

Самостійна робота з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

16 листопада 2023 р.

Умова. Нехай \mathcal{A} є алгеброю підмножин X , $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ є адитивною. Довести формулу

$$\varphi(\overline{A \Delta B}) = \varphi(A) + \varphi(B) - 2\varphi(A \cap B)$$

Формули для $\varphi(A \cup B)$, $\varphi(A \setminus B)$ і $\varphi(A \Delta B)$ можна використовувати без доведення.

Розв’язок. Спочатку скористуємось тим фактом, що $\varphi(A \Delta B) = \varphi(A) + \varphi(B) - 2\varphi(A \cap B)$, тобто

$$\varphi(\overline{A \Delta B}) = \varphi(\overline{A}) + \varphi(\overline{B}) - 2\varphi(\overline{A \cap B})$$

Оскільки $\overline{A} = X \setminus A$, то $\varphi(\overline{A}) = \varphi(X) - \varphi(A)$. Аналогічно, $\varphi(\overline{B}) = \varphi(X) - \varphi(B)$.

Нарешті, $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$, тому

$$\varphi(\overline{A \cap B}) = \varphi(X) - \varphi(A \cup B) = \varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(B) + \varphi(A \cap B)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{A \Delta B}) &= \varphi(X) - \varphi(A) + \varphi(X) - \varphi(B) - 2(\varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(B) + \varphi(A \cap B)) \\ &= \varphi(A) + \varphi(B) - 2\varphi(A \cap B), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.