Контрольна робота #3

Контрольна робота з математичного аналізу

Студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Дмитра

Завдання 1.

Умова. Знайти $\nabla u(1,1,1)$ де $u(x,y,z) = x^2yz - xy^2z + xyz^2$.

Відповідь. Спочатку знайдемо часткові похідні по x, y, z:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz - y^2z + yz^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2z - 2xyz + xz^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2y - xy^2 + 2xyz$$

В першому завданні розпишу розрахунок трохи більш детально:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz - xy^2z + xyz^2)$$

Далі користуємось лінійністю оператора часткового диференціювання:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial x}(xyz^2)$$

Далі коли ми диференціюємо якусь функцію $f(x)g(y)h(z)$ за, наприклад, x, то ми ігноруємо $g(y)h(z)$ і вважаємо їх за константи. Тому $\frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(y)h(z)) = g(y)h(z)\frac{df}{dx}$. Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\frac{d}{dx}(x^2) - y^2z\frac{d}{dx}(x) + yz^2\frac{d}{dx}(x) = 2xyz - y^2z + yz^2$$

Градієнт, за означенням:

$$\nabla u(\mathbf{r}) = \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{r})\hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{r})\hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{r})\hat{z}$$

Отже знайдемо похідні у точці $\mathbf{r}_M = (1,1,1)$:

$$u'_x(\mathbf{r}_M) = 2-1+1 = 2,\ u'_y(\mathbf{r}_M) = 1-2+1 = 0,\ u'_z(\mathbf{r}_M) = 1-1+2 = 2$$

Отже маємо

$$\nabla u(\mathbf{r}_M) = 2(\hat{x}+\hat{z}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Відповідь. $\nabla u(\mathbf{r}_M) = 2(\hat{x}+\hat{z}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Завдання 2.

Умова. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ в точці $M(3,1,4)$.

Розв'язок. Знайдемо градієнт функції $f(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z$ у заданній точці $\mathbf{r}_M = (3,1,4)$:

$$\nabla f(\mathbf{r}_M) = \begin{bmatrix} f'_x(\mathbf{r}_M) \\ f'_y(\mathbf{r}_M) \\ f'_z(\mathbf{r}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\Big|_{x=3} \\ y\Big|_{y=1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор нормалі дотичної площини збігається з $\nabla f(\mathbf{r}_M)$ (було доведено у теорії), тому рівняння площини має вид:

$$\pi : \langle \nabla f(\mathbf{r}_M), \mathbf{r} \rangle + \delta = 0$$

Або якщо розписати врахувавши, що $\mathbf{r} = (x,y,z)$:

$$\pi : -3x + y + z + \delta = 0$$

Де нам залишається лише знайти δ. Оскільки π проходить через $M(3,1,4)$, то маємо:

$$-3 \cdot 3 + 1 + 4 + \delta = 0 \implies \delta = 4$$

Отже рівняння площини:

$$\pi : -3x + y + z + 4 = 0$$

Тепер запишемо рівняння нормалі. По-перше, помітимо, що нормаль проходить через точку $M(3, 1, 4)$. Окрім цього, нормаль спрямована вздовж $\nabla f(\mathbf{r}_M)$ (що є власне геометричним змістом ∇f). Тому рівняння запишемо у параметричному виді (де при $\lambda = 0$ пряма буде проходити через M):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + \lambda \nabla f(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Або:

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Або в іншому виді, якщо потрібно $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{1}$.

Відповідь. Рівняння дотичної площини $-3x + y + z + 4 = 0$, рівняння нормалі $(x, y, z) = (3 - 3\lambda, 1 + \lambda, 4 + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Завдання 3.

Умова. Знайти df, d^2f де $f(x, y) = x^2 - y^3 + 5xy^8$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо диференціал першого порядку. Він визначається наступним чином:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

Рахуємо часткові похідні:

$$f'_x = 2x + 5y^8,\ f'_y = -3y^2 + 40xy^7$$

Тому маємо наступний вираз для диференціала першого порядку:

$$df = (2x + 5y^8)dx + (-3y^2 + 40xy^7)dy$$

Тепер випишемо диференціал другого порядку (це відома формула, але її можна вивести просто знайшовши $d(df) = d^2f$):

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

А для цього знайдемо вже вирази для других похідних:

$$f''_x = (f'_x)'_x = (2x + 5y^8)'_x = 2,$$
$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (-3y^2 + 40xy^7)'_y = -6y + 280xy^6$$
$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (2x + 5y^8)'_y = 40y^7$$

Отже, маємо

$$d^2f = 2dx^2 + 80y^7dxdy + (-6y + 280xy^6)dy^2$$

Відповідь. $df = (2x + 5y^8)dx + (-3y^2 + 40xy^7)dy,\ d^2f = 2dx^2 + 80y^7dxdy + (-6y + 280xy^6)dy^2$

Завдання 4.

Умова. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x, y) = x^3 + xy^2 - xy - 5x$ в околі точки $A(1, 2)$ (позначимо одразу $a = 1, b = 2$).

Розв'язок. Випишемо формулу ряду Тейлора для функції від 2 змінних:

$$P_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{i!j!} \cdot \frac{\partial^{i+j} f(a, b)}{\partial x^i \partial y^j} (x - a)^i (x - b)^j$$

Отже, спочатку знайдемо усі похідні, поки в нас не занулиться похідні (оскільки $f(x, y)$ — це многочлен 3 ступеня від 3 змінних, то усі похідні 4 порядку точно будуть дорівнювати 0, тому рано чи пізно це трапиться. Окрім цього, оскільки $f(x, y)$ — це многочлен, то він є нескінченно диференційованим і неперерервним). Отже:

$$f'_x = 3x^2 + y^2 - y - 5,\ f'_y = 2xy - x,$$
$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (3x^2 + y^2 - y - 5)'_x = 6x$$
$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = (3x^2 + y^2 - y - 5)'_y = 2y - 1$$
$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = (2xy - x)'_y = 2x$$

Остаточно:

$$f'''_{xxx} = (f''_{xx})'_x = (6x)'_x = 6,\ f_{xxy} = (f''_{xx})'_y = (6x)'_y = 0,$$
$$f'''_{xyy} = (f''_{xy})'_y = (2y - 1)'_y = 2,\ f'''_{yyy} = (f''_{yy})'_y = (2x)'_y = 0$$

Тепер знайдемо значення всіх цих похідних у точці $(x, y) = (1, 2)$ (позначимо ці значення з шапкою зверху):

$$f'_x(1,2) := \hat{f}'_x = 3 + 4 - 2 - 5 = 0,\ f'_y(1,2) := \hat{f}'_y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$
$$f''_{xx}(1,2) := \hat{f}''_{xx} = 6,\ f''_{xy}(1,2) := \hat{f}''_{xy} = 3,\ f''_{yy}(1,2) := \hat{f}''_{yy} = 2$$

Вирази для похідних третього порядку дорівнюють константам, тому не залежать від обранної точки M (тому $f'''_{xxx} \equiv \hat{f}'''_{xxx}, \ldots$). Також знайдемо значення функції у цій точці:

$$f(1,2) := \hat{f} = -2$$

Нарешті, отримаємо наступний вираз для ряда Тейлора (пропустимо нульові члени):

$$P(x,y) = \hat{f} + \hat{f}_x(x-1) + \hat{f}_y(y-2) + \frac{\hat{f}''_{xx}}{2}(x-1)^2 + \frac{\hat{f}''_{yy}}{2}(y-2)^2 + \hat{f}''_{xy}(x-1)(y-2) + \frac{\hat{f}'''_{xxx}}{6}(x-1)^3 + \frac{\hat{f}'''_{xyy}}{2}(x-1)(y-2)^2$$

Підставляємо знайдені значення:

$$P(x,y) = -2 + 3(y-2) + 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3(x-1)(y-2) + (x-1)^3 + (x-1)(y-2)^2$$

Відповідь. $P(x,y) = -2 + 3(y-2) + 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3(x-1)(y-2) + (x-1)^3 + (x-1)(y-2)^2$.