Залікова робота з диференціальної геометрії #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра. Варіант 6.

2 квітня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Знайти довжину дуги замкненої кривої, що задана рівнянням у полярних координатах:

$$\rho = 2\cos\theta$$

Розв'язок. Спочатку розглянемо довільну криву у полярних координатах $\rho = u(\theta)$. Перейдемо до декартових координат. В такому разі, маємо параметрично задану криву:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} u(\theta)\cos\theta \\ u(\theta)\sin\theta \end{bmatrix}$$

Згадаємо, що довжина дуги між $\theta = \theta_1$ до $\theta = \theta_2$ (при умові $\theta_2 > \theta_1$) розраховується за формулою:

$$\ell[\theta_1, \theta_2] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\| \frac{d\boldsymbol{f}}{d\theta} \right\| d\theta$$

Тому знаходимо похідну:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{d\theta} = \begin{bmatrix} (du/d\theta)\cos\theta - u(\theta)\sin\theta \\ (du/d\theta)\sin\theta + u(\theta)\cos\theta \end{bmatrix}$$

А далі норму:

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{d\theta}\right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2(\theta)}$$

Тому остаточно:

$$\ell[\theta_1, \theta_2] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Повернімося до нашої задачі, де $u(\theta) = 2\cos\theta$. Підставляємо у інтеграл:

$$\ell[\theta_1, \theta_2] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{4\cos^2\theta + (-2\sin\theta)^2} d\theta = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = 2(\theta_1 - \theta_2)$$

Зокрема, довжина всієї кривої (оскільки період 2π):

$$L = \ell[0, 2\pi] = 4\pi$$

Відповідь. Довжина кривої 4π, для довільного інтервалу $[\theta_1, \theta_2]$ довжина є $2(\theta_1 - \theta_2)$.

Завдання 2.

Умова. Знайти рівняння дотичної, головної нормалі, бінормалі, нормальної, щільнодотичної та спрямної площин кривої

$$\gamma : \boldsymbol{f}(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}$$

у точці $M(1, 0, 1)$.

Розв'язок. Спочатку знайдемо дотичний вектор $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Одразу можна нормалізувати цей вектор і отримати **одиничний дотичний вектор $\boldsymbol{\tau}$**:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|} = \frac{e^t[\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 1]^\top}{e^t\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} (\cos t - \sin t)/\sqrt{3} \\ (\cos t + \sin t)/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

І одразу можна записати рівняння дотичної у точці $M(1, 0, 1)$. Цій точці відповідає параметр $t = 0$, а отже вектор дотичної в цій точці:

$$\boldsymbol{T}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Отже, параметрично можемо записати **рівняння дотичної** як:

$$\ell_\tau : \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{f}(0) + \boldsymbol{T}(0) \cdot u \iff \ell_\tau : \begin{cases} x^1 = 1 + u \\ x^2 = u \\ x^3 = 1 + u \end{cases}, \ u \in \mathbb{R}$$

Або у канонічному виді:

$$x^1 - 1 = x^2 = x^3 - 1$$

Знайдемо рівняння щільнодотичної площини. Для цього знайдемо другу похідну:

$$\frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} = e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -\sin t - \cos t \\ -\sin t + \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Параметричне рівняння щільнодотичної площини:

$$\pi_\beta : \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{f} + \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} u + \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} v$$

Якщо підставити $t = 0$, то рівняння **щільнодотичної площини**:

$$\pi_\beta : \boldsymbol{r}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1 + u \\ u + 2v \\ 1 + u + v \end{bmatrix}$$

Для канонічного рівняння площини, а також просто по завданню, знайдемо вектор бінормалі, але поки ненормалізований:

$$\boldsymbol{B} = \left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} \right] = \begin{vmatrix} \hat{x}^1 & \hat{x}^2 & \hat{x}^3 \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t}(\cos t + \sin t) - 2e^{2t} \cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) + 2e^{2t} \sin t \\ 2e^{2t} \cos t(\cos t - \sin t) + 2e^{2t} \sin t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t}(\sin t - \cos t) \\ e^{2t}(\sin t + \cos t) \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Тепер нормалізуємо цей вектор:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{B}\|} = \begin{bmatrix} (\sin t - \cos t)/\sqrt{6} \\ -(\sin t + \cos t)/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

Отже маємо **вектор бінормалі**. Знайдемо значення при $t = 0$:

$$\boldsymbol{\beta}(0) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix}$$

Тому **канонічне рівняння щільнодотичної площини**:

$$\pi_\beta : -x - y + 2z - 1 = 0$$

Рівняння бінормалі записується як:

$$\ell_\beta : \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{f}(0) + \boldsymbol{B}(0) \cdot u \iff \ell_\beta : \begin{cases} x^1 = 1 - u \\ x^2 = -u \\ x^3 = 1 + 2u \end{cases}$$

Або у канонічній формі:

$$\frac{x^1 - 1}{-1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3 - 1}{2}$$

Нарешті, головна нормаль (ненормалізована) знаходиться як:

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 3e^{3t}(\cos t + \sin t) \\ 3e^{3t}(-\cos t + \sin t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Нормалізувавши, отримуємо **головну нормаль**:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} (\cos t + \sin t)/\sqrt{2} \\ (-\cos t + \sin t)/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

У точці $t = 0$ маємо $\boldsymbol{V}(0) = [3, -3, 0]^\top$, а отже **рівняння головної нормалі**:

$$\ell_\nu : \boldsymbol{r}(u) = \boldsymbol{f}(0) + \boldsymbol{V}(0)u \iff \ell_\nu : \begin{cases} x^1 = 1 + u \\ x^2 = -u \\ x^3 = 1 \end{cases}$$

Або у канонічній формі:

$$\frac{x^1 - 1}{1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3 - 1}{0}$$

Тоді **рівняння спрямної площини**:

$$\pi_\nu : \langle \boldsymbol{\nu}(0), \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}(0) \rangle = 0$$

Якщо підставити:

$$\pi_\nu : x^1 - x^2 - 1 = 0$$

І нарешті **рівняння нормальної площини**:

$$\pi_\tau : \langle \boldsymbol{\tau}(0), \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}(0) = 0 \iff \pi_\tau : x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0$$

Відповідь. Рівняння дотичної $x^1 - 1 = x^2 = x^3 - 1$, рівняння бінормалі $\frac{x^1-1}{-1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3-1}{2}$, рівняння головної нормалі $\frac{x^1-1}{1} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3-1}{0}$, рівняння щільнодотичної площини $-x^1 - x^2 + 2x^3 - 1 = 0$, рівняння спрямної площини $x^1 - x^2 - 1 = 0$, рівняння нормальної площини $x^1 + x^2 + x^3 - 2 = 0$.

Завдання 3.

Умова. Знайти кривину і скрут кривої з радіус-вектором

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a\cos^2 t \\ a\sin t\cos t \\ bt \end{bmatrix}$$

у довільній її точці.

Розв'язок. Спочатку знаходимо першу похідну:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} -a\sin 2t \\ a\cos 2t \\ b \end{bmatrix}$$

Одразу бачимо, що норма дорівнює $\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Далі знаходимо другу похідну:

$$\frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} = \begin{bmatrix} -2a\cos 2t \\ -2a\sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Далі знайдемо наступний векторний добуток, що потрібен нам для знаходження кривини:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right] = \begin{bmatrix} 2ab\sin 2t \\ -2ab\cos 2t \\ 2a^2 \end{bmatrix}$$

Бачимо, що модуль цього добутку дорівнює:

$$\left\|\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right]\right\| = 2|a|\sqrt{a^2+b^2}$$

Нарешті, знаходимо **кривину**:

$$k(t) = \frac{\left\|\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right]\right\|}{\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}\right\|^3} = \frac{2|a|\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2|a|}{a^2+b^2}$$

Отже бачимо, що кривина постійна по всій кривій, себто не залежить від t. Щоб знайти скрут, потрібно порахувати третю похідну:

$$\frac{d^3\boldsymbol{f}}{dt^3} = \begin{bmatrix} 4a\sin 2t \\ -4a\cos 2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рахуємо **скрут**:

$$\kappa(t) = \frac{(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}, \dddot{\boldsymbol{f}})}{k^2} = \frac{8a^2b}{4a^2} \cdot (a^2+b^2) = 2b(a^2+b^2)$$

Що теж є постійною величиною.

Відповідь. $k \equiv \frac{2|a|}{a^2+b^2}, \kappa \equiv 2b(a^2+b^2)$.