Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #5

Захаров Дмитро

7 травня, 2025

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Вправа 17.2

Умова Задачі 1.1. Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

з умовами $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = t$, $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,0) = x$.

Розв'язання. Зробимо граничні умови однорідними. Для цього замінимо $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, де покладемо у якості $v(x,t)$ наступну функцію:

$$v(x,t) = \frac{x}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t).$$

В нашому випадку $\ell = 1$, $\mu_2(t) = t$, $\mu_1 = 0$. Таким чином, функція $v(x,t) = xt$ і отже заміна $u(x,t) = w(x,t) + xt$. Підставляючи у початкове рівняння, маємо:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w + 2xt, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

з умовами $w(0,t) = 0$, $w(1,t) = 0$, $w(x,0) = 0$ та $\partial_t w(x,0) = 0$.

Тепер розкладемо функцію $w(x,t)$ у ряд Фур'є:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin(n\pi x).$$

Підставляючи у початкове рівняння, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \pi^2 n^2) w_n(t) \sin(n\pi x) + 2xt.$$

Розкладемо $\varphi(x) = 2x$ у ряд Фур'є, себто $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n\pi x$. Для цього запишемо, що

$$\varphi_n = 2\int_0^1 2x \sin n\pi x dx = 4\int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

Проінтегруємо частинами. Нехай $u = x$ та $dv = \sin n\pi x dx$, тоді $du = dx$ та $v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x$. В такому разі інтеграл спрощується до:

$$\varphi_n = 4\left(-x\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x dx \right) = -\frac{4\cos n\pi}{n\pi}$$

Тут ми скористались тим, що правий інтеграл дорівнює нулю, оскільки інтеграл пропорційний до $\sin n\pi x$, що зануляється на межах інтегрування. Таким чином, остаточно:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x.$$

Отже, підставляючи у рівняння знову, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t)\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\pi^2 n^2)w_n(t)\sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi}t\sin n\pi x.$$

Отже, покоефіцієнтна рівність дає нам:

$$\ddot{w}_n(t) = (1-\pi^2 n^2)w_n(t) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}t.$$

Знайдемо початкові умови. Оскільки $w(x,0) = 0$, то $w_n(0) = 0$. Аналогічно, з умови $\partial_t w(x,0) = 0$ маємо $\dot{w}_n(0) = 0$.

Отже, розв'яжемо рівняння. Помітимо, що $1-\pi^2 n^2 < 0$, тому розв'язком однорідної частини є $w_{n,H}(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)$, де ми позначили $\omega_n^2 := \sqrt{\pi^2 n^2 - 1}$ для зручності. Частковий розв'язок шукаємо у вигляді $w_{n,P}(t) = C_n t + D_n$. Підставляємо у рівняння:

$$-\omega_n^2(C_n t + D_n) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}t = 0 \implies C_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi\omega_n^2},\ D_n = 0.$$

Отже, загальний розв'язок:

$$w_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t + \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi\omega_n^2}t.$$

З умови $w_n(0) = 0$ знаходимо $A_n = 0$. З умови $\dot{w}_n(0) = 0$ знаходимо

$$\dot{w}_n(t) = \omega_n B_n\cos\omega_n t - \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2} \implies \dot{w}_n(0) = \omega_n B_n - \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2} = 0 \implies B_n = \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^3}.$$

Отже, остаточно:

$$w_n(t) = \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^3}\sin\omega_n t - \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2}t = \frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - t\right).$$

Отже, маємо наступний розв'язок:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin n\pi x + xt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - t\right)\sin n\pi x + xt.$$

Або, якщо скористатися тим, що $\omega_n^2 = \sqrt{\pi^2 n^2 - 1}$, то

$$u(x,t) = xt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi(\pi^2 n^2 - 1)}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\pi^2 n^2 - 1}\cdot t\right)}{\sqrt{\pi^2 n^2 - 1}} - t\right)\sin n\pi x.$$

Відповідь. $u(x,t) = xt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n\pi\omega_n^2}\left(\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - t\right)\sin n\pi x$ де $\omega_n^2 = \pi^2 n^2 - 1$.

1.2 Вправа 17.4

Умова Задачі 1.2. Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \pi/2, t > 0$$

з умовами $\partial_x u(0,t) = 2t$, $u(\pi/2,t) = \pi t$, $u(x,0) = \cos x$, $\partial_t u(x,0) = 2x$.

Розв'язання. Маємо крайові умови $\partial_x u(0,t) = \mu_1(t) = 2t$ та $u(\ell,t) = \mu_2(t) = \pi t$ для $\ell = \pi/2$. Зробимо граничні умови однорідними за допомогою заміни $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$, де $v(x,t) = \mu_1(t)(x-\ell) + \mu_2(t)$. Отже, $v(x,t) = 2t(x - \frac{\pi}{2}) + \pi t = 2tx$, тоді заміна має простий вигляд $u(x,t) = w(x,t) + 2tx$. Підставимо у початкове рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\frac{\partial w}{\partial t} + 4x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \pi/2, t > 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \pi/2, t > 0$$

В такому разі крайові умови $\partial_x w(0,t) = 0$, $w(\pi/2,t) = 0$ та початкові умови мають вигляд $w(x,0) = \cos x$, $\partial_t w(x,0) = 0$. Враховуючи крайові умови, розкладемо функцію $w(x,t)$ у наступний ряд Фур'є:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\cos((2n-1)x)$$

Підставляючи у рівняння, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{w}_n(t) + 2\dot{w}_n(t) + (2n-1)^2 w_n(t)\right)\cos((2n-1)x) = 8e^t \cos x$$

Запам'ятаємо це. Тепер, підставимо початкові умови. Умова $w(x,0) = \cos x$ дає нам те, що $w_1(0) = 1$, проте $w_n(0) = 0$ для $n > 1$. Умова $\partial_t w(x,0) = 0$ дає нам те, що $\dot{w}_n(0) = 0$ для всіх n. Таким чином, маємо два випадки.

Випадок 1. $n = 1$. Тоді, підставляючи у рівняння, отримаємо:

$$\ddot{w}_1(t) + 2\dot{w}_1(t) + w_1(t) = 8e^t, \quad w_1(0) = 1, \dot{w}_1(0) = 0$$

Характеристичне рівняння для однорідної частини має вигляд $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, звідки $\lambda_0 = -1$ — корінь кратності 2. Отже, загальний розв'язок має вигляд $w_{1,H}(t) = (a+bt)e^{-t}$. Частковий розв'язок шукаємо у вигляді $w_{1,P}(t) = Ce^t$. Підставляючи у рівняння, отримаємо $4Ce^t = 8e^t$, звідки $C = 2$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$w_1(t) = (a+bt)e^{-t} + 2e^t$$

Початкові умови задають коефіцієнти: $w_1(0) = a + 2 = 1$, звідки $a = -1$. Похідна має вигляд $\dot{w}_1 = (b - a - bt)e^{-t} + 2e^t$, тому $\dot{w}_1(0) = b - a + 2 = 0$, звідки $b = -3$. Отже:

$$w_1(t) = -(1+3t)e^{-t} + 2e^t$$

Випадок 2. $n > 1$. Тоді, підставляючи у рівняння, отримаємо:

$$\ddot{w}_n(t) + 2\dot{w}_n(t) + (2n-1)^2 w_n(t) = 0, \quad w_n(0) = 0, \dot{w}_n(0) = 0$$

Зрозуміло, що таке рівняння дає тривіальний розв'язок $w_n(t) = 0$ для всіх $n > 1$. Отже, розв'язок $w(x,t)$:

$$w(x,t) = \left(2e^t - (1+3t)e^{-t}\right)\cos x$$

Таким чином, остаточно:

$$u(x,t) = \left(2e^t - (1+3t)e^{-t}\right)\cos x + 2tx$$

Відповідь. $u(x,t) = \left(2e^t - (1+3t)e^{-t}\right)\cos x + 2tx$.