Corrigé du Midterm 2023/2024.

Exercice 1 :

$S \sim \mathcal{B}(n,p)$ $\qquad \mathbb{P}(S=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$.

On a $T = n - S$ alors

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(n-S=k) = \mathbb{P}(S=n-k) = C_n^{n-k} \, p^{n-k} (1-p)^k$$

$$= C_n^k (1-p)^k p^{n-k} \quad \text{car } C_n^{n-k} = C_n^k.$$

d'où $\boxed{T \sim \mathcal{B}(n, 1-p)}$. 2

Exercice 2 :

$X \sim Geo(p)$; $0<p<1$. ; $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ 0,5

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2^X}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} p (1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{2}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{k-1}$$

1,5

$$= \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{k-1} = \frac{p}{2} \, \frac{1}{1-\frac{1-p}{2}} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2}{1-p}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}\left[\frac{1}{2^X}\right] = \frac{p}{1-p}}$$

Exercice 3 :

1) On prend pour Ω l'ensemble des permutations des n chapeaux, et pour $\mathbb{P}$ l'equiprobabilité sur Ω. 1

2) Soit A_k l'événement "La $k^{\text{ième}}$ personne récupère son chapeau"

On a $\mathbb{P}(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ pour tout $k = 1, \dots, n$. 1

d'où $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$ 0,5 car $X_k = \mathbb{1}_{A_k}$.

Alors $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n . \mathbb{E}[X_k]$ 0,5 $\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[S_n] = 1}$

On a $Var(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - \mathbb{E}[S_n]^2$.

$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] + 2 \sum_{k<l} \mathbb{E}[X_k X_l]$. 1

pour $1 \leq k < l \leq n$ $\quad \mathbb{E}[X_k X_l] = \mathbb{P}(A_k A_l) = \mathbb{P}(A_k \cap A_l)$

$$= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$ 1

et $\mathbb{E}[X_k^2] = \frac{1}{n}$.

0,5

D'où $\mathbb{E}[S_n^2] = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} + 2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2$.

$\Rightarrow \boxed{Var(S_n) = 1}$ 0,5

Exercice 4 :

$$f(x) = \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{|x|}\right) \mathbb{1}_{[-\theta,\theta]}(x) \quad , \theta > 0 \ , \ x \neq 0 .$$

0,5

1) f est une fonction paire, alors $f(-x) = f(x)$.

On a : $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [-\theta, 0[\cup]0, \theta]$ 0,5

et f est continue sur $[-\theta, 0[\cup]0, \theta]$ 0,5

Montrons maintenant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

On a : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\theta}^{\theta} f(x)\, dx = 2 \int_0^{\theta} f(x)\, dx$

$$= 2 \int_0^{\theta} \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx = - \int_0^{\theta} \frac{1}{\theta} \log\left(\frac{x}{\theta}\right) dx .$$

Soit $u = \frac{x}{\theta} \Rightarrow dx = \theta\, du$.

2

Alors $I = - \int_0^1 \log(u)\, du = [u - \log u]_0^1 = 1$.

D'où f est une densité de probabilité

Scanné avec CamScanner

2/a) Si $x \in [-\theta, 0[$

$$F_X(x) = \int_{-\theta}^{x} \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{-u}\right) du \overset{(t=-u)}{=} \frac{1}{2\theta} \int_{-x}^{\theta} -\log\left(\frac{\theta}{t}\right) dt = \frac{1}{2\theta} \int_{-x}^{\theta} \log\left(\frac{t}{\theta}\right) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\theta}\left(1 + \log\left(-\frac{\theta}{x}\right)\right)}$$ 1,5

Si $x \in]0, \theta]$.

$$F_X(x) = \int_{-\theta}^{0} \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{-u}\right) du + \int_{0}^{x} \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{u}\right) du$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\theta} \int_{0}^{x} \log\left(\frac{u}{\theta}\right) du = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\theta}\left(1 + \log\left(\frac{\theta}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\theta}\left(1 + \log\left(\frac{\theta}{x}\right)\right)}$$ 1,5

b) $$\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx = \int_{-\theta}^{0} x^k \frac{1}{2\theta} \log\left(-\frac{\theta}{x}\right) dx + \int_{0}^{\theta} x^k \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx$$ 1,5

$$= \int_{0}^{\theta} (-x)^k \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx + \int_{0}^{\theta} x^k \frac{1}{2\theta} \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx$$

$$= \left[1 + (-1)^k\right] \cdot \frac{1}{2\theta} \int_{0}^{\theta} x^k \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx$$

Alors : $\boxed{\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0}$ 0,5 et $\mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{1}{\theta} \int_{0}^{\theta} x^{2k} \log\left(\frac{\theta}{x}\right) dx = \boxed{\frac{\theta^{2k}}{(2k+1)^2}}$ 1

On en déduit alors $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{\theta^2}{9}}$ 0,5

Scanné avec CamScanner