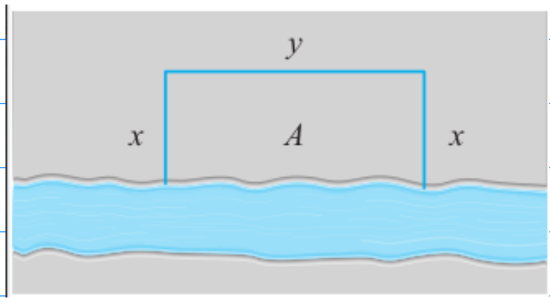
13/09 - Aula 12 - Aplicações em problemas de otimização

Exemplo 1: Um fazendeiro tem 1200 metros de certa e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?



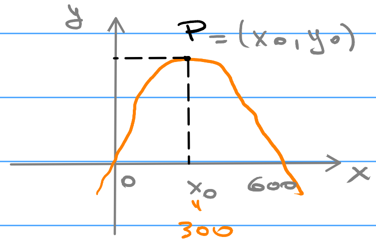
$$\begin{cases} A = x \cdot y. \\ \boxed{2x + y = 1200} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 1200 - 2x$$

$$A = xy = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2$$

$$\boxed{A(x) = 1200x - 2x^2}$$



$A(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 600$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-1200}{2.(-2)} = \frac{1200}{4} = 300$

$A'(x) = 0 \iff 1200 - 4x = 0 \iff x = \frac{1200}{4} = 300$

$y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$

$-2x^2 + 1200x + 0 = 0$

$a = -2$; $b = 1200$; $c = 0$

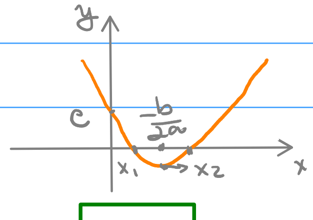
$A''(x) = -4 \Rightarrow A''(300) = -4 < 0 \Rightarrow x = 300$ é ponto de máximo local. Como a concavidade não muda temos que $\boxed{x = 300}$ é máximo global em $\mathbb{R}$.

$2(300) + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 600 \Rightarrow \boxed{y = 600}$

Logo, a área máxima é $A = 300 \cdot 600 = 180000$

$\square$

Obs: $f(x) = ax^2 + bx + c$



$\boxed{a > 0}$

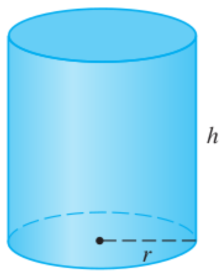
$f'(x) = 2ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$; $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = ?$

$f''(x) = 2a > 0 \Rightarrow f''\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a > 0$

$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$ é ponto mínimo local.

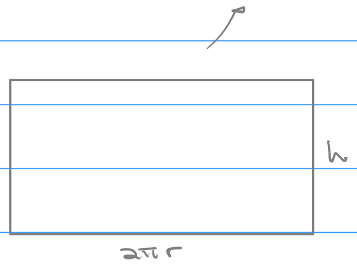
Exemplo 2: Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o cursto do metal para produzir a lata.

$A_t = \pi r^2$



$A_b = \pi r^2$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad V = \pi r^2 h = 1000 \text{ cm}^3$$



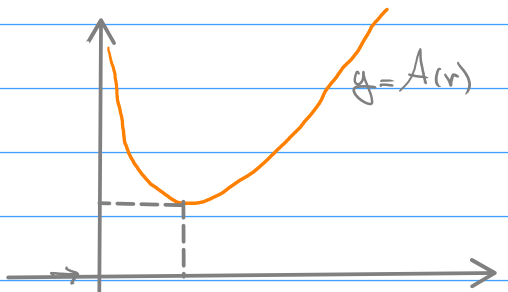
$$\boxed{h = \frac{1000}{\pi r^2}} \quad *$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi r} \cdot \frac{1000}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2} = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$A'(r)$: $- - - - - \,|\, + + + + +$, $r \in (0, +\infty)$

$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$



$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ (mínimo global)

$$\lim_{r \to 0^+} A(r) = \lim_{r \to 0^+} 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} = +\infty$$

$$\lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty$$

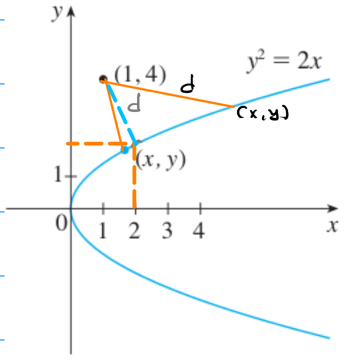
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi (500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, temos que minimizar a área lateral pois assim utilizaremos menos metal para a sua confecção, minimizando assim o custo, logo as dimensões deverão ser

$$r = \sqrt[3]{500/\pi} \qquad h = 2\sqrt[3]{500/\pi}$$

□

Exemplo 3: Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próxima do ponto (1,4)



$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

$$y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

Para encontrarmos o valor de y que minimiza a função d(y) basta minimizarmos a função $d(y)^2$

Seja $f(y) = d(y)^2 \Rightarrow f(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{y^4}{4} - \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{2}}\cdot 1 + 1^2 + \cancel{y^2} - 8y + 16$$

$$\boxed{f(y) = \frac{y^4}{4} - 8y + 17}$$

$f'(y) = y^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 2}$ (ponto crítico)

$f''(y) = 3y^2 \Rightarrow f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow y = 2$ é mínimo para $f(y) = d(y)^2$

Logo $y=2$ minimiza a função distância $d(y)$

Se $y = 2 \Rightarrow d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow d(2) = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\Downarrow$

$x = \frac{y^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \Rightarrow P = (2,2)$ é o ponto da parábola mais próximo do ponto (1,4)

Obs: Se x_0 é mínimo local de $f(x)^2$ então x_0 é mínimo local de $f(x)$ supondo $f(x_0) \neq 0$.

Sol. Seja $g(x) = f(x)^2$ então por hipótese

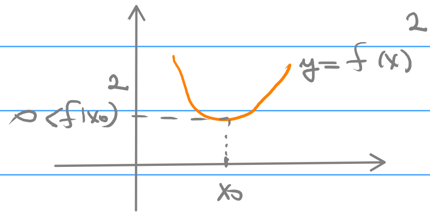
$$\begin{cases} g'(x_0) = 0 \\ g''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Queremos mostrar que $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

De fato, $g'(x_0) = 0 \iff 2\underbrace{f(x_0)}_{\neq 0}.\,f'(x_0) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$

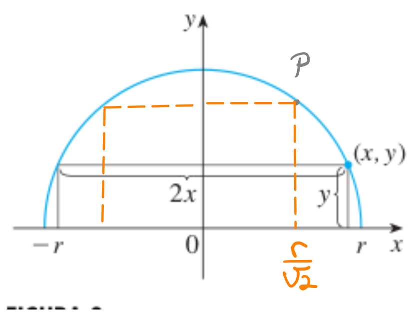
$$g''(x) = (f(x)^2)'' = (2f(x)f'(x))' = 2f'(x) + 2f(x)f''(x) \Rightarrow$$

$$0 < g''(x_0) = \cancel{2\underbrace{f'(x_0)}_{=0}} + 2\underbrace{f(x_0)}_{\neq 0} f''(x_0) \Rightarrow 0 < 2\underbrace{f(x_0)}_{(+)} f''(x_0) \Rightarrow \boxed{f''(x_0) > 0}$$



$$\begin{cases} g(x) = f(x)^2 \\ g'(x_0) = 0 \\ g''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Exemplo: Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.



$$\begin{cases} A = 2xy \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}, \quad y \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

$\Rightarrow \boxed{A(x) = 2x.\sqrt{r^2 - x^2}}$ Seja $f(x) = A^2(x) = 4x^2(r^2 - x^2) \Rightarrow$

$$f(x) = 4r^2x^2 - 4x^4$$

$\Rightarrow f'(x) = 8r^2x - 16x^3 = 0 \iff 8x(r^2 - 2x^2) = 0 \iff x = 0$

ou $r^2 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{r}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{2}\,r}{2}}$

$$f''(x) = 8r^2 - 48x^2 = 0 \Rightarrow$$

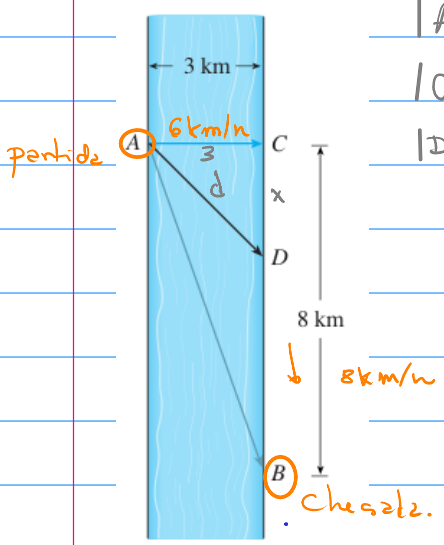
$$f''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 8r^2 - 48.\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8r^2 - 48.\frac{r^2}{2} = 8r^2 - 24r^2 = -16r^2 < 0$$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}\,r}{2}$ maximiza $f(x) = A(x)^2 \Rightarrow$ maximiza a função $A(x)$. Logo

$$A\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\cdot\sqrt{\underbrace{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right)^2}_{r^2-\frac{r^2}{2}}} = \sqrt{2}\,r\cdot\sqrt{\frac{r^2}{2}}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot r^2}{\cancel{\sqrt{2}}} = r^2$$ (área do maior retângulo inscrito no círculo superior)

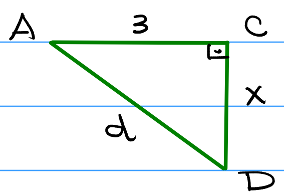
EXEMPLO 4 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura 7). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)



$|AD| = d$

$|CD| = x$

$|DB| = 8 - x$



$d^2 = x^2 + 3^2$

$\Downarrow$

$d = \sqrt{x^2+9}$

$\Downarrow$

$t_1 = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$$

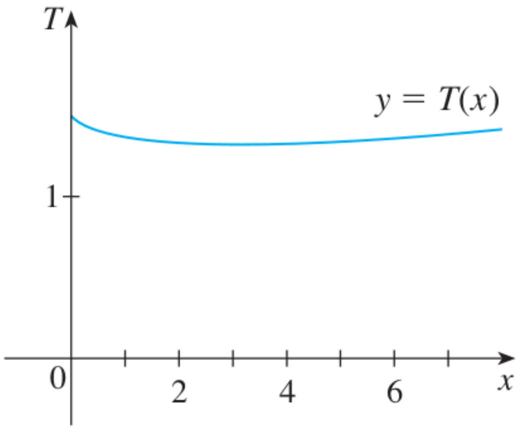
Seja x a distância entre os pontos C e D. Encontraremos o tempo total em função de x para que o homem consiga sair do ponto A e atingir o ponto B. Chamemos este tempo total de T(x). Logo,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$$ derivando obtemos

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$ igualando a zero obtemos

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{9}{\sqrt{7}}$$

mas como $0 \leq x \leq 8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{\sqrt{7}}}$



Como a função T(x) está definida no intervalo fechado [0,8] e o único ponto crítico, devemos calcular o valor de T(x) nos pontos 0 e 8.

$$T(0) = 1,5, \quad T(9/\sqrt{7}) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33, \quad T(8)\frac{\sqrt{73}}{8} \approx 1,42$$

Logo, o mínimo absoluto de T(x) ocorre no ponto $x = \dfrac{9}{\sqrt{7}} \approx 3,4km$

Logo, o tempo mínimo será $T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right) \approx 1,33\,h$