7️⃣

Homework #7

с. 73 № 52

Знайти

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$$

Розв'язок. Покладемо $\xi = x - 1$, в такому разі $d\xi = dx$ і

$$x^2 - 2x - 1 = (\xi+1)^2 - 2(\xi+1) - 1 = \xi^2 - 2$$

Тому

$$I = \int \frac{d\xi}{\xi^3\sqrt{\xi^2-2}}$$

Використаємо заміну $\xi = \sqrt{2}\sec\theta \to d\xi = \sec\theta\tan\theta d\theta$, тому

$$I = \int \frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{2\sqrt{2}\sec^3\theta\cdot\sqrt{2}\tan\theta} = \frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{4}\int\cos^2\theta d\theta$$

Використаємо те, що $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, тому

$$I = \frac{1}{8}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{8} + \frac{1}{16}\sin 2\theta + C$$

Далі переведемо це у вираз від ξ. Оскільки $\xi = \sqrt{2}/\cos\theta \to \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\xi}$, тому $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\xi}$. Знайдемо $\sin 2\theta$:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\xi}\sqrt{1-\frac{2}{\xi^2}}$$

В такому разі:

$$I = \frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{2}}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{8\xi}\sqrt{1-\frac{2}{\xi^2}} + C$$

Нарешті поклавши $\xi = x - 1$, маємо

$$I = \frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x-1} + \frac{\sqrt{2}}{8(x-1)}\sqrt{1-\frac{2}{(x-1)^2}} + C$$

Або

$$I = \frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x-1} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-2x-1}}{8(x-1)^2} + C$$

с. 73 № 61

Знайти

$$I = \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$$

Розв'язок. Розіб'ємо інтеграл на 2 частини:

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{1/2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Перший інтеграл табличний:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

Для другого інтегралу застосуємо заміну $x = \tan\theta \to dx = d\theta/\cos^2\theta$, тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}} = \int \cos\theta d\theta = \sin\theta + C$$

Оскільки $x = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$, маємо $\sin^2\theta = x^2 - x^2\sin^2\theta \to \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, в такому разі

$$I = \ln|x+\sqrt{1+x^2}| + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

с. 73 № 64

Знайти

$$I = \int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$$

Розв'язок. Домножимо обидві частини на $(1+\sqrt{1-x^2})^2$ і отримаємо

$$I = \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^4}dx = \int \frac{1+1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$$

Розділимо інтеграл на декілька частин:

$$I = 2\int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$$

Перші 2 інтеграли очевидні: $\int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C, \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C.$

Для третього інтеграла J зробимо наступне перетворення:

$$J = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx$$

А далі зробимо заміну $\xi^2 = \frac{1}{x^2} - 1 \to 2\xi d\xi = -\frac{2dx}{x^3} \to \frac{dx}{x^3} = -\xi d\xi$, тобто

$$J = \int \xi \cdot (-\xi d\xi) = -\int \xi^2 d\xi = -\frac{\xi^3}{3} + C = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

Таким чином:

$$I = -\frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x} - \frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

с. 73 № 108

Знайти

$$I = \int \frac{2+\cos 4x}{5+4\cos 4x}dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $\theta = 4x$, тоді

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2+\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

Далі скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою. Нехай $t = \tan\frac{\theta}{2}$, в такому разі $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ та $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. В такому разі

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2+2t^2+1-t^2}{(5+5t^2+4-4t^2)(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{3+t^2}{(9+t^2)(1 -$$

Розкладемо їх у найпростіші:

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2+9} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1}\right) = \frac{1}{8}\arctan\frac{t}{3} + \frac{1}{8}\arctan t + C$$

Оскільки $t = \tan 2x$, то

$$I = \frac{\arctan(\frac{\tan 2x}{3}) + 2x}{8} + C$$

с. 73 № 136

Знайти

$$I = \int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} dx$$

Розв'язок. Нехай $u = e^x \to du = e^x dx \to du = u dx \to dx = du/u$. Тоді

$$I = \int \frac{1+u^2}{(1+u)^2} \frac{du}{u}$$

Розкладуємо це у найпростіші дроби:

$$I = \int \frac{du}{u} - 2\int \frac{du}{(1+u)^2} = \ln|u| - 2\int \frac{d(1+u)}{(1+u)^2} + C = \ln|u| + \frac{2}{1+u} + C$$

Тому остаточно (тут $\sigma(x)$ — сігмоїд):

$$I = x + 2\sigma(-x) + C$$

с. 73 № 176

Знайти

$$I = \int \arctan(1-\sqrt{x}) dx$$

Розв'язок. Нехай $\zeta = \sqrt{x} \to d\zeta = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to dx = 2\zeta d\zeta$, тому

$$I = 2\int \arctan(1-\zeta)\zeta d\zeta$$

Далі інтегруємо по частинах. Нехай $v = \arctan(1-\zeta) \to dv = -\frac{d\zeta}{1+(1-\zeta)^2}$ і $du = \zeta d\zeta$, тоді $u = \frac{\zeta^2}{2}$. Отже

$$I = \zeta^2 \arctan(1-\zeta) + \int \frac{\zeta^2 d\zeta}{\zeta^2 - 2\zeta + 2}$$

Правий інтеграл позначимо через J. Розкладемо на прості дроби

$$J = \int \frac{2\zeta - 2}{\zeta^2 - 2\zeta + 2} d\zeta + \int d\zeta$$

В лівому інтегралі зробимо заміну $\xi = \zeta^2 - 2\zeta \to d\xi = 2\zeta - 2$, тому

$$J = \int \frac{d\xi}{\xi + 2} + \int d\zeta = \ln|\xi + 2| + \zeta + C = \ln|\zeta^2 - 2\zeta + 2| + \zeta + C$$

Отже, остаточно наш інтеграл (повернувшись до x):

$$I = x \arctan(1 - \sqrt{x}) + \ln|x - 2\sqrt{x} + 2| + \sqrt{x} + C$$