Контрольна робота #1 з курсу “Комплексний аналіз”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Варіант 5.

Задача 1.

Умова. Знайти $\mathrm{Re}\,(-i-1)^{1/3}$.

Розв'язок. Прочатку запишемо $-1-i$ в полярній формі. Помітимо, що:

$$-1-i = -(1+i) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+2\pi ki},\ k \in \mathbb{Z}$$

Отже, якщо піднесемо до ступеня:

$$(-1-i)^{1/3} = (-\sqrt{2}e^{i\pi/4+2\pi ki})^{1/3} = -\sqrt[6]{2}e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2\pi ki}{3}},\ k \in \mathbb{Z}$$

Тому дійсна частина:

$$\mathrm{Re}\,(-1-i)^{1/3} = -\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Коментар. По суті, ми розв'язували рівняння $z^3 = -i-1$ і отримали 3 корні, якщо підставляти $k = 0, 1, 2$.

Відповідь. $-\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Задача 2.

Умова. Знайти $\operatorname{Im}(i\sqrt{3}-1)^{i-1}$.

Розв'язок. Використаємо той факт, що $z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$.

Тому переводимо $z = i\sqrt{3}-1$ у полярну форму:

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2\pi i}{3}+2\pi k i}$$

Тому:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} 2e^{\frac{2\pi i}{3}+2\pi k i} = \log 2 + \frac{2\pi i}{3} + 2\pi k i$$

Отже:

$$\operatorname{Im}(i\sqrt{3}-1)^{i-1} = \operatorname{Im} e^{(i-1)(\log 2 + \frac{2\pi}{3} i + 2\pi k i)}$$

Розкриємо дужки у ступені:

$$(i-1)\left(\log 2 + \frac{2\pi}{3} i + 2\pi k i\right) = i\log 2 - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k - \log 2 - \frac{2\pi}{3} i - 2\pi k i = \\ \left(-\frac{2\pi}{3} - \log 2 - 2\pi k\right) + i\left(\log 2 - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)$$

Отже, уявна частна $e^{\text{цього виразу}}$:

$$e^{-2\pi/3 - \log 2 - 2\pi k} \sin\left(\log 2 - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Відповідь. $e^{-2\pi/3 - \log 2 - 2\pi k} \sin\left(\log 2 - \frac{2\pi}{3}\right)$

Задача 3.

Умова. Розв'язати рівняння $\sin z = -i$.

Розв'язок. Запишемо синус згідно комплексному означенню:

$$\sin z \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Отже, якщо зробимо заміну $w = e^{iz}$:

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = -i \implies w - \frac{1}{w} = 2 \implies w^2 - 2w - 1 = 0$$

Розв'язуємо це квадрате рівняння:

$$w = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Отже, або $e^{iz} = 1 + \sqrt{2}$, або $e^{iz} = 1 - \sqrt{2}$.

В першому випадку $z = \frac{1}{i}(\log(1+\sqrt{2}) + 2\pi k i) = -i\log(1+\sqrt{2}) + 2\pi k$, у другому $z = -i\log(1-\sqrt{2}) + 2\pi k$.

Оскільки $1 - \sqrt{2} < 0$, то можна додатково розписати $\log(1-\sqrt{2}) = \log(\sqrt{2}-1) + \pi i$ (використовуючи формулу $\log x = \log|x| + i\pi$ для $x < 0$), тому другий коріень можна записати як $z = \pi + i\log(1+\sqrt{2}) + 2\pi k$

Відповідь. $z = -i\log(1+\sqrt{2}) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ або $z = \pi + i\log(1+\sqrt{2}) + 2\pi k$.

Задача 4.

Умова. Знайти точки, в яких функція $f(x+iy) = x^2 + y^2 - 2x - 2ixy$ є диференційованою.

Розв'язок. Скористаємося умовою Коші-Рімана. В нашому випадку, якщо $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, то має виконуватись:

$$u'_x = v'_y \wedge u'_y = -v'_x$$

Маємо $u(x,y) = x^2 + y^2 - 2x, v(x,y) = -2xy$. Тому:

$$\begin{cases} 2x - 2 = -2x \\ 2y = 2y \end{cases}$$

Множина (x,y), що є розв'язком цього рівняння, і є множиною точок, де функція є диференційованою. З першого рівняння $4x = 2$, тобто $x = \frac{1}{2}$. З другого $y \in \mathbb{R}$.

Отже, функція є диференційованою на прямій $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь. На усіх точках на прямій $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

Задача 5.

Умова. Зобразити на площині ГМТ, які задовольняють умові $z = te^{-5\pi i/3}, 0 \leq t \leq 4$

Розв'язок. Знайдемо дійсні та уявні частини цього виразу:

$$\operatorname{Re} z = t\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}t,\ \operatorname{Im} z = t\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Отже, якщо розглянемо комплексну площину, то маємо параметризну криву:

$$\{x, y\}(t) = \{t/2, \sqrt{3}t/2\}$$

Це є прямою між $(0,0)$ та $(2, 2\sqrt{3})$. Або, частина променю $\operatorname{Arg} z = \pi/3$ між цими точками. Отже відповідь – рис. 1

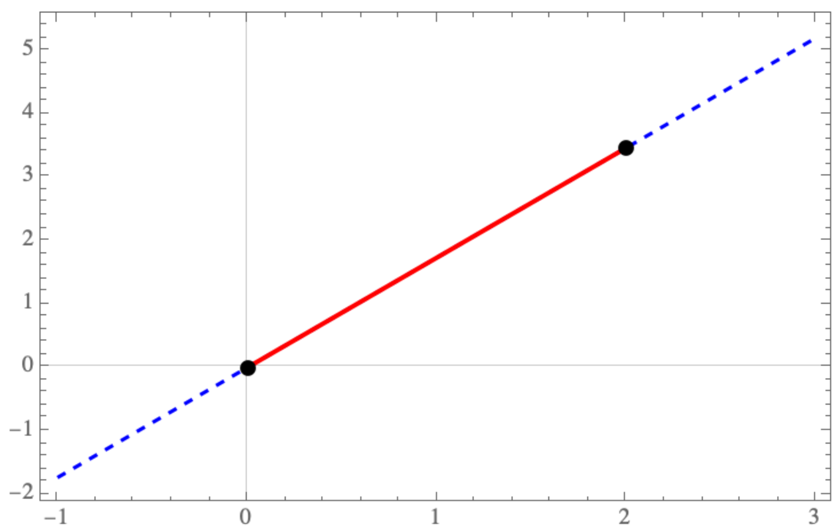

Рис. 1: Червоним помічена відповідь, **чорним** точки $(0,0)$ та $(2, 2\sqrt{3})$, синім – промінь

Задача 6.

Умова. Зобразити ГМТ, які задовольняють умові

$$\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z + 1| < 1 \wedge |\operatorname{Im} z - 1| > 1\}$$

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$. Тоді на $\mathbb{R}^2$ маємо наступне ГМТ:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 1| < 1 \wedge |y - 1| > 1\}$$

Умова $|x + 1| < 1$ означає інтервал $(-2, 0)$.

Умова $|y - 1| > 1$ означає $\mathbb{R} \setminus [0, 2] = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Таким чином, наше ГМТ це декартовий добуток $(-2, 0) \times (\mathbb{R} \setminus [0, 2])$. Тому відповідь зображена на 2 (на пунктири на самому верху та низу не звертати увагу, область йде далі вгору і вниз).

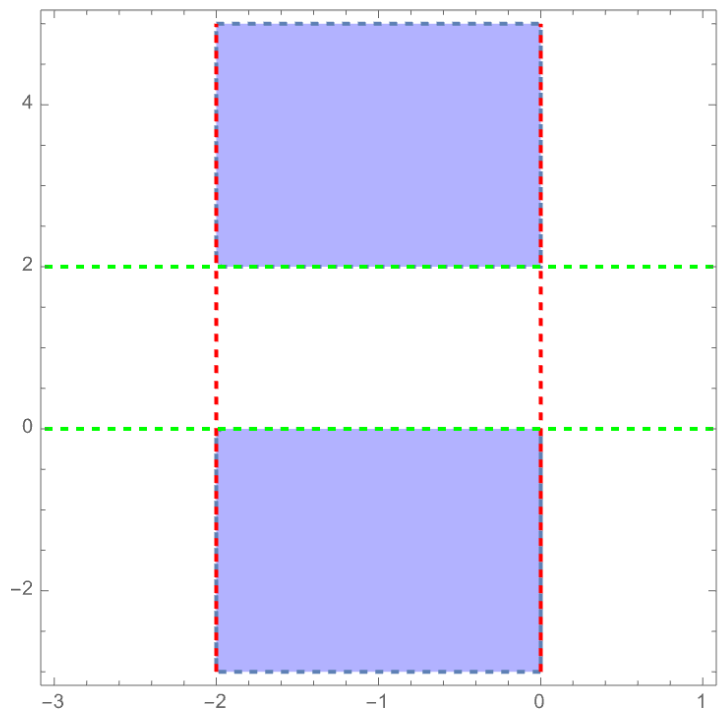

Рис. 2: Синім помічена відповідь. червоним – прямі $x = -2, x = 0$, зеленим – прямі $y = 0, y = 2$

Задача 7.

Умова. Відновити аналітичну функцію за її дійсною частиною:

$$u(x, y) = e^y \sin x + x^2 - y^2$$

Розв'язок. Якщо функція аналітична, то мають виконуватись умови Коші-Рімана:

$$u'_x = v'_y \wedge u'_y = -v'_x$$

Отже, розв'яжемо це рівняння відносно $v(x, y)$. Маємо:

$$\begin{cases} v'_y = e^y \cos x + 2x \\ v'_x = -e^y \sin x + 2y \end{cases}$$

Якщо проінтегрувати перше рівняння, то отримаємо:

$$v = \int (e^y \cos x + 2x)\, dy = e^y \cos x + 2xy + \varphi(x)$$

Підставляємо у друге:

$$-e^y \sin x + 2y + \varphi'(x) = -e^y \sin x + 2y \to \varphi'(x) = 0 \to \varphi \equiv \text{const}$$

Отже, остаточно:

$$v(x, y) = e^y \cos x + 2xy + C,\ C = \text{const}$$

Відповідь. $f(x + iy) = (e^y \sin x + x^2 - y^2) + (e^y \cos x + 2xy + C)i,\ C = \text{const}$

Задача 8.

Умова. Спростити вираз $z = \frac{(2i+3)^2}{(2+i)(1-i)}$.

Розв'язок. Розпишемо чисельник та знаменник:

$$(2i+3)^2 = (2i)^2 + 3^2 + 2 \cdot 2i \cdot 3 = 5 + 12i$$

$$(2+i)(1-i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i$$

Отже

$$z = \frac{5+12i}{3-i} = \frac{(5+12i)(3+i)}{10} = \frac{15+5i+36i-12}{10} = \frac{3}{10} + \frac{41i}{10}$$

Відповідь. $\frac{3}{10} + \frac{41}{10}i$