Álgebra Linear - Resumo

Matheus Barbosa Souza

Determinando o cofator de uma matriz:

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar o cofator associado ao elemento a12.

Pela definição temos:

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12}$$

Calculando o menor principal (menor complementar) D12, temos:

O elemento a12 é o número 5 da matriz A, vamos eliminar a sua linha e a sua coluna, obtendo o menor principal a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \det(A')$$
$$D_{12} = (4.2) - (4.6)$$
$$D_{12} = 8 - 24$$
$$D_{12} - 16$$

Substituído o menor principal D12 na definição temos:

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-16)$$
$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{3} \cdot (-16)$$
$$\tilde{a}_{12} = (-1).(-16)$$
$$\tilde{a}_{12} = 16$$

Portanto o cofator de a12, é:

ã12 = 16

Matriz de cofatores:

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema de Laplace:

Para calcular os determinantes, devemos seguir os seguintes passos:

1. Selecionar uma fila (linha ou coluna), dando preferência a fila que contenha a maior quantidade de elementos igual a zero, pois torna os cálculos mais simples;
2. Somar os produtos dos números da fila selecionada pelos seus respectivos cofatores

Exemplo:

Encontre o determinante da matriz B, indicada abaixo.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos selecionar a linha 1, já que nela há um elemento igual a zero.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

O determinante será encontrado fazendo:

$$D = \Sigma\, a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$D = a_{\underset{\text{Linha 1}}{1}\underset{\text{Coluna 1}}{1}} \cdot A_{11} + a_{\underset{\text{Linha 1}}{1}\underset{\text{Coluna 2}}{2}} \cdot A_{12} + a_{\underset{\text{Linha 1}}{1}\underset{\text{Coluna 3}}{3}} \cdot A_{13} + a_{\underset{\text{Linha 1}}{1}\underset{\text{Coluna 4}}{4}} \cdot A_{14}$$

$$D = 4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

A partir daqui, como zero multiplicado por qualquer número é zero, o cálculo fica mais simples, pois neste caso a14 . A14 não precisa ser calculado.

Vamos então calcular cada cofator:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.41 = 41$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.7 = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-27) = -27$$

Substituindo os valores encontrados na expressão do determinante, temos:

D = 4 . 41 + 5 . (-7) + (-3) . (-27) = 164 - 35 + 81 = 210

Chegamos ao resultado 210, que é o determinante dessa matriz 4x4 ou matriz de 4.ª ordem.

Matriz oposta:

Dada a matriz C de ordem 3x2.

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -6 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

A matriz oposta a C será:

$$-C = \begin{Vmatrix} -1 & +8 \\ -2 & +6 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$$

Matriz Transposta:

Dada uma matriz C de ordem 3 x 2.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -6 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Invertendo os elementos da linha pelos da coluna e vice versa teremos a transposta de C, que será indicada por Ct:

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Matriz Inversa:

Encontre a inversa da matriz abaixo de ordem 3x3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Antes de mais nada, devemos lembrar que A . A-1 = I (A matriz multiplicada por sua inversa resultará na matriz identidade In).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplica-se cada elemento da primeira linha da primeira matriz por cada coluna da segunda matriz.

Por conseguinte, multiplica-se os elementos da segunda linha da primeira matriz pelas colunas da segunda.

E por fim, a terceira linha da primeira com as colunas da segunda:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a+3d+g & b+3e+h & c+3f+i \\ a+2d & b+2e & c+2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a equivalência dos elementos com a matriz identidade, podemos descobrir os valores de:

a = 1
b = 0
c = 0

Sabendo esses valores, podemos calcular as outras incógnitas da matriz. Na terceira linha e primeira coluna da primeira matriz temos que a + 2d = 0. Portanto, vamos começar por encontrar o valor de d, pela substituição dos valores encontrados:

1 + 2d = 0
2d = -1
d = -1/2

Da mesma maneira, na terceira linha e segunda coluna podemos encontrar o valor de e:

b + 2e = 0
0 + 2e = 0
2e = 0
e = 0/2
e = 0

Continuando, temos na terceira linha da terceira coluna: c + 2f. Note que segunda a matriz identidade dessa equação não é igual a zero, mas igual a 1.

c + 2f = 1
0 + 2f = 1
2f = 1
f = ½

Passando para a segunda linha e a primeira coluna vamos encontrar o valor de g:

a + 3d + g = 0
1 + 3. (-1/2) + g = 0

1 – 3/2 + g = 0
g = -1 + 3/2
g = ½

Na segunda linha e segunda coluna, podemos encontrar o valor de h:

b + 3e + h = 1
0 + 3 . 0 + h = 1
h = 1

Por fim, vamos encontrar o valor de i pela equação da segunda linha e terceira coluna:

c + 3f + i = 0
0 + 3 (1/2) + i = 0
3/2 + i = 0
i = 3/2

Depois de descobertos todos os valores das incógnitas, podemos encontrar todos os elementos que compõem a matriz inversa de A:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Escalonamento:

Fórmula geral: L2 - L1*n

Onde n é um número natural.