Самостійна робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

16 листопада 2023 р.

Завдання

Умова. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x < -3 \\ 3, & x \geq -3 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

$\lambda_F : \mathcal{P}_1 \to [0, +\infty), \lambda_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. Знайти

1. $\lambda_F^*(A), A \in 2^{\mathbb{R}}$.
2. σ-алгебру $\mathcal{S}_F$ λ_F^*-вимірних підмножин $\mathbb{R}$.

Розв'язок.

Для наступних пунктів зручно помітити, що

$$\lambda_F((a, b]) = \begin{cases} 2, & -3 \in (a, b] \\ 0, & -3 \notin (a, b] \end{cases} = 2 \cdot \mathbb{1}_{(a,b]}(-3)$$

Пункт 1. Візьмемо $X \subset \mathbb{R}$. Розглянемо два випадки: -3 належить та не належить X.

Випадок 1. $-3 \notin X$. За означенням маємо для $\forall X \subset \mathbb{R} \setminus \{-3\}$:

$$\lambda_F^*(X) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_F(A_n) : X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \wedge \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_1 \right\}$$

Помітимо, що $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ можемо записати як

$$(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, -3 - \frac{1}{n}] \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-3, n]$$

В такому разі:

$$\begin{aligned} 0 \le \lambda_F^*(\mathbb{R} \setminus \{3\}) &\le \lambda_F \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, -3 - \frac{1}{n}] \right) + \lambda_F \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-3, n] \right) \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_F \left((-n, -3 - \frac{1}{n}] \right) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_F((-3, n]) \\ &= 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{(n, -3-1/n]}(-3) + 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{(-3, n]}(-3) = 0 \end{aligned}$$

Звідси, $\lambda_F^*(\mathbb{R}\setminus\{3\}) = 0$. Оскільки λ_F^* є моноотонною, то $\forall X \subset \mathbb{R}\setminus\{-3\} : \lambda_F^*(X) = 0$.

Випадок 2. $-3 \in X$. Помітимо, що інфінум відповідає такій побудові $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists m \in \mathbb{N} : \{-3 \in A_m\} \wedge \{-3 \notin A_n \ \forall n \ne m\}$$

В такому разі:

$$\lambda_F^*(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_F(A_n) = \lambda_F(A_m) + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}: n\ne m} \lambda_F(A_n)}_{=0} = \lambda_F(A_m) = 2$$

Відповімо, чому це відповідає інфінуму. Дійсно, нехай ще якийсь номер $p \in \mathbb{N} : -3 \in A_p$. Тоді за аналогією, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_F(A_n) = \lambda_F(A_m) + \lambda_F(A_p) = 4 > 2$. Якщо ж не знайдеться номера m з властивістю вище, то тоді $-3 \notin X$, що суперечить припущенню цього випадку.

Отже, маємо:

$$\lambda_F^*(X) = 2 \cdot \mathbb{1}_X(-3)$$

Пункт 2. З'ясуємо, коли $X \subset \mathbb{R}$ є λ_F^*-вимірною множиною. За означенням:

$$\forall E \subset \mathbb{R} : \lambda_F^*(E) = \lambda_F^*(E \cap X) + \lambda_F^*(E \cap \overline{X})$$

Ця умова еквівалентна:

$$\mathbb{1}_E(-3) = \mathbb{1}_{E\cap X}(-3) + \mathbb{1}_{E\cap \overline{X}}(-3)$$

Нехай $-3 \in E$. В такому разі, якщо $-3 \in X$, то $-3 \in E \cap X$, проте $-3 \notin E \cap \overline{X}$. Аналогічно, якщо $-3 \notin X$, то $-3 \notin E \cap X$, але $-3 \in E \cap \overline{X}$. Отже, як ліва, так і права частина буде дорівнювати 2, що каже про те, що для $-3 \in E$ ця умова виконується для будь-яких X.

Тепер нехай $-3 \notin E$. В такому разі, як $-3 \notin E \cap X$, так і $-3 \notin E \cap \overline{X}$. В цьому випадку обидві частини дорівнюють 0, звідки випливає справедливість цього твердження для будь-яких $-3 \notin E$ та X.

Отже, це твердження справедливе для будь-якої пари $X, E \subset \mathbb{R}$, а тому будь-яка множина $X \subset \mathbb{R}$ є λ_F^*-вимірною. Звідси $\mathcal{S}_F = 2^{\mathbb{R}}$.

Відповідь. 1. $\lambda_F^*(X) = 2 \cdot \mathbb{1}_X(-3)$. 2. $\mathcal{S}_F = 2^{\mathbb{R}}$.