2️⃣

Homework #2

Задача 10.2

Обозначим количество выбранных сортов пироженных через x, y, z, w. По условию мы должны суммарно купить 7 пироженных, т.е.:

$$x + y + z + w = 7,\ x, y, z, w \in \mathbb{Z}^+$$

Итого нам осталось найти количество решений такого уравнения (тут $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z} \cup \{0\}$). Как было показано из предыдущих задач, такое задание по своей сути эквивалентно расставлению $4 - 1 = 3$ перегородок среди $7 + 3 = 10$ позиций (3 перегородки расставляем среди 7 пироженных), т.е. кол-во решений равняется C_{10}^3.

Ответ: C_{10}^3.

Задача 10.4

Пункт 1.

Пусть у нас есть 10 типов, которые мысленно представим как коробки в которые мы суём тетрадки. Если тетрадь попадает в соответствующую коробку, то она получает тип коробки. Поэтому таких способов (опять же, согласно предыдущим задачам) $\overline{C}_{10}^7 = C_{16}^7$.

Пункт 2.

Разложим 10 типов в ряд и будем выбирать из них 7 штук, которые будем присваивать тетрадкам. Таким образом, кол-во способов равняется C_{10}^7

Пункт 3.

Выбрать 7 тетрадок, среди которых имеется не менее 5 типов означает 3 случая:

1) Выбрать 7 тетрадок разных типов.

2) Выбрать 7 тетрадок, среди которых ровно 6 типов.

3) Выбрать 7 тетрадок, среди которых ровно 5 типов.

Первый пункт мы уже решили ранее — это количество равняется C_{10}^{7}.

Второй пункт — выбрать 6 типов из 10 всего C_{10}^{6} способов. Далее среди этих выбранных 6 типов нам нужно выбрать один и присвоить его тетрадке. Всего это можно сделать 6 способами. Таким образом, всего существует $6C_{10}^{6}$ способов выбрать тетрадки по принципу второго пункта.

Третий пункт — выбрать 5 типов из 10 всего C_{10}^{5} способов. Далее из выбранных 5 типов нужно выбрать либо 1 тип и дать 2 тетрадкам, либо взять 2 типа и дать 2 тетрадкам. Выбрать 1 тип и дать 2 тетрадкам всего 5 способов, а взять 2 типа и дать 2 тетрадкам — C_5^2. Таким образом, всего существует $(5 + C_5^2)C_{10}^{5}$ способов выбрать тетрадки по принципу третьего пункта.

Значит, итоговый ответ $C_{10}^{7} + 6C_{10}^{6} + (5 + C_5^2)C_{10}^{5}$.

Ответ: 1) C_{16}^{7}. **2)** C_{10}^{7}. **3)** $C_{10}^{7} + 6C_{10}^{6} + (5 + C_5^2)C_{10}^{5}$

Задача 234

Пусть количество шоколадных колечек, колечек с корицей и ореховых колечек x, y, z. В таком случае, нам нужно найти количество решений такой системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 3 \le x \le 9 \\ 3 \le y \le 9 \\ 2 \le z \le 4 \\ x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Можем её слегка упростить. Пусть $f = x - 3, g = y - 3, h = z - 2$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} f + g + h = 10 \\ f \le 6 \\ g \le 6 \\ h \le 2 \\ f, g, h \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Далее умного решения я не придумал, поэтому просто перебрал (вариантов тут реально немного). Пусть $f = 6$, тогда способов найти пару (h, g) всего 3:

$(0, 4), (1, 3), (2, 2)$. Если $f = 5$, способов тоже 3: $(0, 5), (1, 4), (2, 3)$. Если $f = 4$, то опять 3: $(0, 6), (1, 5), (2, 4)$. При $f = 3$ способов 2: $(1, 6), (2, 5)$. Если $f = 2$, то способ 1: $(2, 6)$. При $f = 1$ или $f = 0$, то решений нет. Суммарно имеем 12 решений.

Ответ: 12

Задача 15

Переформулируем задачу таким образом: пусть есть слово $aabbbcccc$. Нам нужно найти количество слов, которые мы можем получить переставлением букв. Всего в этом слове 2 повтора a, 3 повтора b, 4 повтора c. Поэтому всего способов $\frac{9!}{2!3!4!}$.

Задача 16(a)

В слове метаматематика всего 3 буквы “м”, 2 буквы “е”, 3 буквы “т”, 4 буквы “а” и по 1ой букве “и” и “к”. Поэтому всего способов $\frac{14!}{3!2!3!4!}$.