Контрольна робота (частина 1) з курсу "Елементи математичного моделювання"

Студента групи МП-21 Захарова Дмитра

2 квітня 2023 р.

Варіант 4.

Завдання 1.

Умова. Дана матриця $\mathbf{P}$ переходу ланцюга Маркова. Якщо ланцюг перебуває у стані a_2, то яка ймовірність його перебування через 2 кроки у стані a_2? Знайти граничні ймовірності перебування ланцюга у станах

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Якщо ланцюг перебуває у стані a_2, то початковий ймовірносний вектор:

$$\boldsymbol{p}^{[0]} = [0, 1, 0]$$

Щоб знайти ймовірність перебування у всіх станах через n кроків, потрібно застосувати формулу:

$$\boldsymbol{p}^{[n]} = \boldsymbol{p}^{[0]}\mathbf{P}^n$$

В нашому випадку, нам потрібна ймовірність перебування через 2 кроки, тобто нам потрібно знайти $\mathbf{P}^2$. Порахуємо:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.24 & 0.48 \\ 0.27 & 0.31 & 0.42 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{bmatrix}$$

І тому стовпчик ймовірностей через 2 ходи:

$$\boldsymbol{p}^{[2]} = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 0.28 & 0.24 & 0.48 \\ 0.27 & 0.31 & 0.42 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{bmatrix} = [0.27, 0.31, 0.42]$$

Звідси робимо висновок, то через 2 кроки процес буде у стані a_2 з ймовірністю $\mathbf{0.31}$.

Щоб знайти граничну ймовірність перебування ланцюга у станах, скажімо, вектор $\boldsymbol{t} = [t_1, t_2, t_3]$, нам потрібно розв'язати рівняння:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\mathbf{P}$$

Підставляємо нашу матрицю:

$$\begin{cases} 0.2t_1 + 0.5t_2 + 0.1t_3 = t_1 \\ 0.4t_1 + 0.3t_2 + 0.1t_3 = t_2 \\ 0.4t_1 + 0.2t_2 + 0.8t_3 = t_3 \end{cases}$$

Але якщо розв'язувати це рівняння, то виявиться, що рівнянь замало, хоча і маємо 3 рівняння з 3 невідомими. Це випливає з того факту, що $\det(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = 0$. Тому додамо умову, що $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, тобто умову, що $\boldsymbol{t}$ є ймовірнісним стовпчиком. В такому разі можемо викинути, наприклад, третє рівняння у системі та поставити замість нього $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, себто:

$$\begin{cases} 0.2t_1 + 0.5t_2 + 0.1t_3 = t_1 \\ 0.4t_1 + 0.3t_2 + 0.1t_3 = t_2 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases}$$

Після розв'язання цієї системи рівнянь отримуємо наступний розв'язок:

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Тобто маємо, що гранична ймовірність перебування у стані 1 дорівнює 0.2, у другому стані також 0.2, а в третьому 0.6.

Відповідь. Ймовірність перебування через 2 кроки у стані a_2 дорівнює $\mathbf{0.31}$, граничні ймовірності перебування у станах 1,2,3 дорівнюють $\mathbf{0.2}, \mathbf{0.2}, \mathbf{0.6}$, відповідно.

Завдання 2.

Умова. Дана матриця $\mathbf{P}$ переходу ланцюга Маркова. Нехай спочатку ланцюг знаходиться у стані a_4. Знайти середній час перебування ланцюга у стані a_1 до поглинання. Знайти ймовірності потрапляння у поглинаючі стани за довільний час.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Розв'язок. По-перше помітимо, що перед нами поглинаючий ланцюг Маркова, бо стани a_2, a_3 є поглинаючими, а зі станів a_1, a_4 ми можемо попасти у будь-які інші.

Будь-яку матрицю поглинаючого ланцюга Маркова (часто після перенумеровки станів) можна подати у блочному вигляді:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \tag{1}$$

де матриця $\mathbf{E}$ є одиничною, а матриця $\mathbf{O}$ є матрицею з нулів.

Отже, зведемо до такого виду нашу матрицю $\mathbf{P}$. Отже, до перенумеровки маємо:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} - & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

А після:

$$\mathbf{P}' = \begin{array}{cc} - & \begin{array}{cccc} a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Отже добре видно, що в позначеннях з рівняння 1 маємо:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Тепер знаходимо фундаментальну матрицю ланцюга, тобто значення:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1}$$

Спочатку знаходимо $\mathbf{E} - \mathbf{Q}$:

$$\mathbf{E} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Отже фундаментальна матриця:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 90/53 & 10/53 \\ 10/53 & 60/53 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.70 & 0.19 \\ 0.19 & 1.13 \end{bmatrix}$$

Отже, щоб знайти середній час перебування у стані a_1 якщо ми почали у стані a_4, нам просто достатньо взяти з матриці $\mathbf{N}$ елемент, що відповідає переходу $a_4 \to a_1$. Тобто, з матриці

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} - \\ a_4 \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_4 & a_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 90/53 & \mathbf{10/53} \\ 10/53 & 60/53 \end{bmatrix} \end{array}$$

дістати час $\frac{10}{53}$.

Знайдемо ймовірності потрапляння у поглинаючі стани за довільний час. Для цього знаходимо матрицю:

$$\mathbf{H} = \mathbf{NR} = \begin{bmatrix} 90/53 & 10/53 \\ 10/53 & 60/63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/10 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/53 & 24/53 \\ 15/53 & 38/53 \end{bmatrix}$$

Отже, якщо початковий стан a_4, то у поглинаючий стан a_2 ймовірність попадання $\frac{29}{53} \approx 0.547$, а у стан a_3 ймовірність $\frac{24}{53} \approx 0.453$.

Відповідь. Якщо розпочинаємо зі стану a_4, то ми в середньому будемо перебувати $\frac{10}{53}$ одиниць часу у стані a_1 та з ймовірністю $\frac{29}{53}$ потрапимо у поглинаючий стан a_2, а з ймовірністю $\frac{24}{53}$ у стан a_3.