Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #4

Захаров Дмитро

9 листопада, 2024

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Номер 3.3 (1).

Умова Задачі 1.1. Розв'язати задачу для рівняння $\Delta u = 0, x_1 > 0, x_2 > 0$ з граничними умовами $u\Big|_{x_1=0} = a$, $u\Big|_{x_2=0} = b$.

Розв'язання. Як було показано, функція Гріна для області $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \log\big((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2\big) + \frac{1}{4\pi} \log\big((x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\big) \\ - \frac{1}{4\pi} \log\big((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\big) - \frac{1}{4\pi} \log\big((x_1 + \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2\big) \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок нашої задачі можна записати у вигляді

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} g(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}$$

В нашому випадку, $f(\boldsymbol{\xi}) = 0$, а межа $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ може бути поділена на дві частини: $\partial\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 > 0\}$ та $\partial\Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 > 0\}$. Тоді розв'язок можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} g(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} - \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} g(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= -a \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS_{\boldsymbol{\xi}} - b \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$

Для границі $\partial\Omega_1$ маємо вектор нормалі $\boldsymbol{\nu}_1 = (-1, 0)$, тому нас цікавить похідна функції Гріна за цим напрямком за умови $x_1 = 0$ (було виведено на лекції):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_1}\Big|_{x_1=0} &= -\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1}\Big|_{x_1=0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 + \xi_2)^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2}\right) \\ \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_2}\Big|_{x_2=0} &= -\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2}\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_2}{(x_1 + \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}\right) \end{aligned}$$

Тепер можемо підставити ці вирази у нашу формулу для розв'язку:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -a \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS_{\boldsymbol{\xi}} - b \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} dS_{\boldsymbol{\xi}} \\ &= -a \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 + \xi_2)^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2}\right) d\xi_2 \\ &\quad - b \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\left(\frac{x_2}{(x_1 + \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}\right) d\xi_1 \end{aligned}$$

Трошки перетосуємо інтеграли:

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2) = -\frac{ax_1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^2+(x_2+\xi_2)^2}-\frac{1}{x_1^2+(x_2-\xi_2)^2}\right)d\xi_2 \\
-\frac{bx_2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(x_1+\xi_1)^2+x_2^2}-\frac{1}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}\right)d\xi_1
\end{aligned}
$$

Далі достатньо знайти кожен інтеграл окремо. Проте, всі чотири є частковими випадками наступного інтегралу:

$$
\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty}\frac{d\zeta}{\alpha^2+(\beta+\zeta)^2}
$$

Тоді, відповідь буде мати вигляд:

$$
u(x_1, x_2) = -\frac{ax_1}{\pi}\left(\mathcal{J}(x_1, x_2)-\mathcal{J}(x_1, -x_2)\right)-\frac{bx_2}{\pi}\left(\mathcal{J}(x_2, x_1)-\mathcal{J}(x_2, -x_1)\right)
$$

Саму функцію $\mathcal{J}(\alpha, \beta)$ можна легко порахувати явно:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty}\frac{d\zeta}{1+\left(\frac{\beta+\zeta}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{\beta+\zeta}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\beta+\zeta}{\alpha}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\beta+\zeta}{\alpha}\Big|_{\zeta\to 0}^{\zeta\to+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\arctan(\beta/\alpha)}{\alpha}
\end{aligned}
$$

Таким чином:

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= -\frac{ax_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2x_1}-\frac{\arctan(x_2/x_1)}{x_1}-\frac{\pi}{2x_1}+\frac{\arctan(-x_2/x_1)}{x_1}\right) \\
&\quad -\frac{bx_2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2x_2}-\frac{\arctan(x_1/x_2)}{x_2}-\frac{\pi}{2x_2}+\frac{\arctan(-x_1/x_2)}{x_2}\right) \\
&= -\frac{ax_1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\arctan(x_2/x_1)}{x_1}\right)-\frac{bx_2}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\arctan(x_1/x_2)}{x_2}\right) \\
&= \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{x_2}{x_1}+\frac{2b}{\pi}\arctan\frac{x_1}{x_2}
\end{aligned}
$$

Відповідь: $u(x_1, x_2) = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{x_2}{x_1}+\frac{2b}{\pi}\arctan\frac{x_1}{x_2}$.

1.2 Номер 3.3 (3).

Умова Задачі 1.2. Розв'язати задачу для рівняння $\Delta u = 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ з граничними умовами $u\Big|_{x_1=0} = 0$, $u\Big|_{x_2=0} = \theta(x_1 - 1)$.

Розв'язання. Згідно попередньому прикладу, все зводиться до обчислення інтегралу:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \phi(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi = -\int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}_2} \theta(\xi_1 - 1) dS_\xi \\ &= -\frac{x_2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{(x_1 + \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \right) \theta(\xi_1 - 1) d\xi_1 \\ &= -\frac{x_2}{\pi} \int_1^\infty \left(\frac{1}{(x_1 + \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \right) d\xi_1 \\ &= -\frac{x_2}{\pi} \left(\int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(x_1 + \xi_1)^2 + x_2^2} - \int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \right) \end{aligned}$$

Як і в минулому прикладі, позначимо

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta) = \int_1^{+\infty} \frac{d\zeta}{\alpha^2 + (\beta + \zeta)^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\beta + \zeta}{\alpha} \Big|_{\zeta \to 1}^{\zeta \to +\infty} = \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\beta + 1}{\alpha}$$

Тоді,

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -\frac{x_2}{\pi} \left(\mathcal{J}(x_2, x_1) - \mathcal{J}(x_2, -x_1) \right) \\ &= -\frac{x_2}{\pi} \left(-\frac{1}{x_2} \arctan \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{1}{x_2} \arctan \frac{-x_1 + 1}{x_2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x_1 - 1}{x_2} + \arctan \frac{x_1 + 1}{x_2} \right) \end{aligned}$$

Відповідь. $u(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x_1 - 1}{x_2} + \arctan \frac{x_1 + 1}{x_2} \right)$.