Індивідуальне завдання з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

26 листопада 2023 р.

Завдання 1

Умова. Нехай $(\mathbb{R}, \mathcal{S}_1, \lambda_1)$ є простором з мірою,

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \in [e^{n-\frac{1}{n}}, e^n] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [e^{n-\frac{1}{n}}, e^n] \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}$$

З’ясувати:

1. Чи є послідовність $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збіжною м.с. відносно міри λ_1 на $\mathbb{R}$? Якщо так, то знайти відповідну границю. Відповідь обґрунтувати.
2. Чи є послідовність $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збіжною за мірою λ_1 на $\mathbb{R}$? Якщо так, то знайти відповідну границю. Відповідь обґрунтувати.

Розв’язок. Перед відповідю, зрозуміємо характер послідовності $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. По-перше, область, де задаються ненульові значення, постійно рухається вздовж вісі Ox вправо. Як наслідок, x стає дуже великим і значення функції дуже швидко (насправді буквально з $n = 4$) стають близькими до $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Проте, цікава властивість таких відрізків це те, що їх довжина не зменьшується і прямує до нескінченності. Дійсно, розглянемо довжину відрізку

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(e^n - e^{n-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}-x}\right) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{-x}\right)$$

Тепер скористаємося тим, що $1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \overline{o}(x^2), x \to 0$:

$$L = \lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{2} + x\cdot\overline{o}(1)\right)}_{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\alpha(x)xe^{\frac{1}{x}}$$

Отже, маємо добуток функції $\alpha(x)$, що прямує до 1, а також $xe^{\frac{1}{x}}$. Нескладно показати, що $xe^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, оскільки

$$xe^{\frac{1}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ldots\right) = x + 1 + \underbrace{\frac{1}{2x} + \ldots}_{\to\infty \text{ для } x\to 0}$$

Тому добуток теж прямує до ∞. Отже, $L = +\infty$.

Сам графік f_n для $n = 1, \ldots, 5$ зображено на рис. 1.

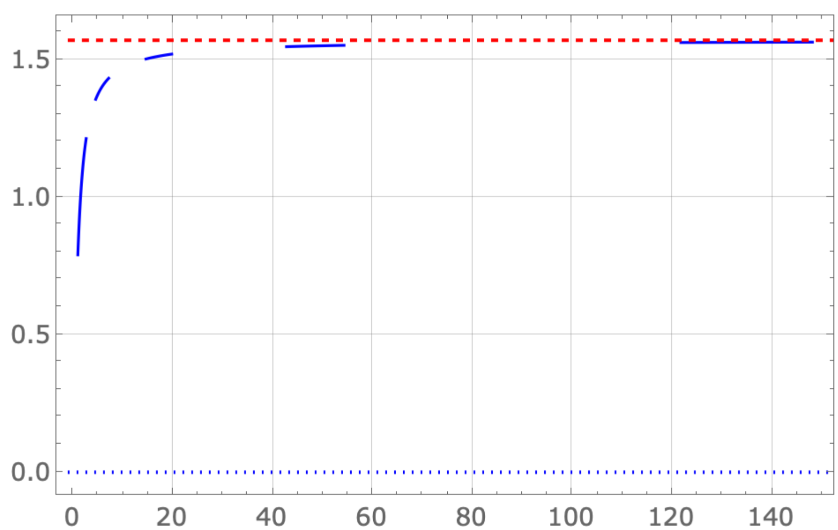

Рис. 1: Перші 5 функцій f_n

Пункт 1. Помітимо, що

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n_x \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_x : f_n(x) = 0$$

Дійсно, достатньо

$$n_x := \min\left\{n \in \mathbb{N} : e^{n-\frac{1}{n}} > x\right\}$$

В такому разі, $\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, що автоматично означає збіжність до 0 майже скрізь (тобто $f_n = 0 \pmod{\lambda_1}$).

Пункт 2. За означенням, збіжність послідовності $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ означає:

$$\exists f : f_n \xrightarrow{\lambda_1} f \iff \forall\varepsilon > 0 : \lambda_1\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Візьмемо $f \equiv 0$, тоді

$$\forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Візьмемо достатньо малий ε, наприклад, для конкретики, $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Тоді

$$U_\varepsilon^{(n)} := \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \geq 0.1\} = [e^{n-\frac{1}{n}}, e^n]$$

Проте, оскільки $e^n - e^{n-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, то і $\lim_{n\to\infty} \lambda_1(U_\varepsilon^{(n)}) = +\infty$. Отже, f не є збіжною на $\mathbb{R}$.

Відповідь. f не є збіжною, але є майже скрізь збіжною до 0.

Завдання 2

Умова. Обчислити інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\lambda_1(x)}{[3x+1][3x+4]}$$

Розв'язок. Помітимо, що

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n = \left[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\right)$$

Оскільки $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є попарно неперетинними, то можемо застосувати σ-адитивність інтеграла Лебега і отримати

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\lambda_1(x)}{[3x+1][3x+4]} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} \frac{d\lambda_1(x)}{[3x+1][3x+4]}$$

Тепер помітимо, що для усіх x з A_n, значення $n \leq 3x+1 < n+1$, тому $[3x+1] = n$. Аналогічним чином $[3x+4] = n+3$. Отже

$$\mathcal{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3})} \frac{d\lambda_1(x)}{n(n+3)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+3)} \int_{[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3})} d\lambda_1(x)$$

Далі користуємось властивістю інтеграла Лебега $\int_{[\alpha,\beta)} d\lambda_1(x) = \beta - \alpha$, тому

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+3)}\right) = \frac{1}{9} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

Якщо позначимо $S_m := \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$, то $\mathcal{I} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{m\to\infty} S_m$. Отже, для достатньо великих m:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+3}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \sum_{n=4}^{m+3} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}}_{\to 0} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{11}{6}$$

Відповідь. $\frac{11}{54}$.

Завдання 3

Умова. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{n\left(e^{-\frac{x^3}{n}}-1\right)}{(1+x^4)^2}d\lambda_1(x)$$

Розв'язок. Позначимо

$$\mathcal{J}_n := \int_{\mathbb{R}^+}\frac{n\left(e^{-\frac{x^3}{n}}-1\right)}{(1+x^4)^2}d\lambda_1(x)$$

Спосіб 1. Помітимо, що

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ : 1-\frac{x^3}{n}\leq e^{-\frac{x^3}{n}}\leq 1-\frac{x^3}{n}+\frac{x^6}{2n^2},$$

тому, застосовуючи теорему про порівняння інтегралів Лебега, отримуємо

$$-\int_{\mathbb{R}^+}\frac{x^3d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2}\leq \mathcal{J}_n\leq \int_{\mathbb{R}^+}\frac{-x^3+\frac{x^6}{2n}}{(1+x^4)^2}d\lambda_1(x)$$

Інтеграл ліворуч є інтегрованим по Ріману, а отже, за теоремою про порівняння інтеграла Рімана та Лебега, по Лебегу також. Робимо заміну $z=1+x^4$, тоді $dz=4x^3dx$, тому

$$-\int_{\mathbb{R}^+}\frac{x^3dx}{(1+x^4)^2}=-\frac{1}{4}\int_{[1,+\infty)}\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=1}^{z\to+\infty}=-\frac{1}{4}$$

Тепер знайдемо інтеграл праворуч:

$$\int_{\mathbb{R}^+}\frac{-x^3+\frac{x^6}{2n}}{(1+x^4)^2}d\lambda_1(x)=\underbrace{-\int_{\mathbb{R}^+}\frac{x^3d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2}}_{=-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2n}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{x^6d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2}$$

Помітимо, що вираз $\int_{\mathbb{R}^+}\frac{x^6d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2}<+\infty$, оскільки підінтегральний вираз пропорційний $\frac{1}{x^2}$. Причому, значення цього інтеграла не залежить від

n, тому позначимо $\gamma := \int_{\mathbb{R}^+} \frac{x^6 d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2}$ (справжнє значення, згідно *Wolfram Mathematica*, $\gamma = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$, але точно знати нам його не обов'язково). Тому отримаємо:

$$-\frac{1}{4} \leq \mathcal{J}_n \leq -\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2n} \implies \boxed{\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_n = -\frac{1}{4}}$$

Спосіб 2. Помітимо, що

$$n\left(e^{-\frac{x^3}{n}} - 1\right) \to -x^3 \pmod{\lambda_1}.$$

Тоді за теоремою Лебега про мажоровану збіжність,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{n\left(e^{-\frac{x^3}{n}} - 1\right)}{(1+x^4)^2} d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{-x^3 d\lambda_1(x)}{(1+x^4)^2} = -\frac{1}{4}$$

Доведення збіжності м.с. Для цього розглянемо границю

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{-\frac{x^3}{n}} - 1\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-\epsilon x^3} - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\epsilon x^3 + \overline{o}(\epsilon x^3)}{\epsilon} = x^3 \lim_{\epsilon\to 0}(-1+\overline{o}(1)) = -x^3$$

Отже для усіх $x \in \mathbb{R}^+$ маємо $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{-\frac{x^3}{n}} - 1\right) = -x^3$.

Відповідь. $-\frac{1}{4}$.