Комплексний Аналіз

Весняний семестр 2024

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Гиря Н.П.*

Домашня робота 4

§ Відображення #1. Варіант 5 §

Задача 1: Лінійно-дробове відображення

Умова. Знайти образ області $\mathcal{D}$ при відображенні ω, знайти нерухомі точки кожного відображення, вказати хоча б одну пару симетричних точок в кожному завданні.

Пункт 1.

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 3\}, \; \omega(z) = 5z - 3i, \; \omega(z) = \frac{2}{z-1}$$

Пункт 2.

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 2\}, \; \omega(z) = 5z - 3i, \; \omega(z) = \frac{2}{z-1}$$

Розв'язання.

Оскільки далі ми будемо багато малювати, одразу відмічу позначення на малюнках:

- Синім кольором будемо замальовувати області $\mathcal{D}$, задані в умові[1].
- Зеленим кольором будемо замальовувати образи $\omega(\mathcal{D})$, що отримані перетворенням $\omega : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.
- Червоним будемо відмічати симетричні точки до і після перетворення.
- Помаранчевим будемо позначати нерухомі точки відображення (тобто такі $z^* \in \hat{\mathbb{C}}$, що $\omega(z^*) = z^*$)

Отже, перейдемо до розв'язання.

[1] Я пам'ятаю, що на парах ми ставимо штрихи навпроти заданої області, але будь ласка вибачте, малювати це дуже складно на комп'ютері :(

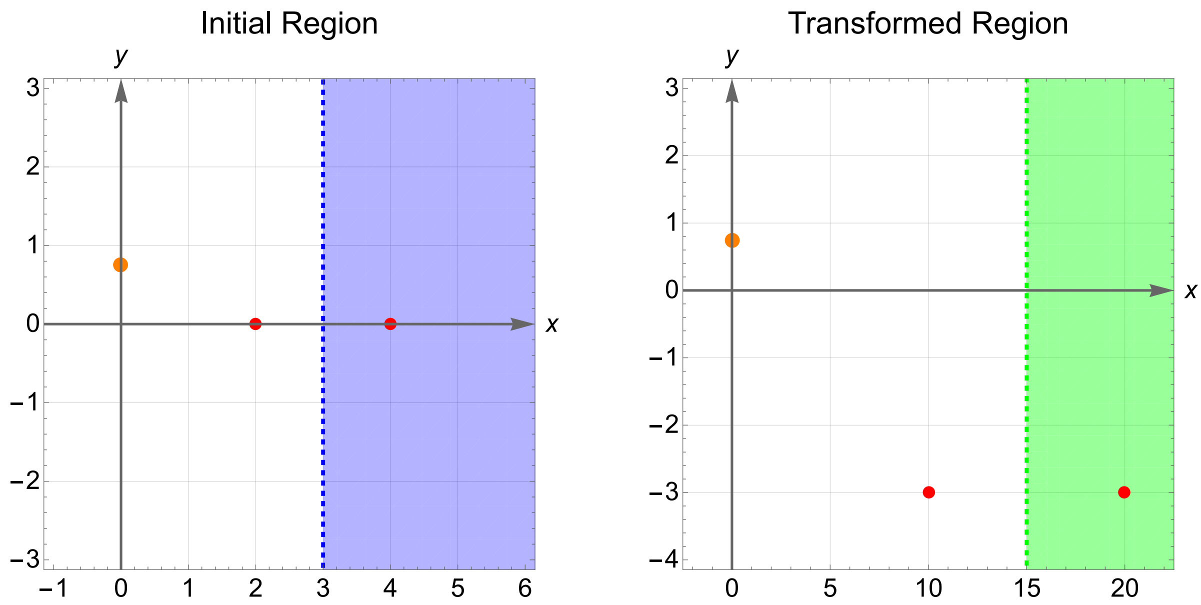

Рис. 1: Відображення $\omega(z) = 5z - 3i$ на область $\mathrm{Re}(z) > 3$.

Пункт 1.
Відображення $\omega(z) = 5z - 3i$.

Образ. $\mathcal{D}$ задає праву напівплощину від вертикальної прямої $\mathrm{Re}(z) = 3$. Подивимось, що буде, якщо ми застосуємо перетворення $\omega(z) = 5z - 3i$. Вона складається з композиції $\omega(z) = \omega_2 \circ \omega_1(z)$, де $\omega_1(z) = 5z$ та $\omega_2(z) = z - 3i$. Отже, розглянемо як буде змінюватись границя $\mathrm{Re}(z) = 3$ та орієнтація області.

1. $\omega_1(z) = 5z$ розтягує кожен вектор з області в п'ять разів. Тому, пряма $\mathrm{Re}(z) = 3$ перейде у пряму $\mathrm{Re}(z) = 15$.

2. $\omega_2(z) = z - 3i$ опускає усі елементи з області на 3 одиниці вниз. Проте, це переведе пряму $\mathrm{Re}(z) = 15$ у саму себе, оскільки при цьому дійсна частина ніяк не змінюється.

Отже, орієнтація області не змінилася і пряма $\mathrm{Re}(z) = 3$ перейшла у пряму $\mathrm{Re}(z) = 15$. Тому остаточний образ $\omega(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 15\}$. (можна також впевнетись, що, наприклад, $\omega(4(\in \mathcal{D})) = 20 - 3i$ лежить праворуч від прямої $\mathrm{Re}(z) = 15$)

Нерухомі точки. Для цього просто розв'яжемо $\omega(z) = z$. Маємо $4z = 3i \implies z = \frac{3i}{4}$ – єдина нерухома точка відображення.

Симетричні точки. Скористаємося тим, що ω переводить симетричні точки у симетричні. Тому нехай $z_1 = 2$ та $z_2 = 4$ – симетричні відносно $\mathrm{Re}(z) = 3$. Тоді $z_1' = \omega(z_1) = 10 - 3i$ та $z_2' = \omega(z_2) = 20 - 3i$ – дійсно симетричні відносно $\mathrm{Re}(z) = 15$.

Результат зображено на Рисунку 1.

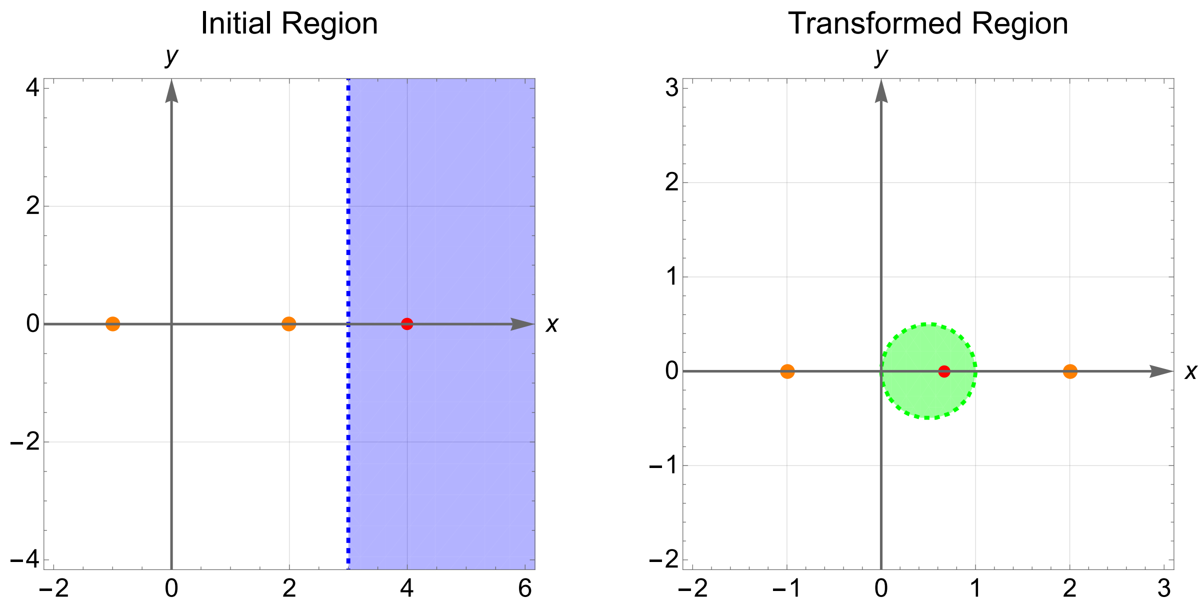

Рис. 2: Відображення $\omega(z) = \frac{2}{z-1}$ на область $\mathrm{Re}(z) > 3$. Точка $z = 2$ є і нерухомою, і симетричною.

Відображення $\boldsymbol{\omega(z) = \frac{2}{z-1}}$.

Образ. Оскільки лінійно-дробове відображення переводить узагальнене коло у узагальнене коло, то образом має бути або пряма, або коло. Бачимо, що особлива точка $z = 1$ не знаходиться на $\overline{\mathcal{D}}$, тому на виході маємо отримати коло.

Щоб знайти центр, скористаємося тим, що симетричні точки перетворюються у симетричні під дією ω. Тоді, обираємо $z = 1$ – особлива точка (полюс) ω. Симетричною відносно $\partial\mathcal{D}$ є $z = 5$. Отже, маємо $\omega(1) = \infty$, $\omega(5) = \frac{1}{2}$. Оскільки симетричною точкою до ∞ відносно кола є центр кола, то $z = \frac{1}{2}$ і є центром нашого шуканого кола.

Щоб знайти якусь точку на колі, підставимо точку з прямої $\mathrm{Re}(z) = 3$, тобто, наприклад, $z = 3$. Оскільки $\omega(3) = 1$, то $1 \in \partial\omega(\mathcal{D})$. Отже, рівняння кола стає $\partial\omega(\mathcal{D}) : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Залишилося визначитися зі штриховкою. Підставимо $z = 4$, тоді $\omega(4) = \frac{2}{3}$ – лежить всередині кола, а отже $\omega(\mathcal{D}) : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.

Нерухомі точки. Розв'яжемо $\omega(z) = z$, або $\frac{2}{z-1} = z$, звідки $z^2 - z - 2 = 0$, коренями якого є $z_1 = 2$ та $z_2 = -1$ – дві нерухомі точки.

Симетричні точки. Оскільки $\frac{1}{2}$ та ∞ є дещо тривіальними точками, підставим ще дві. Візьмемо $z = 2$ та $z = 4$, наприклад. Тоді матимемо $\omega(4) = \frac{2}{3}, \omega(2) = 2$ – дві симетричні точки.

Результат зображено на Рисунку 2.

Пункт 2.

Відображення $\boldsymbol{\omega(z) = 5z - 3i}$.

Образ. Лінійне перетворення має перевести коло у коло, але з іншим центром і радіусом. Щоб визначити центр, достатньо лише підставити коорди-

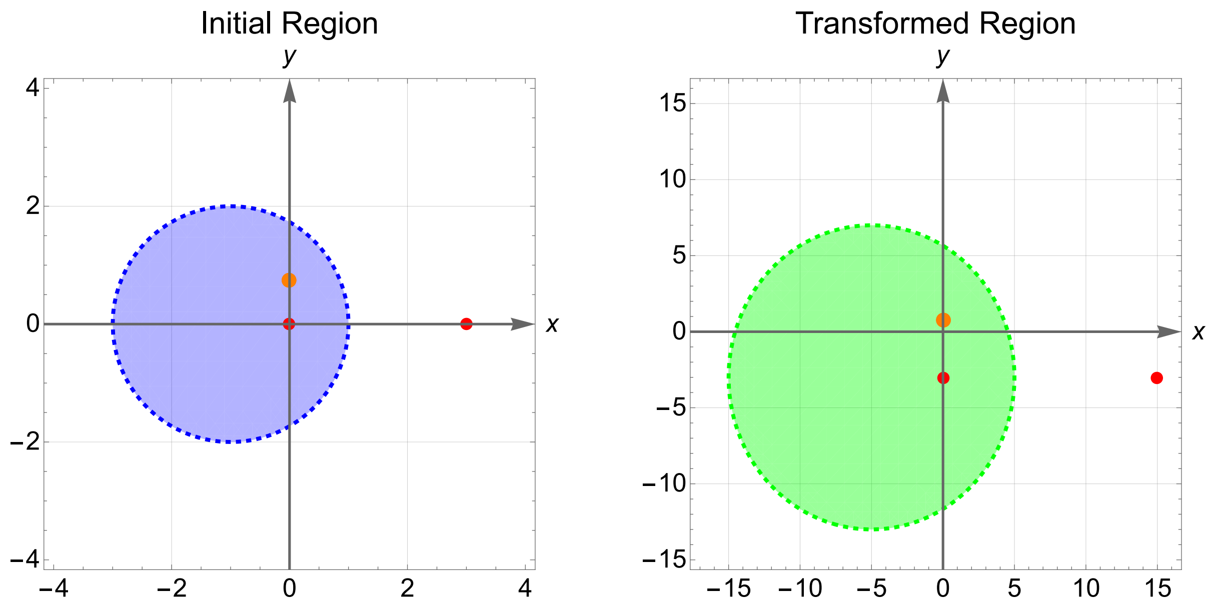

Рис. 3: Відображення $\omega(z) = 5z - 3i$ на область $|z+1| < 2$.

нати центра: $\omega(-1) = -5 - 3i$. Отже, $z = -5 - 3i$ є новим центром. Також, множення на 5 збільшує радіус вдвічі (в цьому можна впевнитись, наприклад, знайшовши $\omega(1) = 5 - 3i$ для точки $z = 1$, що належить $\partial\mathcal{D}$, і помітити, що радіус дорівнює $|\omega(1) - \omega(-1)| = 10$). Також, орієнтація області не змінюється. Отже, образ:

$$\omega(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : |z + 5 + 3i| < 10\} \tag{1.1}$$

Нерухомі точки. Як було показано, єдина нерухома точка – $z = \frac{3i}{4}$.

Симетричні точки. Візьмемо $z = 0$, симетрична ній відносно $\partial\mathcal{D}$ є така точка z^*, що $(z - z_0)(z^* - z_0) = R^2$ (оскільки ми на дійсній вісі), де $z_0 = -1, R = 2$. Отже, підставляючи, маємо $z^* + 1 = 4$, тому $z^* = 3$.

Перетворення ω залишить ці точки симетричними, тому знаходимо $\omega(0) = -3i, \omega(3) = 15 - 3i$ – дві симетричні точки відносно $\partial\omega(\mathcal{D})$.

Результат зображено на Рисунку 3.

Відображення $\omega(z) = \frac{2}{z-1}$.

Образ. Як вже було оговорено, $\omega(\mathcal{D})$ має бути або іншим колом, або прямою. Оскільки особлива точка $z = 1$ належить $\partial\mathcal{D}$, то образом має бути пряма. Для того, щоб визначити яка сама пряма, достатньо лише визначити дві точки. Для цього візьмемо якісь дві точки на границі $\partial\mathcal{D}$ і підставимо у наше перетворення ω:

$$\omega(-1 + 2i) = \frac{1}{-1 + i} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad \omega(-3) = -\frac{1}{2} \tag{1.2}$$

Отже, маємо пряму $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$. Щоб визначити яка саме частина, просто

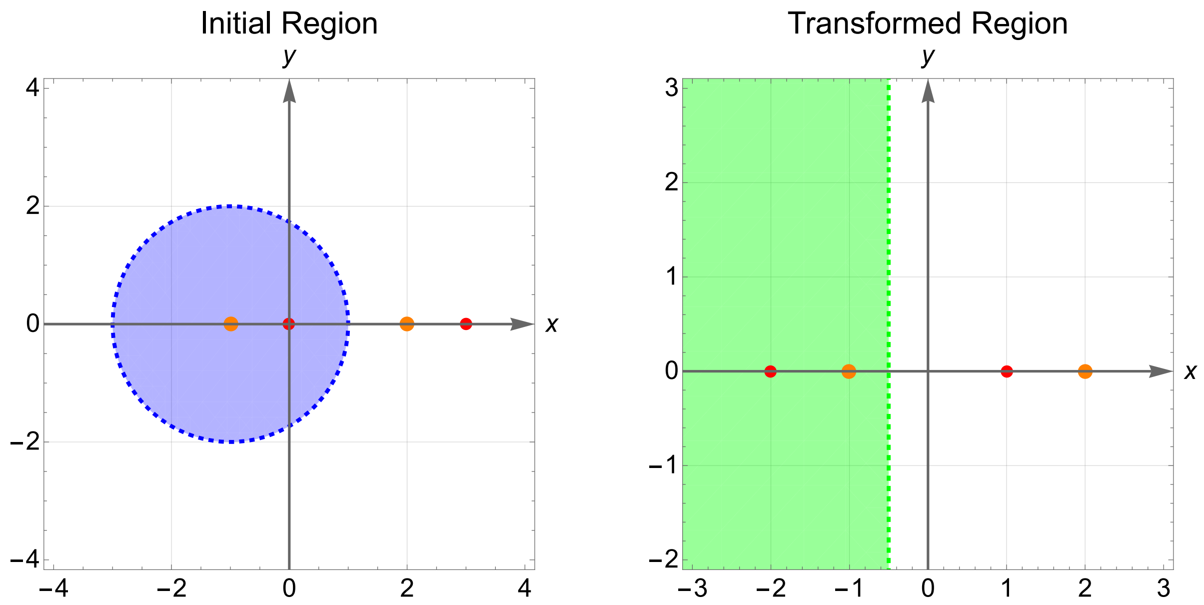

Рис. 4: Відображення $\omega(z) = \frac{2}{z-1}$ на область $|z+1| < 2$.

підставимо якусь точку з області $\mathcal{D}$. Наприклад, $\omega(0) = -2$ лежить ліворуч від $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, отже відповіддю буде $\omega(\mathcal{D}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -\frac{1}{2}\}$.

Нерухомі точки. Маємо дві нерухомі точки: $z_1 = 2, z_2 = -1$.

Симетричні точки. ω переводить симетричні точки у симетричні, тому візьмемо, наприклад, $z_1 = 0$ та $z_2 = 3$ – ми їх брали у попередньому прикладі. Вони переводяться у $\omega(z_1) = -2$ та $\omega(z_2) = 1$ – вони є дійсно симетричними $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$, оскільки відстань обох до цієї прямої дорівнює $\frac{3}{2}$.

Результат зображено на Рисунку 4.