Домашня робота з математичного аналізу #6

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

5 березня 2023 р.

1 Завдання 1.

Умова. Знайти частинні похідні та повні диференціали першого та другого порядків у точці (x_0, y_0) неявних функцій $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$ що задається системою:

$$\begin{cases} u + v = x + y \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y} \end{cases}, \; (x_0, y_0) = (1, 1), \; u(1, 1) = v(1, 1) = \frac{\pi}{4}$$

Розв'язок. Отже, маємо 2 неявні функції Ψ_1 та Ψ_2:

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv u + v - x - y = 0 \\ \Psi_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv \frac{\sin u}{\sin v} - \frac{x}{y} = 0 \end{cases}$$

Перевіримо всі 3 умови теореми про неявну функцію.

Умова 1. Неперервність в (x_0, y_0). Дві функції Ψ_1, Ψ_2 складаються з елементарних, отже проблема виникає лише при $\sin v = 0$ або $y = 0$. Це очевидно не проблема для нашої точки, оскільки $v(1, 1) = \pi/4$, а $y_0 = 1$. Отже функції є неперервними.

Умова 2. $\Psi_i(x_0, y_0, v(x_0, y_0), u(x_0, y_0)) = 0$. Перевіряємо:

$$\Psi_1\Big|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 2$$

Отже бачимо, що це не виконується.

Отже, думаю в умові замість $u+v = x+y$ повинно стояти $u-v = x-y$. Тоді перша умова теореми все ще буде виконуватись, друга так само:

$$\Psi_1\Big|_{(x,y)=(1,1)} = ((u-v) - (x-y))\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 0$$

$$\Psi_2\Big|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{\sin \pi/4}{\sin \pi/4} - \frac{1}{1} = 0$$

Третя умова. $\frac{D\boldsymbol{\Psi}}{D\boldsymbol{W}} \neq 0$. Тобто нам потрібно переконатись або спростити, що:

$$\frac{D\boldsymbol{\Psi}(x_0, y_0)}{D\boldsymbol{W}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(x,y)=(x_0,y_0)} \neq 0$$

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial u} \equiv 1, \ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \equiv -1$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial u} = \frac{\cos u}{\sin v}, \ \frac{\partial \Psi_2}{\partial v} = \sin u \cdot \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sin v}\right) = -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v}$$

Отже,

$$\frac{D\boldsymbol{\Psi}}{D\boldsymbol{W}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} \end{vmatrix} = \frac{\cos u}{\sin v} - \frac{\sin u \cos v}{\sin^2 v} = \frac{\cos u \sin v - \sin u \cos v}{\sin^2 v} = \frac{\sin(v-u)}{\sin^2 v}$$

Звідси бачимо, що для нашої точки ця похідна є нулем, бо $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0)$, а отже $\sin(v-u)\Big|_{(u,v)=(\pi/4,\pi/4)} = 0$.

Тому аби виправити скоріше за все доведеться зробити щось більш складне...