Комплексний Аналіз

Весняний семестр 2024

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Гиря Н.П.*

Контрольна робота 1

§ Обчислення лишків. Варіант 12 §

Задача 1:

Умова. Обчислити лишок: $\mathrm{Res}_{z=-3/2} \tan \pi z$.

Розв'язання. Спочатку запишемо, що

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \tag{1.1}$$

Бачимо, що точка $z = -3/2$ є нулем знаменника і не є нулем чисельника. Окрім того, вона є полюсом першого порядку (оскільки $(\cos \pi z)'\Big|_{z=-3/2} \neq 0$). Тому, лишок можемо обрахувати за допомогою формули

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1.2}$$

Підставимо:

$$\mathrm{Res}_{z=-3/2} f(z) = \lim_{z \to -3/2} \left(z + \frac{3}{2} \right) \tan \pi z \tag{1.3}$$

Далі обраховуємо границю:

$$\mathrm{Res}_{z=-3/2} f(z) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \tan \left(\pi\epsilon - \frac{3\pi}{2} \right) = - \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\tan \pi\epsilon} \tag{1.4}$$

Оскільки $\tan \pi\epsilon \sim_{\epsilon \to 0} \pi\epsilon$, остаточно отримуємо:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z=-3/2} f(z) = -\frac{1}{\pi}} \tag{1.5}$$

Відповідь. $\mathrm{Res}_{z=-3/2} f(z) = -\frac{1}{\pi}$

Задача 2:

Умова. Вказати усі особливі точки (з детальним поясненням):

$$f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1} \tag{2.1}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо нулі знаменника:

$$e^z = 1 \implies z = 2\pi i \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

З цих точок лише $z = 0$ є також нулем чисельника. Причому, оскільки $\sin z \sim_{z\to 0} z, e^z - 1 \sim_{z\to 0} z$, то

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z} = 1. \tag{2.3}$$

Тому, $z = 0$ є *усувною особливістю.*

Для усіх інших точок помічаємо, що вони є нулями першого порядку знаменника, але не є нулями чисельника. Дійсно, для похідної $(e^z - 1)'\Big|_{z=2\pi ki} = e^z\Big|_{z=2\pi ki} = 1 \neq 0$. Тому, точки

$$z_k = 2\pi ki,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{2.4}$$

є *полюсами першого порядку* (можна також переконатись, що $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ є усувними особливостями функцій $\{(z - z_k)f(z)\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$).

Нарешті, оскільки в нас нескінченно багато нулів знаменника, причому розкиданних рівномірно по уявній вісі, то $z = \infty$ є *неізольованою особливістю.*

Відповідь.

- $z = 0$ – усувна особливість.
- $z_k = 2\pi ki,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – полюси першого порядку.
- $z = \infty$ – неізольована особливість.

Задача 3:

Умова. Обчислити лишок:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z),\ f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$$

Розв'язання.
Спосіб 1. По-перше бачимо, що $z=\infty$ є усувною особливістю, оскільки $\lim_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z^2}=f(\infty)=0$. Далі, скористаємось наступною формулу для обрахунку лишка:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}z(f(\infty)-f(z))=-\lim_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z}=\boxed{-1} \tag{3.1}$$

Спосіб 2. Скористаємось формулою:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)=-\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=-\mathrm{Res}_{z=0}\sin\frac{1}{z} \tag{3.2}$$

Оскільки

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\cdot z^3}+\frac{1}{5!\cdot z^5}+\dots, \tag{3.3}$$

то лишок у $z=0$ відповідає коефіцієнту c_{-1}, що дорівнює 1. Отже, $\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)=-1$.

Відповідь. $\mathrm{Res}_{z=\infty}f(z)=-1$.

Задача 4:

Умова. Обчислити лишок:

$$\mathrm{Res}_{z=0}f(z),\ f(z)=\frac{z}{(e^{5z}-1)^2}$$

Розв'язання. Спочатку визначимо тип точки $z=0$. По-перше, це нуль як чисельника, так і знаменника. Тому, потрібно з'ясувати степінь нуля у кожній з частин. У чисельнику очевидно маємо нуль першого порядку. У знаменнику, спочатку знайдемо степінь нуля для $e^{5z}-1$. Як мінімум маємо першу степінь. Якщо взяти похідну, то отримаємо $(e^{5z}-1)'=5e^{5z}\Big|_{z=0}=5\neq 0$. Тому, $z=0$ є нулем другого порядку для $(e^{5z}-1)^2$, а значить $z=0$ є полюсом першого порядку для нашої функції. Тому, лишок обраховуємо за допомогою формули:

$$\mathrm{Res}_{z=0}f(z)=\lim_{w\to 0}wf(w)=\frac{w^2}{(e^{5w}-1)^2}. \tag{4.1}$$

Оскільки $e^{\alpha w} - 1 \sim_{w \to 0} \alpha w$, то маємо:

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{w \to 0} \frac{w^2}{25w^2} = \boxed{\frac{1}{25}} \tag{4.2}$$

Відповідь. $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{25}$.

Задача 5:

Умова. Вказати функцію $f(z)$, у якої в $z = \infty$ полюс другого порядку, а лишок дорівнює 0.

Розв'язання. Те, що $z = \infty$ є полюсом другого порядку $f(z)$ означає, що $z = 0$ є полюсом другого порядку для функції $\phi(z) = f(\frac{1}{z})$. Для умови з лишками згадаємо, що

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -\mathrm{Res}_{z=0} \frac{\phi(z)}{z^2} = 0 \tag{5.1}$$

Тобто, якщо розкласти $\phi(z)$ у ряд Лорана, то коефіцієнт c_1 (важливо, що не c_{-1}, а саме c_1) дорівнює 0. Отже, достатньо обрати $\phi(z) = \frac{1}{z^2}$, а тоді вираз для $f(z)$ виходить дуже простий: $f(z) = z^2$.

Відповідь. $f(z) = z^2$.