Залікова робота з курсу “Теоретична механіка”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

7 грудня 2023 р.

Варіант 6

Завдання 1

Умова. Динаміка частинки в неінерціальній системі відліку. Сили інерції. Вага тіла.

Відповідь. Нехай маємо деяку інерціальну систему відліку $Oxyz$ (з базисами $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) – тобто система відліку, що рухається без прискорення.

Нехай маємо частку, на котру діє сумарна сила $\mathbf{F}$. Тоді, другий закон Ньютона запишеться як $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Тут $\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$.

Проте, іноді в задачах зручніше розглядати рух частинки відносно **не**інерціальної системи відліку. Нехай неінерціальна система відліку $O'x'y'z'$ з базисами $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ рухається відносно інерціальної. Тоді абсолютне прискорення у неінерціальній системи можна подати у вигляді

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_K,$$

де $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ – відносне прискорення, $\mathbf{a}_{\text{tr}}$ – переносне, а $\mathbf{a}_K$ – прискорення Коріоліса. Згадаємо вигляд цих прискорень:

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}'$$

тобто відносне прискорення це вираз прискорення в неінерціальній системі, тільки записане у нових координатах.

Переносне прискорення має вигляд:

$$\mathbf{a}_{\text{tr}} = \mathbf{a}_{O'} + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']],$$

де $\mathbf{a}_{O'}$ – це прискорення точки відліку O', $\mathbf{r}'$ – радіус вектор частинки від O', $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – кутова швидкість та кутове прискорення системи $O'x'y'z'$.

Нарешті, прискорення Коріоліса:

$$\mathbf{a}_K = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}],$$

де $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ – це швидкість тіла відносно рухомої системи відліку, тобто $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'$.

Повертаємось до динаміки. Підставляємо наше прискорення у другий закон Ньютона:

$$m(\mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_K) = \mathbf{F} \implies m\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{tr}} - m\mathbf{a}_K$$

Трошки розтлумачимо результат. Нехай ми спостерігач, що сидить у рухомій системі відліку (наприклад, у салоні автомобіля) і ми спостерігаємо рух частинки. В такому разі, ми спостерігаємо саме величину $\mathbf{a}_{\text{rel}}$. І, як бачимо, в такому разі, окрім зовнішньої сили $\mathbf{F}$, додаються ще дві фіктивні сили, котрі називаються **силами інерції**:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{tr}} = m\left(\mathbf{a}_{O'} + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]\right),\ \mathbf{F}_K = 2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}]}$$

Перший доданок безпосередньо відноситься до відцентрової сили. Нехай $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$. Тоді якщо $\mathbf{r}' \perp \boldsymbol{\omega}$, то модуль сили можна записати як $F_{\text{tr}} = m\omega^2 r'$ – це достатньо відомий вираз для відцентрової сили. Наприклад, якщо кататися на каруселі, то при достатньо високих кутових швидкостях, предмет/людину на ній починає "відштовхувати" від вісі пропорційно квадрату кутової швидкості. Другий відповідає співвідношенню між лінійною швидкістю тіла та кутовою швидкістю. Тобто, якщо ми почнемо якимось чином рухатись по каруселі, то виникала б ще одна сила по модулю $2m\omega v_{\text{rel}}$, де v_{rel} – наша швидкість по каруселі.

Розглянемо питання ваги. Нехай кутова швидкість обертання Землі $\boldsymbol{\Omega}$ відносно вісі NS (північ-південь), радіус Землі R. Нехай базис вздовж NS дорівнює $\hat{z}$, а в площині екватору $\hat{x}, \hat{y}$ – це наша інерціальна вісь. Розглянемо також тіло m на нитці над поверхнею і розглядаємо його координати у базисі $O'x'y'z'$, де $\hat{x}', \hat{y}'$ знаходяться у дотичній площині, а $\hat{z}'$ – до Землі в землю (у випадку ідеальної сфери, цей базис б дивився до її центру).

Нехай гравітаційна сила $\mathbf{F}_G$. Тоді, другий закон Ньютона запишеться як:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G - m\mathbf{a}_{O'} - m\mathbf{F}_K + \mathbf{T}.$$

Тут ми позначили через $\mathbf{T}$ – силу натягу нитки. Видно, що $\mathbf{F}_K = 0$, а $\mathbf{a}_{O'} = -\Omega^2\mathbf{h}$, де $\mathbf{h}$ – вектор від вісі обертання NS до тіла. Тут $\mathbf{a}_{O'}$ виступає також у ролі відцентрового прискорення. Звідси:

$$\mathbf{T} = -\left(\mathbf{F}_G - m\Omega^2\mathbf{h}\right)$$

Вагою називають силу, з котрою тіло діє на підвіс або опору. Тобто в нашому конкретно випадку вона дорівнює $-\mathbf{T} = \mathbf{F}_G - m\Omega^2\mathbf{h}$.

Інший простий приклад – нехай людина знаходиться в ліфті, що рухається вниз з постійним прискоренням $\frac{1}{3}g$. В якості інерціальної системи беремо Землю, а в якості неінерціальної – ліфт. Тоді, якщо запишемо другий закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G - m\mathbf{a}_{O'} + \mathbf{N},$$

де $\mathbf{N}$ – сила нормальної реакції опори. Оскільки людина в ліфті не рухається прискоренно (ну, щонайменше сподіваємося на це), то $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ і тоді

$$\mathbf{N} = m\mathbf{a}_{O'} - \mathbf{F}_G$$

Тоді вага це $\mathbf{F}_G - m\mathbf{a}_{O'}$. Якщо врахувати, що $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}, \mathbf{a}_{O'} = \frac{1}{3}\mathbf{g}$ за умовою, то отримуємо, що вага дорівнює $\frac{2}{3}m\mathbf{g}$. Дійсно, коли ліфт рухається вниз, то вага сприймається меньше, ніж якщо б ліфт рухався вгору.

Завдання 2

Умова. Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі. Фізичний маятник.

Відповідь. Для записання диференціального рівняння обертання, спочатку введемо поняття *моменту інерції*.

Нехай маємо систему часток $\{m_\nu\}_{\nu=1}^N$. Введемо відстані від кожної з точок до деякої вісі ℓ як $\{h_\nu(\ell)\}_{\nu=1}^N$. Розглянемо наступну суму:

$$I_\ell \triangleq \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu h_\nu^2(\ell).$$

Така сума називається осьовим **моментом інерції** системи відносно вісі ℓ. У випадку, коли маємо тіло з розподілом густини $\rho(\mathbf{r})$:

$$I_\ell \triangleq \int_V \rho(\mathbf{r}) h^2(\mathbf{r}, \ell) d^3\mathbf{r},$$

де $h(\mathbf{r}, \ell)$ – відстань між точкою $\mathbf{r}$ та віссю ℓ.

Приклад. Нехай треба знайти момент інерції однородного суцільного диску маси m та радіусу R навколо нерухомої вісі, що проходить через його центр. Розіб'ємо диск на багато кілець малої товщини dr радіусу r. Тоді маса такого кільця $2\sigma\pi r$, де $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$ – поверхнева густина диску. Тоді:

$$I = \int_{[0,R]} 2\pi r\sigma dr \cdot r^2 = 2\pi\sigma \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \cdot \frac{m}{\pi R^2} = \frac{mR^2}{2}$$

Диференціальне рівняння обертання твердого тіла. Перейдемо до безпосередньо диференціального рівняння обертання тіла навколо вісі. Цей закон записується наступним чином:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tau,$$

де I – момент інерції, ω – кутова швидкість тіла навколо заданої вісі, а τ – момент сил, відносно вісі.

Взагалі кажучи, момент сил є величиною векторною. Якщо на тіло діють набір сил $\{\mathbf{F}_\mu\}_{\mu=1}^M$, то цей момент сил можна знайти як:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{\mu=1}^{M} [\mathbf{r}_\mu \times \mathbf{F}_\mu]$$

і далі знайти його проекцію на вісь обертання ℓ.

Фізичний маятник. Фізичним маятником називають тверде тіло довільної форми, яке під дією сили тяжіння здійснює коливання навколо вертикальної вісі, що проходить через центр мас. Нехай ми закріпили тіло в точці P. Частоту коливань такого маятника тоді можна знайти за формулою:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell_P}{I_P}},$$

де I_P – момент інерції навколо вісі закріплення, ℓ_P – відстань між точкою закріплення P та центром мас.

Виведення. Відхилемо маятник на малий кут θ від положення рівноваги. В такому разі, момент сили тяжіння можна записати як:

$$\tau = -mg\ell_P \sin\theta$$

Тоді, диференціальне рівняння обертання твердого тіла запишеться як:

$$I_P\ddot{\theta} = -mg\ell_P \sin\theta \implies \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell_P}{I_P}\sin\theta = 0}$$

Якщо вважати коливання малими, то $\sin\theta \approx \theta$ і тоді маємо гармонічні коливання з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{mg\ell_P}{I_P}}$. Звідси частота $f = \frac{\omega}{2\pi}$, що і треба було показати.

Завдання 3.

Умова. Складіть рівняння Лагранжа для візка маси m_1, колеса якого є двома суцільними дисками маси m_2 і радіуса r. Візок закріплений пружиною жорсткості k.

Розв'язок. Для початку визначимось, що вважати за координату. Нехай x – це відхилення довжини пружини від початкової ℓ_0.

Отже, нам потрібно записати вирази для кінетичної енергії $T(x, \dot{x}, t)$ та потенціальної $V(x, t)$. Тоді, Лагранжиан запишеться як:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \triangleq T(x, \dot{x}, t) - V(x, t)$$

Отже, почнемо з потенціальної. Вона складається лише з потенціальної енергії пружини $V(x, t) = \frac{kx^2}{2}$.

Більш цікаве питання – яка кінетична енергія нашої системи. По-перше, швидкість візка дорівнює $\dot{x}$, тому його кінетична енергія $T_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}$. Далі знаходимо потенціальну енергію дисків. Центр колеса, оскільки він є частиною візка, рухається також зі швидкістю $\dot{x}$ (інакше б візок деформувався). Тоді, кутова швидкість колеса $\omega = \frac{\dot{x}}{r}$. В такому разі кінетична енергія колеса:

$$\widetilde{T}_2(\dot{x}) = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} = \frac{m_2 r^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} = \frac{3m_2 \dot{x}^2}{4}$$

Оскільки маємо два колеса, загальна кінетична енергія колес $T_2(\dot{x}) = 2\widetilde{T}_2(\dot{x})$. Таким чином, повна кінетична енергія системи:

$$T(\dot{x}) = T_1 + T_2 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{3m_2 \dot{x}^2}{2}$$

Отже, лагранжиан системи:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{(m_1 + 3m_2)\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

Тепер, запишемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Підставляємо:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + 3m_2\dot{x} = (m_1 + 3m_2)\dot{x}, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + 3m_2)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$$

Отже, остаточно рівняння:

$$(m_1 + 3m_2)\ddot{x} + kx = 0 \implies \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m_1 + 3m_2}x = 0}$$

Це є гармонійними коливаннями з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+3m_2}}$. Бачимо, що якщо $m_2 = 0$, це б відповідало звичайним гармонічними коливанням грузика на пружині і частота б відповідала $\omega\Big|_{m_2=0} = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$.

Відповідь. $\ddot{x} + \frac{k}{m_1+3m_2}x = 0$. Це є гармонічними коливаннями з циклічною частотою $\sqrt{\frac{k}{m_1+3m_2}}$.