Домашня Робота
з Фінансового Аналізу

Захаров Дмитро

25 травня, 2025

Зміст

1 Лекція 3. Вправа 1.

Умова 1.1. Покажіть, що зв'язок між математичним сподіванням α, дисперсією β^2 логнормального розподілу $\xi \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ встановлюється за допомогою наступних формул:

$$\alpha = e^{\mu+\sigma^2/2}, \quad \beta^2 = (e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Розв'язання.

Математичне сподівання. За означенням, $\eta := \log \xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Відомо, що розподіл величини η має вигляд $f_\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Оскільки $\xi = e^\eta$, то математичне сподівання α можна обчислити як:

$$\alpha = \mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[e^\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f_\eta(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

У показнику стоїть квадратична функція, тому ми можемо її перетворити:

$$x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2+\left(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)x-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)\right)^2+\frac{\sigma^2}{2}+\mu$$

Таким чином, маємо:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)\right)^2}dx$$

Зробимо заміну $v = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)$. Тоді, $dx = \sqrt{2}\sigma dv$ і в такому разі:

$$\alpha = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow \alpha = e^{\mu+\sigma^2/2}.$$

Тут ми скористалися відомим інтегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$.

Дисперсія. Нагадаємо, що дисперсія:

$$\beta^2 = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 = \mathbb{E}[e^{2\eta}] - e^{2\mu+\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx - e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Отже, залишилось знайти інтеграл $\mathcal{J} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$. Робимо такі самі перетворення, як і в попередньому випадку:

$$2x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2+\left(2+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)x-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)\right)^2+2\sigma^2+2\mu$$

Таким чином,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{2\sigma^2+2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{\mu}{\sigma^2}\right)\right)^2} dx.$$

Зробимо так само заміну $v = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)$. Тоді $dx = \sqrt{2}\sigma dv$ і тоді:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2\sigma^2+2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = e^{2\sigma^2+2\mu}.$$

Звідси отримуємо результат для дисперсії:

$$\beta^2 = \mathcal{J} - e^{2\mu+\sigma^2} = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2} \Rightarrow \beta^2 = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Вирази для μ та σ^2 через α та β^2 можна отримати так: з першого рівняння маємо $\mu = \log\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$ і підставляючи у друге:

$$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2} = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\log\alpha} = \alpha^2(e^{\sigma^2} - 1) = \beta^2 \Rightarrow \sigma^2 = \log\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right).$$

Звідси одразу $\mu = \log\alpha - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

2 Лекція 3. Вправа 2.

Умова 2.1. Під час розглядання диверсифікації портфелю цінних паперів, ми обирали частки $\{x_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ згідно рівнянню:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^n x_i\sigma(\xi_i) = 0 \end{cases}$$

Коли наведене рівняння не має розв'язків?

Розв'язання. Геометрично, маємо дві гіперплощини в $\mathbb{R}^n$: перша має вектор нормалі $\mathbf{1}_n$, а друга має вектор нормалі $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma(\xi_1), \dots, \sigma(\xi_n))$. Якщо рівняння не має розв'язків, то ці дві гіперплощини не перетинаються. Зокрема, це означає наступне: (а) гіперплощини різні, (б) гіперплощини паралельні. Друга умова означає, що вектори нормалі паралельні, тобто $\boldsymbol{\sigma} = \gamma\mathbf{1}_n$ для деякої константи $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ну а перша умова ніколи не виконується, оскільки вільний член у двох рівнянь різний. Також, усі дисперсії не можуть бути нульовими, оскільки випадкова величина не можна мати нульову дисперсію.

Отже, відповідь на наше питання наступне: всі дисперсії випадкових величин $\{\sigma(\xi_i)\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ мають бути однаковими.

3 Лекція 4. Вправа 1.

Умова 3.1. Під час розглядання векторно-матричної форми задачі Марковіца, під час лекції не було розглянуто випадок, коли ефективність паперів має вигляд $\mathbf{m} = a \cdot \mathbf{1}_n$. При $\overline{m} = a$ задача Марковіца має вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} \to \min, \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{1}_n = 1. \end{cases}$$

Розв'язати цю задачу.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top V \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^\top \mathbf{1}_n - 1).$$

Знайдемо градієнти:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 2V\mathbf{x} + \lambda \mathbf{1}_n = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(\mathbf{x}^\top \mathbf{1}_n - 1) = 0.$$

Таким чином, отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2V\mathbf{x} = -\lambda \mathbf{1}_n, \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{1}_n = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо $\mathbf{x} = -\frac{\lambda}{2} V^{-1} \mathbf{1}_n$ (матриця V обернена, оскільки є матрицею ковариації), тому підставляючи у друге:

$$\left(-\frac{\lambda}{2} V^{-1} \mathbf{1}_n\right)^\top \mathbf{1}_n = 1.$$

Оскільки $\left(-\frac{\lambda}{2} V^{-1} \mathbf{1}_n\right)^\top = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}_n^\top V^{-1}$, то маємо:

$$-\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}_n^\top V^{-1} \mathbf{1}_n = 1 \implies \lambda = -\frac{2}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1} \mathbf{1}_n}.$$

Звідси отримали $\mathbf{x}^* = \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1} \mathbf{1}_n}$. Перевіримо, що це мінімум:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^2} = 2V \succ 0.$$

Отже, шуканий розв'язок є мінімумом задачі Марковіца.

4 Лекція 7. Вправа 1.

Умова 4.1. Нехай $H_1, \ldots, H_n$ — повна група подій. Розглянемо σ-алгебру, яку породжено випадковими подіями $H_1, \ldots, H_n$, тобто найменшу σ-алгебру, яка містить ці події:

$$\mathcal{F}_0 := \sigma[H_1, \ldots, H_n] = \left\{ \bigcup_{i \in \mathcal{I}} H_i : \mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Тоді, якщо ξ є $\mathcal{F}_0$-вимірною, то $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{H_i}(\omega)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що величина ξ є $\mathcal{F}_0$-вимірною тоді і тільки тоді, коли для будь-якої борелової множини $B \subseteq \mathbb{R}$ прообраз $\xi^{-1}(B) \subseteq \mathcal{F}_0$. В нашому випадку, $\xi^{-1}(B)$ має бути об'єднанням певних подій $\{H_i\}_{i \in \mathcal{I}(B)}$.

Для доведення початкового твердження, міркуватимемо від супротивного: нехай на певній множині H_m величина ξ не є сталою, тобто знайдеться два $\omega_1, \omega_2 \in H_m$ такі, що $\xi(\omega_1) \neq \xi(\omega_2)$.

Позначимо $c_1 := \xi(\omega_1)$. Розглянемо множину $A = \xi^{-1}(\{c_1\})$. Оскільки ξ є $\mathcal{F}_0$-вимірною, то $A \in \mathcal{F}_0$, тобто $A = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} H_i$ для деяких індексів $\mathcal{J}$. Оскільки ω_1 належить як до A, так і до H_m, то $H_m \subseteq A$. Але це означає, що для всіх $\omega \in H_m$ має виконуватись $\omega \in A$, що означає $\xi(\omega) = c_1$. Проте, оскільки $\omega_2 \in H_m$, то і $\xi(\omega_2) = c_1$ — протиріччя. Отже, ми довели, що ξ може приймати лише константне значення на кожній з подій H_i, а тому $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{H_i}(\omega)$.

5 Лекція 7. Вправа 2.

Умова 5.1. Розглядається модель Кокса-Роса-Рубінштейна ціноутворення фінансового активу $S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n}(1+\rho_i)$, де ρ_i — незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені за законом:

$$\Pr[\rho_i = b] = p, \quad \Pr[\rho_i = a] = 1 - p =: q.$$

На кожному кроці n визначаємо σ-алгебру $\mathcal{F}_n$, що породжена випадковими величинами $\{\rho_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$. Послідовність $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ задає фільтрацію σ-алгебр. На лекції розглядається математичне сподівання $\eta = \mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]$ і було показано наступне:

$$\eta(\omega) = c_1 \mathbf{1}_{E_a}(\omega) + c_2 \mathbf{1}_{E_b}(\omega), \quad c_1 = S_0(1+a)^2 q + S_0(1+a)(1+b)p$$

1. Знайти значення c_2. Через E_a, E_b ми позначили події, що відповідають випадкам, коли $\rho_1 = a$ та $\rho_1 = b$ відповідно.
2. Знайдіть $\mathbb{E}[S_3|\mathcal{F}_2]$.

Розв'язання. Пункт 1. Коефіцієнт c_2 дорівнює:

$$c_2 = \frac{\mathbb{E}[S_2 \mathbf{1}_{E_b}]}{\Pr[E_b]}$$

Ймовірність $\Pr[E_b] = p$, а математичне сподівання:

$$\mathbb{E}[S_2 \mathbf{1}_{E_b}] = S_2\Big|_{E_{bb}} \Pr[E_{bb}] + S_2\Big|_{E_{ba}} \Pr[E_{ba}] = S_0(1+b)^2 p^2 + S_0(1+b)(1+a)pq.$$

Таким чином,

$$c_2 = \frac{S_0(1+b)^2 p^2 + S_0(1+b)(1+a)pq}{p} = S_0(1+b)^2 p + S_0(1+a)(1+b)q.$$

Отже, остаточно $c_2 = S_0(1+b)^2 p + S_0(1+a)(1+b)q$.

Пункт 2. Величина $\zeta = \mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_3]$ приймає сталі значення на кожній з подій E_{aa}, E_{ab}, E_{ba}, E_{bb}. Таким чином,

$$\zeta(\omega) = c_{aa}\mathbf{1}_{E_{aa}}(\omega) + c_{ab}\mathbf{1}_{E_{ab}}(\omega) + c_{ba}\mathbf{1}_{E_{ba}}(\omega) + c_{bb}\mathbf{1}_{E_{bb}}(\omega),$$

Почнемо з c_{aa}. Маємо:

$$c_{aa} = \frac{\mathbb{E}[S_3 \mathbf{1}_{E_{aa}}]}{\Pr[E_{aa}]}$$

Ймовірність $\Pr[E_{aa}] = q^2$, а математичне сподівання:

$$\mathbb{E}[S_3\mathbf{1}_{E_{aa}}] = S_3\Big|_{E_{aaa}}\Pr[E_{aaa}]+S_3\Big|_{E_{aab}}\Pr[E_{aab}] = S_0(1+a)^3q^3+S_0(1+a)^2(1+b)q^2p.$$

Таким чином, маємо:

$$c_{aa} = \frac{S_0(1+a)^3q^3 + S_0(1+a)^2(1+b)q^2p}{q^2} = S_0(1+a)^3q + S_0(1+a)^2(1+b)p.$$

Тепер подивимось на c_{ab}. Маємо:

$$\begin{aligned} c_{ab} = \frac{\mathbb{E}[S_3\mathbf{1}_{E_{ab}}]}{\Pr[E_{ab}]} &= \frac{S_3\Big|_{E_{aba}}\Pr[E_{aba}] + S_3\Big|_{E_{abb}}\Pr[E_{abb}]}{qp} \\ &= \frac{S_0(1+a)^2(1+b)p^2q + S_0(1+a)(1+b)^2pq^2}{qp} \\ &= S_0(1+a)^2(1+b)p + S_0(1+a)(1+b)^2q. \end{aligned}$$

Аналогічно можна знайти c_{ba} та c_{bb}. Тоді маємо:

$$\zeta(\omega) = \begin{cases} S_0(1+a)^3q + S_0(1+a)^2(1+b)p, & \text{якщо } \omega \in E_{aa}, \\ S_0(1+a)^2(1+b)p + S_0(1+a)(1+b)^2q, & \text{якщо } \omega \in E_{ab}, \\ S_0(1+b)(1+a)^2q + S_0(1+b)^2(1+a)p, & \text{якщо } \omega \in E_{ba}, \\ S_0(1+b)^2(1+a)q + S_0(1+b)^3p, & \text{якщо } \omega \in E_{bb}. \end{cases}$$