8️⃣

Homework #8

C. 101. 2(1)

Маємо функцію $f(x) = x^3, x \in [-2, 3]$. Нехай маємо розбиття $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ цього відрізку, на якій очевидно функція f визначена (бо $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, оскільки вона є елементарною). В такому разі, нижня та верхні суми Дарбу, відповідно:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i, \ S_\tau = \sum_{i=1}^{k_\tau} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i$$

За умовою ми розбили відрізок на n рівних частин, отже, маємо розбиття

$$\tau = \left\{-2 + \frac{5k}{n}\right\}_{k=0}^{k=n}$$

Тобто $x_k = -2 + \frac{5k}{n}$. Очевидно, що це є рівномірним розбиттям, оскільки $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n} = \text{const}$.

Отже, спочатку розберемося з нижньою сумою:

$$s_\tau = \frac{5}{n} \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

Отже, залишилось лише знайти $\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$. Помітимо, що функція f монотонно зростаюча (це вже багато разів доводилось до цього), а також, як було зазначено раніше, неперервна на $\mathbb{R}$. Отже, якщо візьмемо будь-який відрізок $[a, b]$, то $\inf_{[a,b]} f(x) = f(a)$ та $\sup_{[a,b]} f(x) = f(b)$, оскільки f визначена в усіх точках $[a, b]$, причому $\forall x \in [a, b) :$ $f(b) > f(x)$ за означенням строго зростаючої функції. Отже

$$s_\tau = \frac{5}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) = \frac{5}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(-2 + \frac{5(j-1)}{n}\right)^3$$

Якщо це спростити, то отримаємо:

$$s_\tau = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$$

Аналогічним чином:

$$S_\tau = \frac{5}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \frac{5}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(-2 + \frac{5j}{n}\right)^3 = \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$$

Як бачимо, $\lim_{n \to \infty} S_\tau = \lim_{n \to \infty} s_\tau = 65/4$.

Завдання 40

Ні, не обов'язково. Нехай є функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Тоді очевидно $|f(x)| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, тому, наприклад, $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 dx = 1$, тобто $|f(x)|$ є інтегрованою на $[0, 1]$.

Однак сама по собі функція не є інтегрованою. Доведемо це. Нехай маємо розбиття

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

Тоді нижня та верхні суми Дарбу, відповідно:

$$s = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)\Delta x_k, \ S = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)\Delta x_k$$

Помітимо, що $\forall [x_{k-1}, x_k] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = -1, \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1$, бо на будь-якому відрізку ($x_{k-1} \neq x_k$) знайдеться $q \in \mathbb{Q}, q \in [x_{k-1}, x_k]$ та $r \in \mathbb{R}, r \in [x_{k-1}, x_k]$ і тому

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(q) = -1, \quad \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(r) = 1$$

Тому

$$s = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k, \ S = -\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \to s \neq S$$

$s \neq S$ оскільки якщо це не так, то $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 0$, що очевидно неправильно, бо $\Delta x_k > 0 \ \forall k \in \overline{1, n}$, оскільки $x_k > x_{k-1} \to x_k - x_{k-1} = \Delta x_k > 0$.

№ 55-79

55 (користуємось формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a), F' = f$).

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^4 - (-1)^4}{4} = \frac{15}{4}$$

57

$$\int_{-1}^{2} \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{4/3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{3 \cdot 2^{4/3} - 3 \cdot (-1)^{4/3}}{4} = \frac{6\sqrt[3]{2} - 3}{4}$$

59 (користуємось властивістю $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$)

$$\int_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)dx = \int_{1}^{2} x^2 dx - 2\int_{1}^{2} x dx + 3\int_{1}^{2} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2} - x^2\Big|_{1}^{2} + 3x\Big|_{1}^{2} = \frac{7}{3} - 3 + 3 = \frac{7}{3}$$

61

$$\int_{0}^{1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})dx = \int_{0}^{1} x^{1/2} dx + \int_{0}^{1} x^{2/3} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_{0}^{1} + \frac{3}{5} x^{5/3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$$

63

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x \Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

65

$$\int_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_{-\pi/4}^{0} = \tan 0 - \tan(-\pi/4) = \tan(\pi/4) = 1$$

67

$$\int_{1}^{2} e^x dx = e^x \Big|_{1}^{2} = e^2 - e$$

69

$$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{2}^{4} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

71

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$$

Нехай $\xi = x^3 \to d\xi = 3x^2dx \to x^2dx = \frac{d\xi}{3}$. Користуємось правилом заміни в визначеному інтегралі: границі інтегрування потрібно змінити з 0 на $0^3 = 0$ та з 1 на $1^3 = 1$ (ну тобто в результаті не змінювати). Отже

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{3}\arctan\xi\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\arctan 1 = \frac{\pi}{12}$$

73

$$I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$$

Зробимо заміну $\xi = \ln x \to d\xi = \frac{dx}{x}$. Окрім того, змінюємо границі: з e^2 на $\ln e^2 = 2$ та з e^3 на $\ln e^3 = 3$, тобто маємо

$$I = \int_2^3 \frac{d\xi}{\xi} = \ln\xi\Big|_2^3 = \ln\frac{3}{2}$$

75

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x dx = \pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

77

$$\int_0^2 \operatorname{sh}^3 x dx = \int_0^2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh}^2 x dx = \int_0^2 (\operatorname{ch}^2 x - 1)\operatorname{sh} x dx$$

Робимо заміну $\xi = \operatorname{ch} x \to d\xi = \operatorname{sh} x dx$, а також змінюємо границі інтегрування: з $\operatorname{ch} 0 = 1$ на $\operatorname{ch} 2 = \frac{1+e^4}{2e^2}$, тому

$$\int_1^{\operatorname{ch} 2} (\xi^2 - 1)d\xi = \int_1^{\operatorname{ch} 2} \xi^2 d\xi - \int_1^{\operatorname{ch} 2} d\xi = \frac{\operatorname{ch}^3 2 - 1}{3} - \operatorname{ch} 2 + 1 = \frac{\operatorname{ch}^3 2}{3} - \operatorname{ch} 2 + \frac{2}{3}$$

79

$$\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx = \int_3^4 \frac{(x-2)^2+4x-1}{x-2}dx = \int_3^4 (x-2)dx + \int_3^4 \frac{4(x-2)+7}{x-2}dx = \int_3^4 (x-2)dx + \int_3^4 4dx +$$

Завдання 109(1)

Помітимо для початку, що функція f неперервна на проміжку $[0,2]$, бо на $[0,2]\setminus\{1\}$ маємо композицію елементарних функцій, а в точці 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 = 1, \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 - 1 = 1, f(1) = 1^2 = 1$$

Отже оскільки $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$, то функція є неперервною, то вона є інтегрованою, тому

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2-x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 2 - 2 + \frac{1}{2} =$$