Екзамен з Лінійної Алгебри

Екзаменаційна робота з Лінійної Алгебри

Студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Дмитра

Завдання 1.

1.1. Наведіть приклад симетричного многочлена від трьох змінних, який містить доданок $x_1^4x_2^5$.

Для того щоб навести відповідь на це запитання, сформулюємо означення симетричного многочлена.

Означення. Поліном $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається симетричним, якщо

$$\forall \sigma \in S_n : P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_n})$$

З умови маємо, що наш многочлен має вид $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2^5 + R(x_1, x_2, x_3)$ і він має бути симетричним. Отже, нам потрібно, щоб цей многочлен також мав член $x_1^5x_2^4$, бо якщо ми переставимо x_1, x_2 місцями, то повинні отримати той самий результат. Отже, як мінімум, маємо взяти $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2^5 + x_1^5x_2^4 + \text{щось}$. Проте, ми ще не врахували, що перед нами многочлен від трьох змінних, бо якщо ми, наприклад, візьмемо перестановку $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, то в нас буде

$$P(x_2, x_3, x_1) = x_2^4x_3^5 + x_2^5x_3^4 \neq x_1^4x_2^5 + x_1^5x_2^4 = P(x_1, x_2, x_3)$$

Отже, додамо ще члени $x_1^4x_3^5, x_1^5x_3^4, x_2^4x_3^5, x_2^5x_3^4$, тобто будемо мати

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^4x_2^5 + x_1^5x_2^4 + x_1^4x_3^5 + x_1^5x_3^4 + x_2^4x_3^5 + x_2^5x_3^4$$

Такий многочлен вже є симетричним. Давайте для впевненості перервіримо на підстановці (*зауваження:* це не строге доведення) $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$:

$$P(x_2, x_3, x_1) = x_2^4x_3^5 + x_2^5x_3^4 + x_2^4x_1^5 + x_2^5x_1^4 + x_3^4x_1^5 + x_3^5x_1^4$$

Бачимо, що дійсно $P(x_1, x_2, x_3) = P(x_2, x_3, x_1)$.

1.2. Вкажіть старший член цього многочлен в лексикографічному порядку.

Також сформуємо що означає, що деякий моном $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ є старшим членом в поліномі $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Означення. Моном $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ є старшим членом в поліномі $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ якщо для будь-якого іншого монома $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ цього полінома виконується

$$(\alpha_1 > \beta_1) \vee (\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 > \beta_2) \vee \dots \vee (\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n > \beta_n)$$

Отже, в нашому конкретному випадку старшим членом є $x_1^5 x_2^4$. По-перше, ступінь x_1, що дорівнює 5, є більшою за усі члени окрім $x_1^5 x_3^4$. Проте, ступінь x_2 у мономі $x_1^5 x_2^4$ дорівнює 4, що вочевидь більше за 0 у випадку $x_1^5 x_3^4$. Тобто за лексикографічним порядком $x_1^5 x_2^4$ є старшим за $x_1^5 x_3^4$.

1.3. Наведіть приклад симетричного многочлена від трьох змінних, старший член якого в лексикографічному порядку дорівнює $x_1^2 x_2^2$.

Аби $x_1^2 x_2^2$ був старшим членом в лексикографічному порядку многочлена $P(x_1, x_2, x_3)$, додамо ще члени $x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2$, тобто

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$$

Вочевидь, це є симетричним многочленом і член $x_1^2 x_2^2$ є в ньому старшим.

1.4. Сформулюйте та доведіть теорему Вієта для комплексних многочленів.

Теорема. Нехай $T(z) \in \mathbb{C}[z],\ \deg T =: n \in \mathbb{N}$. Запишемо цей многочлен у 2 виглядах (це можна зробити за основною теоремою алгебри):

$$T(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),\ z_j \in \mathbb{C}$$

$$T(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k,\ \beta_k \in \mathbb{C}$$

В такому разі

$$\sigma_k(z_1, \dots, z_n) = (-1)^k \frac{\beta_{n-k}}{\beta_n},\ k = \overline{1, n}$$

Доведення. Прирівняємо обидва записи $T(z)$:

$$\alpha \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^k$$

Прирівняємо коефіцієнти при степенях z зліва і справа. При z^n праворуч маємо β_n, а зліва просто α, тому $\beta_n = \alpha$.

При z^{n-1} праворуч маємо β_{n-1}, а ліворуч

$$\alpha(-z_1 - z_2 - \cdots - z_n) = -\alpha \sum_{k=1}^{n} z_j = -\alpha\sigma_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Отже $\alpha\sigma_1(z_1, \ldots, z_n) = \beta_{n-1} \implies \sigma_1(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{\beta_{n-1}}{\alpha}$.

При z^{n-2} праворуч маємо β_{n-2}, а ліворуч

$$\alpha(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \cdots + z_2 z_n + \cdots + z_{n-1} z_n) = \\ \alpha \sum_{i<j}^{n} z_i z_j = \alpha\sigma_2(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Отже бачимо, що $\sigma_2(z_1, \ldots, z_n) = \frac{\beta_{n-2}}{\alpha}$. Далі знову, акуратно виписуючи суму, ліворуч отримаємо $-\alpha \sum_{i<j<k}^{n} z_i z_j z_k = -\alpha\sigma_3(z_1, \ldots, z_n)$, що дорівнює β_{n-3}, отже

$$\sigma_3(z_1, \ldots, z_n) = -\frac{\beta_{n-3}}{\alpha}$$

Продовжуючи далі, в загальному випадку, отримаємо

$$\sigma_k(z_1, \ldots, z_n) = (-1)^k \frac{\beta_{n-k}}{\beta_n}$$

Що і потрібно було довести.

Завдання 2.

2.1. Доведіть теорему про опис унітарних операторів в двовимірному дійсному просторі.

Спочатку наведемо визначення, який оператор називають унітарним.

Означення. Нехай E — евклідів простір, $\dim E =: n \in \mathbb{N}$ і маємо деякий лінійний оператор $\mathbf{U} : E \to E$. Цей лінійний оператор є унітарним, якщо $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}$.

Тепер окремо розглядаємо випадок $E = \mathbb{R}^2$. Доведемо теорему про опис унітарних операторів в двовимірному дійсному просторі.

Теорема. Будь-який унітарний лінійний оператор $\mathbf{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \text{ або } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

Доведення. Нехай маємо $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in E$ — ортонормований базис, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця оператора в цьому базисі. Запишемо умову $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тобто маємо умову

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Якщо $a^2 + b^2 = 1$, то $\exists \phi \in \mathbb{R} : a = \cos\phi, b = \sin\phi$. Аналогічно для умови $c^2 + d^2 = 1$ маємо, що $\exists \psi \in \mathbb{R} : c = \sin\psi, d = \cos\psi$. Підставивши у друге рівняння, отримаємо

$$\cos\phi \sin\psi + \cos\psi \sin\phi = 0 \implies \sin(\phi + \psi) = 0$$

Тобто ми отримали, що $\phi + \psi = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Розглянемо два випадки:

Випадок 1. $\phi + \psi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. В такому випадку маємо $\phi = 2\pi k - \psi$ і тоді

$$\cos\phi = \cos(2\pi k - \psi) = \cos\psi, \ \sin\phi = \sin(2\pi k - \psi) = -\sin\psi$$

І таким чином наш оператор має вид

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

Це є матрицею повороту на кут ψ проти годинникової стрілки.

Випадок 2. $\phi + \psi = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Звідси $\phi = -\psi + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Звідси маємо

$$\cos\phi = \cos(-\psi + \pi + 2\pi k) = -\cos\psi,$$
$$\sin\phi = \sin(-\psi + \pi + 2\pi k) = \sin\psi$$

Отже оператор буде мати вигляд

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

З'ясуємо, що це за оператор. Знайдемо власні числа, тобто розглянемо характеристичний поліном

$$\chi_U(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\cos\psi - \lambda & \sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi - \lambda \end{bmatrix}$$

Тобто $\chi_U(\lambda) = (\lambda + \cos\psi)(\lambda - \cos\psi) - \sin^2\psi = \lambda^2 - \cos^2\psi - \sin^2\psi = \lambda^2 - 1$ і звідси маємо $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Отже, існує ортонормований базис $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, в якому матриця має вид

$$\mathbf{U}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Що є оператором симетрії відносно $\mathrm{Lin}\{\mathbf{u}_1\}$.

2.2. Наведіть приклад лінійного оператора в $\mathbb{R}^2$, який не є унітарним.

Насправді, достатньо взяти будь-який оператор $\mathbf{T}$, який не можна подати у виді, зазначеному у теоремі в пункті 2.1. Наприклад, нехай $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Тоді

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \neq \mathbf{E}$$

2.3. Опишіть лінійні оператори в $\mathbb{R}^2$, які є одночасно унітарними і самоспряженими.

Введемо означення самоспряженого оператора.

Означення. Оператор $\mathbf{T} : E \to E$ є самоспряженим, якщо $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$ або ж

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \langle \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y} \rangle$$

Отже, якщо деякий оператор $\mathbf{U}$ є унітарним, то за означенням

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}$$

Проте $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$, тому $\mathbf{U}^2 = \mathbf{E}$. Розглянемо 2 випадки.

Випадок 1. $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$. В такому разі

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \cos 2\psi = 1 \\ \sin 2\psi = 0 \end{cases}$$

Ця умова означає $2\psi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \to \psi = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Тому якщо підставити у вираз $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \pi k & -\sin \pi k \\ \sin \pi k & \cos \pi k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Отже маємо або $\mathbf{U} = \mathbf{E}$, або $\mathbf{U} = -\mathbf{E}$.

Випадок 2. $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix}$. В такому разі

$$\mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi & \cos \psi \sin \psi - \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi - \cos \psi \sin \psi & \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

Отже для будь-якої матриці такого виду маємо $\mathbf{U}^2 = \mathbf{E}$.

Висновок: Лінійні оператори в $\mathbb{R}^2$, які є одночасно унітарними і самоспряженими можна подати у вигляді

$$\mathbf{U}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix}$$

Приклад. Нехай $\psi = \pi/4$. Тоді $\mathbf{U}(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Видно, що $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$, тобто оператор є самоспряженим, а також, вочевидь, унітарним згідно пункту 2.1.

Завдання 3.

3.1. Доведіть, що мінімальний многочлен жорданової клітинки співпадає з її характеристичним многочленом.

Спочатку введемо означення мінімального многочлена.

Означення. Нехай ми маємо матрицю $\mathbf{A} \in F^{n \times n}$. Розглянемо множину $\mathcal{P}$ поліномів $P \in F[X]$ над полем F таких, що $P(\mathbf{A}) = 0$ і старший член яких дорівнює 1. В такому разі мінімальним многочленом $\mu_A \in F[X]$ називають такий многочлен, що

$$\mu_A \in \mathcal{P} \wedge \deg \mu_A = \min\{\deg p \mid p \in \mathcal{P}\}$$

Тобто іншими словами, степінь μ_A мінімальна серед многочленів з $\mathcal{P}$.

Отже, нам потрібно довести наступне твердження.

Твердження. Нехай маємо жорданову клітинку $\mathbf{J}_n(w) \in F^{n\times n}, w \in F$. В такому разі маємо $\chi_J \equiv \mu_J$, де $\chi_J \in F[\lambda]$ — характеристичний многочлен, $\mu_J \in F[\lambda]$ — мінімальний многочлен.

Доведення. Отже, жорданова клітинка $\mathbf{J}_n(w) \in F^{n\times n}$ за означенням має вид:

$$\mathbf{J}_n(w) = \begin{bmatrix} w & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & w & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & w \end{bmatrix}$$

Знайдемо детермінант цієї матриці (це нам знадобиться згодом) і позначимо $\Delta_J(w)$. Отже, розкладемо детермінант за останнім рядком (через Δ_k будемо позначати детермінант правого нижнього кутового мінора розміра k):

$$\Delta_n = w\Delta_{n-1} - \det \begin{vmatrix} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots \end{vmatrix}$$

У другої матриці детермінант 0, оскільки маємо стовпець з нулей. Отже, $\Delta_n = w\Delta_{n-1}$ звідси доволі очевидно, що $\Delta_J(w) = w^n$, оскільки $\Delta_1 = w$.

Тепер випишемо характеристичний поліном. За означенням $\chi_J(\lambda) = \det(\mathbf{J}_n - \lambda\mathbf{E}) = \det \mathbf{J}_n(w-\lambda) = \Delta_J(w-\lambda)$, тобто $\chi_J(\lambda) = (w-\lambda)^n$, звідки маємо єдине власне число $\lambda = w$ ступеня n.

Отже мінімальний многочлен має вид $\mu_J(X) = (X-w)^k$, де потрібно знайти мінімальне $k = \overline{1,n}$ таке, що $(\mathbf{J}_n(w) - w\mathbf{E})^k = 0$. Помітимо, що

$$\mathbf{J}_n(w) - w\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{I}$$

Отже знайдемо $\mathbf{I}^2$. Маємо $\mathbf{I}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Якщо зробити це ще один раз, то отримаємо

$$\mathbf{I}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Отже, бачимо, що після кожного домноження на $\mathbf{I}$ «сходинка» з одиниць зміщується на одну одиницю “праворуч”. При цьому довжина зменшується на 1. Таким чином, якщо на початку її довжина дорівнювала $n-1$, то після $n-1$ кроків отримаємо

$$\mathbf{I}^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Тобто в верхньому правому кутку маємо 1, в усіх інших позиціях 0. Таким чином, вочевидь,

$$\mathbf{I}^n = 0$$

Тобто $\{(\mathbf{J}_n(w) - w\mathbf{E})^n = 0\} \land \{\forall k = \overline{1, (n-1)} : (\mathbf{J}_n(w) - w\mathbf{E})^k \neq 0\}$, звідки ми робимо висновок, що $\mu_J(X) = (X - w)^n$ є мінімальним многочленом.

Отже бачимо, що $\chi_J \equiv \mu_J$.

3.2. Сформулюйте теорему про зв'язок мінімального многочлена лінійного оператора з його жордановою формою.

Теорема. Нехай матриця лінійного оператора $\mathbf{A}$ має мінімальний многочлен у вигляді

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

Причому $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно різні. В такому разі ступінь $\beta_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, n}$ показує максимальний розмір жорданового блоку $\mathbf{J}(\lambda_k)$.

3.3. Наведіть приклад лінійного оператора, у якого характеристичний многочлен дорівнює квадрату (кубу) мінімального.

Нехай характеристичний многочлен дорівнює $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ і відповідно $\mu_A(X) = X - 2$ — мінімальний многочлен. Тоді оскільки $\lambda = 2$ — власне число порядку 2, то візьмемо наступну матрицю:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

І насправді звідси доволі добре видно, що $\mu_A(X) = X - 2$ є мінімальним, оскільки $\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = 0$.

Для кубу можна аналогічно запропонувати, наприклад:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

В такому разі характеристичний многочлен, очевидно, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$, а мінімальний многочлен $\mu_A(X) = X - 3$, бо $\mu_A(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - 3\mathbf{E} = 0$.

Можно розглянути більш цікавий випадок. Наприклад, якщо $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$, то візьмемо відповідно мінімальний многочлен $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. В такому разі до цього можемо підібрати матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$. Окрім того мінімальний многочлен дійсно $\mu_A(X) = (X - 1)(X - 2)$, оскільки:

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, \ \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Проте, якщо перемножити, отримаємо

$$\mu_A(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}-2\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

3.4. Сформулюйте критерій діагоналізовності лінійного оператора в термінах коренів мінімального многочлену.

Теорема. Матриця $\mathbf{A}$ є діагоналізованою (тобто знайдеться таке перетворення, при якому матрицю $\mathbf{A}$ можна звести до виду $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$) тоді і тільки тоді, коли мінімальний многочлен цієї матриці $\mathbf{A}$ має вид

$$\mu_A(X) = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ попарно різні. Тобто кратність усіх унікальних власних чисел у мінімальному многочлені дорівнює 1.