Домашня робота з диференціальної геометрії #3

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

5 березня 2023 р.

Завдання 2.1.

Умова. Розглянемо наступні параметрично задані криві:

$$\gamma_1 : \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 : \boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} A\cosh t \\ B\sinh t \end{bmatrix}$$

За яких параметрів $A, B, a, b > 0$ криві перетинаються під кутом $\pi/2$?

Розв'язок. Спочатку знайдемо точки перетину, тобто:

$$\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{g}(t_0) \to \begin{bmatrix} a\cos t_0 = A\cosh t_0 \\ b\sin t_0 = B\sinh t_0 \end{bmatrix}$$

Явно це ми не можемо розв'язати, тому одразу запишемо умову перетину під кутом $\pi/2$. Напрямні вектори у точці t_0 мають вид $\frac{d\boldsymbol{f}(t_0)}{dt}, \frac{d\boldsymbol{g}(t_0)}{dt}$. Оскільки кут між ними прямий, то:

$$\left\langle \frac{d\boldsymbol{f}(t_0)}{dt}, \frac{d\boldsymbol{g}(t_0)}{dt} \right\rangle = 0$$

Знаходимо вирази для похідних:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{bmatrix}, \ \frac{d\boldsymbol{g}}{dt} = \begin{bmatrix} A\sinh t \\ B\cosh t \end{bmatrix}$$

Отже:

$$-aA\sin t_0 \sinh t_0 + bB\cos t_0 \cosh t_0 = 0$$

Трохи перепишемо:

$$aA\sin t_0 \sinh t_0 = bB\cos t_0 \cosh t_0 \to \tan t_0 \tanh t_0 = \frac{bB}{aA}$$

Проте, з умови перетину, якщо поділити одне рівняння на інше:

$$\frac{b}{a}\tan t_0 = \frac{B}{A}\tanh t_0 \to \tanh t_0 = \frac{bA}{aB}\tan t_0$$

Підставляємо у рівняння вище:

$$\tan^2 t_0 \cdot \frac{bA}{aB} = \frac{bB}{aA} \to \tan^2 t_0 = \frac{B^2}{A^2} \to \tan t_0 = \pm\frac{B}{A}$$

А отже можемо знайти і гіперболічний тангенс:

$$\tanh t_0 = \frac{bB}{aA \cdot (\pm B/A)} = \pm\frac{b}{a}$$

Отже бачимо, що повинно виконуватись:

$$\tanh^{-1}\left(\pm\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\pm\frac{B}{A}\right)$$

Знаки можна прибрати. Отримуємо:

$$\tanh^{-1}\frac{b}{a} = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

Завдання 2.2.

Ця задача є еквівалентною задачі 2.1, оскільки маємо коло та гіперболу, яку параметрично можна задати згідно рівнянням з 2.1. Якщо б її довелось розв'язувати чесно, то потрібно замість умов з 2.1., окрім умов на перетин, записати перпендикулярність градієнтів.

Завдання 2.3.

Умова. Розглянемо наступну параметрично задану криву γ:

$$\gamma : \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \rho(t)\cos t \\ \rho(t)\sin t \end{bmatrix},$$

де $\rho(t)$ є неперервно диференційованою функцією.

За яких умов на функцію $\rho(t)$ задана крива γ буде регулярною?

Підберіть функцію $\rho(t)$ так, щоб задана крива γ перетиналась з будь-яким променем, що виходить з початку координат O, під одним і тим же кутом α.

Розв'язок.

Питання 1. Крива є регулярною, коли ми не знайдемо жодного $t = t_0$, що $\frac{d\boldsymbol{f}(t_0)}{dt} = 0$. Знайдемо вираз для похідної:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + \rho(t)\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Прирівнюємо до 0:

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t_0)\cos t_0 = \rho(t_0)\sin t_0 \\ \dot{\rho}(t_0)\sin t_0 = -\rho(t_0)\cos t_0 \end{cases}$$

Якщо поділити одне рівняння на інше:

$$\frac{\cos t_0}{\sin t_0} = \frac{\sin t_0}{-\cos t_0} \to \sin^2 t_0 + \cos^2 t_0 = 0$$

Ця умова ніколи не виконується, отже не знайдеться жодної точки t_0, що може задовольнити умові нерегулярності. Єдине, що ми не розглянули: це випадки якщо $\dot{\rho} = 0$ або $\rho = 0$. Другий випадок відповідає єдиній точці 0, а перший випадок задає коло, що є регулярною кривою.

Питання 2. Будь-який промінь ми можемо задати параметрично як:

$$\ell : \boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} t\cos\beta \\ t\sin\beta \end{bmatrix}$$

де $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix}$ є напрямним вектором якогось довільного променю. Отже, знайдемо кут між ℓ та γ. Як ми вже знайшли, похідна нашої функції:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}\cos t - \rho\sin t \\ \dot{\rho}\sin t + \rho\cos t \end{bmatrix}$$

Знайдемо модуль:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \sqrt{(\dot{\rho}\cos t - \rho\sin t)^2 + (\dot{\rho}\sin t + \rho\cos t)^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2}$$

Запишемо умову перетину:

$$\boldsymbol{f}(t_0) = \boldsymbol{g}(t_0) \to \begin{cases} \rho(t_0)\cos t_0 = t_0\cos\beta \\ \rho(t_0)\sin t_0 = t_0\sin\beta \end{cases}$$

Кут між векторами, що за умовою є α:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{e} \rangle}{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2}$$

Залишилось записати лише скалярний добуток:

$$\begin{aligned} \langle \dot{\boldsymbol{f}}(t_0), \boldsymbol{e} \rangle = \cos\beta(\dot{\rho}\cos t - t_0\sin\beta) + \sin\beta(\dot{\rho}\sin t + t_0\cos\beta) = \\ \dot{\rho}(t_0)(\cos t_0\cos\beta + \sin\beta\sin t_0) = \dot{\rho}(t_0)\cos(t_0 - \beta) \end{aligned}$$

Окрім цього помітимо, що з умови перетину $\tan\beta = \tan t_0$. Тоді $\beta = t_0 + \pi k$, але оскільки додаток $+\pi k$ у подальшому лише змінить знак, то для простоти можна вважати $\beta = t_0$. Тоді:

$$\langle \dot{\boldsymbol{f}}(t_0), \boldsymbol{e} \rangle = \dot{\rho}(t_0)\cos 0 = \dot{\rho}(t_0)$$

В такому разі кут:

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\rho}(t_0)}{\sqrt{\dot{\rho}^2(t_0) + \rho^2(t_0)}} \to \dot{\rho}^2 = \frac{\rho^2}{\tan^2\alpha} \to \dot{\rho} = \pm\frac{1}{\tan\alpha}\rho$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\rho(t) = \rho_0 \exp\left(\pm\frac{t}{\tan\alpha}\right)$$

Завдання 3.1.

Умова. Перевірте, що для параметрично заданої гвинтової лінії γ в $\mathbb{R}^3$

$$\gamma : \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht \end{bmatrix}$$

щільнодотичні площини в усіх точках кривої нахилені однаково по відношенню до вертикального координатного напрямку x^3.

Обчисліть величину кута між щільнодотичною площиною кривої в довільній точці та координатною віссю x^3.

Розв'язок. Запишемо рівняння щільнодотичної площини:

$$\pi : \boldsymbol{p}(u,v) = \boldsymbol{f}(t_0) + \frac{d\boldsymbol{f}(t_0)}{dt}u + \frac{d^2\boldsymbol{f}(t_0)}{dt^2}v$$

З нього бачимо, що площина утворена двома векторами:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t_0) = \begin{bmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ h \end{bmatrix},\ \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} = \begin{bmatrix} -\cos t_0 \\ -\sin t_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Знайдемо кут між вектором нормалі та вектором вздовж вісі x^3, нехай $\boldsymbol{e} = [0, 0, 1]^\top$. Вектор нормалі:

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right] = \begin{bmatrix} h\sin t \\ -h\cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

В такому разі кут між цим вектором та $\boldsymbol{e}$:

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{e} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{h^2+1}}$$

Отже бачимо, що дійсно кут постійний і незалежить від обранної точки на γ, причому цей кут дорівнює $\arccos\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}$.