Використання диференційних рівнянь першого порядку для моделювання фізичних процесів

Підготовлено студентом 2 курсу групи МП-21 Захаровом Дмитром

14 травня 2023 р.

Супротив повітря або рідини.

Звичайно, у більшості випадків, механічні явища описуються другими похідними, оскільки другий закон Ньютона

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$$

містить другу похідну по координаті. Проте, великий ряд задач можуть бути зведені до розглядання лише першої похідної. Наприклад, вираз повної енергії системи містить лише швидкість та координату і тому якщо виконується закон збереження енергії (наприклад, немає тертя або супротиву), то можна записати рівняння першого порядку відносно координати.

Вільне падіння шарику

Один з прикладів задач, що містить лише першу похідну це деякі задачі на супротив.

Приклад 1: Шарик у повітрі

Нехай ми відпустили шарик маси m з дуже великої висоти (тобто початкова швидкість шарика 0). Будемо вважати, що сила супротиву повітря $\boldsymbol{R}$ пропорційне швидкості шарика з коефіцієнтом $\kappa > 0$, тобто $\boldsymbol{R} = -\kappa\dot{\boldsymbol{r}}$.

1. Знайдіть залежність швидкості шарика від часу $v(t)$.
2. Відомо, що через досить великий час, швидкість стає майже постійною. Знайдіть це значення.

Розв'язок.

Пункт 1. Запишемо другий закон Ньютона. Масса на прискорення $\dot{v}$ дорівнює постійній силі тяжіння mg мінус силі супротиву kv. Тоді:

$$m\frac{dv}{dt} = -\kappa v + mg \to \frac{dv}{dt} = -\frac{\kappa}{m}v + g$$

Якщо позначити $\nu = -\frac{\kappa}{m}v + g$, то отримаємо диференційне рівняння:

$$-\frac{m}{\kappa} \cdot \frac{d\nu}{dt} = \nu \to \frac{d\nu}{\nu} = -\frac{\kappa}{m}dt \to \nu(t) = \nu_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{m}t\right)$$

Повертаючись до $v(t)$:

$$v(t) = \frac{m}{\kappa}(g - \nu(t)) = \frac{mg}{\kappa} - \frac{m\nu_0}{\kappa}\exp\left(-\frac{\kappa t}{m}\right)$$

За умовою $v(0) = 0$, отже

$$\frac{mg}{\kappa} - \frac{m\nu_0}{\kappa} = 0 \to \nu_0 = g$$

В такому разі остаточно:

$$v(t) = \frac{mg}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right)$$

Пункт 2. Згідно попередньому пункту:

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\kappa}\lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-\kappa t/m}\right) = \frac{mg}{\kappa}$$

Для самоперевірки можна розв'язати цей пункт взагалі без диференціальних рівнянь. Помітимо, що якщо шарик виходить на постійну швидкість, то його прискорення дорівнює 0. Отже, сила тяжіння mg має просто дорівнювати силі супротиву κv_∞, звідки маємо $v_\infty = \frac{mg}{\kappa}$

Кидок предмету під кутом до горизонту

Приклад 2: Кидання шарика під кутом.

Нехай ми кинули шарик з поверхні землі з початковою швидкістю v_0 під кутом θ до горизонту. Знову припускаємо, що сила супротиву описується виразом $-\kappa\boldsymbol{v}$. Через який час шарик досягне верхньої точки траєкторії? Опишіть траєкторію.

Розв'язок. Нехай Ox направлена вздовж горизонту, а Oy від землі вгору. Позначимо вектор швидкості $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$. Запишемо другий закон Ньютона по вісям:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -\kappa v_x \\ m\dot{v}_y = -\kappa v_y - mg \end{cases}$$

Розв'язок першого рівняння $v_x = C \cdot e^{-\kappa t/m}$. Оскільки початкова швидкість дорівнює $v_0 \cos\theta$, то маємо остаточно:

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \cdot e^{-\kappa t/m}$$

Розв'язок другого рівняння (пропустимо усі викладки):

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta \cdot e^{-\kappa t/m} - \frac{mg}{\kappa}(1 - e^{-\kappa t/m})$$

Шарик досягає верхньої точки траекторії коли швидкість по вісі Oy стає нулем. Отже

$$v_y(\tau) = 0 \to \tau = \frac{m}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa v_0 \sin\theta}{mg} \right)$$

Щоб описати траекторію, достатньо знайти інтеграли $x(t) = \int v_x(t)dt, y(t) = \int v_y(t)dt$ з початковою умовою $x(0) = y(0) = 0$.

Додаткові завдання.

Завдання 1. Розв'яжіть приклад 1 вважаючи, що сила супротиву пропорційна квадрату швидкості, тобто сила супротиву має вигляд:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v}) = -\kappa v^2 \hat{\boldsymbol{v}}$$

Завдання 2 (Всеукраїнська олімпіада з фізики 2018/2019, 8 клас, 3 задача). Наповнений повітрям тонкостінний м'ячик, занурений у воду, спливає з постійною швидкістю v, а такий же за розмірами суцільний гумовий м'ячик тоне зі швидкістю u. Куди і з якою швидкістю w вони рухатимуться у воді, якщо їх з'єднати ниткою? Силу опору води під час руху у ній вважати пропорційно швидкостям, а силу Архімеда – однаковою як у спокої, і під час руху.

Завдання 3 (Міжнародна олімпіада з фізики 2013, Данія, завдання 1, пункт 1.2а). Сила тертя від повітря на метеороїд, що рухається у вищих шарах атмосфери, складним чином залежить від форми та швидкості метеороїда, а також від температури та щільності атмосфери. Як прийнятне наближення, сила тертя у верхніх шарах атмосфери визначається виразом $F = k\rho_{\mathrm{arm}} A v^2$, де k — константа, ρ_{atm} щільність атмосфери, A це проектована площа поперечного перерізу метеорита та v його швидкість.

Оцініть, через який час після входу в атмосферу швидкість метеорита зменшується на 10% від v_M до $0.9v_M$. Ви можете знехтувати силою тяжіння на метеороїд і припустити, що він зберігає свою масу та форму. Маса метеороїда 30 кг, початкова швидкість $v_M = 2.91 \times 10^4$ м/с, щільність повітря $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ кг/м^3, коефіцієнт тертя $k = 0.6$, радіус метероїда $R_M = 0.13$ м.

Атмосферний тиск.

За допомогою відносно простих диференційних рівнянь першого порядку можна описувати такі явища, як наприклад залежність атмосферного тиску від висоти.

Перед цим, наведемо трохи теорії з фізики, яка нам знадобиться.

Теорема 1: Клапейрона-Менделеєва

Якщо вважати газ ідеальним, то справедливо рівняння Клапейрона-Менделеєва, що пов'язує тиск p газу, його об'єм V та температуру T як:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

де R це універсальна газова стала, μ це молярна маса газу (що є табличною величиною, отже теж сталою).

Також, відомо, що тиск стовпця рідини або повітря висоти h описується рівнянням $\rho g h$, де ρ це густина рідини або газу.

Перейдемо до конкретного прикладу, застосувавши ці данні.

Приклад 3: Залежність атмосферного тиску від висоти за постійної температури

Нехай температура повітря постійна і дорівнює T_0. Знайдіть вираз залежності атмосферного тиску $p(z)$ від висоти z якщо на нульовому рівні він дорівнює p_0.

Розв'язок. Розглянемо малу зміну висоти Δz. Тоді, зміна тиску:

$$\Delta p = -\rho g \Delta z$$

Згідно рівнянню Клапейрона-Менделеєва, можемо знайти вираз для густини:

$$pV = \frac{\rho V}{\mu} RT \to \rho = \frac{\mu p}{RT}$$

Тоді маємо:

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{\mu g}{RT} p$$

Якщо спрямувати $\Delta z \to 0$, то отримуємо диференційне рівняння:

$$p'(z) = -\frac{\mu g}{RT} p \to p \to p(z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu g}{RT} z\right)$$

Приклад 4: Залежність тиску від висоти при лінійному спаді температури

Тепер припускаємо, що температура зменшується лінійно згідно закону $T(z) = T_0 - \Lambda z$. Знайдіть вираз залежності атмосферного тиску від висоти $p(z)$.

Підсказка. Аналогічним чином до минулого пункту, маємо диференціальне рівняння:

$$p'(z) = -\frac{\mu g p}{R(T_0 - \Lambda z)}$$

Завдання.

Завдання 1. Доведіть, що розв'язок рівняння з прикладу 4:

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T_0}\right)^{\mu g / R\Lambda}$$

Завдання 2. Нехай задано довільну залежність температури від висоти $T(z)$. Знайдіть функцію $p(z)$.

Завдання 3* (Міжнародна олімпіада з фізики, В'єтнам, 2008, задача 3, пункт 4.1). Залежність температури повітря в місті Ханой від висоти наведена знизу:

Висота z, м	Температура T, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8

Як видно, функцію температури від висоти можна розбити на 3 проміжки: $0 \text{ м} < z < 96 \text{ м}$, $96 \text{ м} < z < 119 \text{ м}$, $119 \text{ м} < z < 215 \text{ м}$, де на кожному проміжку використати апроксимацію $T(z) = T_0 - \Lambda_i z$.

Знайдіть $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, а також функцію тиска від висоти для $0 < z < 215$ м. Молярну масу повітря, універсальну газову постійну і інші сталі знайдіть з відкритих джерел.