Домашня робота з чисельних метод лінійної алгебри #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

24 лютого 2023 р.

Завдання 1

Умова. Знайти норми $\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ вектора

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Користуємось означеннями і просто підставляємо:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |4| + |5| + |-6| = 15$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{77}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i| = \max\{|4|, |5|, |-6|\} = 6$$

Отже, найбільша з них це $\|\boldsymbol{x}\|_1$, а найменша це $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Перевіримо, чи виконуються оцінки. Перша оцінка це

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

Підставляємо усі значення:

$$\sqrt{77} \leq 15 \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{77} = \sqrt{231}$$

Якщо підняти усі додатки у квадрат, отримаємо $77 \leq 225 \leq 231$. Дійсно виконується. Аналогічно для 2 наступних формул маємо:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty : \ 6 \leq \sqrt{77} \leq 6\sqrt{3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq n\|\boldsymbol{x}\|_\infty : \ 6 \leq 15 \leq 3 \cdot 6 = 18$$

Завдання 2

Умова. Знайти норми $\|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2, \|\mathbf{A}\|_\infty, \|\mathbf{A}\|_F$ матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Знову просто скористаємось означеннями і порахуємо:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \max\{5+7, 6+8\} = 14$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \max\{5+6, 7+8\} = 15$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2} = \sqrt{25+36+49+64} = \sqrt{174}$$

Найскладніше, очевидно, знайти $\|\mathbf{A}\|_2$, бо для цього потрібно знайти значення виразу:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$$

Знаходимо добуток матриць:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & -86 \\ -86 & 100 \end{bmatrix}$$

Складаємо характеристичний поліном:

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} 74-\lambda & -86 \\ -86 & 100-\lambda \end{bmatrix}$$

Якщо розв'язати рівняня $\chi(\lambda) = 0$, то отримаємо 2 розв'язки, найбільший з яких $87 + \sqrt{7565}$. Отже,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{87 + \sqrt{7565}}$$

Найменше значення у $\|\mathbf{A}\|_2$, найбільше у $\|\mathbf{A}\|_\infty$.

Завдання 3

Розв'язок. Число обумовленості матриці знаходиться як:

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|$$

Знаходимо обернену матрицю:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{7}{2} \\ -3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Знаходимо числа обумовленості:

$$\mathrm{cond}_1(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}\|_1 = 7 \cdot 14 = 98$$

$$\mathrm{cond}_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \cdot \|\mathbf{A}\|_\infty = \frac{15}{2} \cdot 15 = 112.5$$

Бачимо, що для норми $\|\cdot\|_\infty$ це число більше.

Завдання 4*

Розв'язок. Отже, нехай ми маємо лінійне рівняння:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{b} \tag{1}$$

Проробимо ті самі операції, що описані у лекції. Отже нехай ми трошки змінюємо вектор $\boldsymbol{b}$ і отримали $\widetilde{\boldsymbol{b}}$.

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}^\top \widetilde{\boldsymbol{b}} \tag{2}$$

Віднімаємо від рівняння 1 рівняння 2. Маємо:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}(\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{A}^\top (\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}}) \tag{3}$$

Домножуємо обидві частини зліва на $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$:

$$\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top (\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}}) \tag{4}$$

Звісно на цьому етапі ми в могли скористатись тим, що $(\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{A}^\top = \mathbf{E}$ і отримати вираз, що був в лекції, але зараз ми вважаємо, що ми по суті порахували $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ як одну цілу матрицю і намагаємось розв'язати рівняння. Отже, тепер запишемо норму:

$$\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\| = \left\|(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top (\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}})\right\| \tag{5}$$

$$\leq \|\mathbf{A}^\top\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|(\mathbf{A}^\top)^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\| \tag{6}$$

З іншого боку, як було доведено у лекції:

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{7}$$

Якщо поєднати 6 та 7, то можемо отримати:

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}^\top\| \cdot \|(\mathbf{A}^\top)^{-1}\| \cdot \frac{\|\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{8}$$

Можемо помітити наступне (через ε позначаємо відносну помилку):

$$\varepsilon_{\mathbf{x}} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{cond}(\mathbf{A}^{\top}) \cdot \varepsilon_{\mathbf{b}} \tag{9}$$

Тобто тут маємо, що "ефективне число обумовленності" дорівнює $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{cond}(\mathbf{A}^{\top})$, що більша за $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ оскільки число обумовленності завжди ≥ 1. Отже, система стає менш "гарною".