Matemática Discreta

Relações
Relações de equivalência

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Relações de Equivalência

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar o que é uma relação de equivalência
  - Apresentar conceitos relacionados a uma relação de equivalência
    - Classes de equivalência
    - Partições
    - Conjunto quociente
  - Capacitar o aluno a aplicar os conceitos de Relações de Equivalência na modelagem e resolução de problemas computacionais

Problema #9

- **Conjunto quociente**
  - Sejam
    - S = { 1, 2, 3, ..., 19, 20 } e
    - R a relação de equivalência em S definida por

$$x \equiv y \ (mod\ 5)$$

    - isto é, *x*-*y* é divisível por 5
  - Dê a partição de S induzida por R, isto é, o conjunto quociente S/R

Relações

- **Recordando … Resumo das propriedades**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
    - R é reflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \, R \, x$
    - R é antirreflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not{R} \, x$
    - R é simétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
    - R é antissimétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
    - R é transitiva se <u>para todo</u> $x, y, z \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$

Relação de Equivalência

- **Relação de equivalência**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação em um conjunto A
  - Dizemos que R é uma **relação de equivalência** se R é reflexiva, simétrica e transitiva

Relação de Equivalência

- **Relação de equivalência**
  - Objetos relacionados por uma relação de equivalência são objetos parecidos, ou seja, que guardam uma semelhança entre si
  - Exemplos
    - Em { 1, 2, 3 }
      - R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1) }
    - Em {x | x é um aluno dessa turma}
      - x R y $\leftrightarrow$ "x senta-se na mesma fila que y"

Relação de Equivalência

- **Relação de equivalência**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de equivalência no conjunto A = { 1, 2, 3 }
    - a) R = { (1, 1), (2, 2), (2, 3) }
    - b) S = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3) }
    - c) T = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }
    - d) U = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3) }
    - e) V = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) }

Relação de Equivalência

- **Relação de equivalência**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de equivalência no conjunto A = { 1, 2, 3 }
    a) R = { (1, 1), (2, 2), (2, 3) }
    b) S = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3) }
    c) T = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }
    d) U = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3) }
    e) V = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) }

RESPOSTAS

a) Não, pois não é reflexiva, falta o par (3, 3)
b) Não, pois não é transitiva, tem os pares (1, 2) e (2, 3), mas falta o par (1,3)
c) SIM
d) SIM
e) Não, pois não é simétrica, tem o par (1, 2), mas não tem o par (2, 1)

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in A$
  - A **classe de equivalência** de a, denotada por $[a]$, é o conjunto de todos os elementos do conjunto A que estão R-relacionados com a

$$\mathbf{[a] = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \, R \, a \}}$$

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência**
  - Classes de equivalência são conjuntos de elementos relacionados uns com os outros
  - Qualquer $b \in [a]$ é dito representante da classe de equivalência
    - Exemplo:
      - Dado o conjunto A= {1, 2, 3}, e a relação de equivalência R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}
      - Conjunto [1] = {1, 2}. Esse conjunto também pode ser chamado de [2]

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência**
  - Exemplo
    - Dados
      - Conjunto de alunos de uma turma e
      - Relação R, x R $y \leftrightarrow$ "x senta-se na mesma fila que y"
      - Se João, Carlos, José, Judite e Téo sentam-se todos na terceira fila
        - A classe de equivalência de João é [João] = {João, Carlos, José, Judite, Téo}

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência**
  - Considerando-se a relação de equivalência em $\mathbb{N}$, x R $y \leftrightarrow$ "$x + y$ é par", qual é a classe de equivalência [0]?
    - Pela definição,

      $$\mathbf{[0] = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{N} \text{ e } } x\ R\ 0 \leftrightarrow \text{"}x + 0 \text{ é par"} \mathbf{\}}$$

      - ou seja, esse é o conjunto de todos os números naturais x, de modo que somados a 0, resulte em par
      - … é o conjunto de todos os números pares

    → O conjunto [0] é o conjunto dos números pares

    → De modo semelhante, não é difícil ver que [1] é o conjunto dos números ímpares

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência**
  - A relação de equivalência em $\mathbb{N}$, $x \; R \; y \leftrightarrow$ "$x + y$ é par" tem apenas duas classes de equivalências:
    - O conjunto dos números naturais pares [0] e
    - O conjunto dos números naturais ímpares [1]
  - ➔ Assim, as classes de equivalência dividem o conjunto sobre o qual estão definidas
    - Toda classe contém elementos que estão relacionados uns com os outros, mas não com qualquer elemento que não esteja naquela classe
    - Se duas classes de equivalência tem 1 elemento em comum, então elas são idênticas

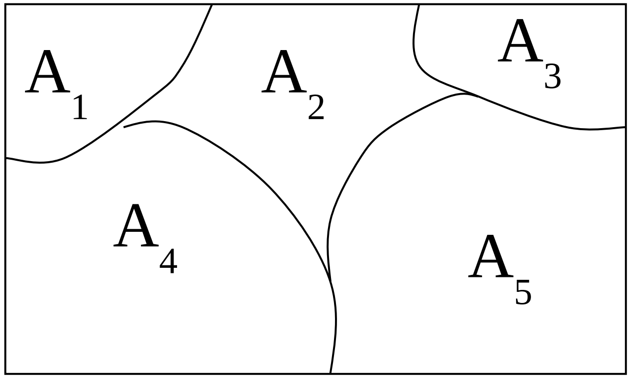
Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência e Partição**
  - **Teorema**
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As classes de equivalência de R são subconjuntos não-vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A

  ➔ O conjunto das **classes de equivalência** de A pela R é uma **partição** de A

Relação de Equivalência

- **Partição**



Partições de A: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

- Dado um conjunto não-vazio A, uma **partição** de A é uma <u>subdivisão</u> de A em <u>conjuntos não-vazios</u>, <u>disjuntos dois a dois</u>, que unidos resultam em A

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência e Partição**
  - **Teorema**
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As classes de equivalência de R são subconjuntos não-vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A

i. para cada $a \in A$, temos $a \in [a]$ reflexiva

ii. $[a] = [b]$ se e somente se $(a, b) \in R$ simétrica

iii. se $[a] \neq [b]$, então $[a]$ e $[b]$ são disjuntos consequência de ii.

- Qualquer relação de equivalência determina uma partição no conjunto em que está definida
- Por outro lado, dada uma partição $\{A_i\}$ do conjunto A, existe uma relação de equivalência R em A tal que os conjuntos A_i são as classes de equivalência

Relação de Equivalência

- **Conjunto quociente**

Fonte: https://pixabay.com/

- É a coleção de todas as classes de equivalência de elementos de A por uma relação de equivalência R

$$\mathbf{A/R = \{ [a] \mid a \in A\}}$$

Relação de Equivalência

- **Conjunto quociente**
  - Exemplo
    - Dado o conjunto A= { 1, 2, 3 }, e a relação de equivalência R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1) }
      - O conjunto quociente A/R é A/R = { [1], [3] }

Relação de Equivalência

- **Classes de equivalência e etc.**
  - **Teorema**
    - Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. As classes de equivalência de R são subconjuntos não-vazios de A, disjuntos dois a dois, cuja união é A

→ O conjunto das **classes de equivalência** de A pela R é uma **partição** de A

→ Por outro lado, dada uma **partição** $\{A_i\}$ do conjunto A, existe uma **relação de equivalência** R em A tal que os conjuntos A_i são as **classes de equivalência**

→ Seja R uma **relação de equivalência** em um conjunto A, o **quociente A/R** é uma **partição** de A

Problema #9

- **Conjunto quociente**
  - Sejam
    - S = { 1, 2, 3, ..., 19, 20 } e
    - R a relação de equivalência em S definida por

$$x \equiv y \ (mod\ 5)$$

    - isto é, x-y é divisível por 5
  - Dê a partição de S induzida por R, isto é, o conjunto quociente S/R

Problema #9

- **Conjunto quociente**
  - Sejam
    - S = { 1, 2, 3, ..., 19, 20 } e
    - R a relação de equivalência em S definida por

$$x \equiv y \ (mod\ 5)$$

    - isto é, *x-y* é divisível por 5
  - Dê a partição de S induzida por R, isto é, o conjunto quociente S/R

RESPOSTA

A partição de S induzida por R é P = { {1, 6, 11, 16}, {2, 7, 12, 17}, {3, 8, 13, 18}, {4, 9, 14, 19}, {5, 10, 15, 20} }

Problema #9

- **Conjunto quociente**

RESPOSTA detalhada

$x \equiv y \pmod 5$ (Lê-se x é congruente a y módulo 5) significa que x-y é divisível por 5, ou que a diferença entre x e y é divisível por 5 ou ainda que 5 divide x-y. Podemos escrever também $5|x-y$, que por definição significa que existe um inteiro c tal que $5c = x-y$.

Precisamos encontrar os pares de valores (x,y) em S tal que x-y é múltiplo de 5.

Vamos verificar alguns valores específicos:

$1 \equiv 6 \pmod 5$ pois $1-6 = -5$ é múltiplo de 5, já que $5(-1) = -5$

$6 \equiv 11 \pmod 5$ pois $6-11 = -5$ é múltiplo de 5, já que $5(-1) = -5$

$7 \equiv 2 \pmod 5$ pois $7-2 = 5$ é múltiplo de 5, já que $5(1) = 5$

$17 \equiv 7 \pmod 5$ pois $17-7 = 10$ é múltiplo de 5, já que $5(2) = 10$

Vamos procurar a classe do [1], formada por elementos relacionados ao 1. Essa classe é formada pelos valores em S que diferem de 1 por um múltiplo de 5:

$[1] = \{1, 6, 11, 16\}$

E de forma análoga, encontramos as classes dos demais elementos:

$[2] = \{2, 7, 12, 17\}$ $[3] = \{3, 8, 13, 18\}$ $[4] = \{4, 9, 14, 19\}$ $[5] = \{5, 10, 15, 20\}$

A partição de S induzida por R é $P = \{\{1, 6, 11, 16\}, \{2, 7, 12, 17\}, \{3, 8, 13, 18\}, \{4, 9, 14, 19\}, \{5, 10, 15, 20\}\}$