Matemática Discreta

Teoria dos Grafos

Isomorfismo
Grafo bipartido, Grafo planar
Coloração de grafos

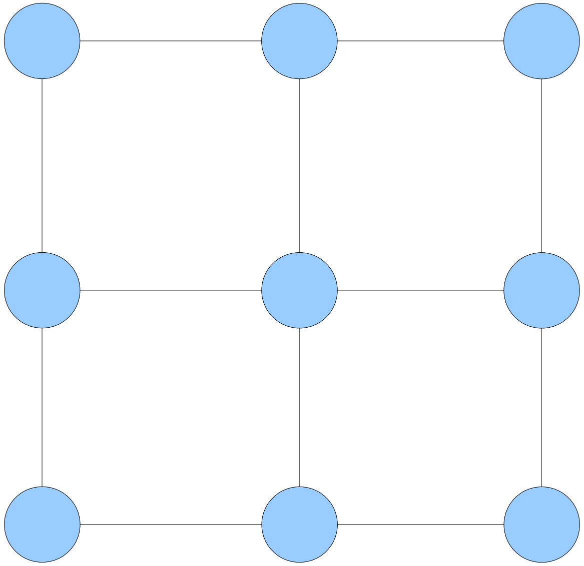
Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Teoria dos Grafos

- **Objetivos desta aula**
  - Apresentar o conceito de **isomorfismo**
  - Apresentar o que é um **grafo bipartido**
  - Apresentar o que é um **grafo planar**
  - Apresentar o conceito de **coloração de grafos**
  - Capacitar o aluno a usar esses conceitos e tipos de grafos para modelar e resolver problemas computacionais

Problema #19

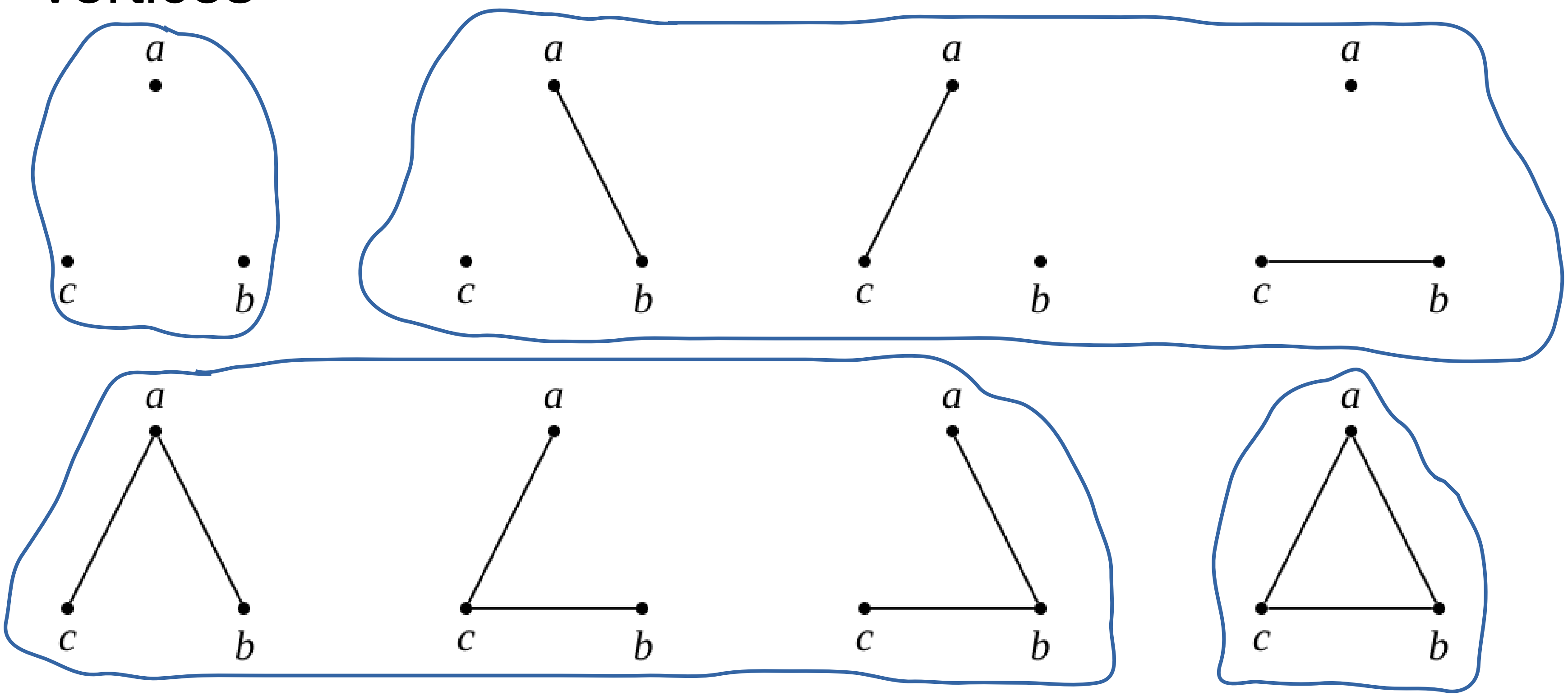
- **Diga se o grafo a seguir é bipartido**



Teoria dos Grafos

- **Isomorfismo**
  - Pegando a ideia ...
    - Desenhando todos os grafos possíveis com 3 vértices

Como poderíamos agrupá-los de acordo com a estrutura, ou seja, ignorando os rótulos dos vértices?



Teoria dos Grafos

- **Isomorfismo**
  - Todos os grafos possíveis com 3 vértices

Grafos não rotulados com três vértices

Essas são as representações genéricas dos grafos isomorfos com 3 vértices agrupados no slide anterior

Teoria dos Grafos

- **Isomorfismo**

Fonte: https://pixabay.com/

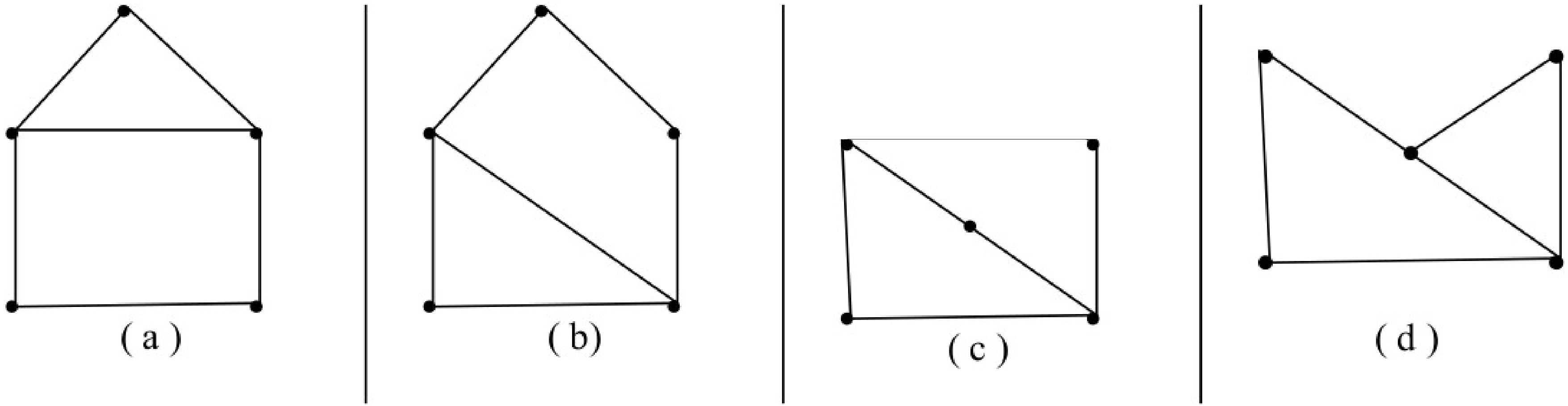
- Dois grafos G e H são **isomorfos** se existem bijeções f: V(G) → V(H) e g: A(G) → A(H) tais que
  - Um vértice *v* é extremo de uma aresta *e* no grafo G sse f(v) é extremo da aresta g(e) no grafo H

Teoria dos Grafos

- **Isomorfismo**
  - Em grafos orientados, a direção da aresta também tem que ser preservada
  - Se o grafo é simples basta existir a bijeção f que representa a adjacência dos vértices
  - Denotamos o isomorfismo como $G \cong H$
  - O isomorfismo é uma relação de equivalência em grafos

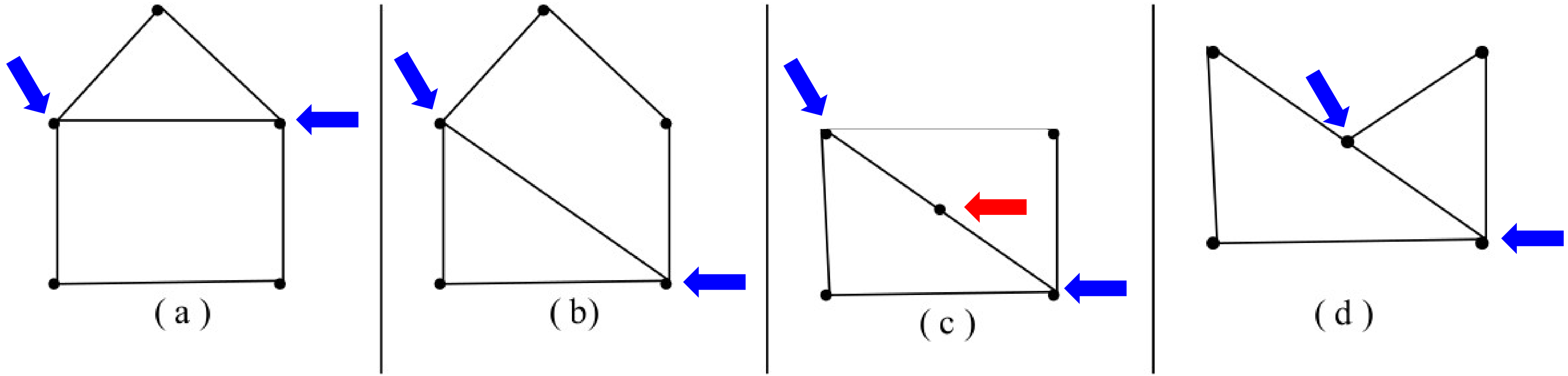
Teoria dos Grafos

- **Qual dos grafos a seguir não é isomorfo com os outros e por quê?**



Teoria dos Grafos

- **Qual dos grafos a seguir não é isomorfo com os outros e por quê?**



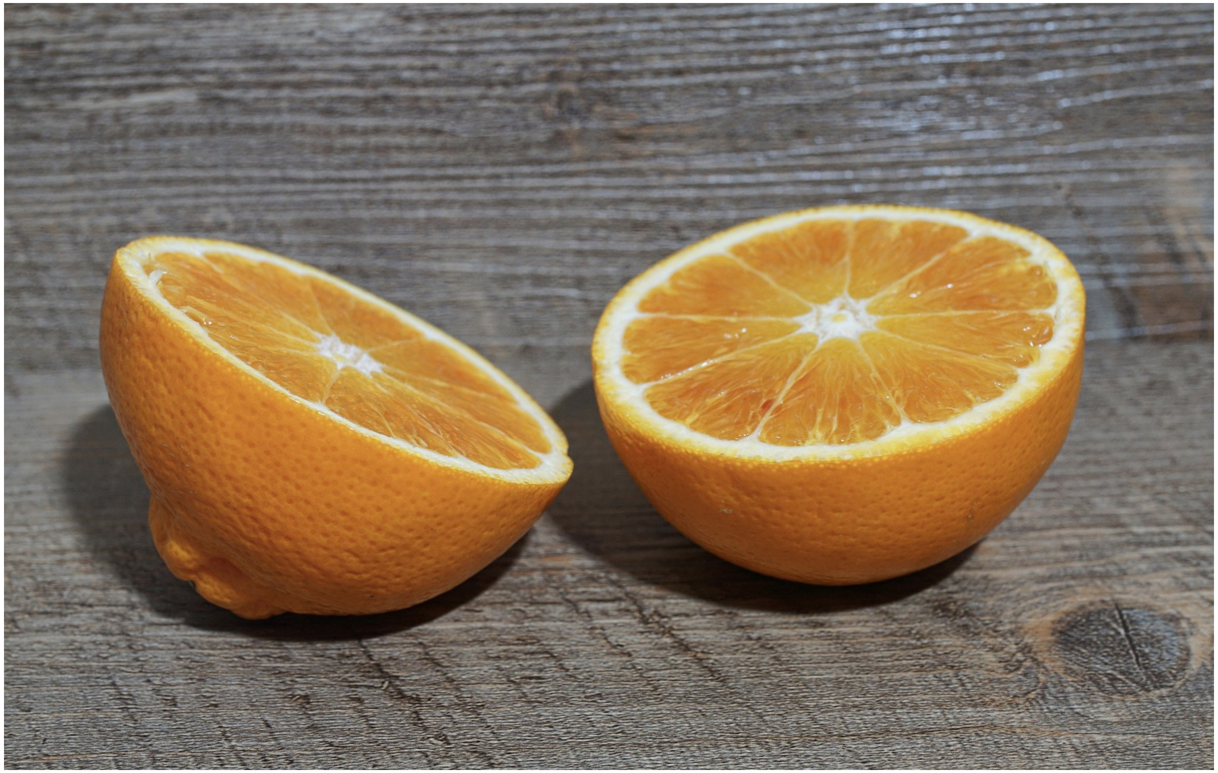
Check-list de verificação:
1. Todos tem 5 vértices e 6 arestas;
2. Nenhum deles tem arestas paralelas ou laços;
3. Todos tem 2 vértices de grau 3 e 3 vértices de grau 2;
4. Todos são conexos;
5. Todos tem 3-ciclos;

RESPOSTA

O grafo (c) pois nele os 2 nós de grau 3 não são adjacentes.

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**



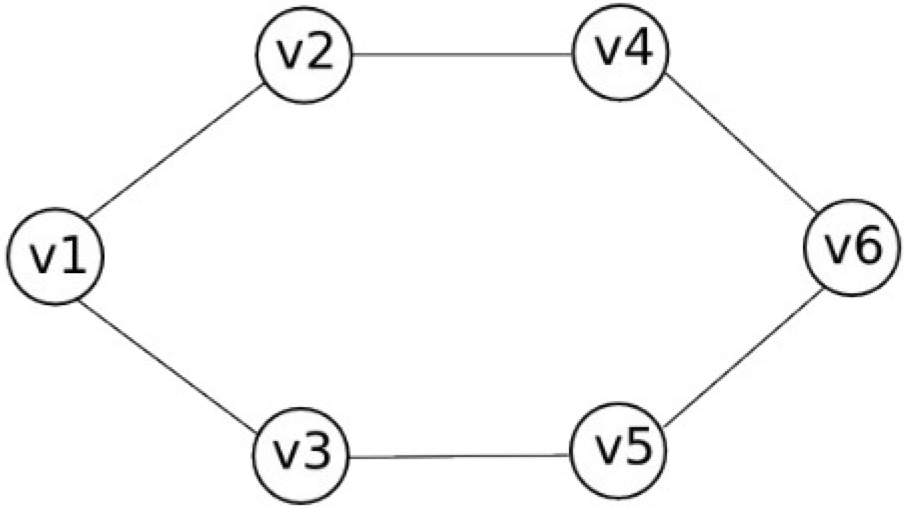
Fonte: https://pixabay.com/

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo
  - Uma bipartição de V é um par não ordenado de subconjuntos V^- e V^+ de V tais que
    a) $V^- \cup V^+ = V$
    b) $V^- \cap V^+ = \emptyset$
    c) Toda aresta do grafo tem um extremo em V^- e outro em V^+
    - Um grafo G com uma bipartição V^-, V^+ é chamado de **grafo bipartido**

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

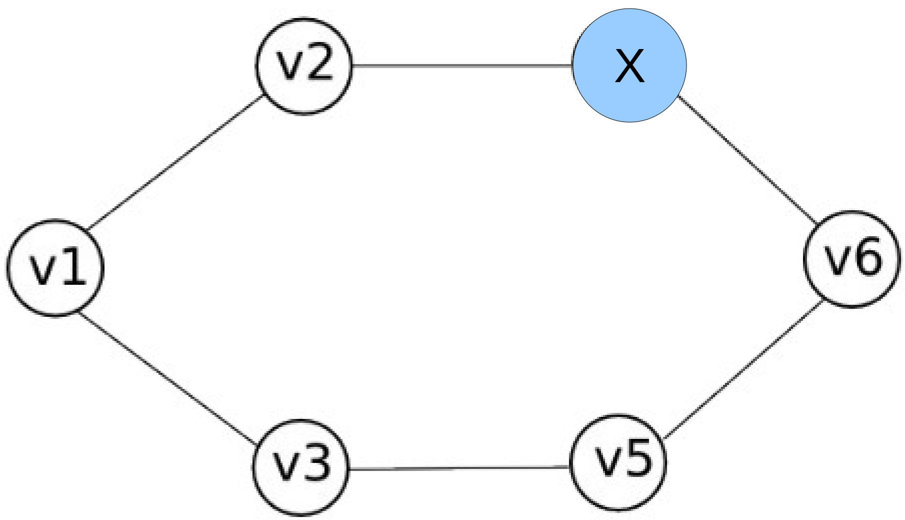


1. Escolha um vértice inicial e rotule-o como X

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

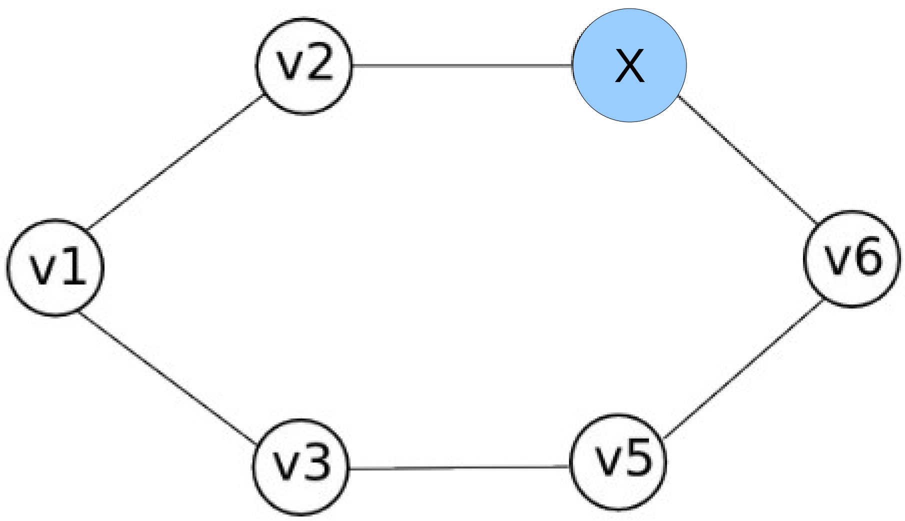


1. Escolha um vértice inicial e rotule-o como X

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

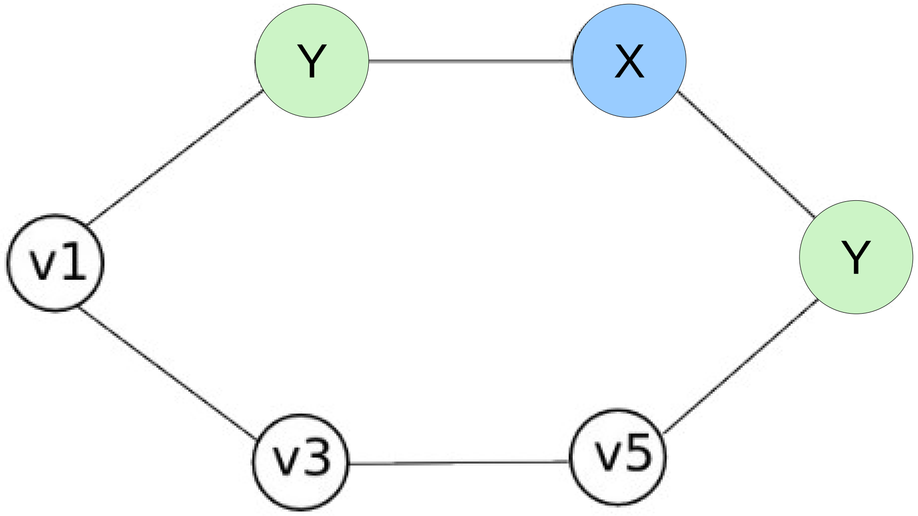


2. Para todos os vértices ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como X, rotule-os como Y

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

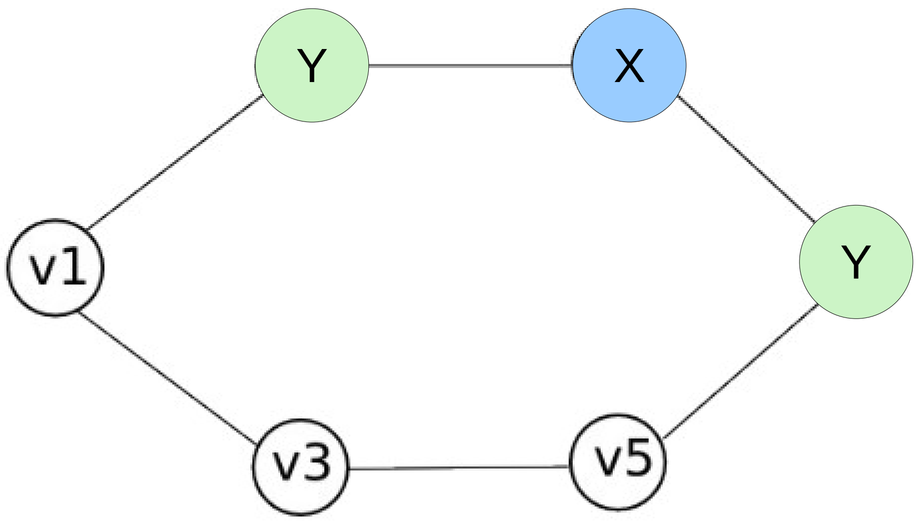


2. Para todos os vértices ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como X, rotule-os como Y

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

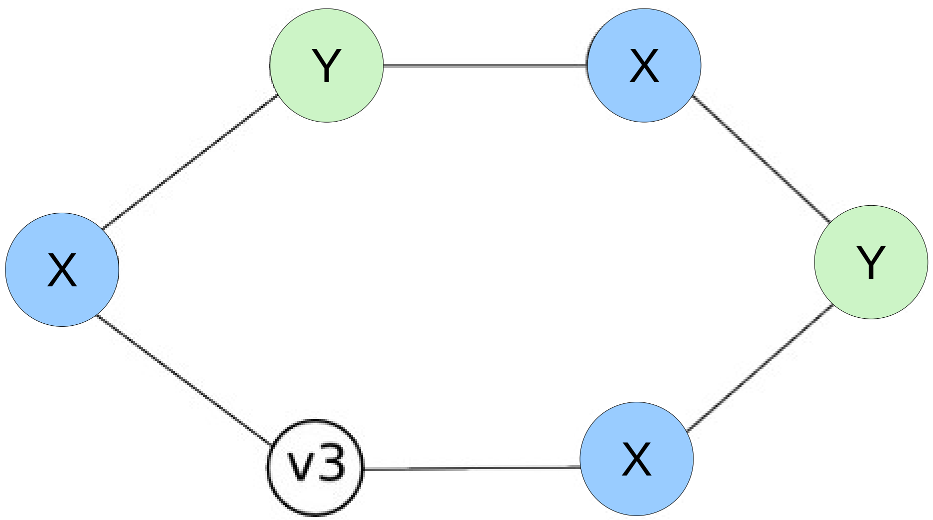


3. Para todos os vértices ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como Y, rotule-os como X

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

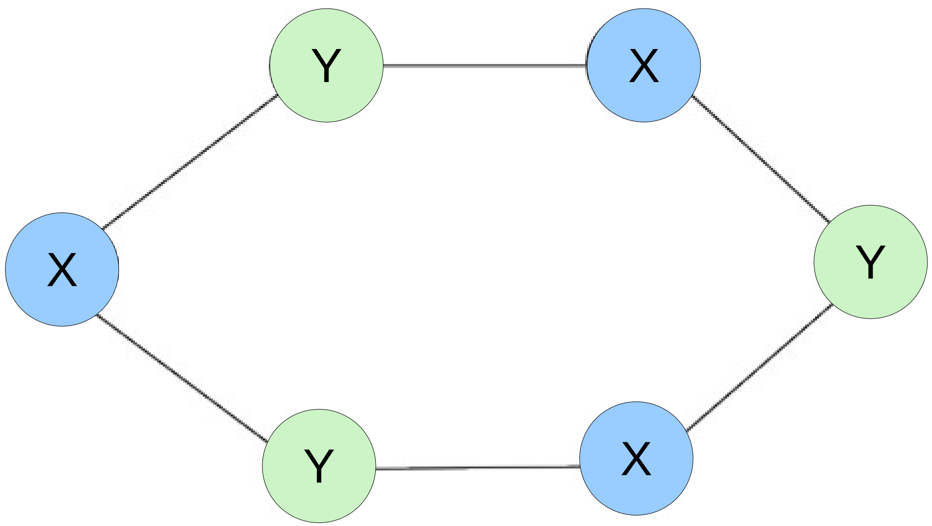
- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido



3. Para todos os vértices ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como Y, rotule-os como X

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

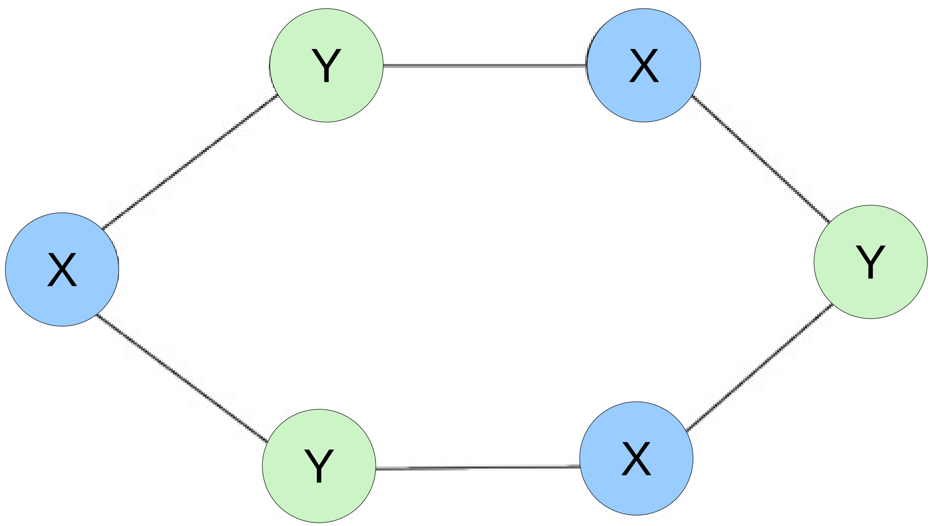


2. Para todos os vértices ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como X, rotule-os como Y

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido

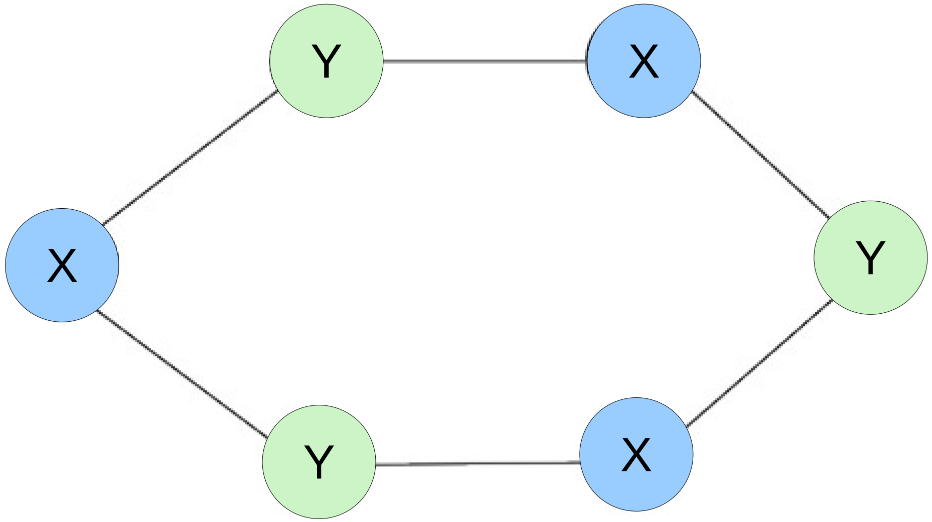


4. Pare quando todos os vértices do grafo estiverem rotulados

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido



5. Se toda aresta do grafo for do tipo (X,Y), então o grafo é bipartido. Caso contrário, o grafo não é bipartido

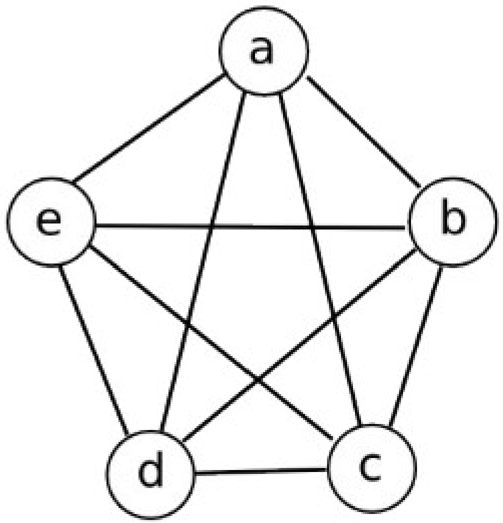
Fonte: (LEVADA, 2019, p. 3)

Teoria dos Grafos

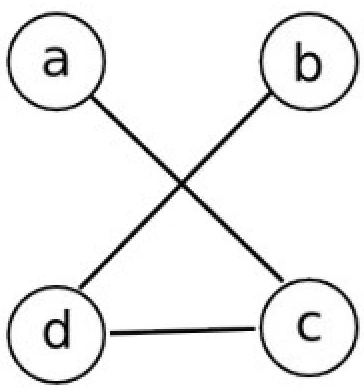
- **Grafo bipartido**
  - Algoritmo para determinar se um grafo é bipartido
    1. Escolha um vértice inicial v e rotule-o como X
    2. Para todos os vértices u ainda não rotulados e que são vizinhos de vértices rotulados como X, rotule-os como Y
    3. Para todos os vértices w ainda não rotulados e que são vizinhos a vértices rotulados como Y, rotule-os como X
    4. Pare quando todos os vértices do grafo estiverem rotulados
    5. Se toda aresta do grafo for do tipo (X,Y), então o grafo é bipartido. Caso contrário, o grafo não é bipartido

- **Grafo bipartido**
  - Verifique se os grafos abaixo são bipartidos

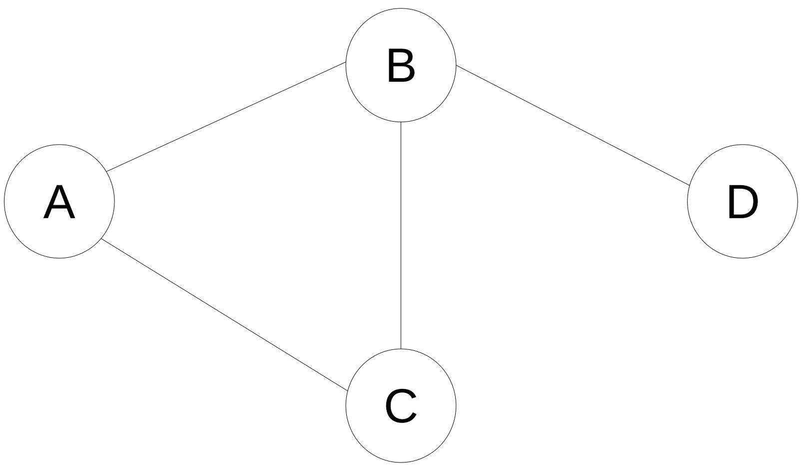
a)



b)



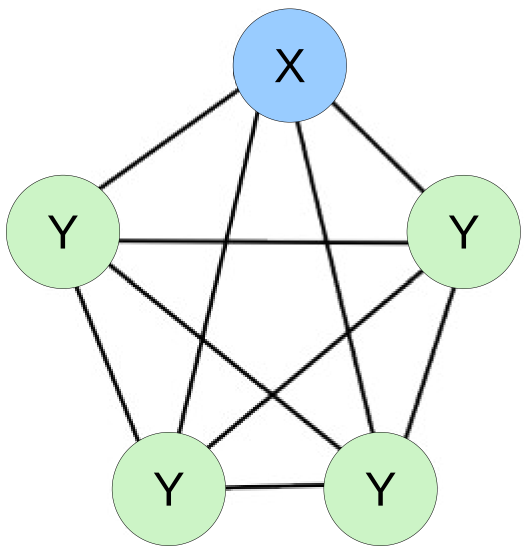
c)



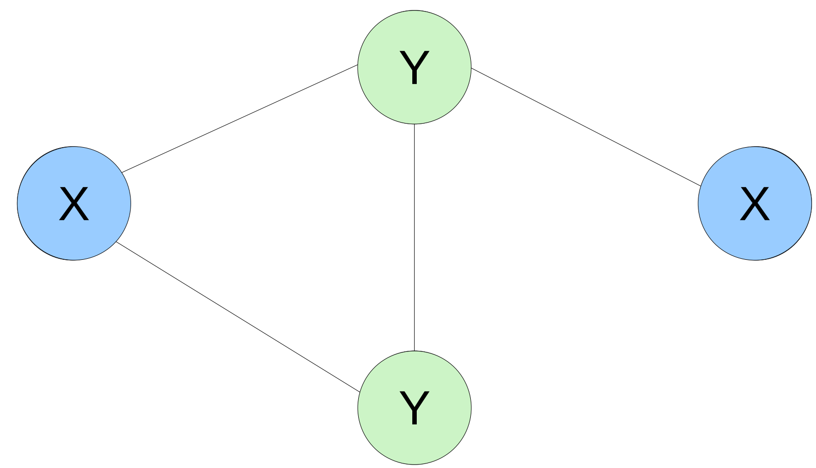
Fonte: (LEVADA, 2019, p. 4)

- **Grafo bipartido**
  - Verifique se os grafos abaixo são bipartidos

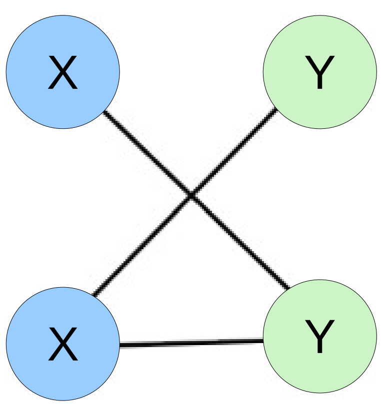
a)



c)



b)



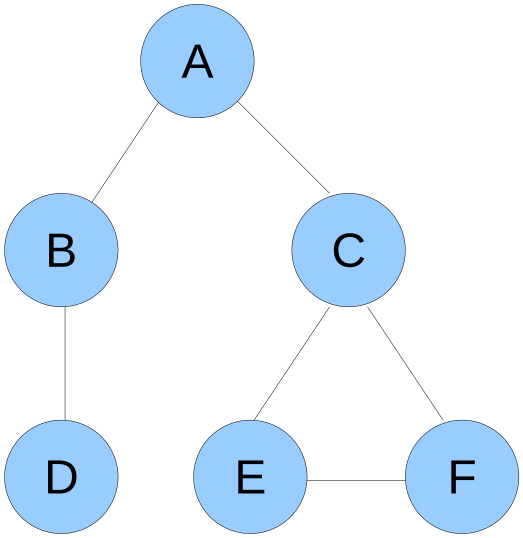
RESPOSTAS

a) Não
b) Sim
c) Não

Fonte: (LEVADA, 2019, p. 4)

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido**
  - Uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja bipartido é que ele não possua ciclos de comprimento ímpar
  - Exemplo



Não é grafo bipartido

➔ **Toda árvore é um grafo bipartido**

Teoria dos Grafos

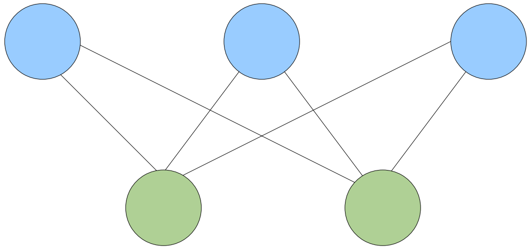
- **Grafo bipartido completo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido no qual todo vértice V^- de G é adjacente a todo vértice V^+ de G

Teoria dos Grafos

- **Grafo bipartido completo**
  - Denotado por $K_{m,n}$
    - Onde *m* é a quantidade de vértices em um conjunto (ex: V^-) e *n* é a quantidade de vértices no outro conjunto (ex: V^+)
  - Para cada par de números naturais m e n existe apenas um grafo não rotulado bipartido completo cuja bipartição é $K_{m,n}$
    - Exemplo
      - $K_{3,2}$

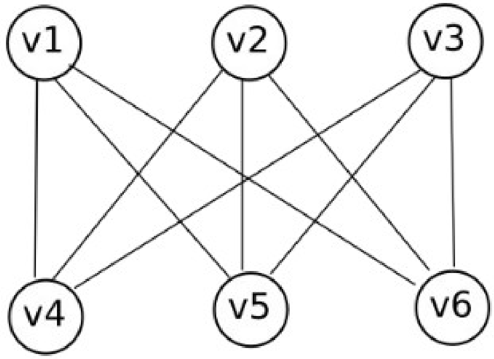


Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - Como ligar as três casas abaixo aos três serviços sem que nenhuma dessas ligações cruze qualquer outra?

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 193)

Esse problema pode ser mapeado num grafo completo bipartido $K_{3,3}$



$K_{3,3}$

Teoria dos Grafos

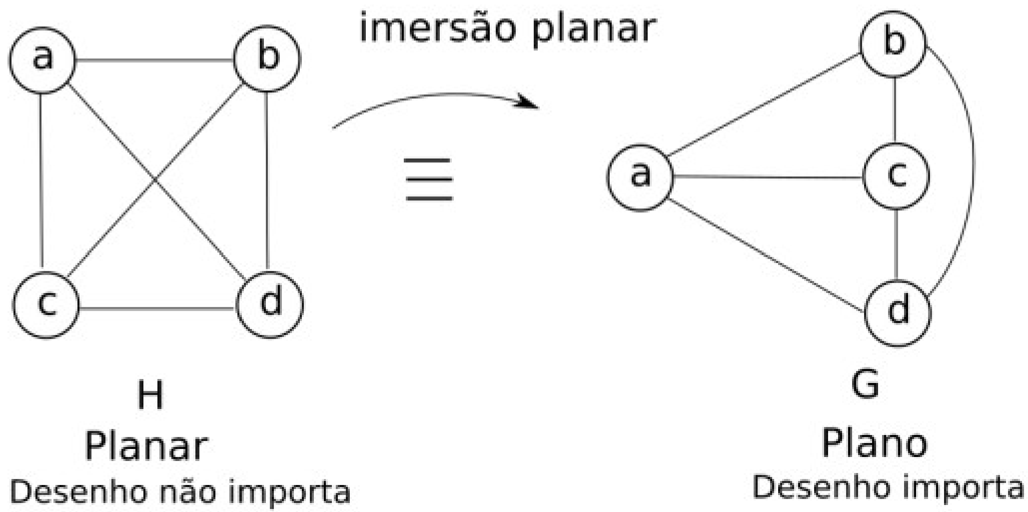
- **Grafo planar**

Fonte: https://pixabay.com/

- Um grafo G é **grafo planar** (ou plano) se ele pode ser desenhado numa superfície plana <u>sem que haja cruzamento de arestas</u>

Teoria dos Grafos

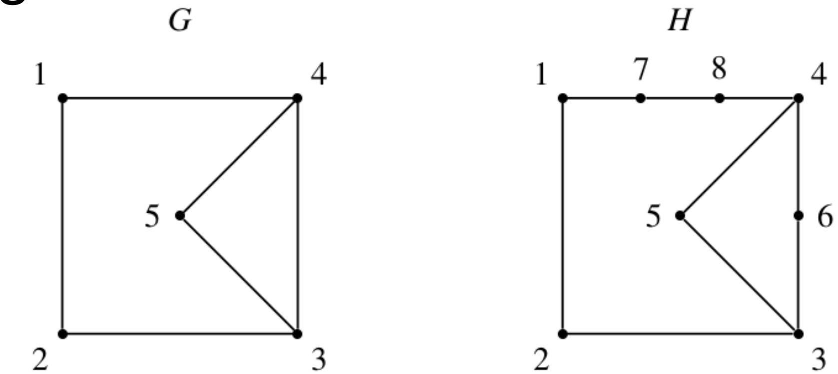
- **Grafo planar**
  - Se o grafo G é planar, então ele é isomorfo a um grafo plano



Fonte: (Notas de aula do Prof. Alexandre Levada – Teoria dos Grafos, p. 80)

Teoria dos Grafos

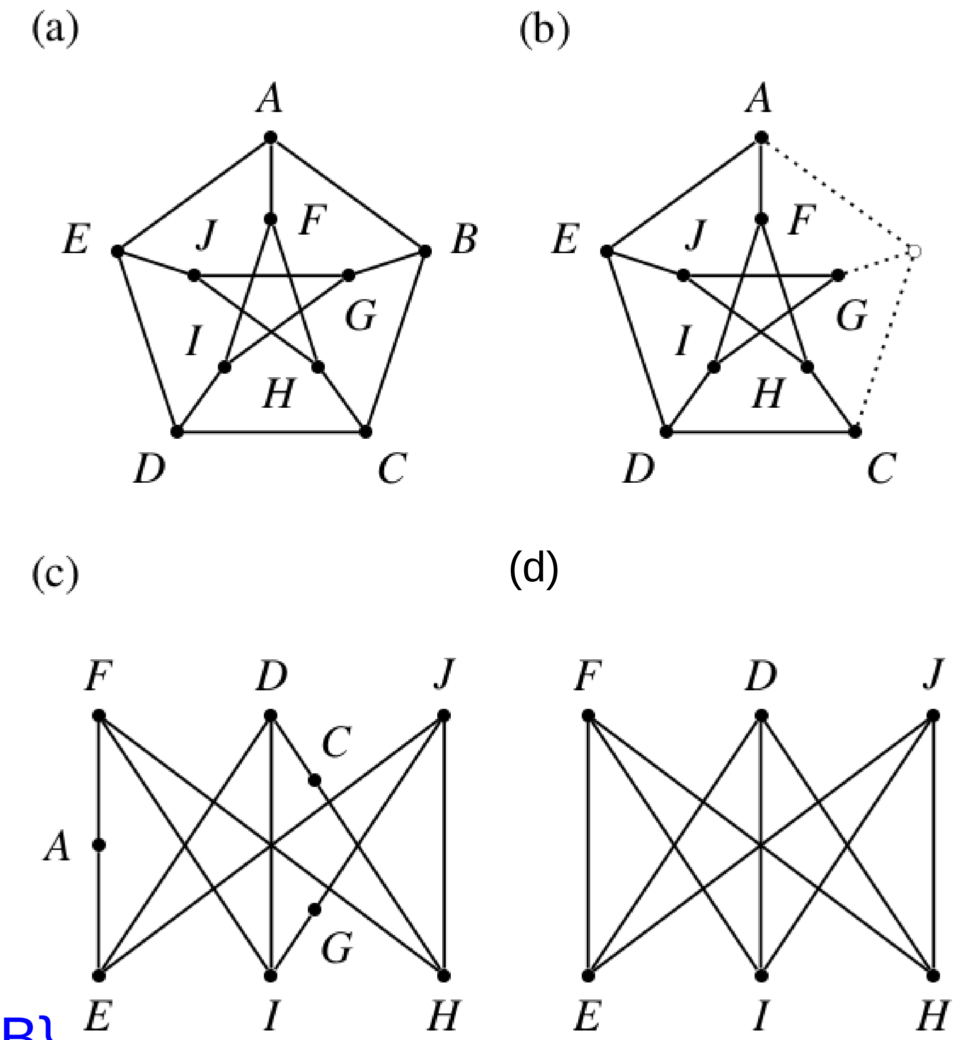
- **Grafo planar**
  - **Teorema de Kuratowski**
    - Em 1930 o matemático polonês Kasimierz Kuratowski (1896-1980) descobriu uma maneira de caracterizar os grafos planares
    - Subdivisão de um grafo
      - Dizemos que um grafo H é subdivisão de um grafo G sse H pode ser obtido de G inserindo-se zero ou mais vértices novos ao longo de cada aresta
      - Exemplo



Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 195)

Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - **Teorema de Kuratowski**
    - Um grafo G é planar sse ele não contém um subgrafo que seja isomorfo a uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$



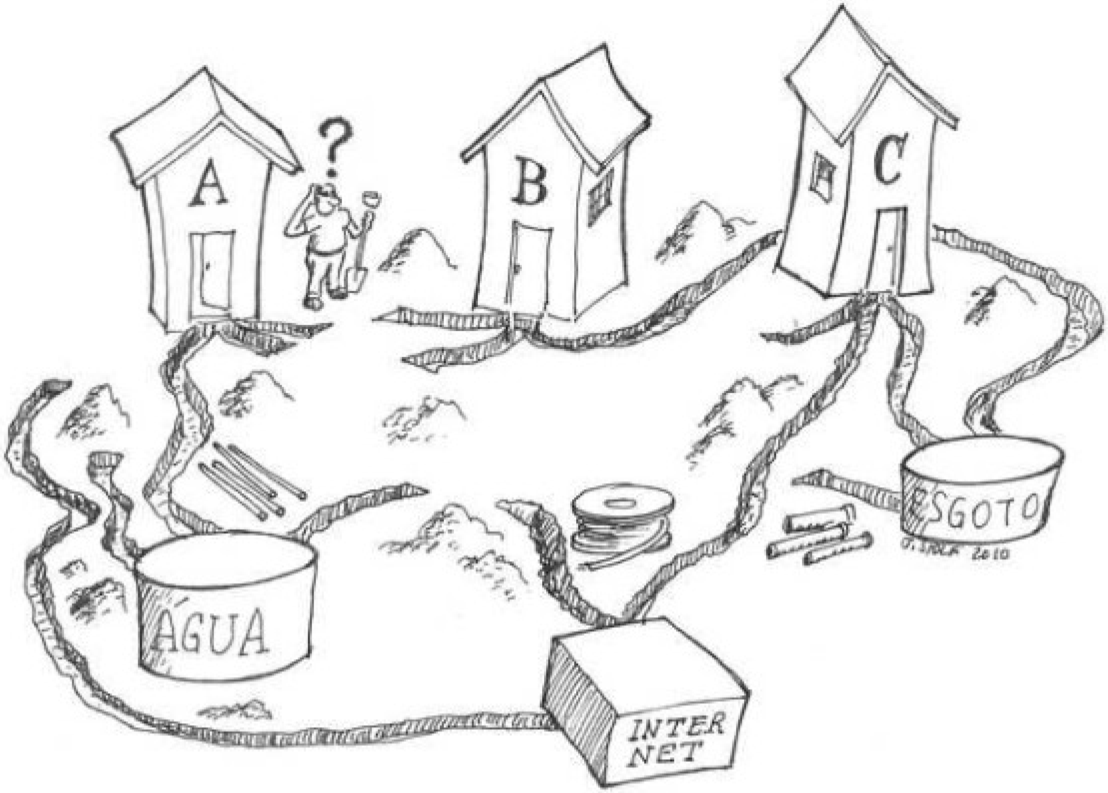
(a) Grafo G (grafo de Petersen),
(b) ≅ (c) é subgrafo de G obtido após a remoção do vértice B,
(d) é um grafo $K_{3,3}$ que subdividido dá G – {B}

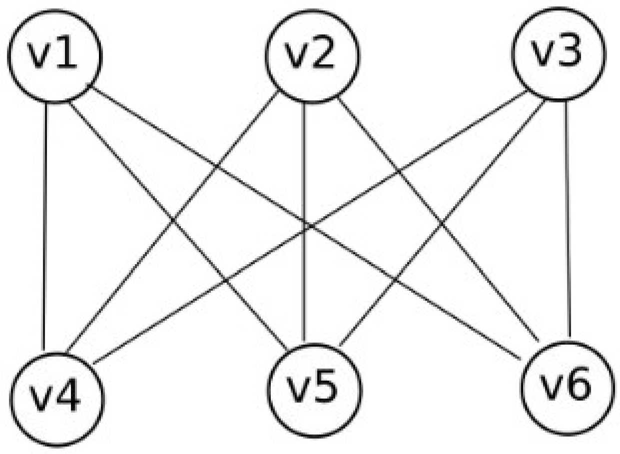
Logo, G não é planar

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 196)

Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - Esse problema pode ser mapeado num grafo completo bipartido $K_{3,3}$





$K_{3,3}$

Não é grafo planar

Teoria dos Grafos

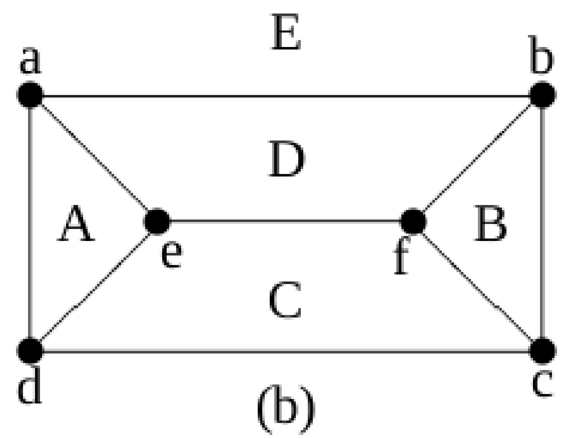
- **Grafo planar**
  - **Face**

Fonte: https://pixabay.com/

- Uma **face** de um grafo planar é cada uma das <u>regiões</u> separadas pelos desenhos dos vértices e arestas

Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - **Face**
    - Exemplo

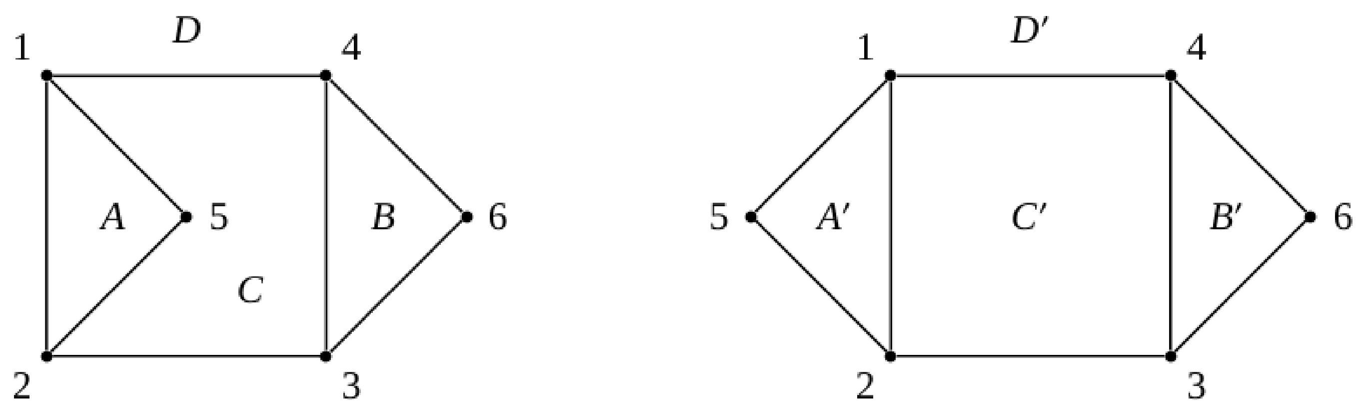


Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 193)

- Nessa figura há 5 faces: A, B, C, D e E
- A face externa E tem tamanho infinito, as demais faces têm tamanho finito

Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - Representações possíveis
    - Um mesmo grafo planar G pode ter várias representações planares diferentes
    - Com quantidades diferentes de lados para as faces
    - Exemplo

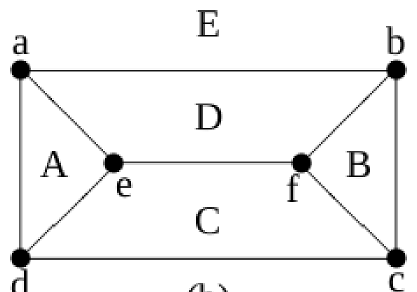


- A, B, C, D tem 3, 3, 5 e 5 lados
- A’, B’, C’, D’ tem 3, 3, 4 e 6 lados

Fonte: (GOMIDE; STOLFI, 2011, p. 194)

Teoria dos Grafos

- **Grafo planar**
  - **Fórmula de Euler**
    - Seja Ĝ uma representação planar de um grafo simples e conexo
    - O número de faces de Ĝ é |A| – |V| + 2
    - ➔ No exemplo anterior
      - ➔ |V| = 6, |A| = 9, então 9 – 6 + 2 = 5 faces



(b)

  - **Corolário**
    - Seja G um grafo planar, simples e conexo, com pelo menos três vértices
    - Então |A| ≤ 3 |V| – 6

Teoria dos Grafos

- **Coloração de grafo**
  - Em um mapa, com quantas cores podemos pintar os estados de tal forma que estados vizinhos tenham cores diferentes a fim de tornar as fronteiras mais visíveis?

Fonte: http://abides.org.br/conjunto-de-ongs-lanca-manifesto-rechacando-medidas-da-agenda-brasil/mapa-brasil/

- **Coloração de grafo**

Fonte: https://pixabay.com/

- Atribuir uma **cor** para cada **vértice** de um grafo de tal forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes
  - Fazer isso usando o menor número possível de cores

Teoria dos Grafos

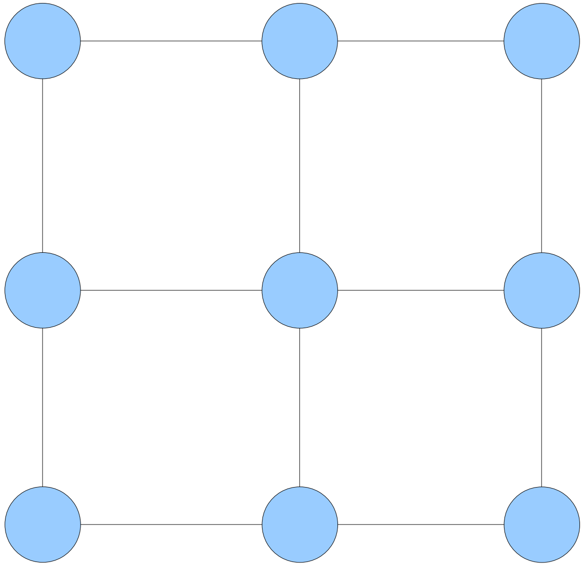
- **Coloração de grafo**
  - **K-coloração**
    - Uma k-coloração de um grafo simples G é uma atribuição de k cores aos vértices de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor
  - **Número cromático**
    - O número cromático de G é o menor número k de cores tal que G tem uma k-coloração
    - ➔ Denotado por $\chi(G)$

Teoria dos Grafos

- **Coloração de grafo**
  - **Propriedades interessantes**
    - O número cromático de G é 2 sse G é bipartido
    - O número cromático do grafo completo K_n é n
  - **Teoremas interessantes**
    - O número cromático de um grafo planar é no máximo 4
    - O número cromático de um grafo simples G com Δ sendo o maior dos graus de seus vértices é no máximo Δ+1

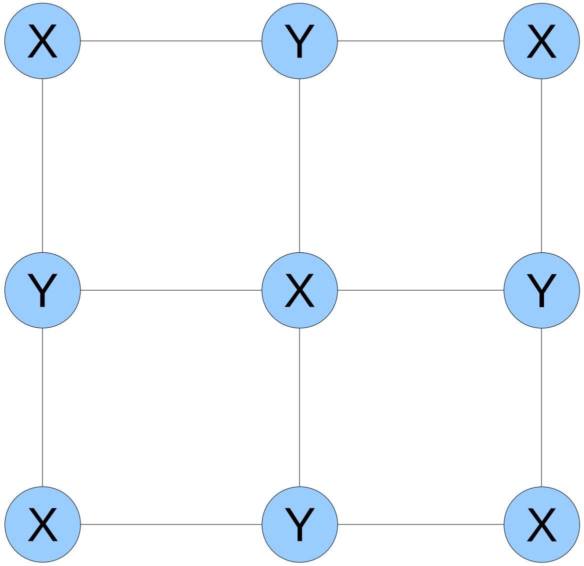
Problema #19

- **Diga se o grafo a seguir é bipartido**



Problema #19

- **Diga se o grafo a seguir é bipartido**



RESPOSTA

SIM, é um grafo bipartido