Exemples de convergence in loi

Approximation d'une loi hypergeometrique par une loi binomiale
La loi hypergeometrique peut être approximée par une loi binomiale dès que la taille N de la population est grand comparé à la taille n de l'échantillon.

Exemples de convergence in loi

Approximation d'une loi hypergeometrique par une loi binomiale
La loi hypergeometrique peut être approximée par une loi binomiale dès que la taille N de la population est grand comparé à la taille n de l'échantillon.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
Si n est grand et p assez petit (en pratique si $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ avec $np \leq 10$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np), (\lambda = np)$.

Exemples de convergence in loi

Approximation d'une loi hypergeometrique par une loi binomiale
La loi hypergeometrique peut être approximée par une loi binomiale dès que la taille N de la population est grand comparé à la taille n de l'échantillon.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
Si n est grand et p assez petit (en pratique si $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ avec $np \leq 10$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np), (\lambda = np)$.

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale
Si $\lambda > 20$ on peut remplacer la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Exemples de convergence in loi

Approximation d'une loi hypergeometrique par une loi binomiale
La loi hypergeometrique peut être approximée par une loi binomiale dès que la taille N de la population est grand comparé à la taille n de l'échantillon.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson
Si n est grand et p assez petit (en pratique si $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ avec $np \leq 10$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$, $(\lambda = np)$.

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale
Si $\lambda > 20$ on peut remplacer la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Si n est grand et p n'est ni proche de 0 ni de 1 (en pratique si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

La loi des grands nombres

La loi faible des grands nombres

Theorem

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite v.a. indépendantes, identiquement ditribuées (i.i.d) d'espérance m et de variance σ^2. On définit la v.a. $\overline{X}_n$ appelée moyenne empirique, par $\overline{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - m\right| < \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La loi des grands nombres

La loi forte des grands nombres

Theorem

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite v.a. indépendantes, identiquement ditribuées (i.i.d) d'espérance m et de variance σ^2. Nous avons la loi forte des grands nombres quand la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ converge presque surement vers m.

La loi des grands nombres

La loi forte des grands nombres

Theorem

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite v.a. indépendantes, identiquement ditribuées (i.i.d) d'espérance m et de variance σ^2. Nous avons la loi forte des grands nombres quand la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ converge presque surement vers m.

Il faut de montrer que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} \overline{X}_n(\omega) = m\}) = 1$.

Fonction génératrice

Definition

Soit X une v.a. entière. On appelle fonction génératrice de la v.a. X de loi $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, notée G_X, la fonction

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k, \forall t \in [-1, 1].$$

Fonction génératrice

Propriétés.

1. G_X caractérise la loi de X

$$\forall k \in N; \mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}\left(0\right),$$

ou $G_X^{(k)}\left(0\right)$ est la dérivée d'ordre k au point $t = 0$.

Fonction génératrice

Propriétés.

1. G_X caractérise la loi de X

$$\forall k \in N; \mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}\left(0\right),$$

   ou $G_X^{(k)}\left(0\right)$ est la dérivée d'ordre k au point $t = 0$.

2. Si X et Y ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

Fonction génératrice

Propriétés.

1. G_X caractérise la loi de X

$$\forall k \in N; \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0),$$

ou $G_X^{(k)}(0)$ est la dérivée d'ordre k au point $t = 0$.

2. Si X et Y ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

3. Si pour $m \geq 1$, les moments d'ordre m de X existent $(\mathbb{E}[|X|^m] < \infty)$; on a

$$G_X^{(m)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-m+1)].$$

Fonction génératrice

Propriétés.

1. G_X caractérise la loi de X

$$\forall k \in N; \mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}\left(0\right),$$

ou $G_X^{(k)}\left(0\right)$ est la dérivée d'ordre k au point $t = 0$.

2. Si X et Y ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

3. Si pour $m \geq 1$, les moments d'ordre m de X existent $\left(\mathbb{E}\left[|X|^m\right] < \infty\right)$; on a

$$G_X^{(m)}\left(1\right) = \mathbb{E}\left[X\left(X-1\right)\cdots\left(X-m+1\right)\right].$$

En particulier on a

$$\mathbb{E}\left[X\right] = G_X'\left(1\right); Var\left(X\right) = G_X''\left(1\right) + G_X'\left(1\right) - \left(G_X'\left(1\right)\right)^2.$$

Fonction génératrice

Example

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda); \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \lambda.$$

Plus généralement $G_X^{(m)}(t) = \lambda^m e^{\lambda(t-1)}$ et donc

$$\begin{aligned} G_X^{(m)}(t) &= \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-m+1)] \\ &= \lambda^m e^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

Fonction génératrice

Example

En particulier

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \mathbb{E}\left[X\left(X-1\right)\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right] \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

d'où

$$Var\left(X\right) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Fonction génératrice

Example

En particulier

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \mathbb{E}\left[X\left(X-1\right)\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right] \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

d'où

$$Var\left(X\right) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Remarque. Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, on a

$$G_{X+Y}\left(t\right) = G_X\left(t\right) G_Y\left(t\right).$$

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Definition

On appelle fonction génératrice des moments de la v.a. X, la fonction M_X définie par

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Propriétés.

1. Si X est bornée, alors M_X est définie est continue sur $\mathbb{R}$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Propriétés.

1. Si X est bornée, alors M_X est définie est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si X est à valeurs positives, alors M_X est continue et bornée sur $]-\infty, 0]$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Propriétés.

1. Si X est bornée, alors M_X est définie est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si X est à valeurs positives, alors M_X est continue et bornée sur $\left]-\infty, 0\right]$. Dans ce cas, on fait souvent le changement de variable $s = -t$ et on obtient alors la transformée de Laplace de X,

$$\mathcal{L}_X\left(s\right) = M_X\left(-s\right) = \mathbb{E}\left[e^{-sX}\right].$$

La fonction $\mathcal{L}_X$ est continue et bornée sur $\left[0, \infty\right[$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Remarque. Tous les moments d'ordre n peuvent être calculés à l'aide des dérivées de cette fonction au point $t = 0$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Remarque. Tous les moments d'ordre n peuvent être calculés à l'aide des dérivées de cette fonction au point $t = 0$.

Example

Fonction génératrice des moments d'une v.a. exponentielle $\left(f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \right)$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Remarque. Tous les moments d'ordre n peuvent être calculés à l'aide des dérivées de cette fonction au point $t = 0$.

Example

Fonction génératrice des moments d'une v.a. exponentielle $\left(f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)\right)$. Pour tout $t < \lambda$ on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{(t-\lambda)x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t}. \end{aligned}$$

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Example

Fonction génératrice des moments d'une v.a. normale centrée réduite $\left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$.

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Example

Fonction génératrice des moments d'une v.a. normale centrée réduite $\left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$. On a

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx\right) \\
\Longrightarrow\ & M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Fonction génératrice des moments (Transformée de Laplace)

Example

Fonction génératrice des moments d'une v.a. normale centrée réduite $\left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$. On a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx\right) \\ \Longrightarrow &\quad M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Si X et Y sont deux v.a. indépendantes, on a

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t).$$

Fonction caractéristique

Definition

On appelle fonction caractéristique de la v.a. X, la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)].$$

Fonction caractéristique

Definition

On appelle fonction caractéristique de la v.a. X, la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$.

Remarque. Si X est continue de densité f_X alors φ_X est la transformée de Fourier de f_X.

Fonction caractéristique

Definition

On appelle fonction caractéristique de la v.a. X, la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$.

Remarque. Si X est continue de densité f_X alors φ_X est la transformée de Fourier de f_X.

1. Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y suivent la même loi.

Fonction caractéristique

Definition

On appelle fonction caractéristique de la v.a. X, la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$.

Remarque. Si X est continue de densité f_X alors φ_X est la transformée de Fourier de f_X.

1. Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y suivent la même loi.
2. $\varphi_X(0) = 1$ et $\forall t, |\varphi_X(t)| \leq 1$.

Fonction caractéristique

Definition

On appelle fonction caractéristique de la v.a. X, la fonction φ_X définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right].$$

$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$.

Remarque. Si X est continue de densité f_X alors φ_X est la transformée de Fourier de f_X.

1. Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y suivent la même loi.
2. $\varphi_X(0) = 1$ et $\forall t, |\varphi_X(t)| \leq 1$.
3. $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
   φ_X est réelle si et seulement si X est symétrique.

Fonction caractéristique

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at), \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2.$

Fonction caractéristique

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
5. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, alors la loi de X admet la densité f_X continue bornée, donnée par la formule d'inversion de Fourier

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(t)\, dt.$$

Fonction caractéristique

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
5. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, alors la loi de X admet la densité f_X continue bornée, donnée par la formule d'inversion de Fourier

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(t)\, dt.$$

6. Si X admet des moments d'ordre k $\left(\mathbb{E}\left[X^k\right] < \infty\right)$, alors φ_X est continuement dérivable et pour $m = 1, \cdots, k$ on a

$$\varphi_X^{(m)}(t) = i^m \mathbb{E}\left[X^m e^{itX}\right] \text{ et } \varphi_X^{(m)}(0) = i^m \mathbb{E}\left[X^m\right].$$

Fonction caractéristique

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$
5. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, alors la loi de X admet la densité f_X continue bornée, donnée par la formule d'inversion de Fourier

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(t)\, dt.$$

6. Si X admet des moments d'ordre k $\left(\mathbb{E}\left[X^k\right] < \infty\right)$, alors φ_X est continuement dérivable et pour $m = 1, \cdots, k$ on a

$$\varphi_X^{(m)}(t) = i^m \mathbb{E}\left[X^m e^{itX}\right] \text{ et } \varphi_X^{(m)}(0) = i^m \mathbb{E}\left[X^m\right].$$

En particulier

$$\mathbb{E}[X] = -i\varphi_X'(0) \text{ et } \mathbb{E}\left[X^2\right] = -\varphi_X''(0).$$

Le théorème centrale limite

Theorem

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite v.a. indépendantes, identiquement ditribuées (i.i.d) ayant un second moment. Soit*

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}\left[X_1\right], \sigma^2 = Var\left(X_1\right), S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \text{et } Y_n &= \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Le théorème centrale limite

Theorem

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite v.a. indépendantes, identiquement ditribuées (i.i.d) ayant un second moment. Soit*

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[X_1], \sigma^2 = Var(X_1), S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \\ \text{et } Y_n &= \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Alors la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers la v.a. normale* $\mathcal{N}(0,1)$.