Домашня Робота з Математичної Статистики #3

Захаров Дмитро

20 вересня, 2024

Зміст

1 Вправи з практики

1.1 Вправа 1. Статистика мінімума вибірки

Умова Задачі 1.1. Маємо вибірку $x_1, \dots, x_n \sim \mathcal{U}[a, b]$. Для оцінювання параметру a пропонується статистика $\hat{a} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$. Чи буде ця оцінка незміщеною, слушною оцінкою параметру a?

Розв'язання. Знайдемо розподіл статистики $\hat{a}$. Якщо $x_1, \dots, x_n \sim \mathcal{U}[a, b]$, то функція розподілу Φ_i для кожного x_i має наступний вигляд:

$$\Phi_i(x) =: \widetilde{\Phi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

В такому разі, функція розподілу для $\hat{a}$ має вигляд:

$$\Phi_{\hat{a}}(x) = \Pr[\hat{a} < x] = 1 - P[\hat{a} \geq x]$$
$$= 1 - \Pr\left[\min_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i \geq x\right] = 1 - \Pr\left[\bigwedge_{i=1}^{n} \{x_i \geq x\}\right]$$

Оскільки x_i незалежні, то

$$\Phi_{\hat{a}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \Pr[x_i \geq x] = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \Phi_{x_i}(x)) = 1 - (1 - \widetilde{F}(x))^n$$

Якщо розписати, то отримаємо:

$$\Phi_{\hat{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Тепер знайдемо функцію щільності:

$$f_{\hat{a}}(x) = \frac{d}{dx}\Phi_{\hat{a}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{b-a}\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Отже, знаходимо математичне сподівання $\hat{a}$:

$$\mathbb{E}[\hat{a}] = \int_a^b x \cdot f_{\hat{a}}(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{n}{b-a}\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} dx = \frac{an+b}{n+1}$$

Видно, що $\mathbb{E}[\hat{a}] \neq a$, тобто оцінка $\hat{a}$ не є незміщеною. Проте, вона є асимптотично незміщеною:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{a}] = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} a + \underbrace{\frac{b}{n+1}}_{\to 0} \right) = a$$

Також перевіримо слушність. Візьмемо достатньо мале $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$\begin{aligned}\Pr\left[|\hat{a} - a| > \varepsilon\right] = 1 - \Pr\left[|\hat{a} - a| \leq \varepsilon\right] \\ = 1 - \Pr\left[\hat{a} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\right] = 1 - \big(\Phi_{\hat{a}}(a+\varepsilon) - \Phi_{\hat{a}}(a-\varepsilon)\big)\end{aligned}$$

Помітимо, що $\Phi_{\hat{a}}(a-\varepsilon) = 0$, а тому маємо:

$$\Pr\left[|\hat{a} - a| > \varepsilon\right] = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^n\right) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тому $\Pr[|\hat{a} - a| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тобто оцінка $\hat{a}$ є слушною.

Коментар. Тут ми допустили невелику неточність; а саме, що ми вважали ε достатньо малим, тому $\left|1 - \frac{\varepsilon}{b-a}\right| < 1$. Проте, слушність оцінки має виконуватись для всіх $\varepsilon > 0$. Проте, якщо $\varepsilon > b - a$, то $\Phi_{\hat{a}}(a+\varepsilon) = 1$ і тому $\Pr[|\hat{a} - a| > \varepsilon] = 0$.

1.2 Завдання 14.10, Турчин

Умова Задачі 1.2. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$f(x;\theta) = \exp\{\theta - x\} \cdot \mathbb{1}[x \geq \theta]$$

Чи є оцінка $\hat{\theta} = -\frac{1}{n} + \min_{i\in\{1,\dots,n\}}\{\xi_i\}$ незміщеною оцінкою параметра θ?

Розв'язання. Знайдемо розподіл статистики $\hat{\theta}$:

$$\Phi_{\hat{\theta}}(x) = \Pr[\hat{\theta} < x] = 1 - \Pr[\hat{\theta} \geq x] = 1 - \Pr\left[\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\{\xi_i\} \geq x + \frac{1}{n}\right]$$

Оскільки ξ_i незалежні, то

$$\Phi_{\hat{\theta}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \Pr\left[\xi_i \geq x + \frac{1}{n}\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \Phi_{\xi_i}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \left(1 - \widetilde{F}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right)^n,$$

де $\widetilde{\Phi}(x)$ — функція розподілу для ξ_i. Знайдемо її:

$$\widetilde{\Phi}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - \exp\{\theta - x\}, & x \geq \theta. \end{cases}$$

Тому наш розподіл для $\hat{\theta}$ має вигляд:

$$\Phi_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta - \frac{1}{n}, \\ 1 - \exp\{\theta - x - \frac{1}{n}\}^n, & x \geq \theta - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Або, можна це далі спростити як

$$\Phi_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta - \frac{1}{n}, \\ 1 - \exp\{n(\theta - x) - 1\}, & x \geq \theta - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тепер знайдемо функцію щільності:

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{d}{dx}\Phi_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} n\exp\{n(\theta - x) - 1\}, & x \geq \theta - \frac{1}{n}, \\ 0, & x < \theta - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання $\hat{\theta}$:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\infty} x \cdot f_{\hat{\theta}}(x)\, dx = \int_{\theta-\frac{1}{n}}^{\infty} x \cdot n\exp\{n(\theta - x) - 1\}\, dx = \theta$$

Отже, $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$, тобто оцінка $\hat{\theta}$ є незміщеною. Доведемо слушність. Для цього візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо

$$\begin{aligned} \Pr[|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon] = 1 - \Pr[|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon] &= 1 - \Pr[\theta - \varepsilon < \hat{\theta} < \theta + \varepsilon] \\ &= 1 - (\Phi_{\hat{\theta}}(\theta + \varepsilon) - \Phi_{\hat{\theta}}(\theta - \varepsilon)) \end{aligned}$$

Помітимо, що з деякого номеру $n_0 \in \mathbb{N}$ завжди $\varepsilon > \frac{1}{n}$ для всіх $n \geq n_0$. В такому разі $\Phi_{\hat{\theta}}(\theta - \varepsilon) = 0$ і тоді для достатньо великих n ($n \geq n_0$):

$$\Pr[|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon] = 1 - \Phi_{\hat{\theta}}(\theta + \varepsilon) = 1 - \frac{1}{e} \cdot e^{-\theta n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1.3 Завдання 14.26, Турчин

Умова Задачі 1.3. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ — вибірка з розподілу

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\cdot x\right\}\cdot \mathbb{1}[x>0]$$

(а) Довести, що $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i$ є незсуненою та спроможною оцінкою параметра α.

(б) Чи є $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\xi_{n-1}+\xi_n)$ незсувною та спроможною оцінкою параметра α?

Розв'язання.
Пункт (а). По-перше, знайдемо математичне сподівання кожного з ξ_i:

$$\mathbb{E}[\xi_i] = \int_0^\infty x\cdot\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\cdot x\right\}dx = \alpha$$

Тепер знайдемо математичне сподівання $\hat{\theta}_1$:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\xi_i] = \alpha$$

Слушність оцінки випливає з **закону великих чисел у формі Хінчина**. А саме, маємо n незалежних однаково розподілених випадкових величин ξ_i, які мають математичне сподівання α. Тоді $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{\text{Pr}} \alpha$.

Пункт (б). Знайдемо математичне сподівання $\hat{\theta}_2$:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(\xi_{n-1}+\xi_n)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[\xi_{n-1}]+\mathbb{E}[\xi_n]\right) = \alpha$$

Оцінка незміщена. Проте, покажемо, що оцінка $\hat{\theta}_2$ не є слушною. Знайдемо закон розподілу $\hat{\theta}_2$. Скористаємося тим, що сума двох незалежних випадкових величин $\zeta = \xi_{n-1}+\xi_n$ з експоненційним розподілом має наступний розподіл:

$$f_\zeta(x;\alpha) = \frac{x}{\alpha^2}\cdot e^{-x/\alpha}, \quad x>0$$

В такому разі розподіл $f_{\hat{\theta}_2}$ має вигляд:

$$f_{\hat{\theta}_2}(x;\alpha) = \frac{1}{2}\cdot f_\zeta\left(\frac{x}{2};\alpha\right) = \frac{x}{4\alpha^2}\cdot e^{-x/2\alpha}, \quad x>0$$

Отже, розглянемо деяке $\varepsilon>0$ і знайдемо ймовірність

$$\begin{aligned}\Pr[|\hat{\theta}_2-\alpha|>\varepsilon] = 1-\Pr[|\hat{\theta}_2-\alpha|\le\varepsilon] &= 1-\Pr[\alpha-\varepsilon\le\hat{\theta}_2\le\alpha+\varepsilon] \\ &= 1-\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x;\alpha)\,dx\end{aligned}$$

Бачимо, що ця ймовірність абсолютно ніяк не залежить від n. Тому, візьмемо деяке мале $\varepsilon<\alpha$ і позначимо:

$$\beta := 1-\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x;\alpha)\,dx = 1-\frac{1}{4\alpha^2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} x\cdot e^{-x/2\alpha}\,dx$$

Тоді $\Pr[|\hat{\theta}_2-\alpha|>\varepsilon] = \beta \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta\neq 0$. Отже, оцінка $\hat{\theta}_2$ не є слушною.