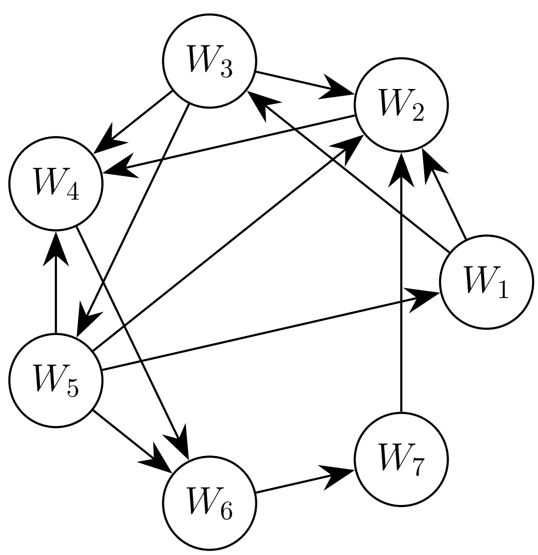
Часткова проблема власних значень

Домашня робота з курсу “Чисельні методи лінійної алгебри”

24 квітня 2023 р.

Завдання. Придумайте орієнтований граф з $7-8$ вершинами, який моделює мережу з веб-сторінок. Побудуйте для нього матрицю суміжності і матрицю ймовірностей переходів. Знайдіть ранги сторінок, застосувавши степеневий метод. Перевірте, що відповідь не залежить від початкового вектора $\boldsymbol{w}^{[0]}$. Прокоментуйте отриману відповідь: спробуйте, дивлячись на граф, пояснити, чому ті чи інші сторінки мають такі ранги.

Розв'язок. Побудуємо наш граф з вершинами W_i:



Побудуємо матрицю суміжності:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тепер складемо матрицю ймовірностей переходу $\boldsymbol{P}$. Для цього спочатку знаходимо кількість посилань на сторінках:

$$r_1 = r_2 = r_4 = r_6 = r_7 = 1,\ r_3 = 3,\ r_5 = 4,$$

де ми позначили

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} g_{i,j},\ i = \overline{1,n}.$$

Тоді матриці $\boldsymbol{P}$ визначаються наступним чином:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\zeta g_{i,j}}{r_i} + \dfrac{1-\zeta}{n}, & \text{якщо } r_i > 0 \\ \dfrac{1}{n}, & \text{якщо } r_i = 0 \end{cases},$$

де $\zeta = 0.85$. Отже, знаходимо нашу матрицю:

$$\boldsymbol{P} \approx \begin{bmatrix} 0.02 & 0.88 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.88 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.31 & 0.02 & 0.31 & 0.31 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.88 & 0.02 \\ 0.23 & 0.23 & 0.02 & 0.23 & 0.02 & 0.23 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.88 \\ 0.02 & 0.88 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Далі нам потрібно знайти стаціонарний вектор $\boldsymbol{w}$. Можна це зробити аналітично, розв'язавши рівняння:

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{w}$$

з умовою $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Або, можемо взяти велике $m \in \mathbb{N}$ і знайти значення виразу:

$$\boldsymbol{w} \approx \left(\frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_n^\top\right) \boldsymbol{P}^m$$

де $\mathbb{1}^\top$ це вектор-рядок з одиниць (насправді, в якості початкового вектора можна взяти будь-який).

Обчислення стаціонарного вектора наведені у додатку до цього файлу у середовищі *Wolfram Mathematica* (вирішив поекспериментувати з цим середовищем). Як бачимо, якщо покласти $\boldsymbol{w}_0 := \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_n^\top$, то отримаємо:

$$\boldsymbol{w} \approx [0.0272723, 0.240424, 0.0214286, 0.237704, 0.0275, 0.229321, 0.216351]$$

Отже за спаданням рангу маємо $W_2, W_4, W_6, W_7, W_5, W_1, W_3$.

Якщо покласти різні $\boldsymbol{w}_0$, результат не зміниться, це можна побачити знову ж таки у додатку. Точний розв'язок майже не відрізняється від наведеного.

Звідки взялися такі ранги доволі зрозуміло: у сторінку W_2 йде найбільше число посилань (а саме 4), у сторінку W_4 йдуть 3 посилання, а у сторінку W_6 два, тому скоріше за все у цих сторінках будуть найбільше за все користувачів після тривалого часу (хоча, не впевнений, що з більшої кількісті посилань одразу випливає більший ранг). Зі сторінками, на які йде 1 посилання вже все не так очевидно.