Домашнее задание по дискретной математике
Захаров Дмитрий, МП-11, 1 академическая группа

Задача 1. Выразить $\chi_{A\cap B}(x)$, $\chi_{A\cup B}(x)$, $\chi_{A\setminus B}(x)$, $\chi_{A\Delta B}(x)$, $\chi_{A^C}(x)$ через $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$.

Решение. Для краткости под записью χ_M, где M - некоторое множество, я буду подразумевать $\chi_M(x)$.

Итак, легче всего ответить на вопрос о χ_{A^C}:

$$\chi_{A^C} = 1 - \chi_A$$

Далее зададим $\chi_{A\cap B}$ и $\chi_{A\cup B}$:

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

Для того, чтобы найти $\chi_{A\setminus B}$ заметим, что $A \setminus B = A \cap B^C$:

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\cap B^C} = \chi_A \chi_{B^C} = \chi_A(1 - \chi_B)$$

Наконец, выразим $\chi_{A\Delta B}$. По определению, $A\Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Применим то, что мы уже вывели:

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B}\chi_{B\setminus A}$$

Далее заметим, что $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$, $\chi_{B\setminus A} = \chi_B(1 - \chi_A)$:

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_B(1 - \chi_A) - \chi_A \chi_B (1 - \chi_A)(1 - \chi_B)$$

Преобразовав, мы полуичм выражение:

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B - \chi_A^2 \chi_B - \chi_A \chi_B^2 + \chi_A^2 \chi_B^2$$

Учтём, что $\chi_A^2 = \chi_A$ и $\chi_B^2 = \chi_B$. Таким образом:

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$$

Задача 2. Доказать при помощи характеристической функции, что:

$$(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) = (B \setminus A) \setminus C$$

Решение. Заметим следующее:

$$\forall x \in I : \chi_A(x) = \chi_B(x) \implies A = B$$

Поэтому чтобы доказать изначальное равенство, достаточно доказать, что:

$$\chi_{(B\setminus C)\setminus(A\setminus C)}(x) = \chi_{(B\setminus A)\setminus C}(x)$$

Для краткости назовём левую часть χ_L, а правую часть - χ_R.Начнём с правой части. Имеем:

$$\chi_R = \chi_{B\setminus A}(1 - \chi_C) = \chi_B(1 - \chi_A)(1 - \chi_C)$$

Посчитаем левую часть:

$$\chi_L = \chi_{B\setminus C}(1 - \chi_{A\setminus C}) = \chi_B(1 - \chi_C)(1 - \chi_A(1 - \chi_C))$$

Далее остаётся раскрыть скобки. Получим:

$$\chi_L = \chi_B - \chi_B\chi_A + \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C^2$$

Заметим, что $\chi_C^2 = \chi_C$, поэтому:

$$\chi_L = \chi_B - \chi_B\chi_A + \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_B\chi_C = \chi_B((1-\chi_A) - \chi_C(1-\chi_A)) = \chi_B(1-\chi_A)(1-\chi_C)$$

Как видим $\chi_L = \chi_R$, а следовательно наше тождество верно.

Задача 3. Доказать при помощи характеристической функции, что:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Решение. Воспользуемся указанием, т.е.:

$$|A| = \sum_{x \in I} \chi_A(x)$$

Итак, заметим, что:

$$\chi_{A\cup B\cup C} = \chi_{A\cup B}+\chi_C-\chi_{A\cup B}\chi_C = (\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)+\chi_C-\chi_C(\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)$$

Немного причесав это уравнение, получим:

$$\chi_{A\cup B\cup C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C$$

Таким образом:

$$|\chi_{A\cup B\cup C}| = \sum_{x\in I}(\chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C)$$

Также запишем следующее:

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B,\ \chi_{B\cap C} = \chi_B\chi_C$$

$$\chi_{A\cap C} = \chi_A\chi_C,\ \chi_{A\cap B\cap C} = \chi_A\chi_B\chi_C$$

Таким образом, правая сумма эквивалентна:

$$\sum_{x\in I}\chi_A + \sum_{x\in I}\chi_B + \sum_{x\in I}\chi_C - \sum_{x\in I}\chi_A\chi_B - \sum_{x\in I}\chi_A\chi_C - \sum_{x\in I}\chi_B\chi_C + \sum_{x\in I}\chi_A\chi_B\chi_C$$

Заметим, что пределы суммирования везде одинаковые, а значит все члены можно объединить под один знак суммы. Тогда правая сумма эквивалентна:

$$\sum_{x\in I}(\chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C)$$

Эта сумма действительно равна $|\chi_{A\cup B\cup C}|$ как мы записывали выше.

Задача 4. Выразить $\chi_{A\Delta B}(x)$ через $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$. Доказать, что:

- $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
- $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Решение. Как мы уже вывели из первой задачи:

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

Докажем ассоциативность. Расмотрим две характеристические функции: $\chi_{(A\Delta B)\Delta C}(x)$ и $\chi_{A\Delta(B\Delta C)}(x)$. Докажем, что они равны (а следовательно равны и соответствующие множества):

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{A\Delta B} + \chi_C - 2\chi_{A\Delta B}\chi_C$$

Это в свою очередь равно:

$$\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2\chi_C(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)$$

Итого:

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = (\chi_A + \chi_B + \chi_C) - 2(\chi_A\chi_B + \chi_C\chi_A + \chi_C\chi_B) + 4\chi_A\chi_B\chi_C$$

Аналогичным образом:

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_A + \chi_{B\Delta C} - 2\chi_{B\Delta C}\chi_A$$

Проделав снова все преобразования, получим, что это действительно равно $\chi_{(A\Delta B)\Delta C}$.

Теперь докажем, что $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$. Опять рассмотрим 2 характеристические функции $\chi_{A\cap(B\Delta C)}(x)$ и $\chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}(x)$. Начнём с первой функции:

$$\chi_{A\cap(B\Delta C)} = \chi_A\chi_{B\Delta C} = \chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C)$$

Преобразуем вторую функцию:

$$\chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - 2\chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - 2\chi_A^2\chi_B\chi_C$$

Воспользовавшись тем фактом, что $\chi_A^2 = \chi_A$, получим:

$$\chi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = \chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) = \chi_{A\cap(B\Delta C)}$$

Таким образом, $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.