Matemática Discreta

Teoria dos Grafos

Passeio

Grafo euleriano e Grafo hamiltoniano

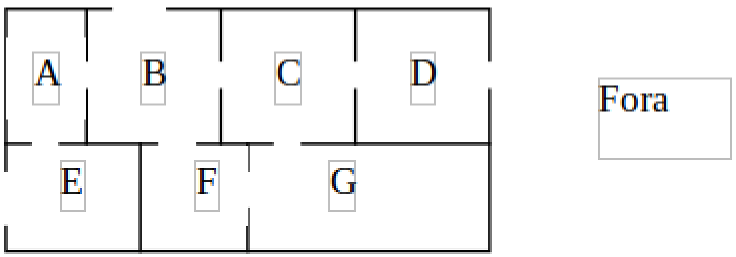
Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Teoria dos Grafos

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar conceitos relacionados a **passeio** em grafos
    - Passeio
    - Passeio trivial, Trilha e Caminho
    - Passeio inverso e Concatenação de passeios
    - Passeio fechado
    - Circuito (ou ciclo)
    - Grafo euleriano e Grafo hamiltoniano
  - Capacitar o aluno a usar os conceitos relacionados a **passeio** em grafos para modelar e resolver problemas computacionais

Problema #17

- **Considere a planta de uma casa apresentada a seguir**



a) É possível entrar na casa, passar uma vez por todos os quartos e sair para o lado de fora?

b) É possível, partindo de fora da casa, passar uma vez por cada porta?

Teoria dos Grafos

- **Passeio**

Fonte: https://pixabay.com/

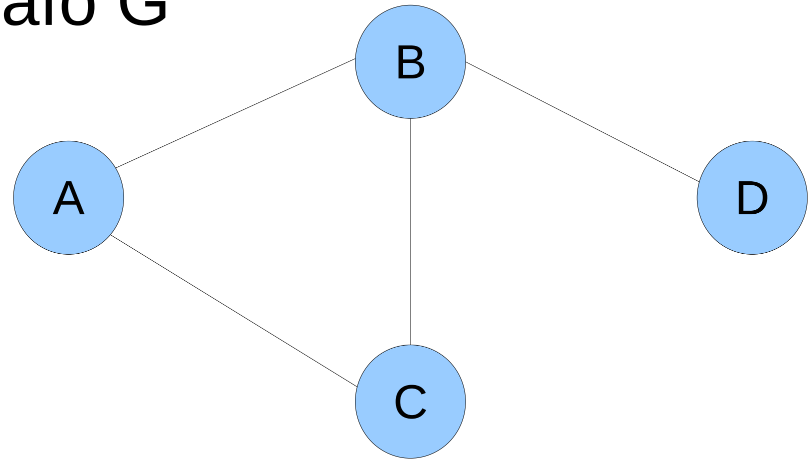
- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ onde
  - cada v_i é um vértice de G;
  - cada e_i é uma aresta de G;
  - os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i

Teoria dos Grafos

- **Passeio**
  - **Comprimento**
    - Em um passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, o comprimento é dado pelo número de arestas, ou seja, $|P| = k$
  - **Passeio orientado**
    - Em grafos orientados, o passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ respeita a orientação de cada aresta, ou seja, cada aresta e_i tem origem v_{i-1} e destino v_i

Teoria dos Grafos

- **Passeio**
  - Exemplo
    - Dado o grafo G



- P = (A, AB, B) é um passeio de comprimento 1
- Q = (A, AB, B, BD, D) é um passeio de comprimento 2
- T = (A, AB, B, BC, C, AC, A) é um passeio de comprimento 3

Teoria dos Grafos

- **Passeio**
  - Dizemos que um passeio $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$
    - **passa por**, **visita** ou **atravessa** cada uma das arestas $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$
    - **visita** os vértices $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$
    - **começa** no vértice v_0 e **termina** no vértice v_k
      - v_0 é o **início** do passeio e v_k é o **término**
    - **passa por** ou **atravessa** cada um dos vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$
      - Esses são chamados de **vértices intermediários** ou **internos**

Teoria dos Grafos

- **Passeio**
  - **IMPORTANTE**
    - Note que uma mesma aresta pode fazer parte do passeio mais de uma vez
    - Um passeio de comprimento k visita no máximo k+1 vértices distintos e tem no máximo k-1 vértices internos distintos

Teoria dos Grafos

- **Passeio trivial**

Fonte: https://pixabay.com/

- Passeio com apenas um vértice e nenhuma aresta
  - $P = (v_0)$
  - ➔ Seu comprimento é zero

Teoria dos Grafos

- **Trilha**

Fonte: https://pixabay.com/

- Passeio onde <u>todas as arestas são distintas</u>
  - Note que os vértices podem se repetir

Teoria dos Grafos

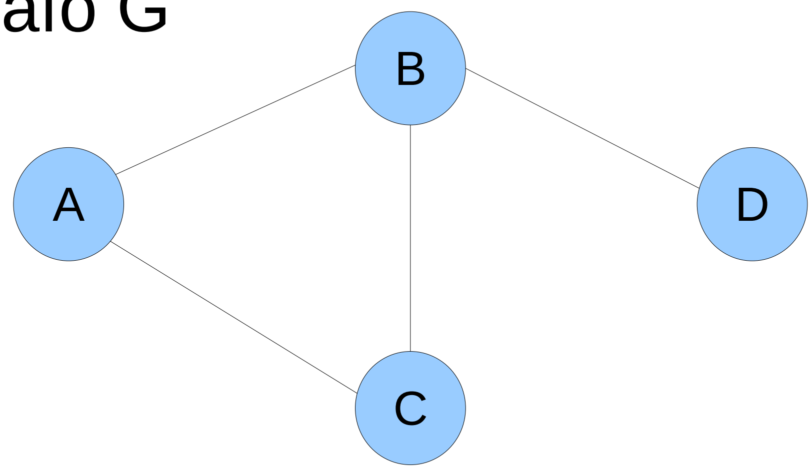
- **Caminho**

Fonte: https://pixabay.com/

- Passeio onde todos os vértices são distintos
  - Todo caminho também é uma trilha

Teoria dos Grafos

- **Passeio trivial, Trilha e Caminho**
  - Exemplos
    - Dado o grafo G



- P = (A) é um passeio trivial de comprimento 0
- Q = (A, AB, B, BD, D) é uma trilha e um caminho
- T = (A, AB, B, BC, C, AC, A) é uma trilha, mas não é um caminho

Teoria dos Grafos

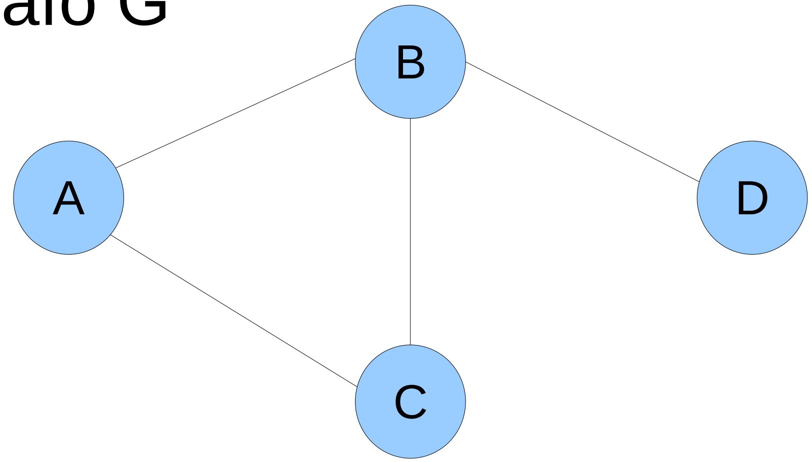
- **Passeio inverso**

Fonte: https://pixabay.com/

- O **passeio inverso** de $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, em G, denotado por P^{-1}, é obtido <u>invertendo a ordem</u> da sequência de vértices e arestas de P:
  - $P^{-1} = (v_k, e_k, v_{k-1}, \ldots, e_1, v_0)$

Teoria dos Grafos

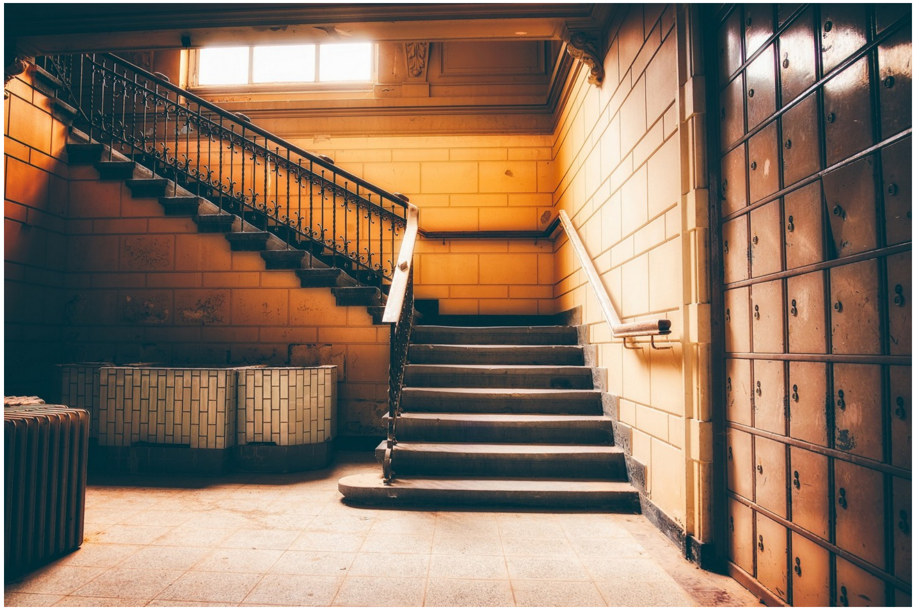
- **Passeio inverso**
  - Exemplo
    - Dado o grafo G



- Q = (A, AB, B, BD, D) é um passeio em G
- Q^{-1} = (D, BD, B, AB, A) é o passeio inverso de Q

Teoria dos Grafos

- **Concatenação de passeios**

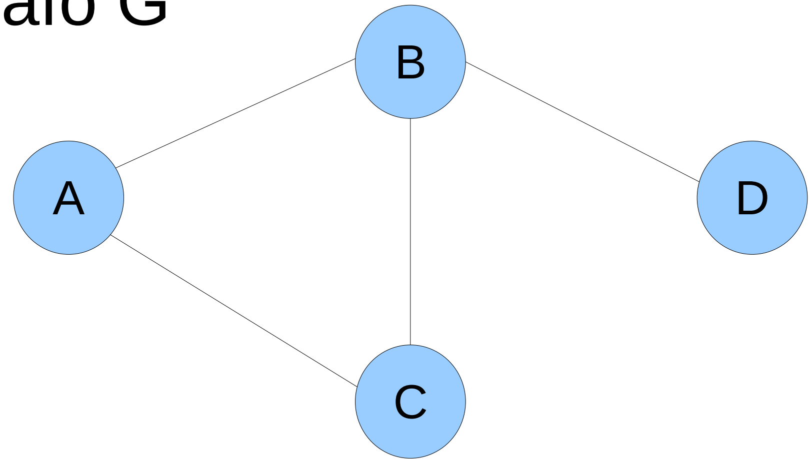


Fonte: https://pixabay.com/

- Sejam $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ e $Q = (w_0, f_1, w_1, \ldots, f_j, w_j)$ dois passeios em um grafo G tais que <u>o término de P coincide com o início de Q</u> $(v_k = w_0)$
  - A concatenação de P com Q, $P \cdot Q$ é a sequência $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, f_1, w_1, \ldots, f_j, w_j)$
  - ➔ $P \cdot Q$ também é um passeio em G

Teoria dos Grafos

- **Concatenação de passeios**
  - Exemplo
    - Dado o grafo G



      - P = (A, AB, B) é um passeio
      - Q = (B, BC, C, AC, A) é um outro passeio
      - P · Q = (A, AB, B, BC, C, AC, A) é um passeio resultante da concatenação de P e Q

Teoria dos Grafos

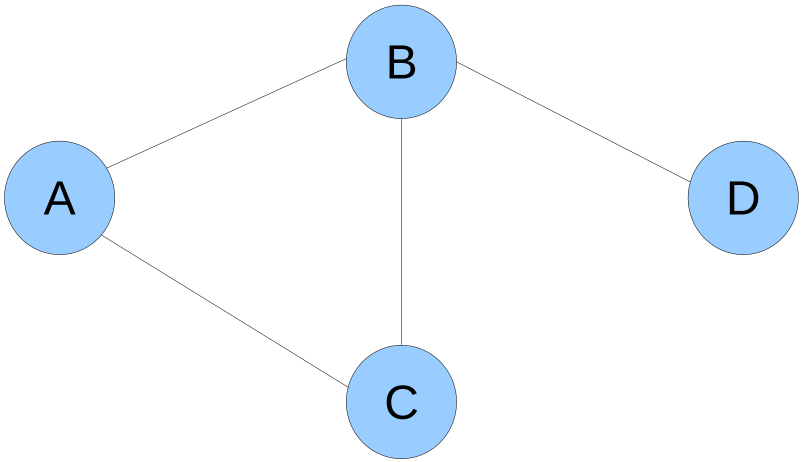
- **Passeio fechado**

Fonte: https://pixabay.com/

- Passeio que <u>começa e termina no mesmo vértice</u>
  - Analogamente alguns autores definem trilha fechada
  - → Não existe caminho fechado!

Teoria dos Grafos

- **Passeio fechado**
  - Exemplo



    - T = (A, AB, B, BC, C, AC, A) é um passeio fechado em G

Teoria dos Grafos

- **Circuito (ou ciclo)**

Fonte: https://pixabay.com/

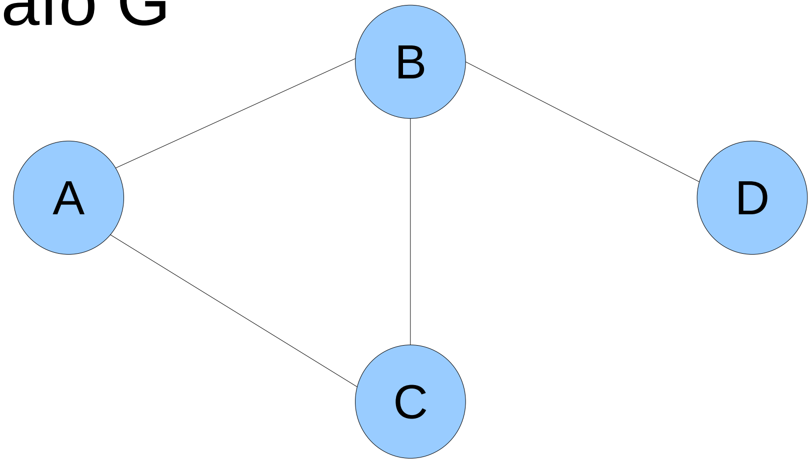
- Passeio fechado com comprimento maior ou igual a 1 que não repete vértices nem arestas, exceto início e término
  - Um circuito de comprimento k é chamado de **k-ciclo** ou **k-circuito**

Teoria dos Grafos

- **Circuito (ou ciclo)**
  - **Grafo ciclo** (circuito)
    - É um grafo onde existe um circuito que passa por <u>todos os vértices e todas as arestas</u>
  - **Grafo acíclico**
    - Um grafo <u>sem circuitos</u>

Teoria dos Grafos

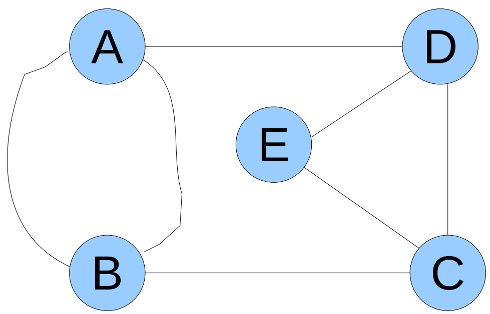
- **Circuito (ou ciclo)**
  - Exemplo
    - Dado o grafo G

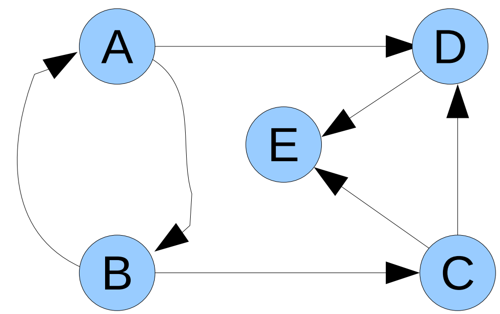


- T = (A, AB, B, BC, C, AC, A) é um ciclo em G de comprimento 3, ou seja, um 3-ciclo
- G não é um grafo ciclo
- G não é um grafo acíclico

Teoria dos Grafos

- **Dados os grafos abaixo, para cada um**

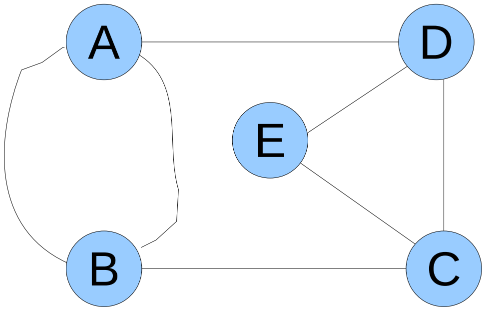




  - Dê
    - a) Um passeio de comprimento 2
    - b) Um caminho de comprimento 2
    - c) Uma trilha de comprimento 2
    - d) Um ciclo
    - e) Um 4-ciclo

Teoria dos Grafos

- **Dados os grafos abaixo, para cada um**



- Dê

Algumas possíveis respostas

a) Um passeio de comprimento 2 — P = (A, AB, B, BA, A)

b) Um caminho de comprimento 2 — Q = (A, AB, B, BC, C)

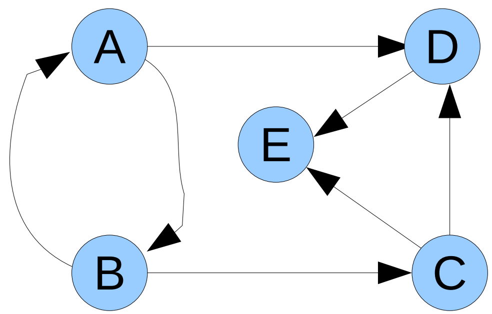
c) Uma trilha de comprimento 2 — P ou Q

d) Um ciclo — R = (E, ED, D, CD, C, CE, E) ou P

e) Um 4-ciclo — S = (A, AD, D, CD, C, BC, B, BA, A)

Teoria dos Grafos

- **Dados os grafos abaixo, para cada um**



  - Dê

Algumas possíveis respostas

a) Um passeio de comprimento 2 — P = (A, AB, B, BA, A)

b) Um caminho de comprimento 2 — Q = (A, AB, B, BC, C)

c) Uma trilha de comprimento 2 — P ou Q

d) Um ciclo — ~~R = (E, ED, D, CD, C, CE, E) ou~~ P

e) Um 4-ciclo — ~~S = (A, AD, D, CD, C, BC, B, BA, A)~~

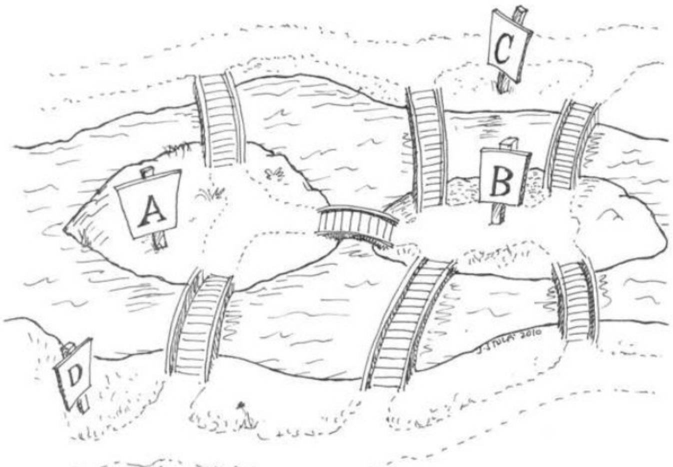
Não há

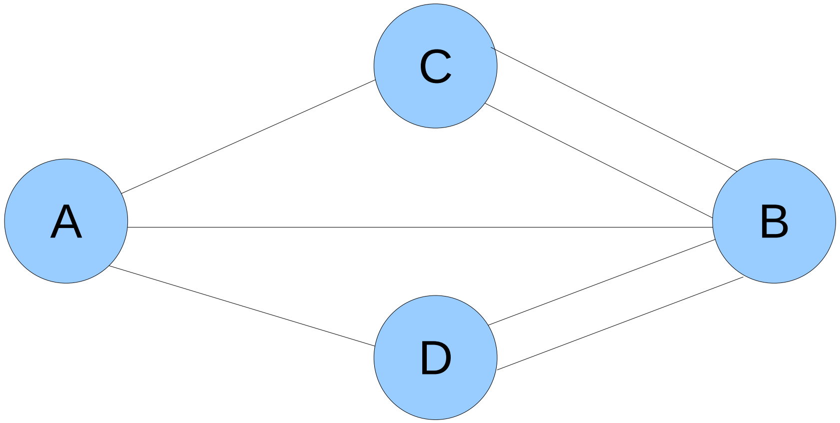
Teoria dos Grafos

- **Ciclos e formas geométricas**
  - Um triângulo é um 3-ciclo
  - Um quadrado é um 4-ciclo
  - Um pentágono é um 5-ciclo
  - ...
  - ➔ Um ciclo é par se tem comprimento par e é ímpar se tem comprimento ímpar

Teoria dos Grafos

- **Grafo euleriano**
  - Recordando … O problema das pontes de Königsberg de Euler (1736)



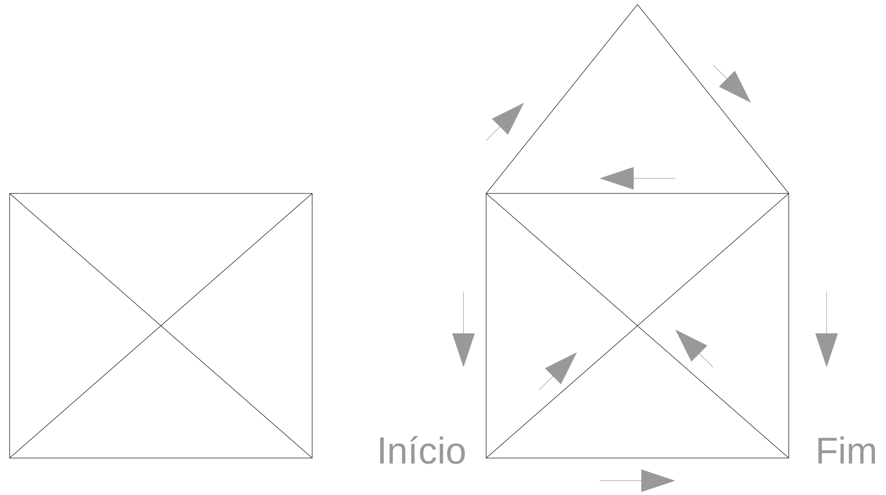


Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 168)

- O problema pede uma **trilha** (um passeio no grafo G que atravessa exatamente uma vez cada aresta) que atravessa **todas as arestas**
  - Uma **trilha euleriana**

Teoria dos Grafos

- **Grafo euleriano**
  - Uma **trilha euleriana** em G é um passeio que atravessa **todas** as arestas de G passando por **cada uma apenas uma vez**
  - Qual desses grafos tem uma trilha euleriana?



Não tem trilha euleriana

Tem trilha euleriana

Teoria dos Grafos

- **Grafo euleriano**

Fonte: https://pixabay.com/

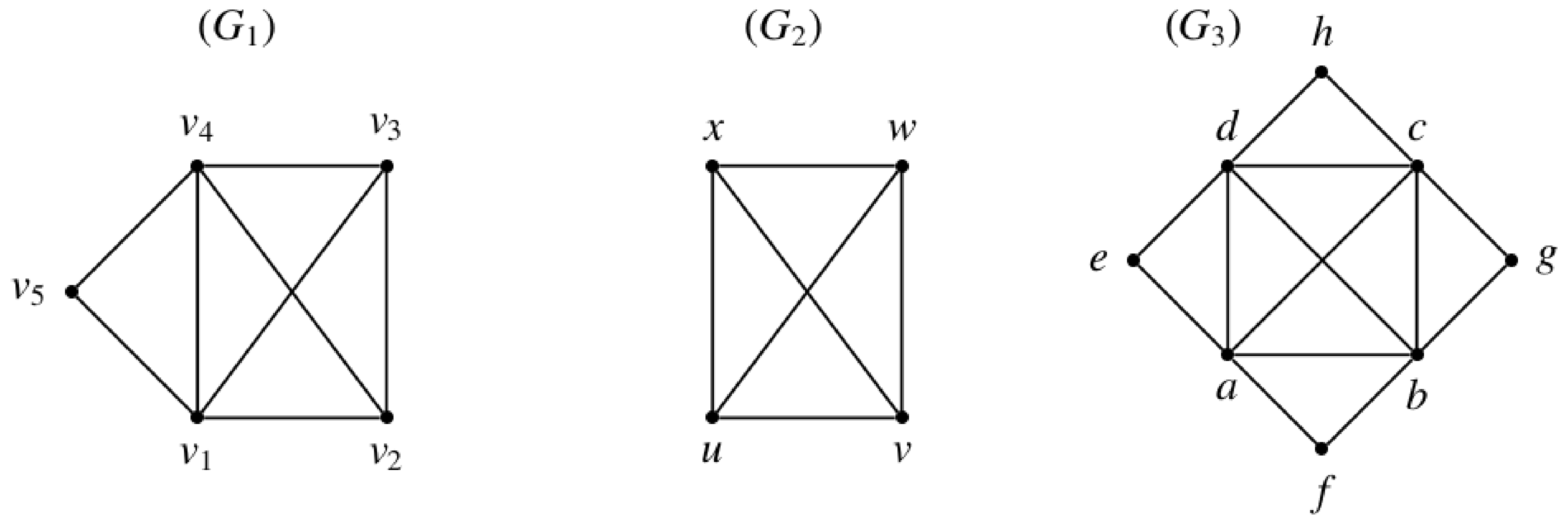
- Um grafo é **grafo euleriano** se ele contém um <u>tour euleriano</u>
  - Um **tour euleriano** (ou **circuito euleriano**) é uma <u>trilha euleriana fechada</u>

Teoria dos Grafos

- **Grafo euleriano**
  - Euler (1736) encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo qualquer G tenha um tour euleriano
    - **Teorema**
      - Um grafo conexo tem um tour euleriano sse ele não tem vértices de grau ímpar
    - **Corolário**
      - Um grafo conexo tem uma trilha euleriana sse ele tem no máximo dois vértices de grau ímpar
        - A trilha começa e termina nos vértices de grau ímpar

* Um grafo é conexo quando quaisquer dois de seus vértices estão conectados (há um caminho ligando eles)

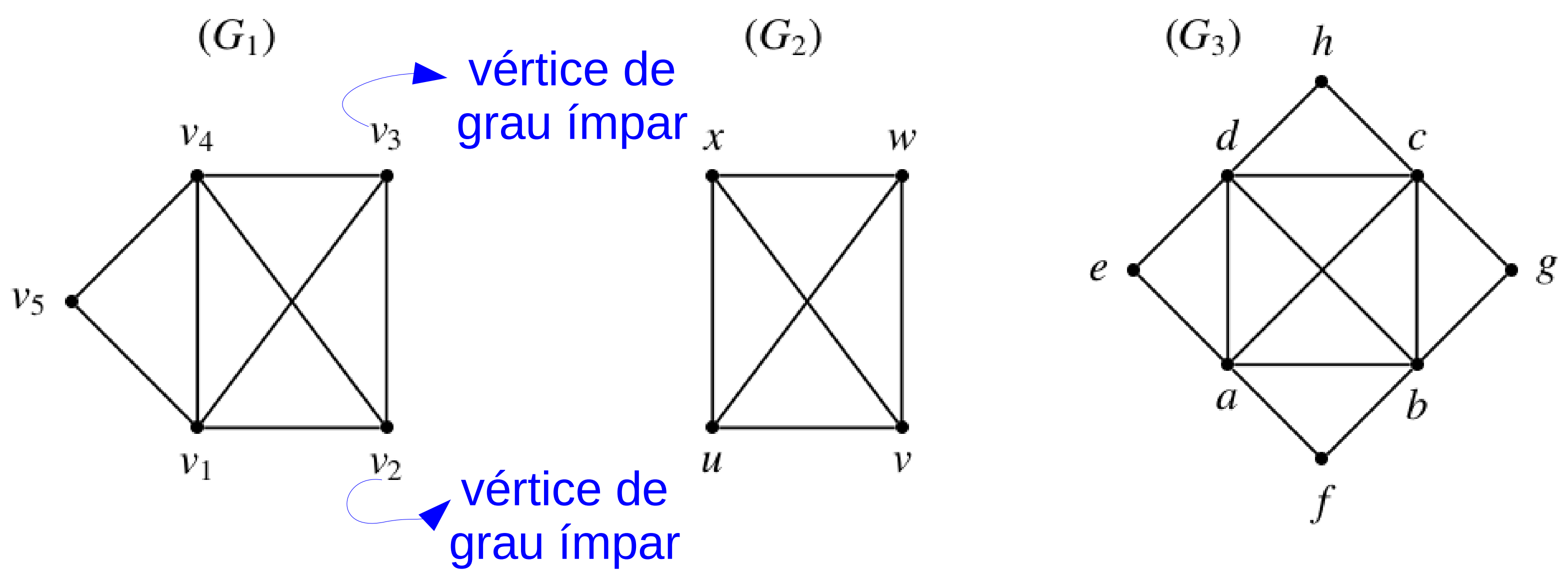
- **Grafo euleriano**
  - Verifique quais dos grafos a seguir: (1) tem trilha euleriana, (2) tem tour euleriano e (3) é grafo euleriano



Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 189)

Teoria dos Grafos

- **Grafo euleriano**
  - Verifique quais dos grafos a seguir: (1) tem trilha euleriana, (2) tem tour euleriano e (3) é grafo euleriano

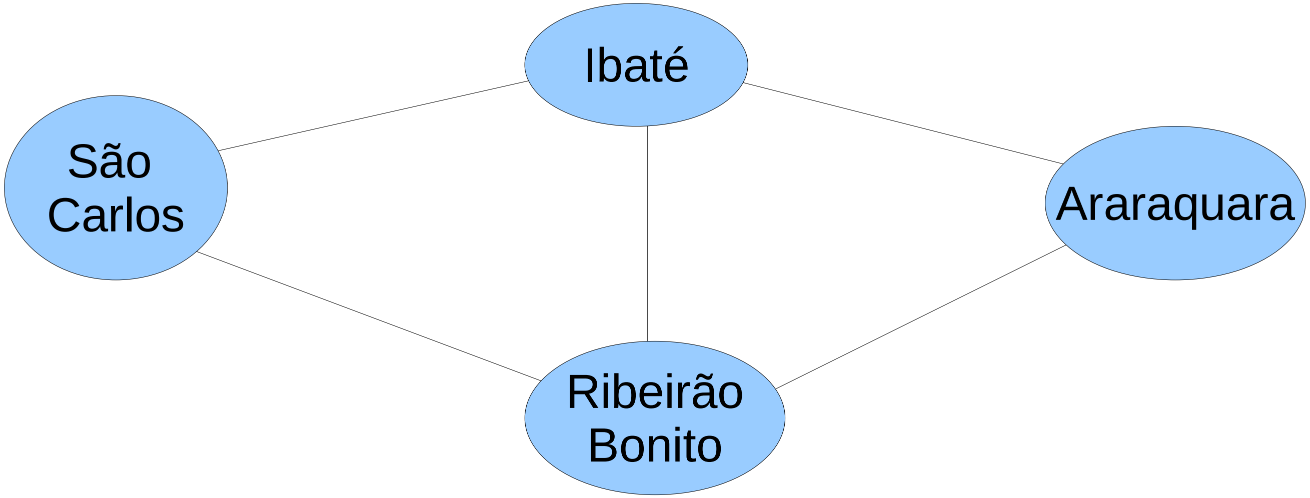


✔ Trilha euleriana	✗ Trilha euleriana	✗ Trilha euleriana
✗ Tour euleriano	✗ Tour euleriano	✗ Tour euleriano
✗ Grafo euleriano	✗ Grafo euleriano	✗ Grafo euleriano

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 189)

Teoria dos Grafos

- **Grafo hamiltoniano**
  - Está ligado a um problema bastante conhecido: o problema do caixeiro viajante (*Travelling Salesman Problem* – TSP)
    - Visitar todas as cidades uma vez, voltando para a origem, na menor distância possível



Teoria dos Grafos

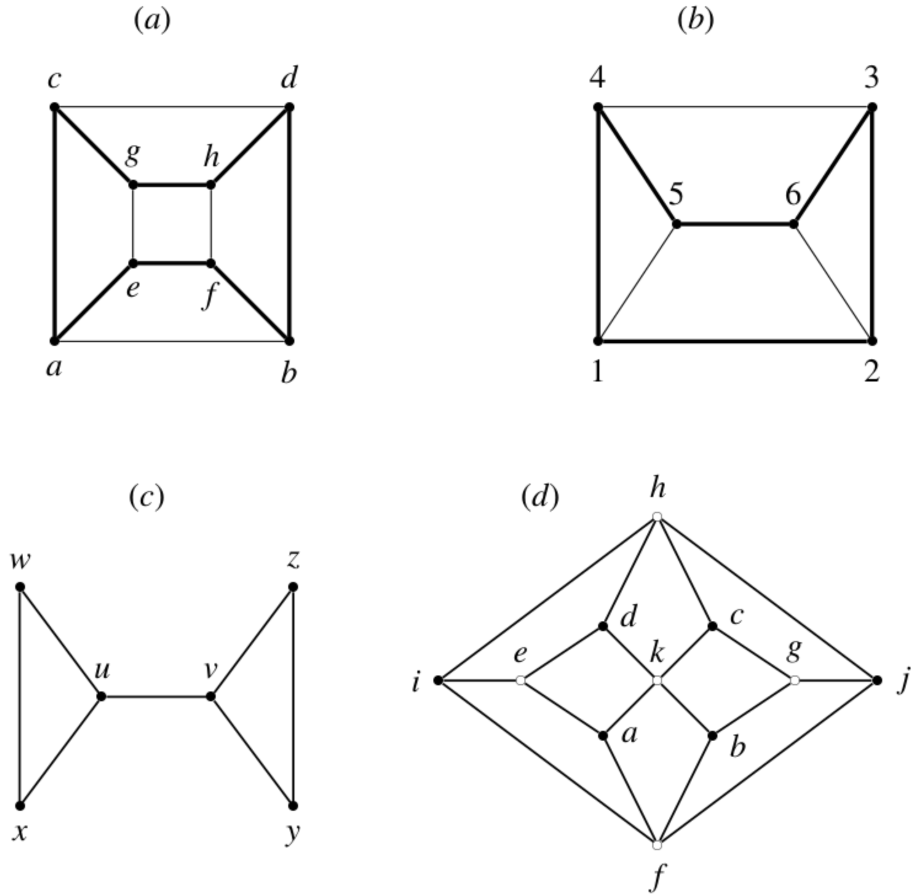
- **Grafo hamiltoniano**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um **grafo é hamiltoniano** sse ele possui um ciclo hamiltoniano
  - Um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que engloba todo vértice de G
    - Lembre-se que ciclo não permite repetição de vértices, com exceção do início e término

Teoria dos Grafos

- **Grafo hamiltoniano**
  - Exemplos



Grafos hamiltonianos com ciclos hamiltonianos em destaque

Grafos não hamiltonianos

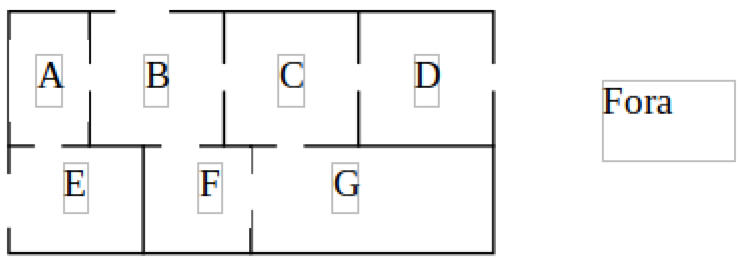
Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 191)

Teoria dos Grafos

- **Grafo hamiltoniano**
  - **Propriedades**
    - Um grafo completo K_n sempre tem um circuito hamiltoniano se $n \geq 3$
    - Uma condição suficiente (porém não necessária) para um grafo G ser hamiltoniano é que $|V| \geq 3$ e cada vértice tenha grau pelo menos $\frac{|V|}{2}$

Problema #17

- **Considere a planta de uma casa apresentada a seguir**

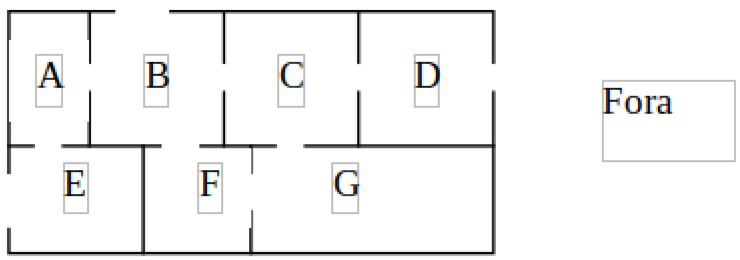


a) É possível entrar na casa, passar uma vez por todos os quartos e sair para o lado de fora?

b) É possível, partindo de fora da casa, passar uma vez por cada porta?

Problema #17

- **Considere a planta de uma casa apresentada a seguir**



a) É possível entrar na casa, passar uma vez por todos os quartos e sair para o lado de fora?

b) É possível, partindo de fora da casa, passar uma vez por cada porta?

RESPOSTA

a) Sim. A solução é um ciclo hamiltoniano que parte e chega do/no vértice ‘Fora’: Fora-D-C-G-F-B-A-E-Fora.

b) Sim. A solução é uma trilha euleriana que parte de ‘Fora’ e chega em ‘C’: Fora-B-A-E-Fora-D-C-G-F-B-C.