

Aula 4

Limites. Uma introdução intuitiva

4.1 Conceituando limites através de exemplos

Nos capítulos anteriores, fizemos uso de um limite especial para calcular derivadas, a saber o limite $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Neste capítulo veremos os limites como ferramentas de estudo do comportamento de funções reais, provendo informações importantes sobre seus gráficos.

A definição formal de *limite* é matematicamente sofisticada, requerendo muitas horas de estudo para ser entendida. O leitor interessado poderá encontrá-la em bons livros-textos de Cálculo¹. Ocorre porém que, em um primeiro curso de Cálculo, a definição de limite tem pouca ou nenhuma serventia quando queremos calcular limites. Faremos uma exploração intuitiva do conceito de limite e de suas propriedades, através de exemplos e interpretações gráficas.

Exemplo 4.1. Considere a função $f(x) = 2x + 3$. Quando x assume uma sequência de valores aproximando-se mais e mais de 0, o número $f(x) = 2x + 3$ assume uma sequência de valores aproximando-se de $2 \cdot 0 + 3 = 3$. Por exemplo, suponhamos que x assume sucessivamente os valores da sequência

$$0,1; \quad 0,01; \quad 0,001; \quad 0,0001; \quad 0,00001; \quad \dots$$

aproximando-se mais e mais do número 0. Então a função $f(x)$ assumirá sucessivamente os valores da sequência

$$3,2; \quad 3,02; \quad 3,002; \quad 3,0002; \quad 3,00002; \quad \dots$$

aproximando-se mais e mais do número 3.

¹Para o leitor interessado, uma referência recomendada é Hamilton Luiz Guidorizzi. Um curso de cálculo: volume 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

Dizemos então que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0, é igual a 3, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

Suponhamos que $f(x)$ é uma função real definida em uma reunião de intervalos, e que x_0 é um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos. Os matemáticos dizem que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ($L \in \mathbb{R}$) quando podemos fazer $f(x)$ *arbitrariamente próximo de* L , tomando x *suficientemente próximo de* x_0 , mantendo $x \neq x_0$. No exemplo em que $f(x) = 2x + 3$, podemos fazer $f(x)$ próximo de 3 o quanto quisermos, bastando tomar x bem próximo de 0.

Exemplo 4.2. *Aqui temos uma lista de exemplos intuitivos, em que fazemos uso de propriedades intuitivas do cálculo de limites.*

1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (a \in \mathbb{R})$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$
3. Sendo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ($n \in \mathbb{N}$, a_n, \dots, a_0 todos reais),

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)$$
4.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)} = \frac{8 - 3}{4 + 1} = 1$$

Definição 4.1 (Continuidade de $f(x)$ em x_0). *Nos exemplos anteriores, de limites com x tendendo a x_0 , tivemos sempre x_0 no domínio de f e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Quando isto ocorre, dizemos que f é contínua no ponto x_0 .*

No próximo exemplo, é proposto o cálculo de um limite em que $x \rightarrow x_0$, mas x_0 não está no domínio de f .

Exemplo 4.3. Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

Solução. Note que, sendo $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, temos que $2 \notin D(f)$. Quando x se aproxima de 2, x^3 se aproxima de 8. Um cálculo direto nos dá então

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{8 - 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Este resultado, $0/0$, é muito comum no cálculo de limites, e não tem significado como valor de um limite. A expressão $0/0$ é um exemplo de um *símbolo de indeterminação* ocorrendo em uma tentativa de cálculo de um limite. A ocorrência desta expressão significa que o limite ainda não foi calculado.

Para evitar o símbolo de indeterminação $0/0$, neste exemplo fazemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \quad (\text{pois } x \neq 2) \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12\end{aligned}$$

Exemplo 4.4 (Cálculo de um limite com mudança de variável).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = ?$$

Um cálculo direto nos dá $0/0$, uma *indeterminação*.

Podemos fazer a mudança de variável. $y = \sqrt[3]{x+1}$.

Temos então $y^3 = x + 1$, e portanto $x = y^3 - 1$.

Quando x tende a 0 , y tende a 1 (em símbolos: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 1$). E aí temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{y^3 - 1} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \cancel{(y - 1)}}{\cancel{(y - 1)}(y^2 + y + 1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4.2 Limites infinitos. Limites no infinito

Consideremos agora a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Temos que o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de 0 , simbolicamente $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Observe a tabela 4.1. Ali fizemos uso do fato de que f é uma função *par*: $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Na primeira coluna da tabela 4.1, temos valores de x (positivos e negativos) cada vez mais próximos de 0 . Na última coluna, vemos que os valores correspondentes de $f(x)$

tornam-se cada vez maiores. Neste exemplo, podemos fazer $f(x)$ maior que qualquer número real positivo, tomando x suficientemente próximo de 0. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a 0 é “+ *infinito*”, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Tabela 4.1.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
± 1	1	1
$\pm 0,5$	0,25	4
$\pm 0,2$	0,04	25
$\pm 0,1$	0,01	100
$\pm 0,01$	0,0001	10000
$\pm 0,001$	0,000001	1000000

A interpretação geométrica de $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = +\infty$ pode ser visualizada na figura 4.1, em que temos um esboço do gráfico da curva $y = 1/x^2$.

Agora observe a tabela 4.2. Notamos agora que, à medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ torna-se cada vez mais próximo de 0. Isto também é sugerido pela figura 4.1. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a “+ *infinito*”, é igual a 0, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Nas tabelas 4.1 e 4.2 também ilustramos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Também podemos facilmente inferir

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Figura 4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty$, ou seja, à medida que x se aproxima de 0, $y = f(x)$ torna-se cada vez maior. Também $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^2 = 0$, ou seja, à medida que x cresce, tomando valores cada vez maiores, $f(x)$ aproxima-se de 0. E ainda $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^2 = 0$.

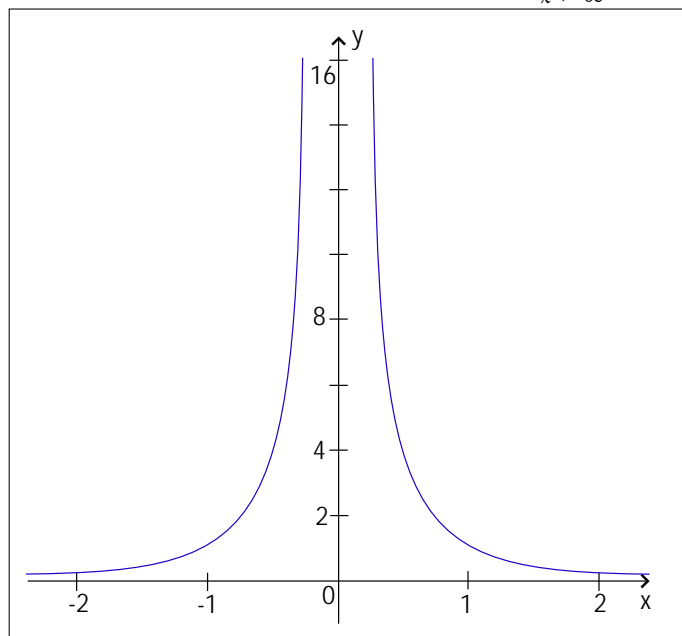


Tabela 4.2.

x	x^2	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1	1
2	4	$\frac{1}{4} = 0,25$
5	25	$\frac{1}{25} = 0,04$
10	100	0,01
100	10000	0,0001
10^3	10^6	10^{-6}

Com estes exemplos simples iniciamos uma *álgebra de limites com o símbolo ∞* :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(\pm\infty)^2 = +\infty$$

$$(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty)^3 = +\infty$$

$$(-\infty)^3 = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 (-\infty)^{(\text{inteiro positivo par})} &= +\infty & (-\infty)^{(\text{inteiro positivo ímpar})} &= -\infty \\
 (\pm\infty)^{-n} &= \frac{1}{(\pm\infty)^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0 \quad (n > 0, n \in \mathbb{Z}) & \frac{c}{\pm\infty} &= 0 \quad (c \text{ constante}) \\
 +\infty + c &= +\infty \quad (c \text{ constante}) & -\infty + c &= -\infty \quad (c \text{ constante})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c \cdot (+\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} & c \cdot (-\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases} \\
 \frac{+\infty}{c} &= \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} & \frac{-\infty}{c} &= \begin{cases} +\infty & \text{se } c < 0 \\ -\infty & \text{se } c > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mas atenção! Cautela com essa nova “aritmética”! Os “resultados”

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad (+\infty) - (+\infty) \quad (-\infty) + (+\infty) \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

são novos símbolos de indeterminação. Nada significam como valores de limites. Se chegarmos a algum deles no cálculo de um limite, temos que repensar o procedimento de cálculo.

Exemplo 4.5. Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$

Solução. Uma substituição direta nos dá

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \frac{+\infty - (+\infty) - 1}{+\infty + 4}$$

Para evitarmos símbolos de indeterminação, fazemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 + \frac{4}{x^3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{x(1 + \frac{4}{x^3})} = \frac{3 - \frac{2}{+\infty} - \frac{1}{+\infty}}{+\infty(1 + \frac{4}{+\infty})} \\
 &= \frac{3 - 0}{+\infty \cdot (1 + 0)} = \frac{3}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.6. Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - x^3)$

Temos

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) - (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$, portanto chegamos a um símbolo de indeterminação.

Podemos no entanto fazer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = (-\infty)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = (-\infty) \cdot (1 - 0) = -\infty.$$

Nos limites da forma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios em x , prevalecem os termos de maior grau de ambos os polinômios, ou seja, se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$\text{então } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Deixamos a dedução disto para o leitor, como um exercício.

Por exemplo, no exemplo 4.5 estudado anteriormente, poderíamos ter feito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Mas atenção. Isto só vale para limites de quocientes de polinômios, em que $x \rightarrow \pm\infty$.

Exemplo 4.7. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Solução. Aqui podemos ser induzidos a dizer, tal como no exemplo do limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ é infinito. Ok, mas qual “infinito”? $+\infty$ ou $-\infty$? A resposta é, neste caso, nenhum dos dois!

Se x se aproxima de 0 por valores positivos, então $1/x$ tende a $+\infty$. Porém se x se aproxima de 0 assumindo somente valores negativos, então $1/x$ tende a $-\infty$ ($|1/x|$ fica cada vez maior, porém $1/x$ mantém-se sempre < 0).

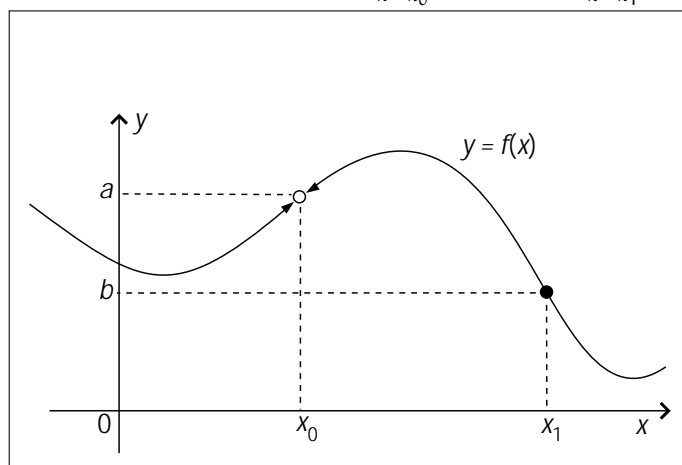
Neste caso, dizemos que não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

O comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x}$, nas proximidades de $x = 0$, será melhor estudado na próxima aula, quando introduziremos o conceito de limites laterais.

4.3 Ilustrações geométricas da ocorrência de alguns limites

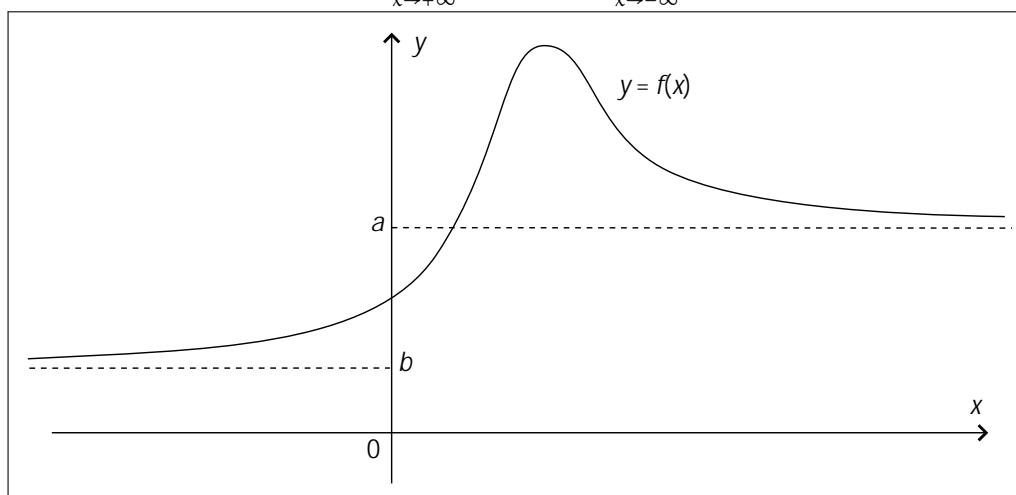
Na figura 4.2 temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida no conjunto $\mathbb{R} - \{x_0\}$, para a qual $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = b = f(x_1)$.

Figura 4.2. x_0 não está no domínio de f , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, e $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = b = f(x_1)$.



Na figura 4.3 temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em todo o conjunto \mathbb{R} , para a qual $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Figura 4.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.



Na figura 4.4, página 42, temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Na figura 4.5, página 42, temos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Na figura 4.6, página 42, ilustramos um exemplo de esboço de um gráfico de uma função definida em $\mathbb{R} - \{a\}$, para a qual $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

4.4 Problemas

1. Calcule os limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$$

$$(c) \lim_{k \rightarrow 4} \frac{k^2 - 16}{\sqrt{k} - 2}$$

$$(d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$(e) \lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^3 + 8}{h + 2}$$

$$(f) \lim_{z \rightarrow 10} \frac{1}{z - 10}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^4}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^2 + 3)(x - 4)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 15$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$$

$$(l) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{6s - 1}{2s - 9}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$(n) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$$

$$(o) \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(4t^2 + 5t - 3)^3}{(6t + 5)^4}$$

$$(p) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^{-2} - 2^{-2}}{h}$$

2. Demonstre que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ e}$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

sendo $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ números reais com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Figura 4.4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

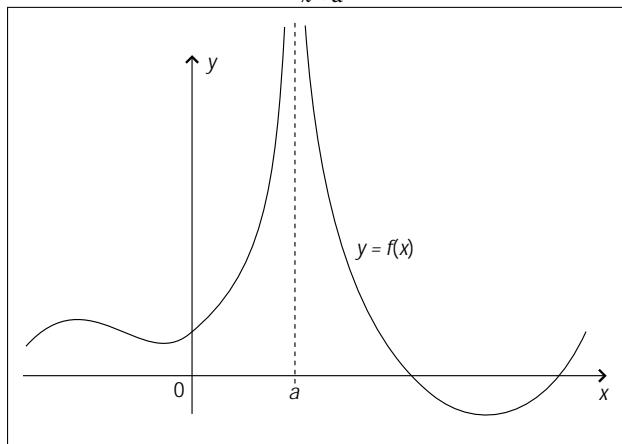


Figura 4.5. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

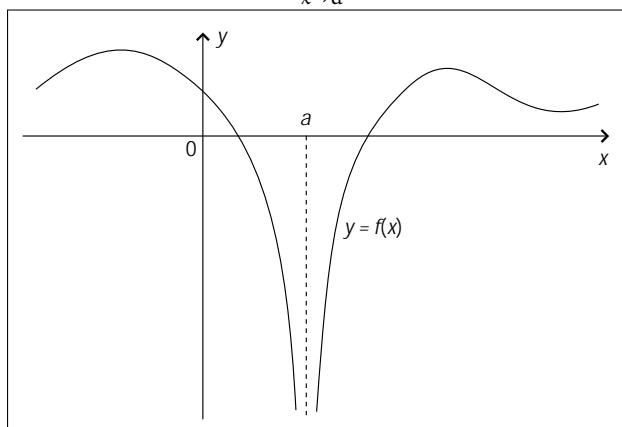
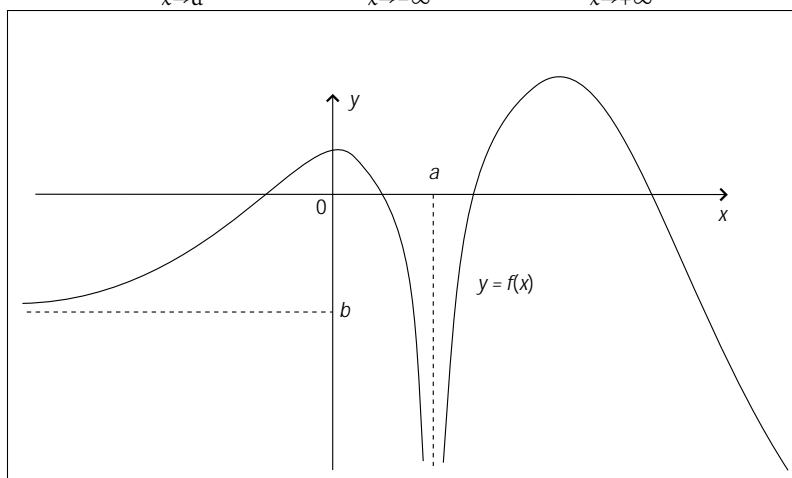


Figura 4.6. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



3. Calcule os limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x - 5}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+3)^3(2-3x)^2}{x^5+5}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+ax} - x)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+8x^3} - 2x)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$$

4. Considerando as duas primeiras colunas da tabela 4.1, de valores para a função $g(x) = x^2$, Joãozinho argumentou que, quanto mais próximo de 0 é o valor de x , mais próximo de -1 fica $g(x)$. Explique por que Joãozinho está certo. Isto quer dizer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$? Explique.

4.4.1 Respostas e sugestões

1. (a) 4 (b) $1/9$ (c) 32 (d) $3x^2$ (e) 12 (f) não existe (g) $+\infty$ (h) $5\sqrt{2} - 20$ (i) 15
 (j) -7 (k) $-3/8$ (l) -23 (m) 2 (n) $-1/8$ (o) -64 (p) $-1/4$
2. (b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{\pm\infty} + \dots + \frac{a_1}{\pm\infty} + \frac{a_0}{\pm\infty}}{1 + \frac{b_{m-1}}{\pm\infty} + \dots + \frac{b_1}{\pm\infty} + \frac{b_0}{\pm\infty}} \\&= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \frac{1 + 0 + \dots + 0}{1 + 0 + \dots + 0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}\end{aligned}$$

3. (a) 2 (b) 0 (c) 0
 (d) $+\infty$.

Sugestão. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}.$

Agora, como $x \rightarrow -\infty$, temos $x < 0$, e então $|x| = -x$.

(e) 72

(f) 0.

Sugestão. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}.$

(g) $a/2$ (h) 0.

Sugestão. Para contornar a indeterminação $+\infty - \infty$, faça

$$x + \sqrt[3]{1-x^3} = \frac{(x + \sqrt[3]{1-x^3})[x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2]}{x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2}, \text{ e use a identidade}$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

(i) 0.

Sugestão. Aproveite a idéia usada na solução do problema anterior, agora fazendo uso da identidade $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

(j) $1/2$

4. Joãozinho está certo, pois x^2 , sendo positivo, ao se tornar cada vez mais próximo de 0 fica também cada vez mais próximo de -1 . Podemos notar que a sequência de quadrados que aparece na tabela 4.1 é a sequência 1 0,25 0,04 0,01 0,0001 0,000001... Cada termo a partir do segundo está mais próximo de -1 que seu antecessor! Mas isto não quer dizer que o limite de x^2 quando x tende a 0 seja -1 . “Cada vez mais próximo” não quer dizer “arbitrariamente próximo”, que é o termo correto no contexto de limites.