Lógica

Lógica Proposicional
Aula 08 – Raciocínio

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

Se eu estou com fome (p), então eu vou ao restaurante (q).

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer (r).

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$$

Lógica Proposicional

- **Como demonstrar a validade de um argumento?**
  - Método semântico
    - Via construção da tabela-verdade
    - Com base em interpretações
  - Método sintático
    - Via construção de uma prova/derivação/dedução
    - Com base em regras de inferência e leis de equivalência (raciocínio)
    - Ou usando inferência por resolução

Baseado no Curso do Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira – DTI / FATEC-SP

Lógica Proposicional

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Dadas as fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ e α_n da LP. Diz-se que uma sequência finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ é uma **prova** (ou **dedução** ou **derivação**) de α_n a partir das **premissas** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ se e somente se:
    1. Cada β_i for uma premissa α_j $(1 \leq j \leq n-1)$; ou
    2. β_i provém das fórmulas precedentes aplicando-se um conjunto de **regras de inferência**; ou
    3. β_i provém do uso do **princípio de substituição** usado em uma fórmula anterior; ou
    4. β_k é α_n.

- α_n é dedutível das premissas

- α_n é um teorema e as premissas são a teoria

Lógica Proposicional

Pode existir mais de uma sequência de demonstração correta

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - **Como funciona?**
    - Para provar que α_n é uma conclusão válida de α_1, α_2, …, α_{n-1} precisamos produzir uma sequência de demonstração da forma

α_1 (premissa)

.
.
.

α_{n-1} (premissa)

β_1 (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

.
.
.

β_k (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

α_n (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

Lógica Proposicional

- **Regras de inferência – Recordando ...**

Regra	**Nome da regra**
$\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta \models \beta$	*modus ponens*
$\alpha \rightarrow \beta,\ \neg\beta \models \neg\alpha$	*modus tollens*
$\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$	silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha \models \beta$ $\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \models \alpha$	silogismo disjuntivo
$\alpha \wedge \beta \models \alpha$ $\alpha \wedge \beta \models \beta$	simplificação
$\alpha,\ \beta \models \alpha \wedge \beta$	conjunção (ou combinação)

Lógica Proposicional

- **Regras de inferência – Recordando ...**

Regra	**Nome da regra**
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$	de casos
$\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\beta \models \alpha \vee \beta$	adição
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$	dilema construtivo
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$	dilema destrutivo
$\alpha \rightarrow \beta \models \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	contraposição
$\alpha, \neg\alpha \models \beta$	da inconsistência
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$	introdução da equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \rightarrow \alpha$	eliminação da equivalência

Lógica Proposicional

- **Regras de equivalência – Recordando ...**

Lei	**Nome da lei**
$\alpha \land \neg\alpha \equiv F$ $\alpha \lor \neg\alpha \equiv V$	Lei da contradição Lei do terceiro excluído
$\alpha \land V \equiv \alpha$ $\alpha \lor F \equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \land F \equiv F$ $\alpha \lor V \equiv V$	Leis da dominação
$\alpha \land \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \lor \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação

Lei	**Nome da lei**
$\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha$ $\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \land \beta) \land \gamma \equiv \alpha \land (\beta \land \gamma)$ $(\alpha \lor \beta) \lor \gamma \equiv \alpha \lor (\beta \lor \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \land (\beta \lor \gamma) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$ $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$ $\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$	Leis de De Morgan

Lei	**Nome da lei**
$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta$	Definição de $\rightarrow$ em termos de $\lor$ e $\neg$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\rightarrow$ e $\land$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\lor$ e $\neg$
$\alpha \lor (\alpha \land \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \land (\alpha \lor \beta) \equiv \alpha$	Lei da absorção
$(\alpha \land \beta) \lor (\neg\alpha \land \beta) \equiv \beta$ $(\alpha \lor \beta) \land (\neg\alpha \lor \beta) \equiv \beta$	--

Lógica Proposicional

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - **Como funciona?**
    - Para provar que α_n é uma conclusão válida de α_1, α_2, …, α_{n-1} precisamos produzir uma sequência de demonstração da forma

α_1 (premissa)

.
.
.

α_{n-1} (premissa)

β_1 (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

.
.
.

β_k (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

α_n (obtida com aplicação de alguma regra de inferência)

Lógica Proposicional

p q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \mid\!- q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: $p \rightarrow q$
    - α_2: $q \rightarrow r$
    - α_3: $\neg r \vee p$

    Deduz-se
    - β_1: $r \rightarrow p$ (α_3 + equivalência de $\rightarrow$)
    - β_2: $q \rightarrow p$ (α_2 + β_1 + regra da cadeia)
    - β_3: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (α_1 + β_2 + conjunção)
    - α_4: $q \leftrightarrow p$ (β_3 + equivalência de $\leftrightarrow$)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos
    - a) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.
    - b) $\neg p \to q,\ q \to r,\ \neg r \lor s,\ \neg s \vdash p$
    - c) $(p \lor \neg q) \to r,\ r \to s,\ p \vdash s$

Se $\underbrace{\text{a Terra é redonda}}_{p}$, então $\underbrace{\text{a Lua é oval}}_{q}$. $p \to q$

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    a) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.

RESPOSTAS

a) p: a Terra é redonda, q: a Lua é oval, r: Saturno é vermelho

Dadas as premissas

α_1: $p \rightarrow q$ α_2: $q \rightarrow \neg r$ α_3: $\neg p \rightarrow \neg r$

Conclusão a qual se quer chegar: $\neg r$

Deduz-se

α_4: $p \rightarrow \neg r$ (α_1 + α_2 + regra da cadeia)

α_5: $\neg r$ (α_3 + α_4 + de casos)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    b) $\neg p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee s,\ \neg s \vdash p$

RESPOSTAS

b) Dadas as premissas

α_1: $\neg p \rightarrow q$ α_2: $q \rightarrow r$ α_3: $\neg r \vee s$ α_4: $\neg s$

Deduz-se

α_5: $\neg r$ (α_3 + α_4 + silogismo disjuntivo)

α_6: $\neg q$ (α_2 + α_5 + *modus tollens*)

α_7: $\neg(\neg p)$ (α_1 + α_6 + *modus tollens*)

α_8: p (α_7 + equivalência dupla negação)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    c) $(p \lor \neg q) \rightarrow r,\ r \rightarrow s,\ p \mid\!- s$

RESPOSTAS

c) Dadas as premissas

α_1: $(p \lor \neg q) \rightarrow r$ α_2: $r \rightarrow s$ α_3: p

Deduz-se

α_4: $p \lor \neg q$ (α_3+ adição)

α_5: r (α_1+ α_4+ *modus ponens*)

α_6: s (α_2+ α_5+ *modus ponens*)

Lógica Proposicional

p
Seu tornozelo está muito inchado.
q
Se seu tornozelo está muito inchado e você continuar a correr, então seu tornozelo não vai sarar em uma semana.
r s
Se seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não estará apto a disputar a corrida.

Logo, se você continuar a correr, então você não estará apto a disputar a corrida.

- Representando na Lógica Proposicional
  - p
  - $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$
  - $\neg r \rightarrow \neg s$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \rightarrow \neg s$ conclusão

Lógica Proposicional

- **Prova condicional**
  - Demonstrando que

$$p,\ (p \wedge q) \rightarrow \neg r,\ \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s$$

é um argumento válido

Dadas as premissas

- α_1: p
- α_2: $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$
- α_3: $\neg r \rightarrow \neg s$

E a hipótese

- γ_1: q

Deduz-se

- β_1: $p \wedge q$ (α_1+ γ_1 + conjunção)
- β_2: $\neg r$ (α_2+ β_1 + *modus ponens*)
- β_3: $\neg s$ (α_3+ β_2 + *modus ponens*)
- α_4: $q \rightarrow \neg s$ (γ_1 + β_3 + introdução da condicional)

Lógica Proposicional

- **Prova condicional**
  - Introdução da condicional
    - Dada a derivação de uma fbf β a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir a fbf $\alpha \rightarrow \beta$
  - **Teorema 8.1** – Teorema da dedução
    - Sejam α e β duas fbfs e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ premissas. Se juntos $\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ implicam logicamente β, então $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ implicam logicamente $\alpha \rightarrow \beta$

Lógica Proposicional

- **Prova condicional**
  - Prove que o argumento a seguir é válido

    a) $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Lógica Proposicional

- **Prova condicional**
  - Prove que o argumento a seguir é válido

    a) $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

RESPOSTA

a) Dada a premissa

α_1: $(p \wedge q) \rightarrow r$

E as hipóteses

α_2: p e α_3: q

Deduz-se

α_4: $p \wedge q$ ($\alpha_2 + \alpha_3$ + conjunção)

α_5: r ($\alpha_1 + \alpha_4$ + *modus ponens*)

α_6: $q \rightarrow r$ ($\alpha_3 + \alpha_5$ + introdução da condicional)

α_7: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ($\alpha_2 + \alpha_6$ + introdução da condicional)

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Teorema 4.2)**
  - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é uma consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se e somente se a fórmula

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$$

    for uma contradição

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Prova indireta)**
  - Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir $\neg\alpha$
  - Passo a passo
    - A conclusão que se deseja provar é negada e inserida como hipótese
    - Busca-se derivar uma contradição (a qual evidencia que a hipótese é falsa)
    - Se a contradição é encontrada, infere-se que a conclusão segue das premissas

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Prova indireta)**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, \neg q \mid\!- \neg p$ é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: $p \rightarrow q$
    - α_2: $\neg q$

    E a hipótese
    - α_3: p

    Deduz-se
    - α_4: q (α_1+ α_3 + *modus ponens*)
    - α_5: $q \wedge \neg q$ (α_4 + α_2+ conjunção)
    - α_6: $\neg p$ (α_3+ α_5 + redução ao absurdo)

Lógica Proposicional

- **Raciocínio hipotético – IMPORTANTE**
  - Nenhuma ocorrência de uma fórmula derivada de uma hipótese pode ser usada em qualquer regra aplicada após o descarte da hipótese
  - Se duas ou mais hipóteses estiverem ativas simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas foram introduzidas
  - Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Prova indireta)**
  - Prove que o argumento a seguir é válido

    a) $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Prova indireta)**
  - Prove que o argumento a seguir é válido

    a) $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

RESPOSTA

a) Dada a premissa

α_1: $p \leftrightarrow \neg q$

E a hipótese

α_2: $p \wedge q$

Deduz-se

α_3: p (α_2+ simplificação)

α_4: q (α_2+ simplificação)

α_5: $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$ (α_1 + equivalência do bicondicional)

α_6: $p \rightarrow \neg q$ (α_5 + simplificação)

α_7: $\neg q$ (α_3+ α_6 + *modus ponens*)

α_8: $q \wedge \neg q$ (α_4+ α_7 + conjunção)

α_9: $\neg(p \wedge q)$ (α_2+ α_8 + redução ao absurdo)