§ Варіант 4 §

Задача 1: Трикутна система

Умова. Знайти керування, яке переводить точку $(0, -1, -1)$ в точку $(0, 0, 0)$ в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1} + x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 e^{x_1} + x_3 \\ \dot{x}_3 = -2e^{3x_1} - (x_2 - 3)e^{2x_1} - e^{x_1} + u \end{cases} \tag{1.1}$$

за проміжок часу $[0, 2]$. Виписати траєкторію системи, за якою відбувається цей перехід. Знайти керування, яке стабілізує задану систему.

Розв'язання. Помітимо, що наша система є трикутною, тобто її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u) \end{cases}, \tag{1.2}$$

де $f_1(x_1, x_2) = e^{x_1} + x_2 - 1$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_2 e^{x_1} + x_3$ та $f_3(x_1, x_2, x_3, u) = -2e^{3x_1} - (x_2 - 3)e^{2x_1} - e^{x_1} + u$.

Скористаємося *теоремою Коробова (про керованість трикутних систем)*. Знайдемо наступні похідні:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial u} = 1 > 0 \tag{1.3}$$

Отже, за теоремою (оскільки $|\partial f_i / \partial x_{i+1}| \geq 1 > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$) робимо висновок, що система є повністю керованою на $[0, 2]$.

Отже, зробимо наступну заміну змінних:

$$z_1 = x_1, \ z_2 = f_1(x_1, x_2),$$
$$z_3 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot f_2(x_1, x_2, x_3) \tag{1.4}$$

Якщо підставити вирази для $f_i, i \in \{1,2,3\}$:

$$z_1 = F_1(x_1) = x_1,\ z_2 = F_2(x_1,x_2) = e^{x_1} + x_2 - 1,$$
$$z_3 = F_3(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1}(e^{x_1} + x_2 - 1) + (-x_2e^{x_1} + x_3) = e^{2x_1} - e^{x_1} + x_3 \quad (1.5)$$

Нарешті, замінимо керування наступним чином:

$$\begin{aligned} v := F_4(x_1,x_2,x_3,u) &= \frac{\partial F_3}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2) + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}f_3(x_1,x_2,x_3,u) \\ &= (2e^{2x_1} - e^{x_1})(e^{x_1} + x_2 - 1) - 2e^{3x_1} - (x_2 - 3)e^{2x_1} - e^{x_1} + u \\ &= u + e^{x_1}(e^{x_1} - 1)x_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тепер підсумуємо все, що ми нарахували:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = e^{x_1} + x_2 - 1 \\ z_3 = e^{2x_1} - e^{x_1} + x_3 \\ v = x_2e^{x_1}(e^{x_1} - 1) + u \end{cases} \quad (1.7)$$

Отже помітимо, що ми таким чином звели систему до вигляду:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = v \end{cases} \quad (1.8)$$

З такою системою працювати значно приємніше, оскільки тепер нам треба перевести точку $\mathbf{z}(0)$ у $\mathbf{z}(2)$ за допомогою керування v. Знайдемо самі координати:

$$\mathbf{z}(0) = \begin{bmatrix} F_1(0) \\ F_2(0,-1) \\ F_3(0,-1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{z}(2) = \begin{bmatrix} F_1(0) \\ F_2(0,0) \\ F_3(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Цікаво, що вони збіглися з початковими. Таким чином, переводимо точку $(0,-1,-1)$ у $(0,0,0)$ за час $T = 2$ в силу системи 1.8. Можемо її записати у вигляді:

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{A}\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\beta}v,\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Матрична експонента:

$$\exp(-\mathbf{A}t) = \begin{bmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{w}(t) := \exp(-\mathbf{A}t)\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Знаходимо матрицю керованості:

$$\boldsymbol{N}(0,2) = \int_0^2 \mathbf{w}(t)\mathbf{w}^\top(t)dt = \int_0^2 \begin{bmatrix} \frac{t^4}{4} & -\frac{t^3}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^3}{2} & t^2 & -t \\ \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & -2 & \frac{4}{3} \\ -2 & \frac{8}{3} & -2 \\ \frac{4}{3} & -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Беремо обернену матрицю:

$$\boldsymbol{N}^{-1}(0,2) = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & -2 & \frac{4}{3} \\ -2 & \frac{8}{3} & -2 \\ \frac{4}{3} & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{45}{2} & \frac{45}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{45}{2} & 24 & 9 \\ \frac{15}{2} & 9 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Нарешті, керування можна знайти як:

$$v(t) = \boldsymbol{\beta}^\top e^{-\boldsymbol{A}^\top t}\boldsymbol{N}^{-1}(0,2)\left(\mathbf{0} - e^{-\boldsymbol{A}\cdot 0}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \tag{1.14}$$

Підставляючи, маємо:

$$v(t) = -\begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{45}{2} & \frac{45}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{45}{2} & 24 & 9 \\ \frac{15}{2} & 9 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 15t^2 - 33t + \frac{27}{2}, \tag{1.15}$$

Позначимо через $Q_v(t) := 15t^2 - 33t + \frac{27}{2}$ (далі це буде зручно). Перевіримо, що це дійсно правильне керування. Якщо розв'язати 1.8, врахувавши початкову умову $\mathbf{z}(0) = (0, -1, -1)$, отримаємо:

$$\begin{cases} z_1(t) = \frac{2t^5 - 11t^4 + 18t^3 - 4t^2 - 8t}{8} = Q_1(t) \\ z_2(t) = \frac{5t^4 - 22t^3 + 27t^2 - 4t - 4}{4} = Q_2(t) \\ z_3(t) = \frac{10t^3 - 33t^2 + 27t - 2}{2} = Q_3(t) \end{cases}, \tag{1.16}$$

де ми позначили поліномами $Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)$ ті страшнуваті вирази, що ми знайшли. Далі все будемо виражати через них.

Можна дійсно переконатись, що $z_1(2) = z_2(2) = z_3(2) = 0$, а отже керування правильне. Отже, залишилось знайти $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ та $u(t)$, маючи $z_i(t)$ та $v(t)$.

Отже, для початку $x_1(t) = z_1(t) = Q_1(t)$. Далі, помічаємо, що

$$z_2 = e^{x_1} + x_2 - 1 \implies x_2(t) = Q_2(t) - e^{Q_1(t)} + 1 \tag{1.17}$$

Далі для x_3:

$$z_3 = e^{2x_1} - e^{x_1} + x_3 \implies x_3(t) = Q_3(t) - e^{2Q_1(t)} + e^{Q_1(t)} \tag{1.18}$$

Нарешті, щоб знайти керування $u(t)$, помічаємо:

$$v = u + e^{x_1}(e^{x_1} - 1)x_2 \implies u(t) = Q_v(t) - Q_2(t)e^{Q_1(t)}(e^{Q_1(t)} - 1) \tag{1.19}$$

Отже, **відповідь на перше питання**: шукане керування має вигляд $u(t) = Q_v(t) - Q_2(t)e^{Q_1(t)}(e^{Q_1(t)} - 1)$, котре задає траєкторію системи:

$$\mathbf{x}(t) = (Q_1(t), Q_2(t) - e^{Q_1(t)} + 1, Q_3(t) - e^{2Q_1(t)} + e^{Q_1(t)}), \tag{1.20}$$

де через Q_1, Q_2, Q_3, Q_v ми позначили наступні поліноми від t:

$$Q_1(t) = \frac{2t^5 - 11t^4 + 18t^3 - 4t^2 - 8t}{8},\ Q_2(t) = \frac{5t^4 - 22t^3 + 27t^2 - 4t - 4}{4},$$
$$Q_3(t) = \frac{10t^3 - 33t^2 + 27t - 2}{2},\ Q_v(t) = 15t^2 - 33t + \frac{27}{2} \tag{1.21}$$

Побудовану траєкторію можна побачити на Рисунку 1.

Стабілізація. Бачимо, що $f_i(\mathbf{0}) = 0$, а отже за теоремою Коробова існує стабілізаційне керування. Щоб стабілізувати нашу вхідну систему, стабілізуємо систему 1.8. Для цього будемо шукати керування у вигляді $v = p_1z_1 + p_2z_2 + p_3z_3$. Тоді отримаємо систему:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \mathbf{z} \tag{1.22}$$

Нам потрібно, щоб усі власні значення цієї матриці лежали у лівій напівплощині $\mathrm{Re}(z) < 0$. Отже, знаходимо характеристичний поліном:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + p_3\lambda^2 + p_2\lambda + p_1 \tag{1.23}$$

Підберемо (p_1, p_2, p_3) таким чином, щоб усі корені мали від'ємну дійсну частину. Наприклад, нехай $\chi(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$, тоді $p_1 = -1, p_2 = -3, p_3 = -3$. В такому разі, маємо одне власне число $\lambda = -1$ кратності 3 і тому керування $v = -z_1 - 3z_2 - 3z_3$ стабілізує нашу систему. Повернемось до u:

$$u = v - x_2e^{x_1}(e^{x_1} - 1) = -z_1 - 3z_2 - 3z_3 - x_2e^{x_1}(e^{x_1} - 1) \tag{1.24}$$

Отже, залишається лише скористатись заміною 1.7 аби записати u як функцію від координат x_1, x_2, x_3. Отримуємо

$$\boxed{u(x_1, x_2, x_3) = x_2e^{x_1} - e^{2x_1}(x_2 + 3) - x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3} \tag{1.25}$$

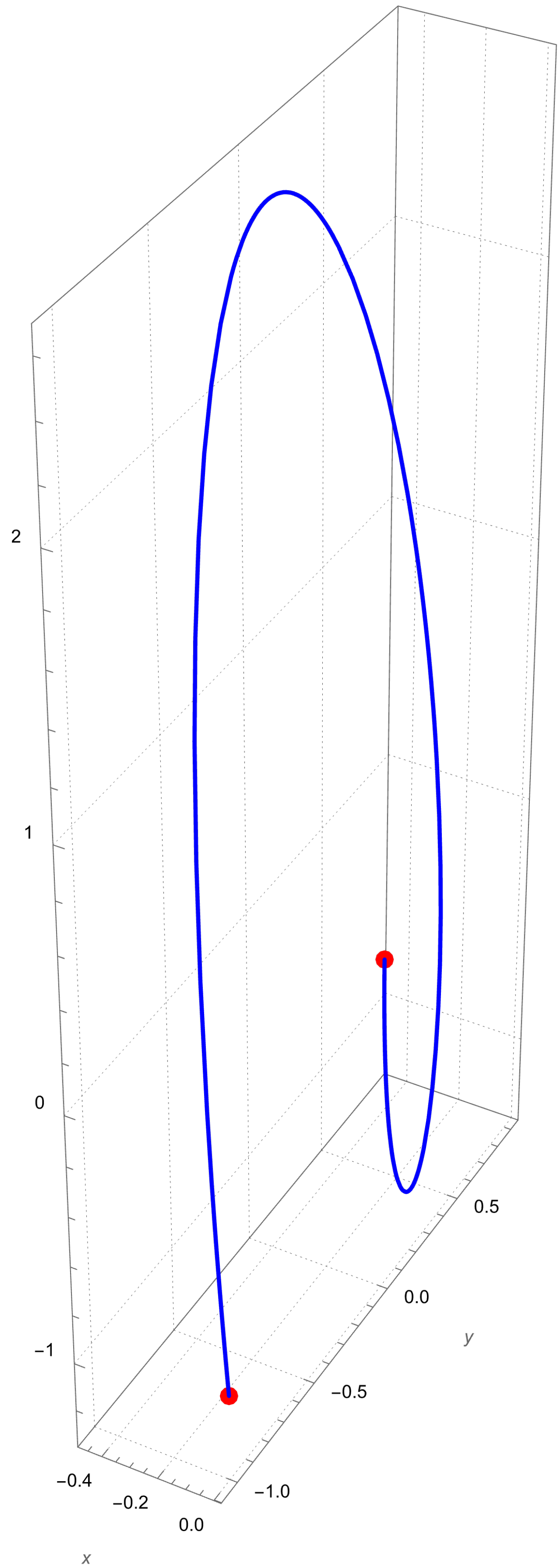

Рис. 1: Графік траєкторії з задачі 1 для керування $u(t) = Q_v(t) - Q_2(t)e^{Q_1(t)}(e^{Q_1(t)} - 1)$

Задача 2: Кусково-стале керування

Умова. Знайти кусково-стале керування, яке переводить точку $(-1, 1)$ в точку $(0, 0)$ в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + y \\ \dot{y} = -4x^7 - 4x^3y + u \end{cases} \tag{2.1}$$

за проміжок часу $[0, 4]$ та має перемикання в точці $t_1 = 2$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z_1 = x, z_2 = x^4 + y$ і заміну керування

$$v = 4x^3(x^4 + y) + (-4x^7 - 4x^3y + u) = u \tag{2.2}$$

Тоді, наша початкова система перейде у

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u \end{cases} \tag{2.3}$$

Початкова точка перейде у $(-1, 2)$, а кінцева у $(0, 0)$. Таким чином, потрібно за проміжок часу $[0, 4]$ перевести точку $(-1, 2)$ у $(0, 0)$ в силу системи 2.3. Як і сказано в умові, шукаємо керування у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [0, 2] \\ \beta, & t \in (2, 4] \end{cases} \tag{2.4}$$

В такому разі, на відрізку $[0, 2]$ $z_2 = \alpha t + b$. Оскільки $z_2(0) = 2$, то $b = 2$, а тому $z_2(t) = \alpha t + 2$. Тому $z_1 = \frac{\alpha t^2}{2} + 2t + c$. Оскільки $z_1(0) = -1$, то $c = -1$ і тому $z_1(t) = \frac{\alpha t^2}{2} + 2t - 1$.

Далі розглядаємо проміжок $(2, 4]$. Тут $z_2(t) = \beta t + d$. Оскільки $z_2(4) = 0$, то $z_2(t) = \beta(t - 4)$. Тому $z_1(t) = \frac{\beta t^2}{2} - 4\beta t + f$. Оскільки $z_1(4) = 0$, то $8\beta - 16\beta + f = 0$ і тому $f = 8\beta$. Звідси $z_1(t) = \beta\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 8\right)$.

Отже, залишилось знайти α та β. Для цього застосуємо умову неперервності, тобто $\lim_{t\to 2^-} z_i(t) = \lim_{t\to 2^+} z_i(t),\ i \in \{1, 2\}$. Отже:

$$\begin{cases} 2\beta = 2\alpha + 3 \\ 2\alpha + 2 = -2\beta \end{cases} \tag{2.5}$$

Звідси легко отримати $\alpha = -\frac{5}{4}, \beta = \frac{1}{4}$. Отже, остаточна відповідь:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{5}{4}, & t \in [0, 2] \\ \frac{1}{4}, & t \in (2, 4] \end{cases} \tag{2.6}$$

Для самоперевірки впевнимось, що це дійсно правильне керування. Для цього запустимо наступну програму у *Wolfram Mathematica*:

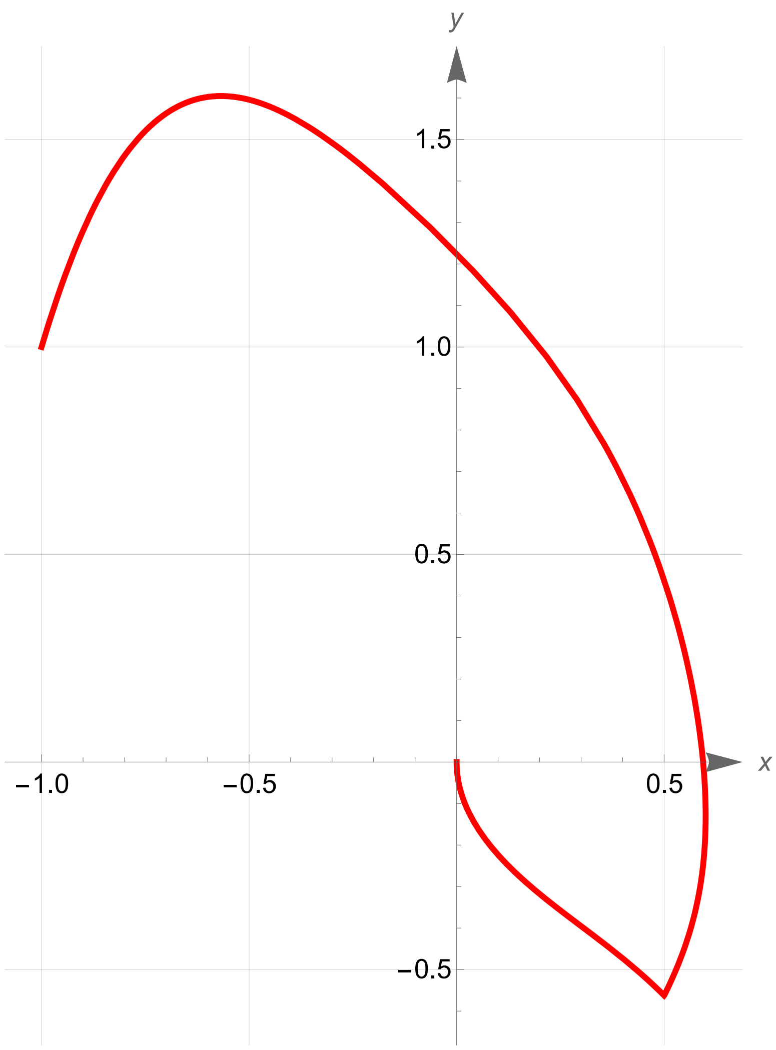

Рис. 2: Графік траєкторії з задачі 2 для керування $u(t) = \begin{cases} -5/4, & t \in [0, 2] \\ 1/4, & t \in (2, 4] \end{cases}$

```
u[t_] = Piecewise[{{-(5/4), 0<=t<=2}, {1/4, 2<=t<=4}}, 0];
s = NDSolve[{x'[t] == x[t]^4+y[t],
    y'[t] == -4*x[t]^7-4*x[t]^3*y[t]+u[t], x[0] == -1,
    y[0] == 1}, {x, y}, {t, 6}];
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 4},
 GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Red, Thickness[0.008]},
 AxesLabel -> {x, y},
 AxesStyle -> {{14, Arrowheads[0.05]}, {14, Arrowheads[0.05]}},
 ImageSize -> 400]
```

Результат зображено на Рисунку 2. Бачимо, що дійсно з точки $(-1, 1)$ ми потрапляємо у точку $(0, 0)$ за час $T = 4$.