Домашня робота з математичного аналізу #13

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

28 березня 2023 р.

Завдання 2.1.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\iint_E f(x,y)dxdy$ у полярних координатах у вигляді повторного інтеграла, якщо множина E визначається умовою $x^2+y^2 \le r^2$

Розв'язок. Отже робимо заміну координат $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$. В такому випадку наша область стає $\rho \le r$ і тому:

$$\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy = \iint_{\rho\le r} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

У вигляді повторного інтегралу це запишеться як:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

Завдання 2.2.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\iint_E f(x,y)dxdy$ у полярних координатах у вигляді повторного інтеграла, якщо множина E визначається умовою $x^2+y^2 \le 2y$.

Розв'язок. Помітимо, що ми маємо ГМТ круга $x^2+(y-1)^2 \leq 1$. Отже має сенс зробити підстановку $x = \rho\cos\theta, y = 1+\rho\sin\theta$. В такому разі наша область зведеться до:

$$E_\theta : \rho < 1$$

Ця підстановка нічим не відрізняється від підстановки без здвигу на одиничку, оскільки в Якобіані присутні лише частинні похідні x, y по новим змінним, а отже додавання константи ніяк не впливає на значення Якобіану.

Отже, маємо аналогічно до попереднього прикладу

$$\iint_{x^2+y^2\leq 2y} f(x,y)dxdy = \iint_{\rho<1} f(\rho\cos\theta, 1+\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta, 1+\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

Завдання 2.3.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E f(x,y)dxdy$ у полярних координатах у вигляді повторного інтеграла, якщо множина E визначається умовою $r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2$.

Розв'язок. Завдання повністю еквівалентне завданню 2.1 за винятком меж інтегрування:

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

Завдання 2.4.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E f(x,y)dxdy$ у полярних координатах у вигляді повторного інтеграла, якщо множина E визначається умовами $x^2+y^2 \leq 4x, y \leq x$.

Розв'язок. Перша умова множини відповідає кругу:

$$(x-2)^2+y^2 \leq 4$$

Друга умова відповідає напівплощині нижче за пряму $y = x$.

Перейдемо у полярні координати відносно центра кола, тобто зробимо заміну змінних:

$$x = 2 + \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$$

Тоді перша умова очевидно стає $\rho \leq 2$, а ось друга:

$$\rho\sin\theta \leq 2 + \rho\cos\theta \to \rho \leq \frac{2}{\sin\theta - \cos\theta}$$

Тому наш інтеграл можна записати як:

$$\mathcal{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 f(2 + \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho +$$
$$\int_{\pi}^{3\pi/2} d\theta \int_0^{2/(\sin\theta - \cos\theta)} f(2 + \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

Завдання 3.1.

Умова. Обчислити подвійний інтеграл

$$\mathcal{I} = \iint_{x^2+y^2\leq r^2 \wedge x\geq 0 \wedge y \geq 0} \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

Розв'язок. Робимо заміну $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, тоді

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^r \rho \cdot \rho d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{r^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^3}{6}$$

Завдання 3.2.

Умова. Обчислити подвійний інтеграл

$$\mathcal{I} = \iint_{e^2\leq x^2+y^2\leq e^4} \ln(x^2+y^2) dxdy$$

Розв'язок. Робимо заміну $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, тоді

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} \ln(\rho^2)\cdot\rho d\rho = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} \rho\ln\rho d\rho$$

Знаходимо спочатку внутрішній інтеграл:

$$\int_e^{e^2} \rho\ln\rho d\rho = \begin{vmatrix} v = \ln\rho & du = \rho d\rho \\ dv = \frac{d\rho}{\rho} & u = \frac{\rho^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{\rho^2\ln\rho}{2}\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{2}\int_e^{e^2} \rho d\rho =$$

$$\frac{2e^4 - e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^4 - e^2}{2} = \frac{4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

Отже остаточно:

$$\mathcal{I} = 2\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{3e^4 - e^2}{4} = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{3e^4 - e^2}{4} = \pi e^2(3e^2 - 1)$$