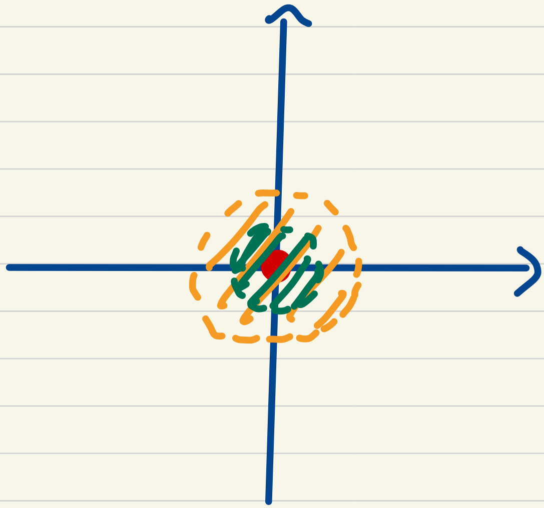
$\sqrt{x^2+y^2} < 1$

$x^2+y^2 < 1$



$B_{\frac{1}{2}}(0,0)$ $r = 1/2$, $r = \frac{1}{3}$





$$f(x,y) = \frac{8x^2 + e^y}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < r \iff x^2 + y^2 < r^2$$

Def: Sejam $z = f(x,y)$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a (x_0,y_0) é o número L, quando

$$\lim_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \to 0} |f(x,y) - L| = 0^*$$

Notação: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

* Isto significa que para cado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo (x,y) pertencente ao domínio de f que está em $B_\delta(x_0,y_0)$ tem-se

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Obs: De maneira análoga a definição de limite pode ser estendida às funções de três (ou mais) variáveis.

Obs: Todas as propriedades de limite de funções de uma variável se estendem às funções de várias variáveis.

Exemplo: O limite da soma, diferença, produto ou quociente, é a soma, diferença, produto ou quociente dos limites, respectivamente, contanto que esses limites existam e que os denominadores não se anulem.

Ex: $f(x,y) = 2x^2y - \dfrac{3y^2}{x+y}$

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)$:

Solução:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} 2x^2y = 2(-1)^2 \cdot 2$

$= 2 \cdot 2 = 4$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} -\dfrac{3y^2}{x+y} = -\dfrac{3 \cdot 2^2}{-1+2}$

$= -\dfrac{12}{1} = -12$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-1,2)} 2x^2y +$$

$$+ \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{-3y^2}{x+y} = 4-12$$

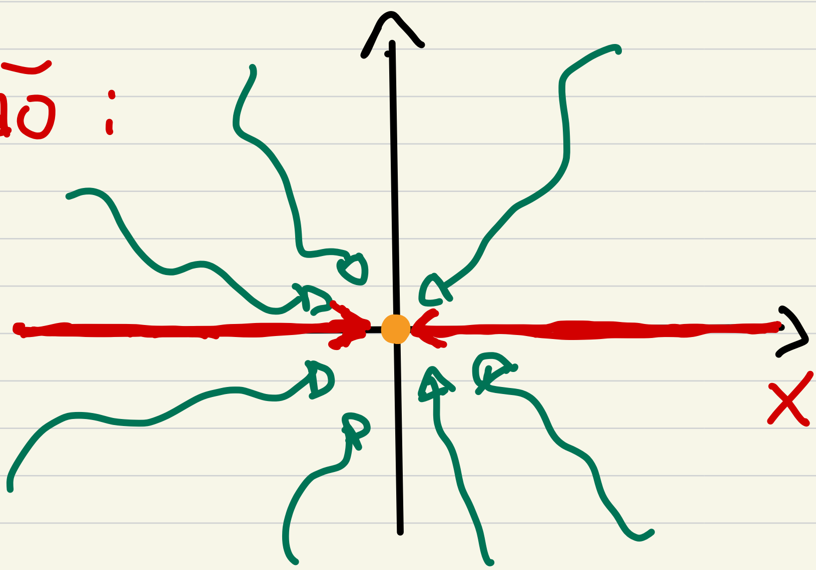
$$= -8$$

Ex: $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solução:

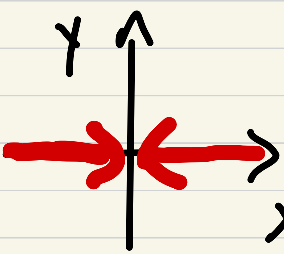


1) $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ ao longo do eixo x.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = $$

$y = 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \cancelto{0}{y^2}}{x^2 + \cancelto{0}{y^2}} =$$

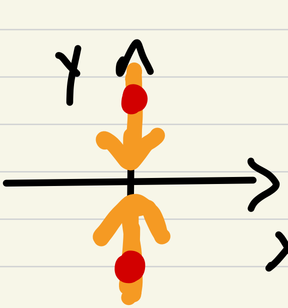


$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

2 $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ ao longo do eixo y.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \underset{x=0}{=}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{0^2-y^2}{0^2+y^2} =$$



$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Como os limites pelas direções em 1 e 2 são diferentes, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

não existe.