Worksheet 3

Exercise 1 *Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0,1\}$ de paramètre $p \in]0,1[$, et soit N une variable aléatoire, indépendante des $X_k, k \geq 1$, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.*

1. *Calculer les fonctions génératrices des moments de X_1 et N.*
2. *Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{N} X_k$ (avec la convention $\sum_{k=1}^{0} = 0$).*
3. *Généralisation (Identité de Wald). Soit $X_n, n \in \mathbb{N}$, une suite de variables aléatoires de même loi intégrable, et soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ intégrable, et indépendante de la suite $X_n, n \in \mathbb{N}$. Établir l'identité*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X1).$$

Exercise 2 *Let $X_1, \cdots, X_n$ independent and identically distributed variables and integrable, and $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculate $\mathbb{E}[S \,|X_1]$ and $\mathbb{E}[X_1 \,|S]$.*

Exercise 3 *Soit X, Y des variables indépendantes, de loi de Poisson de paramètres λ et μ.*

1. *Calculer la loi de $X+Y$. Quelle est la loi du couple $(X, X+Y)$?*
2. *Calculer la loi de X sachant $Z = X+Y$. Quel nom porte-t-elle?*
3. *Calculer $\mathbb{E}[X \,|Z]$.*

Exercise 4 *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité*

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda x^{-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}}.$$

1. *Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.*
2. *Calculer $\mathbb{E}[Y^2 \,|X]$.*

Exercise 5 *Given two real numbers $a, b > 0$, and (X, Y) a random variable with values in $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ whose distribution is characterized by*

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp\left(-(a+b)y\right) dy.$$

1. *Determine the distribution of the random variable X, and the determine $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right]$.*
2. *Calculate $\mathbb{P}(X = n \,|Y)$ and finally $\mathbb{E}[X \,|Y]$.*