§ Обчислення Інтегралів. Варіант 5 §

Задача 1:

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{3 - 2\sin\varphi}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $z = e^{i\varphi}$. Тоді, коли φ пробігає від $-\pi$ до $+\pi$, то $z(\varphi)$ описує одиничне коло $\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Тому наша область інтегрування замінюється саме на одиничне коло.

Тепер, виразимо $d\varphi$ та $\sin\varphi$ через dz та z:

$$z = e^{i\varphi} \implies dz = ie^{i\varphi}d\varphi \implies d\varphi = \frac{dz}{ie^{i\varphi}} = \frac{dz}{iz} \tag{1.1}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{1.2}$$

Отже, маємо значення інтегралу

$$\mathcal{I} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(3 - 2\cdot\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{-z^2 + 3iz + 1} \tag{1.3}$$

Розглянемо підінтегральну функцію $f(z) = \frac{1}{-z^2+3iz+1}$. За основною теоремою про лишки, цей інтеграл ми можемо знайти як $2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$, де сума береться по внутрішнім особливим точкам z_k.

Отже, знаходимо лишки в особливих точках. Знайдемо нулі знаменника. Для цього треба знайти розв'язки $-z^2 + 3iz + 1 = 0$, звідки $z = \frac{-3i\pm\sqrt{-9+4}}{-2}$. Отже, маємо два полюси першого порядку: $z_1 = \frac{(3-\sqrt{5})i}{2}$, $z_2 = \frac{(3+\sqrt{5})i}{2}$. Помітимо, що оскільки $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, то z_2 не належить одиничному кругу $\mathcal{D}$. В свою чергу, z_1 дійсно йому належить, оскільки:

$$\underbrace{\frac{3-\sqrt{9}}{2}}_{=0} < \operatorname{Im}(z_1) < \underbrace{\frac{3-\sqrt{4}}{2}}_{=\frac{1}{2}}, \ \operatorname{Re}(z_1) = 0 \tag{1.4}$$

Отже, лишок можемо знайти як:

$$\mathcal{I} = \oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(-z^2+3iz+1)'}\Big|_{z=z_1}$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{-2z_1+3i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}i - 3i + 3i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{5}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \tag{1.5}$$

Отже, остаточно $\boxed{\mathcal{I} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

Задача 2:

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2}$$

Розв'язання. Для обчислення цього інтегралу введемо допоміжний контур γ наступним чином (він зображений на Рисунку 1):

$$\gamma := I_R \cup \gamma_R, \tag{2.1}$$
$$I_R := [-R, R],\ \gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R \wedge \mathrm{Im}(z) > 0\} \tag{2.2}$$

Таким чином, розглядаємо допоміжний інтеграл

$$\mathcal{I}_\gamma = \oint_\gamma f(z)dz,\ f(z) = \frac{dz}{z^2+2iz+2} \tag{2.3}$$

Розглянемо, чому він дійсно нам допоможе. Помітимо, що оскільки $\gamma = I_R \cup \gamma_R$, то

$$\mathcal{I}_\gamma = \int_{I_R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz \tag{2.4}$$

Далі, якщо перейдемо до границі $R \to +\infty$:

$$\mathcal{I}_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \mathcal{I} + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz \tag{2.5}$$

Отже, бачимо, що наш шуканий інтеграл $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\gamma - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz$. Головна ідея наступна – ми покажемо, що $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ і тому наш шуканий інтеграл $\mathcal{I}$ повністю збігається з допоміжним $\mathcal{I}_\gamma$. Отже, наш розв'язок

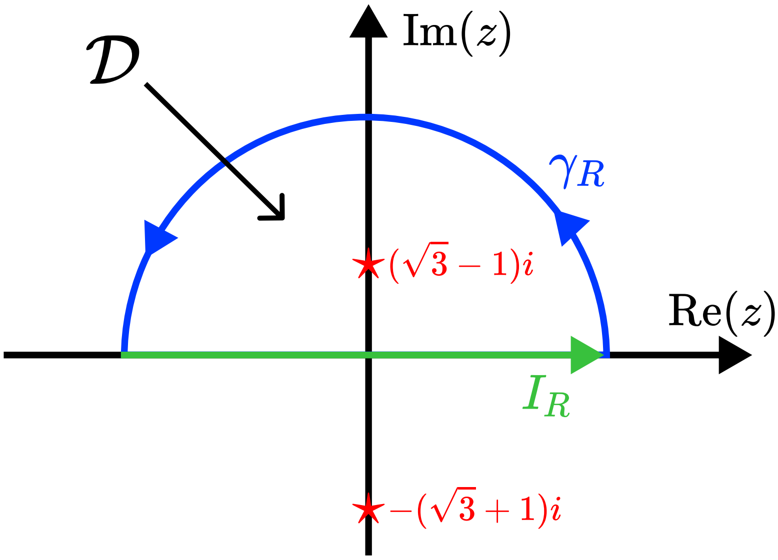

Рис. 1: Контур γ в задачі 2 з особливими точками $f(z) = \frac{1}{z^2+2iz+2}$.

складається з двох частин: по-перше, знаходження інтегралу $\mathcal{I}_\gamma$, а по-друге доведення, що $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Крок 1. Знаходження $\mathcal{I}_\gamma$. Знайдемо особливі точки $f(z)$. Для цього помітимо, що нулі знаменника $z = (-1\pm\sqrt{3})i$ – два полюси першого порядку. Помітимо, що з цих двох нулей лише $z = (\sqrt{3}-1)i$ належить нашому півколу (вважаємо R достатньо великим). Отже, маємо

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=(\sqrt{3}-1)i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(z^2+2iz+2)'}\Big|_{z=(\sqrt{3}-1)i}$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2z+2i}\Big|_{z=(\sqrt{3}-1)i} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}i} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{2.6}$$

Крок 2. Доведення $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Оцінимо наш інтеграл:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \pi R \sup_{z\in\gamma_R}|f(z)| = \pi R \cdot \sup_{z\in\gamma_R}\frac{1}{|z^2+2iz+2|} \tag{2.7}$$

Далі потрібно оцінити значення у знаменнику. Скористаємося тим фактом, що $\forall z,w\in\mathbb{C} : |z+w| \geq ||z|-|w||$. Отже,

$$|(z^2+2)+2iz| \geq ||z^2+2|-|2iz|| \geq ||z|^2-|2|-|2iz|| \tag{2.8}$$

Далі, оскільки $z\in\gamma_R$, то $|z| = R$, тому:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{|R^2-2R-2|} \sim \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{2.9}$$

Отже, дійсно $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Тому, $\boxed{\mathcal{I} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}}$.

Відповідь. $\mathcal{I} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.