

# Самостійна робота з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

25 листопада 2023 р.

## Завдання

**Умова.** Довести, що множина  $A$  є борельовою та знайти її міру Лебега  $\lambda_2(A)$  для

$$A = ([-4, 8] \times (2, 4)) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$$

**Розв’язок.**

*Підпункт 1.* Доведемо, що  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ . Помітимо, що

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times \mathbb{R}$$

Помітимо, що  $\{q\} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , тому і нескінченне об’єднання буде борельовою множиною. Отже, ми маємо, що  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

Далі розберемося з множиною  $[-4, 8] \times (2, 4)$ . Запишемо цей добуток наступним чином:

$$\begin{aligned} [-4, 8] \times (2, 4) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{-4\} \cup (-4, 8]) \times \left(2, 4 - \frac{1}{n}\right] \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \{-4\} \times \left(2, 4 - \frac{1}{n}\right] \right) \cup \left( (-4, 8] \times \left(2, 4 - \frac{1}{n}\right] \right) \end{aligned}$$

Проаналізуємо тепер цей вираз.  $\{-4\} \times (2, 4 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , а отже і нескінченне об’єднання також буде належати  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

Для правого виразу  $(4, 8] \times (2, 4 - \frac{1}{n}]$  помічаємо, що він належить  $\mathcal{P}_2$ , а отже належить і  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

Отже, маємо об'єднання двох множин  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , що теж є борельовою множиною. Таким чином,  $[-4, 8] \times (2, 4) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

Отже,  $A$  є різницею двох борельових множин, а оскільки  $\sigma$ -алгебра є замкненою відносно  $\setminus$ , то і  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

*Підпункт 2.* Знайдемо  $\lambda_2(A)$ . Помітимо, що з іншого боку

$$A = ([-4, 8] \setminus \mathbb{Q}) \times (2, 4) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([-4, 8] \setminus \mathbb{Q}) \times \left(2, 4 - \frac{1}{n}\right]$$

Отже, якщо позначити  $A_n := ([-4, 8] \setminus \mathbb{Q}) \times (2, 4 - \frac{1}{n}]$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_2(A) &= \lambda_2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (8 + 4) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= 12 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 24 \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $\lambda_2(A) = 24$ .