Домашня робота #1 з курсу "Комплексний аналіз" (частина перша)

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Зобразити на площині ($z \in \mathbb{C}$):

$$\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$$

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$ де $x, y \in \mathbb{R}$. Розглянемо

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

та запишемо дійсну частину цього виразу. Маємо:

$$w = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-1)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}$$

Розкриваємо дужки так, щоб отримати лише дійсні компоненти:

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2+x+y^2-x-1}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$$

Нам потрібно знайти набір точок $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{Re} w = 0\}$, тобто по суті знайти розв'язок:

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

Помітимо, що вираз зліва визначений на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$. Для інших точок:

$$x^2+y^2-1=0,$$

що є рівнянням одиничного кола. Оскільки $(-1,0)$ йому належить, то відповіддю є одиничне коле з виколотою точкою $(-1,0)$ (див. рис. 1).

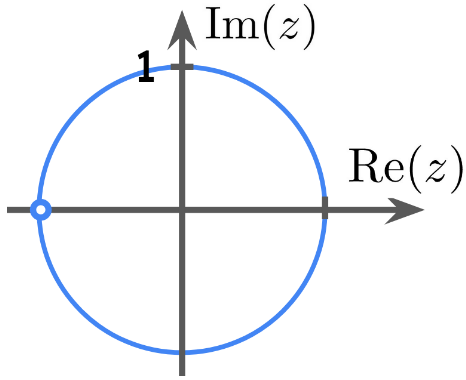


Рис. 1: Множина $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \setminus \{-1\}$

Відповідь. Дивись рис. 1

Завдання 2.

Умова. Знайти дійсну та уявну частину наступних комплексних чисел:

1. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$
2. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Розв'язок.

Пункт 1. Помітимо, що $i^5 = (i^4) \cdot i = i$ і також $i^{19} = i^{16} \cdot i^3 = -i$. Тому:

$$\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2$$

Вираз під квадратом множимо та ділимо на $1+i$:

$$\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+i)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+3i)^2 = \frac{-8+6i}{4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

Пункт 2. Помічаємо, що $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, а $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Тому:

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{2^{5/2}e^{5i\pi/4}}{2^{3/2}e^{-3i\pi/4}} = 2e^{2i\pi} = 2$$

Відповідь.

1. Дійсна частина -2, уявна $3/2$.

2. Дійсна частина 2, уявна 0.

Завдання 3.

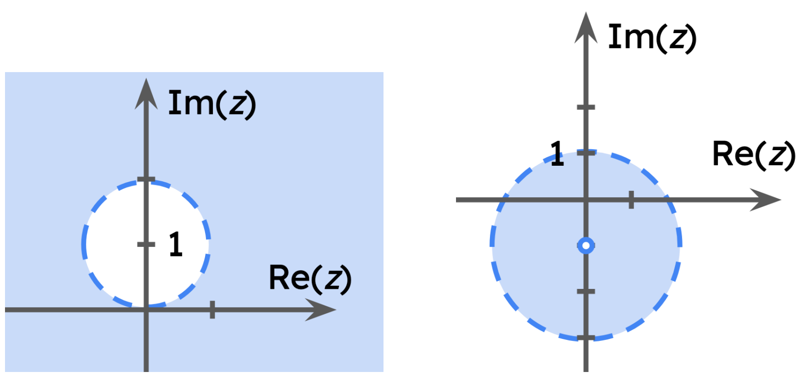
Умова. Зобразити на площині $z \in \mathbb{C}$, якщо:

1. $|z - i| > 1$
2. $0 < |z + i| < 2$

Розв'язок.

Пункт 1. $|z - i| = 1$ є колом з центром у $(0, 1)$ радіуса 1, отже $|z - i| > 1$ є увесь простір $\mathbb{C}$ мінус закрашене з границею куля.

Пункт 2. $|z + i| = 2$ є колом з центром у $(0, -1)$ радіуса 2, а $|z + i| = 0$ просто точкою $(0, -1)$. Отже, шукана множина – це зафарбована відкрита куля з виколотим центром.



(а) $|z - i| > 1$ (б) $0 < |z + i| < 2$

Рис. 2: Відповіді на задачі 3.1 та 3.2

Відповідь. Дивись рис. 2.