

Alunos: Vinícius Guimarães 802431

Vitor Enzo A. Costa 802123

① Antes de definir o emparelhamento estável, definiremos

• Rankings: cada objeto de um lado deve ter uma lista que rankeia todos os outros, isto é:

$$\forall m \in M \quad \exists r(m) = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

$$\forall w \in W \quad \exists r(w) = [m_1, m_2, \dots, m_n]$$

Será definido também um predicado ternário $P(m, w, w')$ para denotar que m prefere w a w' , ou seja, w vem antes de w' na lista $r(m)$.

Def. Emparelhamento estável

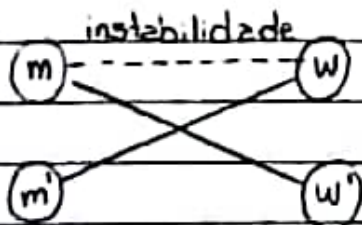
O emparelhamento S é estável se, e somente se, não existe um par (m, w) que provoque a instabilidade em S , ou seja, que pode, eventualmente, aparecer no futuro.

Dessa forma, não pode existir (m, w) pertencente a S e (m', w') pertencente a S tal que $P(m, w', w) \wedge P(w', m, m')$.

② Prova por contradição:

Vamos supor que o S retornado pelo algoritmo de Gale-Shapley não é estável, ou seja, existe uma instabilidade (m, w)

Por exemplo:



Isso implica em $P(m, w, w') \wedge P(w, m, m')$, entretanto percebe-se que se m finalizou o algoritmo com w' , significa que a última proposta de m foi para w' .

Isso significa que m propôs w antes de w' , o que só é possível se na lista de w , m' deve vir antes de m , ou seja, $P(w, m', m)$, pois caso contrário, w teria ficado com m' .

Lago, conclui-se que $P(w, m, m') \wedge P(w, m', m)$, que é falso sempre pois se um dos termos é verdade o outro não pode, também, ser verdadeiro.

\therefore Como não é possível que m prefira m a m' e m' a m ao mesmo tempo, a suposição inicial não é válida e a instabilidade não existe em S .

③ Definamos:

• best valid partner (bvp): w é o melhor parceiro válido de m se w for um parceiro válido de m e não existe w' diferente de w que seja parceiro válido de m e que m tenha preferência em w' a w . Ou seja,

$$w = \text{bvp}(m) \iff w = \text{vp}(m), \nexists w' \neq w \text{ t.q. } w' = \text{vp}(m) \text{ e } P(m, w', w)$$

Prova por contradição:

Seja S um emparelhamento estável gerado pelo algoritmo de GS, no qual m ficou com alguém diferente de $\text{bvp}(m) = w$.

Então, em algum momento, m foi rejeitado por $\text{bvp}(m) = w$ ou foi trocado por uma proposta melhor de m' . Então

$$P(w, m', m)$$

Utilizando a definição de $\text{bvp}(m)$, deve existir então um emparelhamento S' tal que $\text{bvp}(m) = w$. Então, em S' $w' = \text{bvp}(m')$ tal que $w' \neq w = \text{bvp}(m)$.

___/___/___

S T Q Q S S D

Observe que m' não foi rejeitado por ninguém quando se engejou o w , pois m foi rejeitado primeiro. Obtem-se então

$$P(m', w, w')$$

Por fim, temos $P(w, m', m) \wedge P(m', w, w')$ e $(m', w) \notin S'$, então (m', w) define uma instabilidade em S' , o que não pode ocorrer pois S' é estável.

$\therefore S$ deve obrigatoriamente associar todo m a $bvp(m)$.

BOYS	PREFERÊNCIAS	GIRLS	PREFERÊNCIAS
1	3 2 5 1 4	1	3 5 2 1 4
2	1 2 5 3 4	2	5 2 1 4 3
3	4 3 2 1 5	3	4 3 5 1 2
4	1 3 4 2 5	4	1 2 3 4 5
5	1 2 4 5 3	5	2 3 4 1 5

Considerando que os meninos propõem:

i	BOY	GIRL	Engaged	$S^0 = \emptyset$
1	1	3	YES	$S^1 = \{(1, 3)\}$
2	2	1	YES	$S^2 = \{(2, 1), (1, 3)\}$
3	3	4	YES	$S^3 = \{(2, 1), (1, 3), (3, 4)\}$
4	4	1	NO	$S^4 = \{(2, 1), (1, 3), (3, 4)\}$
5	4	3	YES	$S^5 = \{(2, 1), (4, 3), (3, 4)\}$
6	1	2	YES	$S^6 = \{(2, 1), (4, 3), (3, 4), (1, 2)\}$
7	5	1	YES	$S^7 = \{(5, 1), (4, 3), (3, 4), (1, 2)\}$
8	2	2	YES	$S^8 = \{(5, 1), (4, 3), (3, 4), (2, 2)\}$
9	1	5	YES	$S^9 = \{(5, 1), (4, 3), (3, 4), (2, 2), (1, 5)\}$

Assim, temos que o emparelhamento estável é dado por:

$$S^9 = \{(5, 1), (4, 3), (3, 4), (2, 2), (1, 5)\}$$

⑤ MEN	Preferências	WOMEN	Preferências
Amin	$S > T > U > V$	Susanne	$D > A > B > C$
Bing	$S > V > U > T$	Tana	$A > D > C > B$
Caspar	$S > U > T > V$	Ursula	$C > D > B > A$
David	$U > V > T > S$	Virginia	$A > C > D > B$

a) Homens propõem

j	MAN	WOMAN	ENGAGED	$S^0 = \emptyset$
1	A	S	YES	$S^1 = \{(A, S)\}$
2	B	S	NO	$S^2 = \{(A, S)\}$
3	B	V	YES	$S^3 = \{(B, V), (A, S)\}$
4	C	S	NO	$S^4 = \{(B, V), (A, S)\}$
5	C	U	YES	$S^5 = \{(C, U), (B, V), (A, S)\}$
6	D	U	NO	$S^6 = \{(C, U), (B, V), (A, S)\}$
7	D	V	YES	$S^7 = \{(C, U), (D, V), (A, S)\}$
8	B	U	NO	$S^8 = \{(C, U), (D, V), (A, S)\}$
9	B	T	YES	$S^9 = \{(B, T), (C, U), (D, V), (A, S)\}$

Assim, o emparelhamento estável é dado como:

$$S^9 = \{(B, T), (C, U), (D, V), (A, S)\} \text{ ou}$$

$$\{(Bing, Tana), (Caspar, Ursula), (David, Virginia), (Amin, Susanne)\}$$

b) Multuras propoim

j	WOMAN	MAN	ENGAGED	$S^0 = \emptyset$
1	S	D	YES	$S^1 = \{(S, D)\}$
2	T	A	YES	$S^2 = \{(S, D), (T, A)\}$
3	U	C	YES	$S^3 = \{(U, C), (S, D), (T, A)\}$
4	V	A	NO	$S^4 = \{(U, C), (S, D), (T, A)\}$
5	V	C	NO	$S^5 = \{(U, C), (S, D), (T, A)\}$
6	V	D	YES	$S^6 = \{(U, C), (V, D), (T, A)\}$
7	S	A	YES	$S^7 = \{(U, C), (V, D), (S, A)\}$
8	T	D	NO	$S^8 = \{(U, C), (V, D), (S, A)\}$
9	T	C	NO	$S^9 = \{(U, C), (V, D), (S, A)\}$
10	T	B	YES	$S^{10} = \{(T, B), (U, C), (V, D), (S, A)\}$

Assim, o emparelhamento total é dado por:

$$S^{10} = \{(T, B), (U, C), (V, D), (S, A)\} \text{ ou}$$

$$\{(Tara, Bingt), (Ursula, Cazen), (Virginia, David), (Susanne, Amir)\}$$