Aula 3

Derivação em cadeia e derivação implícita

3.1 A regra da cadeia para derivar uma composição de funções

A *regra da cadeia* é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma *composição* (ou um *encadeamento*) de funções, tais como $f(g(x))$ ou $f(g(h(x)))$, conhecendo-se as derivadas $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$.

Começaremos com um exemplo. Quando temos uma função composta, tal como a função definida por $y = (x^3 + x - 1)^{10}$, podemos decompô-la como composição de funções *elementares*. Simplesmente escrevemos

$$y = u^{10}, \quad u = x^3 + x - 1.$$

Na notação usada por Leibniz[1], a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

No caso, teremos então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (3x^2 + 1) \\ &= 10(x^3 + x - 1)^9 (3x^2 + 1) \end{aligned}$$

[1] Gottfried Leibniz, século XVII, dividiu com Newton a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral.

Repetindo tudo, passando da notação de Leibniz para a notação criada por Lagrange[2], temos

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$

e então

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= f'(u)\cdot g'(x)\\ &= f'(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

Regra 3.1 (Derivação em cadeia). *Se* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$ *(sendo deriváveis ambas as funções) então*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Em outras palavras, sendo $y = f(g(x))$, *tem-se*

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Observação 3.1. *A ideia intuitiva que inspira a* regra da cadeia *é a seguinte: sendo* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$, *temos* $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ *e,* $\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$

Assumindo, para simplificar, que $\Delta u \neq 0$ *sempre que* $\Delta x \neq 0$ *(o que nem sempre ocorre!), temos*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Quando Δx *tende a* 0, Δu *também tende a* 0 *(observação 2.1), e assim*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

e portanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Nos dispensaremos da tarefa de fazer uma dedução mais rigorosa da regra da cadeia, um procedimento possível mas um pouco mais sofisticado.

Exemplo 3.1. *Calcular* $\dfrac{dy}{dx}$, *sendo* $y = ((x^2+1)^{10}+1)^8$.

Solução. *Escrevemos*

$$y = u^8, \quad u = v^{10}+1, \quad v = x^2+1$$

[2]Joseph-Louis Lagrange, matemático francês do século XVIII.

Assim, estamos compondo (encadeando) três funções. Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\\ &= 8u^7\cdot 10v^9\cdot 2x\\ &= 160(v^{10}+1)^7(x^2+1)^9x\\ &= 160x((x^2+1)^{10}+1)^7(x^2+1)^9\end{aligned}$$

3.2 Derivadas de funções dadas implicitamente

Muitas vezes, duas variáveis x e y são tais que, em um certo intervalo de valores de x, y depende de x, ou seja, y é uma função da variável x, mas em lugar de uma fórmula $y = f(x)$, temos uma equação $F(x, y) = c$, inter-relacionando ambas as variáveis, tal como nos dois exemplos abaixo.

(1) $x^2 + y^2 = 2$

(2) $x^3 + y^3 = x + y + xy$

Às vezes, é possível resolver a equação dada em y, ou seja, "isolar" y no primeiro membro da equação, expressando *explicitamente* y como variável dependente de x. Por exemplo, no caso da equação (1), podemos fazer

$$y^2 = 2 - x^2$$

e então

$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

Neste caso, deduzimos então que as funções

$$y = f_1(x) = \sqrt{2 - x^2} \quad \text{e} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$$

ambas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 2$.

No caso da equação (2), podemos verificar que, por exemplo, o par $(x_0, y_0) = (1, 0)$ satisfaz a equação, mas não nos parece óbvio como resolver a equação em y e obter uma função $y = f(x)$ satisfazendo $f(1) = 0$ e $x^3 + (f(x))^3 = x + f(x) + xf(x)$.

No entanto, em ambos os casos, é possível obter a derivada $\dfrac{dy}{dx}$, em um determinado ponto x_0, se conhecemos também o valor correspondente y_0.

Para obter a derivada $\frac{dy}{dx}$, a partir de uma equação $F(x, y) = 0$, derivamos ambos os membros desta equação em relação à variável x, considerando y como função de x, e usamos as regras de derivação, bem como a regra da cadeia.

Exemplo 3.2. Obtendo $\frac{dy}{dx}$, a partir da equação $x^2 + y^2 = 2$, por derivação implícita.

Denotaremos por $(*)'$ *a derivada em relação a* x *da expressão* $*$ *(a expressão que estiver entre parênteses). Inicialmente notamos que, sendo* y *uma função de* x*, temos, pela regra da cadeia,* $(y^2)' = 2y \cdot y'$.

Para obtermos $\frac{dy}{dx}$ *(ou* y'*) no caso da equação* $x^2 + y^2 = 2$*, fazemos o seguinte desenvolvimento passo a passo.*

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = 2\\
&(x^2 + y^2)' = (2)'\\
&(x^2)' + (y^2)' = 0\\
&2x + 2yy' = 0\\
&yy' = -x\\
&y' = -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Isto quer dizer que, se y *é função de* x *satisfazendo* $x^2 + y^2 = 2$*, então* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Como vimos, as funções $y = f_1(x) = \sqrt{2 - x^2}$ *e* $y = f_2(x) = -\sqrt{2 - x^2}$ *ambas satisfazem* $x^2 + y^2 = 2$*. Pela derivação "implícita" efetuada acima, temos*

1. *Se* $y = f_1(x)$*, então* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_1(x)}$*. Neste caso,* $y' = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$;

2. *Se* $y = f_2(x)$*, então* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{f_2(x)}$*. Neste caso,* $y' = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$

Exemplo 3.3. Obtendo $\frac{dy}{dx}$, a partir da equação $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$, por derivação implícita.

Para obtermos $\frac{dy}{dx}$ *(ou* y'*) no caso da equação* $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$*, fazemos*

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y \\
&(x^3 + y^3)' = (x^2y^2 + x + y)' \\
&3x^2 + 3y^2y' = (x^2y^2)' + 1 + y' \\
&3x^2 + 3y^2y' = (x^2)'y^2 + x^2(y^2)' + 1 + y' \\
&3x^2 + 3y^2y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + 1 + y'
\end{aligned}$$

Obtemos então y', primeiramente deixando no primeiro membro somente os termos com y' e então colocando y' em evidência:

$$\begin{aligned}
&3y^2y' - 2x^2yy' - y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
&(3y^2 - 2x^2y - 1)y' = 1 + 2xy^2 - 3x^2 \\
&y' = \frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4. Obter a equação da reta tangente à curva $x^3+y^3 = x^2y^2+x+y$ no ponto $P = (1, 0)$.

Note que o problema só faz sentido porque o ponto $(1, 0)$ de fato pertence à curva: $1^3 + 0^3 = 1^2 \cdot 0^2 + 1 + 0$.

Primeiro obtemos $\dfrac{dy}{dx}$, por derivação implícita, a partir da equação $x^3 + y^3 = x^2y^2 + x + y$.

Isto já foi feito no exemplo anterior, em que calculamos $y' = \dfrac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}$.

O coeficiente angular da reta tangente procurada é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \left.\frac{1 + 2xy^2 - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - 1}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = \frac{1-3}{-1} = 2$$

Assim sendo, a reta procurada tem equação $y - 0 = 2(x - 1)$, ou seja, $y = 2x - 2$.

3.3 Derivada da *função potência* $f(x) = x^r$, sendo r um número racional

Da álgebra elementar, temos

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (para $x \geq 0$)
$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ (para x real qualquer)
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, sendo $n > 0$ (para $x \geq 0$ se n é par, e x qualquer se n é ímpar)

$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, sendo $q > 0$, p e q primos entre si ($x \geq 0$ se q é par e p é ímpar positivo; $x > 0$ se q é par e p é impar negativo; x qualquer se p e q são ambos ímpares e $p > 0$; $x \neq 0$ se p e q são ambos ímpares e $p < 0$)

Regra 3.2. *Sendo n um inteiro positivo,*

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

ou seja,

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Regra 3.3. *Sendo p e q inteiros, com $q > 0$,*

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Portanto, se r é um expoente racional,

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

Demonstração da regra 3.2. Se $y = x^{\frac{1}{n}}$, então $y^n = x$.

Aplicando derivação implícita, calculando derivadas em relação a x, obtemos

$$ny^{n-1}y' = 1$$

Portanto $y' = \dfrac{1}{ny^{n-1}} = \dfrac{1}{n} \cdot y^{1-n} = \dfrac{1}{n} \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ □

Demonstração da regra 3.3. Sendo p e q inteiros, $q > 0$, se $y = x^{\frac{p}{q}}$, então $y = \sqrt[q]{x^p}$, ou seja, $y^q = x^p$.

Por derivação implícita, derivando ambos os membros desta última igualdade, em relação a x, obtemos

$(y^q)' = (x^p)'$ ou, equivalentemente $qy^{q-1}y' = px^{p-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^p x^{-1}}{qy^q y^{-1}} = \frac{px^p x^{-1}}{qx^p y^{-1}} \\ &= \frac{p\cancel{x^p}x^{-1}}{q\cancel{x^p}y^{-1}} = \frac{p}{q}yx^{-1} = \frac{p}{q}x^{p/q}x^{-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$ □

Exemplo 3.5. *Calcular a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$*

Solução. *Temos* $f(x) = (3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}$.

Aplicando derivação em cadeia e a regra 3.3, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [(3x^2 + 3x + 5)^{\frac{1}{3}}]' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 3x + 5)' \\
&= \frac{1}{3}(3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(6x + 3) \\
&= (3x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) \\
&= \frac{2x + 1}{(3x^2 + 3x + 5)^{2/3}} \\
&= \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(3x^2 + 3x + 5)^2}}
\end{aligned}$$

Solução alternativa. *Sendo* $y = f(x)$, *temos*

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5}$$

e portanto

$$y^3 = 3x^2 + 3x + 5$$

Aplicando derivação implícita, obtemos

$$3y^2y' = 6x + 3, \text{ ou seja, } y' = \frac{6x + 3}{3y^2} = \frac{2x + 1}{y^2}$$

de onde

$$y' = \frac{2x + 1}{(\sqrt[3]{3x^2 + 3x + 5})^2} = \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(3x^2 + 3x + 5)^2}}$$

3.4 Problemas

1. Calcule $\frac{dy}{dx}$ em cada item.

   (a) $y = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)^5 + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^4$

   (b) $y = \frac{((x^3 + 7)^4 + x)^5}{x^2 + 1}$

   (c) $y = \left(\frac{x}{x + 1}\right)^{10}$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = (x^2 - 3x + 8)^3$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^4}$

(c) $F(v) = (17v - 5)^{1000}$

(d) $s(t) = (4t^5 - 3t^3 + 2t)^{-2}$

(e) $k(u) = \dfrac{(u^2+1)^3}{(4u-5)^5}$

3. Determine (i) a equação da reta tangente à curva no ponto indicado e (ii) os pontos da curva dada em que reta tangente à curva é horizontal, nos casos

   (a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4, \quad P = (2, 81)$.

   (b) $y = (2x - 1)^{10}, \quad P = (1, 1)$.

4. Se $k(x) = f(g(x))$, com $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ e $g'(2) = 5$, calcule $k'(2)$.

5. Determine y' sendo y uma função de x dada implicitamente pela equação

   (a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

   (b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

   (c) $(y^2 - 9)^4 = (4x^2 + 3x - 1)^2$

6. Verifique primeiramente que o ponto P pertence à curva dada e ache a equação da reta tangente à curva no ponto P.

   (a) $xy = -16, \quad P = (-2, 8)$;

   (b) $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0, \quad P = (2, -3)$.

7. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

   (b) $f(x) = (7x + \sqrt{x^2 + 3})^6$

   (c) $f(t) = \dfrac{4}{(9t^2 + 16)^{2/3}}$

   (d) $g(z) = \dfrac{\sqrt[3]{2z + 3}}{\sqrt{3z + 2}}$

   (e) $F(v) = \dfrac{5}{\sqrt[5]{v^5 - 32}}$

8. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ se

(a) $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$

(b) $3x^2 + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 + 20$

9. Uma função é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em seu domínio. Sendo f derivável, demonstre que

   (a) Se f é par, então f' é ímpar (ou seja, se $f(-x) = f(x)$ para todo x no domínio de f), então $f'(-x) = -f'(x)$;

   (b) Se f é ímpar, então f' é par.

3.4.1 Respostas e sugestões

1. (a) $\dfrac{dy}{dx} = 5x^2\left(\dfrac{x^3}{3}+1\right)^4 + 4x\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)^3$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5((x^3+7)^4+x)^4(12x^2(x^3+7)^3+1)(x^2+1) - 2x((x^3+7)^4+x)^5}{(x^2+1)^2}$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^9}{(x+1)^{11}}$

2. (a) $f'(x) = 3(x^2-3x+8)^2(2x-3)$

   (b) $f'(x) = \dfrac{-(7x^2+1)}{(x^2-1)^5}$

   (c) $F'(v) = 17000(17v-5)^{999}$

   (d) $s'(t) = -2(4t^5-3t^3+2t)^{-3}(20t^4-9t^2+2)$

   (e) $k'(u) = \dfrac{(u^2+1)^2(4u^2-30u-20)}{(4u-5)^6}$

3. (a) (i) $y - 81 = 864(x-2)$, (ii) $(1,1)$, $(1/2,0)$ e $(3/2,0)$.

   (b) (i) $y - 1 = 20(x-1)$, (ii) $(1/2,0)$.

4. $k'(2) = 15$.

5. (a) $y' = \dfrac{-(6x^2+2xy)}{x^2+3y^2}$

   (b) $y' = -\dfrac{y^3}{x^3}$

   (c) $y' = \dfrac{(4x^2+3x-1)(8x+3)}{4y(y^2-9)^3}$

6. (a) $4x - y + 16 = 0$

   (b) $y + 3 = -\frac{36}{23}(x-2)$

7. (a) $f'(x) = 8x^2(8x^3+27)^{-2/3} = \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$

(b) $f'(x) = 6(7x + \sqrt{x^2+3})^5 \left(7 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right)$

(c) $f'(t) = \dfrac{-48t}{\sqrt[3]{(9t^2+16)^5}}$

(d) $g'(z) = \dfrac{-3\sqrt[3]{2z+3}}{2\sqrt{(3z+2)^3}} + \dfrac{2}{3\sqrt{3z+2}\sqrt[3]{(2z+3)^2}}$

(e) $F'(v) = -5v^4(v^5-32)^{-6/5} = \dfrac{-5v^4}{\sqrt[5]{(v^5-32)^6}}$

8. (a) $y' = \dfrac{12\sqrt{xy}+y}{6\sqrt{xy}-x}$

(b) $y' = \dfrac{18x^{5/3}y^{2/3}+y}{12x^{2/3}y^{5/3}-x}$

9. (a) Se f é uma função par, temos a igualdade $f(-x) = f(x)$. Derivando ambos os membros em relação a x, temos $[f(-x)]' = f'(x)$. Por derivação em cadeia, aplicada ao primeiro membro, temos $f'(-x)\cdot(-x)' = f'(x)$, logo $-f'(-x) = f'(x)$, ou seja $f'(-x) = -f'(x)$. Concluímos então que se f é função par, sua derivada f' é função ímpar.