✏️

Homework #13

Завдання 1092.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

Спочатку знайдемо характеристичний поліном: $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)^3$, тому маємо лише одне власне число $\lambda = -3$. Цього недостатньо для визначення які саме в нас будуть Жорданові блоки, тому знайдемо розмірність $\mathrm{Null}(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})$:

$$V := \mathrm{Null}(\mathbf{A} + 3\mathbf{E}) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що при цьому $\dim V = 2$, тому ми будемо мати 2 Жорданових блоки. Цього достатньо для визначення їх розмірів: оскільки сумарний розмір 3, а блоки мають довжину хоча б 1, то розміри потрібні бути 2 та 1. Тому Жорданова форма має вид $\mathbb{J}_2(-3) \oplus \mathbb{J}_1(-3)$:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Завдання 1093.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Знаходимо характеристичний поліном: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Знайдемо розмірність $V := \mathrm{Null}(\mathbf{A} - \mathbf{E})$:

$$V = \mathrm{Null}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathrm{Null}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \mathrm{Null}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Отже Жорданова форма має вид $\mathbb{J}_2(1) \oplus \mathbb{J}_1(1)$ (див. попередню задачу), тобто

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$