Домашня робота з математичного моделювання #10

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

30 квітня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Коваріаційна матриця дохідностей ризикового активу $\boldsymbol{V}$, вектор $\boldsymbol{\mu}$ дохідностей ризикових активів, ефективність безризикового цінного паперу μ_0. Скласти портфель Тобіна:

1. Мінімального ризику заданої ефективності $\overline{\mu}$.
2. Максимальної ефективності, ризик якого дорівнює заданому числу ν_0.

Розв'язок. Перший пункт був розібраний у лекції. Якщо позначити

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\mu} - \mu_0 \mathbb{1}_n,\ \hat{\mu} = \overline{\mu} - \mu_0$$

Тоді:

1. $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{\theta}$:
$$\boldsymbol{x} = \frac{\hat{\mu} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{m}}{\langle \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\rangle},\ x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$
2. $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\theta}, \hat{\mu} \neq 0$, то розв'язку не існує.
3. $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\theta}, \hat{\mu} = 0$, тоді $x_0 = 1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$.

Другий пункт також був розібраний:

1. $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\theta}$: нескінченно багато розв'язків.
2. $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{\theta}$, тоді

$$\boldsymbol{x} = \frac{\nu_0 \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\langle \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}\rangle}},\ x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Завдання 2.

Умова. Скласти портфель Марковіца мінімального ризику заданої ефективності $\overline{\mu}$.

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mu_0 = 2, \nu_0 = 3$$

Розв'язок. Згідно лекції ця задача зводиться до розв'язку системи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} + 2\lambda_1 \boldsymbol{V}\boldsymbol{x} + \lambda_2 \mathbb{1} = 0 \\ \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \nu_0^2 \\ \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{1}\rangle = 1 \end{cases}$$

Отже нехай $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, тоді:

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Тоді перше рівняння системи має вид:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda_1(3x_1 - x_2) \\ 2\lambda_1(-x_1 + x_2 + x_3) \\ 2\lambda_1(x_2 + 2x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Або:

$$\begin{cases} 6\lambda_1 x_1 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 + 1 = 0 \\ -2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 + 1 = 0 \\ 2\lambda_1 x_2 + 4\lambda_1 x_3 + 2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Друга система еквівалентна:

$$x_1(3x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + x_2 + x_3) + x_3(x_2 + 2x_3) = 9$$

Третя $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Отже, остаточно маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6\lambda_1 x_1 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 + 1 = 0 \\ -2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 + 1 = 0 \\ 2\lambda_1 x_2 + 4\lambda_1 x_3 + 2 + \lambda_2 = 0 \\ 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{6+\sqrt{66}}{15} \\ \frac{3+\sqrt{66}}{3} \\ -\frac{2(1+\sqrt{66})}{5} \end{bmatrix} \text{ або } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{6-\sqrt{66}}{15} \\ \frac{3-\sqrt{66}}{3} \\ \frac{2(\sqrt{66}-1)}{5} \end{bmatrix}$$

Завдання 3.

Умова. Знайти оптимальний портфель Марковіца ефективності 17 з трьох некорельованих цінних паперів з ефективностями $6, 12, 42$ та відповідними ризиками: $20, 50, 80$. Некорельованість цінних паперів означає, що будь-які коваріації між доходностями різних цінних паперів дорівнюють нулю.

Розв'язок. Маємо вектор ефективностей $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 42 \end{bmatrix}$, коваріаційна матриця $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 6400 \end{bmatrix}$. Оптимальний портфель $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ є розв'язком наступної задачі:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 400x_1^2 + 2500x_2^2 + 6400x_3^2 \to \min \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x} \rangle = 6x_1 + 12x_2 + 42x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Отже складаємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 400x_1^2 + 2500x_2^2 + 6400x_3^2 + \lambda_1(6x_1 + 12x_2 + 42x_3 - 17) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Отже нам потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial\boldsymbol{x} = 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial\boldsymbol{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Розв'язком є:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 245/456 \\ 43/228 \\ 125/456 \end{bmatrix}$$

Завдання 4.

Умова. Знайти оптимальний портфель Тобіна мінімального ризику ефективності $\overline{\mu} = 8$ з двох видів цінних паперів: безризиковою з ефективністю $\mu_0 = 2$ та ризиковою з ефективністю $\mu_1 = 10$ та ризиком $\nu = 5$.

Розв'язок. Вектор ефективностей $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$, коваріаційна матриця це просто скаляр $\nu^2 = 25$. Помітимо $m = \mu_1 - \mu_0 = 8$, $\hat{\mu} = \overline{\mu} - \mu_0 = 8 - 2 = 6$. Ризикова частина портфелю це просто скаляр x, який є розв'язком оптимізаційної задачі:

$$\begin{cases} \nu^2 x^2 \to \min \\ mx = \hat{\mu} \end{cases}$$

Власне з другого рівняння в нас єдине можливе значення x:

$$x = \frac{\overline{\mu} - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{6}{8} = 0.75$$

Відповідь. $x = 0.75$.

Розв'язок.

Завдання 5.

Умова. Знайти портфель Тобіна мінімального ризику ефективності 8 з трьох видів цінних паперів: безризикової з ефективністю 2 та некорельованих ризикових паперів з ефективностями 4 та 10 та відповідними ризиками 2 та 4.

Розв'язок. Вектор ефективностей $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\mu_0 = 2$, коваріаційна матриця $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Знаходимо вектор $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\hat{\mu} = \overline{\mu} - \mu_0 = 8 - 2 = 6$. Отже ризикова частина $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ є розв'язком оптимізаційної задачі:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \to \min \\ \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x} \rangle = \hat{\mu} \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 16x_2^2 \to \min \\ 2x_1 + 8x_2 = 6 \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 \to \min \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Її розв'язком є $x_1 = x_2 = \frac{3}{5}$.

Завдання 6.

Умова. Знайти портфель Тобіна максимальної ефективності ризику 1 з трьох видів цінних паперів: безризикової з ефективністю 2 та некорельованих ризикових паперів з ефективностями 4 та 10 та відповідними ризиками 2 та 4.

Розв'язок. Вектор ефективностей $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\mu_0 = 2$, коваріаційна матриця $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$, $\nu_0 = 1$. Знаходимо вектор $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$. Тоді ризикова частина $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ знаходиться з рівняння:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} \rangle \to \max \\ \langle \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \to \max \\ 4x_1^2 + 16x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язком є $x_1 = x_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \to x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$.