2️⃣

# Homework #2

## Номер 1366.

За означенням, якщо $\mathbf{v} \in L^{\perp}$, то $\forall \mathbf{u} \in L : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$, тому нам достатньо $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_j \rangle = 0, j = \overline{1,3}$. Розписавши (вважаємо $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$), отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2z + w = 0 \\ 2x + y + 2z + 3w = 0 \\ y - 2z + w = 0 \end{cases}$$

Далі перетворюємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim R_2 - 2R_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Що еквівалентно $x + 2z + w = 0, y - 2z + w = 0$. Візьмемо $w = \alpha, z = \beta$ як параметри. Тоді $y = 2\beta - \alpha$, $x = -2\beta - \alpha$. Отже:

$$L^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ -\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Тому в якості базисних векторі візьмемо $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Замітка.** При довільному лінійно незалежному наборі $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, завдання по суті зводиться до знаходження базису $\operatorname{Null} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \end{pmatrix}$.

## Номер 1371.

Знайдемо базу векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \mathbf{a}_2^T\\ \mathbf{a}_3^T\end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 8 & 1\end{pmatrix} =_{\substack{R_3-R_1\\ R_2-2R_1}} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{Null}\Bigg($$

Отже, $\mathrm{proj}_L\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2,\ \mathbf{x} = \mathrm{ort}_L\mathbf{x} + \mathrm{proj}_L\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{z}$.

Домножимо скалярно друге рівняння на $\mathbf{a}_1$ і на $\mathbf{a}_2$:

$$\begin{cases}\langle\mathbf{x},\mathbf{a}_1\rangle = \alpha_1\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\rangle + \alpha_2\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle + \langle\mathrm{ort}_L\mathbf{x},\mathbf{a}_1\rangle\\ \langle\mathbf{x},\mathbf{a}_2\rangle = \alpha_1\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle + \alpha_2\langle\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2\rangle + \langle\mathrm{ort}_L\mathbf{x},\mathbf{a}_2\rangle\end{cases}$$

Оскільки $\mathrm{ort}_L\mathbf{x} \in L^{\perp}, \mathbf{a}_j \in L \implies \langle\mathrm{ort}_L\mathbf{x},\mathbf{a}_j\rangle = 0$. А далі лише залишається розв'язати рівняння відносно $\alpha_1,\alpha_2$.

$$\begin{cases}8 = 7\alpha_1 + 6\alpha_2\\ 1 = 6\alpha_1 + 11\alpha_2\end{cases} \to (\alpha_1,\alpha_2) = (2,-1)$$

Звідси $\mathrm{proj}_L\mathbf{x} = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (3,1,-1,-2)^T, \mathrm{ort}_L\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_L\mathbf{x} = (2,1,-3,-4)^T$.