Контрольна робота з математичного моделювання #3

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

14 травня 2023 р.

Варіант 4.

Завдання 1. Скласти портфель Тобіна мінімального ризику заданої ефективності $\overline{m}$.

Завдання 2. Скласти портфель Тобіна максимальної ефективності, ризик якого дорівнює заданому числу ν_0.

Завдання 3. Скласти портфель Марковіца мінімального ризику заданої ефективності $\overline{m}$.

Дана коваріаційна матриця дохідностей ризикового активу $\boldsymbol{V}$, вектор $\boldsymbol{m}$ дохідностей ризикових активів, ефективність безризикового цінного паперу m_0.

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \overline{m} = 5, m_0 = 3, \nu_0 = 3$$

Розв'язок завдання 1.

Нехай маємо портфель $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$ де $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ це ризикова частина портфелю. Нам потрібно розв'язати оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^n v_{i,j} x_i x_j \to \min \\ \sum_{i=0}^n m_i x_i = \overline{m} \\ \sum_{i=0}^n x_i = 1 \end{cases}$$

Ця задача може бути зведена до задачі

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \\ \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x} \rangle = \hat{m} \end{cases}$$

де

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} - m_0 \cdot \mathbb{1}_n, \ \hat{m} = \overline{m} - m_0$$

Отже, в нашому конкретному випадку маємо:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{m} = 5 - 3 = 2$$

В такому разі маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 \to \min \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Складаємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + \lambda(4x_1 - x_2 + x_3 - 2)$$

Нам повинно розв'язати наступне рівняння відносно (x_1, x_2, x_3, λ):

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0, \ i = 1, 2, 3, \\ \partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0 \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4\lambda = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 - \lambda = 0 \\ 6x_3 - 2x_1 + \lambda = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння:

$$x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = \frac{4}{9},\ x_3 = \frac{2}{9},\ \lambda = -\frac{2}{9}$$

В такому разі $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{3} x_i = -\frac{2}{9}$.

Цей розв'язок відповідає мінімуму $\langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$, оскільки матриця других похідних $\left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{3}$ повністю збігається з $2\boldsymbol{V}$ що є додатно визначеною матрицею.

Отже, остаточна відповідь $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 5/9 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$

Відповідь. $x_0 = -2/9, x_1 = 5/9, x_2 = 4/9, x_3 = 2/9.$

Розв'язок завдання 2.

Нехай маємо портфель $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$ з ризиковою частиною $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$.

Нам потрібно розв'язати оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} m_i x_i \to \max \\ \sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j} x_i x_j = \nu_0^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

Було доведено, що цю задачу можна звести до наступної:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{x} \rangle \to \max \\ \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \nu_0^2 \end{cases}, \text{ де } \boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} - \mathbb{1}_n \cdot m_0.$$

З минулої задачі $\boldsymbol{M} = [4, -1, 1]^\top$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = 9 \end{cases}$$

В такому разі наша функція Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 4x_1 - x_2 + x_3 + \lambda(2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 9)$$

Знову нам потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0,\ i = 1, 2, 3, \\ \partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0 \end{cases}$$

відносно (x_1, x_2, x_3, λ). Маємо:

$$\begin{cases} 4 + 4\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - 2\lambda x_3 = 0 \\ -1 + 2\lambda x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ 1 + 6\lambda x_3 - 2\lambda x_1 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = 9 \end{cases}$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Нам потрібно вибрати один з них. Помітимо, що нам потрібно максимізувати функцію ефективності, а отже матриця других похідних має бути від'ємно визначеною. Оскільки матриця других похідних має вигляд $2\lambda\boldsymbol{V}$, а матриця $\boldsymbol{V}$ є додатно визначеною, то λ має бути від'ємним. Отже, потрібно обрати розв'язок, що відповідає від'ємному λ. В нашому випадку це

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

В такому випадку x_0 знайдемо як

$$x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 - 3\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{11}{\sqrt{2}}$$

Відповідь. $x_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}, x_2 = 2\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}, x_0 = 1 - \frac{11}{\sqrt{2}}$.

Розв'язок завдання 3.

Позначимо портфель $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Тоді маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \\ \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} \rangle = \overline{m} \\ \langle \mathbb{1}_n, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \end{cases}$$

Або записавши явно:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 \to \min \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Будуємо функцію Лагранжа:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 +\\ \lambda_1(7x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)\end{aligned}$$

Тоді нам потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\\ \partial\mathcal{L}/\partial\lambda_j = 0,\ j = 1, 2\end{cases}$$

відносно $(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$. Маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases}4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 7\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ 2x_2 - 2x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ 6x_3 - 2x_1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5\\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\end{cases}$$

Її розв'язок:

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{13}{25}, \frac{7}{25}, \frac{1}{5}, -\frac{8}{25}, \frac{28}{25}\right)$$

Оскільки гесіан функції Лагранжу $\left\{\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{3} = 2\boldsymbol{V}$, а матриця $\boldsymbol{V}$ є додатно визначеною, то наш розв'язок відповідає мінімуму ризику.

Відповідь. $x_1 = 13/25, x_2 = 7/25, x_3 = 1/5$.