Контрольна Робота з Еволюційних Систем #1

Захаров Дмитро

3 листопада, 2024

Варіант 5

Зміст

1 Завдання 1 2

2 Завдання 2 3

3 Завдання 3 4

4 Завдання 4 5

1 Завдання 1

Умова Задачі 1.1. Знайти загальний розв'язок різницевого рівняння:

$$x_{k+1} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^3 x_k - 3 \cdot \frac{(k+2)^2}{k+3}$$

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне скалярне різницеве рівняння першого порядку $x_{k+1} = \alpha_k x_k + f_k$, де в нашому випадку:

$$\alpha_k = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^3, \quad f_k = -3 \cdot \frac{(k+2)^2}{k+3}.$$

Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння:

$$x_{k+1} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^3 x_k.$$

Нехай x_0 задане. Тоді, розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$x_k = x_0 \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^3 = x_0 \left(\frac{2^3}{1^3} \cdot \frac{3^3}{2^3} \cdot \dots \cdot \frac{(k+1)^3}{k^3}\right) = (k+1)^3 x_0.$$

Скористаємося методом варіації сталих. Нехай $x_k = c_k \prod_{j=0}^{k-1} \alpha_j = (k+1)^3 c_k$. Підставимо це у наше початкове рівняння:

$$(k+2)^3 c_{k+1} = \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^3 \cdot (k+1)^3 c_k - 3 \cdot \frac{(k+2)^2}{k+3}.$$

Звідси маємо:

$$(k+2)^3 c_{k+1} = (k+2)^3 c_k - 3 \cdot \frac{(k+2)^2}{k+3} \Rightarrow c_{k+1} = c_k - \frac{3}{(k+3)(k+2)}.$$

Отже, якщо c_0 задане, то розв'язок має вигляд:

$$c_k = c_0 - 3\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(j+3)(j+2)} = c_0 - 3\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j+3}\right) = c_0 - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}\right) = c_0 - \frac{3k}{4+2k}$$

Отже, загальний розв'язок початкового рівняння:

$$\boxed{x_k = (k+1)^3 \left(c_0 - \frac{3k}{4+2k}\right)}$$

2 Завдання 2

Умова Задачі 2.1. Знайти загальний розв'язок різницевого рівняння:

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 6x_k = (10k-3)3^k$$

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне стаціонарне різницеве рівняння другого порядку. Розглянемо однорідну частину:

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 6x_k = 0.$$

Маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot (-2)^k + c_2 \cdot 3^k.$$

Тепер нам потрібно знайти частковий розв'язок. Оскільки права частина має вигляд $f_k = (10k-3)3^k$ та $\lambda = 3$ є коренем характеристичного рівняння першого порядку, то частковий розв'язок має вигляд:

$$\widetilde{x}_k = k \cdot 3^k \cdot (\alpha k + \beta).$$

Підставляємо в рівняння:

$$(k+2) \cdot 3^{k+2} \cdot (\alpha(k+2)+\beta) - (k+1) \cdot 3^{k+1} \cdot (\alpha(k+1)+\beta) - 6k \cdot 3^k \cdot (\alpha k+\beta) = (10k-3)3^k$$

Після спрощень маємо:

$$\begin{aligned}
&3^k \cdot 3\alpha(11+10k) + 15 \cdot 3^k\beta = 10k \cdot 3^k - 3 \cdot 3^k \\
&33\alpha \cdot 3^k + 30\alpha k 3^k + 15 \cdot 3^k\beta = 10k \cdot 3^k - 3 \cdot 3^k \\
&(33\alpha + 15\beta)3^k + 30\alpha \cdot k \cdot 3^k = -3 \cdot 3^k + 10 \cdot k \cdot 3^k
\end{aligned}$$

Звідси маємо $30\alpha = 10 \implies \alpha = \frac{1}{3}$ і $33 \cdot \frac{1}{3} + 15\beta = -3$, звідки $\beta = -\frac{14}{15}$. Отже:

$$\widetilde{x}_k = k \cdot 3^k \cdot \left(\frac{1}{3}k - \frac{14}{15}\right)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\boxed{x_k = c_1 \cdot (-2)^k + c_2 \cdot 3^k + k \cdot 3^k \cdot \left(\frac{1}{3}k - \frac{14}{15}\right)}$$

3 Завдання 3

Умова Задачі 3.1. Знайти загальний розв'язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} x_{k+1} = -8x_k + 2y_k + 2k + 29 \\ y_{k+1} = -15x_k + 3y_k + 10 \cdot 3^k \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо стаціонарну нормальну систему двох лінійних різницевих рівнянь. Нам потрібно звести її до лінійного стаціонарного рівняння відносно x_k. Для цього зробимо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= -8x_{k+1} + 2y_{k+1} + 2k + 31 \\ &= -8x_{k+1} - 30x_k + 6y_k + 20 \cdot 3^k + 2k + 31 \\ &= -8x_{k+1} - 30x_k + 3(x_{k+1} + 8x_k - 2k - 29) + 20 \cdot 3^k + 2k + 31 \\ &= -5x_{k+1} - 6x_k - 4k - 56 + 20 \cdot 3^k \end{aligned}$$

Отже, остаточно маємо рівняння:

$$x_{k+2} + 5x_{k+1} + 6x_k = -4k - 56 + 20 \cdot 3^k$$

Розв'яжемо це рівняння. Маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3.$$

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$x_k = c_1 \cdot (-2)^k + c_2 \cdot (-3)^k.$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок. Права частина має вигляд $f_k = -4k - 56 + 20 \cdot 3^k$. Нехай права частина це лише $20 \cdot 3^k$, тоді частковий розв'язок шукатимемо у вигляді $\alpha \cdot 3^k$ і тому:

$$9\alpha \cdot 3^k + 5 \cdot 3\alpha \cdot 3^k + 6\alpha \cdot 3^k = 20 \cdot 3^k \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Якщо ж права частина лише $-4k - 56$, то розв'язок шукаємо у вигляді $\beta k + \gamma$ і тому:

$$(7 + 12k)\beta + 12\gamma = -4k - 56 \Rightarrow 12\beta k + 7\beta + 12\gamma = -4k - 56$$

Звідси $\beta = -\frac{1}{3}$ та $\gamma = -\frac{161}{36}$. Отже, частковий розв'язок має вигляд:

$$\widetilde{x}_k = \frac{2}{3} \cdot 3^k - \frac{1}{3}k - \frac{161}{36}$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\boxed{x_k = c_1 \cdot (-2)^k + c_2 \cdot (-3)^k + \frac{2}{3} \cdot 3^k - \frac{1}{3}k - \frac{161}{36}}$$

Тепер підставляємо це у перше рівняння системи та знаходимо y_k:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{1}{2}(x_{k+1} + 8x_k - 2k - 29) \\ &= \boxed{3(-2)^k c_1 + \frac{5}{2}(-3)^k c_2 - \frac{835}{24} + \frac{11}{3} \cdot 3^k - \frac{5}{2}k} \end{aligned}$$

4 Завдання 4

Умова Задачі 4.1. Знайти загальний розв'язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2y_k + 2z_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k + 2z_k \\ z_{k+1} = 2x_k + 2y_k + 3z_k \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо лінійну однорідну стаціонарну еволюційну систему різницевих рівнянь:

$$\boldsymbol{s}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_k, \quad \boldsymbol{s}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні числа матриці $\boldsymbol{A}$. Маємо характеристичне рівняння:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (7-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1,$$

де λ_1 має кратність 1, а λ_2 має кратність 2. Знайдемо власні вектори:

$$(\boldsymbol{A} - 7\boldsymbol{E}_{3\times3})\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 + 2v_3 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 - 4v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = v_2 + v_3 \\ v_1 = 2v_2 - v_3 \\ v_1 + v_2 = 2v_3 \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння $v_1 = v_2 = v_3$, а отже відповідний власний вектор $(1, 1, 1)$. Далі, для $\lambda_2 = 1$ маємо:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_{3\times3})\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -u - w, v_2 = u, v_3 = w$$

Отже, маємо:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Отже, ми отримали три власних вектори:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таким чином, матриця $\boldsymbol{A}$ діагоналізується наступним чином:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}^{-1}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Отже, розв'язок можемо записати у вигляді:

$$\boldsymbol{s}_n = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{J}^n\boldsymbol{S}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7^n+2)x_0 + (7^n-1)(y_0+z_0) \\ (7^n-1)x_0 + (7^n+2)y_0 + (7^n-1)z_0 \\ (7^n-1)x_0 + (7^n-1)y_0 + (7^n+2)z_0 \end{bmatrix}$$

Або, остаточно:

$$\begin{cases} x_n = (7^n+2)c_1 + (7^n-1)(c_2+c_3) \\ y_n = (7^n-1)c_1 + (7^n+2)c_2 + (7^n-1)c_3 \\ z_n = (7^n-1)c_1 + (7^n-1)c_2 + (7^n+2)c_3 \end{cases}$$