Контрольна робота #1 з Фінансового Аналізу

Захаров Дмитро, Варіант 3

10 квітня, 2025

1 Задача

Умова 1.1. Дано: Ковариаційна матриця дохідностей ризикового активу V, вектор $\mathbf{m}$ дохідностей ризикових активів, ефективність безризикового цінного паперу m_0.
Скласти портфель Тобіна та обчислити ефективність та ризик складеного портфелю

1. Мінімального ризику ефективності не нижче $\overline{m}+1$.
2. Максимальної ефективності, ризик якого дорівнює заданому числу ν_0.
3. Максимальної ефективності, ризик якого не перевищує числа $\nu_0 - 1$.
4. Мінімального ризику заданої ефективності $\overline{m}-1$ при умові заборони на короткий продаж 1-го цінного паперу.

$$V = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{m} = 6, m_0 = 3, \nu_0 = 3$$

Розв'язання.
Пункт 1. Маємо наступну постановку задачі:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} \to \min & \text{Мінімізація ризику} \\ x_0 + \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x} = 1 & \text{Умова нормування} \\ m_0 x_0 + \mathbf{m}^\top \mathbf{x} \geq \overline{m} + 1 & \text{Ефективність не нижче за } \overline{m}+1 \end{cases}$$

Для початку, потрібно позбутись x_0. Для цього введемо $\mathbf{M} := \mathbf{m} - m_0 =$

$(7-3, 1-3, 4-3) = (4, -2, 1)$ та $\hat{m} := \overline{m}+1-m_0 = 4$. Тоді задача записується дещо простіше:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} \to \min \\ \hat{m} - \mathbf{M}^\top \mathbf{x} \le 0 \end{cases}$$

Theorem 1.2. Якщо $\hat{m} > 0$, $\mathbf{M} \neq 0$, то розв'язок початкової задачі має вигляд:

$$\mathbf{x} = \frac{\hat{m}V^{-1}\mathbf{M}}{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}.$$

Доведення. Складаємо функцію Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} + \lambda(\hat{m} - \mathbf{M}^\top \mathbf{x})$. Розв'язок задачі Тобіна в такому разі знаходять з системи:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)/\partial\mathbf{x} = \mathbf{0}_n, \\ \lambda(\hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x}) = 0,\ \lambda \ge 0 \\ \hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x} \le 0 \end{cases}$$

Оскільки $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{x} = 2V\mathbf{x} - \lambda\mathbf{M}$, то ми образу знаходимо $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\lambda V^{-1}\mathbf{M}$. З другого рівняння якщо $\lambda = 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ та $x_0 = 1$ — тобто вкладаємо все в безризиковий актив. Проте, цей випадок можливий лише за умови $\hat{m} \ge 0$, що за умовою не виконується.

Отже, $\hat{m} = \mathbf{M}^\top\mathbf{x}$. Тому, якщо підставити вираз для $\mathbf{x}$, отримуємо

$$\lambda = \frac{2\hat{m}}{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}} \ge 0$$

Отже, підставляючи λ у вираз для $\mathbf{x}$, отримаємо

$$\mathbf{x} = \frac{\hat{m}V^{-1}\mathbf{M}}{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}$$

Вираз для x_0 знаходиться з умови нормування. ■

Чисельний розв'язок. Обернена матриця до V має вигляд:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Таким чином, підставляючи:

$$\hat{m}V^{-1}\mathbf{M} = 4\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M} = \frac{23}{4}$$

Таким чином, остаточно:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{20}{23} \\ -\frac{4}{23} \\ \frac{4}{23} \end{pmatrix} \implies x_0 = 1 - \frac{20}{23} = \frac{3}{23}.$$

Відповідь. $x_0 = \frac{3}{23}$, $x_1 = \frac{20}{23}$, $x_2 = -\frac{4}{23}$, $x_3 = \frac{4}{23}$.

Пункт 2. Постановка задачі виглядає наступним чином (після позбавлення від x_0):

$$\begin{cases} \mathbf{M}^\top \mathbf{x} \to \max & \text{Максимізація ефективності} \\ \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} = \nu_0^2, & \text{Ризик дорівнює } \nu_0 \end{cases}$$

Наведемо наступну теорему з лекції.

Theorem 1.3. Якщо $\mathbf{M} \neq 0$, то розв'язок задачі має вигляд:

$$\mathbf{x} = \frac{\nu_0 V^{-1}\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}$$

Доведення. Складаємо функцію Лагранжа: $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{M}^\top \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^\top V \mathbf{x} - \nu_0^2)$. Розв'язок задачі Тобіна в такому разі знаходять з системи:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)/\partial\mathbf{x} = \mathbf{0}_n, \\ \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)/\partial\lambda = 0 \end{cases}$$

В нашому випадку це еквівалентно системі:

$$\begin{cases} \mathbf{M} + 2\lambda V \mathbf{x} = 0, \\ \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} = \nu_0^2 \end{cases}$$

З першого рівняння отримуємо $\mathbf{x} = -\frac{1}{2\lambda} V^{-1}\mathbf{M}$. В підставлені у друге рівняння, отримаємо

$$\lambda^2 = \frac{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}{4\nu_0^2} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}{2\nu_0}$$

Оскільки ми хочемо отримати максимум, то $\partial^2\mathcal{L}/\partial\mathbf{x}^2 = 2\lambda V < 0$, тому потрібно обрати від'ємний корінь. Отже, $\lambda = -\frac{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}{2\nu_0}$ і тому

$$\mathbf{x} = \frac{\nu_0 V^{-1}\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x}. \qquad \blacksquare$$

Чисельний розв'язок. Підставляємо числа (більшість ми вже обраховували вище):

$$\nu_0 V^{-1}\mathbf{M} = 3\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}} = \sqrt{\frac{23}{4}} = \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Таким чином, остаточно:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2\sqrt{23}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{23}} \\ \frac{3}{2\sqrt{23}} \end{pmatrix} \implies x_0 = 1 - \frac{15}{2\sqrt{23}}$$

Відповідь. $x_0 = 1 - \frac{15}{2\sqrt{23}}$, $x_1 = \frac{15}{2\sqrt{23}}$, $x_2 = -\frac{3}{2\sqrt{23}}$, $x_3 = \frac{3}{2\sqrt{23}}$.

Пункт 3. Формально маємо наступну постановку задачі:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^\top\mathbf{x} \to \max, & \text{Максимізація ефективності} \\ \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} \leq (\nu_0 - 1)^2. & \text{Ризик не перевищує } \nu_0 - 1 \end{cases}$$

Наведемо наступну теорему з лекції.

Theorem 1.4. Якщо $\mathbf{M} \neq 0$, то розв'язок задачі має вигляд (для $\widetilde{\nu}_0 := \nu_0 - 1$):

$$\mathbf{x} = \frac{\widetilde{\nu}_0 V^{-1}\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}$$

Доведення. Введемо функцію Лагранжа $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = -\mathbf{M}^\top\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^\top V\mathbf{x} - \widetilde{\nu}_0^2)$ (мінус в першому члені стоїть через те, що нам потрібно мінімізувати вираз $\mathbf{M}^\top\mathbf{x}$). Тоді згідно теореми Куна-Таккера:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{x} = \mathbf{0}_n, \\ \lambda(\mathbf{x}^\top V\mathbf{x} - \widetilde{\nu}_0^2) = 0, \ \lambda \geq 0 \\ \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} - \widetilde{\nu}_0^2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda V\mathbf{x} - \mathbf{M} = \mathbf{0}_n, \\ \lambda(\mathbf{x}^\top V\mathbf{x} - \widetilde{\nu}_0^2) = 0, \ \lambda \geq 0 \\ \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} - \widetilde{\nu}_0^2 \leq 0, \end{cases}$$

Якщо $\lambda = 0$, то $\mathbf{M} = \mathbf{0}_n$, що протирічить умові задачі. Тому $\lambda \neq 0$ і тому $\mathbf{x} = \frac{1}{2\lambda}V^{-1}\mathbf{M}$. Якщо підставити це у рівняння $\mathbf{x}^\top V\mathbf{x} = \widetilde{\nu}_0^2$, то отримуємо $\lambda^2 = \mathbf{M}^\top V\mathbf{M}/4\widetilde{\nu}_0^2$. При взятті кореня, відкидаємо від'ємний корінь (оскільки $\lambda \geq 0$), тому $\lambda = \sqrt{\mathbf{M}^\top V\mathbf{M}}/2\widetilde{\nu}_0$ і остаточно:

$$\mathbf{x} = \frac{\widetilde{\nu}_0 V^{-1}\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}. \qquad \blacksquare$$

Чисельний розв'язок. Маємо $\widetilde{\nu}_0 = 2$, тому:

$$\widetilde{\nu}_0 V^{-1}\mathbf{M} = 2\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}} = \sqrt{\frac{23}{4}} = \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Згідно формулі вище, отримуємо розв'язок задачі:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{23}} \\ -\frac{1}{\sqrt{23}} \\ \frac{1}{\sqrt{23}} \end{pmatrix} \implies x_0 = 1 - \frac{5}{\sqrt{23}}.$$

Відповідь. $x_0 = 1 - \frac{5}{\sqrt{23}}$, $x_1 = \frac{5}{\sqrt{23}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{23}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{23}}$.

Пункт 4. Формальна постановка задачі наступна:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} \to \min & \text{Мінімізація ризику} \\ m_0x_0 + \mathbf{m}^\top\mathbf{x} = \overline{m} - 1 & \text{Ефективність дорівнює } \overline{m} - 1 \\ x_0 + \mathbf{1}_n^\top\mathbf{x} = 1 & \text{Умова нормування} \\ x_1 \geq 0 & \text{Заборона короткого продажу 1-го активу} \end{cases}$$

Виключимо x_0 з задачі, як і в класичній задачі Тобіна. Вводимо $\hat{m} = \overline{m} - 1 - m_0 = 2$, вектор $\mathbf{M} = (4, -2, 1)$ і тоді задача має вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} \to \min \\ \mathbf{M}^\top\mathbf{x} = \hat{m} \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Застосуємо теорему Куна-Таккера. Введемо функцію Лагранжа (тут в позначеннях лекції $h_1(x) = \hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x}$ та $f_1(x) = -x_1$):

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{x}^\top V\mathbf{x} + \lambda(\hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x}) - \mu x_1$$

В такому разі, має виконуватись система рівнянь:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu)/\partial\mathbf{x} = \mathbf{0}_n, \\ \hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x} = 0, \\ x_1 \geq 0, \\ \mu x_1 = 0, \ \mu \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V\mathbf{x} - \lambda\mathbf{M} - \mu\mathbf{e}_1 = 0, \\ \hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x} = 0, \\ x_1 \geq 0, \\ \mu x_1 = 0, \ \mu \geq 0 \end{cases}$$

Виразимо $\mathbf{x}$ з першого рівняння:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}V^{-1}\left(\lambda\mathbf{M} + \mu\mathbf{e}_1\right)$$

Тепер розглянемо випадки. **Випадок 1.** Нехай $\mu = 0$. В такому разі, $\mathbf{x} = \frac{\lambda}{2}V^{-1}\mathbf{M}$ і тоді розв'язок задачі збігається з пунктом 1:

$$\mathbf{x} = \frac{\hat{m}V^{-1}\mathbf{M}}{\mathbf{M}^\top V^{-1}\mathbf{M}}, \quad x_0 = 1 - \mathbf{1}_n^\top\mathbf{x}$$

Якщо підставити конкретні значення:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{10}{23} \\ -\frac{2}{23} \\ \frac{2}{23} \end{pmatrix} \implies x_0 = \frac{13}{23}.$$

Оскільки $x_1 \geq 0$, то розв'язок підходить.

Випадок 2. Нехай $\mu > 0$. В такому разі, $x_1 = 0$ і маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2V\mathbf{x} - \lambda\mathbf{M} - \mu\mathbf{e}_1 = 0, \\ \hat{m} - \mathbf{M}^\top\mathbf{x} = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Маємо $n-1$ невідомих в $\mathbf{x}$ та дві невідомі (λ, μ), тобто в сумі $n+1$. Перша строчка містить n рівнянь, друга — 1 рівняння, тобто рівнянь нам достатньо. Рівняння лінійні і тому можемо їх спокійно розв'язати. Підставимо значення:

$$2V\mathbf{x} - \lambda\mathbf{M} - \mu\mathbf{e}_1 = 0 \implies 2\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Звідси система рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_2 - 4\lambda - \mu = 0 \\ 4x_2 - x_3 + 2\lambda = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - \lambda = 0 \end{cases}$$

Додамо другу строчку: $\mathbf{M}^\top\mathbf{x} = -2x_2 + x_3 = 2$. Тому остаточно:

$$\begin{cases} -2x_2 - 4\lambda - \mu = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2\lambda = 0 \\ -2x_2 + 6x_3 - \lambda = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння: $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $\lambda = 2$, $\mu = -6$. Який би розв'язок не був красивий, проте він не підходить: $\mu < 0$, що суперечить накладеній умові $\mu \geq 0$.

Відповідь. $x_1 = \frac{10}{23}$, $x_2 = -\frac{2}{23}$, $x_3 = \frac{2}{23}$, $x_0 = \frac{13}{23}$.