Homework #14

Завдання 1.

Знайти діаметр, що відповідає напрямку $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, кривої

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

Розв'язок. Запишемо "початкові" умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix},\ \gamma = -2$$

Нехай $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тоді рівняння діаметру має вид:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Знайдемо вектор нормалі прямої $\mathcal{A}\mathbf{v}$ а також вільний член $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle$:

$$\mathcal{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -22 \end{pmatrix},\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 28$$

Отже маємо рівняння $24x - 22y + 28 = 0$ або $12x - 11y + 14 = 0$.

Завдання 2.

Знайти рівняння асимптот до гіперболи

$$8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$$

Розв'язок. Матриця квадратичної частини рівняння $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ та вектор лінійної частини $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Знайдемо центр симетрії $\mathbf{x}_0$. Для цього розв'яжемо рівняння

$$\mathcal{A}\mathbf{x}_0 = -\mathbf{b} \implies \mathbf{x}_0 = -\mathcal{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Обернена матриця $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & -8/9 \end{pmatrix}$. Тому остаточно знаходимо центр симетрії: $\mathbf{x}_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & -8/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Асимптотичні напрямки повинні зануляти квадратичну частину рівняння. Квадратична частина має вид $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ де $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Отже підставимо деякий $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Отримаємо:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 8x + 3y \\ 3x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = x(8x + 3y) + 3xy \equiv 0$$

Або $8x^2 + 6xy \equiv 0$, звідки маємо або $x = 0$, або $y = -\frac{4}{3}x$, тобто напрямні вектори мають вид $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Тому маємо 2 асимптоти:

$$l_1 : x = 2,\ l_2 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} \implies 3y + 4x - 5 = 0$$

Завдання 3.

Знайти рівняння осей симетрії

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

Розв'язок. Матриця квадратичної системи рівняння $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Характеристичне рівняння: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$. Рівняння прямої $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \delta = 0$ є рівнянням осі симетрії якщо $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \neq 0$ або $\mathcal{A}\mathbf{v} = \theta, \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Отже знайдемо власні вектори:

$$\lambda_1 = 0 : \mathrm{Null} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\},\ \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 : \mathrm{Null} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\},\ \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для λ_2 коефіцієнт δ визначається як $\delta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle}{\lambda} = \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{-5+3}{2} = -1$. Тому наше рівняння має вид:

$$x - y - 1 = 0$$

Для λ_1 значення $\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$, а тому вектор $\mathbf{q}_1$ є віссю симетрії для $\forall \delta \in \mathbb{R}$.

Завдання 4.

Знайти асимптотичні напрямки кривої

$$2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$$

Розв'зок. Матриця квадратичної частини $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & -12 \end{pmatrix}$. Знайдемо характеристичний поліном цієї матриці: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda - 30.25$. Маємо 2 власних числа, що різні за знаком. Отже перед нами може бути або гіпербола, або пара прямих, що перетинаються. Інваріант доповненої матриці $J = \det \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -12 & 13 \\ -1/2 & 13 & -10 \end{pmatrix} = 0$. Отже маємо пару прямих і асимптотичний напрямок збігається з рівнянням цих прямих.

Асимптотичний напрямок зануляє квадратичну частину рівняння $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Отже, нам потрібно вирішити рівняння $2x^2 - 5xy - 12y^2 = 0$. Якщо ввести $\eta = x/y$, то отримаємо квадратне рівняння $2\eta^2 - 5\eta - 12 = 0$, звідки або $\eta = 4$ або

$\eta = -3/2$. Тому маємо $x = 4y$, що відповідає напрямку $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ та $x = -3y/2$ звідки $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 5.

Для поверхні

$$7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$$

знайти діаметральну площину, що відповідає напрямку $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix},\ \gamma = 72$$

Рівняння діаметральної площини має вигляд:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Знайдемо вектор нормалі $\mathcal{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 21 \\ -39 \\ 36 \end{pmatrix}$ та вільний член $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Отже рівняння:

$$21x - 39y + 36z = 0$$

Завдання 6.

Для поверхні

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

знайти рівняння площин та осей симетрії.

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \gamma = 30$$

Характеристичний поліном для $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$. Звідси маємо числа $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Відповідні власні вектори $\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Рівняння площин/осей симетрії має вид $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$. Знайдемо вільні члени:

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{b} \rangle = \langle \{-3, -12, 9\}, \{1, 2, 2\} \rangle = -9$$

$$\langle \mathbf{q}_2, \mathbf{b} \rangle = \langle \{-3, -12, 9\}, \{-2, -1, 2\} \rangle = 36$$

$$\langle \mathbf{q}_3, \mathbf{b} \rangle = \langle \{-3, -12, 9\}, \{2, -2, 1\} \rangle = 27$$

Тому маємо 3 рівняння $x + 2y + 2z - 9 = 0, -2x - y + 2z + 36 = 0, 2x - 2y + z - 27 = 0$.

Завдання 7.

Для поверхні

$$5x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz + 16yz + 2x - 28y + 20z - 25 = 0$$

знайти множину асимптотичних напрямків.

Розв'язок. Множина асимптотичних напрямків має вид

$$5x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz + 16yz = 0$$

Матриця квадратичної частини $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 8 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Характеристичний поліном має вид $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda + 12)(\lambda - 3)(\lambda - 6)$. Оскільки $J = 0$ отрмуємо рівняння:

$$-4\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2\tilde{z}^2 = 0$$

Це є рівнянням дійсного конусу.

Завдання 8.

Для поверхні

$$2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 10yz - 18y + 14z - 13 = 0$$

знайти діаметр, що паралельний $\mathbf{v} = \{1, -1, 1\}$, не знаходячі центру.

Розв'язок. Як і підсказує підсказка, знайдемо цю пряму як перетин двох діаметральних площин. Вектор нормалі цих площин $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ повинен бути перпендикулярним $\mathbf{v}$. Якщо поверхня центральна, то ми можемо підібрати ці 2 вектори нормалі.

До квадратичної частини рівняння маємо 2 власних вектора: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -8$. Розглянемо довільний власний вектор $\mathbf{q}_1 = \{x, y, z\}$ для $\lambda_1 = 2$. Координати цього вектора лежать на площині $y = z$ (для цього ми знайшли $\mathrm{Null}(\mathcal{A} - 2E)$). Це означає, що ми отримали множину векторів $\mathbf{q}_1(\mu) = \{\mu, 1, 1\}$. Оберемо такий параметр μ, щоб вектор $\mathbf{q}_1(\mu)$ був перпендикулярний вектору $\mathbf{v}$, інакше кажучі, вирішуємо $\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_1(\mu) \rangle = 0$ відносно μ. Отримаємо $\mu = 0$.

Для $\lambda_2 = -8$ аналогічно отримаємо множину $\mathbf{q}_2(\eta) = \{\eta, 5, 11\}$. Цей вектор повинен бути перпендикулярним до $\mathbf{v}$. З рівняння $\langle \mathbf{q}_2(\eta), \mathbf{v} \rangle = 0$ дістаємо $\eta = -6$.

Далі записуємо рівняння площин $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{\lambda_i} \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_i \rangle$:

$$\pi_1 : y + z - 1 = 0,\ \pi_2 : -6x + 5y + 11z + 4 = 0$$

Наша пряма $l = \pi_1 \cap \pi_2$.