Домашнее задание по математической практике
Захаров Дмитрий, МП-11, 1 академическая группа

Задача 4(а). Решить неравенство

$$||x-3|-5| \leq 8$$

Решение. Заметим, что данное выражение эквивалентно:

$$-3 \leq |x-3| \leq 13$$

Модуль всегда неотрицателен, поэтому левая часть неравенства выполняется $\forall x \in \mathbb{R}$. Поэтому остаётся лишь определить, когда $|x-3| \leq 13$. Однако, это решается совсем просто: $x \in [-10, 16]$.

Ответ: $x \in [-10, 16]$.

Задача 4(б). Решить неравенство

$$||2x+1|+x| \geq 3x+1$$

Решение. Заметим следующее: если правая часть отрицательна, то данное неравенство выполняется всегда. Поэтому промежуток $x \in (-\infty, -1/3]$ всегда является решением.

Далее заметим, что наше уравнение сводится к решению системы уравнений:

$$\left[\begin{aligned} |2x+1| &\geq 2x+1 \\ |2x+1| &\leq -4x-1 \end{aligned}\right.$$

Верхнее уравнение выполняется всегда. Поэтому и их объединение выполняется всегда. Таким образом, имеем ответ.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$

Задача 5(а). При каких значениях параметра a неравенство имеет решения?

$$|x+2|+|x-3| < a$$

Решение. Легче всего построить график функции $f(x) = |x+2| + |x-3|$:

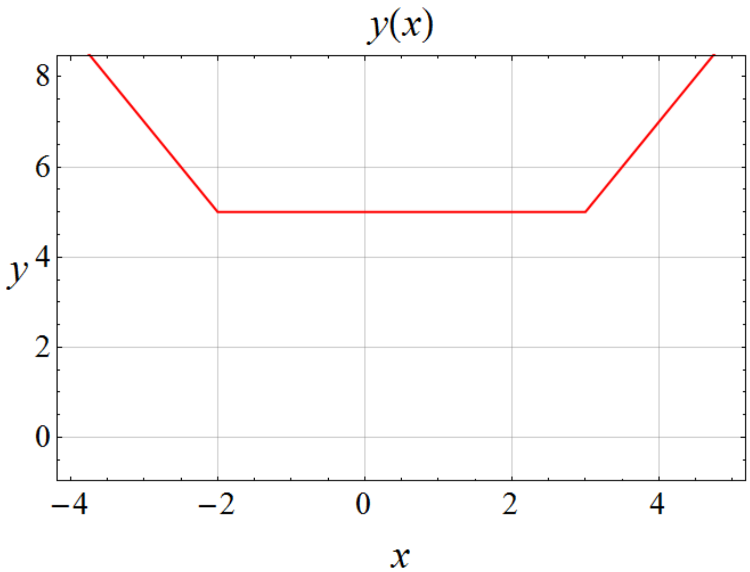

Рис. 1: Функция $f(x) = |x+2| + |x-3|$

Видим, что если мы будем проводить график $g(x) = a$ для $a \leq 5$, то решений не будет.

Ответ: $a > 5$

Задача 5(a). При каких значениях параметра a неравенство имеет решения?

$$|x-a| + |x-6a| < 10$$

Решение. На самом деле, график $f(x) = |x-a|+|x-6a|$ представляет из себя 'ковш' на некоторой высоте, которую можно задать функцией от a, т.е. $h(a)$. При этом ветви этого 'ковша' направлены вверх, а значит $\min f(x) = h(a)$ (это можно показать, раскрыв модули и рассмотрев функцию на 3 промежутках). При этом, функция $h(a)$ может быть задана следующим образом:

$$h(a) = 5|a|$$

Решение будут лишь в том случае, когда $h(a) < 10$. Заметим, что это выполняется, если $a \in (-2, 2)$.

Ответ: $a \in (-2, 2)$.

Задача 5(а). Дана последовательность:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$$

Доказать, что данная последовательность:

- Возрастающая
- Ограниченная
- Имеет предел (также определить его)

Решение. Перед тем, как начинать доказывать все пункты, определим формульно последовательность. Зададим её рекуррентно, а именно:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2},\ a_1 = \sqrt{2}$$

Докажем первый пункт по индукции.

База индукции. Для $n = 1$ имеем $\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, что очевидно выполняется.

Индуктивный переход. Предположим, что для $n = k$ утверждение выполняется, т.е. $a_{k+1} > a_k$. Теперь положим $n = k + 1$. Нам нужно показать, что $a_{k+2} > a_{k+1}$. Для этого рассмотрим разность $a_{k+2} - a_{k+1}$:

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \sqrt{a_{k+1} + 2} - \sqrt{a_k + 2} > \sqrt{a_k + 2} - \sqrt{a_k + 2} = 0$$

В переходе на неравенство мы учли, что из предположения $a_{k+1} > a_k$. Таким образом, мы получили, что $a_{k+2} - a_{k+1} > 0$ или же $a_{k+2} > a_{k+1}$. Таким образом, индуктивный переход выполняется, а следовательно последовательность действительно возрастающая.

Докажем ограниченность, т.е. докажем, что:

$$\exists l, r \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ l < a_n < r$$

С l разобраться легче всего: просто зададим $l = -1$. Раз последовательность монотонно возрастающая, а её первый элемент равен $\sqrt{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > -1$.

Для правой границы зададим $r = 3$. В таком случае нам нужно доказать, что $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 3$. Докажем это снова-таки по индукции:

База индукции. $n = 1$: $a_1 = \sqrt{2} < 3$.

Индуктивный переход. Пусть для некоторого $n = k$ выполняется $a_k < 3$. Докажем, что $a_{k+1} < 3$. Заметим, что

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 3} = \sqrt{5} < 3$$

Таким образом, индуктивный переход работает, а значит $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 3$.

Из предыдущих двух пунктов по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что предел существует.

Осталось лишь найти его точное значение. Для этого воспользуемся следующим:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}} = 2^{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}} = 2^{1-1/2^n}$$

Таким образом, наш предел:

$$\lim_{n \to \infty} 2^{1-1/2^n} = 2^{1-\lim_{n\to\infty}(1/2^n)} = 2$$

Таким образом, наш предел равен 2.