§ Контрольна робота 1, частина 2, варіант 5 §

Задача 1: Номер 1

Умова. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f_\xi(x) = \alpha(x+4)\cdot \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x) \tag{1.1}$$

(а) Знайти значення сталого параметру α, функцію розподілу випадкової величини $F_\xi(x)$ та ймовірності $\Pr[-3.2 \leq \xi \leq 8]$ та $\Pr[-3.2 < \xi < 8]$.

(б) Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Розв'язання.

Пункт а. Спочатку знайдемо коефіцієнт α. Для цього, використаємо *умову нормування*, тобто $\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = 1$. Маємо:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x+4)\cdot \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x)dx = \alpha\int_{-4}^{-3}(x+4)dx \tag{1.2}$$

Для обчислення зручно замінити $z = x+4$, тоді нижня і верхня межа інтегрування 0 та 1, відповідно. Тому,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \alpha\int_0^1 zdz = \alpha\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{\alpha}{2} = 1 \implies \boxed{\alpha = 2} \tag{1.3}$$

Тепер знайдемо функцію розподілу. За означенням:

$$F_\xi(x) \triangleq \Pr[\xi \leq x] = \int_{-\infty}^x f_\xi(x)dx = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ \int_{-4}^x f_\xi(t)dt, & x \in [-4,-3] \\ 1, & x > -3 \end{cases} \tag{1.4}$$

Отже, залишилось знайти $\int_{-4}^x f_\xi(t)dt$ для $x \in [-4,-3]$. Маємо:

$$\int_{-4}^x f_\xi(t)dt = 2\int_{-4}^x (x+4)dx = \begin{vmatrix} z = x+4 \\ dz = dx \end{vmatrix} = 2\int_0^{x+4} zdz = (x+4)^2 \tag{1.5}$$

Таким чином, остаточно маємо функцію розподілу:

$$\boxed{F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ (x+4)^2, & -4 \leq x \leq -3 \\ 1, & x > -3 \end{cases}} \tag{1.6}$$

Тепер знайдемо ймовірності. По-перше, оскільки ми маємо неперервну випадкову величину, то $\Pr[-3.2 \leq \xi \leq 8] = \Pr[-3.2 < \xi < 8] = \int_{-3.2}^{8} f_\xi(x)dx$[1]. Отже, діло звелось до обрахунку стандартного інтегралу:

$$\begin{aligned} \int_{-3.2}^{8.0} f_\xi(x)dx = 2\int_{-3.2}^{8.0} (x+4)\cdot \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x)dx = 2\int_{-3.2}^{-3.0}(x+4)dx \\ = \left| \begin{matrix} z = x+4 \\ dz = dx \end{matrix} \right| = 2\int_{0.8}^{1.0} zdz = z^2\Big|_{z=0.8}^{z=1.0} = 0.36 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Отже, $\boxed{\Pr[-3.2 \leq \xi \leq 8] = \Pr[-3.2 < \xi < 8] = 0.36}$.

Пункт б. За означенням, математичне сподівання можна знайти як:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi] = \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)dx = \int_{-4}^{-3} 2x(x+4)dx = \left| \begin{matrix} z = x+4 \\ x = z-4 \\ dz = dx \end{matrix} \right| \\ = 2\int_0^1 (z-4)zdz = 2\left(\underbrace{\int_0^1 z^2dz}_{=1/3} - 4\underbrace{\int_0^1 zdz}_{=1/2} \right) = \frac{2}{3} - 4 = \boxed{-\frac{10}{3}} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Нарешті, для дисперсії потрібно знайти математичне сподівання квадрату випадкової величини, тобто

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{-4}^{-3} 2x^2(x+4)dx = \left| \begin{matrix} z = x+4 \\ x = z-4 \\ dz = dx \end{matrix} \right| \\ = \int_0^1 2z(z-4)^2dz = 2\underbrace{\int_0^1 z^3dz}_{=1/4} - 16\underbrace{\int_0^1 z^2dz}_{=1/3} + 32\underbrace{\int_0^1 zdz}_{=1/2} \\ = \frac{1}{2} - \frac{16}{3} + 16 = \frac{67}{6} \end{aligned} \tag{1.9}$$

[1]За теоремою у лекції: оскільки множини $[-3.2, 8]$ та $(-3.2, 8)$ відрізняються одна від іншої на множину $\{-3.2, 8.0\}$ нульової міри Лебега, то вони мають однакові значення інтегралу по Лебегу.

Таким чином, дисперсію можна знайти як:

$$\mathrm{Var}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 = \frac{67}{6} - \frac{100}{9} = \boxed{\frac{1}{18}} \tag{1.10}$$

Відповідь.

(а) $\alpha = 2, F_\xi(x)$ дивись у розв'язанні, $\Pr[-3.2 \leq \xi \leq 8] = \Pr[-3.2 < \xi < 8] = 0.36$.

(б) $\mathbb{E}[\xi] = -\frac{10}{3}$, $\mathrm{Var}[\xi] = \frac{1}{18}$.

Задача 2: Номер 2

Умова. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з математичним сподіванням 6 та середнім квадратичним відхиленням 3. Знайти ймовірність $\Pr[2 < \xi < 5]$.

Розв'язання. Згідно умові, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ де $\mu = 6, \sigma = 3$. Щоб знайти ймовірність $\Pr[2 < \xi < 5]$, перейдемо до нормалізованої випадкової величини $\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$, для якої маємо таблицю функції Лапласа. Отже, запишемо ймовірність:

$$\Pr[2 < \xi < 5] = \Pr\left[\frac{2-6}{3} < \underbrace{\frac{\xi - 6}{3}}_{=\eta} < \frac{5-6}{3}\right] = \Pr\left[-\frac{4}{3} < \eta < -\frac{1}{3}\right] \tag{2.1}$$

Оскільки ми отримали $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, то для обрахунку цієї ймовірності скористаємося наступною формулою:

$$\Pr\left[-\frac{4}{3} < \eta < -\frac{1}{3}\right] = \Phi_0\left(\left|-\frac{4}{3}\right|\right) - \Phi_0\left(\left|-\frac{1}{3}\right|\right) = \Phi_0\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{1}{3}\right), \tag{2.2}$$

де $\Phi_0(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функція Лапласа. Власне точну відповідь ми отримали, залишається надати чисельне значення. Для цього знаходимо з таблиці наступне:

$$\Phi_0\left(\frac{4}{3}\right) \approx \Phi_0(1.33) \approx 0.4082, \quad \Phi_0\left(\frac{1}{3}\right) \approx \Phi_0(0.33) \approx 0.1293 \tag{2.3}$$

Отже, шукана ймовірність:

$$\Pr[2 < \xi < 5] \approx 0.4082 - 0.1293 = \boxed{0.2789} \tag{2.4}$$

Про всяк випадок, звіримо цю відповідь з більш точною, що отримана у *Wolfram Mathematica*. Для цього порахуємо значення "в лоб", тобто проінтегрувавши густину $f_\xi(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-6)^2}{18}\right)$ від 2.0 до 5.0 чисельно:

```
f[x_] = 1/(Sqrt[2*Pi]*3)*Exp[-((x-6)^2/18)];
Integrate[f[x], {x, 2.0, 5.0}]
```

На виході маємо приблизно 0.27823 – доволі близьке значення до нашого 0.2789. Неточність на 4 знаку після коми скоріше за все пов'язана з округленням 4/3 та 1/3 до 1.33 та 0.33, відповідно – можна отримати дещо більшу точність, якщо округлювати до, скажімо, 1.333, і інтерполювати між значеннями у таблиці, але дуже великий приріст у точності це не дасть.

Відповідь. Приблизно 0.2789.