Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #6

Захаров Дмитро

27 травня, 2025

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Вправа 17.9

Умова Задачі 1.1. Розв'язати рівняння

$$u_{tt} - u_t = u_{xx} - 4u_x - 2t + 2 + e^{2x} \sin 4x, \quad x \in (0, \pi), t > 0$$

з умовами $u(0, t) = t^2$, $u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

Розв'язання. Спочатку зробимо граничні умови однорідними. Для заданих умов візьмемо $u(x, t) := w(x, t) + v(x, t)$, де $v(x, t) = t^2 \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$. В такому разі $w(0, t) = w(\pi, t) = 0$. Підставимо це у початкове рівняння:

$$\begin{aligned} w_{tt} + 2 - \frac{2x}{\pi} - w_t - 2t + \frac{2xt}{\pi} &= w_{xx} - 4w_x + 4\frac{t^2}{\pi} - 2t + 2 + e^{2x} \sin 4x \\ w_{tt} - \frac{2x}{\pi} - w_t + \frac{2xt}{\pi} &= w_{xx} - 4w_x + 4\frac{t^2}{\pi} + e^{2x} \sin 4x \\ w_{tt} - w_t - w_{xx} + 4w_x &= \frac{2x}{\pi}(1 - t) + \frac{4t^2}{\pi} + e^{2x} \sin 4x. \end{aligned}$$

Нові початкові умови $w(x, 0) = 0$, $w_t(x, 0) = 0$. Тепер, нам дуже заважає член w_x у рівнянні, оскільки він унеможливлює розкладання у ряд Фур'є. В такому разі, зробимо додаткову заміну $w(x, t) = e^{2x} q(x, t)$. Підставимо це у рівняння:

$$\begin{aligned} e^{2x} q_{tt} - e^{2x} q_t - (4e^{2x} q + 4e^{2x} q_x + e^{2x} q_{xx}) + 4(2e^{2x} q + e^{2x} q_x) &= \frac{2x}{\pi}(1 - t) + \frac{4t^2}{\pi} + e^{2x} \sin 4x \\ e^{2x} q_{tt} - e^{2x} q_t + 4e^{2x} q - e^{2x} q_{xx} &= \frac{2x}{\pi}(1 - t) + \frac{4t^2}{\pi} + e^{2x} \sin 4x \\ q_{tt} - q_t + 4q - q_{xx} = f(x, t), \quad f(x, t) &= \frac{2x}{\pi}(1 - t)e^{-2x} + \frac{4t^2}{\pi} e^{-2x} + \sin 4x. \end{aligned}$$

Причому, ця заміна не змінює граничних умов.
Тепер, розкладемо $q(x, t)$ у ряд Фур'є: $q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx$. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{q}_n(t) - \dot{q}_n(t) - 4q_n(t) + n^2 q_n(t)) \sin nx = f(x, t).$$

Розкладемо праву частину у ряд Фур'є: $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx$, де

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, t) \sin nx dx \\ &= \frac{4(1 - t)}{\pi^2} \underbrace{\int_0^{\pi} x e^{-2x} \sin nx dx}_{=\mathcal{I}_n} + \frac{8t^2}{\pi^2} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-2x} \sin nx dx}_{:=\mathcal{J}_n} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 4x \sin nx dx \end{aligned}$$

Зрозуміло одразу, що $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 4x \sin nx dx = \delta_{n,4}$, тому достатньо лише знайти перші два інтеграли. Почнемо з другого: $\mathcal{J}_n = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin nx dx$. Знайдемо його наступним чином:

$$\mathcal{J}_n = \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-2x} e^{inx} dx \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\pi} e^{(in-2)x} dx \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{(in-2)x}}{in - 2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right\}$$

Тепер розпишемо акуратно вираз під знаком Im:

$$\frac{e^{(in-2)x}}{in-2}\bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{e^{(in-2)\pi}-1}{in-2} = \frac{e^{-2\pi}e^{i\pi n}-1}{in-2} = \frac{e^{-2\pi}(-1)^n-1}{-2+in} = \frac{(e^{-2\pi}(-1)^n-1)(-2-in)}{4+n^2}$$

Отже, звідси:

$$\mathcal{J}_n = \frac{1}{4+n^2}\mathrm{Im}\left\{(e^{-2\pi}(-1)^n-1)(-2-in)\right\} = \frac{n}{4+n^2}(1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi})$$

Тепер схожим чином обраховуємо $\mathcal{I}_n$, проте вираз під Im буде інтегруватися частинами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n &= \mathrm{Im}\left\{\int_0^\pi xe^{-2x}e^{inx}dx\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\left[x\frac{e^{(in-2)x}}{in-2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{(in-2)x}}{in-2}dx\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi e^{(in-2)\pi}}{in-2} - \frac{1}{in-2}\int_0^\pi e^{(in-2)x}dx\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi e^{(in-2)\pi}}{in-2}\right\} - \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(in-2)^2}e^{(in-2)x}\bigg|_0^\pi\right\} \\
&= \pi(-1)^n e^{-2\pi}\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{in-2}\right\} - \mathrm{Im}\left\{\frac{e^{-2\pi}(-1)^n-1}{(in-2)^2}\right\} \\
&= -\frac{\pi(-1)^n n}{4+n^2}e^{-2\pi} - \mathrm{Im}\left\{\frac{(e^{-2\pi}(-1)^n-1)(in+2)^2}{(n^2+4)^2}\right\} \\
&= -\frac{\pi(-1)^n n}{4+n^2}e^{-2\pi} - \frac{e^{-2\pi}(-1)^n-1}{(n^2+4)^2}\mathrm{Im}\left\{(in+2)^2\right\} \\
&= -\frac{\pi(-1)^n n}{4+n^2}e^{-2\pi} - \frac{4n(e^{-2\pi}(-1)^n-1)}{(n^2+4)^2}
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо:

$$f_n = \frac{4(1-t)}{\pi^2}\left(-\frac{\pi(-1)^n n}{n^2+4}e^{-2\pi} - \frac{4n(e^{-2\pi}(-1)^n-1)}{(n^2+4)^2}\right) + \frac{8t^2}{\pi^2}\cdot\frac{n}{4+n^2}(1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}) + \delta_{n,4}$$

Проте, ми це запишемо в дещо іншому вигляді:

$$f_n(t) = \alpha_n t^2 + \beta_n(t-1) + \delta_{n,4},$$

де коефіцієнти α_n, β_n мають не найкращий вигляд:

$$\alpha_n = \frac{8n}{\pi^2(n^2+4)}(1+(-1)^{n+1}e^{-2\pi}), \quad \beta_n = -\frac{4ne^{-2\pi}}{\pi^2(n^2+4)^2}((-1)^{n+1}(4+4\pi+n^2\pi)+4e^{2\pi}).$$

Таким чином, маємо рівняння (для $n \neq 4$):

$$\ddot{q}_n(t) - \dot{q}_n(t) + (n^2-4)q_n(t) = \alpha_n t^2 + \beta_n(t-1), \quad q_n(0)=0,\ \dot{q}_n(0)=0.$$

Спочатку розв'яжемо однорідну частину рівняння. Характеристичне рівняння $\lambda^2-\lambda+(n^2-4)=0$, звідси характеристичні значення:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{17-4n^2}}{2}$$

Отже, в залежності від значення n маємо різні випадки. Розглянемо більшість з них.
Випадок 1. $n \geq 3$. В такому разі корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4n^2 - 17}}{2} i$$

Таким чином, розв'язок однорідної частини рівняння має вигляд:

$$q_{n,H}(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(A_n \cos\left(\omega_n t\right) + B_n \sin\left(\omega_n t\right) \right), \quad \omega_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 17}}{2}.$$

Неоднородна частина розв'язку має вигляд:

$$q_{n,P}(t) = C_n t^2 + D_n t + E_n.$$

Тоді маємо:

$$2C_n - (2C_n t + D_n) + (n^2 - 4)(C_n t^2 + D_n t + E_n) = \alpha_n t^2 + \beta_n (t - 1).$$

Звідси маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (n^2 - 4)C_n = \alpha_n \\ (n^2 - 4)D_n - 2C_n = \beta_n \\ (n^2 - 4)E_n - D_n + 2C_n = -\beta_n \end{cases}$$

З першого рівняння $C_n = \frac{\alpha_n}{n^2 - 4}$, з другого $D_n = \frac{\beta_n}{n^2 - 4} + \frac{2C_n}{n^2 - 4} = \frac{\beta_n}{n^2 - 4} + \frac{2\alpha_n}{(n^2 - 4)^2}$ і нарешті з третього:

$$E_n = -\frac{\beta_n}{n^2 - 4} + \frac{D_n}{n^2 - 4} - \frac{2C_n}{n^2 - 4} = \frac{(5 - n^2)(2\alpha_n - 4\beta_n + n^2 \beta_n)}{(n^2 - 4)^3}$$

Отже, зафіксували вирази для C_n, D_n, E_n і будемо надалі вважати їх відомими. Тепер загальний розв'язок рівняння:

$$q_n(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(A_n \cos\left(\omega_n t\right) + B_n \sin\left(\omega_n t\right) \right) + C_n t^2 + D_n t + E_n.$$

Підставимо умови на $q_n(0) = 0$ та $\dot{q}_n(0) = 0$. Перша умова означає $A_n + E_n = 0$, звідки $A_n = -E_n$. Для другої умови знайдемо похідну:

$$\dot{q}_n(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left(A_n \cos\left(\omega_n t\right) + B_n \sin\left(\omega_n t\right) \right) + e^{\frac{t}{2}} \left(-\omega_n A_n \sin \omega_n t + \omega_n B_n \cos \omega_n t \right) + 2C_n t + D_n$$

Отже $\dot{q}_n(0) = \frac{1}{2} A_n + \omega_n B_n + D_n = 0$, звідси $B_n = \frac{E_n}{2\omega_n} - \frac{D_n}{\omega_n}$. Таким чином, загальний розв'язок

$$q_n(t) = C_n t^2 + D_n t + \left(\frac{E_n}{2\omega_n} - \frac{D_n}{\omega_n} \right) e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\omega_n t\right) + E_n (1 - e^{\frac{t}{2}} \cos \omega_n t).$$

Випадок 2. $n = 2$. Можна показати, що розв'язок:

$$q_2(t) = -\frac{\alpha_2}{3} t^3 - \frac{\beta_2}{2} t^2 - \alpha_2 t^2 - 2\alpha_2 t + 2\alpha_2 e^t - 2\alpha_2 \approx -0.067t^3 - 0.175t^2 - 0.4t + 0.4e^t - 0.4$$

Випадок 3. $n = 1$. Можна показати, що розв'язок:

$$q_1(t) \approx 0.003e^{-1.30t}(5.523 - 6.523e^{1.30t} + e^{3.61t} + 4.892e^{1.30t} - 18.549e^{1.30}t^2)$$

Випадок 4. $n = 4$. Треба розглянути випадок 1, але в якості правої частини взяти $\widetilde{f_4}(t) \equiv 1$. Маємо рівняння:

$$\ddot{q}_4 - \dot{q}_4 + 12q_4 = 1, \quad q_4(0) = 0,\ \dot{q}_4(0) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_4(t) &= \frac{1}{564}\left(47 - 47e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{47}t}{2} + \sqrt{47}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{47}t}{2}\right) \\ &\approx 0.083 - 0.083e^{0.5t}\cos(3.43t) + 0.012e^{0.5t}\sin(3.43t)\end{aligned}$$

Відповідь. $u(x,t) = e^{2x}q(x,t) + t^2\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$, де

$$\begin{aligned}q(x,t) \approx\ & 0.003e^{-1.30t}(5.523 - 6.523e^{1.30t} + e^{3.61t} + 4.892e^{1.30t} - 18.549e^{1.30}t^2) \\ & - 0.067t^3 - 0.175t^2 - 0.4t + 0.4e^t - 0.4 \\ & + 0.0375(-0.445 + 0.556t + t^2 + 0.445e^{0.5t}\cos(2.18t) - 0.357e^{0.5t}\sin(2.18t)) \\ & + 0.0134(5.938 + 0.263t + t^2 - 5.938e^{0.5t}\cos(3.43t) - 0.789e^{0.5t}\sin(3.43t)) \\ & + \sum_{n=5}^{\infty}\left(C_n t^2 + D_n t + \left(\frac{E_n}{2\omega_n} - \frac{D_n}{\omega_n}\right)e^{\frac{t}{2}}\sin(\omega_n t) + E_n(1 - e^{\frac{t}{2}}\cos\omega_n t)\right)\sin nx,\end{aligned}$$

де

$$C_n = \frac{\alpha_n}{n^2-4}, \quad D_n = \frac{\beta_n}{n^2-4} + \frac{2\alpha_n}{(n^2-4)^2}, \quad E_n = \frac{(5-n^2)(2\alpha_n - 4\beta_n + n^2\beta_n)}{(n^2-4)^3},$$

$$\omega_n = \frac{\sqrt{4n^2-17}}{2}, \quad \alpha_n = \frac{8n}{\pi^2(n^2+4)}(1 + (-1)^{n+1}e^{-2\pi}),$$

$$\beta_n = -\frac{4ne^{-2\pi}}{\pi^2(n^2+4)^2}((-1)^{n+1}(4 + 4\pi + n^2\pi) + 4e^{2\pi}).$$