Домашня робота з диференціальної геометрії #7

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

2 квітня 2023 р.

Завдання 1.1(3)

Умова. Побудуйте еволюту наступної кривої в $\mathbb{R}^2$ з радіус-вектором

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

Розв'язок. Рівняння еволюти задається рівнянням:

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{f} + \frac{\boldsymbol{\nu}}{k}$$

Отже знаходимо першу похідну:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Модуль похідної:

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \right\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

P.S. Можна звичайно записати $\sqrt{2(1-\cos t)} = 2|\sin t/2|$, але я не хочу тягнути далі модуль.

В такому разі вектор нормалі:

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо кривину, а отже для цього нам потрібно знайти другу похідну:

$$\frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Отже векторний добуток:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right] = \det \begin{bmatrix} 1 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \cos t - 1$$

Отже маємо кривину (поки не будемо підставляти отримані вирази):

$$k = \frac{\left|\left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right]\right|}{\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}\right\|^3}$$

Таким чином наше рівняння еволюти:

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{f}(t) + \frac{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|^3}{|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]|} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \boldsymbol{f} + \frac{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|^2}{|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]|} \cdot \boldsymbol{n}$$

Підставляємо:

$$\boldsymbol{E}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix} + \frac{2(1 - \cos t)}{\cos t - 1} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \sin t + 2\sin t \\ 1 - \cos t - 2 + 2\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \sin t \\ -1 + \cos t \end{bmatrix}$$

Отже бачимо, що еволюта циклоїди є іншою циклоїдою.

Завдання 1.2(1)

Умова. Запишіть рівняння еволюти для явно заданої кривої $y = F(x)$ в $\mathbb{R}^2$. Побудуйте еволюту $y = \cos x$.

Розв'язок. В параметричному виді маємо криву

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Похідна:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{F} \end{bmatrix}$$

А отже вектор нормалі:

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -\dot{F} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Кривина, як ми вже рахували у попередніх домашніх завданнях

$$k(t) = \frac{\ddot{F}}{(1+\dot{F}^2)^{3/2}}$$

Отже рівняння еволюти:

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{f} + \frac{1}{k} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{f} + \frac{(1+\dot{F}^2)^{3/2}}{\ddot{F}} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\dot{F}^2)^{1/2}} =$$
$$\boldsymbol{f} + \frac{1+\dot{F}^2}{\ddot{F}} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} t \\ F(t) \end{bmatrix} + \frac{1+\dot{F}^2}{\ddot{F}} \begin{bmatrix} -\dot{F} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Отже остаточно:

$$\boldsymbol{E}(t) = \begin{bmatrix} t - \frac{\dot{F}+\dot{F}^3}{\ddot{F}} \\ F + \frac{1+\dot{F}^2}{\ddot{F}} \end{bmatrix}$$

Якщо підставити $F(t) = \cos t$, то маємо:

$$x^1(t) = t - \frac{-\sin t - \sin^3 t}{-\cos t},\ x^2(t) = \cos t + \frac{1+\sin^2 t}{-\cos t}$$

Або якщо ще спростити:

$$x^1(t) = t - (1 + \sin^2 t) \tan t,\ x^2(t) = \frac{\cos 2t}{\cos t} - \sec t$$

Завдання 6(2)

Умова. Побудуйте евольвенти наступних кривих в $\mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix},\ t \in [0, 2\pi]$$

Розв'язок. Рівняння евольвенти має вигляд:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{f} - s\boldsymbol{\tau}$$

Знаходимо першу похідну:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Модуль першої похідної:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\| = \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

Отже одиничний вектор дотичної:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\boldsymbol{f}}}{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|} = \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \cos t)/2} \\ \sin t / \sqrt{2(1 - \cos t)} \end{bmatrix}$$

Натуральний параметр:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{f}}(\xi)\| d\xi = \sqrt{2} \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \cos \xi} d\xi =$$
$$-\frac{2\sqrt{2(1 - \cos \xi)}}{\tan \xi/2} = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{1 - \cos t}}{\tan t/2} + \frac{\sqrt{1 - \cos t_0}}{\tan t_0/2} \right)$$

Добуток цього параметра на одиничний вектор:

$$(s\boldsymbol{\tau})^1 = 2\left(\frac{\sqrt{(1-\cos t_0)(1-\cos t)}}{\tan t_0/2} - \frac{1-\cos t}{\tan t/2}\right)$$

$$(s\boldsymbol{\tau})^2 = 2\sin t\left(-\frac{1}{\tan t/2} + \frac{1}{\tan t_0/2}\sqrt{\frac{1-\cos t_0}{1-\cos t}}\right)$$

Далі просто потрібно виписати покомпонентно $\boldsymbol{f} - s\boldsymbol{\tau}$.

Завдання 8(1)

Умова. Побудувати обгортку наступної сім'ї кривих в $\mathbb{R}^2$:

$$(x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 - R^2 = 0,\ 0 < \alpha < 2\pi$$

Розв'язок. Згідно практики, система для знаходження обгортки:

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^1, x^2, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\begin{cases} (x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^2 - r\sin\alpha)^2 = R^2 \\ 2(x^1 - r\cos\alpha)r\sin\alpha - 2(x^2 - r\sin\alpha)r\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Попрацюємо з нижнім рівнянням. Після викидання $2r$:

$$\sin\alpha(x^1 - r\cos\alpha) - \cos\alpha(x^2 - r\sin\alpha) = 0$$

$$\sin\alpha \cdot x^1 - \cos\alpha \cdot x^2 = 0 \to x^2 = \tan\alpha \cdot x^1$$

Підставляємо у перше рівняння:

$$(x^1 - r\cos\alpha)^2 + (x^1\tan\alpha - r\sin\alpha)^2 = R^2$$

$$(x^1)^2-2x^1r\cos\alpha+r^2\cos^2\alpha+(x^1)^2\tan^2\alpha-2x^1r\tan\alpha\sin\alpha+r^2\sin^2\alpha=R^2$$

Далі потрібно перетосувати трошки коефіцієнти:

$$(1+\tan^2\alpha)(x^1)^2-2r(\cos\alpha+\sin\alpha\tan\alpha)x^1=R^2-r^2$$

Далі спрощуємо:

$$\frac{(x^1)^2}{\cos^2\alpha}-2r\left(\cos\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)x^1=R^2-r^2$$

Остаточно маємо квадратне рівняння:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}(x^1)^2-\frac{2r}{\cos\alpha}x^1-(R^2-r^2)=0$$

Помітимо, що ми маємо частково повний квадрат:

$$\left(\frac{x^1}{\cos\alpha}-r\right)^2=R^2$$

Звідси маємо 2 пари розв'язків:

$$x^1=(R+r)\cos\alpha,\ x^1=(r-R)\cos\alpha$$

Відповідні другі компоненти:

$$x^2=(R+r)\sin\alpha,\ x^2=(r-R)\sin\alpha$$

Отже, маємо 2 кола з центром у початку координат радіусами $r+R$ та $|r-R|$.

Завдання 8(3)

Умова. Побудувати обгортку наступної сім'ї кривих в $\mathbb{R}^2$:

$$(x^1-\alpha)^2-x^2-\alpha^3=0$$

Розв'язок. Згідно практики, система для знаходження обгортки:

$$\begin{cases} F(x^1, x^2, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x^1, x^2, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Отже підставивши, маємо:

$$\begin{cases} (x^1 - \alpha)^2 - x^2 - \alpha^3 = 0 \\ -2(x^1 - \alpha) - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

Отже маємо:

$$x^1 = -\frac{3\alpha^2}{2} + \alpha = \alpha\left(-\frac{3\alpha}{2} + 1\right)$$

Підставляємо у друге рівняння:

$$\frac{9}{4}\alpha^4 - x^2 - \alpha^3 = 0 \to x^2 = \alpha^3\left(\frac{9\alpha}{4} - 1\right)$$

Отже відповіддю є параметрично задана крива:

$$x^1 = \alpha\left(-\frac{3\alpha}{2} + 1\right),\ x^2 = \alpha^3\left(\frac{9\alpha}{4} - 1\right)$$