Теорія Ймовірності

Весняний семестр 2024

Домашня робота 6

МП-31 Захаров Дмитро

Викладач: Півень О.Л.

§ Випадкові вектори §

Задача 1: Завдання з файлу

Умова. Дано таблицю 1 розподілу двовимірного випадкового вектору (ξ, η). Знайти таблиці розподілу випадкових величин ξ, η. Знайти таблицю умовного закону розподілу ξ за умови, що $\eta = 0$. Знайти таблицю умовного закону розподілу η за умови, що $\xi = -1$. Знайти таблиці розподілу суми $\xi + \eta$ та добутку $\xi\eta$. Знайти функції розподілу випадкових величин ξ, η та побудувати їх графіки. Знайти функцію розподілу двовимірного дискретного випадкового вектору (ξ, η).

Розв'язання. Знайдемо розподіл ξ: $\Pr[\xi = x] = \sum_y \Pr[\xi = x, \eta = y]$. Тому, звідси

$$\Pr[\xi = 0] = 0.0 + 0.1 + 0.2 = 0.3 \tag{1.1}$$
$$\Pr[\xi = -1] = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4 \tag{1.2}$$
$$\Pr[\xi = -2] = 0.2 + 0.1 + 0.0 = 0.3 \tag{1.3}$$

Для розподілу η: $\Pr[\eta = y] = \sum_x \Pr[\xi = x, \eta = y]$, тому

$$\Pr[\eta = 0] = 0.0 + 0.1 + 0.2 = 0.3 \tag{1.4}$$
$$\Pr[\eta = 1] = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4 \tag{1.5}$$
$$\Pr[\eta = 2] = 0.2 + 0.1 + 0.0 = 0.3 \tag{1.6}$$

Тепер знайдемо умовний закон розподілу ξ за умови $\eta = 0$. Для цього скористаємось формулою умовної ймовірності:

$$\Pr[\xi = x \mid \eta = 0] = \frac{\Pr[\xi = x, \eta = 0]}{\Pr[\eta = 0]}, \; x \in \{0, -1, -2\} \tag{1.7}$$

ξ/η	0	1	2
0	0.0	0.1	0.2
-1	0.1	0.2	0.1
-2	0.2	0.1	0.0

Табл. 1: Таблиця розподілу (ξ, η).

Тому, таблиця розподілу:

$$\Pr[\xi = 0 \mid \eta = 0] = \frac{0.0}{0.3} = 0 \tag{1.8}$$

$$\Pr[\xi = -1 \mid \eta = 0] = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} \tag{1.9}$$

$$\Pr[\xi = -2 \mid \eta = 0] = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \tag{1.10}$$

Тепер побудуємо таблицю розподілу η за умови $\xi = -1$. Скористаємось формулою:

$$\Pr[\eta = y \mid \xi = -1] = \frac{\Pr[\eta = y, \xi = -1]}{\Pr[\xi = -1]},\ y \in \{0, 1, 2\} \tag{1.11}$$

Тому таблиця розподілу:

$$\Pr[\eta = 0 \mid \xi = -1] = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \tag{1.12}$$

$$\Pr[\eta = 1 \mid \xi = -1] = \frac{0.2}{0.4} = 0.50 \tag{1.13}$$

$$\Pr[\eta = 2 \mid \xi = -1] = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \tag{1.14}$$

Знайдемо таблицю розподілу $\sigma = \xi + \eta$. Можливі значення – $\Sigma = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, причому розподіл:

$$\Pr[\sigma = s] = \sum_{(x,y):x+y=s} \Pr[\xi = x, \eta = y] \tag{1.15}$$

Далі будуємо розподіл:

$$\Pr[\sigma = -2] = \Pr[\xi = -2, \eta = 0] = 0.2 \tag{1.16}$$

$$\Pr[\sigma = -1] = \Pr[\xi = -1, \eta = 0] + \Pr[\xi = -2, \eta = 1] = 0.1 + 0.1 = 0.2 \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\Pr[\sigma = 0] &= \Pr[\xi = 0, \eta = 0] + \Pr[\xi = -1, \eta = 1] + \Pr[\xi = -2, \eta = 2] \\ &= 0.0 + 0.2 + 0.0 = 0.2\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\Pr[\sigma = 1] = \Pr[\xi = 0, \eta = 1] + \Pr[\xi = -1, \eta = 2] = 0.1 + 0.1 = 0.2 \tag{1.19}$$

$$\Pr[\sigma = 2] = \Pr[\xi = 0, \eta = 2] = 0.2 \tag{1.20}$$

Отже, σ розподілена рівномірно по множині $\Sigma = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Розглянемо добуток $\pi = \xi\eta$. Можливі значення – $\Pi = \{0, -1, -2\}$ (хоча і $2 \times (-2) = -4$ – також можливе значення, але ймовірність дорівнює 0), причому формула розподілу

$$\Pr[\pi = p] = \sum_{(x,y):xy=p} \Pr[\xi = x, \eta = y] \tag{1.21}$$

Підставляємо значення:

$$\Pr[\pi = 0] = 0.0 + 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.6 \tag{1.22}$$
$$\Pr[\pi = -1] = 0.2 \tag{1.23}$$
$$\Pr[\pi = -2] = 0.2 \tag{1.24}$$

Функція розподілу $F_\xi(x)$:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0.0, & x \le -2 \\ 0.3, & -2 < x \le -1 \\ 0.7, & -1 < x \le 0 \\ 1.0, & x > 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Функція розподілу $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0.0, & x \le 0 \\ 0.3, & 0 < x \le 1 \\ 0.7, & 1 < x \le 2 \\ 1.0, & x > 2 \end{cases} \tag{1.26}$$

Функція розподілу вектору $F_{\xi,\eta}(x, y)$:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0.0, & x \le -2 \vee y \le 0 \\ 0.2, & -2 < x \le -1 \wedge 0 < y \le 1 \\ 0.3, & -1 < x \le 0 \wedge 0 < y \le 1 \\ 0.3, & x > 0 \wedge 0 < y \le 1 \\ 0.3, & -2 < x \le -1 \wedge 0 < y \le 1 \\ 0.3, & -2 < x \le -1 \wedge 1 < y \le 2 \\ 0.3, & -2 < x \le -1 \wedge y > 2 \\ 0.6, & -1 < x \le 0 \wedge 1 < y \le 2 \\ 0.7, & x > 0 \wedge 1 < y \le 2 \\ 0.7, & -1 < x \le 0 \wedge y > 2 \\ 1.0, & x > 0 \wedge y > 2 \end{cases} \tag{1.27}$$

Задача 2: Лекція, Вправа 5

Умова. Нехай задано випадковий вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ і відома його функція розподілу $F_\xi(\mathbf{x})$. Як відновити функцію розподілу окремої компоненти $F_{\xi_k}(x_k)$?

Відповідь. Достатньо скористатися формулою:

$$\begin{aligned} F_{\xi_k}(x_k) &\triangleq \Pr[\xi_k < x_k] = \Pr[\xi_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}, \xi_k < x_k, \xi_{k+1} \in \mathbb{R}, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}] \\ &= \lim_{x_i \to \infty, i \in [n] \setminus \{k\}} F_\xi(\mathbf{x}) = F_\xi(+\infty, \ldots, +\infty, \underbrace{x_k}_{k\text{та позиція}}, +\infty, \ldots, +\infty) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Задача 3: Лекція, Вправа 6

Умова. Нехай задано випадковий вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ і відома його функція розподілу $F_\xi(\mathbf{x})$. Як відновити функцію розподілу підсистеми з векторів $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \ldots, \xi_{m_k})$ де $\{m_i\}_{i=1}^k \subset [n]$ попарно різні і $k < n$.

Відповідь. Нехай $\mathbf{x}' = (x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k})$. Аналогічно минулій задачі:

$$F_{\xi'}(\mathbf{x}') = F_\xi(\widetilde{\mathbf{x}}),\ \widetilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \exists j \in [k] : m_j = i \\ +\infty, & \text{інакше} \end{cases} \tag{3.1}$$

Задача 4: Лекція, Вправа 8

Умова. Визначити за таблицею розподілу дискретного двовимірного випадкового вектору (ξ, η) розподіл добутку, різниці та частки дискретних випадкових величин.

Відповідь. Достатньо навести формулу для довільної неперервної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, тобто знайдемо розподіл $\zeta = f(\xi, \eta)$. Тоді, розподіл:

$$\Pr[\zeta = z] = \sum_{(i,j): f(x_i, y_j) = z} \Pr[\xi = x_i, \eta = y_j],\ z \in f(\Omega), \tag{4.1}$$

де Ω – множина можливих значень вектору (ξ, η).

Задача 5: Лекція, Вправа 9

Умова. Охарактеризувати умовний закон розподілу випадкової величини η за умови, що ξ прийняло фіксоване значення x_0.

Відповідь. Нехай можливі значення ξ це $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i=1}^N$, а у η – це $\mathcal{Y} = \{y_j\}_{j=1}^M$. Якщо $x_0 \notin \mathcal{X}$, то умовний розподіл тотожньо нульовий. Інакше,

$$\Pr[\eta = y_j \mid \xi = x_0] = \frac{\Pr[\eta = y_j, \xi = x_0]}{\Pr[\xi = x_0]} = \frac{\Pr[\eta = y_j, \xi = x_0]}{\sum_{j=1}^M \Pr[\xi = x_0, y = y_j]} \tag{5.1}$$

Задача 6: Лекція, Вправа 10

Умова. Як відновити щільності інших компонент $\xi_2, \ldots, \xi_n$ за щільністю неперервної випадкової величини $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$? Який вигляд формули відновлення щільності компонент приймуть у випадку двовимірного випадкового вектору?

Відповідь. Для ξ_k формула набуде вигляду:

$$f_{\xi_k}(x_k) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_\xi(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=1, j\neq k}^n dx_j, \ x_k \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Для двовимірного випадку:

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2, \ x_1 \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$

$$f_{\xi_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_1, \ x_2 \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$