Домашня робота з математичного моделювання #14

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

24 травня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Прискорення автомобілю пропорційно різниці між $v_m = 250$ км/год та його швидкістю. Цей автомобіль може прискоритись з зі стану спокою до $v_1 = 100$ км/год за $\tau_1 = 10$ с. Скільки часу τ_2 знадобиться для цього автомобілю, щоб прискоритись зі стану спокою до $v_2 = 200$ км/год?

Розв'язок. Позначимо прискорення як a, а швидкість як v. Тоді згідно умові:

$$a = \gamma(v_m - v),\ \gamma \in \mathbb{R}$$

Помітимо, що $a = \frac{dv}{dt}$, тому маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dv}{dt} = \gamma(v_m - v) \to \frac{dv}{v_m - v} = \gamma dt \to \ln(v_m - v) = -\gamma t + c$$

І тому залежність швидкості від часу:

$$v = v_m - ce^{-\gamma t}$$

За умовою автомобіль починає зі стану спокою, тобто $v(0) = 0$. Тому $c = v_m$ і тоді наша залежність швидкості від часу:

$$v(t) = v_m(1 - e^{-\gamma t})$$

Відомо, що $v(\tau_1) = v_1$, тому:

$$v_m(1 - e^{-\gamma\tau_1}) = v_1 \to e^{-\gamma\tau_1} = \frac{v_m - v_1}{v_m} \to \gamma = \frac{1}{\tau_1}\ln\frac{v_m}{v_m - v_1}$$

Нам потрібно знайти τ_2 таке, що $v(\tau_2) = v_2$. Отже:

$$v(\tau_2) = v_m(1 - e^{-\gamma\tau_2}) = v_2 \to e^{-\gamma\tau_2} = \frac{v_m - v_2}{v_m} \to \tau_2 = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{v_m}{v_m - v_2}$$

Підставляючи вираз γ, що знайдений до цього:

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \frac{\ln v_m/(v_m - v_2)}{\ln v_m/(v_m - v_1)}$$

Підставляємо числа:

$$\tau_2 = 10 \cdot \frac{\ln 250/(250 - 200)}{\ln 250/(250 - 100)} \approx 31.5 \text{ с}$$

Відповідь. 31.5 с.

Завдання 2.

Умова. Моторний човен прямував зі швидкістю $v_0 = 40$ футів у секунду, коли в нього вийшов з ладу двигун. Через $\tau_1 = 10$ секунд після цього випадку швидкість човна знизилась до $v_1 = 20$ футів у секунду. Нехай сила опору повітря пропорційна швидкості судна при каботажному плаванні, тобто $\frac{dv}{dt} = -kv$ з деякою сталою $k > 0$. Як далеко може проплисти човен?

Розв'язок. Розв'язком рівняння $\dot{v} = -kv$ є $v(t) = v_0 e^{-kt}$ якщо $v(0) = v_0$. За умовою $v(\tau_1) = v_1$, тоді $v_0 e^{-k\tau_1} = v_1 \to k = \frac{1}{\tau_1}\ln\frac{v_0}{v_1}$. Тоді наша залежність швидкості від часу:

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\ln\frac{v_0}{v_1}\right)$$

Нам потрібно знайти, як далеко може проплисти човен. Функція відстані $d(t)$, яку пройшов човен після того, як двигун вийшов з ладу, має вид:

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt$$

Нам потрібно знайти за умовою $d_\infty := \lim_{t\to+\infty} d(t)$, тобто

$$d_\infty = \int_0^{+\infty} v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\ln\frac{v_0}{v_1}\right) dt$$

Якщо позначити $\xi = \frac{t}{\tau_1}\ln\frac{v_0}{v_1}$, то $dt = \frac{\tau_1}{\ln v_0/v_1}d\xi$ і тому

$$d_\infty = v_0 \cdot \frac{\tau_1}{\ln v_0/v_1}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}d\xi = \frac{v_0\tau_1}{\ln v_0/v_1} = \frac{400}{\ln 2} \approx 577$$

Відповідь. Максимум на відстань приблизно 577 футів.

Завдання 3.

Умова. Нехай в задачі 2 сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості тобто $\frac{dv}{dt} = -kv^2$ з деякою сталою $k > 0$. Як далеко може проплисти човен?

Розв'язок. Розв'яжемо рівняння $\dot{v} = -kv^2$:

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt \to -\frac{1}{v} = c - kt \to v(t) = \frac{1}{kt + C}$$

За умовою $v(0) = v_0$, а отже

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + kt} = \frac{v_0}{1 + kv_0t}$$

Також з умови попередньої задачі маємо

$$v(\tau_1) = v_1 \to \frac{v_0}{1 + kv_0\tau_1} = v_1 \to kv_0 = \frac{1}{\tau_1}\left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right)$$

Отже, наше рівняння має вид:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau_1}(v_0/v_1 - 1)}$$

Згідно також попередній задачі, нам достатньо просто знайти

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0 \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{t}{\tau_1}(\frac{v_0}{v_1} - 1)}$$

Порахувавши цей інтеграл, маємо

$$d(t) = \frac{\tau_1 v_0 v_1}{v_0 - v_1} \ln\left(1 + \frac{t}{\tau_1} \cdot \frac{v_0 - v_1}{v_1}\right)$$

Нескладно побачити, що тут $\lim_{t\to+\infty} d(t) = +\infty$, тому теоретично човен може плисти до нескінченності, хоч і дуже повільно.

Тому насправді при достатньо малих швидкостях спрацьовує лінійний закон супротиву, а при достатньо великих квадратичний. Ця границя приблизно визначається за допомогою "числа Рейнольдса". Тому якщо врахувати, що в деякий момент в нас все зведеться до лінійного закону, то звичайно відстань буде обмеженою.

Відповідь. Неможливо визначити.

Завдання 4.

Умова. Припустимо, що парашутист падає з висоти $h_0 = 10000$ футів з розкритим негайно парашутом. Нехай сила супротиву повітря пропорційна квадрату швидкості парашутиста з коефіцієнтом лобового опору $\rho = 0.075$. Скільки часу τ парашутисту потрібно, щоб досягти поверхні землі?

Розв'язок. Згідно лекції, залежність висоти від часу можна описати рівнянням:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{\rho} \ln \cosh t\sqrt{\rho g}$$

Нам потрібно знайти момент часу τ, коли $h(\tau) = 0$. Отже:

$$\ln\cosh\tau\sqrt{\rho g} = \rho h_0 \to \cosh\tau\sqrt{\rho g} = e^{\rho h_0} \to \tau = \frac{1}{\sqrt{\rho g}}\operatorname{arccosh} e^{\rho h_0}$$

Підставляємо числа:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{32.17\cdot 0.075}}\operatorname{arccosh} e^{0.075\cdot 10000} \approx 483 \text{ с}$$

Відповідь. Приблизно 483 секунди.

Завдання 5 (вправа).

Умова. Який вигляд буде мати розв'язок Коші

$$\dot{v} = -g + \rho v^2,\ v(0) = v_0 < -\sqrt{\rho/g}$$

Який вигляд має вираз для висоти тіла?

Розв'язок. Акуратно проінтегрувавши, можна отримати розв'язок:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\tanh\left(\sqrt{\rho g}t - \operatorname{arctanh} v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\right)$$

Позначимо $v_m = \sqrt{g/\rho}, \tau = \sqrt{\rho g}$, тоді

$$v(t) = v_m \tanh\left(\frac{t}{\tau} - \operatorname{arctanh}\frac{v_0}{v_m}\right)$$

Оскільки висота це інтеграл по $v(t)$, вираз для висоти:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left|\frac{\cosh(\frac{t}{\tau} - \operatorname{arctanh}\frac{v_0}{v_m})}{\cosh\operatorname{arctanh}\frac{v_0}{v_m}}\right|$$

Знаменник можна трошки спростити і отримати:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_m}\right)^2}\cosh\left(\frac{t}{\tau} - \operatorname{arctanh}\frac{v_0}{v_m}\right)\right)$$