§ Фазові портрети нелінійних двовимірних систем. §

Задача 1: Синуси.

Умова. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = \sin x_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Знайдіть її точки спокою і лінеаризацію системи в цих точках. Спробуйте намалювати (глобальний) фазовий портрет цієї системи. Перевірте себе за допомогою програми (методу `streamplot`).

Розв'язок. Векторне поле праворуч має вигляд:

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = (\sin x_1, \sin x_2) \tag{1.2}$$

Таким чином, можемо знайти Якобіан:

$$\boldsymbol{J} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_1 & 0 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Знайдемо точки спокою: тобто множину точок, для яких $\boldsymbol{f}$ приймає нульове значення. Маємо:

$$\begin{cases} \sin x_1 = 0 \\ \sin x_2 = 0 \end{cases} \implies (x_1, x_2) = (\pi n, \pi k), \; n, k \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

Тобто, множина точок спокою – це квадратна решітка з точок з шириною клітинки π, що проходить через $(0, 0)$. Для класифікації точок, нам потрібно обчислити Якобіан в цих точках:

$$\boldsymbol{J}(\pi n, \pi k) = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{(-1)^n, (-1)^k\} \tag{1.5}$$

Звідси характеристичний поліном $\chi_J(\lambda) = (\lambda - (-1)^n)(\lambda - (-1)^k)$ і спектр $\sigma(\boldsymbol{J}(\pi n, \pi k)) = \{(-1)^n, (-1)^k\}$. В залежності від парностей n, k можливо 4 випадки:

Випадок 1. n, k **– парні** Тоді спектр складається з єдиного власного значення $\lambda = 1$ кратності 2. Це відповідає фазовому портрету множини прямих, що проходять через $(\pi n, \pi k)$, причому траєкторія виходить з точок, що відповідає нестійкій точці.

Випадок 2. n, k **– непарні.** Спектр складається з єдиного власного значення $\lambda = -1$ кратності 2 – це також відповідає множині прямих, але траєкторія входить в точку, тобто вона є стійкою.

Випадок 3. n **– парне,** k **– непарне.** Спектр складається з двох власних значень $\{-1, 1\}$. Оскільки обидва значення є дійсними і протилежними за знаком, то перед нами сідло.

Випадок 4. n **– непарне,** k **– парне.** Як і у випадку 3, перед нами сідло.

Отже, яку поведінку ми очікуємо? По-перше, траєкторії мають сходитися до точок виду $((2p+1)\pi, (2q+1)n)$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Також, вони будуть візуально "виходити" з точок виду $(2p\pi, 2q\pi)$ (такі собі "джерела") і проходити "повз" точок $((2p+1)\pi, 2q\pi)$ та $(2p\pi, (2q+1)\pi)$ по траєкторіям, що схожі на гіперболи.

Як і було запропоновано в умові, перевіримо гіпотезу за допомогою *Python*. Запустимо наступну програму:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import (AutoMinorLocator, MultipleLocator)

if __name__ == '__main__':
    # Defining the matplotlib figure and axis.
    fig = plt.figure(figsize=(7, 7))
    ax = fig.add_subplot()

    # Change major ticks to show every pi.
    ax.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(np.pi))
    ax.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(np.pi))

    # Change minor ticks to show every pi/2.
    ax.xaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(np.pi / 2))
    ax.yaxis.set_minor_locator(AutoMinorLocator(np.pi / 2))

    # Turn grid on for both major and minor ticks and style minor slightly
    # differently.
    ax.grid(which='major', color='#CCCCCC', linestyle='--')
    ax.grid(which='minor', color='#CCCCCC', linestyle=':')
    ax.set_aspect('equal')
```

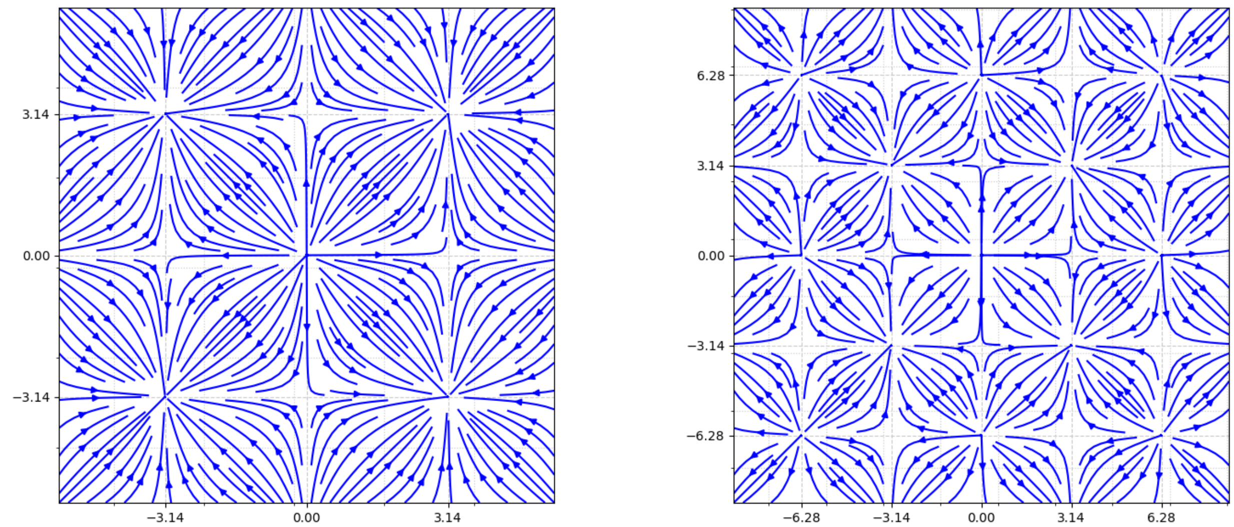


Рис. 1: Фазовий портрет для задачі 1. Ліворуч – для області значень $(x, y) \in [-1.75\pi, +1.75\pi]^2$, праворуч – для $(x, y) \in [-2.75\pi, +2.75\pi]^2$.

```

    # Defining the vector field
    def f(x,y):
        return np.sin(x), np.sin(y)

    x = np.linspace(-1.75*np.pi, 1.75*np.pi, 100)
    y = np.linspace(-1.75*np.pi, 1.75*np.pi, 100)
    xx, yy = np.meshgrid(x, y)

    f1,f2 = f(xx, yy)
    ax.streamplot(xx, yy, f1, f2, density=1.8, color='b')

    # Set high DPI and save the figure
    fig.set_dpi(300)
    fig.savefig(f'phase_portrait.png')
```

Результат зображено на Рисунку 1. Дійсно, малюнок відповідає нашій гіпотезі.

Задача 2: Коливання без тертя.

Умова. Розглянемо систему коливань маятника без тертя:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Знайдіть точки спокою і лінеаризиацію системи в цих точках. Які висновки можна з цього зробити щодо фазового портрету вихідної системи в околі цих точок?

Розв'язок. Маємо векторне поле $\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = (x_2, -\omega^2 \sin x_1)$. Точки спокою відповідають розв'язкам системи

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\omega^2 \sin x_1 = 0 \end{cases} \implies (x_1, x_2) = (\pi n, 0),\ n \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

Для класифікації нам потрібно лінеаризувати систему. Для цього знайдемо Якобіан:

$$\boldsymbol{J} \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

В точках спокою маємо:

$$\boldsymbol{J}(\pi n, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (-1)^{n+1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Характеристичний поліном $\chi_J(\lambda) = \lambda^2 - \omega^2 (-1)^{n+1}$. Отже, маємо два випадки.

Випадок 1. n – **парне.** Тоді $\lambda^2 = -\omega^2 \implies \lambda = \pm \omega i$ – маємо два спряжених чисто комплексних значень. Це відповідає центру для лінеаризації $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{J}(2\pi k, 0)\mathbf{x}$. Хоча і інтуїтивно здається, що перед нами дійсно **центр**: випадок парних n відповідає, наприклад, положенню математичного маятника у найнижчому положені (оскільки кут можна вказати з точністю до періода в 2π, то звідси нескінченна кількість значень), проте чисто з аналізу спектру ми сказати щось конкретне не можемо.

Випадок 2. n – **непарне.** Тоді $\lambda^2 = \omega^2 \implies \lambda = \pm \omega$ – маємо два протилежних за знаком власних значень. Це відповідає **сідлу**, причому і для нелінійної системи також. Це теж достатньо логічно, оскільки якщо відхилити маятник на кут π, то це положення буде нестійким і маятник швидко почне відхилятися.

Якщо зобразити портрет, то отримаємо Рисунок 2.

Задача 3: Коливання з тертям.

Умова. Розглянемо систему коливань маятника з тертям ($\kappa > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 - \kappa x_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

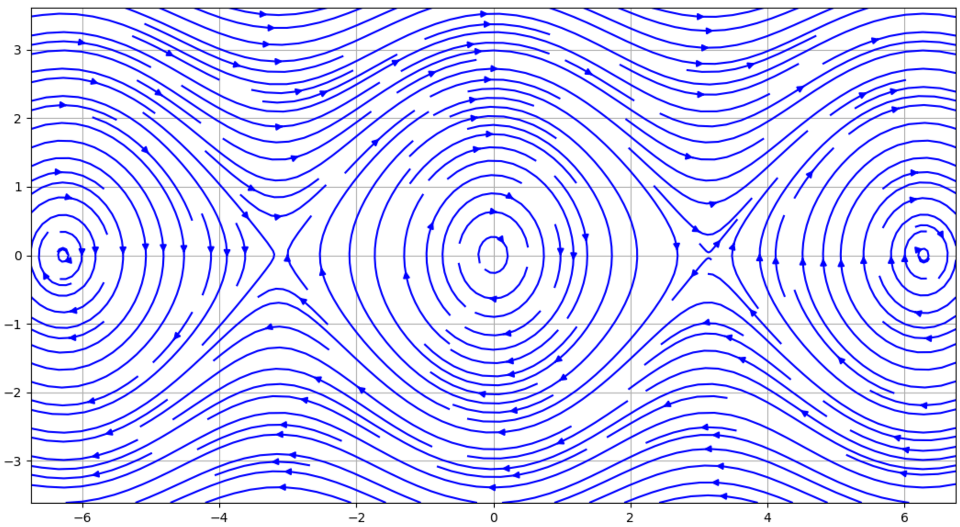


Рис. 2: Фазовий портрет для системи з полем $\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = (x_2, -\omega^2 \sin x_1)$. Область значень $(x, y) \in [-2.15\pi, 2.15\pi] \times [-1.15\pi, 1.15\pi]$

Ті самі питання, що і для завдання 2.

Розв'зок. Точки спокою у цієї системі такі самі, як і для випадку без тертя (що доволі логічно). Проте, розглянемо Якобіан в цьому випадку:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x_1 & -\kappa \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Підставимо точки спокою $(x_1, x_2) = (\pi n, 0)$:

$$\boldsymbol{J}(\pi n, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (-1)^{n+1} & -\kappa \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Характеристичний поліном в цьому випадку $\chi_J(\lambda) = -\lambda(-\kappa - \lambda) - \omega^2 (-1)^{n+1}$ або $\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + \kappa\lambda - \omega^2(-1)^{n+1}$. Далі знову розглядаємо два випадки, що відповідають парності n.

Випадок 1. n **– парне.** Тоді

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + \kappa\lambda + \omega^2 \tag{3.4}$$

Далі тут можуть бути різні випадки в залежності від значень ω та κ. По-перше, дискримінант має вигляд $\kappa^2 - 4\omega^2$, тому маємо три випадки:

1. $\kappa > 2\omega$ – сильне тертя. Обидва корені рівняння (власні числа) є дійсними: $\lambda_{1,2} = \frac{-\kappa}{2} \pm \frac{\sqrt{\kappa^2 - 4\omega^2}}{2}$, причому обидва від'ємні. Це відповідає **стійкому вузлу**.

2. $\kappa < 2\omega$ – слабке тертя. Корені є комплексно-спряженими, причому дійсна частина обох власних чисел є від'ємною, а точніше $-\frac{\kappa}{2}$, тому перед нами **стійкий фокус**.

3. $\kappa = 2\omega$ – перехід між стійким фокусом та стійким вузлом. Маємо два однакових власних числа $\lambda = -\frac{\kappa}{2}$, що відповідає множині прямих, що сходяться до точки.

Вся ця класифікація "переходить" до нелінійної системи, оскільки маємо ненульову дійсну частину у власних векторів.

Випадок 2. n – **непарне.** Тоді

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + \kappa\lambda - \omega^2 \tag{3.5}$$

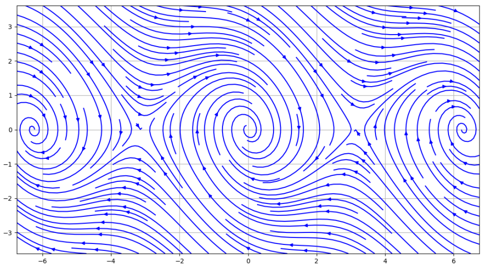
Тут дискримінант дорівнює $\kappa^2 + 4\omega^2$, що завжди є додатним числом. Це означає, що в цьому випадку ми маємо два дійсних кореня:

$$2\lambda_{12} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 4\omega^2} \tag{3.6}$$

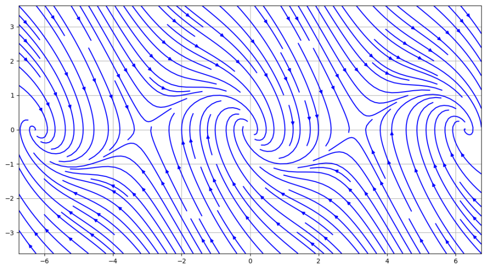
Видно, що одне власне число є додатним, а інше від'ємним. Це відповідає **сідлу**, як і у випадку без тертя.

Отже, маємо доволі цікаву ситуацію – ми змогли зробити повну класифікацію точок по системі з тертям, проте для спрощеної задачі без тертя класифікувати половину точок ми не змогли :)

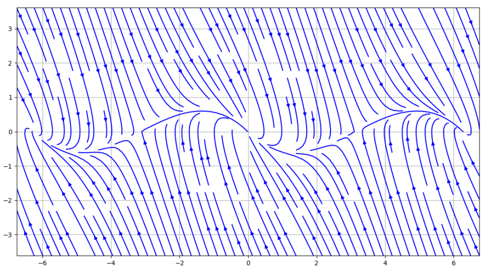
Фазові портерти для різних співвідношень κ/ω наведені на Рисунку 3.



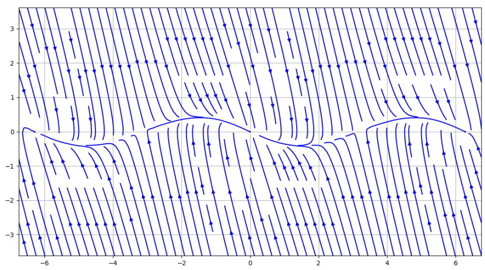
$\kappa/\omega = 0.4$



$\kappa/\omega = 1.0$



$\kappa/\omega = 2.0$



$\kappa/\omega = 3.0$

Рис. 3: Фазовий портрет для задачі 3 для різних співвідношень κ/ω.