Домашня робота з курсу “Теоретична механіка”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 3.

Умова. Тіло з масою m рухається під дією сили земного тяжіння і сили опору повітря $R = kmgv$, де v – швидкість тіла. На яку максимальну висоту $H_{\max}$ підніметься тіло і яким буде його закон руху $x(t), y(t)$, якщо початкова швидкість v_0 направлена під кутом α до горизонту?

Розв'язок. Запишемо диференціальні рівняння руху по вісям:

$$m\ddot{x} = -kmg\dot{x},\ m\ddot{y} = -mg - kmg\dot{y}$$

Або:

$$\dot{v}_x = -kgv_x,\ \dot{v}_y = -g(1 + kv_y)$$

Рівняння по Ox розв'язати нескладно:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot e^{-kgt}$$

Для знаходження максимальної висоти, розділимо друге рівняння на v_y:

$$\frac{\dot{v}_y}{v_y} = -g\left(k + \frac{1}{v_y}\right)$$

Помітимо, що $\frac{\dot{v}_y}{v_y} = \frac{dv_y}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dv_y}{dy} = v'_y$. Таким чином,

$$v'_y = -g\left(k + \frac{1}{v_y}\right) \implies \frac{dv_y}{k + \frac{1}{v_y}} = -g dy$$

Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dv_y}{k + \frac{1}{v_y}} = \frac{1}{k}\int \frac{kv_y dv_y}{kv_y + 1} = \frac{1}{k}\left(\int dv_y - \int \frac{dv_y}{1 + kv_y}\right) = \frac{v_y}{k} - \frac{\ln(1 + kv_y)}{k^2} + C$$

Отже:

$$\frac{v_y}{k} - \frac{\ln(1+kv_y)}{k^2} = -gy + C$$

Помітимо, що $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$, тому:

$$C = \frac{v_0 \sin\alpha}{k} - \frac{\ln(1 + kv_0 \sin\alpha)}{k^2}$$

Отже:

$$y(v_y) = -\frac{1}{g}\left(\frac{v_y - v_0 \sin\alpha}{k} + \frac{1}{k^2}\ln\frac{1 + kv_0 \sin\alpha}{1 + kv_y}\right)$$

Або:

$$y(v_y) = \frac{v_0 \sin\alpha - v_y}{kg} + \frac{1}{k^2 g}\ln\frac{1 + kv_y}{1 + kv_0 \sin\alpha}$$

Оскільки $H_{\max} = y(0)$, то маємо:

$$H_{\max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{kg} + \frac{1}{k^2 g}\ln\frac{1}{1 + kv_0 \sin\alpha} = \frac{kv_0 \sin\alpha - \ln(1 + kv_0 \sin\alpha)}{k^2 g}$$

Залишилося знайти $x(t)$ та $y(t)$. Перше знайти легко:

$$x(t) = \int_0^t v_x(\tau)d\tau = v_0 \cos\alpha \int_0^t e^{-kg\tau}d\tau = -\frac{v_0 \cos\alpha}{kg}e^{-kg\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt})$$

Для знаходження $y(t)$ потрібно лише знайти $v_y(t)$, оскільки $y(v_y)$ ми вже знаємо. Для знаходження $v_y(t)$ розв'яжемо початкове диференціальне рівняння:

$$\dot{v}_y = -g(1 + kv_y) \implies \frac{dv_y}{1 + kv_y} = -gdt \implies \frac{1}{k}\ln(1 + kv_y) = -gt + C$$

Підставивши $t = 0$, маємо $C = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 \sin\alpha)$, тому

$$\frac{1}{k}\ln\frac{1 + kv_y}{1 + kv_0 \sin\alpha} = -gt \implies \frac{1 + kv_y}{1 + kv_0 \sin\alpha} = e^{-kgt}$$

Остаточно:

$$v_y(t) = \frac{1}{k}\left((1 + kv_0 \sin\alpha)e^{-kgt} - 1\right)$$

Підставляючи у вираз $y(v_y)$, маємо:

$$y(t) = \frac{v_0 \sin\alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g}\left((1 + kv_0 \sin\alpha)e^{-kgt} - 1\right) - \frac{t}{k}$$

Завдання 4.

Умова. Заряджена частинка з масою m і зарядом e рухається в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією $\mathbf{B}$, маючи початкову швидкість $\mathbf{v}_0$, перпендикулярну до $\mathbf{B}$. Визначте траєкторію частинки, якщо на неї діє сила Лоренца $\mathbf{F}_L = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$.

Розв'язок. Оскільки сила Лоренца спрямована перпендикулярно швидкості, то вона не виконує роботу, а отже не змінює кінетичну енергію частинки. Це означає, що впродовж польоту, швидкість не змінюється.

Також, кут між $\mathbf{F}_L$ та $\mathbf{B}$ впродовж польоту залишається $\pi/2$, тому і модуль сили $F_L = ev_0B$ залишається постійним.

Отже, якщо на частку діє постійна сила, перпендикулярна швидкості, то маємо рух по колу. Радіус кола можна знайти з рівняння рівноваги:

$$m\frac{v_0^2}{r} = ev_0B \implies r = \frac{mv_0}{eB}$$

Отже, маємо рух по колу радіуса $\frac{mv_0}{eB}$.