§ Керованість лінійних систем §

Задача 1: Завдання 1

Умова. Нехай задано систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Навесті кусково-неперервне керування з однією точкою розриву, що зі стану $[-2, 2]^\top$ за проміжок $[0, 2]$ переведе систему у точку $[0, 0]^\top$, тобто

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), \ 0 \leq t < \tau \\ u_2(t), \ \tau \leq t \leq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Розв'язання. Спробуємо наступну функцію:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta, \ 0 \leq t < \tau \\ \gamma t + \delta, \ \tau \leq t < 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

Якщо зафіксувати $\tau = 1$, то маємо безліч значень відносно (α, γ).

Задача 2: Завдання 2

Умова. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + u \end{cases}$$

Чи можна перевести систему з $[0, 0]^\top$ за проміжок $[0, 1]$ у точку $[x_1^0, x_2^0]^\top$.

Розв'язання. Запишемо систему у матричному вигляді, позначивши $\mathbf{x} := [x_1, x_2]^\top$, тоді

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \tag{2.1}$$

де в нашому випадку

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Побудуємо матрицю Калмана:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Бачимо, що $\operatorname{rang} \mathbf{Q} = 2$, тому система повністю керована на $[0, 1]$. Знайдемо функцію керування за формулою:

$$u(t) = \mathbf{B}^* e^{-\mathbf{A}^* t} \cdot \mathbf{N}^{-1}(0,1) \cdot e^{-\mathbf{A}}\mathbf{x}_1 \tag{2.4}$$

Отже, залишається лише підставити усе в цю формулу. Спочатку знайдемо експоненти:

$$e^{-\mathbf{A}} = \exp \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ e^{-\mathbf{A}^* t} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1+2t & 2t \\ -2t & 1-2t \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Нарешті, матриця $\mathbf{N}(0, 1)$:

$$\mathbf{N}(0,1) = \int_0^1 e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{-\mathbf{A}^* t} dt \tag{2.6}$$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} -2te^{-t} \\ e^{-t}(1-2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2te^{-t} & e^{-t}(1-2t) \end{bmatrix} dt \tag{2.7}$$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} 4e^{-2t}t^2 & -2e^{-2t}(1-2t)t \\ -2e^{-2t}(1-2t)t & e^{-2t}(1-2t)^2 \end{bmatrix} dt \tag{2.8}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{e^2} & \frac{1}{2} - \frac{7}{2e^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{7}{2e^2} & \frac{1}{2} - \frac{5}{2e^2} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

В такому разі обернена матриця:

$$\mathbf{N}^{-1}(0,1) = \frac{2e^2}{1 - 6e^2 + e^4} \begin{bmatrix} -5 + e^2 & 7 - e^2 \\ 7 - e^2 & 2(-5 + e^2) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

В такому разі керування:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t}t & e^{-t}(1-2t) \end{bmatrix} \cdot \frac{2e^2}{1 - 6e^2 + e^4} \begin{bmatrix} -5 + e^2 & 7 - e^2 \\ 7 - e^2 & 2(-5 + e^2) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{e} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Якщо спростити:

$$\boxed{u(t) = -\frac{2e^{1-t}((-1 + e^2(4t-1)))x_1^0 - 2(-2 + t + e^2 t)x_2^0}{1 - 6e^2 + e^4}} \tag{2.11}$$