✏️

Homework #1 (1/1)

Завдання 1358.

Щоб перевірити, що задані два вектора $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ є ортогональні, перевіримо, що їх скалярний добуток дорівнює 0:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0$$

Доповнимо систему до ортогональної. Знайдемо вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \widetilde{w} \end{pmatrix}$ (тут ми використали 1, оскільки ми можемо знайти вектор з точністю до коефіцієнта) і якщо він є частиною ортогонального базису, то $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{x} \rangle = 0$ або:

$$\begin{cases} 1 + \tilde{y} + \tilde{z} + 2\widetilde{w} = 0 \\ 1 + 2\tilde{y} + 3\tilde{z} - 3\widetilde{w} = 0 \end{cases}$$

Виразимо $\tilde{z}$ з верхнього рівняння і підставимо у нижнє. Після деяких алгебраїчних перетворень:

$$\tilde{y} = -2 - 9\widetilde{w},\ \tilde{z} = 7\widetilde{w} + 1$$

Отже маємо клас розв’язань якщо покласти $\widetilde{w} = r$ як параметр:

$$\mathbf{x}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - 9r \\ 1 + 7r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Помітимо, що два вектори $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, що ми хочемо додати, щоб зробити систему векторів ортогональною, обов'язково повинні бути частиною множини векторів $\mathbf{x}$. Тому, нехай $\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}(\alpha), \mathbf{e}_4 = \mathbf{x}(\beta)$. Єдина умова, яку ми не урахували, це $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle = \langle \mathbf{x}(\alpha), \mathbf{x}(\beta) \rangle = 0$. Тому:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2-9\alpha \\ 1+7\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2-9\beta \\ 1+7\beta \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Або $131\alpha\beta + 25\alpha + 25\beta + 6 = 0$. Покладемо $\alpha = 0$. Отримаємо $\beta = -\frac{6}{25}$. Це відповідає векторам:

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\mathbf{e}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.16 \\ -0.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

В якості $\mathbf{e}_4$ для красивої відповіді візьмемо $25\hat{\mathbf{e}}_4$, а в $\mathbf{e}_3$ запишемо просто $\hat{\mathbf{e}}_3$. Отже наша відповідь:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Завдання 1362.

Застосуємо процес ортогоналізації. Покладемо $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Знайдемо $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{5+8+2+6}{1+1+1+4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Нарешті $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_1 - \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle}\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\mathbf{b}_3 = \theta$, то можемо взяти довільні β_1, β_2: $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \beta_2\mathbf{b}_2 - \beta_1\mathbf{b}_1$.