Домашня робота #3 з курсу "Комплексний аналіз" (частина друга)

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

5 грудня 2023 р.

Варіант 5

Завдання.

Умова. Знайти всі особливі точки та класифікувати їх

1. $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-12)}$;
2. $f(z) = \frac{\sin 3z}{(z+1)^3}$;
3. $f(z) = \frac{z+\frac{5}{2}}{\cos \pi z}$.

Розв'язок.

Пункт 1. Тут $z = -3, z = 12$ – полюси першого порядку. Для цього можемо скористатися критерієм полюса: $f(z)$ має полюс порядку m у точці z_0 тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{f(z)}$ має корінь z_0 кратності m. Оскільки $\frac{1}{f(z)} = (z+3)(z-12)$, то маємо два полюси першого порядку $z = -3, z = 12$.

Також $z = \infty$ є усувною, оскільки $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Пункт 2. Нуль знаменника $z = -1$ кратності 3, а нулі чисельника $3z_k = \pi k \to z_k = \frac{\pi k}{3}$ для $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, $z = -1$ є полюсом третього порядку, оскільки є коренем кратності 3 виразу $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z+1)^3}{\sin 3z}$. При цьому корені чисельника і знаменника не збігаються, оскільки рівняння $\frac{\pi k}{3} = -1$ немає розв'язків для $k \in \mathbb{Z}$.

Точка $z = \infty$ є усувною, оскільки $\lim_{z\to\infty} \frac{\sin 3z}{(z+1)^3} = 0$. Дійсно,

$$\left|\frac{\sin 3z}{(z+1)^3}\right| < \frac{1}{(z+1)^3} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

Пункт 3. Нуль чисельника $z = -\frac{5}{2}$, а у знаменника $\cos \pi z_k = 0 \implies \pi z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, тобто $z_k = \frac{1}{2} + k$.

Бачимо, що при $k = -3$, корені чисельника та знаменника збігаються. Тому проаналізуємо границю:

$$\lim_{z\to-\frac{5}{2}} \frac{z+\frac{5}{2}}{\cos \pi z} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\pi\left(w-\frac{5}{2}\right)\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\pi w - \frac{5\pi}{2}\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\sin \pi w} = \frac{1}{\pi}$$

Отже, точка $z = -\frac{5}{2}$ є усувною. Всі точки $z_k = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3\}$ є полюсами першого порядку.

$z = +\infty$ є істотною особливістю, оскільки $\lim_{z\to\infty} f(z)$ не визначено.

Ітогові відповіді на наступній сторінці

Відповідь.

Пункт 1.

1. $z = -3, z = 12$ – полюси (першого порядку);
2. $z = \infty$ – усувна особливість.

Пункт 2.

1. $z = -1$ – полюс (третього порядку);
2. $z = \infty$ – усувна особливість.

Пункт 3.

1. $z = -\frac{5}{2}$ – усувна особливість;
2. $z_k = \frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3\}$ – полюси (першого порядку);
3. $z = \infty$ – істотна особливість.