Домашня робота з диференційних рівнянь #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

14 лютого 2023 р.

1 Завдання 53.

Розв'язати диференційне рівняння

$$(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$$

Розв'язок. Розпишемо $y'=\frac{dy}{dx}$ і перенесемо додаток $2xy^2$ у праву частину:

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}=-2xy^2$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{-2x}{x^2-1}dx$$

Лівий інтеграл знаходиться одразу: $\int y^{-2}dy=-\frac{1}{y}+C$. Для інтегралу праворуч зробимо заміну $z=x^2-1$, тоді отримуємо:

$$-\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}=-\frac{dz}{z}=-\ln|z|+C$$

Отже, маємо

$$\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+C$$

Підставимо $(0,1)$:

$$\frac{1}{1} = \ln|-1| + C \implies C = 1$$

Отже, остаточно

$$y = \frac{1}{\ln|x^2-1|+1}$$

Відповідь. $y = \frac{1}{\ln|x^2-1|+1}$

2 Завдання 58.

Розв'язати диференційне рівняння

$$y' - xy^2 = 2xy$$

Розв'язок. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = xy(2+y)$$

Далі помітимо, що можемо розділити рівняння:

$$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx$$

Після інтегрування правої частини, вочевидь, маємо $\frac{1}{2}x^2 + C$. Ліву частину розпишемо у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{y+2} = \frac{(\alpha+\beta)y + 2\alpha}{y(y+2)}$$

Звідси маємо $2\alpha = 1 \to \alpha = \frac{1}{2}$, відповідно $\beta = -\alpha = -\frac{1}{2}$. В такому випадку:

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| + C$$

Отже, остаточно

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Можна трошки переписати розв'язок, наприклад, наступним чином:

$$y(1-\alpha e^{x^2}) = 2\alpha e^{x^2} \to y = \frac{2\alpha e^{x^2}}{1-\alpha e^{x^2}}$$

Відповідь. $y = \frac{2\alpha e^{x^2}}{1-\alpha e^{x^2}}$

3 Завдання 63.

Розв'язати диференційне рівняння

$$y' - y = 2x - 3$$

Розв'язок. Перепишемо рівняння у виді:

$$y' = y + 2x - 3$$

Зробимо заміну $z = y + 2x - 3 \to z' = y' + 2$. Отримаємо

$$z' - 2 = z \to \frac{dz}{dx} = z + 2 \to \frac{dz}{z+2} = dx$$

Проінтегрувавши обидві частини, маємо

$$\ln|z+2| = x + C \to z = Ae^x - 2$$

Згадаємо, що $z = y + 2x - 3$, тому

$$y = Ae^x - 2x + 1$$

Відповідь. $y = Ae^x - 2x + 1$

4 Завдання 64.

Розв'язати диференційне рівняння

$$(x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1$$

Розв'язок. Зробимо заміну $z = x + 2y \to z' = 1 + 2y' \to y' = \frac{z'-1}{2}$. Тому:

$$z \cdot \frac{z'-1}{2} = 1 \to z(z'-1) = 2$$

Заміняємо $z' = \frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{z} \to \frac{zdz}{z+2} = dx$$

Після інтегрування правої частини вочевидь маємо $x + C$, праву частину розпишемо як:

$$\int \frac{z}{z+2} dz = \int \left(1 - \frac{2}{z+2}\right) dz = z - 2\ln|z+2| + C$$

Підставляємо $z = x + 2y$ та отримуємо:

$$y - \ln|x + 2y + 2| = C$$

Або:

$$x + 2y + 2 = Ae^{y}$$

Підставимо $(0, -1)$:

$$0 = A \cdot e^{-1} \to A = 0$$

Звідси розв'язок $x + 2y + 2 = 0$.

Відповідь. $x + 2y + 2 = 0$

5 Завдання 74.

Розв'язок. Нехай маємо криву $y = f(x)$. Розглянемо дотичну в точці $(x_t, f(x_t))$. Тоді рівняння дотичної запишемо як:

$$y = f'(x_t)(x - x_t) + f(x_t)$$

Знайдемо абцису x_0 точки дотику дотичної та вісі Ox. Для цього прирівняємо вираз до 0:

$$f'(x_t)(x_0 - x_t) + f(x_t) = 0$$

Звідси маємо:

$$x_0 = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

За умовою $x_0 = \frac{x_t}{2}$, тому

$$\frac{x_t}{2} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} \to \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} = \frac{x_t}{2}$$

Згадаємо, що x_t є абсолютно довільною абцисою на графіку $y = f(x)$, тому по суті ми отримали диференційне рівняння для знаходження $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x}$$

Далі просто помічаємо, що $f'(x) = \frac{df}{dx}$ і тому

$$\frac{df}{f} = \frac{2dx}{x} \to \ln|f| = 2\ln|x| + C \to f = e^{2\ln|x|+C} = Ax^2$$

Відповідь. $f(x) = Ax^2$