§ Математичний Маятник §

Задача 1: Математичний маятник.

Умова. Рух маятника з урахуванням тертя можна описати системою

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x - \kappa y \end{cases},$$

де $\kappa > 0$ – коефіцієнт тертя. Як ви думаєте, як зміниться фазовий портрет порівняно з випадком $\kappa = 0$? Що буде при малих κ, а що – при великих κ? Перевірте Ваші передбачення за допомогою програми.

Розв'язок. Інтуїтивно з початкового рівняння – доданок $-\kappa y$ буде "тормозити" значення y, що є нашою кутовою швидкістю, а отже маятник рано чи пізно перейде у стан стійкої рівноваги $x = 0$. Це означає як мінімум, що замкненість системи зникає. Більш того, оскільки ми з будь-якої точки рано чи пізно перейдемо у початкову, то наша фазова траєкторія буде "закручуватись" до точки рівноваги.

Характер цього "затухання" можна описати з параметру κ. Якщо κ маленьке, то траєкторії будуть дуже повільно відхилятися від тих, що були при $\kappa = 0$ (навколо стану рівноваги – приблизно еліпси). Але якщо κ стає великим, то траєкторії одразу відхиляються з початкових замкнених і різко прямують до $(2\pi k, 0), k \in \mathbb{Z}$ – стійких точок рівноваги.

Програма. Використовуємо ту саму програму, що і була наведена, з однією зміною: замість

```python
def f(x,y):
    return y, -omega**2*np.sin(x)
```

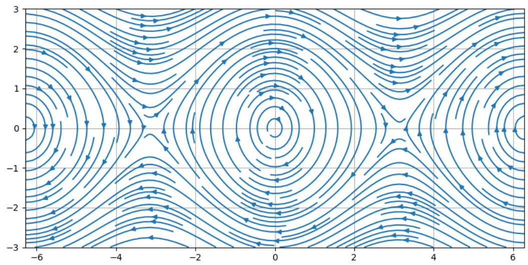
будемо використовувати:

```python
def f(x,y):
    return y, -omega**2*np.sin(x) - k*y
```

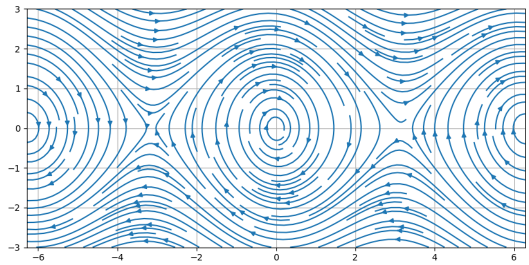
Також цікаво дослідити залежність портретів від κ, тому ми додатково зафіксуємо набір значень κ, по яким будемо проходитись, і для кожного побудуємо свій портрет. Програма для цього:

```
for k in [0.01, 0.1, 0.3, 0.6, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0]:
    def f(x,y):
        return y, -omega**2*np.sin(x) - k*y

    fig = plt.figure(figsize=(10,5))
    ax = fig.add_subplot()
    ax.grid()
    ax.set_aspect('equal')

    x = np.linspace(-2*np.pi,2*np.pi,50)
    y = np.linspace(-3,3,50)
    xx, yy = np.meshgrid(x,y)

    f1,f2 = f(xx,yy)
    ax.streamplot(xx,yy,f1,f2,density=1.8)

    fig.savefig(f'phase_{k}.png')
```

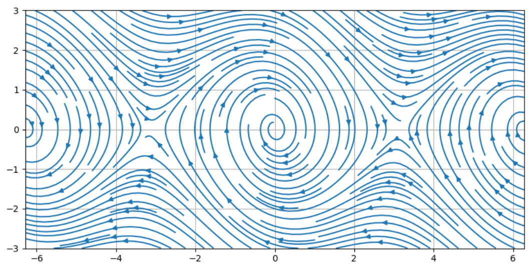
Результат зображено на рис. 1. Дійсно отримали те, що очікували: при малих κ фазовий портрет майже не змінюється від випадку $\kappa = 0$, а ось починаючи приблизно з $\kappa = 0.6$ портрет стає цікавим: точка закручується навколо стійких точок рівноваги, постійно наближаючись до них. При зовсім великих κ, рух починає нагадувати рух по прямій.



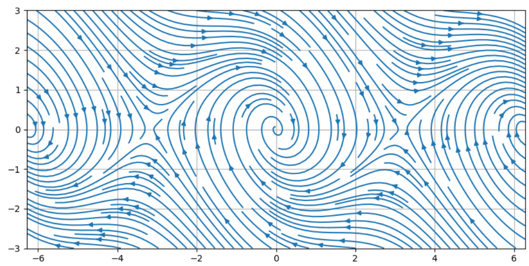
$\kappa = 0.01$



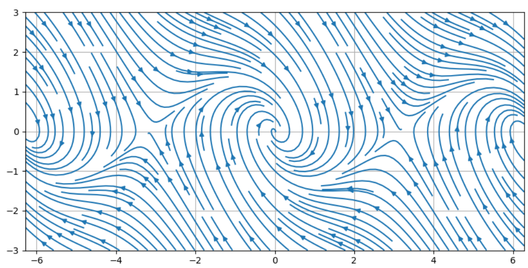
$\kappa = 0.1$



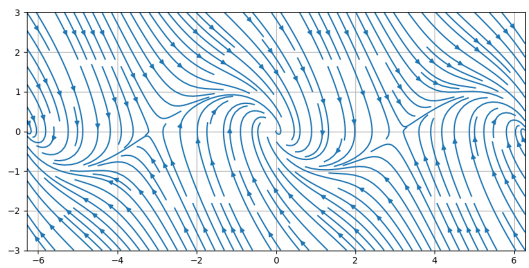
$\kappa = 0.3$



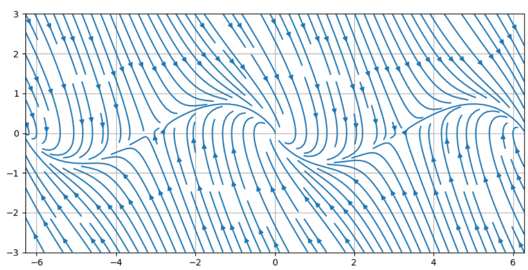
$\kappa = 0.6$



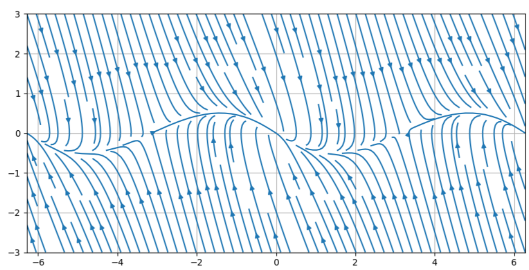
$\kappa = 1.0$



$\kappa = 1.5$



$\kappa = 2.0$



$\kappa = 3.0$

Рис. 1: Фазові портрети при різних κ, кутову швидкість зафіксували $\omega = 1.25$.