3️⃣

Homework #3

Завдання 1540 (б,в).

Пункт Б. Доказати, що $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.

Розв'язок. Скористаємось тим, що якщо оператору φ відповідає деяка матриця переходу A, а спряженому оператору φ^* матриця A^*, то матриця A^* виражається через A наступним чином:

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$$

де $\Gamma = \{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle\}_{n \times n}$, хоча конкретно тут для доведення форма цієї матриці не сильно важлива.

Нехай оператору ψ відповідає матриця B. Тоді оператору $(\varphi + \psi)^*$ відповідає матриця

$$(A+B)^* = \overline{\Gamma^{-1}(A+B)^T \Gamma} = \overline{\Gamma^{-1}(A^T + B^T)\Gamma} = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} + \overline{\Gamma^{-1} B^T \Gamma}$$

Останній вираз є матрицею перетворення $A^* + B^*$, що відповідає $\varphi^* + \psi^*$.

Пункт В. Скористаємося тим самим:

$$(AB)^* = \overline{\Gamma^{-1}(AB)^T \Gamma} = \overline{\Gamma^{-1} B^T A^T \Gamma} = \overline{\Gamma^{-1} B^T \Gamma \Gamma^{-1} A^T \Gamma}$$

Тут ми скористались тим фактом, що $(AB)^T = B^T A^T$, а далі між B^T та A^T вставили вираз $\Gamma\Gamma^{-1}$, що по суті дорівнює одиничній матриці, що не змінює наш вираз. Отже, остаточно

$$(AB)^* = \overline{\Gamma^{-1} B^T \Gamma} \cdot \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = B^* A^*$$

Що відповідає виразу $\psi^* \varphi^*$.

Завдання 1542.

Оскільки в нас євклидове пространство, то якщо перетворенню φ відповідає матриця A, то спряженому перетворенню φ^* відповідає матриця:

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

де $\Gamma = \{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle\}_{n\times n}$. Отже, знайдемо матриці Γ та Γ^{-1}:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2 \rangle & \langle \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця має вид $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3/4 & 3/4 \\ -2 & 3/4 & 11/4 \end{pmatrix}$. Отже, маємо

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3/4 & 3/4 \\ -2 & 3/4 & 11/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Після обрахунків маємо $A^* = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$.