Залік з Дискретної математики

Фамілія: Захаров

Ім'я: Дмитро

Група: МП-11

Завдання 1. Перестановки та розміщення без повторів.

Перестановкою деякого набору M називається впорядкований набір без повторів елементів. Перестановку можна ще також визначити як множину бієктивних функцій з множини M на множину M ($\sigma : M \to M$).

Більш простими словами: нехай в нас є цукерки $C_1, C_2, \dots, C_n$. Перестановка — це елементи $C_1, \dots, C_n$ переставлені в довільному порядку.

Теорема. Всього існує $n!$ перестановок елементів множини M.

Доведення. Нехай в нас є n клітинок. На першу позицію ми можемо поставити будь-який з n елементів. На наступну усі, окрім цього елементу, отже, $n-1$ елемент. Так ми продовжуємо до nої клітинки, на яку нам залишається лише 1 елемент. Отже, загальна кількість варіантів переставити $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Іноді позначається $P_n = n!$

Розміщення без повторів — це перестановки множини M, у яких порядок елеменів в вибірці є важливим.

Кількість розміщень без повторів із n елементів по k елементів позначають A_n^k.

Знову перекладемо на більш просту мову: нехай в нас є різні тварини $a_1, a_2, \dots, a_n$ і нам з них потрібно вибрати k і посадити у клітки $c_1, c_2, \dots, c_k$. Розміщенням без повторів буде по суті називатися $c_1, c_2, \dots, c_k$ де замість c_i ми поставимо деяке a_j, де всі a_j звісно різні. При цьому 2 розміщення, де є, наприклад, пара (a_1, a_2) та (a_2, a_1) ми будемо вважати різними.

Теорема. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Доведення. На першу позицію можемо поставити n елементів. На наступну позицію $n-1$ елемент. Так ми продовжуємо до kої позиції, де ми можемо поставити $n - k + 1$ елемент. Отже:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Що і потрібно було довести.

Завдання 2. Формальний ряд Тейлора.

Нехай в нас є деяка послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Для того щоб ввести поняття формального ряда Тейлора спочатку введемо поняття генеративної функції цієї послідовності:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

А також похідної цієї послідовності:

$$\frac{dA(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Отже, формальний ряд Тейлора:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k A(0)}{dx^k} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

Доведення. Згідно означенню, маємо:

$$\frac{dA(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \dots$$

Для довільної похідної k маємо:

$$\frac{d^k A(x)}{dx^k} = \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} (j-r) \right) a_j x^{j-k}$$

Підставимо $x = 0$. Отримаємо:

$$A^{(k)}(0) = k! a_k$$

Отже, з формули тейлора маємо:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k A(0)}{dx^k} \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! a_k}{1} \cdot \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Що і потрібно було довести.

Завдання 3. Непланарність повного графа K_5.

Теорема. Граф K_5 є непланарним.

Доведення. Доведемо від противного. Нехай граф K_5 є планарним. В такому випадку ми можемо застосувати для цього графу формулу Ейлера, тобто

$$V - E + F = 2$$

Кількість вершин в цьому графі 5, а кількість ребер $E = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Отже, ми отримаємо, що $5 - 10 + F = 2 \implies F = 7$.

Тепер доведемо, що кількість граней не може дорівнювати 7. Помітимо, що будь-яка грань обмежена не менше, ніж 3 ребрами. Більш того, будь-яке ребро або розмежує 2 грані, або жодної. Тому $3F \leq 2E$. Звідси $3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10$ або $21 \leq 20$. Протиріччя.

Завдання 4. Задача

Якщо граф незв'язний, то знайдеться хоча б 2 компоненти зв'язності (інакше якщо вона 1, то граф вже є зв'язним). Доведемо, що їх рівно 2. Дійсно, нехай їх 3. Тоді в нас точно знайдеться компонента зв'язності, де буде 1 вершина, яка є ізольованою (бо якщо в кожній компоненті хоча б 2 вершини, то загальна кількість вершин в графі потрібна бути хоча б $3 \cdot 2 = 6$, а в нас вершин 5).

Розбити 5-вершиний граф на 2 компоненти зв'язності ми можемо лише, якщо одна компонента зв'язності має 3 вершини, а інша 2 (інші варіанти $0 + 5, 1 + 4$ нам не підходять). Отже наша задача зводиться до наступної: скільки ми можемо побудувати пар зв'язних графів з 3 та 2 вершинами (причому попарно графи повинні бути неізоморфними).

Для 2 вершин ми можемо лише їх з'єднати і це буде єдиним зв'язним графом. Для трьох ми можемо або побудувати K_3, або прибрати з повного графа K_3 будь-яке з ребер (але тільки одне, інакше отримаємо ізольовану вершину). Але прибирання будь-якого з 3 ребер дасть нам ізоморфні графи, отже насправді ми додаємо лише 1 варіант.

Отже маємо лише 2 варіанти (стрілки не позначають орієнтований граф, просто я не знайшов функцію побудувати відрізок 🙂) :