Домашня робота з математичного аналізу #23

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

7 травня 2023 р.

Завдання 2.2.

Умова. Обчислити дані поверхневі інтеграли першого роду

$$\mathcal{I} = \iint_S (x^2 + y^2) dS$$

де S частина конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$ між площинами $z = 0, z = 1$.

Розв'язок. Параметризуємо нашу криву наступним чином:

$$\boldsymbol{x}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho \end{bmatrix}$$

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix}, \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тоді векторний добуток:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right] = \begin{bmatrix} -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \\ \rho \end{bmatrix}$$

Отже, довжина цього вектора:

$$\left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right] \right\| = \rho\sqrt{2}$$

Тоді наш інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \|\boldsymbol{n}(\rho,\theta)\| d\theta = \sqrt{2}\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \\ 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Завдання 2.3.

Умова. Обчислити данний поверхневий інтеграл першого роду

$$\mathcal{I} = \iint_S xyz dS$$

де S є частиною поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ між площинами $z = 0, z = 1$.

Розв'язок. Параметризуємо поверхню як:

$$\boldsymbol{x}(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho^2 \end{bmatrix}$$

Тоді часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\rho \sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2\rho \end{bmatrix}$$

А отже векторний добуток:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho}\right] = \begin{bmatrix} -2\rho^2\cos\theta \\ -2\rho^2\sin\theta \\ \rho \end{bmatrix}$$

А отже модуль:

$$\left\|\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho}\right]\right\| = \sqrt{\rho^2 + 4\rho^4} = \rho\sqrt{1+4\rho^2}$$

Нарешті, перейдемо до інтегралу:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho\sqrt{1+4\rho^2} d\theta$$

Проте помічаємо, що

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Тому $\mathcal{I} = 0$.

Відповідь. $\mathcal{I} = 0$.

Завдання 2.4.

Умова. Обчислити данний поверхневий інтеграл першого роду

$$\mathcal{I} = \iint_S (x^2+y^2)dS$$

де S є поверхнью сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язок. Парамеризуємо поверхню як

$$\boldsymbol{x}(\ell, \theta) = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 - \ell^2} \cos\theta \\ \sqrt{a^2 - \ell^2} \sin\theta \\ \ell \end{bmatrix}, \ \theta \in [0, 2\pi], \ \ell \in [-a, a]$$

Тоді після рутинних розрахунків отримуємо:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \ell} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right] = -\begin{bmatrix} \sqrt{a^2 - \ell^2} \cos\theta \\ \sqrt{a^2 - \ell^2} \sin\theta \\ \ell \end{bmatrix}$$

А отже довжина:

$$\left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \ell} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right] \right\| = a$$

В такому разі маємо інтеграл:

$$\mathcal{I} = a \int_{-a}^{a} d\ell \int_{0}^{2\pi} (a^2 - \ell^2) d\theta = 2\pi a \int_{-a}^{a} (a^2 - \ell^2) d\ell =$$
$$2\pi a \left(a^2 \ell - \frac{1}{3}\ell^3\right)\Bigg|_{\ell=-a}^{\ell=a} = 2\pi a^4 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8\pi a^4}{3}$$

Відповідь. $\frac{8\pi a^4}{3}$.