Домашня Робота з Математичної Статистики #4

Захаров Дмитро

29 вересня, 2024

Зміст

1 Вправи з файлу

1.1 Вправа 1. Біноміальний закон розподілу

Умова Задачі 1.1. Знайти методом моментів і методом максимальної правдоподібності оцінку параметру θ біноміального закону розподілу, якщо N — відоме:

$$p[X = k|\theta] = \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}, \quad k \in [N]$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. У нас один параметр (θ), тому достатньо взяти один момент:

$$\mathbb{E}[X] = \overline{x}$$

Як було доведено на курсі дискретної теорії ймовірності, $\mathbb{E}[X] = N\theta$, тому

$$\hat{\theta}_{\text{MM}} = \frac{\overline{x}}{N}$$

Тепер скористаємося методом максимальної правдоподібності. Маємо наступну функцію правдоподібності:

$$p(\mathcal{D}|\theta) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j|\theta) = \prod_{j=1}^{n} \binom{N}{x_j} \theta^{x_j}(1-\theta)^{N-x_j} \propto \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j}(1-\theta)^{N-x_j}$$

Отже, наша оцінка має вигляд:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\text{MLE}} &= \operatorname*{argmax}_{\theta \in [0,1]} \log p(\mathcal{D}|\theta) = \operatorname*{argmax}_{\theta \in [0,1]} \sum_{j=1}^{n} \log\left(\theta^{x_j}(1-\theta)^{N-x_j}\right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\theta \in [0,1]} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \log\theta + \sum_{j=1}^{n} (N - x_j)\log(1-\theta) \right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\theta \in [0,1]} (\overline{x}\log\theta + (N-\overline{x})\log(1-\theta))
\end{aligned}$$

Тепер розглянемо функцію $\phi(x|\alpha,\beta) = \alpha\log x + \beta\log(1-x)$ для $\alpha, \beta > 0$, і дослідимо його на екстремуми на відрізку $x \in [0,1]$. Розглянемо вираз для похідної:

$$\phi'(x) = \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{1-x} = \frac{\alpha - (\alpha+\beta)x}{x(1-x)}$$

Маємо, що нуль похідної знаходиться у $x_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Для $\alpha, \beta > 0$, $x_0 \in (0,1)$, тому $\phi(x)$ має екстремум на відрізку $[0,1]$. Розглянемо другу похідну:

$$\phi''(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{(1-x)^2} < 0,$$

отже перед нами дійсно максимум. Отже, маємо:

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \operatorname*{argmax}_{\theta \in [0,1]} \phi(\theta|\overline{x}, N-\overline{x}) = \frac{\overline{x}}{N} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \hat{\theta}_{\text{MM}} = \frac{\overline{x}}{N}}$$

1.2 Вправа 2. Геометричний розподіл

Умова Задачі 1.2. Знайти методом моментів і методом максимальної правдоподібності оцінку параметру θ геометричного закону розподілу:

$$p[X = k|\theta] = (1-\theta)\theta^k, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. У нас один параметр (θ), тому достатньо взяти один момент:

$$\mathbb{E}[X] = \overline{x}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\theta)\theta^k = \theta(1-\theta)\sum_{k=0}^{\infty} k\theta^{k-1} = \theta(1-\theta)\frac{d}{d\theta}\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k = \theta(1-\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{\theta}{1-\theta}$$

Отже, маємо:

$$\frac{\hat{\theta}_{\text{MM}}}{1-\hat{\theta}_{\text{MM}}} = \overline{x} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_{\text{MM}} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}}$$

Тепер скористаємося методом максимальної правдоподібності. Маємо наступну функцію правдоподібності:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}|\theta) &= \prod_{j=1}^{n} p(x_j|\theta) = \prod_{j=1}^{n}(1-\theta)\theta^{x_j} = (1-\theta)^n \prod_{j=1}^{n}\theta^{x_j} \\ &= (1-\theta)^n\theta^{\sum_{j=1}^{n} x_j} = (1-\theta)^n\theta^{n\overline{x}} = ((1-\theta)\theta^{\overline{x}})^n \end{aligned}$$

Отже,

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \operatorname*{argmax}_{\theta\in[0,1]} \log p(\mathcal{D}|\theta) = \operatorname*{argmax}_{\theta\in[0,1]} (\log(1-\theta) + \overline{x}\log\theta) = \operatorname*{argmax}_{\theta\in[0,1]} \phi(\theta|\overline{x}, 1) = \boxed{\frac{\overline{x}}{1+\overline{x}}}$$

Означення $\phi(x|\alpha, \beta)$ дивись в попередній вправі. Отже, маємо, що $\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \hat{\theta}_{\text{MM}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}+1}$.

1.3 Вправа 3. Розподіл Кептейна

Умова Задачі 1.3. Нехай $\omega(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметрів μ, σ^2 розподілу Кептейна, щільність якого має вигляд: розподілу Кептейна:

$$p(x|\mu, \sigma^2) = \frac{\omega'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності:

$$\begin{aligned}
p(\mathcal{D}|\mu, \sigma^2) &= \prod_{j=1}^{n} p(x_j|\mu, \sigma^2) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega'(x_j)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega(x_j) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \left(\prod_{j=1}^{n} \omega'(x_j)\right) \left(\prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{(\omega(x_j) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&\propto \frac{1}{\sigma^n} \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(\omega(x_j) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Складемо логарифм функції правдоподібності:

$$\log p(\mathcal{D}|\mu, \sigma^2) \propto -n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (\omega(x_j) - \mu)^2$$

Розглянемо стаціонарні точки (як функції від (μ, σ)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} \log p(\mathcal{D}|\mu, \sigma^2) &\propto \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (\omega(x_j) - \mu) \\
\frac{\partial}{\partial \sigma} \log p(\mathcal{D}|\mu, \sigma^2) &\propto -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^{n} (\omega(x_j) - \mu)^2
\end{aligned}$$

Оскільки $\sigma \neq 0$, то з першого рівняння маємо, що $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \omega(x_j)$. З другого:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\omega(x_j) - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \omega^2(x_j) - \hat{\mu}^2$$

Аналіз на екстремум такий самий, як у випадку нормального розподілу. Завдань багато, тому виписувати його детально не буду.

1.4 Вправа 4. Розподіл Релея

Умова Задачі 1.4. Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметра θ розподілу Релея, щільність якого має вигляд:

$$p(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right), \quad x \in (0, +\infty)$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. Складемо функцію правдоподібності:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}|\theta) &= \prod_{j=1}^{n} p(x_j|\theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x_j^2}{2\theta^2}\right) \\ &= \frac{1}{\theta^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \prod_{j=1}^{n} x_j \\ &\propto \frac{1}{\theta^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \end{aligned}$$

Складемо логарифм функції правдоподібності:

$$\log p(\mathcal{D}|\theta) \propto -2n \log\theta - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Розглянемо стаціонарну точку:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log p(\mathcal{D}|\theta) \propto -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

Поглянемо на другу похідну, щоб переконатися, що це дійсно максимум:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log p(\mathcal{D}|\theta) \propto \frac{2n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Помітимо, що якщо підставити $\theta = \hat{\theta}$, то $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 2n\hat{\theta}^2$ і тому

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log p(\mathcal{D}|\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{2n}{\hat{\theta}^2} - \frac{3 \cdot 2n\hat{\theta}^2}{\hat{\theta}^4} = -\frac{4n}{\hat{\theta}^2} < 0$$

1.5 Вправа 5. Показниковий розподіл

Умова Задачі 1.5. Знайти методом моментів та максимальної правдоподібності оцінку параметра λ показникового розподілу, щільність якого має вигляд:

$$p(x|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in [0, +\infty)$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. У нас один параметр (λ), тому достатньо взяти один момент:

$$\mathbb{E}[X] = \overline{x}$$

Як відомо з курсу теорії ймовірностей, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, тому

$$\hat{\lambda}_{\text{MM}} = \frac{1}{\overline{x}}$$

Тепер скористаємося методом максимальної правдоподібності. Маємо наступну функцію правдоподібності:

$$p(\mathcal{D}|\lambda) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j|\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_j) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$$

Візьмемо логарифм:

$$\log p(\mathcal{D}|\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j = n \log \lambda - n\overline{x}\lambda \propto \log \lambda - \overline{x}\lambda$$

Розглянемо стаціонарну точку:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log p(\mathcal{D}|\lambda) \propto \frac{1}{\lambda} - \overline{x} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}}$$

Переконаємось, що це дійсно максимум:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log p(\mathcal{D}|\lambda) \propto -\frac{1}{\lambda^2} < 0$$

1.6 Вправа 6. Рівномірний розподіл

Умова Задачі 1.6. Знайти методом моментів та максимальної правдоподібності оцінку параметрів θ, h рівномірного розподілу, щільність якого має вигляд:

$$p(x|\theta, h) = \frac{1}{2h} \cdot \mathbb{1}[x \in [\theta - h, \theta + h]], \quad x \in \mathbb{R}$$

Дана вибірка $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілу X.

Розв'язання. Цю задачу ми вже розв'язали для рівномірного розподілу:

$$\widetilde{p}(x|a, b) = \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{1}[x \in [a, b]], \quad x \in \mathbb{R}$$

Легко бачити, що

$$p(x|\theta, h) = \widetilde{p}(x|\theta - h, \theta + h)$$

Для методу максимальної правдоподібності для $\widetilde{p}$, була отримана наступна оцінка:

$$\hat{a} = \min_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i, \quad \hat{b} = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i$$

Тому, оцінка для θ та h буде:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{\text{MLE}} - \hat{h}_{\text{MLE}} = \min_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i, \\ \hat{\theta}_{\text{MLE}} + \hat{h}_{\text{MLE}} = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i \end{cases}$$

Отже:

$$\boxed{\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \frac{\max_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i + \min_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i}{2}, \quad \hat{h}_{\text{MLE}} = \frac{\max_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i - \min_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i}{2}}$$

Для методу моментів була отримана наступна оцінка:

$$\hat{a} = \overline{x} - \sqrt{3}\overline{\sigma}_X, \quad \hat{b} = \overline{x} + \sqrt{3}\overline{\sigma}_X$$

Тому, оцінка для θ та h буде:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{\text{MM}} - \hat{h}_{\text{MM}} = \overline{x} - \sqrt{3}\overline{\sigma}_X, \\ \hat{\theta}_{\text{MM}} + \hat{h}_{\text{MM}} = \overline{x} + \sqrt{3}\overline{\sigma}_X \end{cases}$$

Звідси остаточно:

$$\boxed{\hat{\theta}_{\text{MM}} = \overline{x}, \quad \hat{h}_{\text{MM}} = \sqrt{3}\overline{\sigma}_X}$$