Aula 11

Funções trigonométricas e o "primeiro limite fundamental"

Nesta aula estaremos fazendo uma pequena revisão de funções trigonométricas e apresentando um limite que lhes determina suas derivadas.

11.1 Pequena revisão de trigonometria

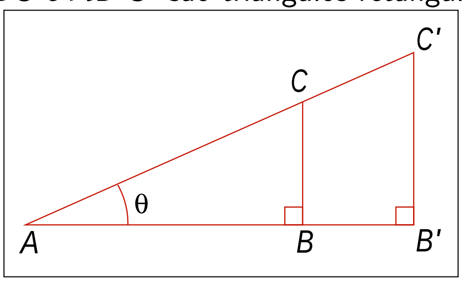
11.1.1 Trigonometria geométrica

Consideremos os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura 11.1. Os dois triângulos são semelhantes, pois seus ângulos internos são iguais (congruentes). Assim, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Assim, sendo ABC um triângulo retângulo, como na figura 11.1 as razões $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ e $\frac{BC}{AB}$ dependem somente da abertura $\theta = \hat{A}$.

Figura 11.1. ABC e $AB'C'$ são triângulos retângulos semelhantes.



Chamamos

$$\text{cosseno de } \theta = \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$
$$\text{seno de } \theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$
$$\text{tangente de } \theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

Deduz-se imediatamente que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

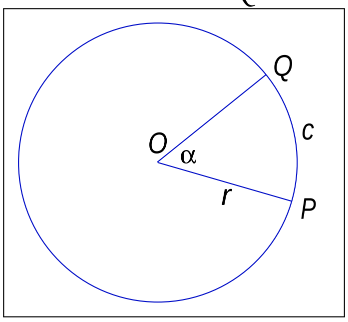
Da trigonometria do ensino médio, são bem conhecidos os valores de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$, quando θ tem um dos valores dados na primeira coluna da tabela

θ	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{tg}\theta$
$30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$

Se $\overset{\frown}{PQ}$ é um arco de um círculo de raio r, correspondente a um ângulo central de abertura α, o comprimento c de $\overset{\frown}{PQ}$ é dado por

$$\boxed{c = r \cdot (\text{medida de } \alpha \text{ em radianos})}$$

Figura 11.2. O é o centro do círculo e $P\hat{O}Q$ é o ângulo central do arco $\overset{\frown}{PQ}$.



Assim, o comprimento c do arco $\overset{\frown}{PQ}$ é diretamente proporcional a r e a α. Quando $\alpha = 360°$, temos

$$\boxed{c = \text{comprimento da circunferência} = 2\pi \cdot r}$$

Assim sendo,

$$\boxed{360° = 360 \text{ graus} = 2\pi \text{ radianos, ou seja } 180° = \pi}$$

Se $r = 1$ = *uma unidade de comprimento*, o comprimento c do arco $\widehat{PQ}$ é simplesmente a medida de α em radianos.

A área do setor circular de ângulo central α também é proporcional a α. Quando $\alpha = 2\pi$, temos a área de um círculo de raio r: $A = \pi r^2$. Assim, um setor circular de abertura α, tem área $A_\alpha = \frac{\alpha}{2} \cdot r^2$ (α em radianos).

11.1.2 Trigonometria analítica

Para definir as funções trigonométricas de variável real, consideramos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas no plano. Nele, consideramos a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ (de centro em $(0, 0)$ e raio 1). Esta circunferência é o que chamaremos de *círculo trigonométrico*.

Dado um número real α, tomamos $A = (1, 0)$ e demarcamos, no círculo trigonométrico, um ponto P_α tal que a medida do percurso de A a P_α, sobre o círculo trigonométrico, é igual a $|\alpha|$ (figura 11.3). Teremos o percurso AP_α passando uma ou várias vezes pelo ponto A, quando $|\alpha| > 2\pi$.

A partir do ponto A, o percurso $\widehat{AP_\alpha}$ é feito no sentido *anti-horário* (contrário ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio) se $\alpha > 0$, e é feito no sentido *horário* (no mesmo sentido do movimento dos ponteiros do relógio) se $\alpha < 0$. Tal percurso é um *arco orientado*. Dizemos que α é a medida algébrica do arco orientado AP_α.

Assim, por exemplo, $P_\pi = P_{-\pi} = (-1, 0)$, $P_{\pi/2} = (0, 1)$, $P_{-\pi/2} = (0, -1)$, $P_{\pi/4} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $P_{\pi/3} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, e $P_0 = (1, 0) = P_{2\pi} = P_{2n\pi}$, para cada inteiro n.

Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, definido como acima. Definimos

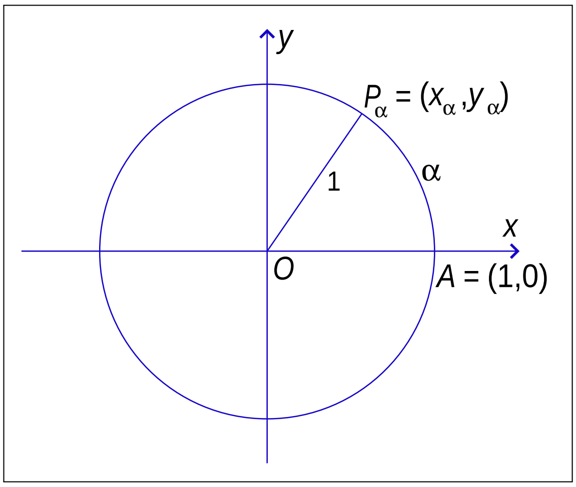
$$x_\alpha = \cos\alpha = \text{cosseno de } \alpha,$$
$$y_\alpha = \operatorname{sen}\alpha = \text{seno de } \alpha$$

Para estendermos a definição de *tangente de* α a arcos orientados α, tomamos um eixo y', paralelo ao eixo y, de origem $O' = A$, orientado positivamente "para cima", no qual usaremos a mesma escala de medidas do eixo y. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos a reta OP_α. Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, esta reta intercepta o eixo y' em T_α.

Sendo t_α a abcissa de T_α no eixo y', ou alternativamente a ordenada do ponto $P_\alpha = (1, t_\alpha)$ no sistema Oxy, definimos

$$t_\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \text{tangente de } \alpha$$

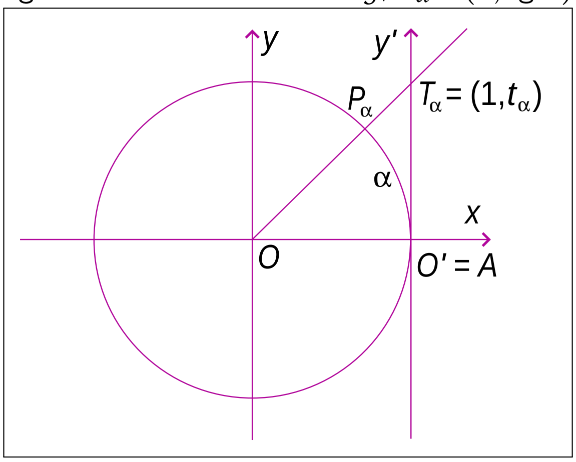
Figura 11.3. Sendo α a medida algébrica do arco orientado AP_α, temos $x_\alpha = \cos\alpha$, $y_\alpha = \operatorname{sen}\alpha$.



Assim sendo, como $\dfrac{t_\alpha}{1} = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$, temos $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Se $0 < \alpha < \pi/2$, os valores $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, e $\operatorname{tg}\alpha$ coincidem com aqueles das definições geométricas de cosseno, seno e tangente, dadas na seção 11.1.1.

Figura 11.4. No sistema Oxy, $T_\alpha = (1, \operatorname{tg}\alpha)$.



Também definem-se as funções trigonométricas

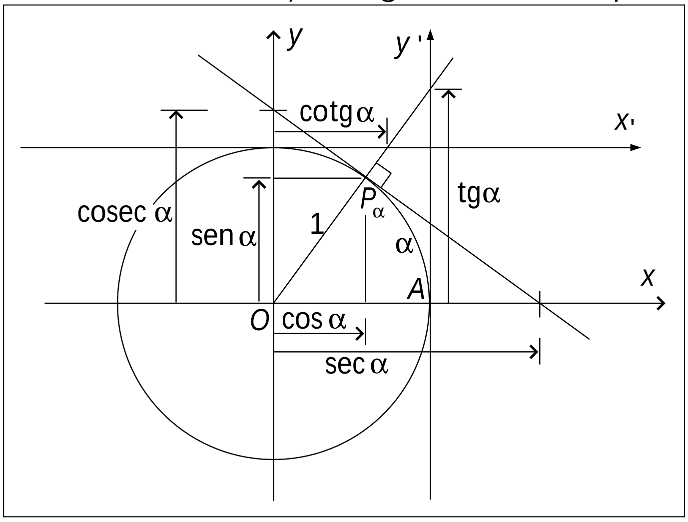
$$\text{cotangente de } \alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{secante de } \alpha = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{cossecante de } \alpha = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad (\alpha \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z})$$

Na figura 11.5, ilustramos geometricamente as seis funções trigonométricas de um arco α no primeiro quadrante, isto é, satisfazendo $0 < \alpha < \pi/2$.

Figura 11.5. Geometria das seis funções trigonométricas, no primeiro quadrante.



Listamos abaixo algumas fórmulas úteis, envolvendo as funções trigonométricas. Aqui e sempre, $\cos^2 a = (\cos a)^2$, $\operatorname{sen}^2 a = (\operatorname{sen} a)^2$, $\operatorname{tg}^2 a = (\operatorname{tg} a)^2$, etc.

1. $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ (isto porque $x_a^2 + y_a^2 = 1$)

2. $1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\cos^2 a$)
   $1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$ (dividindo-se ambos os membros da equação 1 por $\operatorname{sen}^2 a$)

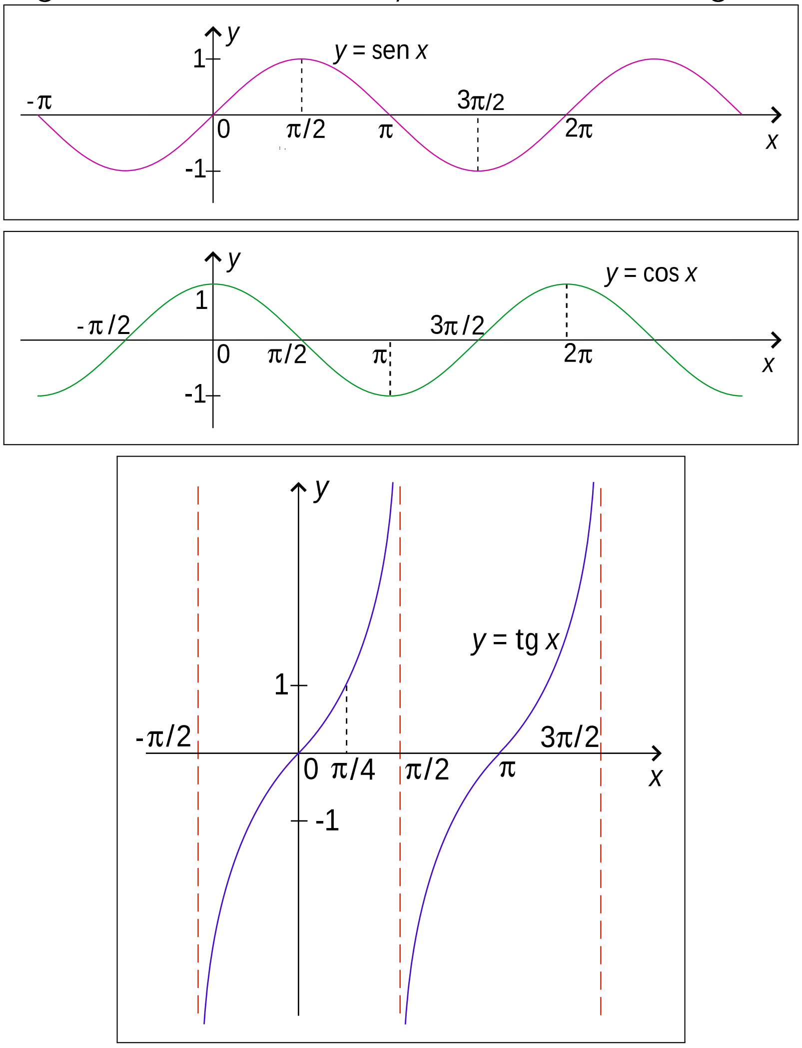
3. $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
   $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$
   $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
   $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4. $\cos(-a) = \cos a$, $\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$
   $\operatorname{tg}(-a) = \dfrac{\operatorname{sen}(-a)}{\cos(-a)} = \dfrac{-\operatorname{sen} a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a$

5. $\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a + a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$
   $\cos 2a = \cos(a + a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

6. $\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, $\operatorname{sen} a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

Figura 11.6. Gráficos das funções seno, cosseno e tangente.



11.2 O "primeiro limite fundamental"

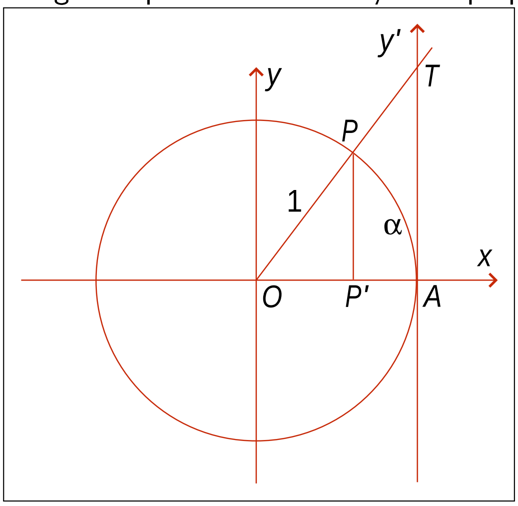
Vamos admitir que as seis funções trigonométricas são contínuas nos pontos em que estão definidas.

Na próxima aula estaremos definindo as funções trigonométricas inversas e calculando as derivadas de todas as funções trigonométricas. Para calcular a derivada de $\operatorname{sen} x$, e então calcular as derivadas das demais funções trigonométricas, deduziremos primeiramente o seguinte resultado, chamado na literatura do cálculo de *primeiro limite fundamental*.

Proposição 11.1 (Primeiro limite fundamental).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Figura 11.7. Diagrama para a demonstração da proposição 11.1.



Demonstração. Seja α um número real, $0 < \alpha < \pi/2$, e consideremos, no primeiro quadrante do círculo trigonométrico, o arco $\widehat{AP}$ de comprimento α, sendo $A = (1, 0)$ e $P = P_\alpha$.

Sejam P' a projeção ortogonal do ponto P no eixo x ($PP' \perp Ox$), e T a interseção da reta OP com o eixo y' das tangentes, tal como esboçado no diagrama da figura 11.7.

Temos então $PP' < \widehat{AP}$, ou seja $\operatorname{sen}\alpha < \alpha$.

Além disso, a área do setor circular AOP é dada por $A_\alpha = \frac{\alpha}{2}r^2 = \frac{\alpha}{2}$.

A área do triângulo OAT é dada por $\Delta = \frac{1}{2}OA \cdot AT = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

Obviamente $A_\alpha < \Delta$, daí $\frac{\alpha}{2} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$, e portanto $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Sumarizando, sendo $0 < \alpha < \pi/2$,

$$\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$$

Como $\operatorname{sen}\alpha > 0$, temos então $1 < \dfrac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Comparando os inversos dos três termos, obtemos

$$\cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$$

Para $-\pi/2 < \alpha < 0$ também valem as desigualdades acima, já que, se $0 < \alpha < \pi/2$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\dfrac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{-\alpha} = \dfrac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

Agora faremos uso de um teorema sobre limites (que só pode ser demonstrado a partir de um tratamento formal da teoria de limites), o *teorema do confronto* ou *teorema do sanduíche*:

Teorema 11.1 (Teorema do confronto, ou teorema do sanduíche). *Sendo* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo, sendo* $a \in I$, *e* f, g *e* h *funções definidas para* $x \in I$, $x \neq a$, *se* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* $x \in I, x \neq a$, *e se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$. *Vale o mesmo resultado para limites laterais (neste caso,* a *pode ser o extremo inferior ou superior do intervalo* I*). Vale o mesmo resultado se* $a = +\infty$ *ou* $-\infty$.

No nosso caso, temos $f(\alpha) = \cos\alpha$, $g(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ e $h(\alpha) = 1$, todas definidas para $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $\alpha \neq 0$, satisfazendo $f(\alpha) < g(\alpha) < h(\alpha)$.

Temos $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$, e $\lim_{\alpha\to 0} h(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} 1 = 1$.

Portanto $\lim_{\alpha\to 0} g(\alpha) = 1$, ou seja,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

□

Veremos adiante que o resultado $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, *primeiro limite fundamental*, é imprescindível para a dedução da derivada da função seno e das demais funções trigonométricas. Note que as desigualdades $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, empregadas no cálculo desse limite, só fazem sentido se $x \in \mathbb{R}$, quando então $|x|$ é a medida de um arco orientado (em radianos), em um círculo trigonométrico.

O *segundo limite fundamental* é aquele já visto na aula 9, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Vamos agora a um exemplo de cálculo de um limite em que aplicamos o primeiro limite fundamental.

Exemplo 11.1. *Calcular* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}$

Solução. Temos o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}$ indeterminado na forma $\dfrac{0}{0}$.

Fazemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 4x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 4x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 4x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4 \operatorname{sen} 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = 4
\end{aligned}$$

Portanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x} = 4$.

11.3 Problemas

Calcule os seguintes limites, lembrando-se de que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{bx}$

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2t}{t^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

(e) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{1-\cos t}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{bx}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{2}{x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \cdot \cos(1/x)$

Respostas.

(a) $1/3$. *Sugestão.* Faça $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3}$ (b) a/b

(c) 4 (d) -1. *Sugestão.* Faça primeiramente a mudança de variável $x - \pi = y$.

(e) 2. *Sugestão.* $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)}$ (f) 1 (g) 0 (h) $3/5$ (i) 2

(j) 0. *Sugestão.* Se $x > 0$, $-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{x}$

(k) 0. *Sugestão.* Mostre que $\lim_{x\to 0} |x \cos(1/x)| = 0$, considerando que $|x\cos(1/x)| \le |x|$, e use o teorema do confronto (teorema 11.1).