Homework #12

Замітка: Завдання виявилось дуже об'ємним, тому я розпишу перший пункт, а наступні вже пройдусь більш тезісно. Також я пропустив написання трансформації початкових координат $\mathbf{v}$ к кінцевим $\widetilde{\mathbf{v}}$ окремо по координатах, але ідейно це робиться просто розписанням рівняння:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \dots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Завданя 1.

Звести до канонічного рівняння криву

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у "матрично-векторному" виді:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle + \gamma = 0$$

Де:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},\ \gamma = 45$$

Запишемо характеристичний многочлен матриці $\mathcal{A}$:

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - (\mathrm{tr}_1\mathcal{A})\lambda^2 + (\mathrm{tr}_2\mathcal{A})\lambda - \det\mathcal{A} = \lambda^3 - 9\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 9)$$

Отже власні числа матриці: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 9$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_i$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Тобто тут ми маємо множину векторів $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ таких, що $2x - y - 2z = 0$, тобто координати таких веторів лежать на заданій площині. Вектор нормалі площини $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Знайдемо будь-який перпендикулярний вектор. Наприклад, $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Далі знайдемо будь-який вектор, що перпендикулярен до $\mathbf{n}$ та $\mathbf{w}_1$, наприклад, $\mathbf{w}_2 = [\mathbf{n} \times \mathbf{w}_1] = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ — цей вектор теж буде лежати на площині. В якості двох власних векторів візьмемо одиничні вектори $\hat{\mathbf{w}}_1, \hat{\mathbf{w}}_2$, тобто $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2/2]{R_3-2R_2}$$
$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3/9]{R_1-5R_2}$$
$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix} 0 & 18 & -9 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\times(-1)]{R_1/2}$$
$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Отже маємо множину векторів $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, що є перетином площин $2y - z = 0, x + 4y - z = 0$. Дійсно, нехай $z = t$. Тоді $y = t/2$, а $x = -t$, а будь-який вектор з множини перетину можна описати у вигляді $\mathbf{w} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$. В якості третього власного вектора візьмемо $\mathbf{q}_3 = \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Отже, матриця Q має вигляд:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо вектор переносу $\mathbf{p}$. Компоненти $p_1, p_2 = 0$ бо маємо $\lambda_1 = 0$ — корінь кратності 2. Отже, знайдемо $\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle$ та $p_3 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_3 \rangle}{\lambda_3}$:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = 0,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle = -18,\ p_3 = \frac{\langle \{-14, 1, 8\}, \{-2/3, 1/3, 2/3\} \rangle}{9} = \frac{5}{3}$$

Вільний член рівняння: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_3 p_3^2 = 20$

Отже маємо:

$$9\tilde{z}^2 - 18\tilde{y} + 20 = 0$$

Якщо зробити ще одне перетворення $\hat{z} = \tilde{z}, \hat{y} = \tilde{y} - \frac{10}{9}$, то отримаємо:

$$\hat{z}^2 = 2\hat{y}$$

Отже перед нами параболічний циліндр.

Завданя 2.

Вхідні данні:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix},\ \gamma = -1$$

Характеристичний поліном $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6)$, отже власні числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$. Для власного числа $\lambda_1 = 0$ маємо перетин $2x - y - 2z = 0$ та $-x + 5y + z = 0$, отже візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 3$ маємо перетин $x + y + 2z = 0, y + z = 0$, тобто $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = 6$ маємо перетин $y - 2z = 0, x + y - z = 0$, тобто $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Вектор зміщення:

$$p_1 = 0,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = 0;\ p_2 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle}{\lambda_2} = \sqrt{3};\ p_3 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_3 \rangle}{\lambda_3} = -2\sqrt{6}$$

Вільний коефіцієнт: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_2 p_2^2 - \lambda_3 p_3^2 = -154$. Отже маємо:

$$3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 - 154 = 0 \implies 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 = 154$$

Звідси отримаємо канонічне рівняння еліптичного циліндру $\frac{\tilde{y}^2}{154/3} + \frac{\tilde{z}^2}{77/3} = 1$.

Завданя 3.

Вхідні данні:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 16 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \gamma = 72$$

Характеристичний поліном $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 12)(\lambda - 18)$, отже власні числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 18$.

Для $\lambda_1 = 0$ маємо перетин $7x - 5y - 4z = 0$ та $y - 2z = 0$, отже візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 12$ маємо перетин $5x + 5y + 4z = 0, x + y - z = 0$, тобто $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = 18$ маємо перетин $11x + 5y + 4z = 0, 4y + z = 0$, тобто $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{6} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{6} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 2/\sqrt{6} & -4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Вектор зміщення:

$$p_1 = 0, \ \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = -12; \ p_2 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle}{\lambda_2} = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \ p_3 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_3 \rangle}{\lambda_3} = 0$$

Вільний коефіцієнт: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_2 p_2^2 - \lambda_3 p_3^2 = 64$. Отже маємо:

$$12\widetilde{y}^2 + 18\widetilde{z}^2 - 24\widetilde{x} + 64 = 0 \implies 6\widetilde{y}^2 + 9\widetilde{z}^2 - 12\widetilde{x} + 32 = 0$$

Якщо зробити перетворення $\widetilde{x} = \hat{x} - 8/3, \tilde{y} = \hat{y}, \tilde{z} = \hat{z}$, отримаємо:

$$6\hat{y}^2 + 9\hat{z}^2 - 12\hat{x} = 0 \implies 2\hat{y}^2 + 3\hat{z}^2 - 4\hat{x} = 0$$

Якщо поділити на 4, отримаємо $\frac{\hat{y}^2}{2} + \frac{\hat{z}^2}{4/3} - \hat{x} = 0$ — еліптичний параболоїд.

Завданя 4.

Вхідні данні:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \gamma = -2$$

Характеристичний поліном $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 9)$, отже власні числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$.

Для $\lambda_1 = 0$ маємо перетин $-y + 2z = 0$ та $x + y - 4z = 0$, отже візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 9$ маємо перетин $5x + 5y - 2z = 0, 2x + 2y - 17z = 0$, тобто $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = -9$ маємо перетин $4y + z = 0, 2x + 2y + z = 0$, тобто $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Вектор зміщення:

$$p_1 = 0,\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = -9;\ p_2 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle}{\lambda_2} = 0;\ p_3 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_3 \rangle}{\lambda_3} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Вільний коефіцієнт: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_2 p_2^2 - \lambda_3 p_3^2 = 6$. Отже маємо:

$$9\widetilde{y}^2 - 9\widetilde{z}^2 - 18\widetilde{x} + 6 = 0 \implies 3\widetilde{y}^2 - 3\widetilde{z}^2 - 6\widetilde{x} + 2 = 0$$

Якщо зробити перетворення $\widetilde{x} = \hat{x} - 1/3, \widetilde{y} = \hat{y}, \widetilde{z} = \hat{z}$, отримаємо:

$$\frac{\hat{y}^2}{2} - \frac{\hat{z}^2}{2} - \hat{x} = 0$$

Отже маємо гіперболічний рівносторонній параболоїд.

Завданя 5.

Вхідні данні:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix},\ \gamma = 30$$

Характеристичний поліном $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)$, отже власні числа $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Для $\lambda_1 = 3$ маємо перетин $2x - 3y + 2z = 0$ та $y - z = 0$, отже візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 6$ маємо перетин $x - 2y = 0, 2y + z = 0$, тобто $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = 9$ маємо перетин $x + y = 0, y + 2z = 0$, тобто $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу Q:

$$Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор зміщення $p_j = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_j \rangle}{\lambda_j}, j = \overline{1,3}$:

$$p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = 1$$

Вільний коефіцієнт: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \sum_{j=1}^{3} \lambda_j p_j^2 = -6$. Отже маємо:

$$3\widetilde{x}^2 + 6\widetilde{y}^2 + 9\widetilde{z}^2 - 6 = 0 \implies \frac{\widetilde{x}^2}{2} + \widetilde{y}^2 + \frac{\widetilde{z}^2}{2/3} = 1$$

Отже перед нами еліпсоїд з півосями $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2/3}$.