🧮

Homework #2

Задание 639.

Пара векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in F^n, n \geq 2$ является линейно зависимой тогда и только тогда, когда:

$$\exists \lambda \in F : \vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$$

Заметим, что для данной конкретной пары мы не можем найти λ (пусть наши вектора $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$). Действительно, пусть $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1$. Тогда чтобы первая и вторая координата у вектора $\vec{v}_2$ и $\lambda \vec{v}_1$ были равны, нужно, чтобы $\lambda = 2$. Однако $3 \cdot 2 \neq 7$ (третья координата). Поэтому видим, что $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = 0$ только если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, т.е система линейно независима.

Задание 642.

Попробуем найти $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ такие, что:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{\theta}$$

Запишем это уравнение немного в другом виде:

$$\begin{cases} 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что мы можем подобрать решение $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, причём $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ одновременно. Например, $(7, -9, -1)$. Поэтому система является линейно зависимой.

Задание 1285.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{v} \in \mathbb{Z}^n$. Заметим, что если это множество является линейном подпространством $\mathbb{R}^n$, то должна быть определена операция умножения на скаляр для любого $\vec{v}$ (в нашем случае $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$), т.е. иначе говоря,

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{Z}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \vec{v} \in \mathbb{Z}^n$$

Однако заметим, что если мы возьмём $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (например, $\lambda = \sqrt{2}$), то $\lambda \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, однако $\lambda \vec{v} \notin \mathbb{Z}^n$. Т.е. $\mathbb{Z}^n$ не является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

Задание 1286.

Данное множество можно записать в таком виде:

$$L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3 \mid x = 0 \vee y = 0\}$$

Рассмотрим произвольные 2 вектора $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим сумму двух векторов $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Если L — линейное подпространство, то $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in L$. Однако это не всегда так. Достаточно взять $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ и $x_2 = 0, y_2 \neq 0$. В таком случае $x_1 + x_2 \neq 0 \wedge y_1 + y_2 \neq 0$ и в таком случае $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \notin L$.

Например, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L$, однако $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin L$.

Задание 1291.

Данное множество запишем в следующем виде:

$$L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \}$$

Рассмотрим сумму двух произвольных векторов $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Покажем, что $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in L$. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j = 0 + 0 = 0$$

Теперь рассмотрим умножение вектора на скаляр: $\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $\lambda \vec{v} \in L$. Действительно: $\sum_{j=1}^{n} \lambda x_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j = \lambda \cdot 0 = 0$. Остальные аксиомы легко проверяются. Отметим лишь, что противоположный вектор к $\vec{v}$ это вектор $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \dots \\ -x_n \end{pmatrix}$. Этот вектор очевидно принадлежит L т.к. это частный случай умножения на скаляр, где $\lambda = -1$. Нулевой же вектор $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in L$.

Задание 1292.

Данное множество запишем в следующем виде:

$$L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \}$$

Рассмотрим сумму двух произвольных векторов $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим сумму всех координат $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 + 1 = 2$$

По этой причине $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \notin L$. Поэтому L — это не подпространство $\mathbb{R}^n$.

Задание 1293.

Данное множество имеет даже своё обозначение — $\mathrm{span}(S)$, где $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$. Рассмотрим 2 вектора: $\vec{v}_1 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j$ и $\vec{v}_2 = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j$, где $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$. Рассмотрим сумму векторов:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j + \mu_j) \vec{x}_j$$

Видим, что $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathrm{span}(S)$, т.к. обозначив $\omega_j = \lambda_j + \mu_j \in \mathbb{R}$, получим, что:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \vec{x}_j$$

Рассмотрим умножение вектора $\vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j$ на скаляр $\gamma \in \mathbb{R}$. Получим:

$$\gamma\vec{v} = \gamma \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k} (\gamma\lambda_j)\vec{x}_j$$

Обозначив $\omega_j = \gamma\lambda_j \in \mathbb{R}$, имеем, что $\gamma\vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \vec{x}_j \in \mathrm{span}(S)$. Осталось проверить наличие нулевого и обратного элемента. Нулевой элемент — $\vec{\theta} = (0, \ldots, 0)^T \in \mathrm{span}(S)$, т.к. мы можем положить все коэффициенты $\lambda_j = 0, j = \overline{1, k}$, в таком случае $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j = \vec{\theta}$. Обратный элемент также легко определить — пусть $\vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j$, тогда обратный элемент будет иметь вид $-\vec{v} = \sum_{j=1}^{k} (-\lambda_j)\vec{x}_j \in \mathrm{span}(S)$. Оно лежит в $\mathrm{span}(S)$, т.к. это частный случай умножения на скаляр $\gamma = -1$. Поэтому $\mathrm{span}(S)$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$.

Задание 1297.

Данное множество запишем в виде:

$$L = \{ \begin{pmatrix} \eta \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ \eta \end{pmatrix} \mid \eta, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \}$$

Для начала покажем, что это линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольных два вектора: $\vec{v}_1 = (\eta_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \eta_1)^T$ и $\vec{v}_2 = (\eta_2, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta_2)^T$. Рассмотрим сумму этих векторов:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ x_2 + y_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} + y_{n-1} \\ \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix} \in L$$

Видим, что данная сумма лежит в L т.к. первый и последний элементы равны по $\eta_1 + \eta_2$.

Теперь рассмотрим умножение вектора $\vec{v} = (\eta, x_2, \ldots, x_{n-1}, \eta)^T \in L$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$. Получим, что $\lambda\vec{v} = (\lambda\eta, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{n-1}, \lambda\eta)$. Этот вектор также лежит в L, т.к. первый и последний элементы равны по $\lambda\eta$. Остальные аксиомы проверяются достаточно просто, отметим лишь, что обратный элемент к $\vec{v} = (\eta, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta)^T$ является вектор $-\vec{v} = (-\eta, -x_2, \dots, -x_{n-1}, -\eta) \in L$, а нулевой — $\vec{\theta} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

В качестве базиса возьмём вектора:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда любой вектор $\vec{v} = (\eta, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta)^T$ можно разложить таким образом:

$$\vec{v} = \eta\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{e}_{n-1}$$

Меньший базис мы взять не можем — базис $\vec{e}_1$ отвечает за “регулировку” первого и последнего элемента, а без этих элементов перед нами множество векторов $\mathbb{R}^{n-2}$, для которого нужно минимум $n-2$ векторов в базисе. Таким образом, $\dim L = n - 1$.

Задание 1300.

Данное множество запишем в виде:

$$L = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dots \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Покажем, что перед нами линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим 2 вектора $\vec{v}_1 = (\alpha, \beta, \dots, \alpha, \beta)^T$ и $\vec{v}_2 = (\gamma, \delta, \dots, \gamma, \delta)^T$, Рассмотрим их сумму:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \\ \dots \\ \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \end{pmatrix} \in L$$

Сумма лежит в L т.к. перед нами вектор, где чередуются элементы $\alpha + \gamma$ и $\beta + \delta$.

Теперь рассмотрим умножение вектора $\vec{v} = (\alpha, \beta, \ldots, \alpha, \beta)^T$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \ldots \\ \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} \in L$$

Тут чередуются $\lambda\alpha$ и $\lambda\beta$, поэтому $\lambda\vec{v} \in L$. Остальные аксиомы проверяются элементарно. Отметим только, что обратный элемент, как обычно, $-\vec{v} = (-\alpha, -\beta, \ldots, -\alpha, -\beta)^T \in L$, а нулевой элемент — $\vec{\theta} = (0, 0, \ldots, 0)^T$ (тут $\alpha = \beta = 0$, поэтому $\vec{\theta} \in L$).

Базис в этом случае построить совсем просто:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В таком случае любой вектор $\vec{v} = (\alpha, \beta, \ldots, \alpha, \beta)$ можно записать в виде такой суммы:

$$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$$

Это минимальное количество (одного базисного вектора, очевидно, не хватит). Поэтому $\dim L = 2$.