7

Homework #7

c. 73 № 52

Знайти

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}}$$

Розв'язок. Покладемо $\xi=x-1$, в такому разі $d\xi=dx$ і

$$x^2 - 2x - 1 = (\xi + 1)^2 - 2(\xi + 1) - 1 = \xi^2 - 2$$

Тому

$$I = \int \frac{d\xi}{\xi^3 \sqrt{\xi^2 - 2}}$$

Використаємо заміну $\xi=\sqrt{2}\sec heta o d\xi=\sec heta an heta d heta$, тому

$$I = \int rac{\sec heta an heta d heta}{2\sqrt{2}\sec^3 heta \cdot \sqrt{2} an heta} = rac{1}{4}\int rac{d heta}{\sec^2 heta} = rac{1}{4}\int \cos^2 heta d heta$$

Використаємо те, що $\cos^2 heta = rac{1+\cos 2 heta}{2}$, тому

$$I=rac{1}{8}\int (1+\cos 2 heta)d heta=rac{ heta}{8}+rac{1}{16}\sin 2 heta+C$$

Далі переведемо це у вираз від ξ . Оскільки $\xi=\sqrt{2}/\cos\theta\to\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\xi}$, тому $\theta=\arccos\frac{\sqrt{2}}{\xi}$. Знайдемо $\sin2\theta$:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\xi}\sqrt{1 - \frac{2}{\xi^2}}$$

В такому разі:

$$I = \frac{1}{8}\arccos\frac{\sqrt{2}}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{8\xi}\sqrt{1 - \frac{2}{\xi^2}} + C$$

Нарешті поклавши $\xi=x-1$, маємо

$$I = rac{1}{8} rccos rac{\sqrt{2}}{x-1} + rac{\sqrt{2}}{8(x-1)} \sqrt{1 - rac{2}{(x-1)^2}} + C$$

Або

$$I = rac{1}{8} \arccos rac{\sqrt{2}}{x-1} + rac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 1}}{8(x-1)^2} + C$$

c. 73 Nº 61

Знайти

$$I = \int rac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

Розв'язок. Розіб'ємо інтеграл на 2 частини:

$$I = \int rac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx = \int rac{dx}{(x^2+1)^{1/2}} + \int rac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

Перший інтеграл табличний:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + C$$

Для другого інтегралу застосуємо заміну $x= an heta o dx=d heta/\cos^2 heta$, тоді

$$\int rac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int rac{d heta}{\cos^2 heta \cdot rac{1}{\cos^3 heta}} = \int \cos heta d heta = \sin heta + C$$

Оскільки $x=rac{\sin heta}{\sqrt{1-\sin^2 heta}}$, маємо $\sin^2 heta=x^2-x^2\sin^2 heta o\sin heta=rac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, в такому разі

$$I=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+rac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

c. 73 Nº 64

Знайти

$$I=\intrac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$$

Розв'язок. Домножимо обидві частини на $(1+\sqrt{1-x^2})^2$ і отримаємо

$$I = \int rac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^4} dx = \int rac{1+1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$$

Розділимо інтеграл на декілька частин:

$$I=2\intrac{dx}{x^4}-\intrac{dx}{x^2}+2\intrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$$

Перші 2 інтеграли очевидні: $\int x^{-4} dx = rac{x^{-3}}{-3} + C, \int x^{-2} dx = rac{x^{-1}}{-1} + C.$

Для третього інтеграла J зробимо наступне перетворення:

$$J=\intrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx=\intrac{\sqrt{rac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx$$

А далі зробимо заміну $\xi^2=rac{1}{x^2}-1 o 2\xi d\xi=-rac{2dx}{x^3} o rac{dx}{x^3}=-\xi d\xi$, тобто

$$J = \int \xi \cdot (-\xi d\xi) = - \int \xi^2 d\xi = -rac{\xi^3}{3} + C = -rac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

Таким чином:

$$I = -rac{2}{3x^3} + rac{1}{x} - rac{2(1-x^2)^{3/2}}{3x^3} + C$$

c. 73 Nº 108

Знайти

$$I = \int \frac{2 + \cos 4x}{5 + 4\cos 4x} dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $\theta=4x$, тоді

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{2 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$$

Далі скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою. Нехай $t= anrac{ heta}{2}$, в такому разі $\cos heta=rac{1-t^2}{1+t^2}$ та $dx=rac{2dt}{1+t^2}$. В такому разі

$$I=rac{1}{4}\intrac{2+rac{1-t^2}{1+t^2}}{5+4rac{1-t^2}{1+t^2}}\cdotrac{2dt}{1+t^2}=rac{1}{2}\intrac{2+2t^2+1-t^2}{(5+5t^2+4-4t^2)(1+t^2)}dt=rac{1}{2}\intrac{3+t^2}{(9+t^2)(1-t^2)}dt$$

Розкладемо їх у найпростіші:

$$I = rac{1}{2} \left(rac{3}{4} \int rac{dt}{t^2 + 9} + rac{1}{4} \int rac{dt}{t^2 + 1}
ight) = rac{1}{8} \arctan rac{t}{3} + rac{1}{8} \arctan t + C$$

Оскільки $t = \tan 2x$, то

$$I = rac{rctan(rac{ an 2x}{3}) + 2x}{8} + C$$

Homework #7

c. 73 Nº 136

Знайти

$$I = \int rac{1 + e^{2x}}{(1 + e^x)^2} dx$$

Розв'язок. Нехай $u=e^x o du=e^x dx o du=u dx o dx=du/u$. Тоді

$$I = \int \frac{1+u^2}{(1+u)^2} \frac{du}{u}$$

Розкладуємо це у найпростіші дроби:

$$I = \int rac{du}{u} - 2 \int rac{du}{(1+u)^2} = \ln|u| - 2 \int rac{d(1+u)}{(1+u)^2} + C = \ln|u| + rac{2}{1+u} + C$$

Тому остаточно (тут $\sigma(x)$ — сігмоїд):

$$I = x + 2\sigma(-x) + C$$

c. 73 Nº 176

Знайти

$$I = \int \arctan(1 - \sqrt{x}) dx$$

Розв'язок. Нехай $\zeta=\sqrt{x} o d\zeta=rac{dx}{2\sqrt{x}} o dx=2\zeta d\zeta$, тому

$$I=2\int \arctan(1-\zeta)\zeta d\zeta$$

Далі інтегруємо по частинах. Нехай $v=\arctan(1-\zeta) o dv=-rac{d\zeta}{1+(1-\zeta)^2}$ і $du=\zeta d\zeta$, тоді $u=rac{\zeta^2}{2}$. Отже

$$I=\zeta^2\arctan(1-\zeta)+\intrac{\zeta^2d\zeta}{\zeta^2-2\zeta+2}$$

Правий інтеграл позначимо через J. Розкладемо на прості дроби

$$J=\intrac{2\zeta-2}{\zeta^2-2\zeta+2}d\zeta+\int d\zeta$$

В лівому інтегралі зробимо заміну $\xi=\zeta^2-2\zeta o d\xi=2\zeta-2$, тому

$$J=\intrac{d\xi}{\xi+2}+\int d\zeta=\ln|\xi+2|+\zeta+C=\ln|\zeta^2-2\zeta+2|+\zeta+C$$

Отже, остаточно наш інтеграл (повернувшись до x):

$$I=x\arctan(1-\sqrt{x})+\ln|x-2\sqrt{x}+2|+\sqrt{x}+C$$

Homework #7 5