Самостійна робота №1 (20/20)

Робота з математичного аналізу

Студента групи МП21 Захарова Дмитра

13.10.22

Завдання 1.

Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 2}$$

Розв'язок.

Скористаємось тригонометричною підстановкою. Нехай $t = \tan\frac{x}{2}$. Тоді $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ та $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тоді

$$I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 2\right)}$$

Далі спрощуємо:

$$I = \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 2 + 2t^2} = \int \frac{2dt}{-t^2 + 4t + 5} = -2\int \frac{dt}{(t+1)(t-5)}$$

Далі вираз $\frac{1}{(t+1)(t-5)}$ переписуємо як $\frac{1}{6(t-5)} - \frac{1}{6(t+1)}$. Можна це зробити різними способами, наприклад записавши вираз у виді $\frac{\alpha}{t+1} + \frac{\beta}{t-5}$, а далі знайшовши коефіцієнти α, β. Отже, отримаємо:

$$I = -2\int \left(\frac{1}{6(t-5)} - \frac{1}{6(t+1)}\right) dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-5}\right) dt$$

Далі користуємось лінійністю операції інтегрування:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-5}$$

А далі просто користуємось тим, що $\int \frac{dt}{t+\alpha} = \ln|t+\alpha| + C$. Можна вважати це табличним інтегралом, або помітивши, що $dt = d(t+\alpha)$, або просто зробити заміну $v = t + \alpha \to dv = dt$. Отже

$$I = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{3}\ln|t-5| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t+1}{t-5}\right| + C$$

Повернімося до x. Маємо $t = \tan\frac{x}{2}$ з початкової заміни, тому

$$I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-5}\right| + C$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-5}\right| + C$

Завдання 2.

Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Розв’язок.

Зробимо заміну $x = \sin\theta, dx = \cos\theta d\theta$, тому $1 - x^2 = \cos^2\theta$, а отже

$$I = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^3\theta} = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \tan\theta + C$$

Оскільки $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$, то маємо $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, отже

$$I = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Відповідь: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

Завдання 3.

Знайти інтеграл

$$I = \int_2^3 x \ln(x-1)^2 dx$$

Розв'язок.

$$I = \int_2^3 x \ln(x-1)^2 dx = 2\int_2^3 x \ln(x-1) dx$$

Бачимо, що на усьому проміжку $[2, 3]$ функція повністю визначена (оскільки вона визначена для усіх $x \neq 1$).

Далі інтегруємо по частинах. Нехай $v = \ln(x-1) \to dv = \frac{dx}{x-1}$, $du = xdx, u = \frac{x^2}{2}$, тому

$$I = 2\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-1)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2 dx}{2(x-1)}\right) = x^2 \ln(x-1)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2 dx}{(x-1)}$$

Отже, маємо

$$I = 9\ln 2 - \int_2^3 \frac{x^2 dx}{x-1}$$

Отже, знайдемо інтеграл $J = \int_2^3 \frac{x^2 dx}{x-1}$. Проблемних точок тут теж немає, отже розпишемо його як (користуючись лінійністю інтегрування, а також тим фактом, що $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$):

$$J = \int_2^3 \frac{x^2 dx}{x-1} = \int_2^3 \frac{((x^2-1)+1)dx}{x-1} = \int_2^3 (x+1)dx + \int_2^3 \frac{dx}{x-1}$$

Отже, скористаємось тим, що $\int (x+1)dx = \int (x+1)d(x+1) = \frac{(x+1)^2}{2} + C$, а також тим, що $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C$, а далі формулою Ньютона-Лейбніца:

$$J = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_2^3 + \ln|x-1|\Big|_2^3 = 8 - \frac{9}{2} + \ln 2 = \frac{7}{2} + \ln 2$$

Отже

$$I = 8\ln 2 - \frac{7}{2}$$

Відповідь: $8 \ln 2 - 7/2$

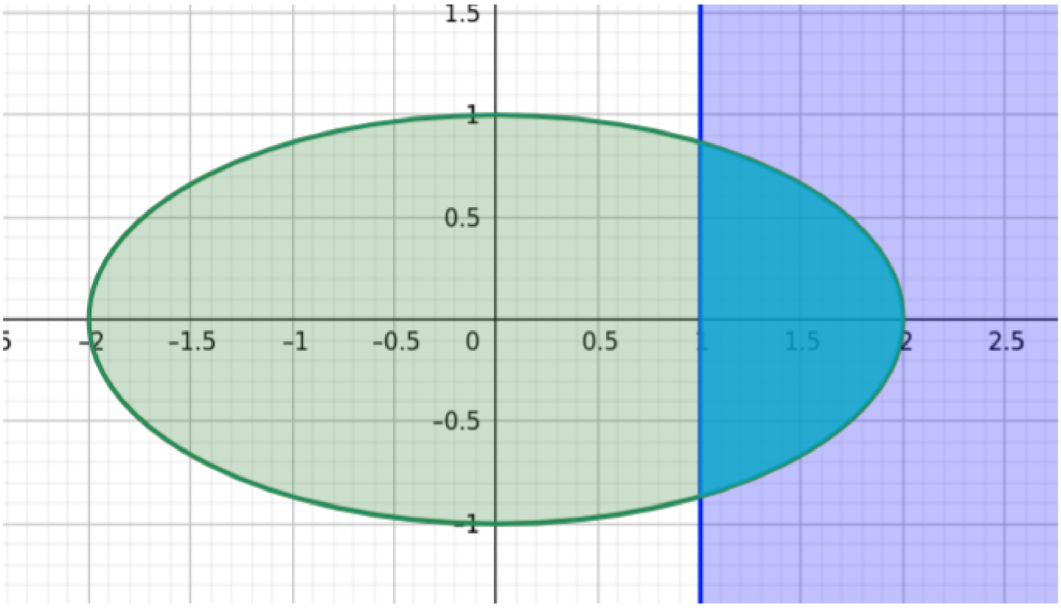
Завдання 4.

Знайти площу фігури, що обмежена кривими:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, x = 1, (x \geq 1)$$

Розв'язок.

Перше рівняння відповідає еліпсу з півосями $a = 2$ та $b = 1$. Друге рівняння просто рівняння прямої. Отже, маємо наступний малюнок (зелена частина відповідає еліпсу, синя лінія — це пряма $x = 1$ і нарешті голубий кусочок — площа, що нам потрібно знайти).



Щоб знайти рівняння гілок еліпсу, виразимо y через x:

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

Звідси маємо 2 рівняння гілок:

$$y(x) = f_+(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \; y = f_-(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Бачимо з малюнку, що площу нам потрібно знаходити на проміжку $[1, 2]$, де точка 1 відповідає прямій $x = 1 (x \geq 1)$, а 2 — це відповідає вершині еліпсу

$(2, 0)$. Отже, нам потрібно найти

$$S = \int_1^2 f_+(x)dx + \int_1^2 |f_-(x)|dx$$

Легко побачити, що $\int_1^2 f_+(x)dx = \int_1^2 |f_-(x)|dx$, тому достатньо знайти

$$S = 2\int_1^2 f_+(x)dx = 2\int_1^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}dx$$

Зробимо заміну $p = x/2 \to dx = 2dp$. Межі інтегрування при цьому зміняться з 1 на $1/2$, а з 2 на 1. Тому

$$S = 4\int_{1/2}^1 \sqrt{1 - p^2}dp$$

Зробимо заміну $p = \sin\theta$, тоді $dp = \cos\theta d\theta$, а межі інтегрування зміняться від 1 на $\arcsin(1) = \pi/2$, а $1/2$ на $\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$, тому

$$S = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\theta \cdot \cos\theta d\theta = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

Далі користуємось лінійністю операції визначенного інтегрування:

$$S = 2\left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}\right)$$

Тому маємо

$$S = \frac{2\pi}{3} + \sin\pi - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Відповідь: $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$**.**