

Matemática Discreta

Teoria dos Conjuntos Introdução e Definições

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Teoria dos Conjuntos

- **Objetivo desta aula**

- Introduzir a teoria dos conjuntos
- Apresentar conceitos, propriedades e definições importantes na teoria dos conjuntos como
 - Pertinência e Contingência
 - Cardinalidade
 - Conjunto Universo
 - Subconjunto
 - Igualdade de Conjuntos
- Capacitar o aluno a usar conceitos de Teoria dos Conjuntos para modelar problemas computacionais

Problema #1

- **Verdadeiro ou Falso**

- Sejam

- $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 12 \}$
 - $B = \{ 14, 16, 18, 19, 20 \}$

- Diga quais das proposições a seguir são verdadeiras

a) $\{ 15, 16, 17 \} \subseteq A$

b) $\{ 18 \} \in B$

c) $B \subset A$

d) $\{ 18 \} \subseteq B$

e) $\{ \emptyset \} \subseteq B$

f) $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20 \} \not\subseteq B$

g) $15 \subseteq A$

h) $\emptyset \notin A$

Teoria dos Conjuntos

■ Conjunto



Fonte: <https://pixabay.com/>

Conjunto de pedras coloridas

- Um **conjunto** é uma coleção de objetos não ordenada e sem repetição
- Todos os objetos de um conjunto têm alguma propriedade em comum

Teoria dos Conjuntos

▪ Conjunto

▪ Exemplos

1. $\{ 1, 2, 3 \}$, $\{ 3, 2, 1 \}$ e $\{ 1, 1, 2, 3, 3 \}$

→ Representam o mesmo conjunto

2. O conjunto formado por todos os meses do ano (M)

R. $M = \{ \text{janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho, julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro} \}$

3. O conjunto formado por todos os meses iniciados com a letra “B”

R. $B = \emptyset$

→ O conjunto vazio (\emptyset) é um conjunto desprovido de elementos

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto**

- Nomenclatura e Notação

- Geralmente são usadas letras maiúsculas para denotar conjuntos
 - Os objetos de um conjunto são apresentados entre chaves ({ e }) e separados por vírgula

- Exemplos

- $A = \{ 1, 2, 3 \}$
 - $B = \{ \text{Pedro, João, Maria} \}$
 - $C = \{ !, \$, @ \}$

Teoria dos Conjuntos



- **Nomenclatura e Notação**

- Defina conjuntos contendo
 - a) Suas frutas preferidas
 - b) Nomes de seus irmãos
 - c) Seus apelidos
 - d) O melhor time de futebol do país
 - e) Os números primos positivos

Teoria dos Conjuntos



▪ Nomenclatura e Notação

- Defina conjuntos contendo
 - a) Suas frutas preferidas
 - b) Nomes de seus irmãos
 - c) Seus apelidos
 - d) O melhor time de futebol do país
 - e) Os números primos positivos

RESPOSTAS

a) $F = \{ \text{banana, limão, uva} \}$

b) $I = \{ \text{Henrique} \}$

c) $A = \{ \}$

d) $M = \{ \text{TIMÃO} \}$

e) $P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \}$

(a, b, c e d são apenas exemplos já que outras respostas diferentes são possíveis)

Teoria dos Conjuntos

■ Pertinência a um Conjunto



Fonte: <https://pixabay.com/>

- Cada objeto do conjunto pertence a ele
- Um objeto que pertence a um conjunto é chamado membro do conjunto ou elemento do conjunto

Teoria dos Conjuntos

■ Pertinência a um Conjunto

- A pertinência a um conjunto é denotada pelo símbolo \in
 - A expressão $x \in A$ significa que o objeto x é elemento do conjunto A
 - A expressão $x \notin A$ significa que o objeto x não é elemento do conjunto A
- Outras formas de ler a expressão “é elemento de”:
 - *é membro de,*
 - *pertence a,*
 - *está em*

Teoria dos Conjuntos

- **Pertinência a um Conjunto**

- Exemplos

- $2 \in \{1, 2, 3\}$

- $4 \notin \{1, 2, 3\}$



■ **Pertinência a um Conjunto**

- Para os conjuntos definidos anteriormente por você, preencha com \in ou \notin
 - a) uva ? Conjunto das frutas de que você mais gosta
 - b) Pedro ? Conjunto com os nomes de seus irmãos
 - c) Tico ? Conjunto com seus apelidos
 - d) Palmeiras ? Conjunto do melhor time de fut. do país
 - e) 5 ? Conjunto dos números primos positivos

Teoria dos Conjuntos



■ Pertinência a um Conjunto

- Para os conjuntos definidos anteriormente por você, preencha com \in ou \notin
 - a) uva ? Conjunto das frutas de que você mais gosta
 - b) Pedro ? Conjunto com os nomes de seus irmãos
 - c) Tico ? Conjunto com seus apelidos
 - d) Palmeiras ? Conjunto do melhor time de fut. do país
 - e) 5 ? Conjunto dos números primos positivos

RESPOSTAS

- | | |
|-------------------------|---|
| a) uva \in F | F = { banana, mamão, uva } |
| b) Pedro \notin I | I = { Henrique } |
| c) Tico \notin A | A = { } |
| d) Palmeiras \notin M | M = { TIMÃO } |
| e) 5 \in P | P = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... } |

Teoria dos Conjuntos

- **Descrição de Conjuntos**



Fonte: <https://pixabay.com/>

Teoria dos Conjuntos

■ Descrição de Conjuntos

1. Listar total ou parcialmente os elementos do conjunto

- $A = \{ a, b, c \}$ ou $S = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

2. Usar recorrência para descrever como gerar os elementos do conjunto

- Explicitar um elemento desse conjunto e descrever os outros em termos de elementos já conhecidos

- i. $2 \in S$ e ii. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$

3. Descrever uma propriedade que caracteriza os elementos do conjunto usando a notação

$$\{ \text{variável de referência} \mid \text{condições} \}$$

- $S = \{ x \mid x \text{ é um inteiro par, } x > 0 \}$

Alternativamente
usa-se : no lugar
de |

Teoria dos Conjuntos

■ Descrição de Conjuntos

Não funciona para alguns conjuntos. Por exemplo:
 $S = \{ 3, 5, 7, \dots \}$?

1. Listar total ou parcialmente os elementos do conjunto

■ $A = \{ a, b, c \}$ ou $S = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

2. Usar recorrência para descrever como gerar os elementos do conjunto

■ Explicitar um elemento desse conjunto e descrever os outros em termos de elementos já conhecidos

■ i. $2 \in S$ e ii. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$

3. Descrever uma propriedade que caracteriza os elementos do conjunto usando a notação

$\{ \text{variável de referência} \mid \text{condições} \}$

■ $S = \{ x \mid x \text{ é um inteiro par, } x > 0 \}$

Alternativamente
usa-se : no lugar
de \mid

Teoria dos Conjuntos

▪ Descrição de Conjuntos

1. Listar total ou parcialmente os elementos do conjunto

- $A = \{ a, b, c \}$ ou $S = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

Difícil de especificar em muitos casos

2. Usar recorrência para descrever como gerar os elementos do conjunto

- Explicitar um elemento desse conjunto e descrever os outros em termos de elementos já conhecidos

- i. $2 \in S$ e ii. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$

3. Descrever uma propriedade que caracteriza os elementos do conjunto usando a notação

$$\{ \text{variável de referência} \mid \text{condições} \}$$

- $S = \{ x \mid x \text{ é um inteiro par, } x > 0 \}$

Alternativamente
usa-se : no lugar
de |

Teoria dos Conjuntos

■ Descrição de Conjuntos

1. Listar total ou parcialmente os elementos do conjunto

■ $A = \{ a, b, c \}$ ou $S = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

2. Usar recorrência para descrever como gerar os elementos do conjunto

■ Explicitar um elemento desse conjunto e descrever os outros em termos de elementos j

■ i. $2 \in S$ e ii. Se $i \in S$

Em geral, é a melhor opção

3. Descrever uma propriedade que caracteriza os elementos do conjunto usando a notação

$\{ \text{variável de referência} \mid \text{condições} \}$

■ $S = \{ x \mid x \text{ é um inteiro par, } x > 0 \}$

Alternativamente
usa-se : no lugar
de |



■ Descrição de Conjuntos

1. Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos

- a) $\{ x \mid x \text{ é um inteiro e } 3 < x \leq 7 \}$
- b) $\{ x \mid x \text{ é um mês iniciado com a letra A} \}$
- c) $\{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10 \text{ e } x \text{ é múltiplo de } 3 \}$
- d) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 = 4 \}$

2. Descreva cada um dos conjuntos a seguir por meio de uma propriedade que caracterize seus elementos

- a) $\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \}$
- b) $\{ 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \dots \}$



■ Descrição de Conjuntos

1. Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos

- a) $\{ x \mid x \text{ é um inteiro e } 3 < x \leq 7 \}$
- b) $\{ x \mid x \text{ é um mês iniciado com a letra A} \}$
- c) $\{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10 \text{ e } x \text{ é múltiplo de } 3 \}$
- d) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 = 4 \}$

RESPOSTAS

- a) $\{ 4, 5, 6, 7 \}$
- b) $\{ \text{Abril, Agosto} \}$
- c) $\{ 0, 3, 6, 9 \}$
- d) $\{ -2, 2 \}$



■ Descrição de Conjuntos

2. Descreva cada um dos conjuntos a seguir por meio de uma propriedade que caracterize seus elementos

a) $\{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \}$

b) $\{ 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \dots \}$

RESPOSTAS

a) $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é um número primo} \}$

b) $\{ x \mid x \text{ é a codificação em binário de um inteiro não negativo} \}$

Teoria dos Conjuntos

- **Cardinalidade (tamanho)**



Fonte: <https://pixabay.com/>

→ A **cardinalidade** ou **tamanho** de um conjunto é o número de elementos desse conjunto

Teoria dos Conjuntos

- **Cardinalidade (tamanho)**

- A cardinalidade do conjunto A é denotada por

$$|A| \text{ ou } \#A$$

- Um conjunto é **finito** se sua cardinalidade é um número natural n , ou seja, se A possui n elementos
- Caso contrário, dizemos que o conjunto é **infinito**
 - A cardinalidade do conjunto dos inteiros é infinita (∞)
- A cardinalidade do conjunto vazio é zero, ou seja $|\emptyset| = 0$



■ Cardinalidade (tamanho)

1. Para os conjuntos definidos anteriormente por você, diga qual a cardinalidade

a) |Conjunto das frutas de que você mais gosta| =

b) |Conjunto com os nomes de seus irmãos| =

c) |Conjunto com seus apelidos| =

d) |Conjunto do melhor time de futebol do país| =

e) |Conjunto dos números primos positivos| =

2. Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos

a) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| \leq 10 \}$

b) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } 1 \leq x^2 \leq 2 \}$



■ Cardinalidade (tamanho)

1. Para os conjuntos definidos anteriormente por você, diga qual a cardinalidade
 - a) |Conjunto das frutas de que você mais gosta| =
 - b) |Conjunto com os nomes de seus irmãos| =
 - c) |Conjunto com seus apelidos| =
 - d) |Conjunto do melhor time de futebol do país| =
 - e) |Conjunto dos números primos positivos| =

RESPOSTAS

- | | |
|----------------------------|---|
| a) $ F = 3$ | $F = \{ \text{banana, mamão, uva} \}$ |
| b) $ I = 1$ | $I = \{ \text{Henrique} \}$ |
| c) $ A = 0$ | $A = \{ \}$ |
| d) $ M = 1$ | $M = \{ \text{TIMÃO} \}$ |
| e) $ P = \text{infinito}$ | $P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots \}$ |



■ Cardinalidade (tamanho)

2. Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos

a) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| \leq 10 \}$

b) $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } 1 \leq x^2 \leq 2 \}$

RESPOSTAS

a) 21, pois o conjunto é: $\{ -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

b) 2, pois o conjunto é: $\{ -1, 1 \}$

Teoria dos Conjuntos

■ Conjunto Universo



Fonte: <https://pixabay.com/>

→ O **conjunto universo** define o contexto dos objetos em discussão

Teoria dos Conjuntos

- **Conjunto Universo**

- O conjunto universo é denotado por **U**
- Exemplo
 - O conjunto

$$A = \{ x \mid 10 \leq x \leq 20 \}$$

Terá sua formatação exata conhecida apenas se soubermos qual o seu conjunto universo

- Se $U = \mathbb{N}$,
 $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
 - Se $U = \mathbb{R}$,
 $A = [10, 20]$
- Quando não houver dúvida, **U** não precisa ser especificado

Teoria dos Conjuntos

■ Subconjunto



Fonte: <https://pixabay.com/>

→ A é **subconjunto** de B se todo elemento de A também é elemento de B

Teoria dos Conjuntos

■ Subconjunto

- Diz-se que A **está contido** em B ou B **contém** A, usando os símbolos:
 - $A \subseteq B$ A está contido em B
 - $B \supseteq A$ B contém A
- A não é subconjunto de B se pelo menos um elemento de A não pertence a B
 - Escrevemos $A \not\subseteq B$

Teoria dos Conjuntos

■ Alguns conjuntos especiais

⁺ só os elementos positivos
⁻ só os elementos negativos
^{*} sem o zero

\emptyset = conjunto vazio (sem elementos)

\mathbb{Z} = conjunto dos números inteiros

$\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

\mathbb{N} = conjunto dos números naturais ou inteiros não-negativos
(note que $0 \in \mathbb{N}$)

$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\{x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0\}$

\mathbb{Q} = conjunto dos número racionais

$\{ \dots, -1/2, -1/3, -1/4, 0, 1/4, 1/3, 1/2, \dots \}$

$\{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$

\mathbb{R} = conjunto dos números reais

$\{ \dots, -0.1, 0, +0.1, \dots \}$

Teoria dos Conjuntos



▪ Subconjunto

- Dados os conjuntos
 - $A = \{ 1, 2, 4, 8 \}$ e $B = \{ 1, 3, 7 \}$
- Complete com os símbolos: \subseteq e $\not\subseteq$
 - a) A ____ B
 - b) A ____ \mathbb{N}
 - c) B ____ \mathbb{Z}
 - d) B ____ $\{ x \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y+1 \}$
 - e) \mathbb{Z}^+ ____ \mathbb{Z}^-
 - f) \mathbb{N} ____ \mathbb{Z} ____ \mathbb{Q} ____ \mathbb{R}

Teoria dos Conjuntos



▪ Subconjunto

- Dados os conjuntos
 - $A = \{ 1, 2, 4, 8 \}$ e $B = \{ 1, 3, 7 \}$
- Complete com os símbolos: \subseteq e $\not\subseteq$
 - a) $A \underline{\not\subseteq} B$
 - b) $A \underline{\subseteq} \mathbb{N}$
 - c) $B \underline{\subseteq} \mathbb{Z}$
 - d) $B \underline{\subseteq} \{ x \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y+1 \}$
 - e) $\mathbb{Z}^+ \underline{\not\subseteq} \mathbb{Z}^-$
 - f) $\mathbb{N} \underline{\subseteq} \mathbb{Z} \underline{\subseteq} \mathbb{Q} \underline{\subseteq} \mathbb{R}$

Teoria dos Conjuntos

■ Igualdade de Conjuntos



Fonte: <https://pixabay.com/>

→ Dois conjuntos são **iguais** se contêm exatamente os mesmos elementos

Teoria dos Conjuntos

■ Igualdade de Conjuntos

- Um conjunto A é igual a um conjunto B sse todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A
- Assim,
 - Dois conjuntos A e B são diferentes sse existe um elemento de A que não pertence a B ou um elemento de B que não pertence a A
- Lembre-se que um conjunto não se altera se seus elementos forem repetidos ou reordenados

Teoria dos Conjuntos

■ Algumas propriedades importantes

- i. para todo conjunto A , tem-se que $\emptyset \subseteq A \subseteq U$
(todo conjunto é subconjunto do conjunto universo e contém o conjunto vazio)
- ii. para todo conjunto A , $A \subseteq A$
(todo conjunto é subconjunto de si mesmo)
- iii. se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$
(transitividade)
- iv. $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
(provar a inclusão nas duas direções é a maneira usual de demonstrar a igualdade de dois conjuntos)

Teoria dos Conjuntos

- \subseteq e \in
 - Os símbolos \subseteq e \in têm significados relacionados, porém, diferentes
 - A notação $x \in A$ significa que x é elemento de A e
 - A notação $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A também é elemento de B
 - Assim,
 - $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ é **verdadeiro**
 - $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$ é **falso**

Problema #1

- **Verdadeiro ou Falso**

- Sejam

- $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 12 \}$
 - $B = \{ 14, 16, 18, 19, 20 \}$

- Diga quais das proposições a seguir são verdadeiras

a) $\{ 15, 16, 17 \} \subseteq A$

b) $\{ 18 \} \in B$

c) $B \subset A$

d) $\{ 18 \} \subseteq B$

e) $\{ \emptyset \} \subseteq B$

f) $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20 \} \not\subseteq B$

g) $15 \subseteq A$

h) $\emptyset \notin A$