Homework #3

Задание 739

Если Ox является ассимптотой, а также гипербола равнобокая, то уравнение гиперболы имеет следующий вид:

$$(x - x_0)y = p, \quad x_0, p \in \mathbb{R}$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы использовать условие того, что мы знаем координаты вершины и таким образом найти x_0 и p.

Найдём координаты вершины для произвольной гиперболы $(x - x_0)(y - y_0) = p$ в общем виде и пусть $p > 0$. Для этого перейдём в координатную систему $\widetilde{x}\widetilde{y} = p$ путём “сдвижки” координатной системы на вектор $\vec{v} = \{x_0, y_0\}$. Из чисто интуитивных соображений (в прочем, это можно и строго доказать) вершины должны в этой системе координат иметь одинаковые x и y координаты, т.е. пусть любая из вершин имеет координаты $V(t, t)$. Подставив в уравнение выше, получим 2 решения, что соответствует координатам двух вершин: первое — $t_+ = \sqrt{p}$, а второе — $t_- = -\sqrt{p}$. Перейдя обратно в начальную систему координат, получим, что координаты двух вершин можно найти по формуле $V_1(x_0 + \sqrt{p}, y_0 + \sqrt{p})$ и $V_2(x_0 - \sqrt{p}, y_0 - \sqrt{p})$. Если же $p < 0$, то координаты вершин можно было бы найти по формуле $V_1'(x_0 - \sqrt{-p}, y_0 + \sqrt{-p}), V_2'(x_0 + \sqrt{-p}, y_0 - \sqrt{-p})$.

Вернёмся к нашей задаче. Пусть $p > 0$. В таком случае имеем 2 вершины: $V_1(x_0 + \sqrt{p}, \sqrt{p})$ и $V_2(x_0 - \sqrt{p}, -\sqrt{p})$. Пусть V_1 имеет координаты $(1, 1)$. Тогда имеем $x_0 = 0, p = 1$, т.е. имеем уравнение $xy = 1$. Если же V_2 имеет координаты $(1, 1)$, то получим $\sqrt{p} = -1$, что невозможно.

Если же $p < 0$, то координаты вершин $V_1'(x_0 - \sqrt{-p}, \sqrt{-p}), V_2'(x_0 + \sqrt{-p}, -\sqrt{-p})$. Пусть V_1' имеет координаты $(1, 1)$. Тогда $p = -1, x_0 = 2$. Тогда получим $(x - 2)y = -1$ или же $xy - 2y + 1 = 0$. V_2' не может быть вершиной, т.к. корень не может быть отрицательным. Имеем 2 ответа:

Ответ: $xy = 1, xy - 2y + 1 = 0$

Комментарий: в ответе один из вариантов гиперболы — это уравнение $xy - 2x + 1 = 0$. Полагаю, что это опечатка либо авторы использовали уравнение гиперболы в виде $x(y - y_0) = p$. Однако в этом случае ассимптота — это ось Oy, а не Ox.

То, что Ox не ассимптота гиперболы $xy - 2x + 1 = 0$ очевидно хотя бы потому, что $(1/2, 0)$ лежит на Ox и принадлежит гиперболе.

Задание 740

Пусть вершина A имеет координаты $(a, 0)$. Пусть x координата точек B и C равна некоторой неизвестной переменной β. Тогда из уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ получаем, что координаты точек $B(\beta, \sqrt{\beta^2 - a^2}), C(\beta, -\sqrt{\beta^2 - a^2})$. Заметим, что раз треугольник равнобедренный, то отрезок AM, где $M(\beta, 0)$ является высотой и биссектрисой треугольника. Таким образом, $\angle BAM = \pi/3$, а поэтому:

$$\tan \angle BAM = \tan \frac{\pi}{3} = \frac{|BM|}{|AM|}$$

Кроме этого имеем, что $|BM| = \sqrt{\beta^2 - a^2}$, $|AM| = \beta - a$, поэтому:

$$\frac{|BM|}{|AM|} = \frac{\sqrt{\beta^2 - a^2}}{\beta - a} = \sqrt{\frac{\beta + a}{\beta - a}} = \sqrt{3}$$

Из последнего равенства достаём, что $\beta = 2a$, а поэтому стороны треугольника равны $2a$ и $2\sqrt{3}a$ ($AB = AC$ и BC соответственно).

Ответ: $AB = AC = 2a$ и $BC = 2\sqrt{3}a$.

Задание 754

Если ассимптоты параллельны осям координат, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$(x - x_0)(y - y_0) = p$$

Подставив точки из условия, получим систему уравнений:

$$x_0 y_0 = p,\ (x_0 - 2)(y_0 - 1) = p,\ (x_0 - 1)(y_0 - 2) = p$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_0 = 2/3, y_0 = 2/3, p = 4/9$.
Подставив это в начальное уравнение получим:

$$(x - 2/3)(y - 2/3) = 4/9$$

Умножив обе части уравнения на 9 и упростив выражение, получим:

$$3xy - 2x - 2y = 0$$