Домашня робота з диференціальної геометрії #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

24 лютого 2023 р.

Завдання 1.1.

Пункт 4.

Умова. Записати рівняння дотичної у точці:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a/\cosh t \\ a(t - \tanh t) \end{bmatrix},\ P(t = t_0)$$

Розв'язок. Запишемо похідну цього виразу:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -a \sinh t/\cosh^2 t \\ a(1 - 1/\cosh^2 t) \end{bmatrix}$$

Помічаємо, що у точка при $t = 0$ є сингулярною (точніше, це точка $(a, 0)$). Ну і якщо побудувати малюнок, то видно, що дотичну в цій точці ми побудувати не зможемо (тобто це не усувна сингулярна точка).

В інший точоко отримана похідна є напрямним вектором дотичної. Отже, рівняння дотичної для будь-якої точки окрім $\boldsymbol{f}(0)$ можемо задати як:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f}(t_0) + \lambda \dot{\boldsymbol{f}}(t_0)\ t_0 \neq 0$$

Підставляємо:

$$\boldsymbol{\tau} = a\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh t_0} \\ t_0 - \tanh t_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{\sinh t_0}{\cosh^2 t_0} \\ 1 - \frac{1}{\cosh^2 t_0} \end{bmatrix}\right), t_0 \neq 0$$

Пункт 5.

Умова. Записати рівняння дотичної у точці:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{bmatrix},\ P(t = t_0)$$

Розв'язок. Знайдемо похідну нашого виразу:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{bmatrix}$$

Це є регулярною кривою, оскільки цей вираз ніколи не дорівнює $\boldsymbol{\theta}$ (перші 2 компоненти не можуть бути одночасно нулем, а також завжди третя якщо $h \neq 0$). Рівняння дотичної має вигляд:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f}(t_0) + \lambda\dot{\boldsymbol{f}}(t_0) = \begin{bmatrix} r(\cos t_0 - \lambda\sin t_0) \\ r(\sin t_0 + \lambda\cos t_0) \\ h(t_0 + \lambda) \end{bmatrix}$$

Завдання 1.2

Умова. Розглянемо параметрично задану криву

$$\gamma : \begin{cases} x^1 = t \\ x^2 = t^4 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

1. Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ, що проходять через точку $Q(-1, 0)$.

2. Запишіть рівняння дотичних прямих до кривої γ, що проходять паралельно до прямої $x^1 = x^2$.

Розв'язок.

Пункт 1. Знайдемо похідну вектор-функції:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4t^3 \end{bmatrix}$$

Отже, в загальному вигляді рівняння дотичної у $t = t_0$ має вид:

$$\boldsymbol{\tau}(\lambda) = \boldsymbol{f}(t_0) + \lambda \dot{\boldsymbol{f}}(t_0) = \begin{bmatrix} t_0 + \lambda \\ t_0^4 + 4\lambda t_0^3 \end{bmatrix}$$

За умовою нам потрібно знайти такі t_0, що $Q \in \tau$ або точніше кажучи, такі t_0, що $\exists \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\tau}(\widetilde{\lambda}) = \boldsymbol{r}_Q$. Запишемо цю умову:

$$\boldsymbol{\tau}(\widetilde{\lambda}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} t_0 + \widetilde{\lambda} = -1 \\ t_0^4 + 4\widetilde{\lambda} t_0^3 = 0 \end{cases}$$

Перший розв'язок це $t_0 = 0, \widetilde{\lambda} = -1$, що відповідає точці $(0, 0)$. Отже дотична в цій точці має вид $y = 0$.

Якщо ж $t_0 \neq 0$, то рівняння можемо записати як:

$$\begin{cases} t_0 + \widetilde{\lambda} = -1 \\ t_0 + 4\widetilde{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Отже, $\widetilde{\lambda} = \frac{1}{3}$ і відповідно $t_0 = -\frac{4}{3}$, що відповідає точці $\left(-\frac{4}{3}, \frac{256}{81}\right)$. Дотична записується в ній як:

$$\boldsymbol{\tau}(\lambda)\Big|_{t_0 = -4/3} = \begin{bmatrix} -4/3 + \lambda \\ 256/81 - 256\lambda/27 \end{bmatrix}$$

Пункт 2. Пряма $x^1 = x^2$ направлена уздовж вектора $\boldsymbol{w} = [1, 1]^T$. Отже, потрібно знайти точки, у яких похідна $\dot{\boldsymbol{f}}$ дорівнює цьому вектору, помноженому на якусь константу, тобто нехай $\kappa \boldsymbol{w}$. Отже:

$$\begin{cases} 1 = \kappa \\ 4t_0^3 = \kappa \end{cases}$$

Отже бачимо, що $\kappa = 1$, а отже $t_0 = \sqrt[3]{\frac{\kappa}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Це відповідає точці $(2^{-2/3}, 2^{-8/3})$. Відповідна дотична:

$$\boldsymbol{\tau}(\lambda)\Big|_{t_0=2^{-2/3}} = \begin{bmatrix} 2^{-2/3} + \lambda \\ 2^{-8/3} + \lambda \end{bmatrix}$$

Завдання 1.3

Умова. Розглянемо неявно задану криву γ в площині:

$$\gamma : (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

1. Запишіть рівняння дотичної прямої кривої γ в точці $P(\sqrt{2}, 0)$
2. Знайдіть дотичну пряму кривої γ, що проходить через точку $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. Знайдіть дотичну пряму кривої γ, що проходить паралельно до горизонтальної координатної осі x

Розв'язок.

Пункт 1. Запишемо градієнт виразу зліва:

$$\nabla \Psi = \begin{bmatrix} 2x \cdot 2(x^2 + y^2) - 4x \\ 2y \cdot 2(x^2 + y^2) - 4y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x(x^2 + y^2 - 1) \\ y(x^2 + y^2 - 1) \end{bmatrix}$$

Підставимо точку $(\sqrt{2}, 0)$:

$$\nabla \Psi(\sqrt{2}, 0) = 4 \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 4\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отже, рівняння прямої має вид $x - \sqrt{2} = 0$, бо вектор нормалі $(1, 0)$, а також пряма має проходити через $(\sqrt{2}, 0)$.

Пункт 2. Запишемо рівняння дотичної у довільному вигляді. Отже, нехай $(x_0, y_0) \in \gamma$, тоді рівняння дотичної в цій точці:

$$x_0(x_0^2 + y_0^2 - 1)(x - x_0) + y_0(x_0^2 + y_0^2 - 1)(y - y_0) = 0$$

Якщо винести $x_0^2 + y_0^2 - 1$ за дужки:

$$(x_0^2 + y_0^2 - 1)(x_0 x + y_0 y - x_0^2 - y_0^2) = 0$$

Як ми потім побачимо у пункті 3, якщо додаток $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$, то ми отримаємо точки, що паралельні вісі Ox. Отже, рівняння дотичної:

$$x_0 x + y_0 y - (x_0^2 + y_0^2) = 0$$

Підставимо $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$\sqrt{2}(x_0 + y_0) = x_0^2 + y_0^2$$

Отже залишилось знайти ті x_0, y_0, що належать кривій. Підставляємо у рівняння:

$$2(x_0 + y_0)^2 - 2(x_0^2 - y_0^2) = 0 \to x_0^2 + 2x_0 y_0 + y_0^2 - x_0^2 + y_0^2 = 0$$

Отже, остаточно:

$$2y_0(y_0 + x_0) = 0$$

Звідси перший варіант це $y_0 = 0$. В такому випадку маємо $\sqrt{2}x_0 = x_0^2 \to x_0 = \sqrt{2}$. Тому маємо точку $(\sqrt{2}, 0)$.

Другий варіант це $x_0 + y_0 = 0$, але тоді $x_0^2 + y_0^2 = 0$, що відповідає сингулярній точці $(0, 0)$. Це означає, що єдина відповідь це $(\sqrt{2}, 0)$.

Пункт 3. Якщо дотична в $V(x_0, y_0)$ паралельна x, то градієнт має вид:

$$\nabla\Psi(x_0, y_0) = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Отже перша компонента градієнта має бути 0. Перший варіант це точки виду $V(0, y_0)$. Перевіримо, коли такі точки належать кривій:

$$y_0^4 + 2y_0^2 = 0$$

Перший варіант це $y_0 = 0$, але ця точка є сингулярною. Тобто $y_0^2+2 = 0$, але оскільки $y_0 \in \mathbb{R}$, це рівняння розв'язків не має.

Отже, $x_0 \neq 0$. В такому разі, якщо перша компонента 0, то маємо:

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$

Якщо підставити у рівняння кривої, то маємо:

$$x_0^2 - y_0^2 = \frac{1}{2}$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 - y_0^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Складемо два рівняння. Маємо $x_0^2 = \frac{3}{2}$, а отже маємо $x_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Кожному зі значень x_0 маємо 2 розв'язки $y_0 = \pm\frac{1}{2}$. А отже маємо 4 точки:

$$V_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

Відповідь. 1-2. $x = \sqrt{2}$. **3.** 4 точки $(\pm\sqrt{3}/2, \pm 1/2)$.

Завдання 2.

Пункт 2

Умова. Знайти довжину кривої:

$$\boldsymbol{f}(t) = a\begin{bmatrix} t \\ \cosh t \end{bmatrix}, \ t \in (-C, C)$$

Розв'язок. Знайдемо похідну:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = a \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh t \end{bmatrix}$$

Довжина кривої:

$$L = \int_{-C}^{C} \left\| \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \right\|_2 dt = \int_{-C}^{C} a\sqrt{1+\sinh^2 t} dt = a \int_{-C}^{C} \sqrt{\cosh^2 t} dt$$

Оскільки гіперболічний косинус завжди додатній, то можемо записати:

$$L = a \int_{-C}^{C} \cosh t dt = a \sinh C - a \sinh(-C) = 2a \sinh C$$

Пункт 7

Умова. Знайти довжину кривої:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a \cos \alpha t \\ a \sin \alpha t \\ b \cos \beta t \\ b \sin \beta t \end{bmatrix}, \ t \in (A, B)$$

Розв'язок. Знайдемо похідну:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = a \begin{bmatrix} -\alpha a \sin \alpha t \\ \alpha a \cos \alpha t \\ -\beta b \sin \beta t \\ \beta b \cos \beta t \end{bmatrix}$$

Довжина кривої:

$$L = \int_{A}^{B} \|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 dt = \int_{A}^{B} \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2} dt = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}(B-A)$$

Відповідь. $\sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2}(B-A)$.

Завдання 3.2.

Пункт 1. Нехай крива γ задана параметрично $\boldsymbol{f}(t)$. Нехай ми здвинули цю криву на якийсь вектор $\boldsymbol{v}$, тоді наша нова крива буде задана як $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}(t)$. Оскільки $\dot{\boldsymbol{g}} = \dot{\boldsymbol{f}}$, то маємо ту саму довжину, бо довжина визначається виключно через норму похідної.

Пункт 2. Нехай маємо матрицю повороту $\mathcal{R}$. Тоді наша нова крива $\boldsymbol{g} = \mathcal{R}\boldsymbol{f}$. Якщо знайдемо похідну, то отримаємо $\dot{\boldsymbol{g}} = \mathcal{R}\dot{\boldsymbol{f}}$. Але оскільки поворот не змінює довжину векторів, то ми можемо записати $\|\dot{\boldsymbol{g}}\|_2 = \|\mathcal{R}\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2$, а отже довжина знову не змінилася.

Пункт 3. Нехай центр гомотетії має координати $\boldsymbol{c}$, а коефіцієнт гомотетії дорівнює λ. В такому разі можемо записати рівняння нової кривої γ':

$$\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{c} + \lambda(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c})$$

Тоді похідна:

$$\dot{\boldsymbol{g}}(t) = \lambda\dot{\boldsymbol{f}}(t)$$

Запишемо довжину кривої γ':

$$L_{\gamma'} = \int_{\mathcal{D}} \|\lambda\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 dt = \int_{\mathcal{D}} |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{f}\|_2 dt = |\lambda| \int_{\mathcal{D}} \|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 dt = |\lambda| L_\gamma$$

Отже бачимо, що довжина кривої стає більшою в $|\lambda|$ разів.

Завдання 3.3.

Умова. Розглянемо коло γ одиничного радіусу з центром в початку координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$$

З "північного полюсу" $N(0, 1)$ проведемо промінь, який перетинає горизонтальну координатну вісь в точці $(t, 0)$.

Обчисліть координати точки P, в якій згаданий промінь перетинає коло γ. Як буде рухатись точка P по колу γ, коли точка A буде рухатись по горизонтальній координатній осі x^1 від $-\infty$ до $+\infty$?

Розв'язок. Запишемо рівняння прямої AN:

$$AN : x^2 = 1 + kx^1$$

Підставляємо точку $A(t, 0) : 0 = 1 + kt$, тому $k = -\frac{1}{t}$. Отже, остаточно:

$$x^2 = 1 - \frac{x^1}{t}$$

Отже, підставимо це у рівняння кола:

$$(x^1)^2 + \left(1 - \frac{x^1}{t}\right)^2 = 1$$

Далі починаємо розв'язувати:

$$(x^1)^2 + 1 - \frac{2x^1}{t} + \left(\frac{x^1}{t}\right)^2 = 1 \rightarrow x^1\left(x^1\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{2}{t}\right) = 0$$

Оскільки $x^1 \neq 0$, бо це буде відповідати нашому полюсу, маємо:

$$x^1 = \frac{2/t}{1 + 1/t^2} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

Відповідно інша координата:

$$x^2 = 1 - \frac{2}{1 + t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Таким чином маємо, що точка буде рухатись по кривій:

$$\boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} 2t/(t^2 + 1) \\ (t^2 - 1)/(t^2 + 1) \end{bmatrix}, \ t \in (-\infty, +\infty)$$

Насправді помітимо, що якщо ми запишемо коло в параметричному виді:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix},\ \theta \in [0, 2\pi]$$

То зробивши заміну $t = \tan\frac{\theta}{2}$ ми отримаємо вираз $\boldsymbol{g}(t)$.