Контрольна робота з математичного аналізу #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

29 березня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Дослідити на локальний екстремум:

$$u(x, y, z) = 1 + 2z + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2 - z^2$$

Розв'язок. Застосуємо **достатню умову існування локального екстремуму**. Нехай маємо функцію $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, що двічі неперервно диференційована у околі деякої точки (x_0, y_0), що є стаціонарною. Тоді, якщо d^2u строго додатньо визначена, то у точці (x_0, y_0) локальний мінімум, а якщо строго від'ємно визначена, то локальний максимум.

Отже спочатку знайдемо стаціонарні точки. Для цього знайдемо повний диференціал:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = (15 - 4x - y)dx + (-x - 4y)dy + (2 - 2z)dz$$

Нам потрібно знайти точки (x_0, y_0, z_0) для яких $du(x_0, y_0, z_0) = 0$. Для цього нам потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2 - 2z_0 = 0 \\ -x_0 - 4y_0 = 0 \\ 15 - 4x_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння маємо $z_0 = 1$. З другого $x_0 = -4y_0$, підставляючи у третє маємо:

$$15 + 16y_0 - y_0 = 0 \to y_0 = -1 \to x_0 = 4$$

Звідси маємо підозрілу на екстремум стаціонарну точку $(4, -1, 1)$.

Тепер знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

Тому повний диференціал другого порядку

$$d^2u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + u''_{yz}dydz$$

має вигляд:

$$d^2u = -4dx^2 - 4dy^2 - 2dz^2 - 2dxdy$$

Якщо позначити $\boldsymbol{\delta} = [dx, dy, dz]^\top$, то можемо записати другий диференціал у вигляді:

$$d^2u = \boldsymbol{\delta}^\top \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}$$

Розглянемо детермінанти кутових мінорів отриманної матриці:

$$\Delta_1 = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -30$$

Отже бачимо, що в нас знакозмінні мінори, починаючи з від'ємного, а отже за **критерієм Сильвестра** ця квадратична форма є від'ємно визначеною. Це значить, що наша точка $(4, -1, 1)$ є точкою локального максимуму.

Відповідь. Функція $u(x, y, z)$ має точку локального максимуму $(4, -1, 1)$.

Завдання 2.

Умова. Дослідити на умовний екстремум функцію:

$$f(x, y) = x - 8y, \text{ якщо } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5$$

Розв'язок. Скористаємось **методом Лагранжа** для розв'язання задачі умовного екстремуму.

Позначимо $\varphi(x, y) \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 5$. Будуємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y \mid \lambda) = x - 8y + \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 5 \right)$$

Знаходимо повний диференціал:

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy = \left(1 - \frac{2\lambda}{x^3} \right) dx + \left(-8 - \frac{2\lambda}{y^3} \right) dy$$

Нам потрібно знайти в яких точках $d\mathcal{L} \equiv 0$ при умові $\varphi \equiv 0$, тобто розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ \frac{2\lambda}{x^3} = 1 \\ \frac{\lambda}{y^3} = -4 \end{cases}$$

Після розв'язання маємо наступні розв'язки:

$$(x, y, \lambda) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \ (x, y, \lambda) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Отже маємо 2 підозрілі точки. Щоб дослідити, чи є там екстремуми, знайдемо другий повний диференціал функції $\mathcal{L}$:

$$d^2\mathcal{L} = \frac{6\lambda}{x^4}dx^2 + \frac{6\lambda}{y^4}dy^2 = 6\lambda\left(\frac{dx^2}{x^4} + \frac{dy^2}{y^4}\right)$$

Бачимо, що вираз у дужках завжди додатній, а отже знаковизначенність залежить від знаку λ. Якщо розглядаємо підозрілу точку $(-1, 1/2)$ при якій $\lambda = -1/2$, то бачимо, що другий диференціал від'ємно визначений, а отже ця точка є точкою умовного максимуму. Якщо ж розглянемо точку $(1, -1/2)$ при $\lambda = 1/2$, то другий диференціал є додатньо визначеним, а отже маємо локальний мінімумум.

Відповідь. Точка $(-1, 1/2)$ є точкою умовного максимуму, а $(1, -1/2)$ умовного мінімуму.

Завдання 3.

Умова. Показати, що дане рівняння в околі певної точки визначає функцію $z = f(x, y)$ та знайти вказані похідні:

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + z = 0,\ z''_{xy}(2, 0), z(2, 0) = -1$$

Розв'язок. Позначимо:

$$\Psi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + z$$

Тоді скористаємось теоремою про неявно задану функцію. Тоді нам потрібні наступні умови для існування функції $z = f(x, y)$:

1. $\Psi(2, 0, -1) = 0$
2. $\Psi(x, y, z)$ і $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ неперервні в $(2, 0, -1)$.
3. $\frac{\partial\Psi}{\partial z}(2, 0, -1) \neq 0$

Отже, перевіряємо усі умови. Перевіряємо першу:

$$\Psi(2, 0, -1) = 2 \cdot 2^2 + 1 - 8 - 1 = 0$$

Виконується. Друга також виконується, бо наша функція є многочленом, отже вона нескінченно неперервно диференційована (і сама по собі є неперервною).

Перевіряємо третю умову:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 2z + 4x + 1$$

Отже якщо підставити нашу функію, то

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)=(2,0,-1)} = -2 + 8 + 1 = 7 \neq 0$$

Тепер знайдемо $z''_{xy}(2,0)$ Спочатку диференціюємо нашу функцію $\Psi(x,y,z) = 0$ по x:

$$4x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 4z + 4x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Одразу звідси знайдемо похідну по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2z + 4x + 1) = -4x - 4z \to \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x,y,z)=(2,0,-1)} = \frac{-4 \cdot 2 + 4}{-2 + 8 + 1} = -\frac{4}{7}$$

Тепер знаходимо похідну по y від отриманного виразу:

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + 4\frac{\partial z}{\partial y} + 4x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Отже залишилось лише знайти $\frac{\partial z}{\partial y}$. Для цього початковий вираз продиференціюємо по y:

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 4x\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Підставляємо точку $(2, 0, -1)$:

$$-2\frac{\partial z}{\partial y} + 8\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Отже повернімося до виразу з другою похідною, підставляємо нашу точку $(2,0,-1)$ і усі похідні, що ми знайшли, а також позначимо $z''_{xy}(2,0) \equiv \hat{z}_{xy}$:

$$2\left(0+(-1)\cdot\hat{z}''_{xy}\right)+4\cdot 0+4\cdot 2\hat{z}''_{xy}+\hat{z}''_{xy}=0$$

Далі спрощуємо:

$$-2\hat{z}''_{xy}+8\hat{z}''_{xy}+\hat{z}''_{xy}=0\to\hat{z}''_{xy}=0$$

Відповідь. $z''_{xy}(2,0)=0$