Домашня робота з математичного аналізу #12

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

26 березня 2023 р.

Завдання 12.6.

Умова. Звести потрійний інтеграл $\iiint_E f(x,y,z)dV$ до повторного по змінних x, y, z будь-якими трьома з шести можливих способів, якщо множина E обмежена даними поверхнями:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0, y=0, z=0,\ a,b,c>0$$

Розв'язок. Множина E зображена на рисунку 1. Отже, спочатку будемо рухатись по x. Якщо проводити площини $x=t, t\in(0,a)$, то бачимо, що у нас виходять прямокутні трикутники обмежені множиною (див. рис. 2)

$$E_x : \frac{y}{b}+\frac{z}{c}\leq 1-\frac{t}{a},\ y,z\geq 0$$

Отже, якщо рухатись по y (скажімо, зафіксуємо $y=u\in[0,b]$), то в нас z буде виражатись як:

$$z=c\left(1-\frac{t}{a}-\frac{u}{b}\right)$$

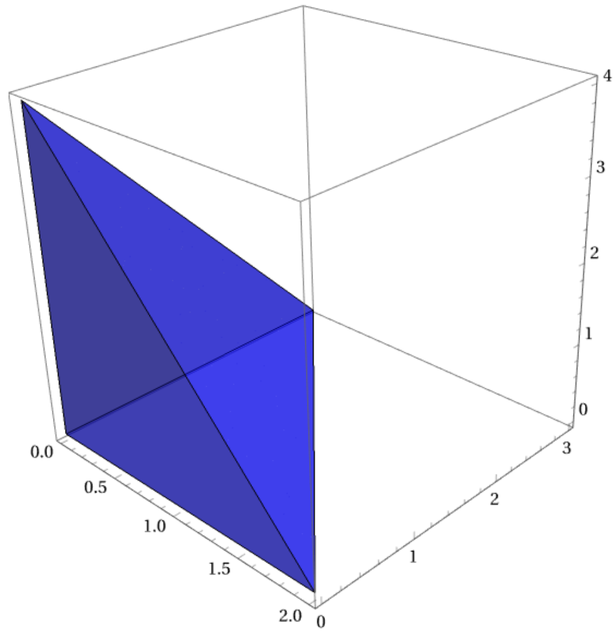

Рис. 1: Множина E для $a = 2.0, b = 3.0, c = 4.0$

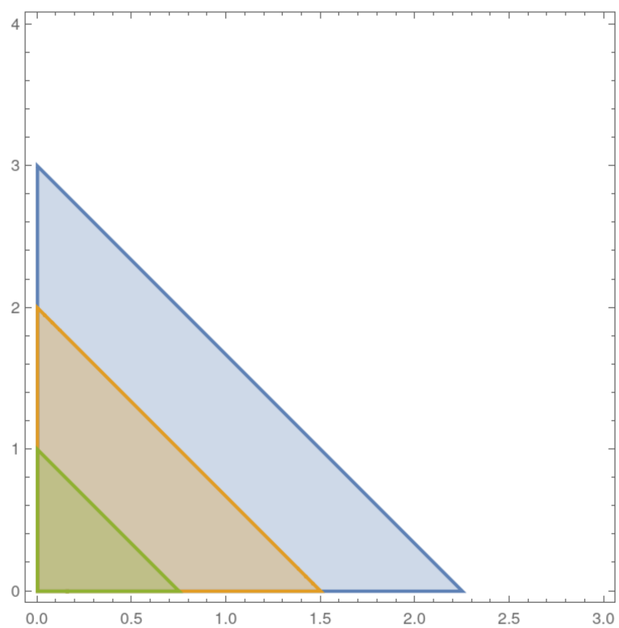

Рис. 2: Множина перетин E та площин $x = \text{const}$ (для синьої $x = 1.5$, для помаранчевої $x = 1.0$, для зеленої $x = 0.5$) у системі координат (y, z)

Тому згідно теормі Фубіні, можемо записати:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} f(x,y,z)dz$$

Відповідно якщо навпаки зафіксувати $z = w \in [0, c]$, то y буде виражатися як:

$$y = b\left(1 - \frac{t}{a} - \frac{w}{c}\right)$$

Отже, наш інтеграл:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^c dz \int_0^{b(1-x/a-z/c)} f(x,y,z)dy$$

Якщо йти по y (зафіксуємо $y = u$), то в нас будуть так само прямокутні трикутники (рис. абсолютно аналогічний 2 за вийнятком масштабу, тому перемальовувати не буду). Тільки тепер все обмежено множиною:

$$E_y : \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \le 1 - \frac{u}{b},\ x, z \ge 0$$

Відповідно якщо зафіксувати $x = t$ та виразити $z(t, u)$, то маємо:

$$z = c\left(1 - \frac{u}{b} - \frac{t}{a}\right)$$

Тому згідно теоремі Фубіні:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_0^b dy \int_0^a dx \int_0^{c(1-y/b-x/a)} f(x,y,z)dxdydz$$

Завдання 12.9.

Умова. Звести потрійний інтеграл $\iiint_E f(x,y,z)dV$ до повторного по змінних x, y, z будь-якими трьома з шести можливих способів, якщо множина E обмежена даними поверхнями:

$$x = 0, y = 0, z = 0, x = R, y = \sqrt{R^2 - x^2}, z = x^2 + y^2$$

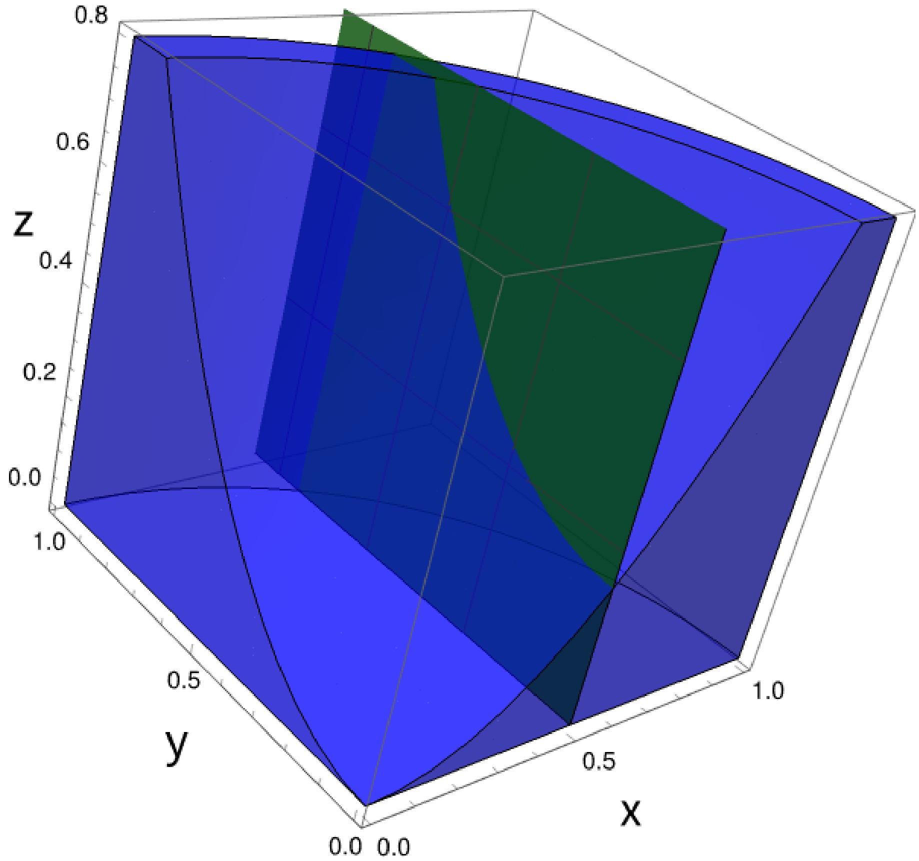

Рис. 3: Множина E для $R = 1$ та площина $x = 0.5$. Малюнок трошки недомальований зверху через те, що програма погано малює ділянки біля границь фігур, але зверху повинен бути гострий кінець

Розв'язок. Множина E зображена на рис. 3.

Будемо "різати" по x. На рис. 4 зображено кілька перерізів, але виведемо їх аналітично. Отже, нехай ми ріжемо площиною $x = t \in [0, R]$. Тоді маємо обмеження по поверхням:

$$y \le \sqrt{R^2 - t^2}, z \le t^2 + y^2,\ y, z \ge 0$$

По-перше, маємо фіксовану межу по y: від 0 до $\sqrt{R^2 - t^2}$. Відповідно, тоді z змінюється від 0 до R. А далі бачимо, що наша область знаходиться між двома кривими:

$$z = 0, z = t^2 + y^2$$

Отже згідно теоремі Фубіні можемо розбити наш інтеграл наступним чином:

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^{x^2 + y^2} f(x, y, z)dz$$

Трошки складніша ситуація якщо змінити порядок з y, z на z, y. Тут вже наша область складається з об'днань двох частин:

$$\mathcal{P}_1 : y = 0,\ y = \sqrt{R^2 - t^2},\ z \in [0, t]$$

$$\mathcal{P}_2 : y = \sqrt{z - t^2},\ y = \sqrt{R^2 - t^2},\ z \in [t, R]$$

Тому наш інтеграл:

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \int_0^R dx \int_0^x dz \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y, z)dy +$$
$$\int_0^R dx \int_x^R dz \int_{\sqrt{z - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y, z)dy$$

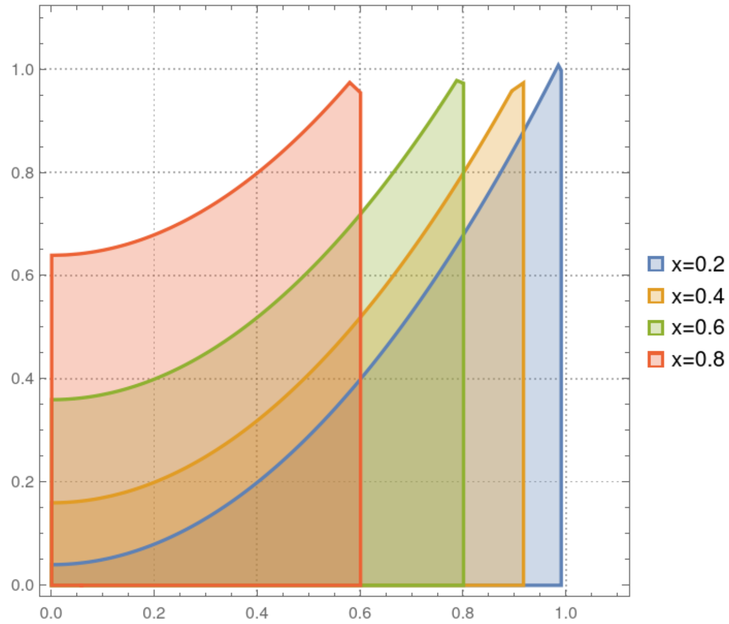

Рис. 4: Перетин $x = \text{const}$ з E у координатній системі (y, z)

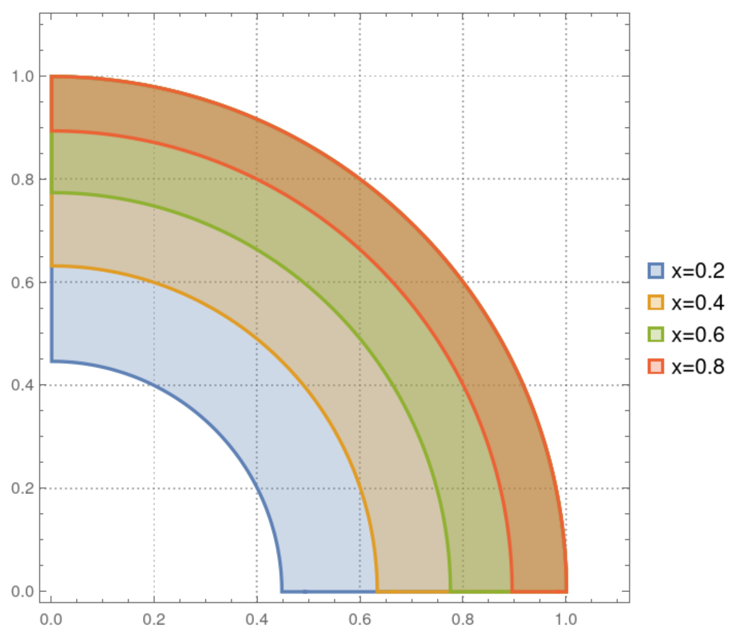

Рис. 5: Перетин $z = \text{const}$ з E у координатній системі (x, y)

Тепер будемо різати площинами $z = \text{const}$. Зафіксуємо $z = t \in [0, R^2]$. На рис. 5 зображені різні перерізи площинами $z = t$. Розглянемо як виглядає наша область аналітично:

$$x^2 + y^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \geq t,\ x, y > 0$$

Тобто по суті ми взяли чверть кола радіуса R у першій координатній чверті і вирізали з нього інше коло радіуса $\sqrt{t}$. Знову розбиваємо це на 2 відрізки: один для $x \in [0, \sqrt{t}]$, тоді множина обмежена кривими:

$$y = \sqrt{t - x^2},\ y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

А на проміжку $x \in [\sqrt{t}, R]$ між:

$$y = 0,\ y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Отже наш інтеграл записується як:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{R^2} dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)dy + \int_0^{R^2} dz \int_{\sqrt{z}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)dy$$

Завдання 13.3.

Умова. Обчислити інтеграл $\iiint_E xdxdydz$ по множині E, обмеженою поверхнями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y + z = 3$$

Розв'язок. Множина E зображена на рис. 6 синім. Будемо "різати" по x, оскільки переріз буде постійним і не залежати від x (це можна побачити і аналітично):

$$y + z \leq 3,\ y, z \geq 0$$

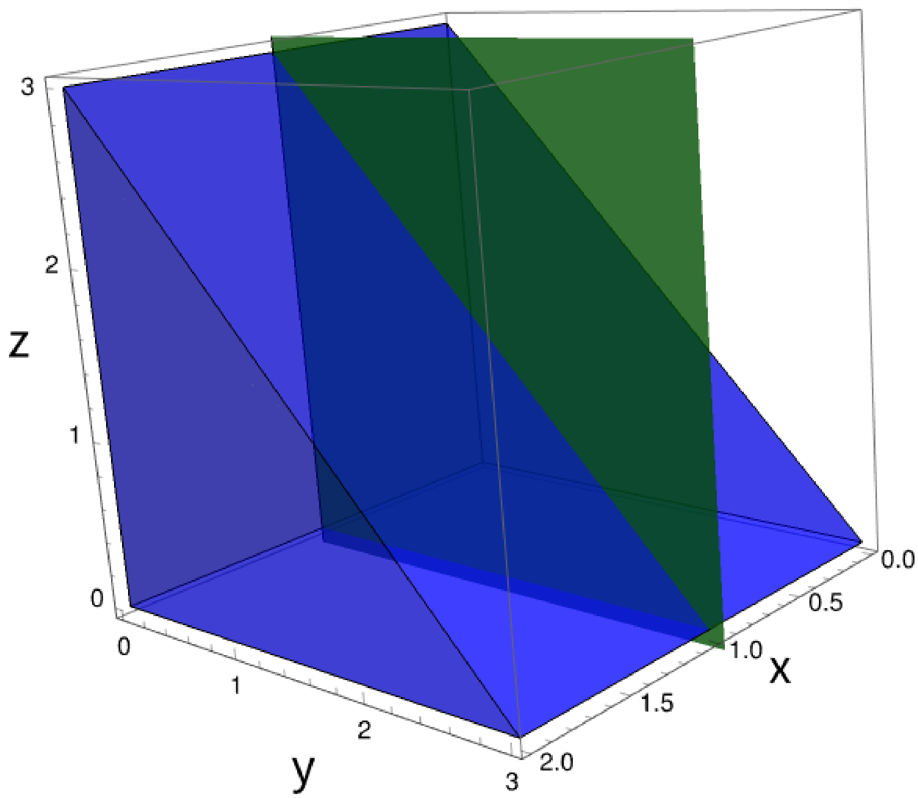

Рис. 6: Множина E та площина $x = 1.0$

Тоді згідно теоремі Фубіні розбиваємо інтеграл на повторні:

$$\iiint_E xdxdydz = \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{3-y} xdz$$

Далі нам залишилось лише порахувати вираз:

$$\iiint_E xdxdydz = \int_0^2 dx \int_0^3 x(3-y)dy = \int_0^2 xdx \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=3} = \int_0^2 xdx \left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\int_0^2 xdx = \frac{9}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{2} = 9$$

Відповідь. $\mathcal{I} = 9$