Matemática Discreta

Relações
Relações de ordem

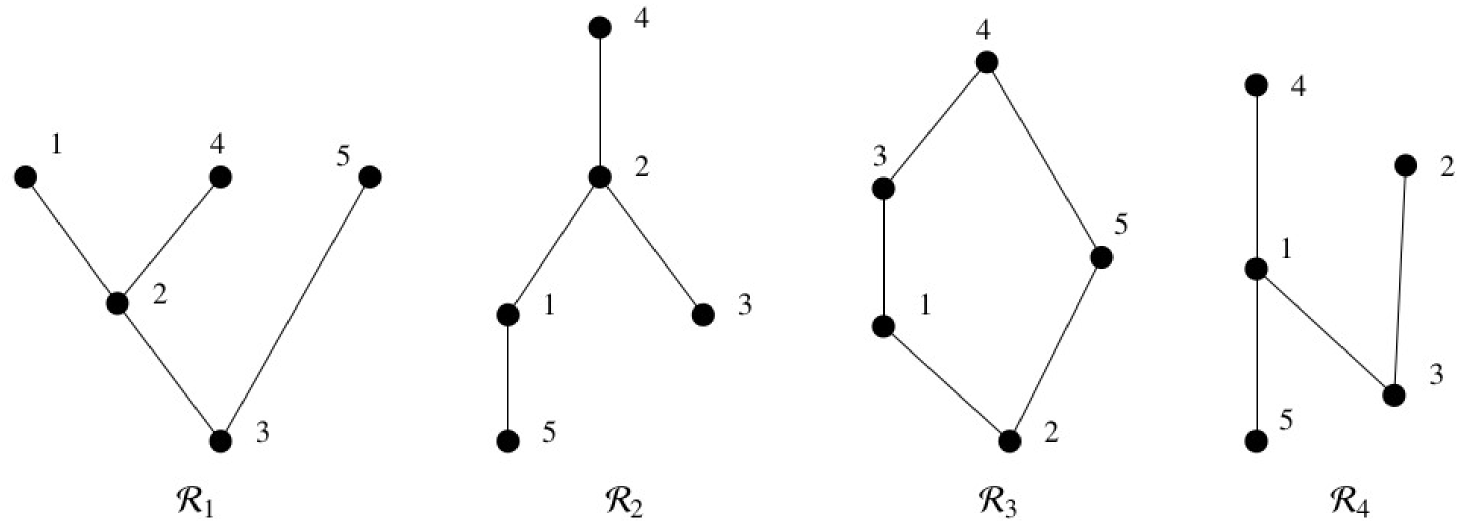
Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Relações de Ordem

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar o que é uma relação de ordem e ...
    - Conjunto parcialmente ordenado
    - Relação de ordem estrita
    - Elementos comparáveis e não comparáveis
    - Ordem total
    - Diagrama de Hasse
    - Etc.
  - Apresentar conceitos relacionados a uma relação de ordem
  - Capacitar o aluno a aplicar os conceitos de Relações de Ordem na modelagem e resolução de problemas computacionais

Problema #10

- **Em cada um dos Diagramas de Hasse a seguir**



  - Diga quem são os elementos
    - Mínimos
    - Minimais
    - Máximos
    - Maximais

Relações

- **Recordando … Resumo das propriedades**
  - Seja R uma relação definida em um conjunto A
    - R é reflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \, R \, x$
    - R é antirreflexiva se <u>para todo</u> $x \in A$ temos $x \not R \, x$
    - R é simétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
    - R é antissimétrica se <u>para todo</u> $x, y \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$
    - R é transitiva se <u>para todo</u> $x, y, z \in A$ temos
      $(x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$

Relação de Ordem

- **Relação de ordem**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação em um conjunto A
- Dizemos que R é uma **relação de ordem parcial** (ou apenas ordem parcial) se R é <u>reflexiva</u>, <u>antissimétrica</u> e <u>transitiva</u>
  - Denotado por $\preccurlyeq$

Relação de Ordem

- **Relação de ordem**
  - Em uma ordem parcial é possível estabelecer uma <u>ordenação</u> para os elementos
  - Exemplo
    - A relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$:
      - é reflexiva (pois $A \subseteq A$ para todo conjunto A)
      - é antissimétrica (pois se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$)
      - é transitiva (se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$)

Relação de Ordem

- **Relação de ordem**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de ordem parcial no conjunto A = { 1, 2, 3 }
    - a) R = { (1, 1), (2, 2), (2, 3) }
    - b) S = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3) }
    - c) T = { (1, 1), (2, 2), (3, 3) }
    - d) U = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3) }
    - e) V = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) }

RESPOSTAS

a) Não, pois não é reflexiva, falta o par (3, 3)
b) Não, pois não é transitiva, tem os pares (1,2) e (2,3), mas falta o par (1,3)
c) SIM
d) Não, pois não é antissimétrica já que tem o par (1, 2) e o (2, 1) e 1 ≠ 2
e) SIM

Relação de Ordem

- **Relação de ordem**
  - A relação *a* divide *b* no conjunto $\mathbb{N}^*$ (inteiros positivos) é uma relação de ordem parcial?

RESPOSTA

SIM, pois

- é reflexiva ($a|a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}^*$)

- é antissimétrica (se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$)

- é transitiva (se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$)

Relação de Ordem

- **Conjunto parcialmente ordenado (PO)**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um conjunto A juntamente com uma ordem parcial R é dito **conjunto parcialmente ordenado** (poset – *partially ordered set*) ou **conjunto ordenado**
  - Denotado por $(A, \preccurlyeq)$

Relação de Ordem

- **Conjunto parcialmente ordenado (PO)**
  - É o par ordenado (A, R) em que R é uma relação de ordem parcial no conjunto A (também chamado de conjunto fundamental do par ordenado)
  - Exemplo
    - Considerando-se a ordem parcial R ↔ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 6, 12 }, ou seja,
      - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (6, 12), (12, 12) }

➔ Como R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, P = (A, R) é um conjunto PO

Relação de Ordem

- **Relação de ordem parcial estrita**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja R uma relação em um conjunto A
- Dizemos que R é uma **relação de ordem parcial estrita** (ou apenas ordem parcial estrita) se R é antirreflexiva, antissimétrica e transitiva
  - Denotado por $\prec$

Relação de Ordem

- **Relação de ordem parcial estrita**
  - Exemplo
    - A relação $<$ (estritamente menor que) sobre os inteiros:
      - é antirreflexiva (por exemplo, $3 < 3$ é falso)
      - é transitiva (por exemplo, $3 < 4$ e $4 < 5$ então $3 < 5$)
      - é antissimétrica como consequência

Relação de Ordem

- **Relação de ordem parcial estrita**
  - Diga quais das relações a seguir são relações de ordem parcial estrita no conjunto A = { 1, 2, 3 }
    a) R = { (1, 1), (2, 1), (2, 3) }
    b) S = { (1, 2), (2, 3) }
    c) T = { (1, 2), (2, 3), (1, 3) }
    d) U = { (1, 2), (2, 1) }
    e) V = { (1, 2), (1, 3) }

RESPOSTAS

a) Não, pois não é antirreflexiva, tem o par (1, 1)
b) Não, pois não é transitiva, tem os pares (1, 2) e (2, 3), mas falta o par (1, 3)
c) SIM
d) Não, pois não é antissimétrica já que tem o par (1, 2) e o (2, 1) e 1 ≠ 2
e) SIM

Relação de Ordem

- **Elementos comparáveis e não comparáveis**
  - Os conjuntos parcialmente ordenados podem conter elementos não comparáveis
    - ➔ Esta é a característica que torna a relação de ordem algo “parcial”

Relação de Ordem

- **Elementos comparáveis e não comparáveis**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, R) e $x, y \in A$
  - x e y são **comparáveis** sse x R y ou y R x
  - x e y são **não comparáveis** se não estiverem relacionados por meio da relação de ordem parcial R

Relação de Ordem

- **Ordem total (ou ordem linear)**

Fonte: https://pixabay.com/

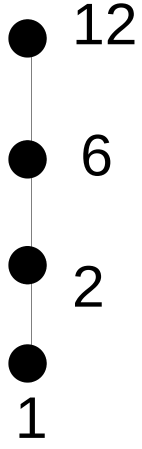
- Uma **ordem total**, ou **ordem linear** é um conjunto parcialmente ordenado no qual <u>não existem</u> elementos <u>não comparáveis</u>

Relação de Ordem

- **Ordem total (ou ordem linear)**
  - Uma **ordem total**, ou **ordem linear** é um conjunto parcialmente ordenado no qual <u>não existem</u> elementos <u>não</u> comparáveis
    - Para todos os *x* e *y* no conjunto PO, exatamente uma das seguintes possibilidades é verdadeira:
      - $x \preccurlyeq y$,
      - $y \preccurlyeq x$,
      - $x = y$

Relação de Ordem

- **Ordem total (ou ordem linear)**
  - Exemplo
    - Considerando-se a ordem parcial R $\leftrightarrow$ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 6, 12 }, ou seja,
      - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (6, 12), (12, 12) }
    - ➔ O conjunto (A, R) é uma ordem total



Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse**

Fonte: https://pixabay.com/

- É a **representação visual** de um poset (A, R) onde
  - Cada elemento de A é representado por um <u>ponto</u> (ou vértice)
  - Se o par (x, y) está em R então x é colocado abaixo de y e os dois são unidos por um <u>segmento de reta</u>

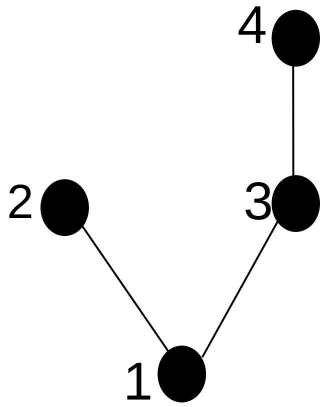
Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse**
  - Considerações importantes
    - Não é para traçar uma ligação de um ponto com ele mesmo, pois está implícito que ela existe, pois a relação de ordem parcial <u>é reflexiva</u>
    - Não é para ligar todos os pares de pontos que estão relacionados por R, pois a relação de ordem parcial <u>é transitiva</u>

A posição do ponto é importante!

Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse**
  - Exemplo



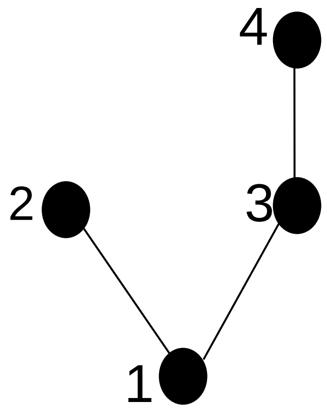
➔ O diagrama de Hasse nos dá toda a informação que precisamos sobre a ordem parcial:

  ➔ Os nós e segmentos de reta nos dão os pares

  ➔ O resto é completado usando o fato de ser uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva

Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse**
  - Dado o digrama de Hasse abaixo



  - Quais são os pares ordenados da ordem parcial por ele representada?
  - R = { (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (3, 4), (1, 4) }

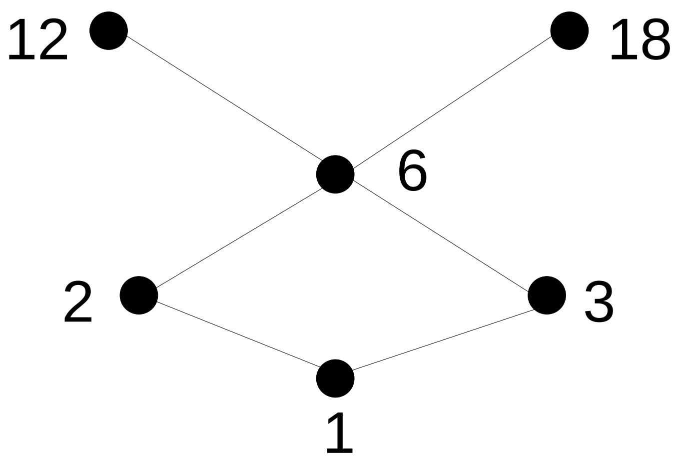
Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse X Grafos**
  - Apesar de serem bastante semelhantes aos grafos, os Diagramas de Hasse têm um significado diferente e são usados especificamente para ilustrar conjuntos parcialmente ordenados
  - → A posição do ponto tem importância

Relação de Ordem

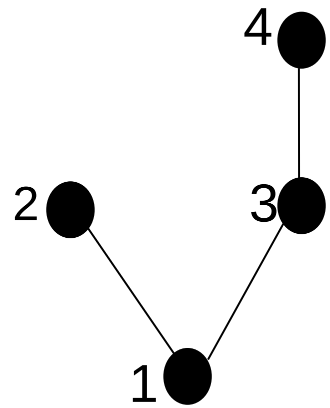
- **Diagrama de Hasse**
  - Considerando-se a ordem parcial R ↔ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 3, 6, 12, 18 }, ou seja,
    - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (6, 12), (12, 12), (1, 18), (2, 18), (3, 18), (6, 18), (18, 18) }
    - Diagrama de Hasse para esse PO:

RESPOSTA:



Relação de Ordem

- **Elementos comparáveis e não comparáveis**
  - Exemplo



	1	2	3	4
comparáveis	2, 3 e 4	1	1 e 4	1 e 3
não comparáveis	--	3 e 4	2	2

Relação de Ordem

- **Predecessor e sucessor**

Fonte: https://pixabay.com/

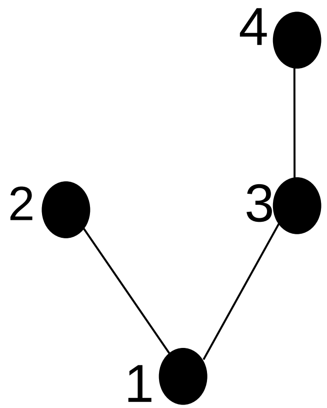
- Seja (A, R) um conjunto parcialmente ordenado
  - Se x R y e x ≠ y ($x \prec y$), dizemos que
    - x é **predecessor** de y
    - y é **sucessor** de x

Relação de Ordem

- **Predecessor e sucessor**
  - Seja (A, R) um conjunto parcialmente ordenado
    - Se x é **predecessor** de y e não existe z com x R z e z R y (não existe $x \prec z \prec y$), dizemos que
      - x é **predecessor imediato** de y
      - y é **sucessor imediato** de x

Relação de Ordem

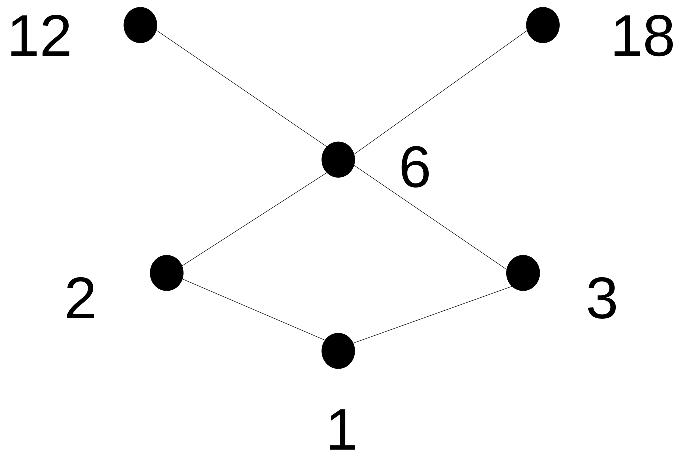
- **Predecessor e sucessor**
  - Exemplo



	1	2	3	4
predecessores	--	1	1	1 e 3
pred. imediatos	--	1	1	3
sucessores	2, 3 e 4	--	4	--
suc. imediatos	2 e 3	--	4	--

Relação de Ordem

- **Predecessor e sucessor**
  - Considerando-se a ordem parcial R $\leftrightarrow$ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 3, 6, 12, 18 }, ou seja,
    - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (6, 12), (12, 12), (1, 18), (2, 18), (3, 18), (6, 18), (18, 18) }
    - Diga quem são:
      - Predecessores de 6
      - Predecessores imediatos de 6



RESPOSTA:
- predecessores de 6 são: 1, 2 e 3
- predecessores imediatos de 6 são: 2 e 3

Relação de Ordem

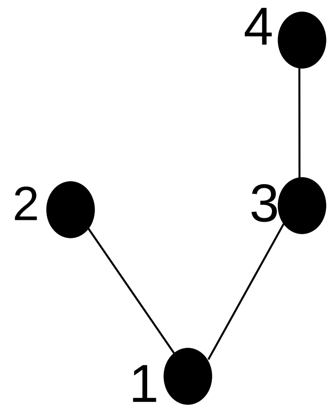
- **Cadeia e anticadeia**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja P = (A, R) um conjunto PO e seja $C \subseteq A$
  - Dizemos que C é uma **cadeia** de P se os elementos de <u>todos</u> os pares em C são **comparáveis**
  - Dizemos que C é uma **anticadeia** de P se, para <u>todos</u> os pares de elementos distintos em C, os elementos são **não comparáveis**

Relação de Ordem

- **Cadeia e anticadeia**
  - Exemplo



    - Cadeias: {1, 2}, {1, 3}, {3, 4}, {1, 4} e {1, 3, 4}
    - Anticadeias: {2, 3} e {2, 4}

Relação de Ordem

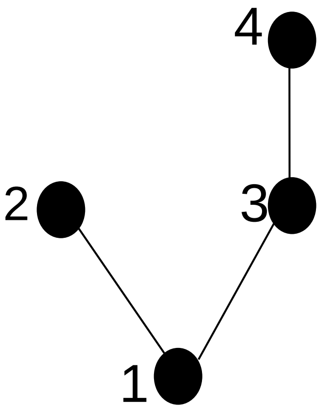
- **Altura e largura**

Fonte: https://pixabay.com/

- Seja P = (A, R) um conjunto PO e seja C ⊆ A
  - A **altura** de P é o tamanho da maior **cadeia** de P
  - A **largura** de P é o tamanho da maior **anticadeia** de P

Relação de Ordem

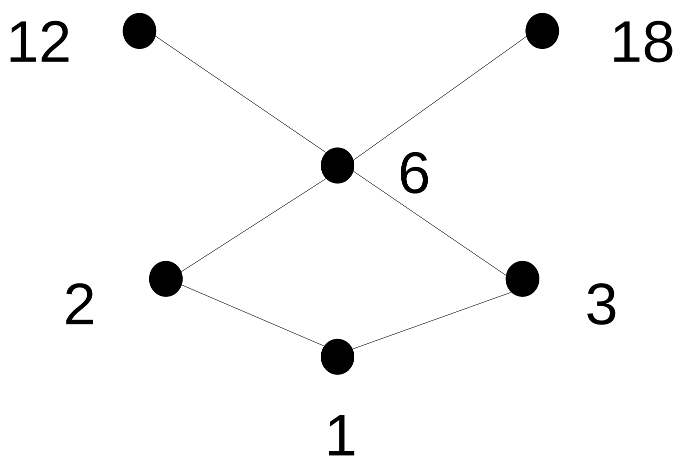
- **Altura e largura**
  - Exemplo



    - Cadeias: {1, 2}, {1, 3}, {3, 4}, {1, 4} e {1, 3, 4}
      - Altura = 3
    - Anticadeias: {2, 3} e {2, 4}
      - Largura = 2

Relação de Ordem

- **Altura e largura**
  - Considerando-se a ordem parcial R ↔ "*a* divide *b*" em A = { 1, 2, 3, 6, 12, 18 }, ou seja,
    - R = { (1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 6), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (6, 12), (12, 12), (1, 18), (2, 18), (3, 18), (6, 18), (18, 18) }
    - Diga qual é:
      - Altura
      - Largura



RESPOSTA:
- Altura = 4
- Largura = 2

Relação de Ordem

- **Elemento mínimo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um poset (A, $\preccurlyeq$) e $x, y \in A$
  - Dizemos que x é **elemento mínimo** (ou menor elemento) se <u>para todo</u> $z \in A$, temos $x \preccurlyeq z$
  - → x é mínimo se todos os outros elementos do poset estão acima de x

Relação de Ordem

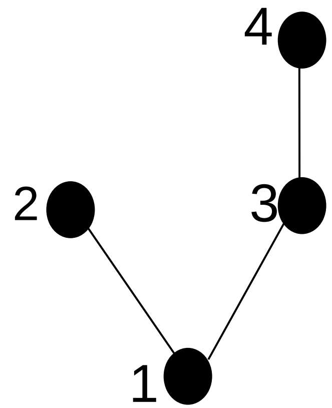
- **Elemento máximo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um poset (A, $\preccurlyeq$) e $x, y \in A$
  - Dizemos que y é **elemento máximo** (ou maior elemento) se <u>para todo</u> $z \in A$, temos $z \preccurlyeq y$
  - ➔ y é máximo se todos os outros elementos do poset estão abaixo de y

Relação de Ordem

- **Elemento mínimo e elemento máximo**
  - Exemplo



    - Elemento mínimo: 1
    - Elemento máximo: não há

Relação de Ordem

- **Elemento minimal**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um poset $(A, \preccurlyeq)$ e $x, y \in A$
  - Dizemos que x é **elemento minimal** se <u>não existe</u> $z \in A$ tal que $z \preccurlyeq x$
  - ➔ x é minimal se não existe qualquer elemento estritamente abaixo dele

Relação de Ordem

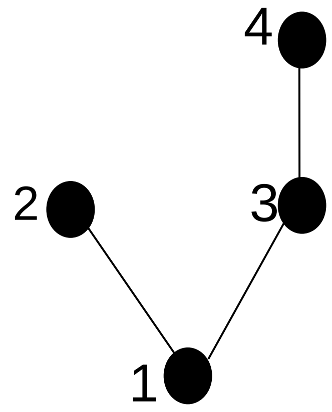
- **Elemento maximal**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um poset (A, ≼) e $x, y \in A$
  - Dizemos que *y* é **elemento maximal** se não existe $z \in A$ tal que $y \preccurlyeq z$
  - → *y* é maximal se não existe qualquer elemento estritamente acima dele

Relação de Ordem

- **Elemento minimal e elemento maximal**
  - Exemplo



    - Elemento minimal: 1
    - Elementos maximais: 2 e 4

Relação de Ordem

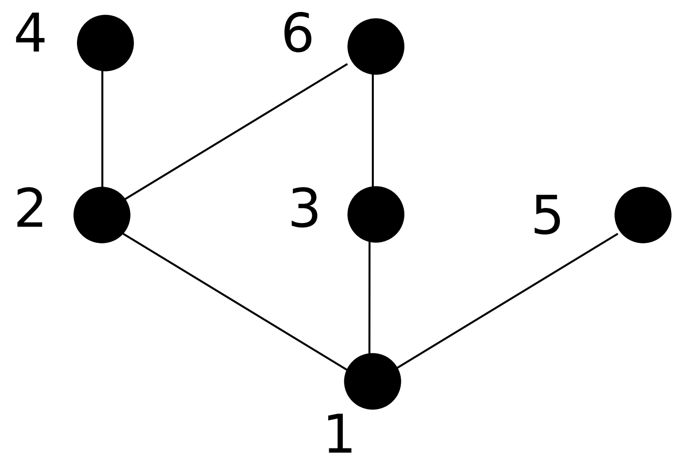
- **Elemento mínimo, máximo, minimal e maximal**
  - Mínimo e Máximo
    - Se existir um elemento mínimo, ele é <u>único</u>
    - Se existir um elemento máximo, ele é <u>único</u>
  - Mínimo X Minimal e Máximo X Maximal
    - O elemento mínimo é <u>sempre</u> minimal
    - O elemento máximo é <u>sempre</u> maximal
    - ➔ **A recíproca não é verdadeira!**

Relação de Ordem

- **Elemento mínimo, máximo, minimal e maximal**
  - Mínimo X Minimal e Máximo X Maximal
    - No Diagrama de Hasse
      - O elemento mínimo está abaixo de <u>todos</u> os outros
      - Um elemento minimal <u>não tem</u> elementos abaixo dele
      - O elemento máximo está acima de <u>todos</u>
      - Um elemento maximal <u>não tem</u> elementos acima dele

Relação de Ordem

- **Diagrama de Hasse e conceitos**
  - Dado o conjunto PO dos inteiros de 1 a 6 ordenados por divisibilidade



    - Elementos minimais = 1
    - Elemento mínimo = 1
    - Elementos maximais = 4, 5, 6
    - Elemento máximo = não há

Relação de Ordem

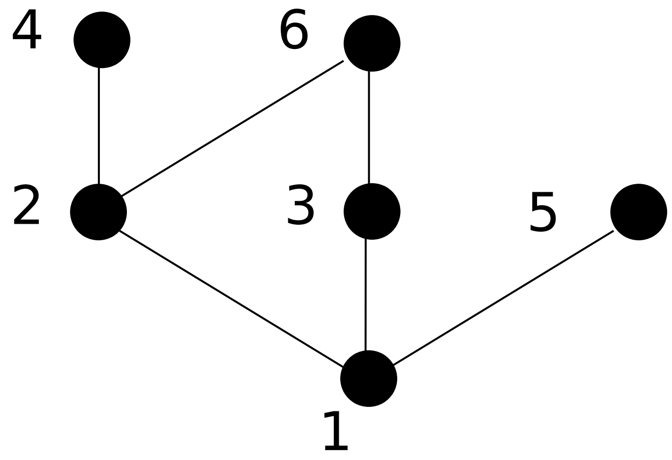
- **Supremo e ínfimo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Dado um poset (A, ≼) e $x, y \in$ A
  - O **supremo** de x e $y \in$ A em (A, ≼) é o menor dos limitantes superiores
  - O **ínfimo** de x e $y \in$ A em (A, ≼) é o maior dos limitantes inferiores

Relação de Ordem

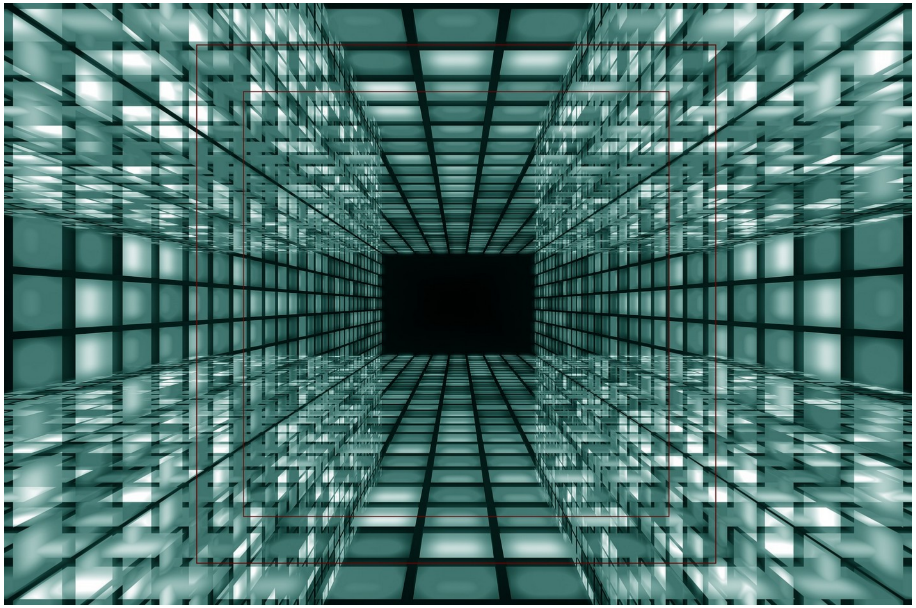
- **Supremo e ínfimo**
  - Exemplo



    - Para x = 2 e y = 3
      - Supremo: 6
      - Ínfimo: 1

Relação de Ordem

- **Reticulado**

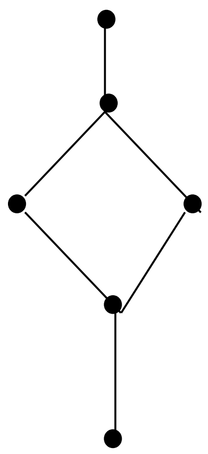


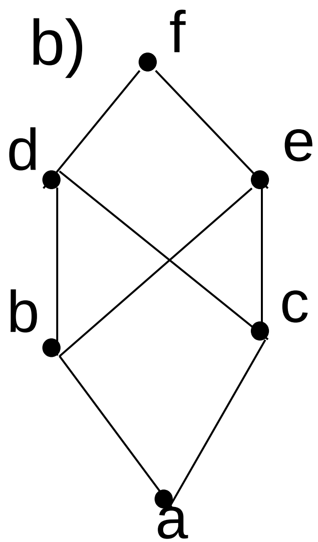
Fonte: https://pixabay.com/

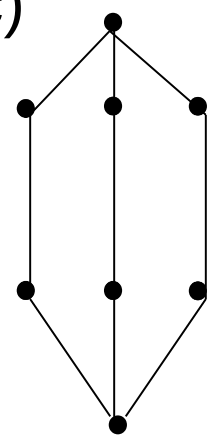
- Um **reticulado** é um poset no qual quaisquer dois elementos arbitrários *x* e *y* têm um supremo e um ínfimo

Relação de Ordem

- **Reticulado**
  - Exemplos

a) 

b) 

c) 

- a) e c) são reticulados
- b) não é, pois os elementos *b* e *c* não têm supremo. Os elementos *d*, *e* e *f* são limitantes superiores de *b* e *c*, no entanto não é possível determinar o menor entre eles

Relação de Ordem

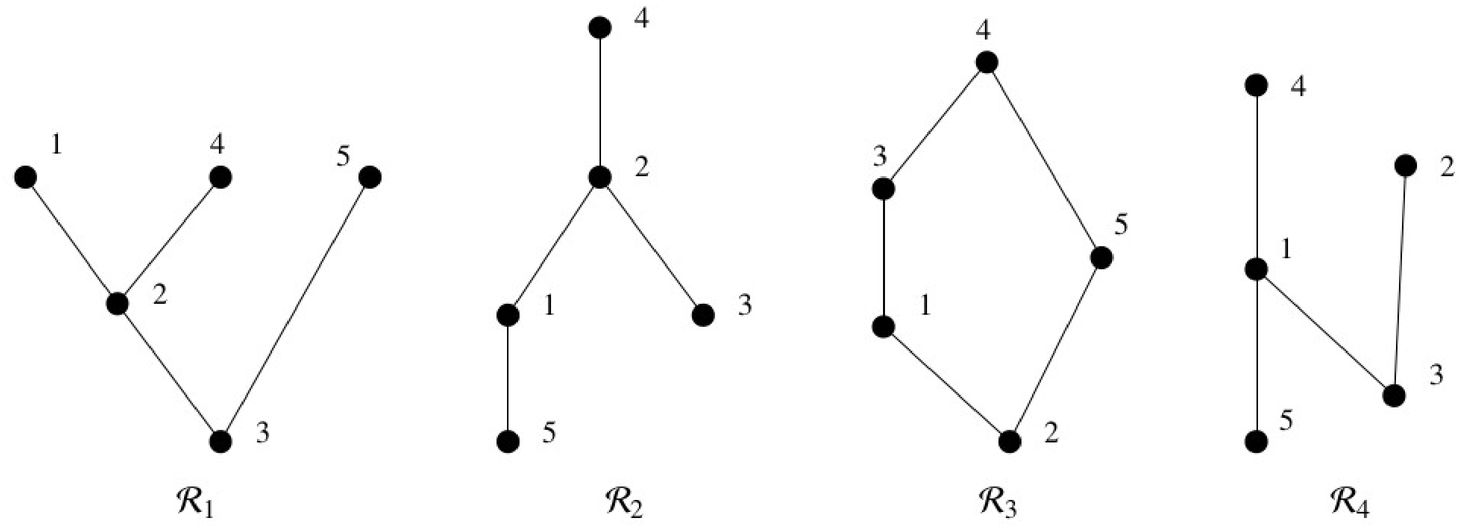
- **Resumo das propriedades e as relações**

	Relação de equivalência	Relação de ordem parcial	Relação de ordem parcial estrita
Reflexiva	✓	✓	
Antirreflexiva			✓
Simétrica	✓		
Antissimétrica		✓	✓
Transitiva	✓	✓	✓
Característica	Determina uma partição	Determina uma ordenação (predecessores e sucessores)	

Fonte: (CASELI, 2014, p. 54)

Problema #10

- **Em cada um dos Diagramas de Hasse a seguir**



- Diga quem são os elementos
  - Mínimos
  - Minimais
  - Máximos
  - Maximais

relação	mínimos	minimais	máximos	maximais
R1	3	3	não há	1, 4, 5
R2	não há	3, 5	4	4
R3	2	2	4	4
R4	não há	3, 5	não há	2, 4