Homework #2

Завдання 10.

Пункт 2. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2}dx$$

Розв'язок. Спочатку “обробимо” знаменник:

$$5x^2-3x+2 = 5\left(x^2-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}\right) = 5\left(\left(x-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}+\frac{2}{5}\right) = 5\left(\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{31}{100}\right)$$

Тому інтеграл:

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{3(x-2/3)}{(x-3/10)^2+31/100}dx$$

Зробимо заміну $\xi = x - 3/10, d\xi = dx$, отримаємо:

$$I = \frac{1}{5}\int \frac{3(\xi+3/10-2/3)}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2}d\xi = \frac{3}{5}\int \frac{\xi - 11/30}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2}d\xi$$

Розіб'ємо наш інтеграл на дві частини:

$$I = \frac{3}{5}\left(\int \frac{\xi d\xi}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2} - \frac{11}{30}\int \frac{d\xi}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2}\right)$$

Лівий інтеграл “візьмемо” заміною $p = \xi^2 + 31/100 \implies 2\xi d\xi = dp, \xi d\xi = dp/2$, отже

$$\int \frac{\xi d\xi}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\ln|p| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\xi^2+\frac{31}{100}\right| + C$$

Правий інтеграл стандартний $\int \frac{d\xi}{\xi^2+(\sqrt{31}/10)^2} = \frac{10}{\sqrt{31}}\arctan\frac{10\xi}{\sqrt{31}} + C$, тому маємо:

$$I = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\xi^2+\frac{31}{100}\right| - \frac{3}{5}\cdot\frac{11}{30}\cdot\frac{10}{\sqrt{31}}\arctan\frac{10\xi}{\sqrt{31}} + C$$

Спрощуємо вираз:

$$I = \frac{3}{10}\ln\left|\xi^2+\frac{31}{100}\right| - \frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\frac{10\xi}{\sqrt{31}} + C$$

Повертаємося до x. Оскільки $\xi = x - 3/10$, маємо

$$I = \frac{3}{10}\ln\left|\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{31}{100}\right| - \frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\frac{10}{\sqrt{31}}\left(x-\frac{3}{10}\right)$$

Остаточно маємо:

$$I=\frac{3}{10}\ln\left|x^2-\frac{3x}{5}+\frac{2}{5}\right|-\frac{11}{5\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right)+C$$

Пункт 6. Знайти інтеграл

$$I=\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$$

Розв'язок. Зробимо перетворення у знаменнику:

$$4x^2+4x+3=4(x^2+x+3/4)=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$$

Отже маємо:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{x+3}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$$

Зробимо заміну $\xi=x+1/2 \implies d\xi=dx$, тому

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{\xi-\frac{1}{2}+3}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}d\xi=\frac{1}{2}\int\frac{\xi+\frac{5}{2}}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}d\xi=\frac{1}{2}\int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}+\frac{5}{4}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}$$

Лівий інтеграл "візьмемо" заміною $u=\xi^2+1/2 \implies du=2\xi d\xi \implies \xi d\xi=\frac{du}{2}$, тому

$$\frac{1}{2}\int\frac{\xi-\frac{1}{2}+3}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}d\xi=\frac{1}{2}\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2}+C=\frac{\sqrt{u}}{2}+C=\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}+C$$

Правий інтеграл табличний:

$$\frac{5}{4}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}}=\frac{5}{4}\ln\left|\xi+\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}\right|+C$$

Тому остаточно маємо:

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}+\frac{5}{4}\ln\left|\xi+\sqrt{\xi^2+\frac{1}{2}}\right|+C$$

Перейдемо до x: $\xi=x+\frac{1}{2}$

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}+\frac{5}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}\right|+C$$

Завдання 11.

Пункт 2. Знайти інтеграл

$$I=\int\left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $z=x^5+2\to dz=5x^4dx\to x^4dx=dz/5$. Маємо:

$$I = \int \frac{x^4 dx}{(x^5+2)^4} = \int \frac{dz}{5z^4} = \frac{1}{5}\int z^{-4} dz = \frac{1}{5} \cdot \frac{z^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15z^3} + C$$

Повернемось до x і отримаємо:

$$I = -\frac{1}{15(x^5+2)^3} + C$$

Пункт 4. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{x^5 dx}{x+1}$$

Розв'язок. Для цікавості розв'яжемо більш загальний випадок $I_n = \int \frac{x^n dx}{x+1}$

Помітимо, що

$$\frac{x^n dx}{1+x} = \frac{1+x^n}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x}$$

Тому:

$$I_n = \int \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x} \right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int (-1)^k x^k dx - \ln|1+x| + C$$

Отже, остаточно маємо:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} - \ln|1+x| + C$$

Для нашого конкретного інтегралу значення дорівнює I_5. Цікаво, що наша сума зліва — це перші додатки розкладання $\ln(1+x)$ у ряд Маклорена… Не знаю чесно кажучі, чи це збіг

Завдання 12.

Пункт 1. Знайти інтеграл

$$I = \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $\nu = x^3 + 1 \to d\nu = 3x^2 dx \to x^2 dx = d\nu/3$, тобто

$$I = \int \sqrt{\nu} \frac{d\nu}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\nu^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$$

Пункт 2. Знайти інтеграл

$$I = \int x\sqrt{1+x} dx$$

Розв'язок. Знову зробимо заміну підкореневого виразу: $\nu = 1 + x \to d\nu = dx$, тобто

$$I = \int (\nu - 1)\sqrt{\nu} d\nu = \int \nu^{3/2} d\nu - \int \nu^{1/2} d\nu = \frac{2}{5}\nu^{5/2} - \frac{2}{3}\nu^{3/2} + C = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$$

Пункт 6. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

Розв'язок. Зробимо заміну $t = \sqrt[4]{x} \to dt = dx/4\sqrt[4]{x^3} = dx/4t^3 \to dx = 4t^3 dt$. Тому

$$I = \int \frac{4t^3 dt}{t + t^2} = \int \frac{4t^2 dt}{1 + t}$$

Зробимо тепер заміну $z = 1 + t \to dz = dt, t = z - 1$, отримаємо

$$I = \int \frac{4(z-1)^2 dz}{z} = 4 \int \left(z - 2 + \frac{1}{z} \right) dz = 2z^2 - 8z + 4 \ln |z| + C$$

Повернімося до x. Маємо $z = 1 + t = 1 + \sqrt[4]{x}$, тобто

$$I = 2(1 + \sqrt[4]{x})^2 - 8(1 + \sqrt[4]{x}) + 4 \ln |1 + \sqrt[4]{x}| + C$$

Спробуємо це упростити:

$$I = 2 + 4\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} - 8 - 8\sqrt[4]{x} + 4 \ln |1 + \sqrt[4]{x}| + C$$

Отже остаточно $I = -4\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} + 4 \ln |1 + \sqrt[4]{x}| + C$.