Колоквіум з предмету “Комплексний аналіз”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

5 грудня 2023 р.

Питання 1.

Наслідки теореми про розклад в степеневий ряд. Нерівність Коші. Теорема Ліувілля.

Відповідь.

Тут і далі будемо позначати $\mathcal{H}(\cdot)$ – множину голоморфних функцій на заданній множині.

Отже, сформулюємо теорему про розклад в степеневий ряд.

Теорема: Розклад в степеневий ряд.

Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ і $B(a, r) \subset D$. Тоді

1. $\exists \{c_n\}_{n=0}^{\infty} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ в $B(a, r)$
2. $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$
3. $r_{\text{збіжності}} > r$

Цю теорему ми залишаємо без доведення і запишемо наслідки цієї теореми.

Теорема: Нерівність Коші

Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(B(a,r))$, причому $|f(z)| \leq M$. Тоді:

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

де $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ – це коефіцієнти розкладання $f(z)$ у ряд.

Доведення. Застосовуємо інтегральну формулу Коші:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Оцінюємо:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{\max|f(z)|}{\rho^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Якщо спрямуємо праву частину до r, то отримаємо те, що повинні були довести. ■

Теорема: Теорема Ліувілля

Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ і $|f(z)| \leq M$. Тоді $f \equiv \text{const}$.

Доведення. Розкладаємо $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

З нерівності Коші, $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$. Спрямовуємо $\rho \to \infty$. Для $n \neq 0$ тоді маємо

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 \implies c_n \equiv 0 \; \forall n > 0$$

Отже $f(z) = c_0 = \text{const}$.

Також, маємо наступні два наслідки, котрі ідейно доводяться так само, як дві теореми вище:

Наслідок: Розкладу в степеневий ряд

1. $\underline{\lim}_{r\to\infty} \max_{|z|=r} |f(z)| < \infty \implies f(z) \equiv \text{const}.$
2. $\exists \alpha : \underline{\lim}_{r\to\infty} \max_{|z|=r} |f(z)| \cdot \frac{1}{z^\alpha} < \infty \implies f(z)$ поліном $P(z)$, $\deg P(z) \le [\alpha]$.

Питання 2.

Чи може лишок у ∞ дорівнювати ∞?

Відповідь.

Треба знайти таку функцію $f(z)$, щоб

$$\text{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = \infty$$

Для цього асимптотично треба мати якусь функцію $f(z) \sim \frac{1}{z^\alpha}$, де $\alpha \in (0, 1)$. Тоді $f(\infty) = 0$ і окрім цього

$$\lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = -\lim_{z\to\infty} z^{1-\alpha} = \infty$$

Проте чи існує така функція, я не знаю. Головна проблема в тому, що вирази виду z^α погано обумовлені коли мова йде про комплексний простір (як мінімум, це не функції, а їх сімейство).

Тоді скористаємось тим, що щоб лишок був визначеним, $f(z)$ має бути мераморфною. А якщо функція є мераморфною, то вона розкладається в ряд Лорана. За означенням, лишку буде відповідати коефіцієнт c_{-1}, котрий не може бути нескінченним, якщо функція розкладається у ряд. Отже, він є скінчениим.

Питання 3.

Наслідки теореми про максимум модуля. Лема Шварца.

Відповідь.

Знову ж таки, запишемо теорему про максимум модуля і наведемо наслідки до нього.

Теорема: Про максимум модуля

1. Якщо $u(z)$ гармонічна в D та $u(z) \not\equiv \text{const}$, тоді

$$\inf_{\zeta \in D} u(\zeta) < u(z) < \sup_{\zeta \in D} u(\zeta) \; \forall z \in D$$

2. Якщо $f(z) \in \mathcal{H}(D)$, причому $f \not\equiv \text{const}$. Тоді

$$|f(z)| < \sup_{\zeta \in D} |f(\zeta)| \; \forall z \in D$$

Тепер, наводимо наслідки.

Теорема: Головний наслідок

Нехай маємо функцію $f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, D – обмежена область.

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)| \; \forall z$$

Доведення. Розглядаємо $|f(z)|$ – неперервна функція на $\overline{D}$. Оскільки вона неперервна, то вона десь досягає максимума. Скажімо, вона це робить в точці z_0. Маємо, що $z_0 \in \partial D$, оскільки вона не може належати D, бо це б суперечило теоремі. Тоді, отримуємо результат, котрий треба довести.

Теорема: Теорема Вейерштрасса в іншій формі.

Нехай $f_n(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, D обмежена, $f_n(z) \rightrightarrows \varphi(z)$ на ∂D. Тоді

$$\exists f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \overline{C}(\overline{D}) : f_n(z) \rightrightarrows f(z) \text{ в } \overline{D}$$

Лема: Лема Шварца.

Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$, $|f(z)| < 1$ та $f(0) = 0$. Тоді справедливо

$$|f(z)| \le |z|,$$

причому якщо $\exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = z_0$, то $f(z) = e^{i\gamma} z,\ \gamma \in \mathbb{R}$

Відповідь. Розглядаємо допоміжну функцію

$$g(z) := \frac{f(z)}{z}$$

Щоб проаналізувати характер поведінки у нуля, розглядаємо розкладання $f(z)$ в ряд Тейлора в околі 0:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Помічаємо, що $c_0 = f(0) = 0$, тому

$$g(z) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + \dots}{z} = c_1 + c_2 z + \dots$$

Отже, в нас немає ніяких проблем з $z = 0$ для нашої функції $g(z)$.

Розглядаємо тепер множину $|z| \le r < 1$. Застосовуємо головний наслідок теореми про максимум модуля:

$$|g(z)| \le \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}$$

Гранично переходячи до $r \to 1$, маємо

$$|g(z)| < 1 \implies \frac{|f(z)|}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < |z|.$$

Якщо ж знайшовся z_0 такий, що $|g(z_0)| = 1$, то $|g(z_0)| \equiv \text{const}$, то $g(z) = ze^{i\gamma}, \gamma \in \mathbb{R}$. ■