Lógica

Lógica de Predicados
Aula 14 – Classificação de Fórmulas, Consequência e Equivalência lógicas

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

- **Modelo**
  - Seja I uma interpretação de uma linguagem de primeira ordem λ
    - Seja α uma fórmula fechada de λ, I é um **modelo** de α se o valor-verdade de α com relação a I for V
    - Seja S um conjunto de fórmulas fechadas de λ, I é um modelo para S se I for um **modelo** para cada fórmula de S

Lógica de Predicados

- **Classificação de fórmulas**
  - **Satisfazível (ou consistente)**
    - Uma fórmula fechada α é satisfazível (ou consistente) se existe <u>pelo menos uma</u> interpretação I tal que I[α] = **V**, ou seja, I é um modelo para α
  - **Tautologia (ou válida)**
    - Uma fórmula fechada α é tautologia (ou válida) se for **V** em <u>todas</u> as interpretações possíveis, ou seja, todas as interpretações possíveis são modelo para α

Lógica de Predicados

- **Classificação de fórmulas**
  - **Inválida (falsificável)**
    - Uma fórmula fechada α é inválida se existe <u>pelo menos uma</u> interpretação I tal que $I[\alpha]$ = **F**
  - **Contradição (insatisfazível ou inconsistente)**
    - Uma fórmula fechada α é contradição (ou insatisfazível ou inconsistente) se for **F** em <u>todas</u> as interpretações possíveis, ou seja, não há modelo para α

Lógica de Predicados

- **Classificação de fórmulas**
  - **Contingente (ou contingência)**
    - Uma fórmula que não é nem tautologia nem contradição
  - **Tautologia X Contradição**
    - Uma fórmula α é uma tautologia se e somente se $\neg\alpha$ é uma contradição

Lógica de Predicados

- **Classificação de fórmulas**
  - **Lógica Proposicional**
    - Enumera-se todas as possíveis interpretações via tabela-verdade
  - **Lógica de Predicados**
    - Determinar se uma fórmula qualquer é válida é um problema indecidível (não tem solução computacional conhecida)
      - Impossível enumerar todas as interpretações
    - A satisfatibilidade de uma fórmula é determinada enumerando as interpretações em um domínio específico
      - Universo de Herbrand (não abordado neste curso)

Lógica de Predicados

- **Consequência lógica**
  - Seja
    - S um conjunto de fórmulas fechadas de uma linguagem de primeira ordem λ
    - F uma fórmula fechada de λ
      - F é **consequência lógica** de S se, para <u>toda</u> interpretação I de λ, I for um modelo para S, I é também um modelo para F
      - Ou seja, se $S = \{ F_1, F_2, \ldots, F_n \}$
        - $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow F$ é uma tautologia
    - Representado por $S \models F$

Lógica de Predicados

- **Equivalência lógica**
  - Duas fórmulas α e β são **logicamente equivalentes** se as interpretações que satisfazem α são exatamente as mesmas que satisfazem β
    - Representada por $\alpha \equiv \beta$ (ou $\alpha \Leftrightarrow \beta$) se $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$

➔ As equivalências básicas da Lógica Proposicional continuam válidas na Lógica de Predicados

Lógica de Predicados

- **Equivalência lógica**

Nem tudo o que reluz é ouro

- **Representando na Lógica de Predicados**
  - $\neg \forall X \,(reluz(X) \rightarrow ouro(X)) \equiv$
    $\exists X \,(reluz(X) \land \neg ouro(X))$

Lógica de Predicados

- **Equivalência lógica**
  - Seja
    - α uma fórmula expressa usando a variável X, $\alpha[X]$
    - β uma fórmula que não é expressa usando a variável X
    - Q qualquer um dos quantificadores: $\forall$ ou $\exists$

$(QX\ \alpha[X]) \vee \beta \equiv (QX\ (\alpha[X] \vee \beta))$
$(QX\ \alpha[X]) \wedge \beta \equiv (QX\ (\alpha[X] \wedge \beta))$
$\neg(\forall X\ \alpha[X]) \equiv (\exists X\ \neg\alpha[X])$
$\neg(\exists X\ \alpha[X]) \equiv (\forall X\ \neg\alpha[X])$

Lógica de Predicados

- **Semântica dos quantificadores**
  - O quantificador $\forall$ denota uma **conjunção**
  - O quantificador $\exists$ denota uma **disjunção**
  - Por exemplo, considerando D = {a, b, c}

$$\forall X \ colorido(X)$$

    - denota colorido(a) $\wedge$ colorido(b) $\wedge$ colorido(c)

$$\exists X \ cor(X, azul)$$

    - denota cor(a, azul) $\vee$ cor(b, azul) $\vee$ cor(c, azul)
  - Além disso, como $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$,

$$\neg \forall X \ cor(X, azul) \equiv \exists X \ \neg cor(X, azul)$$

  - De modo análogo, $\neg\exists X \ cor(X, roxo) \equiv \forall X \ \neg cor(X, roxo)$

Lógica de Predicados

- **Equivalência lógica**
  - Dê duas formas diferentes e equivalentes de mapeamento para a Lógica de Predicados da sentença em língua natural

Nem todo ator americano é famoso

RESPOSTAS

$\neg \forall X\ (ator(X) \land americano(X)) \rightarrow famoso(X) \equiv$

$\exists X\ (ator(X) \land americano(X) \land \neg famoso(X))$