§ Варіант 3 §

Задача 1: Канонічний вид системи

Умова. Чи є система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 - u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 3x_4 - 3u \\ \dot{x}_4 = x_3 - x_4 \end{cases} \tag{1.1}$$

повністю керованою? Привести систему до канонічного вигляду. Чи є ця система стабілізованою?

Розв'язання. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, тоді система має стандартний вигляд

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}u, \;\; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Для аналізу повної керованості складаємо матрицю Калмана:

$$\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}] \tag{1.3}$$

Далі знаходимо степені матриці:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{A}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 14 & -9 \\ 6 & 5 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Отже, матриця Калмана має вигляд:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -17 & -44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ -3 & -9 & -18 & -36 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Покажемо, що система не є повністю керованою, тобто $\operatorname{rang}(\boldsymbol{K}) < n = 4$. Для цього починаємо перетворювати матрицю:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -17 & -44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ -3 & -9 & -18 & -36 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3/(-3)]{R_4/(-3)} \begin{bmatrix} -1 & -6 & -17 & -44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ 1 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_1\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 17 & 44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ 0 & -3 & -11 & -32 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+3R_2]{R_4-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 17 & 44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & -35 & -140 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{3.5R_4+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 17 & 44 \\ 0 & 1 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & -35 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \det \boldsymbol{K} = 0 \tag{1.6}$$

Отже, система не є повністю керованою, бо $\operatorname{rang}(\boldsymbol{K}) = 3 < 4$. Тому, введемо два лінійних підпростори:

$$\mathcal{L} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \\ -18 \\ -6 \end{bmatrix} \right\},\ \dim \mathcal{L} = 3 \tag{1.7}$$

та ортогональний підпростір $\mathcal{L}^\perp$. Оскільки $\dim \mathcal{L}^\perp = 1$, то $\mathcal{L}^\perp = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}\}$, тому знайдемо $\boldsymbol{\alpha}$ з умови $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$. Для цього запишемо систему:

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta} \rangle = 0,\ n \in \{0, 1, 2\} \tag{1.8}$$

Або, аналогічно:

$$\begin{cases} -\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ -6\alpha_1 + \alpha_2 - 9\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ -17\alpha_1 - 8\alpha_2 - 18\alpha_3 - 6\alpha_4 = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

З першого рівняння $\alpha_1 = -3\alpha_3$, підставляючи у два наступних:

$$\begin{cases} \alpha_2 + 9\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ 33\alpha_3 - 8\alpha_2 - 6\alpha_4 = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

З другого $\alpha_2 = 3\alpha_4 - 9\alpha_3$, тому $33\alpha_3 - 24\alpha_4 + 72\alpha_3 - 6\alpha_4 = 0$ або просто

$105\alpha_3 - 30\alpha_4 = 0 \implies \alpha_4 = \frac{7}{2}\alpha_3$. Тому остаточно (якщо покласти $x_3 = t$):

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \\ 7/2 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{t}{2} \tag{1.11}$$

Отже покладемо $t = 2$ і в такому разі $\boldsymbol{\alpha} = (-6, 3, 2, 7)$.

Далі вектор $\mathbf{c}$ знайдемо з умови $\mathbf{c} \perp \boldsymbol{\beta}, \mathbf{c} \perp \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{c} \not\perp \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$. Для цього, наприклад, задамо систему

$$\langle \mathbf{c}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \mathbf{c}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} \rangle = 0,\ \langle \mathbf{c}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} \rangle = 10 \neq 0 \tag{1.12}$$

Далі розв'язання системи майже ідентичне, тому наведу проміжний результат при $x_3 = t$:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3t \\ \frac{1}{2}(-2 + 3t) \\ t \\ \frac{1}{6}(-2 + 21t) \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

При $t = 0$ маємо $\mathbf{c} = (0, -1, 0, -1/3)$. Тому в якості вектора візьмемо $(0, 3, 0, 1)$[1].

Нарешті, матриця перетворення:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^\top \\ \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top \boldsymbol{A} \\ \mathbf{c}^\top \boldsymbol{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Тому, якщо перейдемо до $\mathbf{z} = \boldsymbol{F}\mathbf{x}$, то маємо систему

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{A}}\mathbf{z} + \hat{\boldsymbol{\beta}}u,\ \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^{-1},\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{F}\mathbf{b} \tag{1.15}$$

Обернена матриця:

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/15 & -1/10 & 1/15 & 1/30 \\ -1/30 & 2/5 & -1/30 & 0 \\ 0 & -1/5 & -1/10 & 1/10 \\ 1/10 & -1/5 & 1/10 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Тому, після множення, матриці "з шапками":

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

[1]Тільки в цьому випадку скалярний добуток $\langle \mathbf{c}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} \rangle$ зміниться, але не стане нулевим.

Отже, наша система в канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = -3z_1 - 4z_3 + 4z_4 - 30u \end{cases} \tag{1.18}$$

Дійсно отримали некеровану частину $\dot{z}_1 = -z_1$ і керовану трьома рівняннями нижче. Тепер щоб перевірити, чи є система стабілізованою, потрібно перевірити наступну умову:

$$\forall \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}), \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0 : \mathcal{K}(\lambda) \subset \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\} \tag{1.19}$$

Отже, знаходимо спектр матриці $\boldsymbol{A}$. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 \lambda (1 + \lambda) \tag{1.20}$$

Отже маємо три власних числа: $\lambda_1 = 2$ кратності 2, та $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$ кратності 1. Оскільки $\lambda_3 < 0$, то перевірити потрібно лише λ_1, λ_2. Почнемо з λ_2. Відповідним кореневим підпростором є ядро $\ker(\boldsymbol{A})$, тому запишемо:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

З останніх двох рівнянь $x_3 = x_4$. Тоді з першого $x_2 = -2x_3$, а тому для третього $2x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 = 2x_3 + x_3 - 2x_3 = x_3$. Таким чином,

$$\mathcal{K}(0) = \ker(\boldsymbol{A}) = \{(1, -4, 2, 2)\mu : \mu \in \mathbb{R}\} \tag{1.22}$$

Чи є це підпростором $\boldsymbol{\mathcal{L}}$? Так, оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \\ -18 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Тепер перевіримо $\lambda_1 = 2$. Відповідний кореневий підпростір:

$$\mathcal{K}(2) = \ker((\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2) \tag{1.24}$$

Порахувавши, маємо:

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 & -4 \\ -6 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Тому для знаходження ядра знаходимо:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

З останнього рівняння $x_3 = 3x_4$. Тому перші два рівняння перетворюються у $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 13x_4 \\ -6x_1 + 3x_2 = -13x_4 \end{cases}$. Отже бачимо, що

$$\mathcal{K}(2) = \{((13\mu+3\nu)/6, \nu, 3\mu, \mu) : \mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \{(13\mu+3\nu, 6\nu, 18\mu, 6\mu) : \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \tag{1.27}$$

Таким чином,

$$\mathcal{K}(2) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{1.28}$$

Чи $\mathcal{K}(2) \subset \mathcal{L}$? Так, оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \\ -18 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{8}{5} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -17 \\ -8 \\ -18 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Отже, система дійсно є стабілізованою.

Задача 2: Стабілізація системи

Умова. Стабілізувати систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Розв'язання. Будемо обирати керування у вигляді $u = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$, щоб власні значення системи знаходились у лівій півплощині. Маємо:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}(p_1, p_2, p_3)\mathbf{x}, \; \boldsymbol{A}(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ p_1 + 1 & p_2 & p_3 + 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Нам потрібно, щоб $\forall\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A}) : \operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Для цього випишемо характеристичний поліном:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda \mid p_1, p_2, p_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ p_1 + 1 & p_2 - \lambda & p_3 + 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda^3 + (1 + p_2)\lambda^2 - (1 + p_1 + p_2 - p_3)\lambda + (1 + p_1 + 2p_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нам потрібно підібрати набір (p_1, p_2, p_3) так, щоб усі корені λ мали від'ємну дійсну частину. Для цього, наприклад, підберемо коефіцієнти таким чином, щоб $\chi_A(\lambda \mid p_1, p_2, p_3) \equiv -(\lambda + 1)^3$. Для цього має виконуватись:

$$\begin{cases} 1 + p_2 = -3 \\ 1 + p_1 + p_2 - p_3 = 3 \\ 1 + p_1 + 2p_2 = -1 \end{cases} \tag{2.4}$$

З першого рівняння $p_2 = -4$, тоді з третього $p_1 = -2 - 2p_2 = 6$, а з другого нарешті $p_3 = -2 + p_1 + p_2 = 0$. В такому разі, наше керування має вигляд:

$$u = 6x_1 - 4x_2 \tag{2.5}$$

Задача 3: Кускове-стале керування

Умова. Знайти кусково стале керування з точкою перемикання $t = 1$, яке за проміжок часу $[0, 3]$ переводить точку $(0, 0)$ в точку $(-2, 5)$ в силу системи

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2u \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - u \end{cases}$. Виписати траєкторію системи, за якою відбувається цей перехід.

Розв'язання. Як сказано в умові, обираємо кускове-стале керування:

$$u(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in [0,1), \\ \beta, & t \in [1,3] \end{cases} \tag{3.1}$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння, підставивши $u \equiv u_0$. З першого рівняння $x_1(t) = 2u_0 t + c_1$. Підставляючи у друге, маємо:

$$\dot{x}_2 = 8u_0 t + 4c_1 - u_0 \implies x_2(t) = 4u_0 t^2 + (4c_1 - u_0)t + c_2 \tag{3.2}$$

Отже, траєкторія має вигляд:

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\alpha t + c_1 \\ x_2(t) = 4\alpha t^2 + (4c_1 - \alpha)t + c_2 \end{cases}, \ t \in [0,1) \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\beta t + \widetilde{c}_1 \\ x_2(t) = 4\beta t^2 + (4\widetilde{c}_1 - \beta)t + \widetilde{c}_2 \end{cases}, \ t \in [1,3] \tag{3.4}$$

Отже, залишилось лише знайти коефіцієнти $(\alpha, \beta, c_1, c_2, \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2)$, для цього потрібно 6 рівнянь. Чотири рівняння отримаємо з умов $\mathbf{x}(0) = (0,0)$ та $\mathbf{x}(3) = (-2,5)$. Ще дві умови задамо з умови неперервності траєкторії:

$$\lim_{t \to 1^-} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \to 1^+} \mathbf{x}(t) \tag{3.5}$$

Отже, складаємо умови у стопку:

$$\mathbf{x}(0) = (0,0) : \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{x}(3) = (-2,5) : \begin{cases} 6\beta + \widetilde{c}_1 = -2 \\ 36\beta + 3(4\widetilde{c}_1 - \beta) + \widetilde{c}_2 = 5 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\lim_{t \to 1^-} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \to 1^+} \mathbf{x}(t) : \begin{cases} 2\alpha + c_1 = 2\beta + \widetilde{c}_1 \\ 4\alpha + 4c_1 - \alpha + c_2 = 4\beta + 4\widetilde{c}_1 - \beta + \widetilde{c}_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Отже, $c_1 = c_2 = 0$ знаходимо одразу, а для інших значень маємо систему:

$$\begin{cases} 2\alpha = 2\beta + \widetilde{c}_1 \\ 3\alpha = 3\beta + 4\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 \\ 6\beta + \widetilde{c}_1 = -2 \\ 33\beta + 12\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 = 5 \end{cases} \tag{3.9}$$

Далі розв'язуємо. З першого рівняння $\widetilde{c}_1 = 2\alpha - 2\beta$, підставляємо у всі інші:

$$\begin{cases} 3\alpha = 3\beta + 8\alpha - 8\beta + \widetilde{c}_2 \\ 6\beta + 2\alpha - 2\beta = -2 \\ 33\beta + 24\alpha - 24\beta + \widetilde{c}_2 = 5 \end{cases} \tag{3.10}$$

Або, якщо спростити:

$$\begin{cases} 5\beta = 5\alpha + \widetilde{c}_2 \\ 2\beta + \alpha = -1 \\ 9\beta + 24\alpha + \widetilde{c}_2 = 5 \end{cases} \tag{3.11}$$

З другого рівняння $\alpha = -1 - 2\beta$, тому

$$\begin{cases} 5\beta = -5 - 10\beta + \widetilde{c}_2 \\ 9\beta - 24 - 48\beta + \widetilde{c}_2 = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 15\beta - \widetilde{c}_2 = -5 \\ -39\beta + \widetilde{c}_2 = 29 \end{cases} \tag{3.12}$$

Звідси отримуємо розв'язок $(\beta, \widetilde{c}_2) = (-1, -10)$. Звідси $\alpha = 1$ і $\widetilde{c}_1 = 4$. Отже, остаточно наша траєкторія:

$$\begin{cases} x_1(t) = 2t \\ x_2(t) = 4t^2 - t \end{cases}, \ t \in [0, 1) \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -2t + 4 \\ x_2(t) = -4t^2 + 17t - 10 \end{cases}, \ t \in [1, 3] \tag{3.14}$$

з керуванням $u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ -1, & t \in [1, 3] \end{cases}$. Траєкторію можна побачити на Рисунку 1. Як видно траєкторія дійсно неперервна, починається в $(0, 0)$ і входить в точку $(-2, 5)$, а "перелом" відбувається в точці $(2, 3)$, що дійсно відповідає моменту часу $t = 1$ у рівняннях зверху.

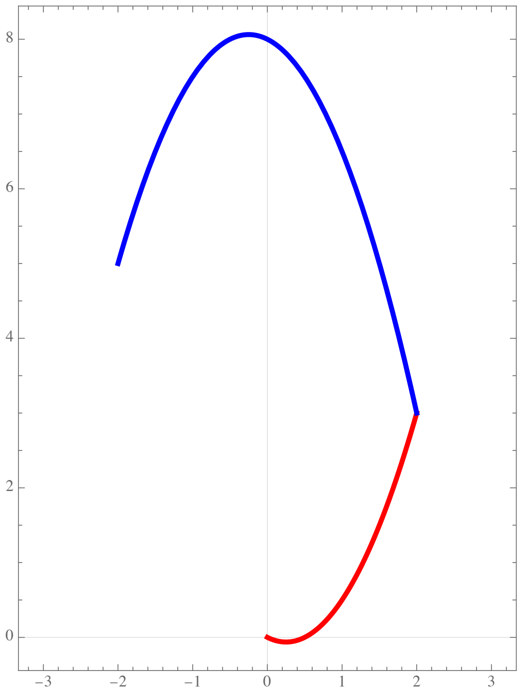

Рис. 1: Графік траєкторії з задачі 3 при керуванні $u(t) = 1$ якщо $t \in [0, 1)$ та $u(t) = -1$ при $t \in [1, 3]$.