4️⃣

Homework #4

Задача 16.8(2)

Рассмотрим многочлен:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$$

Умножим обе части на -1 и слегка преобразуем:

$$-(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} x^k$$

Теперь возьмём производную с обоих частей:

$$n(1-x)^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} k(-1)^{k+1} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Подставим в обе части $x=1$. Справа получим:

$$\sum_{k=1}^{n} k(-1)^{k+1} C_n^k = 0$$

Задача 16.9(3)

Снова-таки рассмотрим многочлен:

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$

Возьмём производную с обоих частей:

$$-n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} kx^{k-1}$$

Теперь умножим обе части на x:

$$-nx(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} kx^k$$

Снова возьмём производную с обоих частей:

$$-\frac{d}{dx}[x(1-x)^{n-1}] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 x^{k-1}$$

Производная слева $(1-x)^{n-2}(nx-1)$, а поэтому имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 x^{k-1} = (1-x)^{n-2}(nx-1)$$

Подставив $x = 1$, получим для $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot k^2 = 0$$

Для $n = 1$ сумма равна -1.

Задача 5(д)

Более удобно будет работать с таким реккурентным выражением:

$$a_{n+1} = 2a_n - 3$$

Просуммируем обе части $\sum_{k=0}^{\infty} \square x^k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3 \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Пусть производящая функция $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ равна $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Умножим обе части на x:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^{k+1} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3x \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Теперь заметим пару вещей. Во-первых, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (мы считаем, что $|x| < 1$). Также в правой части видим, что $2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2xF(x)$. Левую часть слегка преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - a_0 x^0 = F(x) - 4$$

Поэтому имеем:

$$F(x) - 4 = 2xF(x) - \frac{3x}{1-x}$$

Преобразуем:

$$F(x)(1-2x) = 4 - \frac{3x}{1-x} = \frac{4-7x}{1-x} \to F(x) = \frac{4-7x}{(1-x)(1-2x)}$$

Запишем $F(x)$ как $\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1-2x}$. Методом неопределённых коэффициентов или любым другим способом, получим $\alpha = 3, \beta = 1$, поэтому:

$$F(x) = \frac{3}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Теперь заметим, что $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}$, а поэтому:

$$F(x) = 3\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (3+2^k) x^k$$

С другой стороны $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, а поэтому можем сделать вывод, что:

$$a_n = 3 + 2^n$$

Задача 7(г)

Снова-таки запишем наше уравнение слегка в другом виде:

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 2^{n+2}$$

Просуммируем обе части $\sum_{k=0}^{\infty} \square x^k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}x^k = 6\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k - 9\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

Пусть производящая функция $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Умножим обе части на x^2:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}x^{k+2} = 6x\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} - 9x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 4x^2\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

Заметим следующее: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}$ при $|x| < \frac{1}{2}$ (далее мы считаем, что наши суммы все сходятся). Кроме этого из *задачи 5(д)*: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} = F(x) - a_0 = F(x) - 1$. И, наконец:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - a_1 x - a_0 = F(x) - 8x - 1$$

Поэтому окончательно имеем:

$$F(x) - 8x - 1 = 6x(F(x) - 1) - 9x^2F(x) + \frac{4x^2}{1-2x}$$

После некоторых преобразований:

$$F(x) = \frac{1}{(1-2x)(3x-1)^2}$$

Запишем нашу функцию в виде:

$$F(x) = \frac{\alpha}{1-2x} + \frac{\beta}{1-3x} + \frac{\gamma}{(1-3x)^2}$$

Находим, что $\alpha = 4, \beta = -6, \gamma = 3$, а поэтому:

$$F(x) = \frac{4}{1-2x} - \frac{6}{1-3x} + \frac{3}{(1-3x)^2}$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}$ и $\frac{1}{1-3x} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$. Единственная проблема, которая осталась — найти образующую функцию $\frac{3}{(1-3x)^2}$. Заметим следующий факт:

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$$

Возьмём производную от обоих частей:

$$\frac{3}{(1-3x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 3^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 3^{k+1} x^k$$

Поэтому:

$$F(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k - 6 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 3^{k+1} x^k$$

Внесём всё под одну сумму (это делать конечно можно не всегда, но... При рассмотрении производящих функций мы часто упускаем этот нюанс):

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+2} + 3^{k+1} \cdot (k-1)) x^k$$

По определению $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, поэтому:

$$a_n = 2^{n+2} + 3^{n+1}(n-1)$$

Задача 5(б)

Принципиально идейно не отличается от предыдущих двух задач, поэтому опущу решение этой задачи 🙂