Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #2

Захаров Дмитро

2 квітня, 2025

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Вправа 14.5

Умова Задачі 1.1. Розв'язати рівняння:

$$8\partial_t u = \Delta u + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

Крайова умова $u(0, x, y) = e^{-(x-y)^2}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою Пуассона-Дюамеля. А саме, нехай рівняння має вигляд $\partial_t u = \alpha^2 \Delta u + f(\mathbf{x}, t)$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ та крайовою умовою $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$. Тоді,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\alpha\sqrt{t\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4\alpha^2 t}} u_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\alpha\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} f(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau.$$

Перед цим, спростимо собі життя заміною $u(t, \mathbf{x}) := w(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{8}t$. Дійсно, тоді маємо:

$$\textbf{Ліва частина:} \qquad 8\partial_t u = 8\partial_t \left(w(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{8}t \right) = 8\partial_t w(t, \mathbf{x}) + 1,$$

$$\textbf{Права частина:} \qquad \Delta u + 1 = \Delta(w(t, \mathbf{x}) + t) + 1 = \Delta w(t, \mathbf{x}) + 1.$$

Отже, маємо рівняння:

$$\partial_t w = \frac{1}{8} \Delta w, \quad w(0, x, y) = e^{-(x-y)^2}.$$

Згідно формули Пуассона-Дюамеля, маємо $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f \equiv 0$ та $u_0(\mathbf{x}) = e^{-(x-y)^2}$. Таким чином, можемо підставляти:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{t\pi}\right)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{2}{t}\|(x,y)-(\xi_1,\xi_2)\|^2} e^{-(\xi_1-\xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \frac{2}{\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

Розпишемо, як виглядає підінтегральна функція $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= e^{-\frac{2}{t}((x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2)} e^{-(\xi_1-\xi_2)^2} = e^{-\frac{2}{t}(x^2+y^2-2x\xi_1-2y\xi_2+\xi_1^2+\xi_2^2)-\xi_1^2+2\xi_1\xi_2-\xi_2^2} \\ &= e^{-\frac{2}{t}(x^2+y^2)+\frac{4x}{t}\xi_1+\frac{4y}{t}\xi_2-\left(1+\frac{2}{t}\right)\xi_1^2-\left(1+\frac{2}{t}\right)\xi_2^2+2\xi_1\xi_2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top A(t)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)^\top\boldsymbol{\xi}+\gamma(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали квадратичну форму відносно (ξ_1, ξ_2). Запишемо матриці та вектори конкретно:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{t} & -2 \\ -2 & 2 + \frac{4}{t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t}x \\ \frac{4}{t}y \end{pmatrix}, \quad \gamma(\mathbf{x}) = -\frac{2}{t}\|\mathbf{x}\|^2$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \frac{2}{\pi t}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top A(t)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)^\top\boldsymbol{\xi}+\gamma(\mathbf{x})}d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2e^{-\frac{2}{t}\|\mathbf{x}\|^2}}{\pi t}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top A(t)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)^\top\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Як відомо, такий інтеграл можна обчислити за формулою:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top A(t)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)^\top\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^\top A^{-1}\boldsymbol{\beta}\right)$$

Підставимо конкретні значення:

$$\det A = \left(2+\frac{4}{t}\right)^2 - 4 = \frac{4}{t}\left(4+\frac{4}{t}\right) = \frac{16}{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^\top A^{-1}\boldsymbol{\beta} = \frac{(2+t)x^2+2txy+(2+t)y^2}{t(1+t)} = \frac{2(x^2+y^2)+t(x+y)^2}{t(1+t)}$$

Таким чином, остаточно:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top A(t)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)^\top\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} &= \frac{2\pi}{\frac{4}{\sqrt{t}}\sqrt{1+\frac{1}{t}}}\exp\left(\frac{2(x^2+y^2)+t(x+y)^2}{t(1+t)}\right) \\ &= \frac{\pi t}{2\sqrt{t+1}}\exp\left(\frac{2(x^2+y^2)+t(x+y)^2}{t(1+t)}\right) \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \frac{2e^{-\frac{2}{t}\|\mathbf{x}\|^2}}{\pi t}\cdot\frac{\pi t}{2\sqrt{t+1}}\exp\left(\frac{2(x^2+y^2)+t(x+y)^2}{t(1+t)}\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{2}{t}\|\mathbf{x}\|^2}}{\sqrt{t+1}}\exp\left(\frac{2(x^2+y^2)+t(x+y)^2}{t(1+t)}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{t+1}}e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}} \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{t+1}}e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}} + \frac{t}{8}$.

1.2 Вправа 14.6

Умова Задачі 1.2. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\Delta u + t\cos x, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$$

Крайова умова $u(0,x,y,z) = \cos y \cos z$.

Розв'язання. Згідно підказці, шукаємо заміну у вигляді $u(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x},t) + f(t)\cos x$.
Маємо: $\partial_t w(\mathbf{x},t) + \dot{f}\cos x = 2\Delta w(\mathbf{x},t) - 2f(t)\cos x + t\cos x$. Отже, ми хочемо аби занулилося усе, окрім доданків з $w(\mathbf{x},t)$. Таким чином,

$$\dot{f} = -2f(t) + t.$$

Розв'язком цього рівняння є $f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + ce^{-2t}$. Зручно або $f(0) = 0$, тому $f(0) = -\frac{1}{4} + c$, звідки $c = \frac{1}{4}$. Остаточно заміна має вигляд:

$$u(\mathbf{x},t) = w(\mathbf{x},t) + \left(\frac{t}{2} + \frac{e^{-2t} - 1}{4}\right)\cos x.$$

При такій заміні, задача перетворюється на:

$$\partial_t w = 2\Delta w, \quad w(0,x,y,z) = \cos y \cos z.$$

Скористаємось формулою Пуассона-Дюамеля. Маємо $\alpha = \sqrt{2}$, $f(\mathbf{x},t) \equiv 0$ та $u_0(\mathbf{x}) = \cos y \cos z$. Тоді, згідно формули Пуассона-Дюамеля, отримуємо:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{(2\sqrt{2}\sqrt{t\pi})^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{1}{8t}\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2} u_0(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{8(\sqrt{2t\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8t}\left((x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2+(z-\xi_3)^2\right)}\cos\xi_2\cos\xi_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned}$$

Інтеграл по ξ_1 можна легко обчислити. Маємо:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{8(\sqrt{2t\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8t}\left((y-\xi_2)^2+(z-\xi_3)^2\right)}\cos\xi_2\cos\xi_3\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8t}(x-\xi_1)^2}d\xi_1\right)d\xi_2 d\xi_3$$

Легко бачити, що $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8t}(x-\xi_1)^2}d\xi_1 = 2\sqrt{\frac{2\pi}{t}}$. Тому, маємо:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4(\sqrt{2t\pi})^3}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{8t}\left((y-\xi_2)^2+(z-\xi_3)^2\right)}\cos\xi_2\cos\xi_3 d\xi_2 d\xi_3$$

Робимо заміну $\eta_2 = \frac{\xi_2 - y}{2\sqrt{2t}}$, $\eta_3 = \frac{\xi_3 - z}{2\sqrt{2t}}$, тоді:

$$w(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right)}\cos\left(2\sqrt{2t}\eta_2 + y\right)\cos\left(2\sqrt{2t}\eta_3 + z\right)d\eta_2 d\eta_3$$

Розкриємо косинуси:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(2\sqrt{2t}\eta_2 + y\right)\cos\left(2\sqrt{2t}\eta_3 + z\right) \\
&= (\cos 2\sqrt{2t}\eta_2 \cos y - \sin 2\sqrt{2t}\eta_2 \sin y)(\cos 2\sqrt{2t}\eta_3 \cos z - \sin 2\sqrt{2t}\eta_3 \sin z)
\end{aligned}$$

Коли ми будемо рахувати інтеграл, то усі доданки з $\sin$ зникнуть, оскільки відповідні частини інтегралу будуть непарними функціями. Отже, маємо:

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right)} \cos 2\sqrt{2t}\eta_2 \cos y \cos 2\sqrt{2t}\eta_3 \cos z d\eta_2 d\eta_3$$

Виділимо за інтеграл $\cos y$ та $\cos z$:

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{\cos y \cos z}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right)} \cos 2\sqrt{2t}\eta_2 \cos 2\sqrt{2t}\eta_3 d\eta_2 d\eta_3$$

А тепер помітимо, що все, що виділено синім кольором, є певною функцією від часу. Тому нехай $w(\mathbf{x}, t) = \frac{\cos y \cos z}{\pi} g(t)$.

Підставимо цей факт у початкове рівняння:

$$\frac{\cos y \cos z}{\pi}\dot{g}(t) = -4 \cdot \frac{\cos y \cos z}{\pi} g(t) \implies g(t) = -4g(t)$$

Звідси $g(t) = \gamma e^{-4t}$. Залишилося знайти константу γ. Помітимо, що

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right)} d\eta_2 d\eta_3 = \pi$$

Тому $g(t) = \pi e^{-4t}$. Тому остаточно:

$$\boxed{w(t) = \cos y \cos z e^{-4t}}$$

Розв'язоку усієї задачі:

$$\boxed{u(\mathbf{x}, t) = \cos y \cos z e^{-4t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{e^{-2t} - 1}{4}\right)\cos x}$$

Відповідь. $u(\mathbf{x}, t) = \cos y \cos z e^{-4t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}-1}{4}\right)\cos x$.