



Симплекс метод №1

Завдання 1.

$$L(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -5x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Доповнимо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 6 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Отже

$$\begin{cases} x_3 = -1 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 5x_1 - x_2 \\ x_5 = -x_1 + 5x_2 \\ x_6 = 6 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Оскільки мінімальний від'ємний вільний член -1 відповідає x_3 , змінюємо x_1, x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 + x_3 \\ x_4 &= 5 - 5x_2 + 5x_3 - x_2 = 5 - 6x_2 + 5x_3 \\ x_5 &= -1 + x_2 - x_3 + 5x_2 = -1 + 6x_2 - x_3 \\ x_6 &= 6 - 1 + x_2 - x_3 - x_2 = 5 - x_3 \end{aligned}$$

Бачимо вільний член -1 у додатка x_5 , тому змінюємо x_2, x_5 :

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5$$

Підставляємо у інші рівняння:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5 + x_3 = \frac{5}{6} + \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5$$

$$x_4 = 5 - 1 - x_3 - x_5 + 5x_3 = 4 + 4x_3 - x_5$$

$$x_6 = 5 - x_3$$

Бачимо можливий розв'язок $(5/6, 1/6, 0, 4, 0, 5)$. Цільова функція:

$$L = x_1 + x_2 = \frac{5}{6} - \frac{7}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5 = 1 - x_3$$

Отже змінюємо x_3, x_6 : $x_3 = 5 - x_6$ і тому

$$x_1 = \frac{5}{6} + \frac{25}{6} - \frac{5}{6}x_6 - \frac{1}{6}x_5 = 5 - \frac{5}{6}x_6 - \frac{1}{6}x_5$$

$$x_4 = 4 + 20 - 4x_6 - x_5 = 24 - 4x_6 - x_5$$

$$x_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6}x_6 + \frac{1}{6}x_5 = 1 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6$$

Тому цільова функція:

$$L = x_1 + x_2 = 6 - x_6$$

Отже $L_{\max} = 6$.

Розв'яжемо тепер цю задачу таблицею. Для цього запишемо наше рівняння трохи в іншому вигляді:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 6 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Тому наша таблиця має вид:

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_3	—1	—1	1	0	0	0	—1
x_4	—5	1	0	1	0	0	0
x_5	1	—5	0	0	1	0	0
x_6	1	1	0	0	0	1	6
L	—1	—1	0	0	0	0	0

Мінімальний від'ємний вільний член —1, тому змінюємо x_1, x_3 :

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_1	1	1	—1	0	0	0	1
x_4	—5	1	0	1	0	0	0
x_5	1	—5	0	0	1	0	0
x_6	1	1	0	0	0	1	6
L	—1	—1	0	0	0	0	0

Зануляємо все під x_1 :

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_1	1	1	—1	0	0	0	1
x_4	0	6	—5	1	0	0	5
x_5	0	—6	1	0	1	0	—1
x_6	0	0	1	0	0	1	5
L	0	0	—1	0	0	0	1

Мінімальний вільний член — —1, тому змінюємо x_2, x_5 . Для цього ділимо рядок з x_5 на —6:

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_1	1	1	—1	0	0	0	1
x_4	0	6	—5	1	0	0	5
x_2	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
x_6	0	0	1	0	0	1	5
L	0	0	—1	0	0	0	1

Зануляємо рядок під x_2 :

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_1	1	0	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{6}$
x_4	0	0	-4	1	1	0	4
x_2	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
x_6	0	0	1	0	0	1	5
L	0	0	-1	0	0	0	1

Маємо розв'язок $(5/6, 1/6, 0, 4, 0, 5)$. У строчці з $L \in -1$, тому потрібно змінити x_3 з x_6 . Тому зануляємо усе під та над x_3 окрім строчки з x_6 :

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	5
x_4	0	0	0	1	1	4	24
x_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
x_3	0	0	1	0	0	1	5
L	0	0	0	0	0	1	6

Маємо оптимальний розв'язок $(5, 1, 5, 24, 0, 0)$ де $L_{\max} = 6$.

Завдання 2.

$$L(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо алгебраїчним методом. Маємо

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Отже

$$\begin{cases} x_3 = 7 - 5x_1 + 2x_2 \\ x_4 = 5 + x_1 - x_2 \\ x_5 = 6 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Маємо допустимий розв'язок $(0, 0, 7, 5, 6)$. Отже

$$L = 0 - (-x_1 - x_2)$$

Беремо x_1 до прикладу. Маємо множину $\{7/5, -5/1, 6\}$ та беремо $7/5$. Отже змінюємо x_1, x_3 :

$$5x_1 = 7 + 2x_2 - x_3 \rightarrow x_1 = \frac{7}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3$$

В такому випадку

$$\begin{aligned} x_4 &= 5 + \frac{7}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 - x_2 = \frac{32}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_5 &= 6 - \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 - x_2 = \frac{23}{5} - \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \end{aligned}$$

Підставляємо знову у цільову функцію:

$$L = x_1 + x_2 = \frac{7}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + x_2 = \frac{7}{5} - \left(-\frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3\right)$$

Тепер потрібно змінити x_2 . З множини $\{-7/2, 32/3, 23/7\}$ найменшим є $23/7$ тому змінюємо x_2, x_5 :

$$\begin{aligned} \frac{7}{5}x_2 &= \frac{23}{5} + \frac{1}{5}x_3 - x_5 \rightarrow x_2 = \frac{23}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_5 \\ x_4 &= \frac{32}{5} - \frac{69}{35} - \frac{3}{35}x_3 + \frac{3}{7}x_5 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{31}{7} - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 \\ x_1 &= \frac{7}{5} + \frac{46}{35} + \frac{2}{35}x_3 - \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{19}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \end{aligned}$$

Підставляємо у L :

$$L = x_1 + x_2 = \frac{19}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 + \frac{23}{7} + \frac{1}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_5 = 6 - x_5$$

Тому маємо $L_{\max} = 6$.

Розв'яжемо це симплекс-таблицею. Отже маємо

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_3	5	-2	1	0	0	7
x_4	-1	1	0	1	0	5
x_5	1	1	0	0	1	6
L	-1	-1	0	0	0	0

Бачимо -1 у рядку L під x_1 , тому розглядаємо $\{6/1, -5/1, 7/5\}$ і обираємо $7/5$. Тобто змінюємо x_1, x_3 :

—	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$
x_4	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{32}{5}$
x_5	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{23}{5}$
L	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$

Тепер змінюємо x_2 . Ділимо $32/3, 23/7$, тому беремо $23/7$. Отже, змінюємо x_2, x_5 . Якщо занулити увесь стовпчик, то отримаємо в останній строчці:

$$L = 6 - x_5$$

Отже $L_{\max} = 6$.