Екзаменаційна робота з предмету "Теорія міри та інтегралу"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

11 грудня 2023 р.

Питання 1.

Умова. Сформулювати теорему Лебега (про мажоровану збіжність). Перевірити виконання умов цієї теореми для $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \lambda_1)$ і послідовності $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, де

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{n}, & x \in \left(-1 - \frac{1}{n}, 0\right] \\ 2 - \frac{1}{n^2}, & x \in \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

У разі виконання цих умов обчислити $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1$.

Відповідь. Отже, спочатку сформулюємо теорему Лебега про мажоровану збіжність.

Теорема: Теорема Лебега про мажоровану збіжність

Нехай маємо $f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – вимірні функції. Також, нехай виконуються умови:

1. $f_n \to f \pmod{\lambda}$;
2. $\exists g \in L(X, \lambda) : |f_n| \le g \pmod{\lambda}$;

Тоді

$$f \in L(X, \lambda) \wedge \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = \int_X f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\lambda$$

Тут, в лівій частині рівності, ми беремо поточкову збіжність.

Отже, нам потрібно знайти, куди поточково збігається f_n. Доведемо наступне твердження.

Твердження. Послідовність $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f м.с., де

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0] \\ 2, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо означення поточкової збіжності:

Означення: Поточкова збіжність

Нехай $(X, \mathcal{F}, \lambda)$ є простором з мірою, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Послідовність $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f майже скрізь відносно міри λ, якщо

$$\exists N \subset X : \lambda(N) = 0 \wedge \forall x \in X \setminus N : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

В якості N просто візьмемо пусту множину. В такому разі покажемо, що

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Дійсно, візьмемо будь-який $x \in [-1, 0]$. Оскільки такий x буде завжди належати інтервалу $(-1 - \frac{1}{n}, 0], n \in \mathbb{N}$, то $f_n(x)\Big|_{x\in[-1,0]} = -1 + \frac{1}{n}$.

Оскільки $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$, то отримуємо початкове твердження для $\forall x \in [-1, 0]$.

Аналогічно, розглядаємо $x \in (0, 1]$. Він завжди лежить в інтервалі $(0, 1 + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$, а отже

$$f_n(x)\Big|_{x\in(0,1]} = 2 - \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

Отже довели для $\forall x \in (0, 1]$.

Якщо ж взяти $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, то справедливо наступне:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]\ \exists n_x \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_x : f_n(x) = 0$$

Тобто для усіх таких x ми знайдемо n_x таке, починаючи з якого x буде попадати в інтервали $\mathbb{R} \setminus \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. Дійсно, беремо $x > 1$. Тоді треба вимагати $x > 1 + \frac{1}{n}$, тому обираємо $\frac{1}{n} < x - 1 \implies n > \frac{1}{x-1}$. Тоді $n_x := \left[\frac{1}{x-1}\right] + 1$. Аналогічні міркування можна провести для $x < -1$.

Тепер, доведемо наступне твердження.

Твердження. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 = 1$.

Доведення. Використовуючи **теорему Лебега про мажоровану збіжність**, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_1(x)$$

Отже, достатньо знайти $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1$. Скористаємось адитивністю інтеграла Лебега:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 &= \int_{[-1,0]\cup(0,1]\cup(\mathbb{R}\setminus[-1,1])} f d\lambda_1 \\
&= \int_{[-1,0]} f d\lambda_1 + \int_{(0,1]} f d\lambda_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} f d\lambda_1}_{=0} \\
&= -\int_{[-1,0]} d\lambda_1 + 2\int_{(0,1]} d\lambda_1 = 2\lambda_1((0,1]) - \lambda_1([-1,0]) = 1
\end{aligned}$$

Питання 2.

Умова. Сформулювати теорему про монотонне кільце. Навести приклад, що ілюструє цю теорему.

Відповідь. Отже, сформулюємо теорему про монотонне кільце.

Теорема: Про монотонне кільце

Нехай X – універсальна множина, $\mathcal{K} \subset 2^X$ є кільцем. Тоді $m(\mathcal{K}) = \sigma k(\mathcal{K})$, де

$$\sigma k(\mathcal{H}) \triangleq \bigcap_{\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_\alpha,\ \mathcal{K}_\alpha \text{ є } \sigma\text{-кільцем}} \mathcal{K}_\alpha$$

$$m(\mathcal{H}) \triangleq \bigcap_{\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_\alpha,\ \mathcal{M}_\alpha \text{ є монотонним класом}} \mathcal{M}_\alpha$$

Приклад. Візьмемо, наприклад, наступне кільце та універсальну множину:

$$X = \mathbb{Z},\ \mathcal{K} := \{A \in 2^{3\mathbb{Z}} : A \text{ – скінченна}\}$$

Тобто, беремо в якості $\mathcal{K}$ множину скінченних множин цілих чисел, що кратні 3. Тоді, очевидно, перед нами кільце – беремо будь-які $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$; тоді об'єднання цілих чисел, кратних 3, дасть нам множину цілих чисел, кратних 3, причому скінченну (оскільки об'єднання двох скінченних множин завжди скінченне). Також віднімання буде замкненим.

Якщо взяти $\sigma k(\mathcal{K})$, то отримаємо просто $2^{3\mathbb{Z}}$, тобто ми можемо також включати зліченні підмножини множини цілих чисел, що кратні 3. Тоді за теоремою, $m(\mathcal{K}) = 2^{3\mathbb{Z}}$. Дійсно, розширення за монотонним класом також дасть нам $2^{3\mathbb{Z}}$ так само, як і при розширенні до σ-кільця.

Питання 3.

Умова. Дати загальне означення зовнішньої міри. Навести приклад.

Відповідь. Наводимо означення.

Означення: Зовнішня міра

Функція множин $\lambda^* : 2^X \to [0, +\infty]$ називається зовнішньою мірою, якщо

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$;
2. $\forall A \in 2^X \, \forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$:

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies \lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$$

Приклад. Візьмемо:

$$\lambda^*(A) := 1 - \mathbb{1}(A = \emptyset) \equiv \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

Перевіримо виконання обох твердження означення. Перше, вочевидь, виконується. Перевіримо друге. Потрібно показати, що:

$$\forall A \in 2^X \, \forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies \lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$$

Покажемо від противного. Твердження не буде виконуватись, якщо знайдуться A та $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такі, що $\lambda^*(A) > \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$. Це можливо лише у випадку, коли $\lambda^*(A) = 1$, а $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) = 0$. Якщо нескінченна сума дорівнює 0, то $A_n \equiv \emptyset$. Проте, $A \neq \emptyset$, оскільки $\lambda^*(A) = 1$. Тоді отримуємо $\emptyset \neq A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset = \emptyset$. Протиріччя.

Тепер розглянемо означення зовнішньої міри, що породжена мірою.

Означення: Зовнішня міра, породжена мірою

Нехай λ є мірою на півкільці $\mathcal{P}$. Зовнішньою мірою, породженою мірою λ, називається функція множин

$$\lambda^*(A) = \begin{cases} +\infty, & \nexists \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \wedge \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}\right\}, & \text{інакше} \end{cases}$$

Приклад. Нехай

$$X = \{A, B, C\},\ \mathcal{P} = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}\},$$

$$\lambda : \mathcal{P} \to [0, +\infty),\ \lambda(\emptyset) = 0,\ \lambda(\{A\}) = 1,\ \lambda(\{B\}) = 1.$$

Тоді зовнішню міру можна задати таким чином:

$$\forall H \in 2^X : \lambda^*(H) = \begin{cases} |H|, & C \notin H \\ +\infty, & C \in H \end{cases}$$

Питання 4.

Питання. Сформулювати теорему про суперпозицію вимірних відображень та її наслідок. Навести приклади, що ілюструють ці твердження.

Відповідь. Спочатку сформулюємо твердження.

Теорема: Суперпозиція вимірних відображень

Нехай $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$, $(Z, \mathcal{F}_Z)$ є вимірними просторами, функція $f : X \to Y$ є $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y)$-вимірною, а функція $g : Y \to Z$ є $(\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_Z)$-вимірною. Тоді функція $h = g \circ f$ є $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Z)$-вимірною.

Приклад. Візьмемо $X = Y = Z = \mathbb{R}, \mathcal{F}_X = \mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Z = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. У якості відображень обираємо

$$f(x) = [x],\ g(y) = \cos y \implies h = \cos[x]$$

Скористаємось наступним твердженням:

Твердження: Про борельові відображення

Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною або монотонною, то f є борельовою (тобто, вона є $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірною).

Бачимо, що f є монотонною, а g неперервною, тому f, g є борельовими. Тому, користуючись теоремою про суперпозицію вимірних відображень, h теж є борельовою, тобто $(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Z) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірною.

Наслідок: Вимірність суперпозиції

Нехай $(X, \mathcal{F})$ є вимірним простором, функції $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n = 1 \ldots m$ є $\mathcal{F}$-вимірними, функція $g : \overline{\mathbb{R}}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ є борельовою. Тоді функція $h = g \circ (f_1, \ldots, f_m) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ є $\mathcal{F}$-вимірною.

Приклад. Цей наслідок проілюструємо на прикладі наступної функції:

$$h(x, y) = \frac{\sin x}{17 + \cos^2 y}$$

Тоді візьмемо:

$$g(x, y) = \frac{x}{17 + y^2},\ \ f_1(x) = \sin x,\ \ f_2(y) = \cos y$$

Функції f_1, f_2 є борельовими, бо є неперервними. g також є борельовою, бо є відношенням двох борельових функцій, причому в знаменнику не може бути 0. Тому $h = g(f_1, f_2)$ теж є борельовою за наслідком.

Питання 5.

Умова. Сформулювати властивості інтеграла Лебега (інтеграл по підмножині, критерій інтегровності в термінах модуля функції, мажорантна ознака інтегровності, нульовий інтеграл від невід'ємної функції, нульовий інтеграл по будь-якій вимірній множині). Навести приклади.

Відповідь. Отже, сформулюємо властивності інтеграла Лебега.

Твердження: Властивості інтеграла Лебега

Нехай $A, B \in \mathcal{F}$ і функція $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ є $\mathcal{F}$-вимірною. Тоді справедливі наступні властивості:

- **Інтеграл по підмножині:** Нехай $\forall x \in A : f(x) \geq 0$ та $A \subset B$. Тоді $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$.
- **Критерій інтегрованості в термінах модуля функції:** $f \in L(A, \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $|f| \in L(A, \lambda)$ і
$$\left| \int_A f d\lambda \right| \leq \int_A |f| d\lambda$$
- **Мажорантна ознака інтегровності**: Якщо $g \in L(A, \lambda)$ та $\forall x \in A : |f(x)| < g(x)$, то $f \in L(A, \lambda)$.
- **Нульовий інтеграл від невід'ємної функції**: Якщо $\forall x \in A : f(x) \geq 0$ і $\int_A f d\lambda = 0$, то $f = 0 \pmod{\lambda}$ на A.
- **Нульовий інтеграл по будь-якій вимірній множині**: Якщо для будь-якого $A \in \mathcal{F} : \int_A f d\lambda = 0$, то $f = 0 \pmod{\lambda}$ на X.

Наведемо приклади для кожного твердження.

Інтеграл по відмножині. Нехай $f \equiv 1$. Вона додатно визначена. Тоді маємо
$$\int_A f d\lambda = \int_A d\lambda = \lambda(A), \int_B f d\lambda = \lambda(B)$$
Дійсно $\int_A f d\lambda \leq \int_B f d\lambda$ оскільки $\lambda(A) \leq \lambda(B)$, що випливає з властивостей міри.

Критерій інтегрованості в термінах модуля функції. Візьмемо $f(x) = (-1)^{[x]}$ та $A = [0, 2)$. Очевидно, що $|f| \equiv 1$ інтегрована на A і дорівнює $\lambda(A) = 2$. Тому, користуючись відповідною властивістю, $f(x)$ теж є інтегрованим на A. Причому, цей інтеграл можемо знайти, користуючись адитивністю:

$$\int_{[0,2]} (-1)^{[x]} d\lambda(x) = \int_{[0,1)} (-1)^{x} d\lambda(x) + \int_{[1,2)} (-1)^{[x]} d\lambda(x) = 0$$

Дійсно $\left|\int_A f d\lambda\right| \le \int_A |f| d\lambda$, оскільки в нас вийшло $\left|\int_A f d\lambda\right| = 0, \int_A |f| d\lambda = 2$.

Мажорантна ознака інтегровності. Нехай $f(x) = \sin x$ та $A = [-2, 2]$. У якості g візьмемо $g \equiv 2$. Тоді дійсно $|f(x)| \le 1 < g \equiv 2$. Помітимо, що $g \in L(A, \lambda)$, оскільки

$$\int_A g d\lambda = 2 \int_A d\lambda = 2\lambda(A)$$

Тому $f \in L(A, \lambda)$ за мажорантною ознакою.

Нульовий інтеграл від невід'ємної функції. Візьмемо $A = [-100, 100]$ та наступну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in [-100, 100] \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Очевидно, що $\int_{[-100,100]} f d\lambda = 0$. Звідси випливає $f = 0 \pmod{\lambda}$. Останнє твердження очевидно справедливе і з означення збіжності майже скрізь, якщо взяти в якості $N := \{z \in \mathbb{Z} : z \in [-100, 100]\}$, оскільки в такому разі $\lambda(N) = 0$. Для всіх $[-100, 100] \setminus N$ функція тотожньо 0, тому і гранично теж 0.

Нульовий інтеграл по будь-якій вимірній множині. Можемо розширити минулий приклад на $\mathbb{R}$. Для цього розглянемо:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Очевидно, що яку б вимірну $A \in \mathcal{F}$ ми не брали, в нас $\int_A f d\lambda = 0$. Дійсно, розглянемо допоміжну множину $N = \{z \in \mathbb{Z} : z \in A\}$. Тоді

$$\int_A f d\lambda = \underbrace{\int_{A \setminus N} f d\lambda}_{f \equiv 0} + \underbrace{\int_N f d\lambda}_{f \equiv 1} = \int_N d\lambda = \lambda(N)$$

Оскільки $N \subset \mathbb{Z}$, то N є зліченною, а тому $\lambda(N) = 0$ з властивостей міри Лебега. Тому $\int_A f d\lambda = 0$. Тому, якщо скористатися властивістю, то $f = 0 \pmod{\lambda}$. Останнє твердження знову ж таки також випливає напряму з означення, якщо обрати $N = \mathbb{Z}$ ($\lambda(N) = 0$, бо $\mathbb{Z}$ є зліченною множиною).

Питання 6.

Умова. На $\mathbb{R}$ дослідити на збіжність майже скрізь та за мірою послідовність:

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{(n^4,(n+1)^4)}(x)$$

Розв'язок. Одразу помічаємо, що $(n+1)^4 - n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, оскільки $(n+1)^4 - n^4 \sim n^3, n \to \infty$. Цим фактом ми скористаємося пізніше.

Розглянемо збіжність майже скрізь. Доведемо, що $f_n \to 0 \pmod{\lambda}$. За означенням, треба показати

$$\exists N \subset \mathbb{R} : \lambda(N) = 0 \wedge \forall x \in X \setminus N : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

В якості N візьмемо пусту множину. Доведемо трошки більш строге твердження:

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n_x \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_x : f_n(x) = 0$$

Інакшими словами, починаючи з деякого $n_x \in \mathbb{N}$, x перестане міститись в $(n^4, (n+1)^4)$ для $n \geq n_x$. Дійсно, якщо $x \leq 1$, то це справедливо для взагалі будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Якщо ж $x > 1$, то будемо вимагати $n_x^4 > x$, тобто ліва межа буде правішою за x. Тому оберемо $n_x := [\sqrt[4]{x}] + 1$.

Отже, дійсно, $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, тому $f_n \to 0 \pmod{\lambda}$.

Зі збіжністю за мірою ситуація складніша. Покажемо, що до 0 функція не збігається. Якщо б функція збігалася, то мало б місце:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Побудуємо протилежне:

$$\exists \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \neq 0$$

Дійсно, візьмемо будь-який $\varepsilon \in (0, 1]$ (для конкретики можна вважати $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Тоді розглянемо множини $U_n := \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. Оскільки $|f_n(x)| = \mathbb{1}_{(n^4,(n+1)^4)}(x)$, то ця множина, по своїй суті, складається з усього відрізка $(n^4, (n+1)^4)$, бо на ньому $f_n(x) = 1 \geq \varepsilon$. В такому разі, можемо зробити висновок, що $U_n = (n^4, (n+1)^4)$.

Отже, тепер розглянемо $\lim_{n\to\infty} \lambda(U_n)$. Якщо ми розглядаємо міру Лебега, то така границя визначеною не буде, оскільки:

$$\lambda(U_n) = \lambda((n^4, (n+1)^4)) = (n+1)^4 - n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{(початок розв'язку)}} +\infty$$

Таким чином, f_n не є збіжною до 0 на $\mathbb{R}$. Проте, якщо б ми розглядали іншу міру, це не завжди було б так. Наприклад, нехай розглядаємо міру, породжену неспадною неперервною справа функцією:

$$\lambda_F((\alpha, \beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Обмежимось розгляданням збіжності на $\mathbb{R}^+$, тоді в якості $F(\cdot)$ можна взяти $\sqrt[5]{x}$, бо це неспадна, неперервна справа функція на $\mathbb{R}^+$. Тоді:

$$\lambda_F(U_n) = \sqrt[5]{(n+1)^4} - \sqrt[5]{n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

В такому разі, наша функція збігається як поточково, так і по мірі $\lambda_{\sqrt[5]{\cdot}}$ на $\mathbb{R}^+$.

Також, в нас була б збіжність навіть за мірою Лебега, якщо б ми обмежили розглядання не всього $\mathbb{R}$, а, скажімо, відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді дійсно

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in [\alpha, \beta] : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

оскільки знайшовся б деякий натуральний номер $n_{\alpha,\beta} \in \mathbb{N}$, починаючи з якого $(n^4, (n+1)^4) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$ для усіх $n \geq n_{\alpha,\beta}$. Так само можна розглянути будь-яку скінченну суму обмежених підмножин $\mathbb{R}$. Або, насправді, будь-яку послідовність множин $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, що обмежена справа. Тобто $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in A_n} x \in \mathbb{R}$.

Відповідь. Для будь-якої міри f_n поточково збігається до 0. По мірі Лебега послідовність збігається до 0 лише для деяких підмножин $\mathbb{R}$, на всьому $\mathbb{R}$ не збігається. На інших мірах послідовність збігатися може, як приклад для λ_F на $\mathbb{R}^+$ для $F = \sqrt[5]{x}$.