

Matemática Discreta

Relações Introdução e Definições

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Relações

- **Objetivos desta aula**

- Apresentar o que são relações binárias (relações)
- Apresentar as formas de representação gráfica das relações
 - Matriz retangular
 - Diagrama de setas
 - Grafo orientado
- Capacitar o aluno a usar conceitos e representações de Relações para modelar problemas computacionais

Problema #6

- **Identifique os pares ordenados da relação R**

- Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em \mathbb{N} , aponte apenas os pares ordenados que pertencem a R:

a) $x R y \leftrightarrow x = y + 1;$

(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)

b) $x R y \leftrightarrow x \text{ divide } y;$

(2, 4), (2, 5), (2, 6)

c) $x R y \leftrightarrow x \text{ é ímpar};$

(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)

d) $x R y \leftrightarrow x > y^2;$

(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)

Um número natural x divide outro número natural y quando o resultado da divisão de y/x é um número natural.

Relações

■ Relação binária



Fonte: <https://pixabay.com/>

- Uma **relação** é um conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$
 - É um subconjunto de $A \times B$
- Relaciona pares de objetos por meio de uma “associação” entre eles

Relações

■ Relação binária

- Uma relação distingue os pares ordenados que satisfazem a “regra” que a define
 - $x R y$ indica que o par ordenado (x, y) satisfaz a relação R
 - Dizemos que x é R -relacionado a y
- Uma relação R pode ser definida com palavras ou listando seus elementos
- Exemplos
 - Maior do que
 - É paralelo a
 - É subconjunto de

Alguns tipos de relações abordados nesta disciplina:

- Relação de equivalência
- Relação de ordem
- Funções

Relações

- **Autorrelação (ou endorrelação)**



Fonte: <https://pixabay.com/>

- Uma **autorrelação** R é um subconjunto de $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

ou

$$R \subseteq A^2$$

- Nesse caso diz-se que R é uma relação sobre ou em A

Relações

- **Autorrelação**

- Exemplo

- Seja $A = \{1, 2\}$
 - $A^2 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$
 - Os pares ordenados de A^2 que satisfazem as relações a seguir seriam:
 - Relação de “igualdade” = $(1, 1)$ e $(2, 2)$
 - Relação de “menor do que” = $(1, 2)$

Relações

- **Relações sobre mais do que dois conjuntos**



Fonte: <https://pixabay.com/>

Relações

- **Relações sobre mais do que dois conjuntos**

- De forma geral, dados n conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , uma relação n -ária R pode ser definida sobre o produto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

- Sendo que R será formado por n -tuplas da forma

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

tal que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$

- **Exemplo**

- Sejam $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b, c \}$, $C = \{ x, y \}$ e R uma relação sobre $A \times B \times C$
 - $R = \{ (1, b, y), (1, c, x), (2, b, x), (2, b, y), (3, a, y) \}$



■ Relação

- Sejam $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ os conjuntos C a G a seguir representam relações entre quais conjuntos (A e B)?
 - a) $C = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$
 - b) $D = \{ (1, 2), (3, 2) \}$
 - c) $E = \{ (1, 4), (1, 5), (4, 7) \}$
 - d) $F = \{ (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3) \}$
 - e) $G = \{ (1, 7), (7, 1) \}$



■ Relação

- Sejam $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ os conjuntos C a G a seguir representam relações entre quais conjuntos (A e B)?

a) $C = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$

b) $D = \{ (1, 2), (3, 2) \}$

c) $E = \{ (1, 4), (1, 5), (4, 7) \}$

d) $F = \{ (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3) \}$

e) $G = \{ (1, 7), (7, 1) \}$

RESPOSTAS

- a) Relação em A
- b) Relação em A
- c) Relação de A para B
- d) Relação de B para A
- e) É uma relação, mas não é de A para B nem de B para A

Relações

■ Domínio e Imagem

- O **domínio** de uma relação R é o conjunto de todos os **primeiros** elementos dos pares ordenados que estão em R
 - $\text{Dom}(R) = \{ a \mid (a, b) \in R \}$
- A **imagem** de uma relação R é o conjunto de todos os **segundos** elementos dos pares ordenados que estão em R
 - $\text{Img}(R) = \{ b \mid (a, b) \in R \}$
- Assim, um conjunto de pares ordenados é uma relação de A para B sse $\text{Dom}(R) \subseteq A$ e $\text{Img}(R) \subseteq B$

Relações

- **Domínio e Imagem**

- Exemplo

- a) $R = \{ (1, 4), (2, 5), (3, 5) \}$

- $R. \text{Dom}(R) = \{ 1, 2, 3 \}$ e $\text{Img}(R) = \{ 4, 5 \}$

- b) $R = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{Z} \}$

- $R. \text{Dom}(R) = \mathbb{Z}$ e $\text{Img}(R) = \text{conj. quadrados perfeitos}$

- c) $R = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } a R b \leftrightarrow a = 2b \}$

- $R. \text{Dom}(R) = \text{conj. inteiros pares}$ e $\text{Img}(R) = \mathbb{Z}$

Relações

- **Representação gráfica**
 - **Matriz retangular**



Fonte: <https://pixabay.com/>

- **Representação gráfica**
de uma relação binária
de A para B onde
 - Linhas = elementos de A e
 - Colunas = elementos de B
 - Cada posição da matriz
terá 1 ou 0, dependendo
se a ($a \in A$) está ou não
relacionado com b ($b \in B$)

Relações

- **Representação gráfica**

- **Matriz retangular (ou matriz booleana)**

- Sejam

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
 - Conjuntos finitos com $|A| = m$ e $|B| = n$
 - Uma relação de A para B pode ser representada em uma matriz booleana M de m linhas e n colunas com

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_i R b_j \\ 0 & \text{se } a_i \not R b_j \end{cases}$$

Relações

- **Representação gráfica**

- **Matriz retangular (ou matriz booleana)**

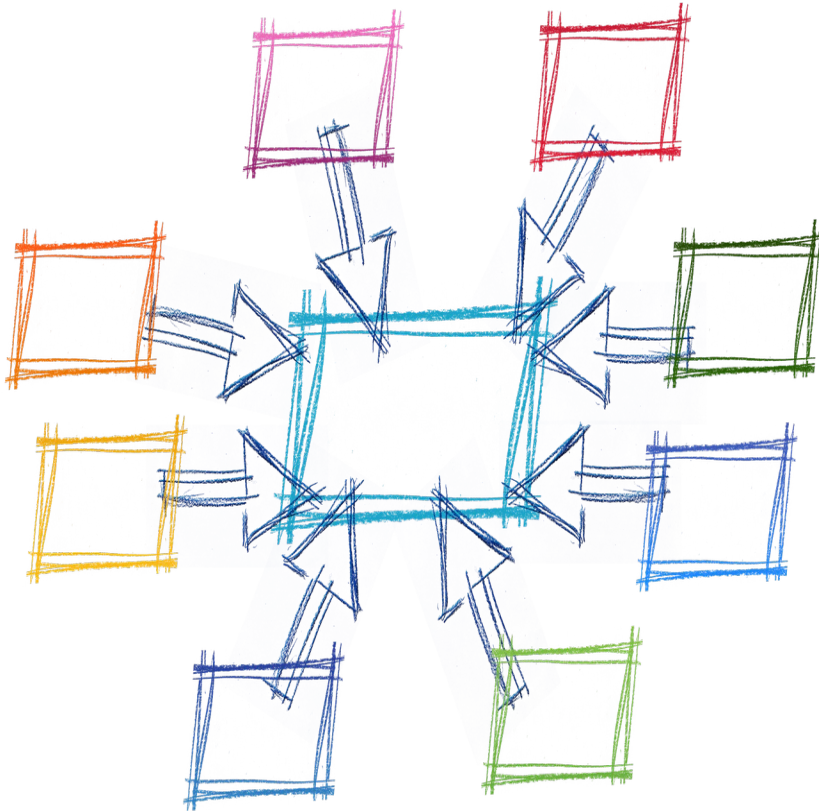
- Exemplo

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$
 - $R = \{ (1, y), (1, z), (3, y) \}$ de A para B pode ser representada como

	x	y	z
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	0

Relações

- **Representação gráfica**
 - **Diagrama de setas**



Fonte: <https://pixabay.com/>

- **Representação gráfica de uma relação binária de A para B onde**
 - Os elementos de A e B são representados em dois discos disjuntos e
 - Setas são inseridas de a ($a \in A$) para b ($b \in B$), se a estiver relacionado com b

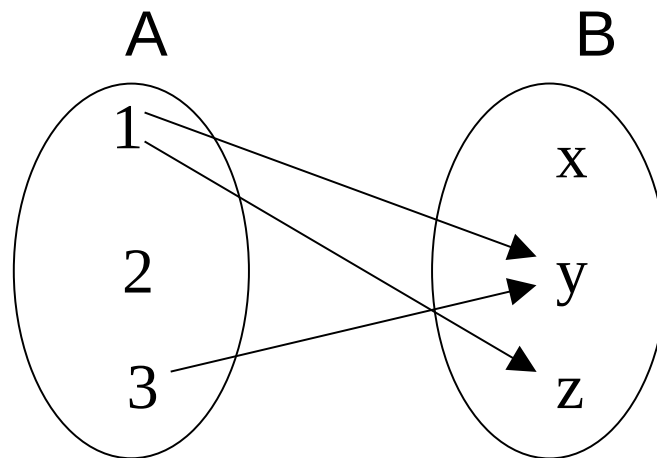
Relações

- **Representação gráfica**

- **Diagrama de setas (Diagrama de Venn)**

- Exemplo

- Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$
 - $R = \{ (1, y), (1, z), (3, y) \}$ de A para B pode ser representada como



Relações

- **Representação gráfica**

- **Grafo orientado para uma autorrelação**



Fonte: <https://pixabay.com/>

- **Representação gráfica de uma autorrelação em A**
 - Os elementos do conjunto A são representados por vértices do grafo e
 - Setas são inseridas de a ($a \in A$) para b ($b \in A$), se a estiver relacionado com b

Relações

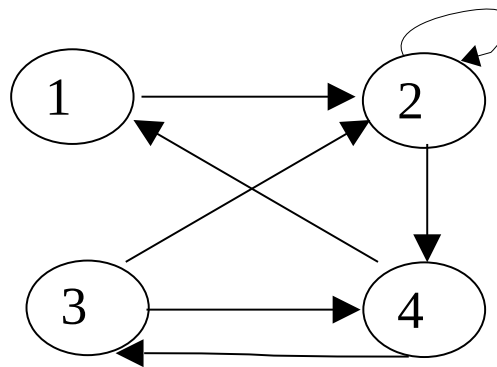
- **Representação gráfica**

- **Grafo orientado para uma autorrelação**

- Exemplo

- Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $R = \{ (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3) \}$
em pode ser representada como

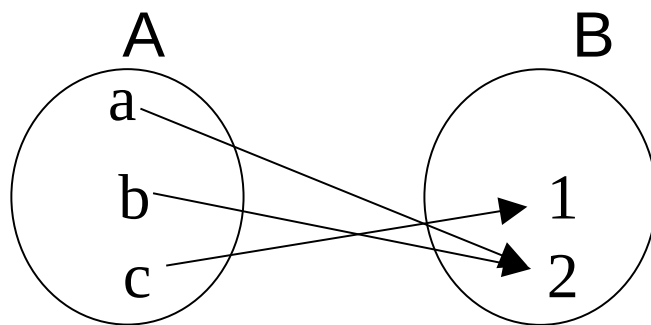




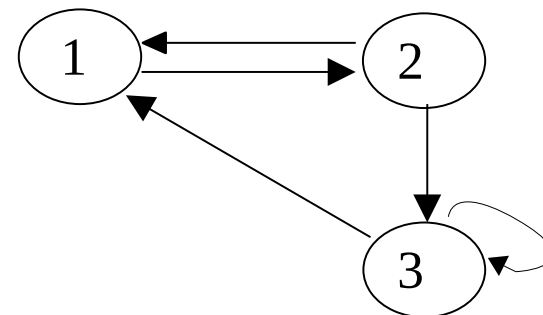
■ Representação gráfica

- Para cada uma das representações gráficas a seguir, liste os pares ordenados correspondentes

a)

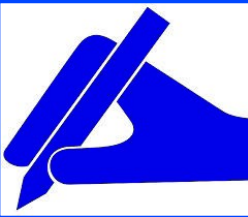


c)



b)

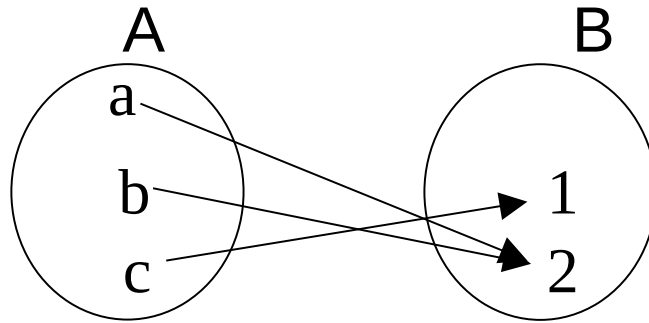
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	0	1	1
2	1	0	0



■ Representação gráfica

- Para cada uma das representações gráficas a seguir, liste os pares ordenados correspondentes

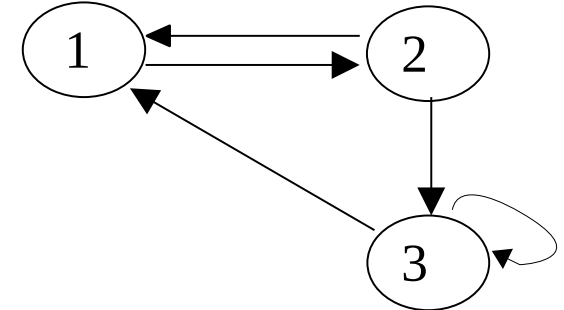
a)



b)

	a	b	c
1	0	1	1
2	1	0	0

c)



RESPOSTAS

- a) $R = \{ (a, 2), (b, 2), (c, 1) \}$
b) $R = \{ (1, b), (1, c), (2, a) \}$
c) $R = \{ (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3) \}$



■ Representação gráfica

- Dados os conjuntos $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 6, 7, 8 \}$
 - Para cada uma das relações a seguir, represente graficamente usando: matriz retangular, diagrama de setas, grafo orientado

a) Relação em A:

$$C = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

b) Relação em B:

$$H = \{ (6, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 7) \}$$

Problema #6

- **Identifique os pares ordenados da relação R**

- Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em \mathbb{N} , aponte apenas os pares ordenados que pertencem a R:

a) $x R y \leftrightarrow x = y + 1;$

(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)

b) $x R y \leftrightarrow x \text{ divide } y;$

(2, 4), (2, 5), (2, 6)

c) $x R y \leftrightarrow x \text{ é ímpar};$

(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)

d) $x R y \leftrightarrow x > y^2;$

(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)

Um número natural x divide outro número natural y quando o resultado da divisão de y/x é um número natural.

Problema #6

- **Identifique os pares ordenados da relação R**

- Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em \mathbb{N} , aponte apenas os pares ordenados que pertencem a R:

a) $x R y \leftrightarrow x = y + 1$;

(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)

b) $x R y \leftrightarrow x \text{ divide } y$;

(2, 4), (2, 5), (2, 6)

c) $x R y \leftrightarrow x \text{ é ímpar}$;

(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)

d) $x R y \leftrightarrow x > y^2$;

(1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)

Um número natural x divide outro número natural y quando o resultado da divisão de y/x é um número natural.