Домашня робота з математичного аналізу #18

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

18 квітня 2023 р.

Завдання 5.1.

Умова. Знайти координати центра мас однорідного тіла E, що визначається даними умовами:

$$x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Розв'язок. Нехай густина матеріалу піраміди $\rho(x, y, z) \equiv \rho = \text{const}$. Об'єм піраміди знаходиться доволі просто: візьмемо основу піраміду в площині Oxy, тоді площа трикутника в цій площині дорівнює $S_{Oxy} = \frac{ab}{2}$. Оскільки об'єм це третина добутку площі на висоту, маємо:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{1}{3} S_{Oxy} c = \frac{\rho abc}{6}$$

Знайдемо моменти по вісям Ox, Oy, Oz. Для цього застосовуємо формулу:

$$M_x = \iiint_V \rho x dV,\ M_y = \iiint_V \rho y dV, M_z = \iiint_V \rho z dV,$$

Почнемо рухатись по якійсь з вісей. Наприклад, візьмемо площину

$z = u \in [0, c]$. Тоді в перерізі будемо мати прямокутний трикутник:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{u}{c}$$

Причому цей трикутник перетинає вісі Ox та Oy у точках:

$$Y\left(0, b\left(1 - \frac{u}{c}\right)\right), X\left(a\left(1 - \frac{u}{c}\right), 0\right)$$

Отже почнемо тепер рухатись по $x = v$. Воно може рухатись від 0 до $a(1 - u/c)$. В такому разі функція y від v, u:

$$y = b\left(1 - \frac{u}{c} - \frac{v}{a}\right)$$

Отже, маємо наступний інтеграл:

$$M_x = \rho \int_0^c dz \int_0^{a(1-z/c)} dx \int_0^{b(1-x/a-z/c)} x dy = \frac{\rho a^2 bc}{24}$$

Отже остаточно центр мас:

$$x_c = \frac{M_x}{m} = \frac{6\rho a^2 bc}{24\rho abc} = \frac{a}{4}$$

Аналогічно,

$$y_c = \frac{b}{4},\ z_c = \frac{c}{4}$$

Отже центр мас має координати $\boldsymbol{r}_c = \begin{bmatrix} a/4 \\ b/4 \\ c/4 \end{bmatrix}$

Відповідь. $(a/4, b/4, c/4)$.

Завдання 5.2.

Умова. Знайти координати центра мас однорідного тіла E, що визначається даними умовами:

$$z = 0, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2$$

Розв'язок. Перейдемо до циліндричних координат. Отже, нехай:

$$x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta, z = u$$

Тоді наші границі запишуться як:

$$u = 0,\ \rho^2 = 2\rho\cos\theta,\ u = \rho^2$$

Якщо скоротити на ρ:

$$u = 0, \rho = \sqrt{u},\ \rho = 2\cos\theta$$

Почнемо рухатись по u від 0. При кожному u нас цікавить частина кола $\rho = 2\cos\theta$ від якої ми відрізаємо $\rho = \sqrt{u}$. Ми повністю відріжемо все, коли радіус кола $\rho = \sqrt{u}$ сягне двох, тобто коли $u = 4$. Отже, маємо между $u \in [0, 4]$.

Далі, знайдемо по яких кутах нам треба рухатись. Маємо, що $\sqrt{u} = 2\cos\theta$, тобто $\cos\theta = \frac{\sqrt{u}}{2}$. Отже, ми повинні рухатись від $-\arccos\frac{\sqrt{u}}{2}$ до $+\arccos\frac{\sqrt{u}}{2}$. По ρ ми рухаємось від $\sqrt{u}$ до $2\cos\theta$. Отже, для обчислення об'єма маємо формулу:

$$M = \int_0^4 du \int_{-\arccos\sqrt{u}/2}^{+\arccos\sqrt{u}/2} d\theta \int_{\sqrt{u}}^{2\cos\theta} \rho d\rho = \frac{3\pi}{2}$$

Тепер знайдемо моменти:

$$M_x = \iiint_V x dV = \int_0^4 du \int_{-\arccos\sqrt{u}/2}^{+\arccos\sqrt{u}/2} d\theta \int_{\sqrt{u}}^{2\cos\theta} \rho\cos\theta \rho d\rho = 2\pi$$

$$M_y = \iiint_V y dV = \int_0^4 du \int_{-\arccos\sqrt{u}/2}^{+\arccos\sqrt{u}/2} d\theta \int_{\sqrt{u}}^{2\cos\theta} \rho \sin\theta \rho d\rho = 0$$

$$M_z = \iiint_V z dV = \int_0^4 du \int_{-\arccos\sqrt{u}/2}^{+\arccos\sqrt{u}/2} d\theta \int_{\sqrt{u}}^{2\cos\theta} u \rho d\rho = \frac{5\pi}{3}$$

Отже остаточно координати центра мас:

$$\boldsymbol{r}_c = \begin{bmatrix} M_x/m \\ M_y/m \\ M_z/m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 10/9 \end{bmatrix}$$

Відповідь. $(4/3, 0, 10/9)$