Екзаменаційна робота з математичного аналізу

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

13 грудня 2022 р.

1 Завдання 1

Умова.

1. Перестановка елементів умовно збіжних рядів.
2. Теорема Рімана.

1.1 Перестановка елементів умовно збіжних рядів.

Нехай ми маємо деякий збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Запишемо спочатку формальне визначення *умовно збіжного ряду* та *перестановки ряду*.

Означення 1: Умовно збіжний ряд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є умовно збіжним, якщо він *збіжний*, але не є *абсолютно збіжним*.

Приклад 1: Умовно збіжний пяд

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є умовно збіжним, бо сам він збігається за теоремою Лейбніца (а саме до $\ln 2$), але абсолютно не збігається, бо отримуємо гармонійний ряд.

Означення 2: Перестановка ряду

Нехай маємо бієкцію $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots$$

Називають перестановкою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо говорити більш інтуїтивною, проте менш строгою мовою, ми переставили елементи місцями. Варто при цьому зауважити, що хоча і здається, що це не буде впливати на значення і властивості ряду, послідовності $\{a_n\}$ та $\{a_{n_k}\}$ можуть бути зовсім різними за своєю природою, а тому і послідовності відповідних часткових сум може теж мати зовсім різні властості, і тому їх досліджувати треба окремо. Наведемо приклад перестановки.

Приклад 2: Перестановка ряду

Наприклад, візьмемо бієкцію $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n_k = \begin{cases} 5 - k, \ 1 \leq k \leq 4 \\ k, k > 4 \end{cases}$$

і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. В такому разі його перестановкою за бієкцією n_k буде ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Тепер розглянемо лему, яку ми будемо використовувати в подальших теоремах, що стосуються збіжних рядів

Лема 1: Про підпослідовності з невід'ємних та модулей від'ємних елементів

Нехай маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Розглянемо послідовність $\{b_n\}$, яка утворена з невід'ємних членів a_n і послідовність $\{c_n\}$, що утворена з модулей від'ємних членів ряду a_n, причому нумерація елементів як $\{b_n\}$, так і $\{c_n\}$ збігається з нумерацією відповідних елементів у $\{a_n\}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є абсолютно збіжним тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

І тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Доведення Леми 1. Спочатку доведемо у напрямку $\Rightarrow$. Тоді маємо, що $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A_+ < +\infty$. Помітимо, що будь-яка часткова сума рядів $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ не перевищує A_+, звідки випливає, що ряди є збіжними.

Тепер у напрямку $\Leftarrow$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B < +\infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C < +\infty$$

Помітимо, що будь-яка часткова сума $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ не перевищує $B+C$, тому $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq B + C < +\infty$. Залишилось довести, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Для цього запишемо за означенням, що означає, що B та C — значення відповідних рядів:

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_\varepsilon^b \in \mathbb{N}) \ (\forall k \in \mathbb{N} :\geq n_\varepsilon^b) \ \left\{ \left| \sum_{m=1}^{k} b_m - B \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_\varepsilon^c \in \mathbb{N}) \ (\forall k \in \mathbb{N} :\geq n_\varepsilon^c) \ \left\{ \left| \sum_{m=1}^{k} c_m - C \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Окрім того, $(\exists! N_b, N_c \in \mathbb{N})\{a_{N_b} = b_{n_\varepsilon^b}, \ a_{N_c} = c_{n_\varepsilon^c}\}$ і тому якщо взяти будь-яке $n_\varepsilon^a \geq \max\{N_b, N_c\}$, то для деяких $n^b \geq n_\varepsilon^b, n^c \geq n_\varepsilon^c$, будемо мати

$$\sum_{n=1}^{n_\varepsilon^a} a_n = \sum_{n=1}^{n^b} b_n - \sum_{n=1}^{n^c} c_n$$

Отже

$$\left|\sum_{n=1}^{n_\varepsilon^a} a_n - (B - C)\right| \le \left|\sum_{n=1}^{n^b} b_n - B\right| + \left|\sum_{n=1}^{n^c} c_n - C\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Звідки і випливає $A = B - C$.

Приклад 3: До Леми 1

Розглянемо наступну послідовність:

$$a_n = \begin{cases} \pi^{-n}, n \text{ — непарне} \\ -e^{-n}, n \text{ — парне} \end{cases}$$

Тоді послідовності $\{b_n\}, \{c_n\}$ для данної за правилом, що вказані у *Лемі 1* будуть виглядати наступним чином:

$$\{b_n\} : \pi^{-1}, \pi^{-3}, \pi^{-5}, \dots, \pi^{1-2n}, \dots$$

$$\{c_n\} : e^{-2}, e^{-4}, \dots, e^{-2n}, \dots$$

І оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\pi}{\pi^2-1} < +\infty, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{e^2-1} < +\infty$ з формул нескінченної геометричної прогресії $(\pi^{-2}, e^{-2} < 1)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{\pi^2 - 1} - \frac{1}{1 - e^2}$$

1.2 Теорема Рімана

Перейдемо до головної теореми перестановки елементів умовно збіжних рядів.

Теорема 1: Теорема Рімана

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ умовно збіжний і маємо деяке $-\infty \le \eta \le +\infty$. Тоді існує така перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \eta$$

Доведення Теореми Рімана. Спочатку розглянемо випадок $-\infty < \eta < +\infty$.

Нехай маємо послідовності $\{b_n\}$ та $\{c_n\}$, що задані за правилом, вказаним у *Лемі*

1. Тоді, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є умовно збіжним, то за *Лемою 1* маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$$

Помітимо, що оскільки $-\infty < \eta < +\infty$, то існує 2 послідовності невід'ємних цілих чисел $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}, \{m_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $k_0 = m_0 := 0$, тобто

$$(\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\})\{k_j < k_{j+1} \wedge m_j < m_{j+1}\},\ k_0 = m_0 = 0$$

таких, що

$$\begin{cases} d_1 := \sum_{j=1}^{k_1} b_j > \eta \\ d_2 := d_1 - \sum_{j=1}^{m_1} c_j < \eta \\ d_3 := d_2 + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} b_j > \eta \\ d_4 := d_3 - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} c_j < \eta \\ \vdots \\ d_{2i-1} := d_{2i-2} + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} b_j > \eta \\ d_{2i} := d_{2i-1} - \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} c_j < \eta \\ \vdots \end{cases}$$

Якщо кожного разу, виписуючи члени b_k, c_m, брати їх не більше, ніж необхідно для того, щоб задовольнялися нерівності вище, то

$$(\forall j \in \mathbb{N}):\ \{|d_{2j-1} - \eta| \leq b_{k_j},\ |d_{2j} - \eta| \leq c_{m_j}\}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то $\lim_{j\to\infty} b_{k_j} = \lim_{j\to\infty} c_{m_j} = 0$. Звідси з факту зверху виплива є, що $\lim_{j\to\infty} d_j = \eta$, тобто η є значенням ряду

$$\sum_{j=1}^{k_1} b_j - \sum_{j=1}^{m_1} c_j + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} b_j - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} c_j + \ldots$$

Візьмемо

$$x_{2n-1} = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} b_j,\ x_{2n} = \sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} c_j$$

Замітка. Оскільки ми взяли $k_0 = m_0 = 0$, то випадок для $n = 1$ є коректним.

Також через $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ позначимо послідовність часткових сум ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

З означення границі послідовності

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists j_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall j \in \mathbb{N} : j > j_\varepsilon)\ \{|d_j - \eta| < \varepsilon\}$$

Якщо j_ε непарне (тобто $\exists j'_\varepsilon \in \mathbb{N} : j_\varepsilon = 2j'_\varepsilon - 1$), то нерівність $|\chi_n - \eta| < \varepsilon$ виконується при $\forall n \geq k_{j'_\varepsilon} + m_{j'_\varepsilon - 1}$, а якщо j_ε є парним (тобто $\exists j''_\varepsilon \in \mathbb{N} : j_\varepsilon = 2j''_\varepsilon$), то при $\forall n \geq k_{j''_\varepsilon} + m_{j''_\varepsilon}$. Отже

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon)\ \{|\chi_n - \eta| < \varepsilon\}$$

Тобто за означенням маємо $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \eta$, що і потрібно було довести.

Випадок $\eta = \pm\infty$ доводиться аналогічно, проте побудова буде трохи відрізнятись. Наприклад, для випадку $\eta = +\infty$ маємо:

$$d_1 := \sum_{j=1}^{k_1} b_j > 1,$$

$$d_{2i-1} := d_{2i-2} + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} b_j > i,\ i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$
$$d_{2i} := d_{2i-1} - c_i,\ i \in \mathbb{N}$$

2 Завдання 2

Умова. Повнота простору $\mathbb{R}^m$

Відповідь. Перед тим, як довести повноту простору $\mathbb{R}^m$, запишемо визначення повного метричного простору.

Означення 3: Повний метричний простір

Повний метричний простір це такий метричний простір, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною.

Проте, випишемо також означення фундаментальної послідовності.

Означення 4: Фундаментальна послідовність

Нехай ми маємо метричний простір (X, ρ). Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ називається *фундаментальною*, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n, m \in \mathbb{N} : n, m > n_\varepsilon)\ \{\rho(x_n, x_m) < \varepsilon\}$$

Розглянемо приклад повного метричного простора, який ми вже вивчали у минулих семестрах.

Приклад 4: Повний метричний простір

Наприклад, розглянемо метричний простір $(\mathbb{R}, d)$, де віддаль $d(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ визначається як

$$d(x, y) = |x - y|$$

Цей метричний простір є повним за критерієм Коші, який ми вже доводили (для того, щоб послідовність збігалася, необхідно і достатньо, аби вона була фундаментальною).

Тепер перейдемо до доведення повноти простору $\mathbb{R}^m$.

Теорема 2: Про повноту простору $\mathbb{R}^m$

Простір $\mathbb{R}^m$ є *повним метричним простором.*

Доведення. Послідовність фундаментальна в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна в $(\mathbb{R}^m, d)$, отже висловлювання "*послідовність* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *фундаментальна в* $\mathbb{R}^m$ "є коректним.

Припустимо, що $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,m} \end{bmatrix}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^m$. Доведемо, що в такому разі послідовності $\{x_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_{n,2}\}_{n=1}^{\infty}, \ldots, \{x_{n,m}\}_{n=1}^{\infty}$ є також фундаментальними. За означенням маємо

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n, k \in \mathbb{N} : n, k > n_\varepsilon)\ \{\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k) < \varepsilon\}$$

Якщо розписати умову $\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k) < \varepsilon$, то отримаємо

$$\sum_{j=1}^{m} (x_{n,j} - x_{k,j})^2 < \varepsilon^2$$

Звідси випливає, що

$$(\forall j \in \mathbb{N} : j \leq m)\ \{|x_{n,j} - x_{k,j}| < \varepsilon\}$$

Тобто ми отримали, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n, k \in \mathbb{N} : n, k > n_\varepsilon)\ \{|x_{n,j} - x_{k,j}| < \varepsilon\},\ j = \overline{1, m}$$

Отже бачимо, що покомпонентно усі послідовності є фундаментальними в $(\mathbb{R}, r)$, де $r(x, y) = |x - y|$. Тому оскільки вони є фундаментальними, то є і збіжними (критерій Коші). Тому

$$\exists a_j \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} x_{n,j} = a_j,\ j = \overline{1, m}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} =: \mathbf{a}$$

Дійсно, як ми вже довели

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_\varepsilon^j \in \mathbb{N})\ (\forall n > n_\varepsilon^j)\ \left\{|x_{n,j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right\},\ j = \overline{1, m}$$

Тому якщо обрати $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2, \ldots, n_\varepsilon^m\}$, то маємо

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\forall n > N_\varepsilon)\ \left\{\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{a}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_{n,j} - a_j)^2 < \varepsilon}\right\}$$

Що за означенням означає, що $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$.

3 Завдання 3

Умова.

1. Лема про зв'язок похідної за напрямком з градієнтом.
2. Шкала розподілу швидкостей зміни функції в точці.
3. Геометричний зміст градієнта.
4. Незалежність градієнта від вибору ортонормавної системи координат.

3.1 Лема про зв'язок похідної за напрямком з градієнтом.

Спочатку введемо означення похідної за напрямком.

Означення 5: Похідна за напрямком

Нехай ми маємо деяку орту

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos\psi_1 \\ \cos\psi_2 \\ \vdots \\ \cos\psi_n \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} \cos^2\psi_n = 1,$$

а також скалярне поле $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$. Похідна за напрямком $\mathbf{e}$ в внутрішній точці $\mathbf{r}$ простору E, яку ми будемо позначати як $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r})$, це значення:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(\mathbf{r}+\delta\mathbf{e}) - f(\mathbf{r})}{\delta}$$

Відповідно якщо розписати по координатах:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(r_1 + \delta\cos\psi_1, \ldots, r_n + \delta\cos\psi_n) - f(r_1, \ldots, r_n)}{\delta}$$

Зауваження. Також іноді вводять поняття похідної за вектором. Якщо маємо будь-який ненульовий вектор $\mathbf{v}$, то ми завжди можемо знайти одиничний від нього як $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ і тоді за означенням маємо

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}) \equiv \nabla_{\hat{\mathbf{v}}} f(\mathbf{r})$$

Також введемо поняття градієнта

Означення 6: Градієнт

Нехай знову маємо скалярне поле $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$. Градієнт в внутрішній точці $\mathbf{r}$ простору E, за означенням:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

Розглянемо приклади, щоб подивитися, як розраховувати похідну за напрямком та градієнт.

Приклад 5: Обрахунок похідної за напрямком та градієнта

Наприклад, розглянемо простір $\mathbb{R}^3$ і функцію $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Тоді похідну за напрямком $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ в точці $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ знаходимо як

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{3(1 + \frac{\delta}{\sqrt{3}})^2 - 3 \cdot 1^2}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{3 + 2\sqrt{3}\delta + \delta^2 - 3}{\delta} = 2\sqrt{3}$$

Градієнт ж в цій точці знаходиться як

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x\Big|_{x=1} \\ 2y\Big|_{y=1} \\ 2z\Big|_{z=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Перейдемо до леми, що потрібно довести

Лема 2: Про зв'язок похідної за напрямком з градієнтом

Нехай $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$, точка $\mathbf{r}$ є внутрішньою точкою E. Тоді $f(\mathbf{x})$ має часткові похідні за будь-яким напрямком $\mathbf{e}$ в точці $\mathbf{r}$, при цьому

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \langle \nabla f(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle$$

Доведення. Запишемо означення похідної за напрямком в іншому, проте аналогічному виді:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \dot{f}(\mathbf{x}(t))\Big|_{t=0}, \ \mathbf{x}(t) = \mathbf{r} + t\mathbf{e}$$

Якщо розписати покомпонентно, то компоненти вектора $\mathbf{x}$ мають вид:

$$x_k = a_k + t\cos\psi_k,\ k = \overline{1, n}$$

Тепер знайдемо цю похідну, скориставшись похідної складенної функції:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_k} \cdot (\dot{x}_k)\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_k} \cos\psi_k$$

Помітимо, що отриманний вираз є скалярним добутком градієнта та напрямку, тобто $\langle \nabla f(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle$, що і потрібно було довести.

Приклад 6: Про зв'язок похідної за напрямком з градієнтом

Візьмемо *приклад 5* та знайдемо градієнт за формулою з *леми 2*:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\rangle = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Важливий наслідок Леми 2. Якщо $\nabla f(\mathbf{r}) = \theta$ (нульовий вектор), то $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \langle \theta, \mathbf{e} \rangle = 0$, тобто будь-яка похідна за напрямком дорівнює 0.

3.2 Шкала розподілу швидкостей зміни функції в точці

Нехай в нас є функція $f(\mathbf{r}) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$ і ми маємо деяку внутрішню точку $\mathbf{r}$ цього простору E. Зобразимо ситуацію на малюнку: намалюємо вектор $\nabla f(\mathbf{r})$ червоним, перпендикулярну до неї площину $\pi \perp \nabla f(\mathbf{r})$, а також для ілюстрації ще 2 напрямних вектора синім за зеленим кольорами (див. рис. 1 на початку наступної сторінки).

Розіб'ємо увесь простір на 3 частини: наша площина π, напівпростір $\mathcal{S}^+$, в якому міститься $\nabla f(\mathbf{r})$ і напівпростір $\mathcal{S}^-$, що знаходиться в протилежну сторону відносно π від $\mathcal{S}^+$. Тоді справедливо наступне:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \begin{cases} > 0,\ \mathbf{e} \in \mathcal{S}^+, \\ 0,\ \mathbf{e} \in \pi, \\ < 0,\ \mathbf{e} \in \mathcal{S}^- \end{cases}$$

Доведення доволі тривіальне. Помітимо, що

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \langle \nabla f(\mathbf{r}), \mathbf{e} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \|\mathbf{e}\| \cos\beta,$$

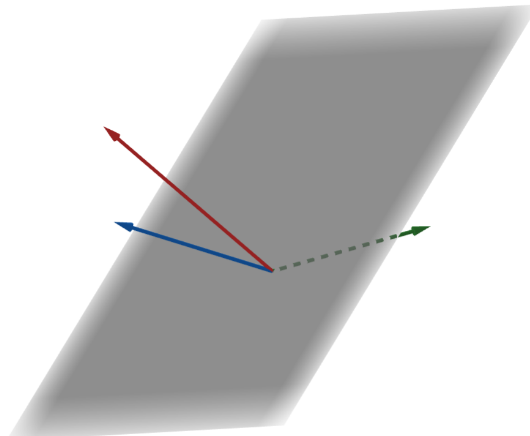

Рис. 1: Візуалізація шкали

де β — кут між $\nabla f(\mathbf{r})$ та $\mathbf{e}$. Також помітимо, що оскільки $\mathbf{e}$ — напрямний вектор, то $\|\mathbf{e}\| = 1$. Тому

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \cos\beta$$

Градієнт ми взяли ненульовий, тому за означенням норми $\|\nabla f(\mathbf{r})\| > 0$. Тому знак $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r})$ визначається знаком виразу $\cos\beta$. Якщо градієнт перпендикулярний до вектора $\mathbf{e}$, то $\beta = \pi/2$ і тому $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = 0$. Множина векторів, що перпендикулярна градієнту за нашим формулюванням лежить на площині π.

Ті вектори, що лежать у $\mathcal{S}^+$, мають кут з градієнтом менший за $\pi/2$, тому і $\cos\beta > 0$ для усіх векторів з цього простору. Нарешті, якщо вектори лежать у $\mathcal{S}^-$, то кут, що ці вектори утворюють з градієнтом, більший за $\pi/2$ і тому $\cos\beta < 0$.

Тому, наприклад, якщо синім на рис. 1. позначено вектор $\mathbf{u}$, а зеленим $\mathbf{w}$, то $\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{r}) > 0,\ \nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{r}) < 0$.

А тепер задамо важливе питання: а яке нам потрібно обрати $\mathbf{e}$, аби максимізувати та мінімізувати $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r})$? Знову ж таки звернімося до виразу $\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \cos\beta$. Бачимо, що оскільки градієнт є фіксованим вектором, то максимум досягається при максимальному значенні $\cos\beta$, тобто коли $\beta = 0$. Це означає, що наш напрямний вектор направлений уздовж $\nabla f(\mathbf{r})$, тому

$$\max_{\mathbf{e}\in\mathbb{R}^n} \nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \text{ при } \mathbf{e} = \frac{\nabla f(\mathbf{r})}{\|\nabla f(\mathbf{r})\|}$$

Аналогічно мінімум досягається при $\beta = \pi$, тобто коли напрямний вектор направлений протилежно $f(\mathbf{r})$. Тому

$$\min_{\mathbf{e}\in\mathbb{R}^n} \nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = -\|\nabla f(\mathbf{r})\| \text{ при } \mathbf{e} = -\frac{\nabla f(\mathbf{r})}{\|\nabla f(\mathbf{r})\|}$$

3.3 Геометричний зміст градієнта

Для того, щоб описати геометричний зміст градієнта, введемо поняття *дотичної* площини.

Означення 7: Дотична площина

Дотичною площиною до графіка $z = f(x, y)$ в точці $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$ називають таку площину π, що різниця її аплікати $z(x, y)$ і значення функції $f(x, y)$ є нескінченно малою величиною порівняно з $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ при $\Delta\rho \to 0$.

Доведемо важливу теорему, яка дозволить нам знаходити це рівняння площини

Теорема 3: Про вектор нормалі дотичної площини

Нехай функція є диференційованою в $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{bmatrix}$ та визначена в ній. Тоді рівняння дотичної площини в цій точці єдине і має вид:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Доведення. Запишемо рівняння довільної площини, що проходить через $\mathbf{r}_0$:

$$z = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$$

Згідно з означенню дотичної площини, маємо

$$f(x, y) - z(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(x - x_0) = \overline{o}(\Delta\rho)$$

Звідси

$$\Delta f(x_0, y_0) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \overline{o}(\Delta\rho),\ \Delta\rho \to 0$$

Далі користуємось теоремою, що функція $f(\mathbf{x})$ є диференційованою в точці $\mathbf{x}_0$ тоді і тільки тоді, коли її повний приріст можна подати у виді

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} A_j \Delta x_j + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)\Delta\rho$$

причому $\lim_{\Delta\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ та $A_j = \frac{\partial f(\mathbf{r}_0)}{\partial x_j}$. Тому робимо висновок

$$\alpha = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \beta = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

що і доводить нашу теорему.

Означення 8: Узагальнення геометричного змісту для $\mathbb{R}^n$

Нехай маємо рівняння поверхні

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0$$

та точку $\mathbf{r}_0 \in \Psi$. Якщо провести дотичну площину до Ψ у цій точці, то вектор нормалі цієї площини буде дорівнювати градієнту Ψ у цій точці, тобто $\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)$.

Цей факт можна узагальнити, використовуючи ідею доведення *Теореми 3*.

У цієї властивості є 2 дуже важливих наслідки:

Наслідок 1. Рівняння нормалі у точці $\mathbf{r}_0$ до поверхні Ψ можна записати наступним чином:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_0 + \lambda\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)$$

Доведення. Оскільки нормаль направлена вздовж вектора $\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)$, то рівняння можна записати як $\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{a} + \lambda\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)$. Оскільки ця пряма проходить через $\mathbf{r}_0$, то достатньо покласти $\mathbf{a} = \mathbf{r}_0$ і тоді при $\lambda = 0$ отримуємо $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$.

Наслідок 2. Рівняння дотичної площини до Ψ у точці $\mathbf{r}_0$ має вид:

$$\langle\nabla\Psi(\mathbf{r}_0), \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\rangle = 0$$

Доведення. Рівняння площини з вектором нормалі $\mathbf{n}$, що проходить через $\mathbf{r}_0$ записується як

$$\langle\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\rangle = 0$$

З властивості маємо $\mathbf{n} = \nabla\Psi(\mathbf{r}_0)$, тому отримуємо саме те рівняння, яке потрібно було довести.

Приклад 7: Знаходження дотичної площини та рівняння нормалі

Нехай в нас є рівняння поверхні

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

І нам потрібно провести дотичну площину та знайти нормаль у точці $(3, 1, 4)$. Для цього записуємо рівняння поверхні:

$$\Psi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - z = 0$$

Знаходимо градієнт у цій точці:

$$\nabla\Psi(3, 1, 4) = \begin{bmatrix} x\Big|_{x=3} \\ -y\Big|_{y=1} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Тому рівняння нормалі:

$$l : \mathbf{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

А рівняння площини:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-4 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

Тому:

$$\pi : 3(x-3) - (y-1) - (z-4) = 0$$

3.4 Незалежність градієнта від вибору ортонормованої системи координат

Повернімось до пункту 3.2. Розглянемо знову формулу розрахунку похідної за напрямком:

$$\nabla_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \cos\beta$$

Де β — кут між векторами $\mathbf{e}$ та градієнтом. Помітимо важливий факт з курсу лінійної алгебри: при ортогональному перетворенні $\mathcal{A}$ кут між векторами до перетворення $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ та кут між векторами після перетворення $\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}$ не змінюється за означенням.

Тому, робимо важливий **висновок**: вне залежності від того, яке ортогональне перетворення $\mathcal{A}$ ми робимо, напрямок, який максимізує похідну за напрямком, збігається з градієнтом. А отже ані напрямок найшвидшого росту(спадання) функції, ані величина похідної в цьому напрямку не залежать від вибору координат.