Контрольна робота #1 (30/30)

Контрольна робота з предмету “Методи оптимізації”

Студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Дмитра

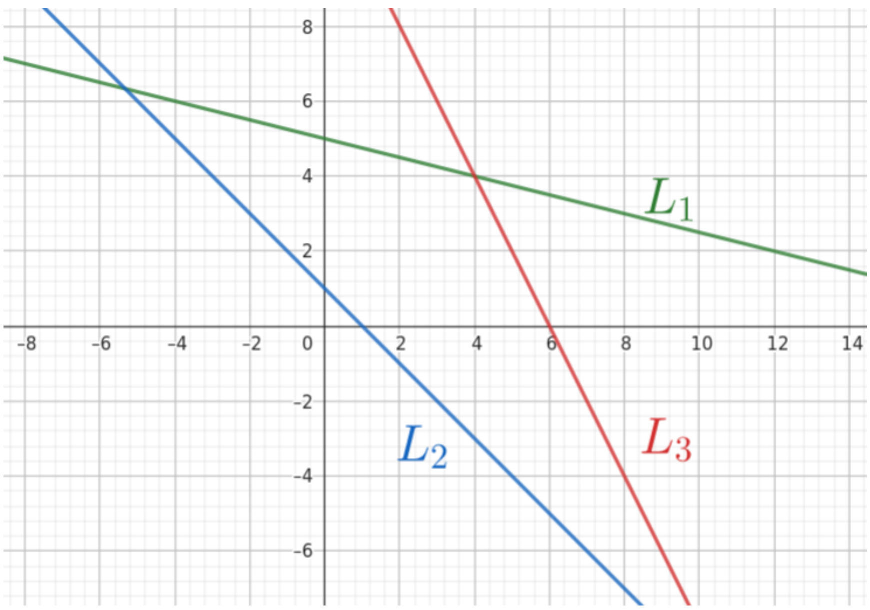
Завдання 1.

Розв’язати графічно ЗЛП ($x_1, x_2 \geq 0$):

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

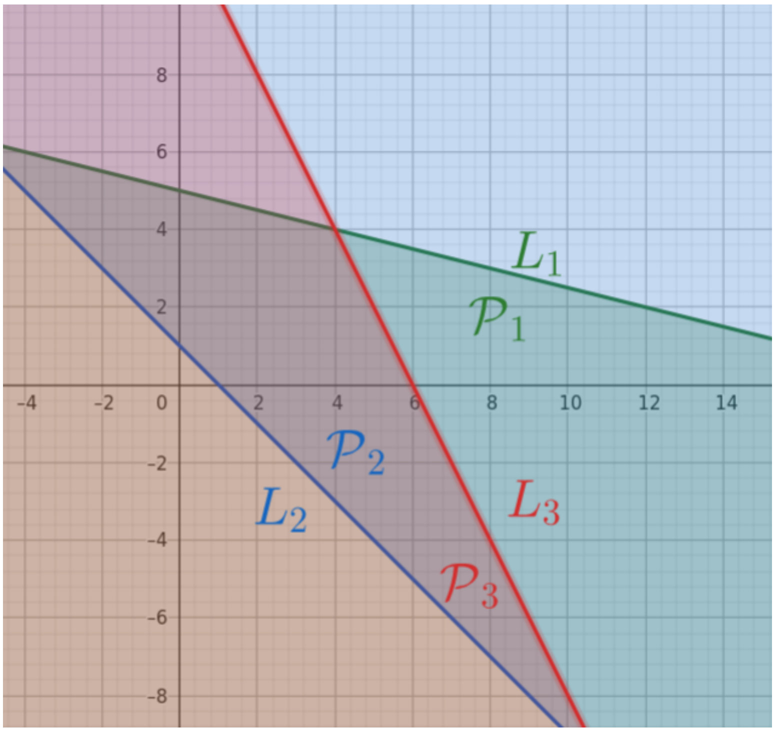
Розв’язок. Спочатку намалюємо 3 прямі:

$$L_1 : x_1 + 4x_2 = 20,\ L_2 : x_1 + x_2 = 1,\ L_3 : 2x_1 + x_2 = 12$$



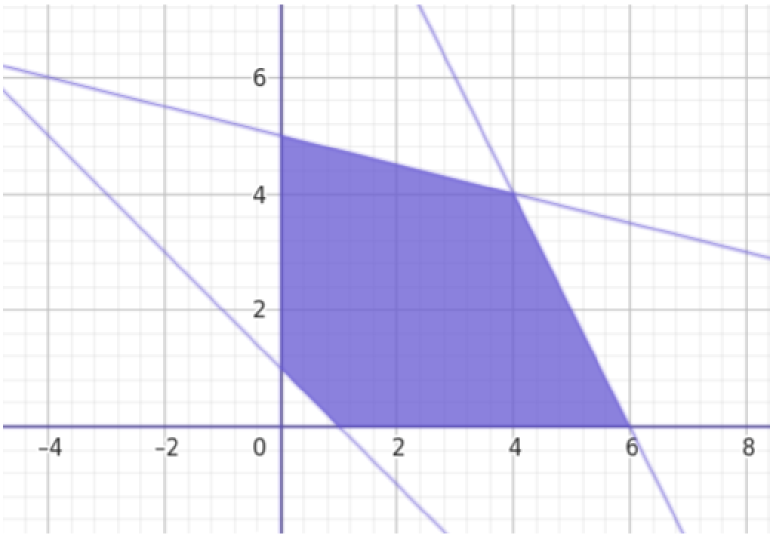
Після цього оберемо напівплощини $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5$ так, що перші три відповідають знаку нерівності, а $\mathcal{P}_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\},\ \mathcal{P}_5 = \{(x_1, x_2) \mid$

$x_2 \geq 0\}$ і беремо перетин $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4 \cap \mathcal{P}_5$:



Перші 3 напівплощини без урахування додатності обох координат

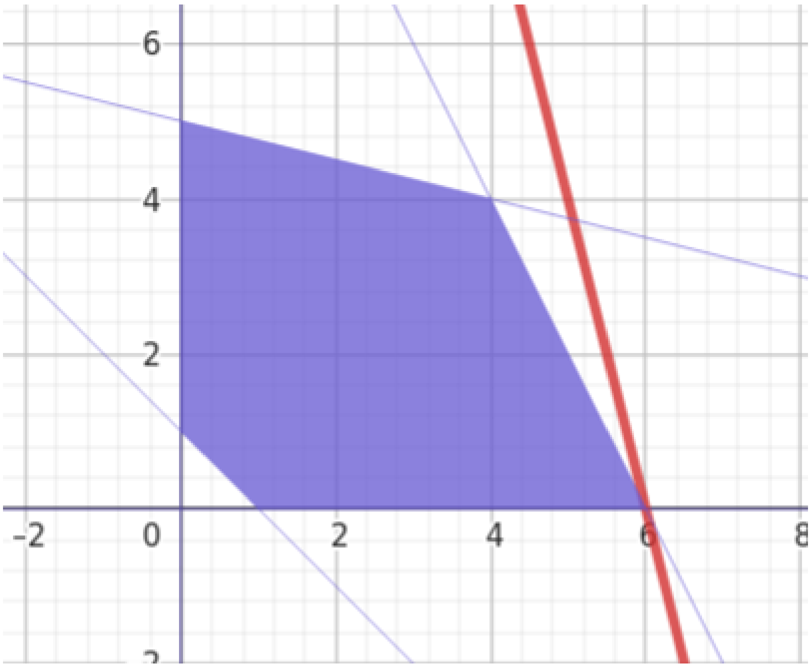
Перетин має вид:



Нам потрібно максимізувати $\mathcal{C}(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$. Для цього розглянемо множину прямих:

$$4x_1 + x_2 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

І оберемо таку, у якій λ є максимальним та ця пряма буде перетинати $\mathcal{P}$ хоча б в одній точці. Якщо порухати пряму, то можна побачити, що максимальний λ буде при такій прямій, що буде проходити через точку перетину L_3 з віссю Ox, тобто маємо $(6, 0)$:



Відповідь: Розв'язком є точка $(6, 0)$ зі значення цільової функції $\mathcal{C}(6, 0) = 24$.

Завдання 2.

Розв'язати симплекс-методом ЗЛП ($x_1, x_2 \geq 0$):

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \end{cases}, \ x_i \geq 0, \ i = \overline{1, 4}$$

Запишемо x_3, x_4 через x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 20 - 5x_1 - x_2 \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Обидва вільних члена є додатніми, а отже маємо розв'язок $(0, 0, 20, 4)$. Повернімося до цільової функції. Маємо:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 = 0 - (-x_1 - 5x_2)$$

З додатку $-x_1 - 5x_2$ знаходимо той, у якого коефіцієнт мінімальний, тобто -5, що відповідає x_2. Згідно виразу для x_3, x_4, ділимо $20/1$ та $-4/2$ та обираємо мінімальний додатній з них, тобто 20, що відповідає x_3. Це означає, що ми змінюємо x_2 та x_3:

$$\begin{cases} x_2 = 20 - 5x_1 - x_3 \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Підставляємо у цільову функцію:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 + 5(20 - 5x_1 - x_3) = 100 - (24x_1 + 5x_3)$$

Оскільки $24x_1 + 5x_3 \geq 0$, то $\mathcal{C}_{\max} = 100$.

Відповідь: $\mathcal{C}_{\max} = 100$.

Завдання 3.

Сформулювати та розв'язати симплекс-методом двоїсту задачу до задачі 1.

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

Розв'язок. Сформулюємо двоїсту задачу. Маємо тепер три змінні y_1, y_2, y_3 і оскільки стовпчик коефіцієнтів $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$, то цільова функція має вид

$$\mathcal{C}(y_1, y_2, y_3) = 20y_1 + y_2 + 12y_3 \to \min$$

Тепер запишемо матрицю коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Тому маємо наступні нерівності (знаки залишаємо як у умові $x_1, x_2 \geq 0$):

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

Нарешті для змінних маємо умови $y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0$.

Якщо поєднаємо, то маємо двоїсту задачу

$$\mathcal{C}(y_1, y_2, y_3) = 20y_1 + y_2 + 12y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1, y_3 \geq 0, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

Нам дуже незручно, що $y_2 \leq 0$, тому зробимо позначення $z_1 = y_1, z_2 = -y_2, z_3 = y_3$, в такому разі наша задача зведеться до

$$\mathcal{C}(y_1, y_2, y_3) = 20z_1 - z_2 + 12z_3 \to \min$$
$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 \geq 4 \\ 4z_1 - z_2 + z_3 \geq 1 \\ z_1, z_2, z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Запишемо нерівності у вигляді рівностей, додаючи ще 2 змінні:

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 - z_4 = 4 \\ 4z_1 - z_2 + z_3 - z_5 = 1 \\ z_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Виразимо z_4, z_5 через z_1, z_2, z_3:

$$\begin{cases} z_4 = -4 + z_1 - z_2 + 2z_3 \\ z_5 = -1 + 4z_1 - z_2 + z_3 \end{cases}$$

Бачимо, що з вільних членів мінімальний -4, тому змінюємо z_1, z_4:

$$\begin{cases} z_1 &= 4 + z_2 - 2z_3 + z_4 \\ z_5 &= -1 + 4(4 + z_2 - 2z_3 + z_4) - z_2 + z_3 \end{cases}$$

Якщо спростити, то маємо

$$\begin{cases} z_1 &= 4 + z_2 - 2z_3 + z_4 \\ z_5 &= 15 + 3z_2 - 7z_3 + 4z_4 \end{cases}$$

Тобто маємо розв'язок $(4, 0, 0, 0, 15)$. Тепер підставляємо це у цільову функцію:

$$\mathcal{C} = 20z_1 - z_2 + 12z_3 = 80 + (19z_2 - 28z_3 + 20z_4)$$

Маємо від'ємний коефіцієнт перед z_3, отже ділимо $4/2, 15/7$ і знаходимо з них мінімальний. Бачимо, що мінімальним є $4/2 = 2$, тому змінюємо z_1, z_3:

$$\begin{cases} z_3 &= 2 - \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_4 \\ z_5 &= 15 + 3z_2 - 7z_3 + 4z_4 \end{cases}$$

Тепер отримали:

$$\mathcal{C} = 24 + (14z_1 + 5z_2 + 6z_4)$$

Оскільки $14z_1 + 5z_2 + 6z_4 \geq 0$, то $\mathcal{C}_{\min} = 24$.

Завдання 4.

Сформулювати двоїсту задачу

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 7 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 \geq 9 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \leq 0,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Спочатку складемо функцію мети. Бачимо стовпець вільних членів $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$, а також мінімум потрібно змінити на максимум, а отже наша цільова функція буде мати вид

$$\mathcal{C}'(y_1, y_2, y_3, y_4) = 8y_1 + 7y_2 + y_3 + 9y_4 \to \max$$

Далі складемо матрицю коефіцієнтів початкової задачі:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Транспонована матриця має вид

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

А отже наша система рівнянь для y_1, y_2, y_3, y_4 (поки знаки порівняння або рівності помітимо знаками питання):

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \ ? \ 1 \\ -2y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 \ ? \ -2 \\ y_1 - y_2 + y_3 \ ? \ 3 \\ 2y_1 - y_3 - 2y_4 \ ? \ 1 \\ y_1 + 2y_4 \ ? \ -2 \end{cases}$$

Тепер випишемо обмеження на y_i. Для цього візьмемо знаки нерівностей в "великих" умовах з початкового завдання і "інвертуємо їх". Тобто, $y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \in \mathbb{R}, y_4 \leq 0$. Нарешті знак для наших нерівностей візьмемо з умов на x_i, тобто

$$
\begin{cases}
2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \le 1 \\
-2y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 \le -2 \\
y_1 - y_2 + y_3 = 3 \\
2y_1 - y_3 - 2y_4 = 1 \\
y_1 + 2y_4 \ge -2
\end{cases}
$$

Якщо все поєднати, то отримаємо **відповідь:**

$$
\mathcal{C}'(y_1, y_2, y_3, y_4) = 8y_1 + 7y_2 + y_3 + 9y_4 \to \max
$$

$$
\begin{cases}
2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \le 1 \\
-2y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 \le -2 \\
y_1 - y_2 + y_3 = 3 \\
2y_1 - y_3 - 2y_4 = 1 \\
y_1 + 2y_4 \ge -2 \\
y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \in \mathbb{R}, y_4 \le 0
\end{cases}
$$