Теоретична Контрольна робота з диференціальних рівнянь #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

4 квітня 2023 р.

Варіант 6.

1 Завдання 1.

Умова. Знайти визначник Вронського, що задовольняє початковій умові $W(0) = 3$, не розв'язуючи цього диференціального рівняння

$$(x^2 - 1)y'' + 2(x + 1)y' + \cos x \cdot y = 0$$

Розв'язок. Спочатку ділимо все на $x^2 - 1$. Отримуємо:

$$y'' + \frac{2(x + 1)}{x^2 - 1}y' + \frac{\cos x}{x^2 - 1}y = 0$$

Якщо спростити коефіцієнт перед y':

$$y'' + \frac{2}{x - 1}y' + \frac{\cos x}{x^2 - 1}y = 0$$

Щоб знайти визначник, застосовуємо формулу **Ліувіля-Остроградського** для рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$$W(x) = W_0 \exp\left(-\int p(x)dx\right) = W_0 \exp\left(-\int \frac{2}{x - 1}dx\right)$$

Знаходимо цей інтеграл:

$$W(x) = W_0 \exp\left(-2\ln(x-1)\right) = W_0(x-1)^{-2} = \frac{W_0}{(x-1)^2}$$

За умовою $W(0) = 3$, тому:

$$3 = W_0 \cdot \frac{1}{1} \to W_0 = 3$$

Отже остаточно

$$W(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Відповідь. $W(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$.

2 Завдання 2.

Умова. За даними частинними розв'язками ЛНР другого порядку знайти загальний розв'язок

$$y_1 = x + 2, y_2 = 2 - x, y_3 = x^2 + x$$

Розв'язок. Нехай ми маємо рівняння $L_n(x) = b(t)$.

Застосуємо наступний факт: якщо $z(t)$ розв'язок $L_n(x) = b(t)$, а набір функцій $\{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\}$ є фундаментальним розв'язком $L_n(x) = 0$, то розв'язок у загальному виді:

$$x(t) = z(t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k(t)$$

Проте, в умові ми маємо 3 розв'язки рівняння $L_n(x) = b(t)$. Тобто, нам не вистачає 2 розв'язків рівняння $L_n(x) = 0$. Для цього помітимо, що якщо u, w є розв'язками $L_n(x) = b(t)$, то $u - w$ є розв'язком $L_n(x) = 0$.

Повернімося до нашого завдання. В якості $z(t)$ візьмемо, наприклад, y_1. Тоді в якості фундаментального розв'язку $L_n(x) = 0$ візьмемо, наприклад, $y_1 - y_2$ та $y_1 - y_3$. Тобто наш загальний розв'язок має вид:

$$y(x) = x + 2 + \lambda_1(x + 2 - 2 + x) + \lambda_2(x + 2 - x^2 - x)$$

Після спрощень:

$$y(x) = x + 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2(2 - x^2)$$

Або якщо позначити $C_1 = 2\lambda_1 + 1, C_2 = -\lambda_2$:

$$y(x) = C_2 x^2 + C_1 x + 2(1 - C_2)$$

Відповідь. $y(x) = C_2 x^2 + C_1 x + 2(1 - C_2)$.

P.S. Насправді по 3 розв'язкам можна відновити початкове рівняння за допомогою тричі підстановки у $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ і розв'язанню системи рівнянь відносно $p(x), q(x), f(x)$. Виходить

$$y'' - \frac{2x}{2 + x^2} y' + \frac{2}{2 + x^2} y = \frac{4}{2 + x^2}$$

Якщо підставити наш розв'язок сюди, то він дійсно підходить.

3 Завдання 3.

Умова. Вказати якийсь відрізок, на якому визначено розв'зання цієї задачі Коші

$$(x + 1)y' = \ln(y - x), y(0) = 1$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у канонічному вигляді:

$$y' = \frac{\ln(y - x)}{x + 1},\ y(0) = 1$$

Використовуємо та сформулюємо **теорему Пікара**.

Теорема 1: Теорема Пікара

Нехай вектор-функція $f(t,y)$ неперервна на брусі

$$B = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t-t_0| \le a, \|y-y_0\| \le b\}$$

і задовольняє умові Ліпшиця по y. Тоді на сегменті $|t-t_0| \le c = \min\{a, b/M\}$ де $M = \sup_B \|f(t,y)\|$, існує єдиний розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Права частина неперервна у всіх $y \neq x$ та $x \neq -1$. Тоді візьмемо прямокутник $|x| \le 1/2, |y-1| \le 1/4$, тобто $a = 1/2, b = 1/4$. Тоді

$$M = \sup_{|x| \le 1/2, |y-1| \le 1/4} \left(\frac{\ln(y-x)}{x+1} \right)$$

Помітимо, що супремуму відповідає $x = -1/2, y = 5/4$, бо воно одночасно максимізує чисельник і мінімізує знаменник, тому

$$M = \frac{\ln(5/4 + 1/2)}{-1/2 + 1} = 2\ln\frac{7}{4}$$

Знаходимо $c = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4 \cdot 2\ln(7/4)}\} = \frac{1}{8\ln(7/4)}$. Тому при $|x| \le c = \frac{1}{8\ln(7/4)}$ існує єдиний розв'язок задачі Коші.