Домашня робота з математичного аналізу #7

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

7 березня 2023 р.

1 Завдання 1.

Умова. Знайти зовнішні виміри котла циліндричної форми із заданою товщиною стінок d та об'ємом V так, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу.

Розв'язок. Отже, нехай зовнішній радіус R, тоді внутрішній радіус $R - 2d$. Також як параметр вводимо висоту котла h.

Об'єм котла це об'єм внутрішньої його частини, тобто $V = \pi(R-2d)^2h$.

Знайдемо скільки матеріалу витрачається на котел. Об'єм бокових стінок дорівнює $\pi R^2h-\pi(R-2d)^2h = 4\pi hd(R-d)$. Також якщо врахувати об'єм дна, то це буде додатково $\pi R^2 d$. Отже, загальний об'єм, що ми маємо мінімізувати:

$$U(R, h) = \pi d(4h(R - d) + R^2) \to \min$$

При умові:

$$\varphi = \pi(R - 2d)^2h - V = 0$$

Отже, будуємо Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = U + \lambda\varphi$$

Візьмемо похідні:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R} = 2\pi\left(Rd + 2hd(1+\lambda) - hR\lambda\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} = \pi\left(4d(R-d) - \lambda(R-2d)^2\right)$$

Отже, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} Rd + 2hd(1+\lambda) - hR\lambda = 0 \\ 4d(R-d) - \lambda(R-2d)^2 = 0 \\ \pi(R-2d)^2 h = V \end{cases}$$

Далі вже виписувати усі розрахунки не буду, лише наведу розв'язки, які вийшли. Перший:

$$\lambda = -1, R = 0, h = \frac{V}{4\pi d^2}$$

Цей розв'язок очевидно не підходить. Наступний:

$$h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}},\ R = 2d + \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}},\ \lambda = \frac{2d\sqrt[3]{2\pi}(d\sqrt[3]{\pi} + \sqrt[3]{2V})}{\sqrt[3]{V^2}}$$

Ця точка фізично має сенс, перевіримо чи є це екстремумом. Маємо:

$$d^2\mathcal{L} = 2\pi(d-\lambda h)(dR)^2 + 2\pi(2d(1+\lambda) - \lambda R)(dR)(dh)$$

Якщо підставити наші вирази, то маємо:

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial R^2} = -2\pi d\left(1 + \frac{\sqrt[3]{4\pi}d}{\sqrt[3]{V}}\right)$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial R\partial h} = -4\pi d\left(1 + \frac{\sqrt[3]{4\pi}d}{\sqrt[3]{V}}\right)$$

Якщо позначити через $\ell = -2\pi d \left(1 + \frac{\sqrt[3]{4\pi}d}{\sqrt[3]{V}}\right) < 0$, то маємо квадратичну форму:

$$d^2\mathcal{L} = \ell(dR)^2 + 2\ell(dR)(dh)$$

Також маємо обмеження на диференціал:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R}dR + \frac{\partial\varphi}{\partial h}dh = 0 \to \pi(R-2d)^2dh + 2\pi h(R-2d)dR = 0$$

Скорочуємо:

$$(R-2d)dh + 2hdR = 0 \to dh = -\frac{2h}{R-2d}dR$$

Отже:

$$d^2\mathcal{L} = \ell(dR)^2\left(1 - \frac{4h}{R-2d}\right) = \ell(dR)^2\left(1 - \frac{4\cdot 2^{-2/3}}{2^{1/3}}\right)$$

Остаточно:

$$d^2\mathcal{L} = -\ell(dR)^2 > 0$$

Отже форма додатньо визначена, тому ми маємо умовиний мінімум, що і було потрібно.

Відповідь. Зовнішній радіус має бути $2d + \sqrt[3]{2V/\pi}$, висота $\sqrt[3]{V/4\pi}$.