Chapitre 2. Espérances et théorèmes limites

Prof. REMITA Mohamed Riad

National School of Artificial Intelligence.

2023-2024

Variables aléatoires indépendantes

Les v.a. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes si pour tout $B_1, B_2, \cdots, B_n \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(X_1 \in B_1 \cap \cdots \cap X_n \in B_n\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \in B_1\right) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in B_n\right).$$

Proposition Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des v.a. indépendantes, alors

1. Les v.a. $f_1\left(X_1\right), f_2\left(X_2\right), \cdots, f_n\left(X_n\right)$ sont indépendantes pour toutes fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n$.
2. Si les espérances sont bien définies, alors on a
$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdot \cdot X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \cdot \cdot \mathbb{E}(X_n).$$
3. Si les variances sont bien définies, alors on a $Cov\left(X_i, X_j\right) = 0, \forall i \neq j$, d'où
$$Var\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) = Var\left(X_1\right) + Var\left(X_2\right) + \cdots + Var\left(X_n\right).$$

Propriétés de l'espérance

Definition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{P}$ une propriété susceptible ou non d'être vérifiée par tout $\omega \in \Omega$. On dit que $\mathcal{P}$ est vraie **presque sûrement (ps),** s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathcal{P}$ est vraie pour tous les $\omega \in \overline{A}$.

Theorem

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a les propriétés

- $\mathbb{E}[X]$ *finie si et seulement si* $\mathbb{E}[|X|]$ *finie;*
- $|X| \leq Y$ *et* $\mathbb{E}[Y]$ *finie entraînent* $\mathbb{E}[X]$ *finie;*
- $-\infty < a \leq X \leq b < \infty \Longrightarrow a \leq \mathbb{E}[X] \leq b;$
- $X = a$ *p.s.* $\Longrightarrow \mathbb{E}[X] = a.$
- $\mathbb{E}[X]$ *finie* $\Longrightarrow |\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.

Propriétés de l'espérance

Theorem

Soient X *et* Y *deux v.a. définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Si* $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$ *et* $\mathbb{E}\left[|Y|\right] < \infty$, *on a les propriétés :*

A. *Linéarité*

- $\mathbb{E}\left[X + Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right]$;
- $\mathbb{E}\left[\lambda X\right] = \lambda \mathbb{E}\left[X\right], (\lambda \in \mathbb{R})$

B. *Monotonie*

- $X \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X\right] \geq 0$;
- $X \geq Y \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X\right] \geq \mathbb{E}\left[Y\right]$;
- $X = Y$ *p.s.* $\Longrightarrow \mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[Y\right]$;

C. *Indépendance. Si* X *et* Y *sont indépendantes, alors* $\mathbb{E}\left[XY\right]$ *est finie et l'on a* $\mathbb{E}\left[XY\right] = \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

Propriétés de l'espérance

Definitions

Pour tout $r > 0$, on définie, S'il existe, le moment d'ordre r par

$$m_r = \mathbb{E}(X^r)$$

et le moment centré d'ordre r par

$$\mu_r = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^r\right].$$

Propriété. 1. Pour toute v.a. X, la v.a. $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est centrée $(\mathbb{E}[X] = 0)$ et de variance unité $(Var(X) = 1)$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_A]$.

Propriétés de l'espérance

Proposition (Inégalité de Markov)
Soit X une v.a. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$

et plus généralement, pour tout $a > 0$ et $r > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{a^r}.$$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une v.a. Pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var\,(X)}{a^2}.$$

Convergences

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. sur le même espace probabilisé.

1. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable X, noté $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si
$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$
2. Soit F_n les fonctions de répartitions de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Supposons qu'il existe une v.a. Y ayant pour fonction de répartition F. On dit que (X_n) converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si
$$\lim_{n\to+\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0.$$
3. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers la v.a. X, noté $X_n \xrightarrow{p.s} X$, si
$$\mathbb{P}(\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}) = 1.$$

Convergences

4. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne d'ordre r $(r \geq 1)$ vers la variable X, noté $X_n \xrightarrow{r} X$, si $\mathbb{E}\left[|X_n|^r\right] < \infty$ pour tout n et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^r\right] = 0.$$

Remarques. 1. Si $X_n \xrightarrow{1} X$, on dit que X_n converge en moyenne.
2. Si $X_n \xrightarrow{2} X$, on dit que X_n converge en moyenne quadratique.

Theorem

Les implications suivantes sont vérifiées

$$\begin{array}{ccccccc}
X_n \xrightarrow{p.s} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X & \Longleftarrow & X_n \xrightarrow{s} X & \overset{1\leq s<r}{\Longleftarrow} & X_n \xrightarrow{r} X \\
 & & \Downarrow & & & & \\
 & & X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X & & & &
\end{array}$$