Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Розрахунково-графічне завдання #3

Чисельне розв’язання рівнянь із частинними похідними

Виконав:

Захаров Дмитро Олегович

Група МП-41

Харків – 2025

Зміст

1 Постановка задачі

Для розв'язання завдання використати або метод прямих (диференціально-сітковий) метод або метод сіток. Перевірити точність можна з використанням подвійного перерахунку. Диференціальне рівняння:

$$\Delta u(x,y) - \sin x \cdot u(x,y) = 20[x+y]^2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

для заданих граничних умов

$$(u_\nu + u)\Big|_{x=0} = 0, u\Big|_{x=a} = 0, \quad (u_\nu + u)\Big|_{y=0} = 0, u\Big|_{y=b} = 0$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Тут $a = 2$, $b = 1$, u_ν — похідна по зовнішній нормалі до границі області. Надрукувати розв'язок у вигляді таблиці 10×10.

2 Опис методів

2.1 Метод прямих

Головна ідея методу прямих полягає в зведенні рівняння в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку у двох змінних:

$$\Delta u + f(x,y)u = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = (0,a) \times (0,b)$$

Зафіксуємо певний $n \in \mathbb{N}$ (в нашому конкретному випадку $n = 10$) та розглянемо крок $h := \frac{a}{n}$ вздовж осі x. Тоді розглянемо функції $u_i(y) := u(x_i, y)$ для $i \in [n]$ та $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$. Скористаємось наближеннями для похідних за x (вважаємо, що крок h достатньо малий):

$$\nabla u(x_i, y) = \frac{\partial^2 u(x_i,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i,y)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1}(y) - 2u_i(y) + u_{i+1}(y)}{h^2} + \frac{d^2 u_i}{dy^2}$$

Тоді отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{u_{i-1}(y) - 2u_i(y) + u_{i+1}(y)}{h^2} + \frac{d^2 u_i}{dy^2} + f(x_i,y)u_i(y) = g(x_i,y), \quad i \in [n]$$

з відповідними граничними умовами. Такий спосіб доволі складний, оскільки вимагає розв'язок n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (що *Wolfram Mathematica* у її безкоштовній версії не дозволяє через обмеження ресурсів). Тому замість цього скористаємося методом сіток.

2.2 Метод сіток

Знову нехай маємо рівняння другого порядку у двох змінних:

$$\begin{cases} \Delta u + f(x,y)u = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = (0,a) \times (0,b) \\ (u_\nu + u)\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=a} = (u_\nu + u)\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Рівняння в дискретній формі. Тепер дискретизацію області Ω виконаємо у двох напрямках. Нехай n це щільність сітки у обох напрямках, тоді отримаємо сітку з $(n+1)^2$ вузлів. Значення функції $u(x_i, y_i)$ у вузлі $(x_i, y_i) = (\frac{ia}{n}, \frac{ib}{n})$ позначимо через $u_{i,j}$. Тоді апроксимація оператора Лапласа у точці (x_i, y_j) має наступний вигляд:

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2},$$

де $h_x = \frac{a}{n}$, $h_y = \frac{b}{n}$. Тоді, підставивши це у рівняння, отримаємо для кожного вузла (i, j) наступне рівняння:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} - f(ih_x, jh_y)u_{i,j} = g(ih_x, jh_y)$$

Граничні умови. Залишилось виписати граничні умови на мові дискретизованих значень. Умова $u(a, y) \equiv u(x, b) \equiv 0$ інтерпретується дуже просто:

$$u_{n,j} = 0, \quad u_{i,n} = 0, \quad i, j \in [n]$$

Розглянемо умову $(u_\nu + u)(0, y) = 0$. Оскільки $\nu = (-1, 0)$ за $x = 0$, то маємо $-\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + u(0, y) = 0$. Апроксимуємо похідну за x:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(0, y_j) + u(0, y_j) \approx -\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_x} + u_{0,j} = 0 \implies (1 + h_x)u_{0,j} = u_{1,j}, j \in [n]$$

Нарешті, умова $(u_\nu + u)(x, 0) = 0$ інтерпретується аналогічно:

$$(1 + h_y)u_{i,0} = u_{i,1}, \quad i \in [n]$$

Система лінійних рівнянь. Отже, ми отримали систему

$$\begin{cases} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + f(ih_x, jh_y)u_{i,j} = g(ih_x, jh_y), \\ (1 + h_x)u_{0,j} = u_{1,j}, \quad (1 + h_y)u_{i,0} = u_{i,1}, \quad u_{n,j} = 0, \quad u_{i,n} = 0 \end{cases}$$

Це є системою лінійних рівнянь відносно $(n+1)^2$ невідомих. В нашому випадку, ми просто акуратно випишемо матрицю системи та вектор правих частин, а потім скористаємося стандартними методами розв'язання системи лінійних рівнянь (скажімо, ітеративними). Звичайно, оскільки матриця є розрідженою, то існують значно більш ефективні алгоритми розв'язання таких систем, але ми не будемо надто ускладнювати задачу (особливо для $n=10$).

3 Імплементація

3.1 Код функції розв'язку

Знизу ми наводимо код функції, що реалізує описаний вище алгоритм.

```python
from typing import Callable

# Some math-related imports
import numpy as np
from scipy.sparse import lil_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve


def solve_pde(
    n: int,
    a: float,
    b: float,
    f_func: Callable[[np.ndarray], np.ndarray],
    g_func: Callable[[np.ndarray], np.ndarray]
) -> np.ndarray:
    """
    Solves the PDE:
        nabla u + f(x,y)*u = g(x,y)
    with boundary conditions:
        (du/dn + u)|_{x=0, y=0} = 0
        u|_{x=a, y=b} = 0
```

```
Parameters:
    n: number of interior points per axis (grid is (n+1)x(n+1))
    a, b: domain size in x and y
    f_func: function f(x, y)
    g_func: function g(x, y)

Returns:
    u: (n+1)x(n+1) array with solution values on the grid
"""

h_x = a / n # Grid size in x direction
h_y = b / n # Grid size in y direction
N = (n+1) ** 2  # Total number of points (including boundaries)

A = lil_matrix((N, N)) # Sparse matrix for the system
b_vec = np.zeros(N) # Right-hand side vector

def idx(i: int, j: int) -> int:
    """
    Returns the flattened index for the 2D grid.
    """
    return i * (n + 1) + j

for i in range(n+1):
    for j in range(n+1):
        x, y = i * h_x, j * h_y # Calculate the coordinates
        k = idx(i, j) # Flattened index for the matrix
        f_val = f_func(x, y)
        g_val = g_func(x, y)

        # Boundary for x=a or y=b
        if i == n or j == n:
            A[k, k] = 1.0
            b_vec[k] = 0.0
```

```python
            # Boundary for x=0 or y=0
            elif i == 0 and j < n:
                kp = idx(i + 1, j)
                A[k, k] = 1 + h_x
                A[k, kp] = -1
                b_vec[k] = 0.0
            elif j == 0 and i < n:
                kp = idx(i, j + 1)
                A[k, k] = 1 + h_y
                A[k, kp] = -1
                b_vec[k] = 0.0

            # Now, the main part of the grid
            else:
                xm = idx(i - 1, j)
                xp = idx(i + 1, j)
                ym = idx(i, j - 1)
                yp = idx(i, j + 1)

                A[k, k] = -2 / h_x**2 - 2 / h_y**2 + f_val
                A[k, xm] = 1 / h_x**2
                A[k, xp] = 1 / h_x**2
                A[k, ym] = 1 / h_y**2
                A[k, yp] = 1 / h_y**2

                b_vec[k] = g_val

    u_flat = spsolve(A.tocsr(), b_vec)
    return u_flat.reshape((n + 1, n + 1))
```

Нарешті, використаємо наступний код, щоб відобразити результат, а також перевірити різницю згідно подвійного перерахунку.

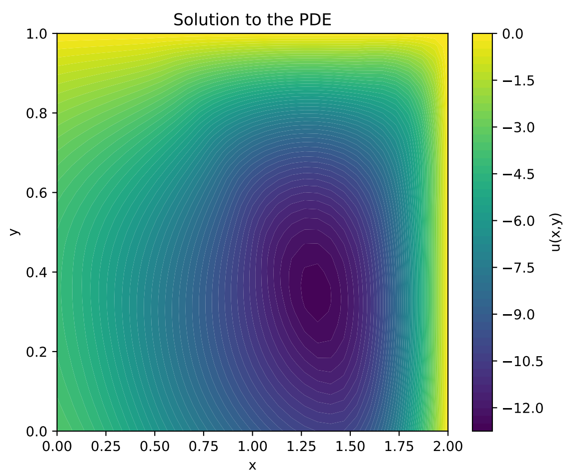
```python
from solver import solve_pde

import numpy as np
```

```
# For visualization
import matplotlib.pyplot as plt


if __name__ == "__main__":
    # First, solve the equation
    a, b = 2.0, 1.0
    n = 30
    f_func = lambda x, y: np.sin(x)
    g_func = lambda x, y: 20 * np.round(x+y)**2

    u_solution = solve_pde(n, a, b, f_func, g_func)
    u_solution_2n = solve_pde(2*n, a, b, f_func, g_func)

    # Validate that the difference between the two solutions is small
    diff = np.max(np.abs(u_solution - u_solution_2n[::2, ::2]))
    print(f"Max difference between n={n} and n={2*n} solutions: {diff:.2e

    x = np.linspace(0, a, n + 1)
    y = np.linspace(0, b, n + 1)
    X, Y = np.meshgrid(x, y, indexing="ij")

    # Contour plot with colorbar (already done)
    plt.figure(figsize=(6, 5))
    plt.contourf(X, Y, u_solution, levels=50, cmap="viridis")
    plt.colorbar(label="u(x,y)")
    plt.title("Solution to the PDE")
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    plt.tight_layout()
    plt.savefig("contour_plot.pdf", dpi=300)
    plt.show()

    # 3D surface plot
    fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
```

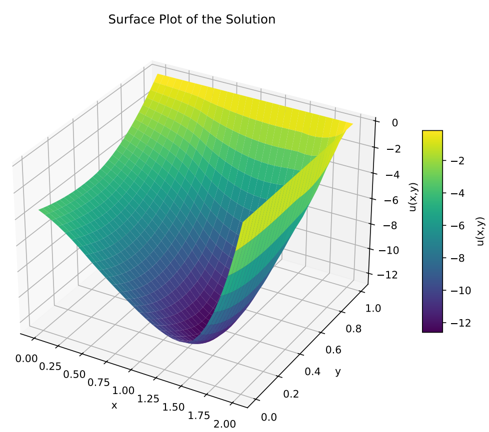
```
surf = ax.plot_surface(X, Y, u_solution, cmap='viridis', edgecolor='
fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10, label="u(x,y)")
ax.set_title("Surface Plot of the Solution")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("u(x,y)")
plt.tight_layout()
plt.savefig("surface_plot.pdf", dpi=300)
plt.show()
```

Отримаємо, що максимальна різниця менша за ε, тому побудований розв'язок доволі точний (нормальну точність досягнуто за $n = 30$).

Самі розв'язки проілюстровано на Рисунку 1.



Contour Plot



Surface Plot

Рис. 1: Розв'язки заданого рівняння.