Контрольна робота #3

Студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Дмитра

Завдання 1.

Спочатку знайдемо власні числа матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Для цього складаємо характеристичний поліном $\chi_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Після обчислень отримаємо

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda - 2)^4$$

Отже маємо лише одне власне число $\lambda = 2$ кратності 4. Знаходимо кореневі підпростори. Для цього знаходимо $V := \text{Null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})$:

$$V = \text{Null} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Null} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =_{R_2 - R_1}$$
$$\text{Null} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отже наш простір V є перетином $x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, -x_2 - 2x_4 = 0, x_2 = 0$. Звідси випливає $x_2 = x_4 = 0$ і тому $x_1 - x_3 = 0$. Якщо позначити $x_3 = t$, то будемо мати $x_1 = t$. Тому:

$$V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Тобто $\dim V = 1$. Знаходимо наступний підпростір $V' = \mathrm{Null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2$. Маємо

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В такому разі $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_2 + 2x_4 = 0 \land 5x_2 + 2x_4 = 0\}$. Звідси випливає, що $x_2 = x_4 = 0$. Далі

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тут одразу видно, що $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^3 = \theta$. Нарешті $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^4 = 0$.

Отже, тепер знайдемо Жорданову форму. Оскільки $\dim V = 1$, то маємо лише 1 Жорданов блок, що означає, що Жорданова форма матриці:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Мінімальний многочлен $p(X) = (X - 2)^4$, це випливає з того, що для ступенів k менше за 4 в нас $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^k \neq 0$, а для 4 маємо $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^4 = 0$.

Залишилось знайти Жорданов базис. Помітимо, що Жорданова ланка має вид:

$$\{\mathbf{w}, (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{w}, (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2\mathbf{w}, (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^3\mathbf{w}\}$$

Причому останній вектор у ланці — це власний вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. Тому нам потрібно знайти будь-який вектор $\mathbf{w}$, який буде виконувати наступну умову:

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Це означає $2w_2 = 1 \to w_2 = \frac{1}{2}$, інші значення довільні. Оберемо, наприклад, вектор $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1/2\\0\\0\end{bmatrix}$. В такому разі:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-1 & 3 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 4 & 1 & 4\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1/2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\0\\1\\1/2\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2\mathbf{w} = \begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1/2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\0\\5/2\\0\end{bmatrix}$$

І тому наш базис виглядає наступним чином:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1/2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1/2\\0\\1\\1/2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3/2\\0\\5/2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Завдання 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\3 & -2 & 3\\2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

Потрібно по суті нам знайти $f(\mathbf{A})$ де $f(t) = \sqrt[3]{t}$. Спочатку знайдемо власні числа. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$$

Тому маємо одне власне число $\lambda = 1$ кратності 3. Знаходимо мінімальний многочлен:

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$$
$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Отже мінімальний многочлен $p(X) = (X - 1)^2$.

Оскільки ступінь мінімального многочлена 2, то шуканий многочлен від $f(\mathbf{A})$ має вид $P(t) = \alpha t + \beta$. Також справедливо наступне:

$$P(1) = f(1) \wedge P'(1) = f'(1)$$

Звідси маємо $\alpha + \beta = 1, \alpha = \frac{t^{-2/3}}{3}\Big|_{t=1}$ і тому $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{3}$. В такому випадку:

$$P(t) = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$$

І в такому випадку

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Перевіримо, що дійсно $\mathbf{B}^3 = \mathbf{A}$. Знаходимо:

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -1 & 2 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Дійсно виконується.

Завдання 3.

а. $p(X) = X - 5$. Це означає, що $\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = 0$, звідси $\mathbf{A} = 5\mathbf{E}$, тобто

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

б. $p(X) = (X + 3)^2$. Це означає, що $\mathbf{A} + 3\mathbf{E} \neq 0, (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^2 = 0$. Ну, можна обрати, наприклад, стандартну Жорданову форму:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

в. $p(X) = (X - 6)^3$. Знову беремо Жорданову форму:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

г. І знову:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Якщо в питанні мається увазі нетривіальні (хоча це не написано, тому розв'язки вище не заборонені) розв'язки, то можемо, наприклад, знайти перетворення $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ перетворення $\mathbf{A}$ в іншому базисі. Якщо наприклад взяти

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

То отримаємо

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9/4 & 3/2 & -3/4 & 0 \\ 3/4 & -5/2 & -3/4 & -1 \\ -3/4 & -1/2 & -9/4 & 1 \\ -3/4 & -1/2 & 3/4 & -2 \end{bmatrix}$$

Таким самим чином можна зробити і для інших підпунктів.