Домашня робота з математичного моделювання #9

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 квітня 2023 р.

Вправа.

Умова. Нехай маємо коваріаційну матрицю $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ та деякий вектор $\boldsymbol{x}$. Розв'язати задачу:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \\ \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}_n \rangle = 1 \end{cases}$$

Розв'язок. Розглядаємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x} \mid \lambda) = \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \lambda(\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}_n \rangle - 1)$$

Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \\ \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}_n \rangle = 1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 2\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} + \lambda \cdot \mathbb{1}_n = 0 \\ \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}_n \rangle = 1 \end{cases}$$

З першого рівняння можемо отримати:

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\lambda}{2} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n$$

Підставляємо у друге рівняння:

$$-\frac{\lambda}{2} \cdot \langle \boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_n \rangle = 1 \to -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_n \rangle}$$

Таким чином

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n}{\langle \boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_n \rangle}$$

І оскільки $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}^2} \equiv 2\boldsymbol{V} \succ 0$, то знайдений розв'язок є мінімумом.

Відповідь. $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n}{\langle \boldsymbol{V}^{-1}\mathbb{1}_n, \mathbb{1}_n \rangle}$.