✏️

Homework #8 (0.5/1)

Завдання 773(c)

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2)$$

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 8,\ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

Розв'язок. Нехай (x_1, x_2, x_3) — трійка розв'язків $f(x) = 0$. За теоремою Вієтта, маємо

$$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{-6}{5} = \frac{6}{5},\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{5}$$

$$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{-8}{5} = \frac{8}{5}$$

Залишилось виразити $P(x_1, x_2, x_3)$ через $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Старший член $x_1^4x_2^2$. В такому разі маємо таку таблицю

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	Product
4	2	0	2	2	0	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
4	1	1	3	0	1	$\sigma_1^3\sigma_3$
3	3	0	0	3	0	σ_2^3
3	2	1	1	1	1	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2	2	2	0	0	2	σ_3^2

Отже маємо $P = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \alpha\sigma_1^3\sigma_3 + \beta\sigma_2^3 + \gamma\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \delta\sigma_3^2$. Спочатку підставимо $(1, -1, 0)$. Отримаємо $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = 0$, тому

$$P = -\beta = 1 \to \beta = -1$$

Тепер занулимо σ_1 без занулення σ_3. Для цього підставимо $(1, 1, -2)$. В такому випадку отримаємо $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -3, \sigma_3 = -2$. Тоді

$$P = \beta\sigma_2^2 + \delta\sigma_3^2 = 27 + 4\delta = 27 \to \delta = 0$$

Нехай тепер відставимо $(1, 1, 1)$ та $(1, 1, -1)$. Для першого випадку $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$, для другого $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$. Отже, будемо мати

$$P(1, 1, 1) = 81 + 27\alpha + 27\beta + 9\gamma + \delta = 27 \to 27\alpha + 9\gamma = -27$$

Тобто звідси $3\alpha + \gamma = -3$.

Тепер підставляємо $(1, 1, -1)$:

$$P(1, 1, -1) = 1 - \alpha + 1 + \gamma = 3 \to -\alpha + \gamma = 1$$

Звідси $\alpha = -1, \gamma = 0$. Отже маємо

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3$$

Підставляємо $\sigma_1 = 6/5, \sigma_2 = 7/5, \sigma_3 = 8/5$. Маємо

$$P = -\frac{1679}{625}$$

Завдання 786

Очевидно, що $s_1 = \sigma_1$. Далі скористаємось формулою Ньютона:

$$s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 \to s_2 = s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Цей результат ми отримували у минулому домашньому завданні 🙂

Далі

$$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \to s_3 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

А отже $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Далі $s_4 - s_3\sigma_1 + s_2\sigma_2 - s_1\sigma_3 + 4\sigma_4 \to s_4 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\sigma_1 - (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$

Аналогічним чином отримаємо

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_1^2\sigma_4 + 3\sigma_3^2 + 6\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6$$