Іспит з предмету "Прикладні задачі теорії керування"

Захаров Дмитро

2 грудня, 2024

Варіант 5

Умова. Розглянути задачу синтезу для канонічної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}, \quad |u| \leq 1.$$

(А) Сформулювати постановку задачі синтезу. **(3 бали)**.

(Б) Для канонічної системи за допомогою заданого характеристичного поліному $\chi(\lambda) = (\lambda + 6)^2$ матриці $\boldsymbol{A}_1$ та заданої матриці $\boldsymbol{W} = 3\boldsymbol{E}_{2\times 2}$ побудувати розв'язок задачі синтезу. Знайти матрицю $\boldsymbol{F}$ — розв'язок рівняння Ляпунова **(6 балів)**.

(В) Сформулювати критерій Сільвестра. Перевірити за цим критерієм, що матриця $\boldsymbol{F}$ є додатно визначеною. **(6 балів)**.

(Г) Знайти обмеження на параметр α, щоб матриця $\boldsymbol{F}^{\alpha}$ була додатно визначеною. **(6 балів)**.

(Д) Виписати рівняння на функцію керованості. Знайти обмеження на коефіцієнт a_0 в цьому рівнянні. Виписати формулу керування. **(6 балів)**.

(Е) Знайти похідну від функції керованості (за визначенням, без програми). **(7 балів)**.

(Ж) Знайти обмеження на час руху з довільної початкової точки в початок координат. Для цього порахувати власні значення відповідної матриці **(6 балів)**.

Розв'язання. (**Синім кольором** виділені відповіді на питання.)

Пункт (А). Постановка задачі синтезу. Розглядається система:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{0} \in \mathrm{int}(\Omega), \quad r \leq n,$$

де Ω — обмеження на керування (наприклад, $\|\mathbf{u}\|_2 \leq 1$). **Задача синтезу** полягає у побудові керування $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \Omega$, що переведе систему з довільної початкової точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{0}$ за скінченний час $T(\mathbf{x}_0)$[1]. Відповідна задача Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{0}, \quad T = T(\mathbf{x}_0)$$

Часто додатково вимагається, щоб цей час був мінімальним (себто, за час $\widetilde{T} = \min_{u \in \mathcal{U}} T(\mathbf{x}_0, u)$). Тоді така задача називається *задачею швидкодії*.

Пункт (Б). Знаходження матриці F. Зокрема, ми розглядаємо випадок $n = 2$, $r = 1$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ і функція f має вигляд:

$$f(\mathbf{x}, u) = \boldsymbol{A}_0 \mathbf{x} + \boldsymbol{\beta} u, \quad \boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Така система називається канонічною. Далі, для побудови розв'язку знайдемо матрицю $\boldsymbol{A}_1$. Вона має вигляд:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{A}_1 - \lambda \boldsymbol{E}_{2\times 2}) = \chi(\lambda)$$

Тому, візьмемо $a_1 = -36$, $a_2 = -12$. Матриця $\boldsymbol{W}$ дана. Ляпуновим доведено, що існує єдина додатно визначена $\boldsymbol{F}$, що задовільняє рівняння Ляпунова:

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^\top \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{W}.$$

Дійсно, нехай $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ і підставимо це у рівняння:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -36 \\ 1 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Прирівняємо поелементно обидві частини; отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -36 f_{12} - 36 f_{21} = -3 \\ f_{11} - 12 f_{12} - 36 f_{22} = 0 \\ -36 f_{22} + f_{11} - 12 f_{21} = 0 \\ f_{21} - 12 f_{22} + f_{12} - 12 f_{22} = -3 \end{cases}$$

Звідси маємо наступний розв'язок:

$$f_{11} = \frac{41}{8}, \quad f_{12} = \frac{1}{24}, \quad f_{21} = \frac{1}{24}, \quad f_{22} = \frac{37}{288}$$

Отже, матриця має вигляд:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{41}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{37}{288} \end{bmatrix}$$

[1] В загальному випадку, можна вимагати, щоб кінцева точка була $\mathbf{x}_T \neq \mathbf{0}$, проте в такому випадку проста заміна $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_T$ зводить задачу до еквівалентної: $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z} + \mathbf{x}_T, \mathbf{u}) = \widetilde{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u})$, де $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_T =: \mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(T) = \mathbf{0}$.

Пункт (В). Критерій Сільвестра. Критерій Сільвестра сформулюємо наступним чином. Нехай задана матриця $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Через $\boldsymbol{A}_{:k}$ позначимо верхній лівий $k\times k$ блок матриці $\boldsymbol{A}$. Матриця $\boldsymbol{A}$ є додатно визначеною (себто $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{A}\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$) тоді і тільки тоді, коли $\det(\boldsymbol{A}_{:k}) > 0$ для всіх $k = 1,\dots,n$. Перевірімо це для матриці $\boldsymbol{F}$.

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{41}{8} > 0, \quad \det(\boldsymbol{F}_2) = \det \boldsymbol{F} = \frac{41}{8}\cdot\frac{37}{288} - \frac{1}{24^2} = \frac{1513}{2304} > 0.$$

Отже, матриця $\boldsymbol{F}$ є додатно визначеною.

Пункт (Г). Обмеження на параметр α. Згідно теорії, маємо $\alpha \geq \max\{\alpha_0, 1\}$, де параметр α_0 знаходиться як:

$$\alpha_0 = \max\left\{\nu \in \mathbb{R} : \det\left\{f_{ij}(\nu + m + n - i - j + 1)\right\}_{1\leq i,j\leq n} = 0\right\}.$$

В нашому випадку $n = m = 2$, тому:

$$\alpha_0 = \max\left\{\nu \in \mathbb{R} : \det\left\{f_{ij}(\nu + 5 - i - j)\right\}_{1\leq i,j\leq n} = 0\right\}.$$

Стало трошечки легше. Тепер, знаходимо детермінант матриці:

$$\det\left\{f_{ij}(\nu + 5 - i - j)\right\}_{1\leq i,j\leq n} = \det\begin{bmatrix} \frac{41}{8}(\nu+3) & \frac{1}{24}(\nu+2) \\ \frac{1}{24}(\nu+2) & \frac{37}{288}(\nu+1)\end{bmatrix} = \frac{1513}{2304}\nu^2 + \frac{6052}{2304}\nu + \frac{4535}{2304}.$$

Порахуємо корені чисельно. Маємо $\nu_1 \approx -3.001$, $\nu_2 \approx -0.99$. Таким чином, обидва корені є від'ємними, тому $\alpha \geq 1$. Таким чином, подалі покладемо $\alpha := 1$.

Пункт (Д). Згідно лекції, рівняння на керування

$$2a_0\Theta^{1+\frac{m+n-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}}x_ix_j = 0.$$

В цьому рівнянні треба знайти обмеження на a_0. В загальному випадку, воно має вигляд

$$0 < a_0 \leq \frac{d^2}{2\langle \boldsymbol{F}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}$$

де обмеження на керування виглядає як $|u| \leq d$. Конкретно нас цікавить $d = 1$ і вектор $\mathbf{a} = (-36, -12)$. Знайдемо вираз в знаменнику:

$$\langle \boldsymbol{F}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle \approx \begin{bmatrix} -36 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.195 & -0.063 \\ -0.063 & 7.804 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -36 \\ -12 \end{bmatrix} \approx 1322.5$$

Отже, $0 < a_0 \lessapprox 0.00037$. Тому візьмемо $a_0 := 0.0003 = \frac{3}{10000}$. Випишемо в такому випадку формулу керування. Спочатку відставимо отриманий a_0 та $n = m = 2$ з $\alpha = 1$.

$$\frac{3}{5000}\Theta^4 - \sum_{i,j=1}^{2} f_{ij}\Theta^{i+j-2}x_ix_j = \frac{3}{5000}\Theta^4 - (f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2\Theta + f_{22}x_2^2\Theta^2) = 0.$$

Тепер підставимо відомі значення f_{ij}:

$$\frac{3}{5000}\Theta^4 = \frac{41}{8}x_1^2 + \frac{1}{12}x_1x_2\Theta + \frac{37}{288}x_2^2\Theta^2$$

Отже, керування підставлятимемо у вигляді $u(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n a_i x_i / \Theta^{\frac{n-i+1}{\alpha}}(\mathbf{x})$. В нашому випадку, маємо:

$$u(x_1, x_2) = -\frac{36x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{12x_2}{\Theta(x_1, x_2)}$$

Пункт (Е). Знайдемо похідну від функції керованості ручками. Проте, числа одразу підставляти не будемо. Маємо:

$$\frac{d}{dt}\left(2a_0\Theta^4\right) = \frac{d}{dt}\left(f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2\Theta + f_{22}x_2^2\Theta^2\right)$$

Далі починаємо диференціювати:

$$6a_0\Theta^3\dot{\Theta} = 2f_{11}x_1x_2 + 2f_{12}(x_2^2\Theta + x_1x_2\dot{\Theta} + u(x_1,x_2)x_1\Theta) + 2f_{22}(x_2u(x_1,x_2)\Theta^2 + x_2^2\Theta\dot{\Theta})$$

Тут ми скористались тим, що система канонічна:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u(x_1, x_2) \end{cases}$$

Підставимо числа та функцію керування $u(x_1, x_2) = -\frac{36x_1}{\Theta^2(x_1,x_2)} - \frac{12x_2}{\Theta(x_1,x_2)}$:

$$\dot{\Theta} = \frac{270000(x_1^2 + \Theta^2x_2^2)}{-7500x_1x_2\Theta - 23125x_2^2\Theta^2 + 216\Theta^4}$$

Якщо підставити $\Theta^4 = \frac{1}{2a_0}(f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2\Theta + f_{22}x_2^2\Theta^2)$, то отримаємо:

$$\dot{\Theta} = -\frac{432(x_1^2 + x_2^2\Theta^2)}{2952x_1^2 + 36x_1x_2\Theta + 37x_2^2\Theta^2}$$

Пункт (Ж). Спочатку складемо матрицю F^α:

$$F^\alpha = \left\{\left(1 + \frac{n+m+1-i-j}{\alpha}\right)f_{ij}\right\}_{1\le i,j\le n} = \begin{bmatrix} 4f_{11} & 3f_{12} \\ 3f_{21} & 2f_{22} \end{bmatrix}$$

Підставимо визначені значення f_{ij}:

$$F^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{164}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{37}{144} \end{bmatrix}$$

Тепер розв'язуємо рівняння $\det(\boldsymbol{W} - \nu\boldsymbol{F}^\alpha) = 0$:

$$\det\begin{bmatrix} 3 - \frac{164}{8}\nu & -\frac{3}{8}\nu \\ -\frac{3}{8}\nu & 3 - \frac{37}{144}\nu \end{bmatrix} = \frac{3025\nu^2}{576} - \frac{2989\nu}{48} + 9 = 0$$

Оскільки корені цього рівняння не дуже привабливі, то випишемо їх чисельно:

$$\nu_{\min} \approx 0.15, \quad \nu_{\max} \approx 11.71$$

Таким чином, похідна функції Θ задовільняє нерівності:

$$-\nu_{\max} \leq \dot{\Theta} \leq -\nu_{\min} \Leftrightarrow -11.71 \leq \dot{\Theta} \leq -0.15$$

Нехай початкова точка має вигляд $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$. В такому разі обмеження на час $T(\mathbf{x}_0)$ потрапляння довільної точки в початок координат задовільняє нерівності:

$$\frac{1}{\nu_{\max}}\Theta(x_1^0, x_2^0) \leq T(x_1^0, x_2^0) \leq \frac{1}{\nu_{\min}}\Theta(x_1^0, x_2^0).$$

Або, якщо підставити чисельні значення:

$$0.085\Theta(x_1^0, x_2^0) \leq T(x_1^0, x_2^0) \leq 6.834\Theta(x_1^0, x_2^0)$$