01/09 - Aula 8 - Esboçando gráficos: primeiros passos

Definição 6.1.
A função $f(x)$ *é crescente no intervalo* I $(I \subset \mathbb{R})$ *se, nesse intervalo, quando* x *aumenta de valor,* $f(x)$ *também aumenta de valor.*
Em outras palavras, f *é crescente se vale a implicação*

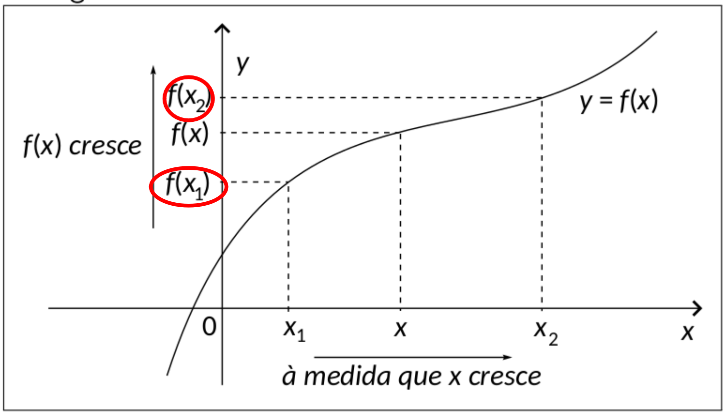
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

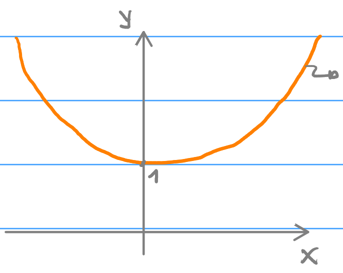
$I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; $I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$I = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Figura 6.1. f é crescente em um certo intervalo I.



Obs: Seja $f(x) = x^2 + 1$, $Gr(f) = \{(x,y) \mid y = x^2 + 1\}$



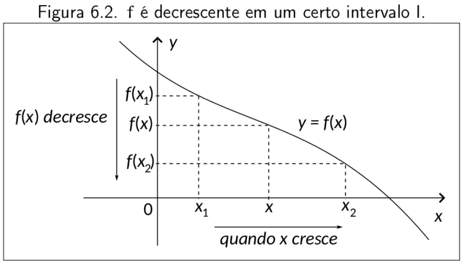
$y = x^2 + 1$, $f(x)$ é crescente em $I = [0, +\infty)$

A função $f(x)$ *é decrescente no intervalo* I $(I \subset \mathbb{R})$ *se, nesse intervalo, quando* x *cresce em valor,* $f(x)$ *decresce. Em outras palavras,* f *é decrescente se vale a implicação*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

Figura 6.2. f é decrescente em um certo intervalo I.

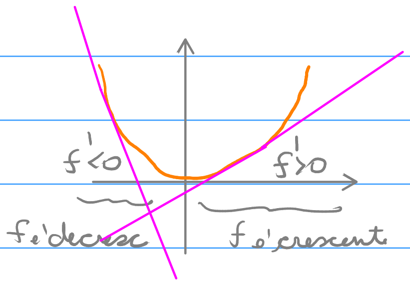


$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Pergunta: Existe algum critério baseado na análise da derivada de uma função f(x) que nos permita concluir se uma função é crescente ou decrescente?

Ex $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \underset{\sim}{2x} = \begin{cases} + & , x \geq 0 \\ - & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'$ $\quad - - - - \;\bullet\; + + + + +$ (-2, 0)

$f'(-2) = 2(-2) = -4 < 0 \Rightarrow f'(-2) < 0$



> **Teorema 6.1.** *Suponhamos que* f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e tem derivada nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$.
>
> 1. *Se* $f'(x) > 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$, *então* f *é crescente no intervalo* $[a, b]$.
>
> 2. *Se* $f'(x) < 0$ *nos pontos do intervalo aberto* $]a, b[$, *então* f *é decrescente no intervalo* $[a, b]$.

Obs $\quad]a, b[= (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

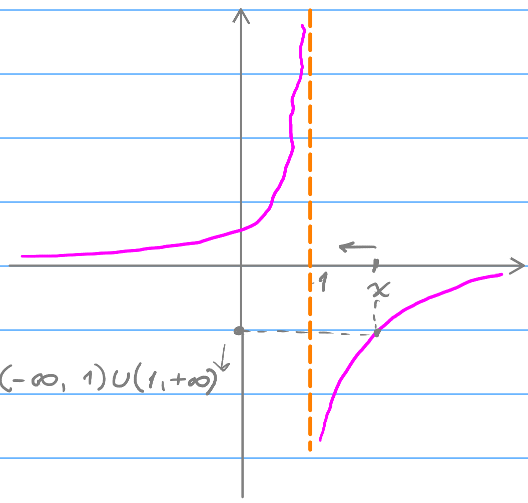
$x > 1 \Rightarrow \underset{(-)}{\underbrace{1-x}} < 0$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\underset{(+)}{\underbrace{1-x}}} = +\infty$$

$x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$

f(x) é crescente $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

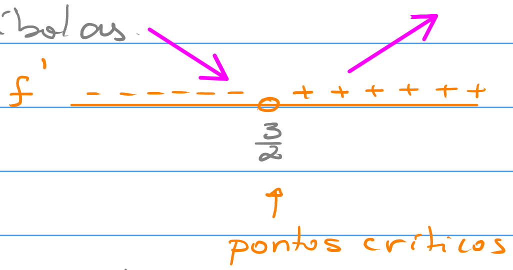


Exemplo: Encontre os intervalos onde a função abaixo seja crescente ou decrescente

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, são parábolas

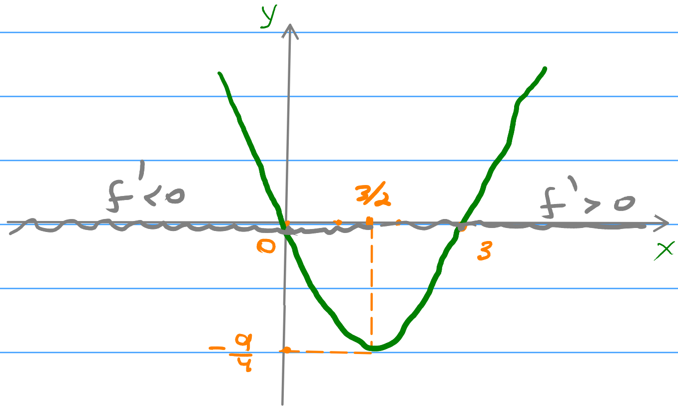
Note, $\underbrace{f'(x)}_{(+)} = 2x - 3 \geq 0 \iff \underbrace{x \geq \frac{3}{2}}$



$x < \frac{3}{2} \Rightarrow f'(x) < 0$

Logo, $f(x) = x^2 - 3x$ é crescente em $[3/2, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 3x$ é decrescente em $(-\infty, \frac{3}{2}]$



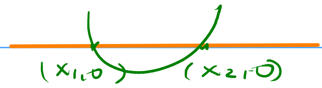
$f(x) = x^2 - 3x$,

$f(x) = x \cdot (x-3) = 0 \iff$

$\boxed{x=0}$ ou $\boxed{x=3}$

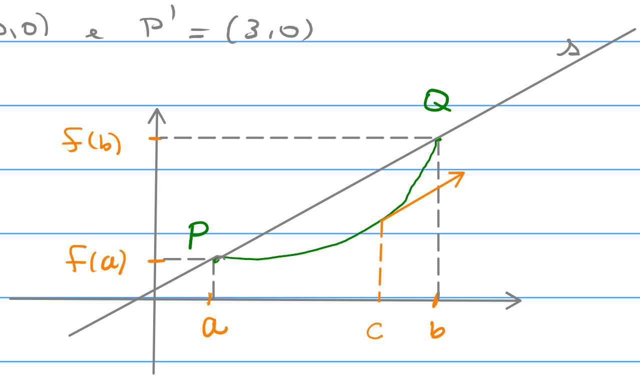
$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$

$y = x^2 - 3x$; $y = 0 \Rightarrow (x, 0) \in$ abscissa



$x^2 - 3x = 0 \iff x \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$P = (0,0)$ e $P' = (3,0)$



Seja s a reta que passa por $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$

Existe $c \in [a,b]$ tq. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$$\boxed{f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{(+)} (b-a)} \quad (1)$$

Se $a < b \Rightarrow f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{(+)} \underbrace{(b-a)}_{(+)} > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

Logo, $f(x)$ é crescente.

Exemplo: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função abaixo:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Etapa 1: Calcular as raízes da função: f(x)=0

$f(x)=0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ ou $x = 3$.

Raízes: $\{0, 3\}$

Etapa 2: Estudar o sinal da função derivada f'(x)

Note que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

	$x<0$		$0<x<2$		$x>2$
$y = 3x$	$-$	0	$+$		$+$
$y = x-2$	$-$		$-$	2	$+$
$y = \underbrace{3x(x-2)}_{f'(x)}$	$+$ ↗	0	$-$ ↘	2	$+$ ↗

Logo, $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0)$ ou $x \in (2, +\infty) \Rightarrow f$ é crescente em $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f'(x) < 0$ se $x \in (0, 2)$

$\Downarrow$

$f(x)$ é decrescente em $[0, 2]$

Pontos Críticos $= \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\} = \{0, 2\}$

$f(0) = 0^3 - 3.0^2 = 0$ e

$f(2) = 2^3 - 3.2^2 = 8 - 12 = -4$

Etapa 3: Esboçar o gráfico

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

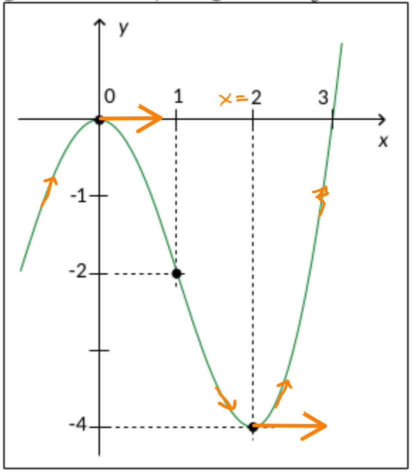
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

ou seja, $f(x)$ é crescente

em $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

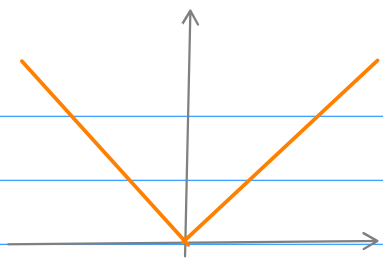
Figura 6.11. Esboço do gráfico de $y = x^3 - 3x^2$.



$f'(x) > 0$ se $x \in (a, b)$

então $f(x)$ é crescente em $[a, b]$

Ex $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Note que $f'(0) = \nexists$, ou seja,
f não derivável em $x=0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

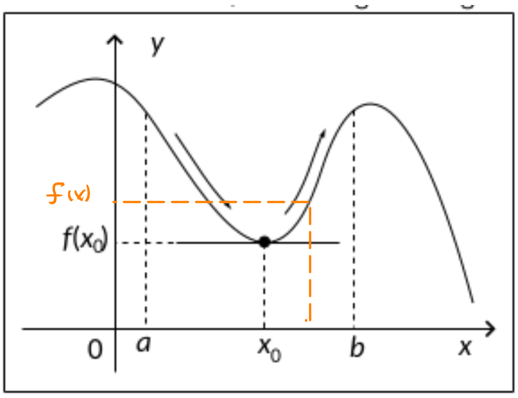
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

• Se $x > 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}x = 1 > 0$

$f'(x) > 0$ se $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) = |x|$ é crescente em $[0, +\infty)$

Definição 6.2 (Pontos de máximo e pontos de mínimo locais).
Um ponto x_0, no domínio da função f, é um ponto de mínimo local de f *se existe um intervalo* $[a, b]$ *contido no domínio de f, com* $a < x_0 < b$, *tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* x *em* $[a, b]$.
Isto ocorre, por exemplo, no caso em que existem intervalos $[a, x_0]$ *e* $[x_0, b]$ *contidos em* $D(f)$ *tais que f é decrescente em* $[a, x_0]$ *e é crescente em* $[x_0, b]$.
Veja figura 6.5.

Se, ao contrário, $f(x) \leq f(x_0)$, para todo x em $[a, b]$, x_0 é um *ponto de máximo local de* f.
Isto se dá, por exemplo, quando existem intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$ contidos em $D(f)$ tais que f é crescente em $[a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b]$. Veja figura 6.6.



f(x0) valor de mínimo local

$x_0 \in (a, b)$, $\forall x \in (a, b)$
$f(x) \geq f(x_0)$

x0 é ponto de mínimo local

x_0 é um ponto de mínimo local se a função f(x) for decrescente à esquerda de x_0 e for crescente à direita do ponto x_0

Derivadas de ordem superior e concavidades do gráfico

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Ex: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = (f'(x))' = (2x)' = 2$

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) - 2x}{\Delta x} = 2$$

Notações: $f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Obs: $S(t) = S_0 + vt + a\frac{t^2}{2}$

$S'(t) = v + at \Rightarrow S''(t) = a$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, onde $y = f(x)$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$