Теорія Ймовірності

Весняний семестр 2024

Домашня Робота 1

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Півень О.Л.*

§ Аксіоматичне означення ймовірностей §

Задача 1: Номер 2.1, Турчин

Умова. Указати події, протилежні до таких:

1. Поява герба в результаті двох підкидань монети.
2. Три влучання в результаті трьох пострілів по мішені.
3. Принаймі одне влучання в результаті трьох пострілів по мішені.

Розв'язок.

1. Поява реверса двічі.
2. Принаймні один промах в результаті трьох пострілів.
3. Три промахи в результаті трьох пострілів.

Задача 2: Номер 2.2, Турчин

Умова. Зроблено три постріли по мішені. Нехай подія A_i полягає в тому, що в результаті i-го пострілу є влучання, $i \in \{1, 2, 3\}$. Виразити через A_i такі події:

1. A – "відбулося три влучення."
2. B – "не було жодного влучання"
3. C – "відбулося лише одне влучення"
4. D – "відбулося не менше двох влучень"

Розв'язок.

1. $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
2. $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$.
3. $C = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$.
4. $D = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Задача 3: Номер 2.3, Турчин

Умова. Нехай A, B, C – випадкові події. Записати події, які полягають у тому, що не відбулося жодної з подій A, B, C; з подій A, B, C відбулися:

1. Тільки подія A.
2. Події A і B і не відбулася C.
3. Усі три події.
4. Принаймі одна подія.
5. Одна й тільки одна подія.
6. Не більше двох подій.

Розв'язок. Якщо не відбулася жодна з подій, то це означає $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. Далі по пунктам:

1. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
2. $A \cap B \cap \overline{C}$.
3. $A \cap B \cap C$.
4. $A \cup B \cup C$.
5. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
6. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.

Задача 4: Номер 3.2, Турчин

Умова. У навмання вибраній групі, яка налічує r студентів, цікавимося місяцямі їхнього народження. Обчислити ймовірність події A, яка полягає в тому, що принаймі двоє зі студентів народилися в одному й тому самому місяці.

Розв'язок. Оскільки кожен студент може мати день народження в один з 12 місяців, всього варіантів днів народження $|\Omega| = 12^r$.

Далі помітимо, що якщо $r > 12$, то ймовірність дорівнює 1, оскільки в будь-якому разі будуть два студента, що народились в одному місяці.

Далі будемо цікавитись подією $\overline{A}$ – не знайдеться два студента, що народились в одному місяці. Тоді кількість таких подій $|\overline{A}| = 12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (13 - r)$. Цю кількість також можна записати як:

$$|\overline{A}| = \frac{12!}{(12-r)!} = P_{12}^r \tag{4.1}$$

Таким чином, ймовірність нашої події:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{P_{12}^r}{12^r} \tag{4.2}$$

Остаточна відповідь:

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 - P_{12}^r/12^r, & 1 \le r \le 12 \\ 0, & r > 12 \end{cases} \tag{4.3}$$