Домашня робота з математичного моделювання #8

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

16 квітня 2023 р.

Завдання 1.

Нехай a, x_0 – сталі, $\{f[t]\}_{t=0}^{\infty}$ – задана послідовність.

Послідовність

$$x[0] = x_0,\ x[t] = a^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} f[j]$$

визначає єдиний розв'язок початкової задачі:

$$x[t+1] = ax[t] + f[t],\ x[0] = x_0$$

Який вигляд прийме розв'язок $x[t]$ у часткових випадках:

- $f[t] = f_0 q^t$ (геометрична прогресія із знаменником q)
- $f[t] = f_0 + td$ (арифметична прогресія із різницею d)

Розв'язок. Підставимо формулу геометричної прогресії у формулу розв'язку:

$$x[t] = a^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} \cdot f_0 q^j = a^t x_0 + f_0 \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} q^j = a^t x_0 + f_0 \cdot \frac{a^t - q^t}{a - q}$$

Якщо підставити арифметичну прогресію:

$$x[t] = a^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1}(f_0 + jd) = a^t x_0 + f_0 \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} + d \sum_{j=0}^{t-1} j a^{t-j-1} =$$

$$a^t x_0 + f_0 \cdot \frac{a^t - 1}{a - 1} + d \cdot \frac{t - 1 - at + a^t}{(a-1)^2}$$

Завдання 2.

Умова. Вкладник поклав $B_0 = 200$ на банківський рахунок під $r = 4\%$ річних. Яку суму він одержить через 5 років, якщо він щорічно повинен витрачати суму, що утворює арифметичну прогресію з різницею $\delta B = 3$ і першим членом $\delta B_0 = 2$?

Розв'язок. Нехай $B[t]$ це кількість грошей через t років. Тому маємо наступну задачу:

$$B[t+1] = (1+r)B[t] + \Delta B[t],\ B[0] = B_0$$

При $\Delta B[t] = -\delta B_0 - t \cdot \delta B$. Згідно завданню 1, маємо:

$$B[t] = (1+r)^t B_0 - \frac{\delta B_0}{r}((1+r)^t - 1) - \frac{\delta B}{r^2}((1+r)^t - (1+rt))$$

Для самоперевірки знайдемо $B[1]$:

$$B[1] = (1+r)B_0 - \delta B_0$$

Що дійсно правильно. Отже, підставляємо:

$$B[5] = 1.04^5 \cdot 200 - \frac{2}{0.04}((1.04)^5 - 1) - \frac{3}{0.04^2}(1.04^5 - (1 + 0.04 \cdot 5))$$

Це дорівнює близько 201.

Відповідь. 201.

Завдання 3.

Умова. Вкладник поклав $B_0 = 300.$ на банківський рахунок під $r = 2\%$ річних. Яку суму він одержить через 5 років, якщо він щорічно повинен витрачати суму, що утворює арифметичну прогресію з різницею $\delta B = 5$ і першим членом $\delta B_0 = 20$?

Розв'язок. Використовуючи формулу з минулої задачі, маємо

$$B[5] = (1.02)^5 \cdot 300 - \frac{20}{0.02}(1.02^5 - 1) - \frac{5}{0.02^2}(1.02^5 - (1 + 0.02 \cdot 5))$$

Або $B[5] \approx 176.13$.

Відповідь. 176.13.

Завдання 4.

Умова. Вкладник поклав $B_0 = 50$ на банківський рахунок під $r = 5\%$ річних. Яку суму він одержить через 4 роки, якщо зовнішні надходження утворюють геометричну прогресію зі $\mu = 3$ і першим членом $\Delta B_0 = 10$?

Розв'язок. Нехай $B[t]$ це кількість грошей через t років. Тому маємо наступну задачу:

$$B[t+1] = (1+r)B[t] + \Delta B[t],\ B[0] = B_0$$

При $\Delta B[t] = \Delta B_0 \cdot \mu^t$. Згідно завданню 1 маємо розв'язок:

$$B[t] = (1+r)^t B_0 + \Delta B_0 \cdot \frac{\mu^t - (1+r)^t}{\mu - (1+r)}$$

Підставляючи значення з умови:

$$B[4] = 1.05^4 \cdot 50 + 10 \cdot \frac{3^4 - 1.05^4}{3 - 1.05} \approx 470$$

Відповідь. 470.

Завдання 5.

Умова. Нехай чисельність населення в теперішній рік складає $n_0 = 100$ (чисельність виміряємо у тисячах). Припускаючи, що коефіцієнт народжуваності дорівнює $\alpha = 3\%$ та смертності $\delta = 1\%$, з'ясувати, через скільки років чисельність населення сягне $n = 1000$, якщо щорічно за рахунок міграції населення ще буде збільшуватись на величину, що утворює арифметичну прогресію з першим членом $\delta n_0 = 10$ і різницю $\delta n = 0.2$.

Розв'язок. Нехай $n[t]$ це кількість населення через t років. Тоді маємо задачу:

$$n[t+1] = (1+\alpha-\delta)n[t] + \Delta n[t],\ n[0] = n_0$$

При умові $\Delta n[t] = \delta n_0 + t \cdot \delta n$. Згідно задачі 1 маємо розв'язок:

$$n[t] = (1+\alpha-\delta)^t n_0 + \frac{\delta n_0}{\alpha-\delta}((1+\alpha-\delta)^t - 1) + \frac{\delta n}{(\alpha-\delta)^2}((1+\alpha-\delta)^t - (1+(\alpha-\delta)t))$$

Трошки спростимо собі життя позначивши $\beta = \alpha - \delta = 2\%$, тоді

$$n[t] = (1+\beta)^t n_0 + \frac{\delta n_0}{\beta}((1+\beta)^t - 1) + \frac{\delta n}{\beta^2}((1+\beta)^t - (1+\beta t))$$

Нам потрібно знайти таке мінімальне t, при якому $n[t] > n$. Для цього перепишемо наше рівняння:

$$n[t] = (1+\beta)^t \left(n_0 + \frac{\delta n_0}{\beta} + \frac{\delta n}{\beta^2}\right) + \frac{\delta n}{\beta} t - \left(\frac{\delta n_0}{\beta} + \frac{\delta n}{\beta^2}\right) > n$$

Аналітично це рівняння розв'язати дуже складно, оскільки маємо як експоненціальний доданок $(1+\beta)^t$, так і лінійний від t. Тому залишається лише руками підставляти різні значення і перевіряти, коли вони перевисять n. Можна трошки спростити собі життя помітивши, що для t до десь 50 ще відносно нормально працює наближення $(1+\beta)^t \approx 1 + \beta t + \frac{t(t-1)}{2}\beta^2$, тому:

$$n[t] \approx \left(1 + \beta t + \frac{t(t-1)}{2}\beta^2\right) n_0 + \delta n_0 \cdot t \left(1 + \frac{\beta(t-1)}{2}\right) + \frac{\delta n}{2} t(t-1)$$

Звідси $t \approx 42$. Після ж підстановки, виходить:

$$n[39] \approx 991,\ n[40] \approx 1028$$

Отже відповідь 40 років. Маємо доволі непогану апроксимацію.

Відповідь. 40 років.

Завдання 6.

Умова. Нехай чисельність населення в теперішній рік складає $n_0 =$ 100 тис. осіб. Припускаючи, що коефіцієнт народжуваності дорівнює $\alpha = 0.03$ та смертності $\delta = 0.01$ (одразу позначимо $\beta = \alpha - \delta = 0.02$), з'ясувати, через скільки років чисельність населення сягне $n = 1000$ тис. осіб, якщо щорічно за рахунок міграції населення ще буде збільшуватись на величину, що утворює геометричну прогресію з першим членом $\delta n_0 = 0.01$ і знаменником $\mu = 2$.

Розв'язок. Згідно задачі 1, маємо розв'язок:

$$n[t] = (1+\beta)^t n_0 + \delta n_0 \cdot \frac{\mu^t - (1+\beta)^t}{\mu - (1+\beta)}$$

Як і в випадку задачі 5, аналітично тут складно щось придумати. Є варіант оцінити це значення, щоб приблизно знати де шукати. Для цього можна помітити, що для достатньо великих t (як побачимо з відповіді, воно дійсно доволі велике) в нас μ^t значно більший за $(1+\beta)^t$, тому можна записати:

$$n[t] \approx \frac{\delta n_0}{\mu - (1+\beta)} \mu^t \to t \approx \frac{1}{\log \mu} \cdot \log \frac{n(\mu - (1+\beta))}{\delta n_0} \approx 16.6$$

Справжня відповідь це 17 років оскільки:

$$n[16] \approx 806,\ n[17] \approx 1477$$

Отже апроксимація дає непогані результати.

Відповідь. 17.

Завдання 7.

Умова. Нехай гравець має 15 доларів до вступу в серію ігор. Він буде грати до тих пір, поки не збанкрутує. В кожній грі він або виграє, або програє 1 долар. Яка ймовірність банкрутства гравця, якщо ймовірність виграшу в кожної з ігор дорівнює $q = 0.6$?

Розв'язок. Нехай $p[t]$ це ймовірність банкрутства гравця при наявності у нього до вступу в серію ігор t доларів. Розглядаємо задачу:

$$p[t+2] - \frac{1}{q} \cdot p[t+1] + \frac{1-q}{q} \cdot p[t] = 0$$

З умовою $p[0] = 1, p[+\infty] = 0$. Скаладаємо характеристичний поліном:

$$\chi_p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\lambda}{q} + \frac{1-q}{q} = 0$$

Звідки маємо корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1-q}{q}$, тому:

$$p[t] = p_1 + p_2 \left(\frac{1-q}{q}\right)^t$$

для деяких констант p_1, p_2. Підставляємо початкові умови:

$$p[0] = 1 \to p_1 + p_2 = 1$$

$$p[+\infty] = 0 \to p_1 = 0$$

Отже маємо $p_1 = 0, p_2 = 1$, тому:

$$p[t] = \left(\frac{1-q}{q}\right)^t$$

Підставимо 15:

$$p[15] \approx 0.0023$$

Відповідь. 0.23%.

Завдання 8.

Умова. Нехай гравець має 15 доларів до вступу в серію ігор. Він буде грати до тих пір, поки не збанкрутує. В кожній грі він або виграє, або програє 1 долар. Яка ймовірність банкрутства гравця, якщо ймовірність виграшу в кожної з ігор дорівнює $q = 0.1$?

Розв'язок. Розглянувши ту саму задачу, що в завданні 7, маємо, що розв'язків немає. Спробуємо прибрати умову $p[+\infty] = 0$ і залишимо лише $p[0] = 1$. Як ми вже знаходили:

$$p[t] = p_1 + p_2 \left(\frac{1-q}{q}\right)^t$$

Тому:

$$p[0] = p_1 + p_2 = 1 \to p_2 = 1 - p_1$$

Отже якщо ще позначити $\alpha = \frac{1-q}{q} = 9 > 1$:

$$p[t] = p_1 + (1 - p_1)\alpha^t$$

Оскільки $\forall t \in \mathbb{N} : p[t] \in [0, 1)$, то нам потрібно, аби коефіцієнт перед α^t був 0, а отже $p_1 = 1$. Тому

$$p[t] \equiv 1$$

Відповідь. Ймовірність банкрутства 1.