Контрольна робота з математичного аналізу #5

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

29 травня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Знайти масу частини циліндричної поверхні $\sigma : y = \sqrt{9 - z^2}$, яка відтиняється площинами $x = 0, x = 2$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y, z) = 5y(x + z)$.

Розв'язок. Отже, за **фізичним змістом поверхневого інтеграла**, наша шукана маса:

$$m = \iint_\sigma \mu(x, y, z) dS$$

Отже, нам потрібно параметризувати нашу циліндричну поверхню. Для цього спочатку намалюємо її. Результат можна побачити на рис. 1.

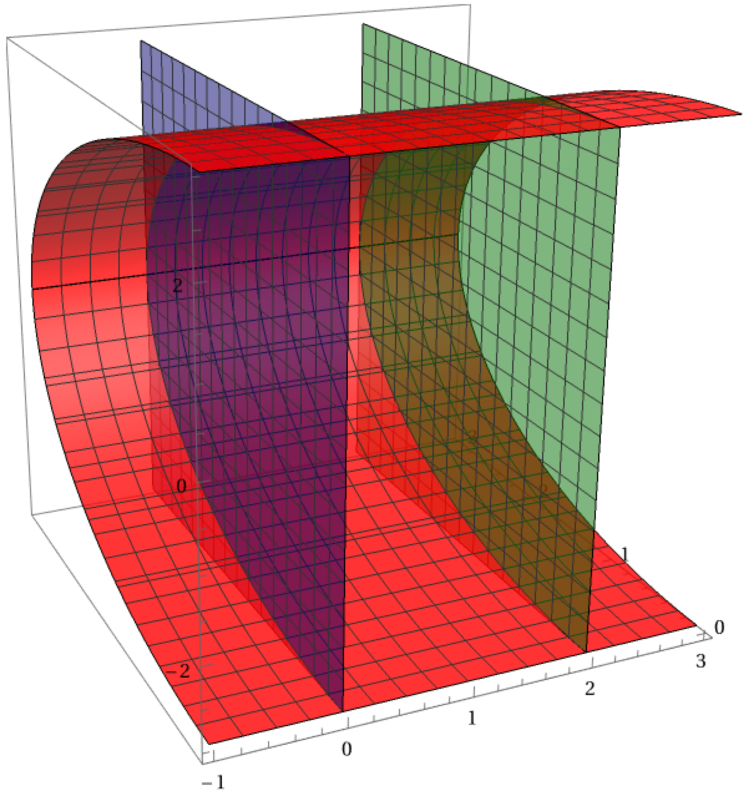

Рис. 1: Циліндрична поверхня σ

Для параметризації зручно записати умову $y^2 + z^2 = 9$, тоді нехай $y = 3\sin\theta, z = 3\cos\theta$, де θ визначає позицію точки на колі радіуса 3. Проте, варто визначитись з тим, які самі межі у нашого кута θ. Для цього помітимо, що у виразі $y = \sqrt{9 - z^2}$, z пробігає значення від $[-3, 3]$, а ось y лише $[0, 3]$. З малюнку видно, що перед нами фактично півколо, тому якщо обмежити $\theta \in [0, \pi]$, то отримаємо шукані відповідні межі для y та z.

Залишилось лише у якості другого параметра обрати координату по x, тобто нехай $x = u$, де $u \in [0, 2]$. Отже, наша поверхня остаточно параметризується як:

$$\boldsymbol{r}(u, \theta) = [u, 3\sin\theta, 3\cos\theta]^\top,\ \theta \in [0, \pi],\ u \in [0, 2]$$

Далі скористаємось **теоремою про обчислення поверхневого інтегралу 1 роду**.

Теорема 1: Про обчислення інтегралу 1 роду

Нехай маємо радіус-вектор $\boldsymbol{r}(u,v)$ заданий на області внутрішніх координат $\mathcal{D}$, який описує поверхню $\mathcal{S}$. Тоді поверхневий інтеграл $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS$ може бути обрахований за наступною формулою:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS = \iint_{\mathcal{D}} f(\boldsymbol{r}(u,v))\|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\|_2 dudv$$

В нашому конкретному випадку маємо:

$$\boldsymbol{r}'_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{r}'_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\cos\theta \\ -3\sin\theta \end{bmatrix}$$

Отже векторний добуток:

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sin\theta \\ 3\cos\theta \end{bmatrix} \to \|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_\theta\|_2 = 3$$

Тому наш інтеграл, згідно теоремі вище:

$$\iint_\sigma 5y(x+z)dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 5\cdot 3\sin\theta(u+3\cos\theta)\cdot 3du =$$
$$45\int_0^\pi d\theta \int_0^2 \left(u\sin\theta + \frac{3}{2}\sin 2\theta\right) du = 45\int_0^\pi \left(\frac{u^2}{2}\sin\theta + \frac{3u}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{u=0}^{u=2} d\theta =$$
$$45\int_0^\pi (2\sin\theta + 3\sin 2\theta)d\theta = 90\int_0^\pi \sin\theta d\theta + 135\int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 180$$

В останньому шагу ми скористались тим, що період $\sin 2\theta$ це π, а отже $\int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0$, а також, що $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2$.

Відповідь. 180.

Завдання 2.

Умова. Обчислити за допомогою теореми Гаусса-Остроградського:

$$\oiint_{\mathcal{S}^+} x^3 dydz + z^3 dxdy + y^3 dxdz$$

де $\mathcal{S}^+$ це внутрішня поверхня $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Розв'язок. Отже, нагадаємо теорему Гаусса-Остроградського:

Теорема 2: Формула Остроградського-Гаусса

Нехай маємо деяку область $V \subset \mathbb{R}^3$, яка обмежена поверхнею $\mathcal{S}$. Якщо $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ є неперервно диференційованою на V, то

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle dS$$

Отже, намалюємо нашу поверхню. Результат зображений на рис. 2.

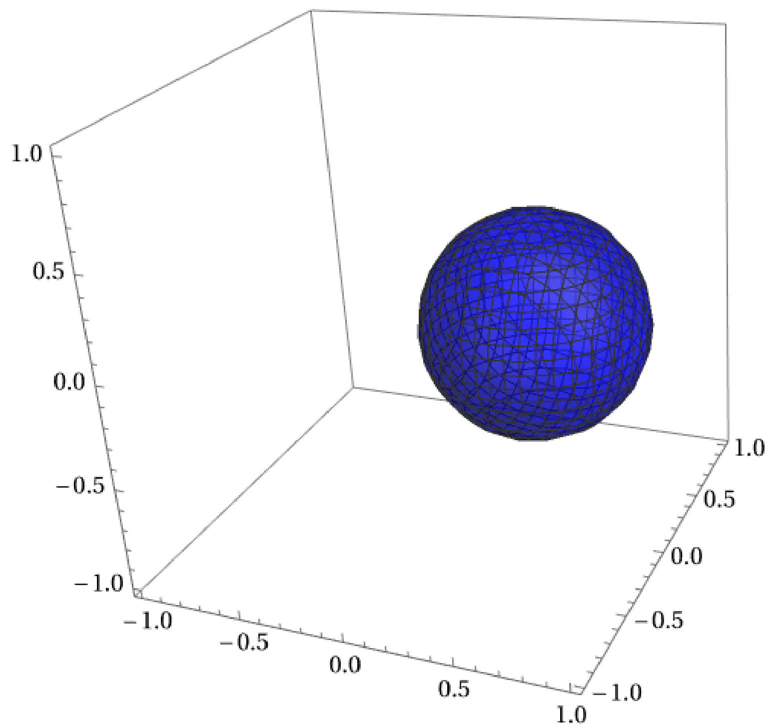

Рис. 2: Поверхня $\mathcal{S}$.

Як бачимо, перед нами просто сфера, але зсунута. Знайдемо центр і радіус зробивши невеликі алгебраїчні перетворення з рівнянням $\mathcal{S}^+$:

$$(x^2 - x) + y^2 + z^2 = 0 \to \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

Отже маємо сферу радіуса $1/2$ з центром у $[1/2, 0, 0]^\top$.

Тепер знайдемо дивергенцію векторного поля. В нашому випадку, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x^3, y^3, z^3]^\top$, тому

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Тепер ми готові застосувати формулу Остроградського-Гаусса:

$$\mathcal{I} := \oiint_{\mathcal{S}^+} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle = -3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

де V це наш шар $(x-1/2)^2+y^2+z^2 \leq 1/4$. Знак "мінус" ми взяли через внутрішню орієнтацію вектора нормалі.

Далі обчислюємо цей інтеграл аналогічно до того, як ми це робили у попередній темі. Застосуємо узагальнені сферичні координати, тоді

$$x = \frac{1}{2} + \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$$

З межами все доволі просто: оскільки в нас ціла куля, то $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, а $\rho \in [0, 1/2]$.

Якобіан цього перетворення збігається з Якобіаном канонічного переходу до сферичних координат, тобто:

$$|J(\rho,\theta,\varphi)| = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right)\right| = \rho^2\sin\theta$$

Тепер, застосуємо **теорему про заміну змінних у кратному інтегралі**.

Теорема 3: Про заміну змінних у кратному інтегралі

Якщо від старих координат (x, y, z) в області V переходити до нових (u, v, w) у відповідній області V' (що задають одне й те саме тіло), то справедливо

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} H(u,v,w)|J(u,v,w)|dudvdw$$

де $J(u, v, w)$ Якобіан перетворення, а

$$H(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

Отже, відповідно до теореми, маємо:

$$\mathcal{I} = -3\iiint_{V'}(1/2+\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\theta)^2\cdot\rho^2\sin\theta dV =$$

$$-3\iiint_{V'}\left(\frac{1}{4}+\rho^2+\rho\cos\varphi\sin\theta\right)\rho^2\sin\theta dV$$

Далі використовуємо **теорему Фубіні** (її формулювання пропустимо, оскільки ми її вже використовували у минулих темах). Тоді наш інтеграл можна розділити наступним чином:

$$\mathcal{I} = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} + \rho^2 + \rho\cos\varphi\sin\theta\right)\rho^2\sin\theta d\rho$$

Далі його залишається просто акуратно порахувати. Розрахунки вийшли дуже об'ємними, тому не встигаю їх виписати. В мене виходить відповідь $\mathcal{I} = -\frac{\pi}{5}$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{5}$.

Завдання 3.

Умова. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2)dydz$$

де $\mathcal{S}$ є частиною поверхні параболоїду $x = 9 - y^2 - z^2$ (нормальний вектор $\boldsymbol{n}$ якої утворює гострий кут з ортом $\hat{x}$), яка відсічена площиною $x = 0$.

Розв'язок. Перше, що ми зробимо, це звичайно намалюємо малюнок. Результат можна побачити на рис. 3.

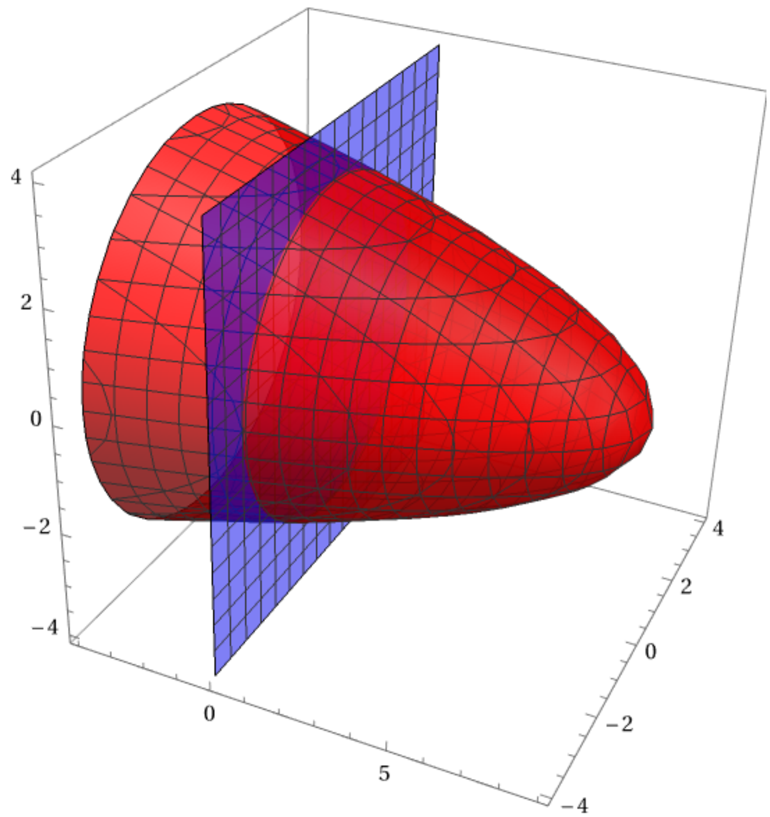

Рис. 3: Поверхня $\mathcal{S}$. Червоним відмічено $x = 9 - y^2 - z^2$, а синім площина $x = 0$.

Тепер, нам потрібно параметризувати поверхню. Доволі природньо спочатку покласти $x = u$, де $u \in [0, 9]$ ($u = 0$ відповідає відліку від площини $x = 0$, а $u = 9$ оскільки максимальне значення $x(y, z)$ це 9).

Тоді маємо, що $y^2 + z^2 = 9 - u$. В такому разі покладемо $y = \sqrt{9-u}\cos\theta$, $z = \sqrt{9-u}\sin\theta$. Оскільки нас не обмежують по колу, то $\theta \in [0, 2\pi]$. Отже, остаточно наша поверхня параметризується як:

$$\boldsymbol{r}(u, \theta) = [u, \sqrt{9-u}\cos\theta, \sqrt{9-u}\sin\theta]^\top,\ u \in [0, 9],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Далі нам потрібно знайти вектор нормалі до поверхні $\boldsymbol{n}(u, \theta)$, причому так, аби він складав гострий кут з $\hat{x} \equiv [1, 0, 0]^\top$. Тоді спробуємо спочатку його знайти як:

$$\boldsymbol{n}_{?!}(u,\theta) = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\cos\theta}{2\sqrt{9-u}} \\ -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{9-u}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{9-u}\sin\theta \\ \sqrt{9-u}\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{9-u}\cos\theta \\ -\sqrt{9-u}\sin\theta \end{bmatrix}$$

Тепер перевіримо, який кут між $\boldsymbol{n}_{?!}(u,\theta)$ та $\hat{x} = [1,0,0]^\top$. Для цього знаходимо скалярний добуток:

$$\langle \boldsymbol{n}_{?!}, \hat{x} \rangle = -1/2 < 0 \ \forall u \in [0,9]$$

Отже отримали тупий кут, тому в якості вектора нормалі покладемо $\boldsymbol{n}(u,\theta) := -\boldsymbol{n}_{?!}(u,\theta)$. Отже, остаточно, маємо вектор нормалі

$$\boldsymbol{n}(u,\theta) = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{9-u}\cos\theta, \sqrt{9-u}\sin\theta\right]^\top$$

Отже, ми готові обраховувати $\mathcal{I} := \iint_{\mathcal{S}} (y^2+z^2)dydz$. Скористаємося **теоремою про обчислення поверхневого інтегралу 2 роду з заданою параметризацією поверхні**.

Теорема 4: Про обчислення поверхневого інтегралу 2 роду

Нехай маємо поверхню $\mathcal{S}$, яка параметризована функцією $\boldsymbol{r}(u,v)$ на області внутрішніх координат $\mathcal{D}$. Аби парахувати $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{S}$, можна скористатись формулою

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))(\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)dudv$$

з поправкою на знак в залежності від орієнтації ненормалізованого вектора нормалі $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$.

Отже, скористаємось цією теоремою. Маємо векторне поле $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [y^2+z^2, 0, 0]^\top$. Якщо підставити нашу параметризацію поверхні, то отримаємо:

$$(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r})(u,\theta) = [9-u, 0, 0]^\top,\ u \in [0,9],\ \theta \in [0,2\pi]$$

Тоді, відповідно до теореми,

$$\iint_{\mathcal{S}}(y^2+z^2)dydz = \iint_{\mathcal{D}}\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,\theta)), \boldsymbol{n}(u,\theta)\rangle dud\theta = \\ \int_0^9 du \int_0^{2\pi}(9-u)\cdot\frac{1}{2}d\theta = \pi\int_0^9(9-u)du = \frac{81\pi}{2}$$

Відповідь. $\frac{81\pi}{2}$.

Замітка. Тут, наскільки я зрозумів з умови, потрібно було порахувати лише частину параболоїда. Якщо ще потрібно було врахувати кришку, то її можна було б параметризувати як $[0, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta]$, $\rho \in [0,3]$, $\theta \in [0,2\pi]$ і просто додати до нашого отриманого результату $\iint_{\mathcal{S}_\circ}(y^2+z^2)dydz$ де $\mathcal{S}_\circ$ є нашою кришкою.

Завдання 4.

Умова. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворено в результаті перетину площини π з координатними площинами. Напрямок обходу - проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатнього напрямку вісі Ox.

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = [z, x+y, y]^\top,\ \pi : 2x+y+2z=2$$

Розв'язок. Спочатку намалюємо малюнок. Результат зображений на рис. 4.

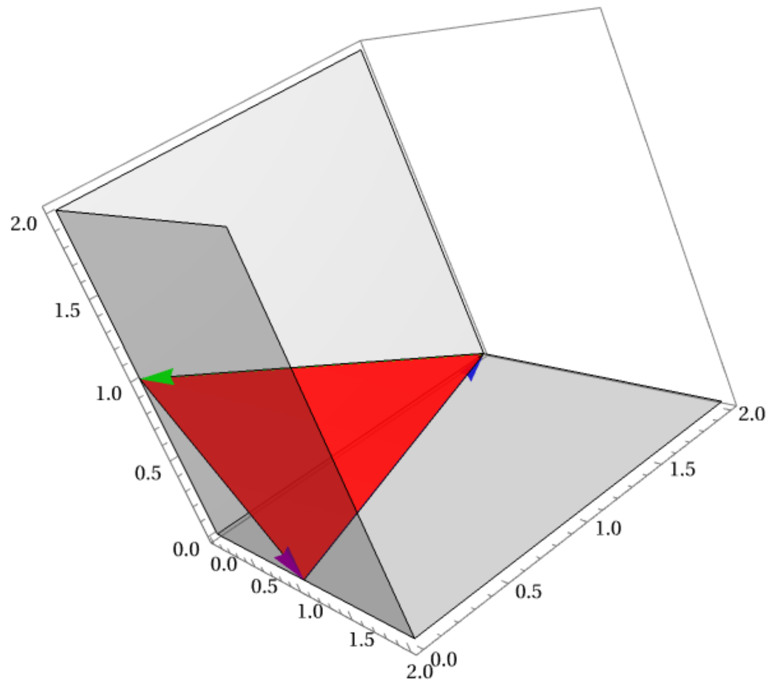

Рис. 4: Контур $\mathcal{C}$

Скористаємось теоремою Стокса. Нагадаємо формулювання:

Теорема 5: Формула Стокса

Нехай $\mathcal{D}$ є гладкою поверхнею в $\mathbb{R}^3$ з границею $\mathcal{C}$ і векторне поле $\boldsymbol{F}$ є неперервно диференційованою на $\mathcal{D}$. Тоді справедливо наступне:

$$\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{curl} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$$

Отже, знаходимо ротор нашого векторного поля:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x+y & y \end{bmatrix} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = [1,1,1]^\top$$

Бачимо, що це просто константний вектор.

Ми готові знаходити значення інтегралу через **формулу Стокса**. Маємо:

$$\mathcal{I} := \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathcal{D}} [1,1,1]^\top d\boldsymbol{S}$$

Оскільки маємо частину площини, то вектор нормалі (ненормалізований) постійний і дорівнює $\pm[2,1,2]^\top$. За **правилом Буравчика**, потрібно взяти знак плюс, щоб вона дивилась "від" початку координат відповідно до напрямку циркуляції. Тоді, $d\boldsymbol{S} = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^\top dS$. В такому разі

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} \langle [1,1,1]^\top, [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^\top \rangle dS = \frac{5}{3} \iint_{\mathcal{D}} dS$$

Геометрічний зміст $\iint_{\mathcal{D}} dS$ це просто площа цього трикутника. Трикутник утворений векторами $\boldsymbol{\alpha} = [-1,2,0]^\top$ та $\boldsymbol{\beta} = [-1,0,1]^\top$. Тоді:

$$\iint_{\mathcal{D}} dS = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}\| = \frac{1}{2}\|[2,1,2]^\top\| = \frac{3}{2}$$

Отже інтеграл:

$$\mathcal{I} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Відповідь. $\frac{5}{2}$.