ІДЗ #1 з курсу "Диференціальні рівняння"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Варіант 5

Завдання 1.

Умова. Розв'язати ЛОС $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$ із заданою матрицею методом невизначених коефіцієнтів:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Спочатку знаходемо характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 22\lambda + 20$$

Перший корінь вгадати легко: $\lambda_1 = 2$. Два інші корені знаходяться з рівняння:

$$\frac{\chi_A(\lambda)}{\lambda - 2} = 0 \implies \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

Звідси $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$. Знаходимо відповідні власні вектори. Для $\lambda_1 = 2$ маємо $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 2]^\top$, для $\lambda_2 = 3 + i$ маємо $\mathbf{v}_2 = [2 - i, 3, 4]^\top$, а для $\lambda_3 = 3 - i$ отримуємо $\mathbf{v}_3 = [2 + i, 3, 4]^\top$.

Знаходимо дійсні і комплексні частини виразу $\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = [2-i, 3, 4]^\top e^{(3+i)t}$:

$$\operatorname{Re}\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2e^{3t}\cos t + e^{3t}\sin t \\ 3e^{3t}\cos t \\ 4e^{3t}\cos t \end{bmatrix}, \ \operatorname{Im}\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2e^{3t}\sin t - e^{3t}\cos t \\ 3e^{3t}\sin t \\ 4e^{3t}\sin t \end{bmatrix}$$

Отже, остаточна відповідь:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \operatorname{Re}\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \cdot \operatorname{Im}\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Або:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ 3\cos t \\ 4\cos t \end{bmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 3\sin t \\ 4\sin t \end{bmatrix}$$

Завдання 2.

Умова. Розв'язати ЛОС $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$ за допомогою функції від матриці

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Характеристичний поліном має вигляд:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)^2$$

Знаходимо мінімальний многочлен $m(\lambda)$. Помічаємо, що:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}_{3\times 3}$$

Отже, $m(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Тому інтерполяційний поліном:

$$p(\lambda) = e^{0\cdot t} \cdot \frac{\lambda - 1}{0 - 1} + e^t \cdot \frac{\lambda - 0}{1 - 0} = \lambda e^t + (1 - \lambda)$$

Таким чином, фундаментальна матриця розв'язків

$$e^{\boldsymbol{A}t} = p(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} e^t$$

А загальний розв'язок можемо записати у вигляді:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t & -1+2e^t & 2-e^t \\ 1 & 4-3e^t & -1+2e^t \\ 1 & 7-6e^t & -3+4e^t \end{bmatrix} \mathbf{u},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$$

Обмеження на константи в такому випадку: $u_1 = -3u_3, u_2 = 0$.

Завдання 3.

Умова. Розв'язати ЛНС методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y - 4(t-1)e^{-t} \end{cases}$$

Розв'язок. Спочатку розв'язуємо ЛОС. Матриця:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Отже, маємо одне власне число кратності 2: $\lambda = 1$. Відповідний власний вектор $\mathbf{v} = [1, 2]^\top$.

Пропущенний розв'язок шукаємо у вигляді $\mathbf{x} = e^{\lambda_1 t}(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{u})$ де $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^\top$. Інакшими словами, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^t(t+u_1) \\ e^t(2t+u_2) \end{bmatrix}$. Підставляючи у $\dot{\mathbf{x}} =$

$\boldsymbol{A}\mathbf{x}$, отримуємо

$$\begin{cases} e^t + te^t + u_1 e^t = 3e^t(t+u_1) - e^t(2t+u_2) \\ 2e^t + 2te^t + u_2 e^t = 4e^t(t+u_1) - e^t(2t+u_2) \end{cases}$$

Спростивши, маємо

$$\begin{cases} 1 + u_1 = 3u_1 - u_2 \\ 2 + u_2 = 4u_1 - u_2 \end{cases} \implies u_2 = 2u_1 - 1$$

Підставимо $u_1 = 0$, тоді $u_2 = -1$. Таким чином, розв'язок ЛОС має вид:

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 te^t \\ 2C_1 e^t + C_2 e^t(2t-1) \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок. Оскільки нелінійна частина має вигляд $e^{\gamma t}P_m(t)$ (в нашому випадку $\gamma = -1, P_m(t) = 4(1-t)$), то розв'язок шукаємо у вигляді $e^{\gamma t}Q_{m+r}(t)$ де r кратність γ як кореня мінімального многочлена. Тоді шукаємо розв'язок у вигляді:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\alpha_1 t^3 + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t + \delta_1) \\ e^{-t}(\alpha_2 t^3 + \beta_2 t^2 + \gamma_2 t + \delta_2) \end{bmatrix}$$

Підставивши у наше рівняння, отримуємо:

$$\begin{cases} (\alpha_2 - 4\alpha_1)t^3 + (3\alpha_1 - 4\beta_1 + \beta_2)t^2 + (2\beta_1 - 4\gamma_1 + \gamma_2)t + (\gamma_1 - 4\delta_1 + \delta_2) = 0 \\ -4\alpha_1 t^3 + (3\alpha_2 - 4\beta_1)t^2 + (2\beta_2 - 4\gamma_1 + 4)t + (-4 + \gamma_2 - 4\delta_1) = 0 \end{cases}$$

Одразу видно $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. З квадратичного доданку другого рівняння $\alpha_2 = \frac{4}{3}\beta_1$. Покладемо $\beta_1 = 0$, тоді $\alpha_2 = 0$. В такому разі $\beta_2 = -3\alpha_1$. Зручно покласти $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_2 = 0$. В такому разі $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 4, \delta_1 = 0, \delta_2 = -1$. Отже, маємо частковий розв'язок:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}t \\ e^{-t}(4t-1) \end{bmatrix}$$

Отже, остаточно маємо розв'язок:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 te^t + e^{-t}t \\ 2C_1 e^t + C_2 e^t(2t-1) + e^{-t}(4t-1) \end{bmatrix}$$

Завдання 4.

Умова. Розв'язати ЛНС методом Лагранжа та методом Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sin 2t \\ \dot{y} = 5x - y + \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$$

Розв'язок. Метод Коші полягає у знаходженні:

$$\boldsymbol{K}(t,\tau) = e^{(t-\tau)\boldsymbol{A}},\ \mathbf{y} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{K}(t,\tau)\boldsymbol{\beta}(\tau)d\tau$$

Отже, знайдемо $e^{(t-\tau)\boldsymbol{A}}$. Діагоналізувавши матрицю ЛОС, отримаємо:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{-1},\ \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Як ми знаємо,

$$\exp\left(\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}\right) = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_m}\}$$

В такому разі:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{V}\begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(2-i)e^{2it}+(2+i)e^{-2it}}{4} & -\frac{\sin 2t}{2} \\ \frac{5\sin 2t}{2} & \frac{(2+i)e^{2it}+(2-i)e^{-2it}}{4} \end{bmatrix}$$

Якщо взяти тільки дійсну частину:

$$\operatorname{Re} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)} = \begin{bmatrix} \cos 2(t-\tau) + \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau) & -\frac{1}{2}\sin 2(t-\tau) \\ \frac{5}{2}\sin 2(t-\tau) & \cos 2(t-\tau) - \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau) \end{bmatrix}$$

Отже,

$$\boldsymbol{K}(t,\tau) = \begin{bmatrix} 4\cos 2(t-\tau) + 2\sin 2(t-\tau) & -\frac{1}{2}\sin 2(t-\tau) \\ \frac{5}{2}\sin 2(t-\tau) & 4\cos 2(t-\tau) - 2\sin 2(t-\tau) \end{bmatrix}$$

В такому разі:

$$\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{K}(t,\tau) \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t + 2\cos 2t \end{bmatrix} d\tau$$

Якщо розписати:

$$\mathbf{y} = \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} -\sin(2t-4\tau) \\ 2\cos(2t-4\tau) - \sin(2t-4\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

Зручно взяти $t_0 = 0$. Тоді інтеграл зведеться до:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

Отже, повний розв'язок:

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re} e^{\boldsymbol{A}t} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos 2t + \sin 2t/2 & -\sin 2t/2 \\ 5\sin 2t/2 & \cos 2t - \sin 2t/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

Тепер використаємо **метод варіації** (метод Лагранжа). Знайдемо розв'язок ЛОС.

Маємо власне число $\lambda = 2i$ з власним вектором $\mathbf{v} = [1+2i, 5]^\top$. Отже, знайдемо дійсну і уявну частину $\mathbf{v}e^{\lambda t}$:

$$\operatorname{Re} \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t \\ 5\cos 2t \end{bmatrix}, \ \operatorname{Im} \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \sin 2t + 2\cos 2t \\ 5\sin 2t \end{bmatrix}$$

Таким чином, маємо розв'язок ЛОС:

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} C_1(\cos 2t - 2\sin 2t) + C_2(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 + 2C_2)\cos 2t + (-2C_1 + C \\ 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t \end{bmatrix}$$

Отже тепер нехай $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$. Тоді:

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \dot{C}_1 \cos 2t - 2C_1 \sin 2t + 2\dot{C}_2 \cos 2t - 4C_2 \sin 2t - 2\dot{C}_1 \sin 2t - 4C_1 \cos 2t + \dot{C}_2 \sin 2t \\ 5\dot{C}_1 \cos 2t - 10C_1 \sin 2t + 5\dot{C}_2 \sin 2t + 10C_2 \cos 2t \end{bmatrix}$$

З цього виразу підуть усі члени, що містять C_1, C_2, оскільки вони є розв'язками ЛОС. Отже, отримуємо систему:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(\cos 2t - 2\sin 2t) + \dot{C}_2(\sin 2t + 2\cos 2t) = \sin 2t \\ 5\dot{C}_1 \cos 2t + 5\dot{C}_2 \sin 2t = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$$

Звідси:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{2\cos 4t + \sin 4t}{5},\ \dot{C}_2(t) = \frac{2\sin 4t - \cos 4t}{5}$$

Якщо проінтегрувати:

$$C_1(t) = -\frac{1}{20}\cos 4t + \frac{1}{10}\sin 4t + \delta_1,\ C_2(t) = -\frac{1}{10}\cos 4t - \frac{1}{20}\sin 4t + \delta_2$$

Далі можна це підставити у вираз зверху і отримати остаточну відповідь. Оскільки одну (по методу Коші) ми отримали, то повторюватись не будемо :)