Домашня робота з математичного моделювання #10

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

7 травня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Скількома способами можна отримати з 4 різних предметів екзаменаційні оцінки 3, 4 або 5 так, щоб набрати точно 17 балів?

Розв'язок. Використовуємо рекурентну формулу:

$$f(m, N) = \sum_{j=1}^{k} f(m-1, N-n_j),$$

де $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 5$, тобто $k = 3$. В такому разі:

$$\begin{aligned} f(4,17) = f(3,14) + f(3,13) + f(3,12) = \\ f(2,11) + f(2,10) + f(2,9) + f(2,10) + \\ f(2,9) + f(2,8) + f(2,9) + f(2,8) + f(2,7) = \\ f(2,11) + 2f(2,10) + 3f(2,9) + 2f(2,8) + f(2,7) \end{aligned}$$

Далі окремо прорахуємо кожен з додатків:

$$f(2,7) = f(1,4) + f(1,3) + f(1,2) = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$f(2,8) = f(1,5) + f(1,4) + f(1,3) = 3$$

$$f(2,9) = f(1,6) + f(1,5) + f(1,4) = 0 + 1 + 1 = 2$$
$$f(2,10) = f(1,7) + f(1,6) + f(1,5) = 1$$
$$f(2,11) = 0$$

Отже:

$$f(4,17) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 = 16$$

Завдання 2.

Умова. Скількома способами можна отримати з 4 різних предметів екзаменаційні оцінки 3, 4 або 5 так, щоб набрати не менш ніж 17 балів?

Розв'язок. Користуємось завданням 1. Максимум можна набрати лише $4 \cdot 5 = 20$ балів, отже відповідь на наше завдання

$$F = f(4,17) + f(4,18) + f(4,19) + f(4,20)$$

Значення $f(4,17)$ ми вже відрахували, воно дорівнює 16. Також легко помітити, що $f(4,20) = 1$, оскільки для цього можна лише набрати чотири рази по 5. Інші 2 значення порахуємо:

$$f(4,19) = f(3,16) + f(3,15) + f(3,14)$$

Легко бачити, що $f(3,16) = 0$, $f(3,15) = 1$, а $f(3,14)$ знайдемо як:

$$f(3,14) = f(2,11) + f(2,10) + f(2,9) = 0 + 1 + 2 = 3$$

Отже, остаточно $f(4,19) = 0 + 1 + 3 = 4$.

Залишилось знайти $f(4,18)$, отже

$$f(4,18) = f(3,15) + f(3,14) + f(3,13)$$

Як ми раніше вказували, $f(3,15) = 1$, а $f(3,14) = 3$. Отже лишилось порахувати $f(3,13)$:

$$f(3,13) = f(2,10) + f(2,9) + f(2,8) = 1 + 2 + 3 = 6$$

Тому остаточно:

$$f(4,18) = 1 + 3 + 6 = 10$$

І відповідь:

$$F = 16 + 10 + 4 + 1 = 31$$

Відповідь. 31.

Завдання 3.

Умова. За пересилку бандеролі потрібно заплатити 18 грн., наклеюючи на неї марки. На пошті є по одному виду марок номіналом в 4, 6 та 10 грн. у необмеженій кількості. Якою кількістю способів можна сплатити пересилку бандеролі, якщо два способи, які відрізняються номіналом або порядком наклеювання марок, враховуються різними (марки наклеюються в один ряд)?

Розв'язок. Застосуємо формулу:

$$f(N) = \sum_{j=1}^{k} f(N - n_j)$$

Отже:

$$\begin{aligned} f(18) = f(14) + f(12) + f(8) = \\ f(10) + f(8) + f(4) + f(8) + f(6) + f(2) + \\ f(4) + f(2) + f(-2) \end{aligned}$$

Бачимо, що $f(2) = f(-2) = 0$, тому

$$f(18) = f(10) + 2f(8) + f(6) + 2f(4) = 4 + 2f(8)$$

Оскільки $f(8) = f(4) + f(2) + f(-2) = 1$, то остаточно

$$f(18) = 6$$

Завдання 4.

Умова. В гаманці лежать монети в $1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50$ у.о. , по одній монеті кожного номіналу. Скількома способами можна сплатити цими монетами 73 у.о. без решти?

Розв'язок. Потрібно просто порахувати $f(1, 2, \ldots, 50; 73)$ згідно формулі

$$f(n_1, \ldots, n_k; N) = f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N - n_k) + f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N)$$

Далі просто розрахунки, тому вони зроблені програмою в *Python*, що прикріплена до цього домашнього завдання. Відповідь 4.

Відповідь. 4

Завдання 5.

Умова. Скількома способами можна розміняти монету номіналом в 10 копійок на монети номіналами в $1, 2, 3, 5$ копійок?

Розв'язок. Потрібно просто порахувати $f(1, 2, 3, 5; 10)$ згідно формулі

$$f(n_1, \ldots, n_k; N) = f(n_1, \ldots, n_k; N - n_k) + f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N)$$

Далі аналогічно просто розрахунки, тому вони зроблені програмою в *Python*. Відповідь 20.

Відповідь. 20.

Завдання 6.

Умова. Дана коваріаційна матриця дохідностей ризикового активу $\boldsymbol{V}$, вектор $\boldsymbol{\mu}$ дохідностей ризикових активів, ефективність безризикового цінного паперу μ_0:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mu_0 = 2$$

1. Скласти портфель Тобіна мінімального ризику заданої ефективності $\overline{\mu} = 3$.
2. Скласти портфель Тобіна максимальної ефективності, ризик якого дорівнює заданому числу $\nu_0 = 3$.
3. Скласти портфель Марковіца мінімального ризику заданої ефективності $\overline{\mu} = 3$.

Розв'язок.

Пункт 1. Маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} \rangle = \overline{\mu} \\ \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, квадратична форма:

$$\langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Отже маємо задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \to \min \end{cases}$$

Функція Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + \lambda(-x_1 - x_2 - 3)$$

Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - \lambda = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 + 2x_3 - \lambda = 0 \\ 4x_3 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

Розв'язком є:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -9/11 \\ -24/11 \\ 12/11 \end{bmatrix},\ \lambda = -\frac{6}{11}$$

Отже $x_0 = \frac{32}{11}$

Пункт 2. Маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} \rangle \to \max \\ \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \nu_0^2 \end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, квадратична форма

$$\langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Отже маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \to \max \\ 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 9 \end{cases}$$

Функція Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda) = -x_1 - x_2 + \lambda(3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 9)$$

Отже система:

$$\begin{cases} -1 + 6\lambda x_1 - 2\lambda x_2 = 0 \\ -1 + 2\lambda x_2 - 2\lambda x_1 + 2\lambda x_3 = 0 \\ 4\lambda x_3 + 2\lambda x_2 = 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 9 \end{cases}$$

Її розв'язок, що відповідає від'ємному власному значенню:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -9/\sqrt{11} \\ -24/\sqrt{11} \\ 12/\sqrt{11} \end{bmatrix},\ \lambda = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Отже $x_0 = 1 + \frac{21}{\sqrt{11}}$.

Пункт 3. Маємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x} \rangle = \overline{\boldsymbol{\mu}} \\ \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}_3 \rangle = 1 \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Тому

$$\mathcal{L} = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + 2x_3 - 3) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Отже відповідна система рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 + 2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4x_3 + 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$$