2️⃣

Homework #2 (13/13)

Завдання 1.

Нехай ми маємо набір функцій $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Ця система функцій є лінійно незалежною, якщо

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(x) \equiv 0 \implies \xi_k = 0 \; \forall k \in \overline{1,n}$$

Відповідно якщо система функцій є лінійно залежною тоді, коли

$$\exists \{\xi_k\}_{k=1}^{n}, \exists m \in \overline{1,n}, \xi_m \neq 0 : \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(x) \equiv 0$$

Наприклад, якщо взяти $f_k = x^k$, то ця система є лінійно незалежною, оскільки поліном $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k = 0$ лише якщо усі коефіцієнти є 0.

А ось наприклад набір $f_1(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}, f_2(x) = \cos^2 x$ є лінійно залежним, бо $f_1 = f_2$, тому якщо взяти $\xi_1 = 1, \xi_2 = -1$, то будемо мати $\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 \equiv 0$.

Завдання 2.

Маємо рівняння

$$\mathcal{A}(\varphi) := \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \varphi = 0$$

З граничними умовами $\Gamma : \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$.

Як і було запропоновано, обмеремо $\psi(x) = x$ та набір базисних функцій

$$E_k(x) = \sin k\pi x, \; k = 1, 2$$

Бачимо, що $E_k\Big|_\Gamma \equiv 0$, а також $\varphi\Big|_\Gamma = \psi\Big|_\Gamma$, тому дійсно можемо записати, що наша апроксимація буде мати вигляд

$$\varphi(x) \approx \hat{\varphi}(x) := \psi(x) + \sum_{k=1}^{2} \alpha_k E_k(x) = x + \alpha_1 \sin \pi x + \alpha_2 \sin 2\pi x$$

Отже, залишилось визначити коефіцієнти α_k, які будуть мінімізувати функцію втрати

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \alpha_2) := \mathcal{A}(\hat{\varphi})$$

За методом Гальоркіна, обираємо вагові функції $W_k(x) := E_k(x)$. Також бачимо, що наше рівняння $\mathcal{A}$ можемо записати як

$$\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{T}\varphi + p = 0$$

Де наш оператор $\mathcal{T} = \frac{d^2}{dx^2} - 1, p = 0.$ Отже, нехай $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, а також маємо $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ і вектор $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$. Тоді, як було доведено, можемо знайти $\mathbf{a}$ за допомогою рівняння

$$\mathcal{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Де матриця $\mathcal{K}$ та вектор $\mathbf{f}$ можуть бути знайдені за допомогою наступних формул:

$$\mathcal{K}_{n,m} = \int_\Omega W_n(x)(\mathcal{T}E_m(x))d\Omega$$

$$\mathbf{f}_n = -\int_\Omega W_n(x)p d\Omega - \int_\Omega W_n(x)(\mathcal{T}\psi(x))d\Omega$$

Спростимо запис, врахувавши, що $W_i \equiv E_i, p = 0$, а наше $\Omega = [0, 1]$, тому

$$\mathcal{K}_{n,m} = \int_0^1 E_n(x)\mathcal{T}E_m(x)dx, \; \mathbf{f}_n = -\int_0^1 E_n(x)\mathcal{T}\psi(x)dx$$

Отже, починаємо рахувати. Почнемо з $\mathbf{f}_n$. Знайдемо $\mathcal{T}\psi(x)$:

$$\mathcal{T}\psi = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) x = -x$$

Тому $\mathbf{f}_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx$. Для розв'язку будемо інтегрувати частинами. Нехай $v = x$, тоді $dv = dx$, а також $du = \sin(n\pi x)dx \to u = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)$, тому

$$\mathbf{f}_n = -\frac{x\cos(n\pi x)}{\pi n}\bigg|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx$$

Маємо $-\frac{1}{\pi n}x\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi n}$. Отже, залишилось знайти

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx = \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{\sin n\pi}{\pi^2 n^2} = 0$$

Звідси маємо

$$\mathbf{f}_n = \frac{(-1)^n}{\pi n} \implies \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо $\mathcal{K}_{n,m}$. Для цього знайдемо $\mathcal{T}E_m(x)$:

$$\mathcal{T}E_m(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)\sin m\pi x = -(1 + m^2\pi^2)\sin m\pi x$$

Тому маємо

$$\mathcal{K}_{n,m} = \int_0^1 E_n(x)\mathcal{T}E_m(x)dx = -(1+\pi^2 m^2)\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx$$

Інтеграл $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x = \begin{cases} \frac{1}{2}, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$. Тому маємо

$$\mathcal{K}_{n,m} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1+\pi^2 m^2), n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

Нескладно бачити, що матриця $\mathcal{K}_{n,m}$ є діагональною, а отже рівняння $\mathcal{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ можна записати інакше:

$$\mathcal{K}_{n,n}\alpha_n = \mathbf{f}_n,\ n = 1, 2$$

Звідки $\alpha_n = \frac{\mathbf{f}_n}{\mathcal{K}_{n,n}}$. Отже

$$\alpha_n = -\frac{(-1)^n}{\pi n} \cdot \frac{2}{1+\pi^2 n^2} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi n(1+\pi^2 n^2)}$$

Це означає, що наша апроксимація має вид

$$\hat{\varphi}(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{\pi k(1+\pi^2 k^2)} \sin k\pi x$$

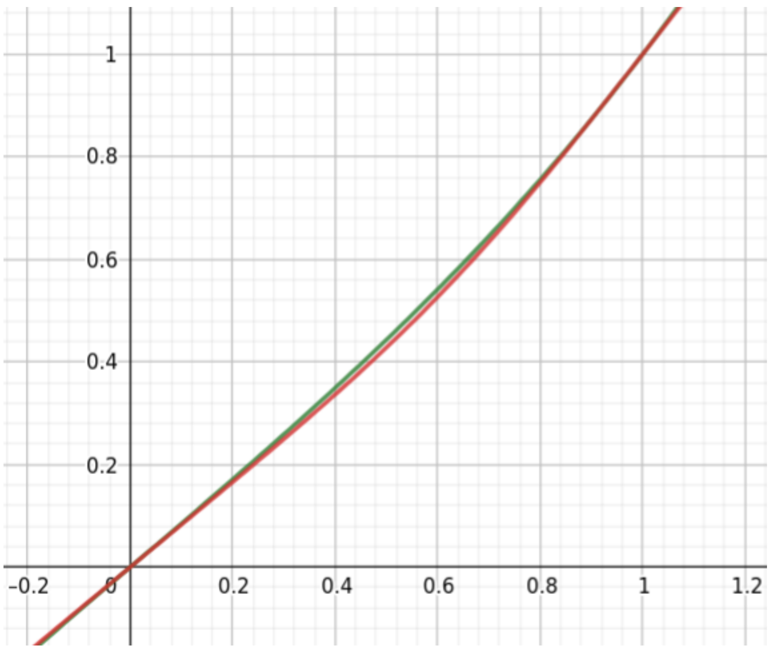
Розв'яжемо рівняння $\mathcal{A}$ аналітично. Нехай $\varphi(x) = A \cdot e^{\lambda x}$, тоді $\lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1$. Отже, рівняння можна подати у вигляді $\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Далі використовуємо початкові умови:

$$\varphi(0) = c_1 + c_2 = 0,\ \varphi(1) = c_1 e + \frac{c_2}{e} = 1$$

Оскільки $c_2 = -c_1$, то маємо $c_1 e - \frac{c_1}{e} = 1 \to c_1(e - 1/e) = 1 \to c_1 = \frac{1}{e - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e^2-1}$. Тому наш розв'язок має вид

$$\varphi(x) = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x}) \approx 0.425(e^x - e^{-x})$$

Якщо побудувати графіки $\varphi(x)$ та $\hat{\varphi}(x)$ на проміжку $[0, 1]$, то отримаємо доволі гарний результат:



Завдання 3.

Розв'язати рівняння:

$$\mathcal{A}(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 = 0,\ x \in (-3, 3),\ y \in (-2, 2)$$

З граничними умовами $\varphi(3, y) = \varphi(-3, y) = \varphi(x, -2) = \varphi(x, 2) = 0.$

Розв'язок. Оберемо $\psi \equiv 0$. З умови оберемо $M = 5$. Оберемо наступні базисні функції:

$$E_1(x, y) = \cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{\pi y}{4},\ E_2(x, y) = \cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{4},$$
$$E_3(x, y) = \cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{3\pi y}{4},\ E_4(x, y) = \cos\frac{5\pi x}{6}\cos\frac{\pi y}{4},$$
$$E_5(x, y) = \cos\frac{\pi x}{6}\cos\frac{5\pi y}{6}$$

Тоді наша апроксимація буде мати вид:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k E_k(x, y)$$

Визначимо коефіцієнти α_k. Для цього спочатку визначимо оператор диференційного рівняння $\mathcal{T}$ та параметр p:

$$\mathcal{T} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ p = 2$$

Отже, нехай $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$, а також маємо $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ і вектор $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^5$. Тоді, як було доведено, можемо знайти $\mathbf{a}$ за допомогою рівняння:

$$\mathcal{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Де компоненти матриці $\mathcal{K}$ та вектора $\mathbf{f}$ визначаються як:

$$\mathcal{K}_{n,m} = \int_\Omega W_n(x)(\mathcal{T}E_m(x))d\Omega,\ \mathbf{f}_n = -\int_\Omega W_n(x)pd\Omega$$

Враховуючі наше Ω, підставляючи $\mathcal{T}$ та врахувавши $E_j \equiv W_j$, маємо

$$\mathcal{K}_{n,m} = \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} E_n \left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_k}{\partial y^2}\right) dydx$$

$$\mathbf{f}_n = -2\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} E_n(x,y) dydx$$

Обрані базиси є ортогональними, тобто $\mathcal{K}_{i,j} = 0 \ \forall i \neq j$, тому кожен з коефіцієнтів вектора $\mathbf{a}$ можемо знайти як:

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{f}_n}{\mathcal{K}_{n,n}} = -2 \cdot \frac{\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} E_n(x,y) dydx}{\int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} E_n \left(\frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial y^2}\right) dydx}$$

Тому коефіцієнти мають вид:

$$\alpha_1 = \frac{4608}{13\pi^4},\ \alpha_2 = -\frac{512}{15\pi^4},\ \alpha_3 = -\frac{1536}{85\pi^4},$$
$$\alpha_4 = \frac{4608}{109\pi^4},\ \alpha_5 = \frac{4608}{229\pi^4}$$