Lógica

Lógica de Predicados
Aula 13 – Semântica

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica de Predicados

- **Como qualquer linguagem, é composta por**
  - **Sintaxe** (ou gramática)
    - Especifica como os símbolos se combinam para formar uma sequência válida
  - **Semântica**
    - Especifica como as sequências válidas se relacionam entre si e qual o valor-verdade dessa relação

Lógica de Predicados

$$\forall X\ (p(X) \rightarrow\ q(X,a))$$

V ou F?

- Sabendo que
  - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
  - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
  - Símbolos de constantes: a, b
  - Símbolos de variáveis: X, Y
  - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

A fórmula diz que: ”Para todo X, se X é par então X é maior do que 1 (valor da constante a)” o que é verdadeiro dado que o único X par possível nesse domínio é 2 e ele é maior do que 1

Lógica de Predicados

SEMÂNTICA

- **Interpretação (I)**
  - Uma interpretação I de uma fórmula α consiste em:
    1. Um conjunto não vazio D, chamado de **domínio** da interpretação, no qual as variáveis assumem valores;
    2. Uma **atribuição** a cada:
       - Símbolo constante de α, de um elemento de D;
       - Símbolo funcional n-ário de α, de uma função de $D^n \rightarrow D$;
       - Símbolo de predicado n-ário de α, de uma função de $D^n \rightarrow \{V, F\}$;

Domínio: {1, 2}

a	b
1	2

f(1)	**f(2)**	**g(1)**	**g(2)**	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	**2**	**2**	**1**	F	V	F	F	V	F

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Seja I uma interpretação de uma linguagem de primeira ordem λ com domínio D
  - Seja A uma atribuição com relação a I
  - O valor-verdade de uma fórmula em λ é dado por
    1. Se a fórmula é um átomo $p(t_1, \ldots, t_n)$ então o valor-verdade é obtido calculando o valor de $p'(t_1', \ldots, t_n')$ no qual p' é a função associada a p por I e $t_1', \ldots, t_n'$ são as atribuições de termo dos termos $t_1, \ldots, t_n$, com relação a I e A

Lógica de Predicados

SEMÂNTICA

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Seja I uma interpretação de uma linguagem de primeira ordem λ com domínio D
  - Seja A uma atribuição com relação a I
  - O valor-verdade de uma fórmula em λ é dado por
    2. Se a fórmula for $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, então seu valor-verdade é dado pela tabela

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Seja I uma interpretação de uma linguagem de primeira ordem λ com domínio D
  - Seja A uma atribuição com relação a I
  - O valor-verdade de uma fórmula em λ é dado por
    3. Se a fórmula é da forma $(\exists X\ \alpha)$, seu valor-verdade é V se <u>existe</u> $d \in D$ tal que α tem valor-verdade V com relação a I e A(X/d); caso contrário é F
    4. Se a fórmula é da forma $(\forall X\ \alpha)$, seu valor-verdade é V se <u>para todo</u> $d \in D$, α tem valor-verdade V com relação a I e A(X/d); caso contrário é F

Lógica de Predicados

SEMÂNTICA

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - **IMPORTANTE**
    - O valor-verdade de uma fórmula fechada não depende de atribuição de variável (A)
    - O valor-verdade de uma fórmula fechada é sempre considerado apenas com relação a uma interpretação (I)

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

a) $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X,a))$

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

a) $\forall X\ (p(X) \rightarrow q(X,a))$

A fórmula diz que: ”Para todo X, se X é par então X é maior do que 1 (valor da constante a)” o que é verdadeiro dado que o único X par possível nesse domínio é 2 e ele é maior do que 1

Demonstrando (é preciso avaliar X em cada um de seus valores possíveis. Como a fórmula é fechada, a atribuição da variável X não é considerada e o valor-verdade da fórmula é definido com base, apenas, na interpretação)

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

a) $\forall X\,(p(X) \rightarrow q(X,a))$

Para X = 1
$p(X) \rightarrow q(X,a)$
$p(1) \rightarrow q(1,1)$
$F \rightarrow F$ (avaliada V)

Para X = 2
$p(X) \rightarrow q(X,a)$
$p(2) \rightarrow q(2,1)$
$V \rightarrow V$ (avaliada V)

Como a fórmula $p(X) \rightarrow q(X,a)$ é V para todos os elementos X do domínio D, então é **V**.

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

b) $\forall X\ (p(X) \rightarrow (q(X,a) \wedge p(Y)))$

c) $\forall X\ (\exists Y\ (q(Y, X) \vee p(f(X))))$

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

b) $\forall X\ (p(X) \rightarrow (q(X,a) \wedge p(Y)))$

Para X = 1

$p(X) \rightarrow (q(X,a) \wedge p(Y))$

$p(1) \rightarrow (q(1,a) \wedge p(2))$

$p(1) \rightarrow (q(1,1) \wedge V)$

$F \rightarrow (F \wedge V)$ (avaliada V)

Para X = 2

$p(X) \rightarrow (q(X,a) \wedge p(Y))$

$p(2) \rightarrow (q(2,a) \wedge p(2))$

$p(2) \rightarrow (q(2,1) \wedge V)$

$V \rightarrow (V \wedge V)$ (avaliada V)

Como a fórmula é avaliada V para todo possível valor de X do domínio, a fórmula é **V**.

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

c) $\forall X (\exists Y (q(Y, X) \vee p(f(X))))$

A fórmula a ser avaliada diz o seguinte: ”Para todo X, existe um Y tal que Y é maior do que X ou é par a identidade de X” o que é V dado que para X = 1 existe um Y, que é 2, que é maior do que X; e para X = 2, também é V pois identidade de X é o próprio 2 e ele é par

Demonstrando (é preciso avaliar X e Y em cada um de seus valores possíveis. Veja que a fórmula é fechada e, por isso, a atribuição das variáveis X e Y não é considerada e o VV é definido com base, apenas, em I)

Lógica de Predicados

- **Determinando o valor-verdade de uma fórmula**
  - Dados
    - Símbolos funcionais: f/1 (identidade), g/1 (complementar)
    - Símbolos de predicados: p/1 (par), q/2 (maior)
    - Símbolos de constantes: a, b
    - Símbolos de variáveis: X, Y
    - Domínio: {1, 2}

a	b	X	Y
1	2	1	2

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)	p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)
1	2	2	1	F	V	F	F	V	F

c) $\forall X\ (\exists Y\ (q(Y, X) \vee p(f(X))))$

Para X = 1

Y = 1 (q(1,1) ∨ p(f(1)))

Y = 1 (F ∨ F) (avaliada F)

Y = 2 (q(2,1) ∨ p(f(1)))

Y = 2 (V ∨ F) (avaliada V) <=

Para X = 2

Y = 1 (q(1,2) ∨ p(f(2)))

Y = 1 (F ∨ V) (avaliada V) <=

Y = 2 (q(2,2) ∨ p(f(2)))

Y = 2 (F ∨ V) (avaliada V) <=

A fórmula é **V** uma vez que para qq valor de X existe um valor de Y que a torna V.