Lógica

Lógica Proposicional
Aula 09 – Formas normais e Cláusulas

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

- **Equivalência lógica – recordando ...**
  - Permite que o mesmo conceito seja expresso de várias formas distintas

$$(\alpha \rightarrow \beta) \land \gamma \equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land \gamma$$

Lógica Proposicional

- **Formas normais**
  - Padronizações adotadas para notação das fórmulas
    - Forma Normal Conjuntiva (FNC)
    - Forma Normal Disjuntiva (FND)
    - ➔ Dada uma fórmula da Lógica Proposicional é sempre possível determinar uma fórmula <u>equivalente</u> que esteja representada tanto na FNC quanto na FND

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Também conhecida como **Forma Clausal**
  - É empregada no método de **inferência por resolução** que serve de base para a programação lógica (PROLOG)
  - Uma fórmula na FNC pode ser definida com base em
    - **Cláusulas**
    - **Literais**

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Literal**
    - Elemento básico da FNC
    - Literal positivo – uma fórmula atômica: p
    - Literal negativo – negação de uma fórmula atômica: $\neg p$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Cláusula**
    - Disjunção de literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \ \dots \vee \ L_n$$

onde n é o tamanho da cláusula

    - Cláusula unária – composta por apenas 1 literal
    - Cláusula vazia – não contém literais
      - Representada como **nil**

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Exemplos de cláusulas
    - p
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$

CLÁUSULAS

    - $p \wedge q$
    - $(p \vee q) \wedge r$
    - $\neg p \vee \neg q \vee \neg(p \wedge r)$

NÃO CLÁUSULAS

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Definição**
    - Uma fórmula proposicional está na FNC (ou forma clausal) se for uma conjunção de cláusulas
      - ou seja, uma fórmula está na FNC se for uma conjunção de $\underbrace{\text{disjunções de literais}}_{\text{cláusulas}}$

Literal (L):	p ou $\neg$p	
Cláusula (C):	$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$	$n \geq 0$
FNC:	$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$	$n \geq 1$

Cláusula, $n \geq 0$:

n = 0
Cláusula vazia: nil

n = 1
Cláusula unária = Literal
Ex: p

n = 2
Ex: p ∨ q
...

FNC, $n \geq 1$:

n = 1
Ex: p ∨ q

n = 2
Ex: (p ∨ q) ∧ (p ∨ ¬q)
...

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Teorema**
    - Para toda fórmula β da Lógica Proposicional existe uma fórmula α na FNC que é equivalente a β
      - $\alpha \equiv \beta$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Pode-se dizer que uma fórmula está na FNC se e somente se:
    1. Contém como conectivos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$;
    2. $\neg$ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;
    3. Não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
    4. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, não existem expressões como $p \vee (q \wedge r)$.

Lógica Proposicional

- **FNC**
  - Exemplos de FNC
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$
    - $p \wedge q$
    - $(p \vee q) \wedge r$

FNC

    - $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$
    - $p \rightarrow q$
    - $\neg(p \vee q)$
    - $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

NÃO FNC

Lógica Proposicional

- **FNC**
  - Exemplos de FNC
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$
    - $p \wedge q$
    - $(p \vee q) \wedge r$

APÓS CONVERSÃO

- $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $p \wedge (q \vee (r \wedge s)) \equiv p \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Transformação via Tabela-Verdade
    1. Construa a tabela-verdade da fórmula que se deseja converter
    2. Procure na tabela-verdade todas as interpretações que avaliam essa fórmula como F
    3. Para cada uma dessas interpretações, crie uma disjunção de seus átomos considerando-se
       - se o átomo p é avaliado como V, considera-se $\neg p$
       - se o átomo p é avaliado como F, considera-se p
    4. A FNC equivalente é a conjunção das disjunções formadas para cada uma das interpretações F

  ➔ Se a fórmula for tautológica, FNC: $p \vee (\neg p)$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Transformação via Tabela-Verdade
    - Exemplo: $p \rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Algoritmo de manipulação algébrica para gerar FNC

Entrada: Uma fórmula β
Saída: Uma fórmula α na FNC, $\beta \equiv \alpha$
1. Para todas as subfórmulas δ, γ, φ de β faça
   1.1. Redefina "$\leftrightarrow$" e "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$":
   $$(\delta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \delta)$$
   $$(\delta \rightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma)$$
   1.2. Elimine a dupla negação:
   $$\neg\neg\delta \equiv \delta$$
   1.3. Empurre as negações para o interior usando as Leis de De Morgan:
   $$\neg(\delta \vee \gamma) \equiv \neg\delta \wedge \neg\gamma \quad \text{e} \quad \neg(\delta \wedge \gamma) \equiv \neg\delta \vee \neg\gamma$$
   1.4. Aplique a distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$, quando a fórmula obtida não tiver subfórmulas compostas negadas:
   $$\delta \vee (\gamma \wedge \varphi) \equiv (\delta \vee \gamma) \wedge (\delta \vee \varphi)$$
2. A fórmula α é obtida quando não há mais substituições possíveis

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Exemplo de transformação linear para FNC
    - $p \leftrightarrow (q \wedge r)$ — Decompõe $\leftrightarrow$ em 2 $\rightarrow$

1. $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow p)$ — Elimina $\rightarrow$
2. $(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee p)$ — De Morgan
3. $(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$ — Distribui $\vee$ sobre $\wedge$
4. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$ — FNC

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Dada uma fórmula α na FNC é possível garantir
    - Se o valor verdade de α é V para uma dada interpretação então cada cláusula é também, separadamente, interpretada V
    - → FNC é uma conjunção de cláusulas
    - → A ordem das cláusulas é irrelevante
  - **Notação clausal**
    - Pode-se escrever uma fórmula na FNC como um conjunto de cláusulas
    - Exemplo: a notação clausal para a fórmula $(\neg p \vee \neg q) \wedge p$ é: $\{\neg p \vee \neg q, p\}$

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme as fórmulas a seguir para a FNC
    - a) $(p \land q) \leftrightarrow \neg p$
    - b) $(\neg p \lor q) \rightarrow r$

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FNC
    a) $(p \land q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA

a)

1. $(p \land q) \leftrightarrow \neg p$	Decompõe $\leftrightarrow$ em 2 $\rightarrow$
2. $((p \land q) \rightarrow \neg p) \land (\neg p \rightarrow (p \land q))$	Elimina $\rightarrow$
3. $(\neg(p \land q) \lor \neg p) \land (\neg\neg p \lor (p \land q))$	Elimina dupla negação
4. $(\neg(p \land q) \lor \neg p) \land (p \lor (p \land q))$	De Morgan
5. $(\neg p \lor \neg q \lor \neg p) \land (p \lor (p \land q))$	Distribui $\lor$ sobre $\land$
6. $(\neg p \lor \neg q \lor \neg p) \land (p \lor p) \land (p \lor q)$	Simplifica (idemp., abs.)
7. $(\neg p \lor \neg q) \land p$	FNC

- Verifique, por meio da construção da tabela-verdade, que a fórmula original e sua FNC são logicamente equivalentes

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FNC

    b) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$

RESPOSTA

b)

1. $(\neg p \vee q) \rightarrow r$ — Elimina $\rightarrow$
2. $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ — De Morgan
3. $(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r$ — Elimina dupla negação
4. $(p \wedge \neg q) \vee r$ — Distribui $\vee$ sobre $\wedge$
5. $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ — FNC

➔ Verifique, por meio da construção da tabela-verdade, que a fórmula original e sua FNC são logicamente equivalentes

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Disjuntiva (FND)**
  - É muito utilizada no projeto de circuitos booleanos lógicos
  - **Definição**
    - Uma fórmula proposicional está na FND se for uma disjunção de **cláusulas duais**
    - **Cláusula dual**
      - Conjunção de literais

$$L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n$$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Disjuntiva (FND)**
  - Pode-se dizer que uma fórmula está na FND se e somente se:

= FNC

1. Contém como conectivos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$;
2. $\neg$ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;
3. Não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
4. $\wedge$ não tem alcance sobre $\vee$, ou seja, não existem expressões como $p \wedge (q \vee r)$.

FNC: $\vee$ $\wedge$

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FND
    - $(p \land q) \rightarrow \neg p$

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FND
    - $(p \land q) \rightarrow \neg p$

RESPOSTA

1. $(p \land q) \rightarrow \neg p$	Elimina $\rightarrow$
2. $\neg(p \land q) \lor \neg p$	De Morgan
3. $\neg p \lor \neg q \lor \neg p$	Simplifica (idempotente)
4. $\neg q \lor \neg p$	

➔ Verifique, por meio da construção da tabela-verdade, que a fórmula original e sua FND são logicamente equivalentes