Lógica

Lógica de Predicados
Aula 16 – Unificação e Substituição

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

$$\forall X(p(X,a) \vee q(X))$$

- O que são os elementos?
- Qual o significado dessa sequência?
- Quem é X?

- Em algum momento X deverá assumir um valor que dê "sentido" à fórmula

- Esse processo é denominado **Unificação** e fundamenta-se no conceito de **Substituição** que é a troca de variáveis por termos

→ **Unificação** é essencial no raciocínio por Resolução

Lógica de Predicados

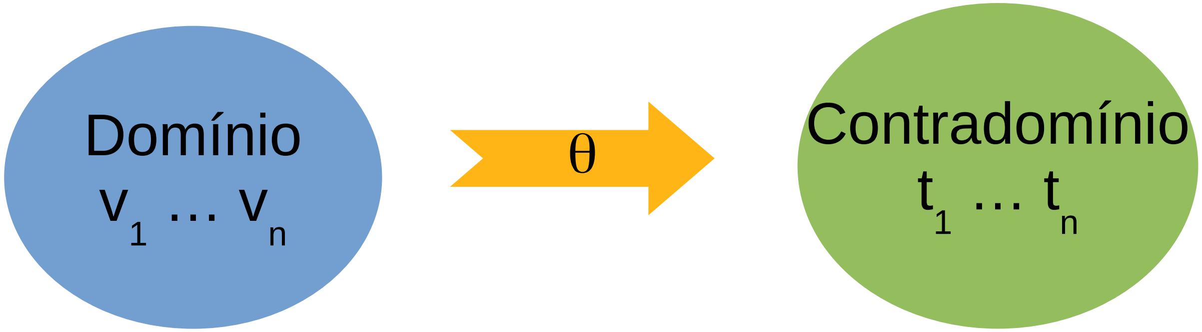
- **Substituição**
  - Uma substituição na Lógica de Predicados é um conjunto

$$\theta = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$$

    - Onde
      - v_i $(1 \leq i \leq n)$ é variável e t_i $(1 \leq i \leq n)$ é termo
      - $v_i \neq t_i$
      - $\forall$ i, j tem-se que $v_i \neq v_j$ se $i \neq j$
    - → **Substituição vazia** (ε) – não contém nenhum elemento
    - → **Substituição *ground*** – quando $t_1, \ldots, t_n$ são termos *ground* (termos que não contêm variáveis)

Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - Seja $\theta = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ uma substituição
    - O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é o **domínio** de θ (dom(θ))
    - O conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é o **contradomínio** de θ



Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - **Aplicação de substituição** (instanciação)
    - Seja $\theta = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ uma substituição e seja E uma expressão
      - $E\theta$ é uma expressão obtida a partir de E substituindo simultaneamente cada ocorrência da variável v_i ($1 \leq i \leq n$) em E pelo termo t_i de acordo com θ
      - → $E\theta$ é uma **instanciação**
      - → Se $\theta = \varepsilon$ então $E\theta = E$

Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - **Aplicação de substituição**
    - Exemplo
      - $E_1 = p(Y)$
      - $E_2 = \neg q(Y, Z, X)$
      - $E_3 = \neg p(W)$
      - $E_4 = r(W, Y, Z, X, Z)$
      - $\theta = \{W/Y, g(a, Z, X)/W, W/X\}$
      - $E_1\theta = p(W)$
      - $E_2\theta = \neg q(W, Z, W)$
      - $E_3\theta = \neg p(g(a, Z, X))$
      - $E_4\theta = r(g(a, Z, X), W, Z, W, Z)$

Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - **Composição de substituições**
    - Considere as substituições
      - $\theta_1 = \{t_1/x_1, t_2/x_2, \ldots, t_n/x_n\}$
      - $\theta_2 = \{s_1/y_1, s_2/y_2, \ldots, s_m/y_m\}$
    - A composição $\theta_1\theta_2$ é calculada como:

1. Construa o conjunto $\phi = \{\overbrace{t_1\theta_2/x_1,\ldots, t_n\theta_2/x_n}^{\theta_1 \text{ após aplicar } \theta_2},\overbrace{s_1/y_1,\ldots,s_m/y_m}^{\theta_2}\}$
2. Retire de ϕ as ligações s_i/y_i tal que $y_i = x_j$ para algum j, i $1 \leq j \leq n$. Faça ϕ igual ao novo conjunto
3. Retire de ϕ as ligações $t_i\theta_2/x_i$ tal que $x_i = t_i\theta_2$. Faça $\theta_1\theta_2$ igual ao novo conjunto obtido

Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - **Composição de substituições**
    - Exemplo
    - $\theta_1 = \{f(Y)/X, Z/W, X/Z\}$
    - $\theta_2 = \{W/Y, Z/X, W/Z\}$

1. $\phi = \{f(Y)\theta_2/X, Z\theta_2/W, X\theta_2/Z, W/Y, Z/X, W/Z\}$
   $\phi = \{f(W)/X, W/W, Z/Z, W/Y, \cancel{Z/X}, \cancel{W/Z}\}$
2. $\phi = \{f(W)/X, \cancel{W/W}, \cancel{Z/Z}, W/Y\}$
3. $\theta_1\theta_2 = \{f(W)/X, W/Y\}$

1. Construa o conjunto $\phi = \{t_1\theta_2/x_1, \ldots, t_n\theta_2/x_n, s_1/y_1, \ldots, s_m/y_m\}$
2. Retire de ϕ as ligações s_i/y_i tal que $y_i = x_j$ para algum j, i $1 \leq j \leq$ n. Faça ϕ igual ao novo conjunto
3. Retire de ϕ as ligações $t_i\theta_2/x_i$ tal que $x_i = t_i\theta_2$. Faça $\theta_1\theta_2$ igual ao novo conjunto obtido

Lógica de Predicados

- **Substituição**
  - **Composição de substituições**

Propriedades

$\theta_1\varepsilon = \varepsilon\theta_1 = \theta_1$

$(E\theta_1)\theta_2 = E(\theta_1\theta_2)$

$(\theta_1\theta_2)\theta_3 = \theta_1(\theta_2\theta_3)$ (associatividade)

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - Uma substituição θ é unificadora de um conjunto de expressões $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ se e somente se:

$$E_1\theta = E_2\theta = \ldots = E_k\theta$$

    - ➔ O conjunto $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ é dito **unificável** se existir uma substituição unificadora para ele
  - **Exemplo**
    - Dado o conjunto S = {p(X, Y), p(W, X)}
    - $\theta_1 = \{W/X, W/Y\}$ e $\theta_2 = \{a/X, a/Y, a/W\}$ são substituições unificadoras de S
      - ➔ $S\theta_1 = \{p(W, W), p(W, W)\}$ e $S\theta_2 = \{p(a, a), p(a, a)\}$

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Unificadora mais geral (***most general unifier*, **mgu)**
    - Uma substituição unificadora δ do conjunto de expressões $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ é a **unificadora mais geral** (mgu) se e somente se para cada unificadora do conjunto existir uma substituição γ tal que $\theta = \delta\gamma$
    - ➔ Duas ou mais expressões são **unificáveis** se elas têm a mesma mgu
    - ➔ Uma mgu é uma substituição unificadora que faz o mínimo possível de substituições para unificar um dado conjunto de expressões

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Unificadora mais geral (*most general unifier*, mgu)**
    - Exemplo
      - Dado o conjunto S = {p(X, Y), p(W, X)} e as unificadoras
      - θ_1= {W/X, W/Y} e
      - θ_2= {a/X, a/Y, a/W}
      - → θ_1 é a mgu

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Conjunto de diferenças**
    - Seja S = {E_1, …, E_n} um conjunto finito de expressões
    - O **conjunto de diferenças** é determinado como:
      1. Aponte para o símbolo mais à esquerda em cada expressão E_i, $1 \leq i \leq n$
      2. Enquanto todos os símbolos apontados coincidirem, desloque simultaneamente o apontador para a direita
      3. Se forem encontrados símbolos que não coincidem,
         - Então crie um conjunto de diferenças D = {F_i, …, F_n} contendo as subexpressões F_i de cada expressão E_i, que inicia no símbolo de diferença
         - Caso contrário faça D = {}

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Conjunto de diferenças**
    - Exemplo
      - Dado o conjunto S = { p(f(X)), p(Z)}
      - Qual o conjunto de diferenças D de S?
      - D = {f(X), Z}

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Algoritmo**
    - Seja S um conjunto de expressões da Lógica de Predicados, se S é unificável, o algoritmo retorna uma mgu de S, caso contrário indica que S não é unificável
    - Sejam $k \in \mathbb{N}$ e θ_k substituições

1. Faça k = 0 e $\theta_k = \{\}$
2. Se $|S\theta_k| = 1$ então pare! θ_k é uma mgu de S. Caso contrário, determine o conjunto de diferenças D_k de $S\theta_k$
3. Se existe uma variável x e um termo t em D_k tal que x não ocorre em t, então faça $\theta_{k+1} = \theta_k\{t/x\}$, k = k + 1, vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Algoritmo**
    - Exemplo
      - S = { p(f(X), Y, X), p(Z, g(Z), a)}

1. k = 0 e θ_0= {}
2. Sθ_0 = { p(f(X),Y,X), p(Z,g(Z),a)} e |Sθ_0| $\neq$ 1 D$_0$= {f(X), Z}
3. Z não ocorre em f(X) então θ_1= {}{f(X)/Z} = {f(X)/Z}, k = 1
4. (passo 2 com k = 1) Sθ_1 = { p(f(X),Y,X), p(f(X),g(f(X)),a)} e
   |Sθ_1| $\neq$ 1 D$_1$= {Y, g(f(X))}
5. (passo 3 com k = 1) Y não ocorre em g(f(X)) então θ_2=
   {f(X)/Z}{g(f(X))/Y} = {f(X)/Z, g(f(X))/Y}, k = 2

3. Se existe uma variável x e um termo t em D$_k$ tal que x não ocorre em t, então faça θ_{k+1}= θ_k{t/x}, e k = k + 1, vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - **Algoritmo**
    - Exemplo
      - $S = \{ p(f(X), Y, X), p(Z, g(Z), a)\}$

6. (passo 2 com k = 2) $S\theta_2 = \{p(f(X),g(f(X)),X), p(f(X),g(f(X)),a)\}$ e $|S\theta_2| \neq 1$ $D_2 = \{X, a\}$
7. (passo 3 com k = 2) X não ocorre em a então $\theta_3 = \{f(X)/Z, g(f(X))/Y\}\{a/X\} = \{f(a)/Z, g(f(a))/Y, a/X\}$, k = 3
8. (passo 2 com k = 3) $S\theta_3 = \{p(f(a),g(f(a)),a), p(f(a),g(f(a)),a)\}$ e $|S\theta_3| = 1$. Pare!

→ $\theta_3 = \{f(a)/Z, g(f(a))/Y, a/X\}$ é uma mgu de S

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - Aplique o algoritmo de unificação para os seguintes conjuntos
    - a) S = { p(M, a, h(X, b)), p(N,Y, h(Z, R)) }
    - b) T = { p(M, K, c), p(Z, f(a), M) }
    - c) U = { p(M,g(X)), p(a,X) }

Algoritmo

1. Faça k = 0 e $\theta_k = \{\}$
2. Se $|S\theta_k| = 1$ então pare! θ_k é uma mgu de S. Caso contrário, determine o conjunto de diferenças D_k de $S\theta_k$
3. Se existe uma variável x e um termo t em D_k tal que x não ocorre em t, então faça $\theta_{k+1} = \theta_k\{t/x\}$, k = k + 1, vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável

Lógica de Predicados

- **Unificação**
  - Aplique o algoritmo de unificação para os seguintes conjuntos

    a) S = { p(M, a, h(X, b)), p(N,Y, h(Z, R)) }

    b) T = { p(M, K, c), p(Z, f(a), M) }

    c) U = { p(M,g(X)), p(a,X) }

RESPOSTAS

a) mgu de S = { N/M, a/Y, Z/X, b/R }

b) mgu de T = { c/M, f(a)/K, c/Z }

c) U não é unificável