Homework #21

Завдання 3245(б)

Введемо

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{z^2}}}$$

Причому оскільки в нашому конкретному випадку $z > 0$, маємо

$$f(x,y,z) = x^2 y^{-1/3} z^{-1/6}$$

Нам потрібно знайти наближено $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ для $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ та $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0.03, -0.02, 0.05)$. Повний диференціал має вигляд:

$$df(\mathbf{x}_0, \Delta\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i + \varepsilon(\Delta\mathbf{x})\Delta\rho$$

І тому приблизно

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0, \Delta\mathbf{x})$$

Знаходимо повний диференціал:

$$df \approx 2xy^{-1/3}z^{-1/6}\Delta x - \frac{1}{3}x^2y^{-4/3}z^{-1/6}\Delta y - \frac{1}{6}x^2y^{-1/3}z^{-7/6}\Delta z$$

В точці $(1,1,1)$:

$$df\Big|_{\mathbf{x}_0=(1,1,1)} \approx 2\Delta x - \frac{1}{3}\Delta y - \frac{1}{6}\Delta z$$

Підставивши $\Delta\mathbf{x} = (0.03, -0.02, 0.05)$

$$df\Big|_{\mathbf{x}_0=(1,1,1)}^{\Delta\mathbf{x}=(.03,-.02,.05)} \approx 0.06 + \frac{0.02}{3} - \frac{0.05}{6} = \frac{11}{200}$$

В такому разі

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) \approx 1 + \frac{11}{200} = \frac{211}{200} = 1.055$$

Завдання 3251

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

Показати:

- $f(x, y)$ є неперервною у $(0, 0)$.
- $f(x, y)$ має обидві часткові похідні $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$.
- $f(x, y)$ не є диференційованою у $(0, 0)$.

Розв'язок.

Спочатку покажемо, що $f(x, y)$ є неперервною у $(0, 0)$. Для цього потрібно показати, що

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

Розглянемо метричний простір $(\mathbb{R}^2, d)$ де $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1\leq j\leq m} |x_j - y_j|$. В такому разі за означенням

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x, y) : 0 < |x| < \delta, 0 < |y| < \delta)\{\sqrt{|xy|} < \varepsilon\}$$

Помітимо, що $\sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|} < \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\delta} = \delta$, тому якщо обрати $\delta = \varepsilon$, то наше ствердження стає правильним для будь-якого обраного ε.

Тепер покажемо, що дійсно $f'_x(0,0)$ та $f'_y(0,0)$ обидва існують. За означенням:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Аналогічно для $f'_y(0,0)$, оскільки f симетрична.

Нарешті покажемо, що f не є диференційованою у $(0, 0)$. Оскільки $f'_x(0,0) = f'_y(0,0)$, то диференціал має вигляд

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) = \varepsilon(x,y)\Delta\rho$$

І в цьому випадку

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}$$

Якщо підставимо $x = y$, то отримаємо

$$\varepsilon(x,x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отже $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) \neq 0$.

Завдання 3256

Єдиний член x зі ступенем ≥ 4 це x^4, тому $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 1$.

Єдині члени x зі ступенем ≥ 3 це $x^3 + x^4$, але вони не містять y, тому $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0$.

Єдиний член де міститься і x, і y зі ступенями більшими за 1 це $-4x^2y^2$, тому $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -4$.

Завдання 3258

Спочатку знайдемо 3 похідну по x:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6\sin y - y^3 \cos x$$

Тепер 3 рази похідну по y:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6\cos y - 6\cos x = -6(\cos x + \cos y)$$

Завдання 3260

$$u'_x = yze^{xyz},\ u''_{xy} = z \cdot (ye^{xyz})'_y = z(e^{xyz} + yxze^{xyz}) = ze^{xyz}(1 + xyz)$$

І нарешті

$$u'''_{xyz} = (ze^{xyz})'_z(1 + xyz) + ze^{xyz}(1 + xyz)'_z =$$
$$(e^{xyz} + xyze^{xyz})(1 + xyz) + xyze^{exy} =$$
$$e^{xyz} + 3xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz} =$$
$$e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$$

Завдання 3264

Знайти

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^m \partial y^n},\ u(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x+y}$$

Спочатку знайдемо похідні по x:

$$u'_x = (x^2 + y^2)'_x e^{x+y} + (x^2 + y^2)(e^{x+y})'_x = 2xe^{x+y} + (x^2 + y^2)e^{x+y}$$

Отже маємо $u'_x = 2xe^{x+y} + u$. Беремо ще раз похідну:

$$u''_x = (2xe^{x+y})'_x + u'_x = 2e^{x+y} + 2xe^{x+y} + u'_x$$

Звідси $u''_x = 2e^{x+y}(x + 1) + u'_x$ або $u''_x = 2e^{x+y}(2x + 1) + u$. І нарешті ще раз:

$$u'''_x = 2e^{x+y}(x + 1) + 2e^{x+y} + u''_x = 2e^{x+y}(x + 2) + u''_x$$

Отже якщо позначити $u_x^{[n]} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, то маємо рекурентну залежність

$$u_x^{[n+1]} = 2e^{x+y}(x + n) + u_x^{[n]}$$

Для наочності розкриємо $u_x^{[n]}$:

$$u_x^{[n+1]} = 2e^{x+y}(x + n) + 2e^{x+y}(x + n - 1) + u_x^{[n-1]}$$

Тому маємо

$$u_x^{[n+1]} = 2e^{x+y}\sum_{k=0}^{n}(x + k) + u(x, y)$$

Звідси

$$u_x^{[n+1]} = 2e^{x+y}\left((n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}\right) + u(x,y)$$

Або остаточно $u_x^{[n]} = ne^{x+y}(2x+n-1) + u(x,y)$. Тепер позначимо

$$u_{xy}^{[n,m]} = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial x^m}$$

В такому разі візьмемо від нашого виразу для $u_{xy}^{[n,0]}$ похідну по y, причому одразу m разів:

$$u_{xy}^{[n,m]} = ne^{x+y}(2x+n-1) + u_y^{[0,m]}$$

Помітимо, що u симетричне відносно x, y, тому справедливо

$$u_y^{[0,m]} = me^{x+y}(2y+m-1) + u(x,y)$$

Тому остаточно маємо

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} = ne^{x+y}(2x+n-1) + me^{x+y}(2y+m-1) + (x^2+y^2)e^{x+y}$$

Винесемо e^{x+y} за дужки:

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} = e^{x+y}((x^2+2nx+n^2) + (y^2+2my+m^2) - (n+m))$$

Остаточно маємо

$$\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} = e^{x+y}((x+n)^2 + (y+m)^2 - (n+m))$$

Завдання 3284

$$u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$$

Позначимо $\varphi(x,y) = x, \psi(x,y) = \frac{x}{y}$. В такому разі $u = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$.

Спочатку знайдемо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi(x,y),\psi(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Тобто

$$u'_x = f'_x\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f'_y\left(x, \frac{x}{y}\right)$$

Тепер друга похідна:

$$u''_x = f''_x\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f''_{xy}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f''_{xy}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f''_y\left(x, \frac{x}{y}\right)$$

Трохи спростивши, маємо

$$u''_x = f''_x + \frac{2}{y} f''_{xy} + \frac{1}{y^2} f''_y$$

Тепер одразу знайдемо $u''_{xy} = (u'_x)'_y$, тобто

$$u''_{xy} = -\frac{x f''_{xy}}{y^2} - \frac{1}{y^2} f'_y + \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{f''_y x}{y^2}\right)$$

Якщо спростити:

$$u''_{xy} = -\frac{1}{y^3}\left(xy f''_{xy} + y f'_y + x f''_y\right)$$

Нарешті просто похідні по y:

$$u'_y = -\frac{x f'_y}{y^2},\ u''_y = -\frac{y^2 \cdot (x f'_y)'_y - 2xy f'_y}{y^4} = \frac{x}{y^3}(2f'_y - y(f'_y)'_y)$$

Далі помітимо, що $(f'_y)'_y = \left(-\frac{x}{y^2}\right) f''_y$, тому

$$u''_y = \frac{x}{y^3}\left(2f'_y + \frac{x}{y} f''_y\right) = \frac{2x}{y^3} f'_y + \frac{x^2}{y^4} f''_y$$

Завдання 3285

$$u = f(x, xy, xyz)$$

Спочатку знаходимо по x, y, z окремо:

$$u'_x = f'_x + yf'_y + yzf'_z,\ u'_y = xf'_y + xzf'_z,\ u'_z = xyf'_z$$

Далі знаходимо другі похідні по x, y, z:

$$u''_x = (f''_x + yf''_{xy} + yzf''_{xz}) + y(f''_{xy} + yf''_y + yzf''_{yz}) + yz(f''_{xz} + yf''_{yz} + yzf''_z)$$
$$u''_x = f''_x + y^2 f''_y + y^2 z^2 f''_z + 2yf''_{xy} + 2yzf''_{xz} + 2y^2 zf''_{yz}$$

$$u''_y = x(xf''_y + xzf''_{yz}) + xz(xf''_{yz} + xzf''_z) = x^2 f''_y + 2x^2 zf''_{yz} + x^2 z^2 f''_z$$

$$u''_z = xy(xyf''_z) = x^2 y^2 f''_z$$

На попарні xy, yz, xz у мене вже не вистачає сил, але ідея зрозуміла 🙂