Домашня Робота з Еволюційних Систем #4

Захаров Дмитро

20 вересня, 2024

Зміст

1 Лінійні однорідні рівняння

Умова Задачі 1.1. Знайти дійсний загальний розв'язок лінійного однорідного різницевого стаціонарного рівняння

(А) $x_{k+2} - 2x_{k+1} + 2x_k = 0$.

(Б) $x_{k+2} + 4x_{k+1} + 8x_k = 0$.

(В) $x_{k+2} - 6x_{k+1} + 18x_k = 0$.

(Г) $x_{k+3} - 8x_k = 0$.

(Д) $x_{k+4} + 8x_{k+2} + 16x_k = 0$.

Розв'язання.

Пункт (А). Маємо характеристичний поліном $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, звідки корені:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Отже, маємо $\lambda_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 2^{k/2} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + c_2 \cdot 2^{k/2} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right).$$

Пункт (Б). Маємо характеристичний поліном $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$, звідки корені:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 2i = -2(1 \pm i)$$

Звідси $\lambda_1 = 2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$ та $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 2^{3k/2} \cos\left(\frac{5\pi k}{4}\right) + c_2 \cdot 2^{3k/2} \sin\left(\frac{5\pi k}{4}\right).$$

Пункт (В). Маємо характеристичний поліном $\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$, звідки корені:

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 3i = 3(1 \pm i)$$

Звідси $\lambda_1 = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ та $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 3^k \cdot 2^{k/2} \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + c_2 \cdot 3^k \cdot 2^{k/2} \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right).$$

Пункт (Г). Маємо характеристичний поліном $\lambda^3 - 8 = 0$, звідки $\lambda_1 = 2$ — один корінь, а два інших знаходяться з рівняння:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0,$$

Отже, $\lambda_2 = -1 \pm \sqrt{3}i$ та $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$. Або, $\lambda_2 = 2e^{4i\pi/3}$. Тому, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot 2^k \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right) + c_3 \cdot 2^k \sin\left(\frac{4\pi k}{3}\right).$$

Пункт (Д). Маємо характеристичний поліном $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$, звідки $(\lambda^2+4)^2 = 0$. Тому, маємо два корені $\lambda_1 = 2i$ та $\lambda_2 = -2i$, причому кратності 2. Оскільки $i = e^{i\pi/2}, -i = e^{3i\pi/2}$, то загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 2^k \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_2 \cdot 2^k \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right) + c_3 \cdot k \cdot 2^k \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_4 \cdot k \cdot 2^k \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right).$$

2 Початкові задачі

Умова Задачі 2.1. Розв'язати початкову задачу
(А) $x_{k+1} - 4x_k = (2k+2)3^k, x_0 = 0.$
(Б) $x_{k+1} + 6x_k = (4k-2)(-6)^k, x_0 = 3.$

Розв'язання.
Пункт (А). Шукаємо загальний розв'язок однорідного рівняння $\widetilde{x}_{k+1} - 4\widetilde{x}_k = 0$. Його загальний розв'язок має вигляд $\widetilde{x}_k = c \cdot 4^k$.

Повертаємось до однорідного. Права частина має вигляд $f_k = \lambda^k Q_s(k)$, де $\lambda = 3$, $Q_s(k) = 2k+2$, $s = 1$. Отже, частковий розв'язок має вигляд $x_k = (ak+b)3^k$. Підставляємо в рівняння:

$$\begin{aligned}
&(a(k+1)+b)3^{k+1} - 4(ak+b)3^k = (2k+2)3^k \\
&3ak \cdot 3^k + 3a \cdot 3^k + 3b \cdot 3^k - 4ak \cdot 3^k - 4b \cdot 3^k = 2k \cdot 3^k + 2 \cdot 3^k \\
&-a \cdot k \cdot 3^k + (3a-b) \cdot 3^k = 2k \cdot 3^k + 2 \cdot 3^k
\end{aligned}$$

Отже, $a = -2 \Rightarrow b = -8$ і тому загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c \cdot 4^k - 2(k+4)3^k$$

Оскільки $x_0 = c - 8 = 0$, то $c = 8$ і тому

$$x_k = 2 \cdot 4^{k+1} - 2(k+4)3^k$$

Пункт (Б). Ідея аналогічна.

3 Лінійне неоднорідне різницеве стаціонарне рівняння

Умова Задачі 3.1. Знайти дійсний загальний розв'язок лінійного неоднорідного різницевого стаціонарного рівняння (тут розв'язую **лише пункт 5**):

$$x_{k+3} - x_{k+2} + 4x_{k+1} - 4x_k = 26 \cdot 3^k + 10k + 9$$

Розв'язання. Шукаємо загальний розв'язок однорідного рівняння $\widetilde{x}_{k+3} - \widetilde{x}_{k+2} + 4\widetilde{x}_{k+1} - 4\widetilde{x}_k = 0$. Маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

Маємо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\widetilde{x}_k = c_1 + c_2 \cdot 2^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_3 \cdot 2^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Далі, знайдемо розв'язки неоднорідної частини. Скористаємося наступною лемою.

Lemma 3.2. Нехай маємо рівняння $\sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta} = \lambda^k P_s(k) + \mu^k Q_r(k)$. Нехай $\widetilde{x}_k$ є розв'язком рівняння $\sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta} = 0$ і також маємо два часткових розв'язки:

$$x_k^{(\lambda)} \text{ для } \sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta} = \lambda^k P_s(k)$$
$$x_k^{(\mu)} \text{ для } \sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta} = \mu^k Q_r(k)$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = \widetilde{x}_k + x_k^{(\lambda)} + x_k^{(\mu)}$$

Remark. Розв'язок $x_k = \widetilde{x}_k + x_k^{(\lambda)} + x_k^{(\mu)}$ підходить, бо:

$$\sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta} = \sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta \widetilde{x}_{k+\delta} + \sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta}^{(\lambda)} + \sum_{\delta=0}^{m} \alpha_\delta x_{k+\delta}^{(\mu)} = \lambda^k P_s(k) + \mu^k Q_r(k)$$

В такому разі спочатку знайдемо частковий розв'язок для $f_k^{(\lambda)} = 26 \cdot 3^k$. Маємо $\lambda = 3$, $P_s(k) = 26$, $s = 0$. В такому разі частковий розв'язок має вигляд $x_k^{(\lambda)} = a \cdot 3^k$. Підставляємо в рівняння:

$$a \cdot 3^{k+3} - a \cdot 3^{k+2} + 4a \cdot 3^{k+1} - 4a \cdot 3^k = 26 \cdot 3^k$$
$$a \cdot 3^k \cdot (27 - 9 + 12 - 4) = 26 \cdot 3^k$$
$$26a = 26 \Rightarrow a = 1$$

Отже, перший частковий розв'язок має вигляд $x_k^{(\lambda)} = 3^k$.

Тепер знайдемо частковий розв'язок для $f_k^{(\mu)} = 10k + 9$. Маємо $\mu = 1$, $Q_r(k) = 10k + 9$, $r = 1$. В такому разі частковий розв'язок має вигляд $x_k^{(\mu)} = ak + b$. Підставляємо в рівняння:

$$
\begin{aligned}
&a(k+3) + b - a(k+2) - b + 4(a(k+1) + b) - 4(ak + b) = 10k + 9 \\
&5a = 10
\end{aligned}
$$

Результату не дало, отже візьмемо $x_k^{(\mu)} := ak^2 + bk + c$. Тоді, після підстановки буде

$$10ak + 9a + 5b = 10k + 9,$$

Звідки $a = 1, b = 0, c \in \mathbb{R}$. Оберемо $c := 0$ і тоді $x_k^{(\mu)} = k^2$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{x_k = c_1 + c_2 \cdot 2^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_3 \cdot 2^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 3^k + k^2}$$

4 Початкова задача #2

Умова Задачі 4.1. Розв'язати початкову задачу

$$x_{k+4} + 18x_{k+2} + 81x_k = 10(10k + 14), \quad x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 21, x_3 = 4$$

Розв'язання. Шукаємо загальний розв'язок однорідного рівняння $\widetilde{x}_{k+4} + 18\widetilde{x}_{k+2} + 81\widetilde{x}_k = 0$. Маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = (\lambda^2 + 9)^2 = 0$$

Маємо $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$ — корені другого ступеня. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\widetilde{x}_k = c_1 \cdot 3^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_2 \cdot 3^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_3 \cdot k \cdot 3^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_4 \cdot k \cdot 3^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок для $f_k = 10(10k + 14)$. Маємо $\lambda = 1$, $P_s(k) = 100k + 140$, $s = 1$. Частковий розв'язок має вигляд $x_k^{(\lambda)} = ak + b$. Підставляємо в рівняння:

$$\begin{aligned} &a(k + 4) + b + 18(a(k + 2) + b) + 81(ak + b) = 10(10k + 14) \\ &100ak + 40a + 100b = 100k + 140 \Rightarrow a = 1, b = 1 \end{aligned}$$

Отже, частковий розв'язок має вигляд $x_k^{(\lambda)} = k + 1$. Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot 3^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_2 \cdot 3^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_3 \cdot k \cdot 3^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + c_4 \cdot k \cdot 3^k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) + k + 1$$

Підставимо початкові умови:

$$\begin{aligned} &x_0 = c_1 + 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \\ &x_1 = 2 + 3c_2 + 3c_4 = 2 \\ &x_2 = 3 - 9c_1 - 18c_3 = 3 - 18c_3 = 21 \Rightarrow c_3 = -1 \\ &x_3 = 4 - 27c_2 - 81c_4 = 4 \end{aligned}$$

Отже одразу $c_1 = 0, c_3 = -1$. З другого рівняння $c_2 = -c_4$, а з четвертого $c_2 = -3c_4$, тому $c_2 = c_4 = 0$ і тому остаточно

$$\boxed{x_k = -k \cdot 3^k \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + k + 1}$$