Контрольна робота 2 з курсу "Елементи математичного моделювання"

Студента групи МП-21 Захарова Дмитра

18 квітня 2023 р.

Варіант 4.

Завдання 1.

Умова. Вкладник поклав $B_0 = 100$ на банківський рахунок під $r = 5\%$. Через скільки років його капітал досягне $B = 10000$, якщо щорічно зовнішні надходження складають $\Delta B = 20$?

Розв'язок. Якщо ми позначимо через $B[t]$ капітал через t років, то можемо записати наступне рівняння:

$$B[t+1] = (1+r)B[t] + \Delta B$$

Тепер скористаємося наступним твердженням:

Теорема 1: Розв'язок рекурентного рівняння

Нехай $\alpha, b \in \mathbb{R}$ є сталими. Тоді якщо ми маємо рівняння

$$x[t+1] = \alpha x[t] + b,\ t = 0, 1, 2, \dots$$

$$x[0] = x_0$$

то його розв'язком є:

$$x[t] = \alpha^t x_0 + \frac{b(\alpha^t - 1)}{\alpha - 1}$$

Для нашій задачі маємо $\alpha = 1 + r, b = \Delta B$, в такому разі:

$$B[t] = (1+r)^t B_0 + \frac{\Delta B}{r}((1+r)^t - 1)$$

Трошки пересортуємо доданки:

$$B[t] = (1+r)^t \left(B_0 + \frac{\Delta B}{r}\right) - \frac{\Delta B}{r}$$

Далі нам потрібно знайти таке мінімальне $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, що $B[\tau] > B$. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$(1+r)^{\hat{\tau}} \left(B_0 + \frac{\Delta B}{r}\right) - \frac{\Delta B}{r} = B$$

Звідси:

$$(1+r)^{\hat{\tau}} = \frac{B + \Delta B/r}{B_0 + \Delta B/r} = \frac{rB + \Delta B}{rB_0 + \Delta B}$$

Звідки дуже легко знайти $\hat{\tau}$:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\log(1+r)} \cdot \log \frac{rB + \Delta B}{rB_0 + \Delta B}$$

Оскільки наше $\hat{\tau}$ не є натуральним числом, нам треба округлити це число вгору, тобто $\tau = \lceil \hat{\tau} \rceil$. Підставляємо числа:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\log 1.05} \cdot \log \frac{0.05 \cdot 10000 + 100}{0.05 \cdot 100 + 20} \approx 65.14$$

Звідси $\tau = 66$.

Відповідь. Через 66 років капітал перевищить 10000.

Завдання 2.

Умова. Нехай чисельність населення в деякий рік складає $n_0 = 300$ тис. осіб. Через $\tau = 3$ роки вона склала $n = 500$ тис. осіб. Припускаючи, що коефіцієнт народжуваності дорівнює $\alpha = 5\%$ та смертності $\delta = 1\%$ відсоток, з'ясувати, через скільки років чисельність населення сягне $N = 1000$ тис. осіб, якщо кожного року за рахунок міграції вона буде збільшуватись на сталу величину.

Розв'язок. Нехай $n[t]$ це кількість людей через t років починаючи з року, коли чисельність була n_0. Тоді, ми можемо записати наше рівняння як:

$$n[t+1] = (1 + \alpha - \delta)n[t] + \Delta n,$$

де Δn є сталою, що позначає збільшення населення через міграцію. Одразу позначимо $\beta = \alpha - \delta = 0.04$, що показує коефіцієнт зростання населення кожен рік. Тоді:

$$n[t+1] = (1 + \beta)n[t] + \Delta n$$

Згідно твердженню з завдання 1, маємо наступний розв'язок цього рівняння:

$$n[t] = (1 + \beta)^t n_0 + \frac{\Delta n}{\beta}((1 + \beta)^t - 1)$$

З умови ми маємо $n[\tau] = n$, звідки ми можемо знайти Δn:

$$n[\tau] = n = (1 + \beta)^\tau n_0 + \frac{\Delta n}{\beta}((1 + \beta)^\tau - 1)$$

Звідси:

$$\frac{\Delta n}{\beta}((1+\beta)^\tau - 1) = n - (1+\beta)^\tau n_0$$

$$\Delta n = \beta \cdot \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1} \approx 52.07$$

Бачимо, що притік через міграцію близько 52 тисяч людей, що доволі багато.

Отже, тепер підставимо це знову у наш вираз $n[t]$:

$$n[t] = (1+\beta)^t \left(n_0 + \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1}\right) - \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1}$$

Вираз в дужках трошки спростимо:

$$n[t] = \frac{(1+\beta)^t (n - n_0)}{(1+\beta)^\tau - 1} - \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1}$$

Тепер, як і в минулій задачі, нам треба знайти таке мінімальне $T \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, що $n[T] > N$. Для цього розв'язуємо рівняння:

$$n[\hat{T}] = N \to \frac{(1+\beta)^T (n - n_0)}{(1+\beta)^\tau - 1} - \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1} = N$$

Звідси:

$$\frac{(1+\beta)^{\hat{T}} (n - n_0)}{(1+\beta)^\tau - 1} = N + \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{(1+\beta)^\tau - 1}$$

$$(1+\beta)^{\hat{T}} = \frac{N((1+\beta)^\tau - 1)}{n - n_0} + \frac{n - (1+\beta)^\tau n_0}{n - n_0}$$

Оскільки $T = \lceil \hat{T} \rceil$, то остаточно:

$$T = \left\lceil \frac{1}{\log(1+\beta)} \cdot \log\left(\frac{(1+\beta)^\tau (N - n_0) + (n - N)}{n - n_0}\right)\right\rceil = 10$$

Відповідь. 10 років.

Завдання 3.

Умова. Нехай гравець має $N_0 = 20$ доларів до вступу в серію ігор. Він буде грати до тих пір, поки або не збанкрутує, або не накопичить суму в $N = 50$ доларів. В кожній грі він або виграє, або програє 1 долар. Яка ймовірність банкрутства гравця, якщо ймовірність програшу в кожної з ігор дорівнює $q = 0.7$?

Розв'язок. Використаємо наступне твердження, що доводилось під час лекцій:

Теорема 2: Гра про банкрутство

Нехай $p[t]$ є ймовірністю банкрутства гравця при наявності у нього до вступу в серію ігор t доларів. За формулою повної ймовірності:

$$p[t+2] - \frac{1}{q} \cdot p[t+1] + \frac{1-q}{q} \cdot p[t] = 0,\ t \in \{0, \ldots, (N-2)\}$$

При граничних умовах $p[0] = 1, p[N] = 0$ (де N це кількість доларів до якої грає гравець) має розв'язок (при $q \neq 0.5$):

$$p[t] = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^t - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}$$

Отже, просто підставляємо наші значення:

$$p[20] = \frac{\left(\frac{1-0.7}{0.7}\right)^{20} - \left(\frac{1-0.7}{0.7}\right)^{50}}{1 - \left(\frac{1-0.7}{0.7}\right)^{50}} = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{20} - \left(\frac{3}{7}\right)^{50}}{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^{50}} \approx 4.37 \cdot 10^{-8}$$

Отже ймовірність банкротства майже нульова.

Відповідь. $4.37 \cdot 10^{-8}$