Зачётное задание по координатной геометрии
Захаров Дмитрий, МП-11, 1 академическая группа
Вариант 8

Задача 1. Известно, что точки $A(-1, 6),\ B(2, -3)$ принадлежат прямой. Найдите для этой прямой параметрическое уравнение, каноническое уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, общее уравнение, нормальное уравнение, уравнение в отрезках.

Решение. Начнём с **параметрического уравнения**. Заметим, что прямую можно задать следующим радиус вектором:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Таким образом, имеем:

$$\{x, y\} = \{-1, 6\} + \{3\lambda, -9\lambda\}$$

Поэтому **параметрическое уравнение** имеет вид:

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 6 - 9\lambda \end{cases}.$$

Чтобы найти **уравнение с коэффициентом**, заметим, что $3\lambda = x + 1$, а поэтому $y = 6 - 3(3\lambda) = -3x + 3$. Угловой коэффициент при этом равен $k = dy/dx = -3$.

Напишем **общее уравнение**: $3x + y - 3 = 0$.

Каноническое уравнение (можно получить просто преобразовав общее уравнение):

$$\frac{y}{3} = \frac{x-1}{-1}$$

Уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$$

Для получения **нормального уравнения** разделим общее уравнение прямой на $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot y - \frac{3}{\sqrt{10}} = 0$$

Задача 2. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты a и b, чтобы прямые $ax + by + 1 = 0, 2x - 3y + 5 = 0, x - 1 = 0$ проходили через одну и ту же самую точку.

Решение. Пусть все данные прямые проходят через точку $M(x_0, y_0)$. Из последнего уравнения видим, что $x_0 = 1$. Подставляя найденное x_0 во второе уравнение, получаем, что $y_0 = 7/3$. Подставим всё в последнее уравнение:

$$a + \frac{7}{3} \cdot b + 1 = 0 \implies 3a + 7b + 3 = 0$$

Однако это всё ещё нельзя считать ответом. Заметим, что хоть мы и обеспечили условие того, что найдётся такая точка, которая принадлежит всем трём прямым, мы всё ещё не проверили случаи, когда прямые могут просто совпадать. Заметим, что из выше стоящего уравнения:

$$b = -\frac{3}{7}(1 + a)$$

Подставив это в первое уравнение, получим:

$$\begin{cases} 7ax - 3(1 + a)y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}.$$

Нужно проверить, не найдутся ли такие μ_1 и $\mu_2 \in \mathbb{R}$, что:

$$7ax - 3(1 + a)y + 7 = \mu_1(2x - 3y + 5)$$

$$7ax - 3(1 + a)y + 7 = \mu_2(x - 1)$$

Оказывается, такие числа есть. Для первого уравнения $\mu_1 = 7/5$, $a = 2/5$. Из второго уравнения $\mu_2 = -7$, $a = -1$. Соответвующие значения b: $-3/5$ и 0. Ответом является следующее множество:

$$M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 3a + 7b + 3 = 0 \land (a, b) \neq (-1, 0) \land (a, b) \neq (2/5, -3/5)\}$$

Задача 3. Найдите точку, которая симметрична точке $M(-1, 7)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой для нахождения симметричной точки относительно заданной прямой:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - 2\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Подставим числа:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} - 2\frac{-2-21-3}{2^2+3^2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, искомая точка имеет координаты $(7, -5)$

Задача 4. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $2x+y-11=0$ и $3x-y+6=0$, а также точка пересечения его диагоналей $O(1,-1)$. Найдите уравнение двух других его сторон.

Решение. Найдём точку пересечения двух прямых $A(x_a, y_a)$. Преобразовав уравнения прямых, имеем:

$$y = 11 - 2x, \; y = 3x + 6$$

Тогда из уравнения $11 - 2x = 3x + 6$ достаём $x_a = 1$. В таком случае $y_a = 9$. Заметим, что если мы хотим найти вершину C, то мы можем воспользоваться следующей формулой:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + 2\vec{AO}$$

Это следует из свойства параллелограмма о том, что пересечение его диагоналей делит их пополам. Итак, получим, что $C(1, -11)$.

Т.к. остальные две стороны параллельны начальным, то они имеют вид:

$$2x + y + \beta_1 = 0, \; 3x - y + \beta_2 = 0, \; \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Подставив точку C в оба уравнения, получим, что $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = -14$. Итого имеем следующие 2 уравнения:

$$2x + y + 9 = 0, \; 3x - y - 14 = 0$$

Задача 5. Внутри треугольника ABC со сторонами $2x+y-22=0(AB)$, $2x-y+18=0(CB)$, $x-2y-6=0(CA)$ найдите точку, расстояние которой до сторон пропорциональны числам 20, 12, 15.

Решение. Вспомним формулу расстояния точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$d(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Пусть искомая точка $P(x_0, y_0)$. Тогда расстояния до прямых:

$$d(AB)=\frac{|2x_0+y_0-22|}{\sqrt{5}}$$

$$d(CB)=\frac{|2x_0-y_0+18|}{\sqrt{5}}$$

$$d(CA)=\frac{|x_0-2y_0-6|}{\sqrt{5}}$$

В условии не сказано, как именно брать пропорциональность, поэтому возьмём к сторонам AB, CB и CA соответственно. Тогда:

$$\frac{d(AB)}{20}=\frac{d(CB)}{12}=\frac{d(CA)}{15}$$

Это аналогично:

$$3|2x_0+y_0-22|=5|2x_0-y_0+18|=4|x_0-2y_0-6|$$

Решив эту систему уравнений (преобразования приводить не буду, т.к. это оочень муторно), получим такой набор точек:

$$P_1(-5,-28), P_2(-1,4), P_3(-23,8), P_4(25,32)$$

Рассмотрим $\delta(M,l)=Ax_0+By_0+C$. Если точка P_i принадлежит треугольнику, то выполнены следующие условия:

$$\delta(P_i, AC)<0 \wedge \delta(P_i, BC)>0 \wedge \delta(P_i, AB)<0$$

Видим, что из всех точек такому условию соответствует только точка P_2. Таким образом, ответ $P_2(-1,4)$.