08/09 - Aula 10 - Esboçando gráficos: zeros no denominador e retas assíntotas

Esboce o gráfico de: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$D(f) = \mathbb{R}$ pois $x^2+1 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2}}$$

$$f'(x)=0 \iff \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x^2 \cdot (x^2+3) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ ou } x^2+3 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$ é o único ponto crítico

$$f'(x) = \frac{\overbrace{x^2}^{+}(\overbrace{x^2+3}^{+})}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{(+)}}$$

$+ \ + \ + \ + \ + \ + \ + \ + \ + \ + \ +$

$$f''(x) = \left(\frac{\overbrace{x^2(x^2+3)}^{x^4+3x^2}}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

Logo,

$$\boxed{f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}}$$

$$f''(x) = 0 \iff 2x(3-x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

Pontos de Inflexão $= \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

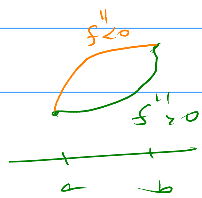
$2x$: $- - - - - - - \ (0) \ + + + + + +$

$3-x^2$: $- - - - - \ (-\sqrt{3}) \ + + + + + + + \ (+\sqrt{3}) \ - - - - -$

$(x^2+1)^3$: $+ + + + + + + + + + + +$

$f''(x) = \dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$: $+ + + + + \ (-\sqrt{3}) \ - - - - - - \ (0) \ + + + \ (+\sqrt{3}) \ - - - - - -$

$\cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap$

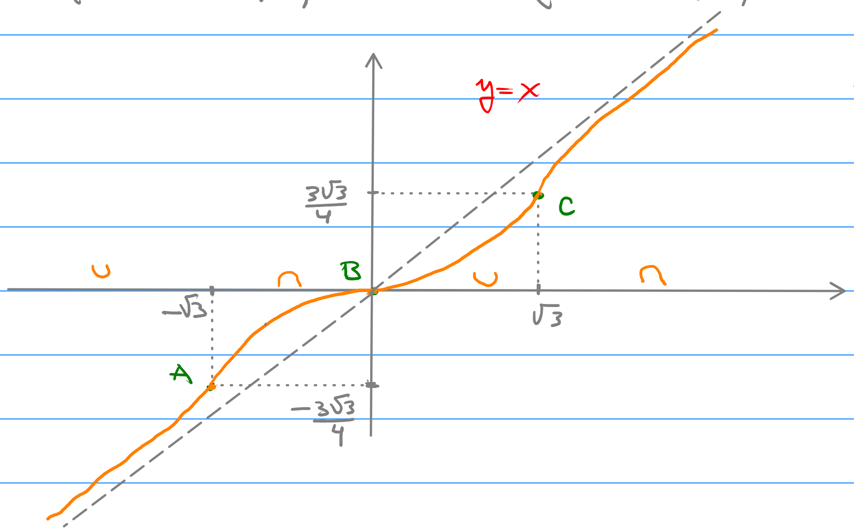


$f''(x) > 0$ em $x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ tem concavidade para cima

$f''(x) < 0$ em $x \in (a,b) \Rightarrow$ " " " " baixo

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; $f(0) = 0$; $f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3}) = -\left[\dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2+1}\right] = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A = \left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right), B = (0,0), C = \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right) \in Gr(f)$

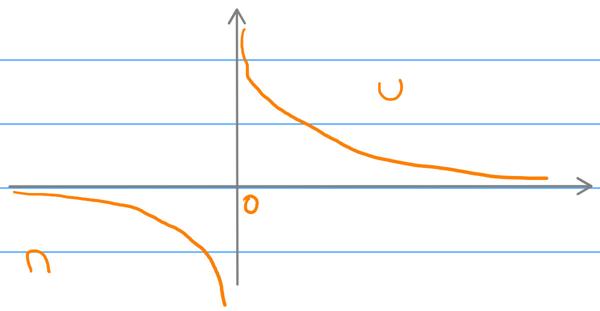


$f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

obs: $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico pois $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f'(x)$: $- \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$

$f''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$: $- \ - \ \overset{\cap}{-} \ - \ - \ - \ \underset{0}{|} \ + \ \overset{\cup}{+} \ + \ + \ +$

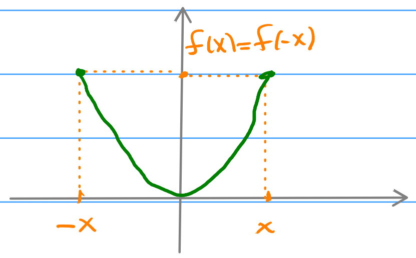


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

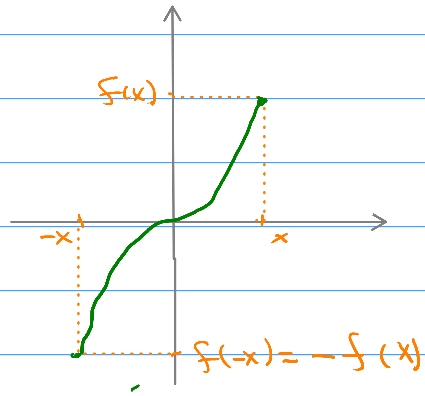
$f(x)$ é par se $f(-x) = f(x)$

$f(x)$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$



PAR

$f(x) = x^2$



ÍMPAR

$f(x) = x^3$

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \dfrac{x}{\left(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\approx 0}\right)} \approx x$ qdo x é grande

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{x^2+1}$

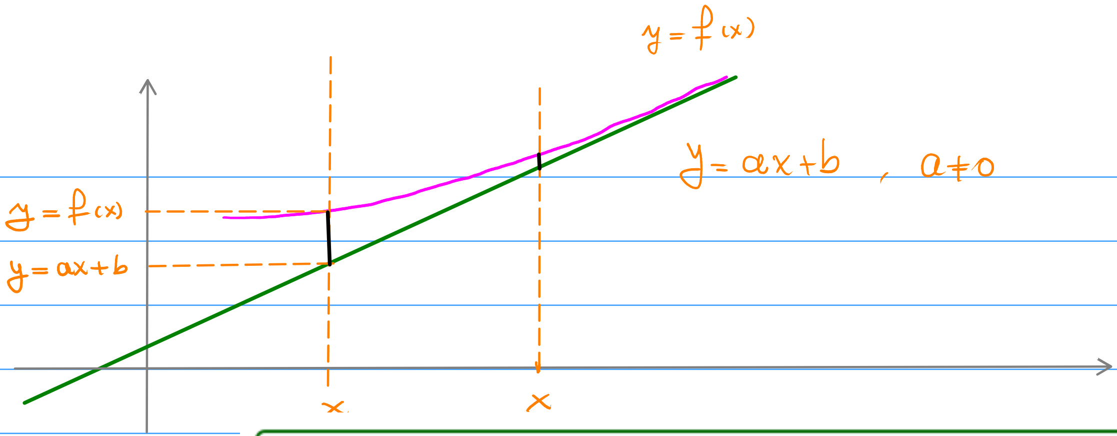
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \left(\dfrac{-1}{x + \frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\approx 0}} = \dfrac{-1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow$ o gráfico de $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ se aproxima do gráfico de $y = x$

Assíntotas inclinadas

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, para certos números reais a e b, temos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f à direita, sendo uma *assíntota inclinada* se $a \neq 0$.

Neste caso, à medida em que x cresce, tornando-se cada vez maior, com valores positivos, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de $ax + b$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b$

Analogamente, a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f, à esquerda, quando $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Analogamente, a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f, à esquerda, quando $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Assim, se a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

Calculado o valor do coeficiente a, para determinar b calculamos (usando o mesmo sinal para ∞ usado no limite anterior)

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$$

Reciprocamente, se $a \in \mathbb{R}$, e se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, e $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ e a reta $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f quando $x \to +\infty$. Observação análoga é válida se $x \to -\infty$.

Ex $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - x\right] = 0 \Rightarrow b = 0$$

Logo, $y = ax + b = 1 \cdot x + 0 = x \Rightarrow y = x$ é uma assíntota à direita de $f(x)$.