Домашня Робота #3 з Теорії Коливань

Захаров Дмитро

16 березня, 2025

1 Задача 1(б)

Умова 1.1. Визначте період вільних коливань вантажу маси m, прикріпленого до двох пружин з жорсткостями k_1 та k_2, які з'єднанні послідовно.

Розв'язання. Нехай до пружин прикладена сила F, причому перша пружина розтягнулася на x_1, а друга на x_2. Оскільки з'єднання послідовне, то сила, яка діє на першу пружину, дорівнює силі, яка діє на другу пружину, а загальне розтягнення x дорівнює сумі розтягнень пружин: $x = x_1 + x_2$. Таким чином, якщо позначити "ефективну" жорсткість системи як k, то маємо:

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k(x_1 + x_2)$$

Звідси маємо $x_1 = F/k_1$ та $x_2 = F/k_2$, тому ефективна жорсткість:

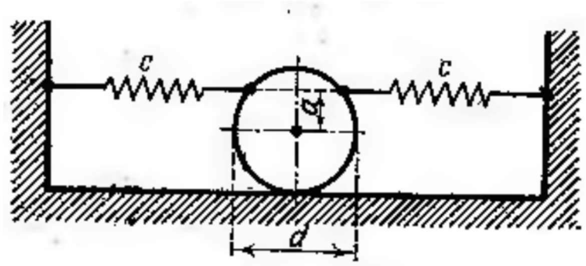
$$k = \frac{F}{x_1 + x_2} = \frac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Період коливань в такому разі:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

2 Задача 2

Умова 2.1. Визначте період малих коливань однорідного циліндра з діаметром d і масою m, прикріпленого до двох пружин жорсткості k, як показано на рисунку. Циліндр котиться без ковзання по горизонтальній поверхні.



Розв'язання. У якості координати, що описує систему, виберемо кут θ, на який відхиляється циліндр від вертикалі. Запишемо потенціальну та кінетичну енергію системи у разі малого відхилення $\theta \ll 1$.

Потенціальна енергія складається з енергії розтягнення пружин. Прослідкуємо, як саме змінюється довжина пружин. Введемо систему координат наступним чином: центр знаходиться у центрі циліндра, вісь Ox спрямована праворуч, Oy вгору. Запишемо координати кінців пружин (лівого кінця K_L та правого K_R). Врахуємо, що лівий кінець K_R відхилений на кут $\theta_R = \theta$ до Ox, а K_L в свою чергу на кут $\theta_L = \pi - \theta$.

$$K_R = \left(\frac{d}{2}\cos\theta_0, \frac{d}{2}\sin\theta_0\right), \quad K_L = \left(\frac{d}{2}\cos\left(\pi - \theta_0\right), \frac{d}{2}\sin(\pi - \theta_0)\right), \quad \sin\theta_0 = \frac{a}{d/2}$$

Запишемо нові координати кінців пружин після відхилення на кут θ:

$$K_R' = \left(\frac{d}{2}\cos(\theta_0 + \theta) - \frac{d}{2}\theta, \frac{d}{2}\sin(\theta_0 + \theta)\right), \; K_L' = \left(\frac{d}{2}\cos(\pi - \theta_0 + \theta) - \frac{d}{2}\theta, \frac{d}{2}\sin(\pi - \theta_0$$

Зміна довжин пружин: це довжини $\Delta x_L = K_L K_L'$ та $\Delta x_R = K_R K_R'$. Почнемо з Δx_L:

$$(\Delta x_L)^2 = \frac{d^2}{4}\left(\cos(\theta_0 + \theta) - \cos\theta_0 + \theta\right)^2 + \frac{d^2}{4}\left(\sin(\theta_0 + \theta) - \sin\theta_0\right)^2$$

Розглянемо малу зміну $\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0$ та $\sin(\theta_0+\theta)-\sin\theta_0$

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0 &= \cos\theta_0\cos\theta-\sin\theta_0\sin\theta-\cos\theta_0 \\
&\approx \left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\theta-\cos\theta_0 = -\frac{\theta^2}{2}\cos\theta_0-\theta\sin\theta_0 \\
\sin(\theta_0+\theta)-\sin\theta_0 &= \sin\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta-\sin\theta_0 \\
&\approx \left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\sin\theta_0+\cos\theta_0\cdot\theta-\sin\theta_0 = -\frac{\theta^2}{2}\sin\theta_0+\theta\cos\theta_0
\end{aligned}$$

Отже, можемо знайти зміну довжини. Розглянемо вираз $((\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0)+\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
((\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0)+\theta)^2 &= (\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0)^2-2\theta(\cos(\theta_0+\theta)-\cos\theta_0)+\theta^2 \\
&\approx \left(\frac{\theta^2}{2}\cos\theta_0-\theta\sin\theta_0\right)^2+2\theta\left(\frac{\theta^2}{2}\cos\theta_0+\theta\sin\theta_0\right)+\theta^2 \\
&\approx \theta^2\sin^2\theta_0+2\theta^2\sin\theta_0+\theta^2=\theta^2(1+\sin\theta_0)^2=\theta^2\left(1+\frac{2a}{d}\right)
\end{aligned}$$

Зміна вертикальної компоненти:

$$(\sin(\theta_0+\theta)-\sin\theta_0)^2=\left(-\frac{\theta^2}{2}\sin\theta_0+\theta\cos\theta_0\right)^2\approx\theta^2\cos^2\theta_0$$

Таким чином, квадрат зміщення:

$$(\Delta x_L)^2=\frac{d^2\theta^2}{4}\left(1+\frac{2a}{d}\right)^2+\frac{d^2\theta^2}{4}\cos^2\theta_0=\frac{d^2\theta^2}{4}\left(1+\frac{4a}{d}+\frac{4a^2}{d^2}+1-\frac{4a^2}{d^2}\right)=\frac{d^2\theta^2}{2}\left(1+\right.$$

З геометричних міркувань, можна вважати $\Delta x_L\approx\Delta x_R=:\Delta x$.
Таким чином, зміна потенціальної енергії:

$$V(\theta)=2\cdot\frac{1}{2}k(\Delta x)^2=\frac{1}{2}kd^2\left(1+\frac{2a}{d}\right)\theta^2$$

Запишемо вираз для кінетичної енергії. Вона складається з кінетичної енергії процесу обертання циліндра та кінетичної енергії руху центру мас циліндра:

$$T=\frac{1}{2}I\dot\theta^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\dot\theta\right)^2$$

Момент інерції цільного циліндру відносно його центру мас: $I = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = md^2/8$. Таким чином, кінетична енергія:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{d^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{d^2}{4}\dot{\theta}^2\right) = \frac{3md^2\dot{\theta}^2}{16}$$

Отже, загальна енергія системи:

$$E = T + V = \frac{3}{16}md^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kd^2\left(1 + \frac{2a}{d}\right)\theta^2$$

Звідси можна одразу знайти циклічну частоту коливань. Дійсно, енергія має вираз $E(\theta) = \frac{1}{2}\widetilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}\widetilde{m}\dot{\theta}^2$ з ефективною "жорсткістю" $\widetilde{k}$ та "масою" $\widetilde{m}$, де:

$$\widetilde{k} = kd^2\left(1 + \frac{2a}{d}\right), \quad \widetilde{m} = \frac{3md^2}{8}$$

Отже, циклічна частота:

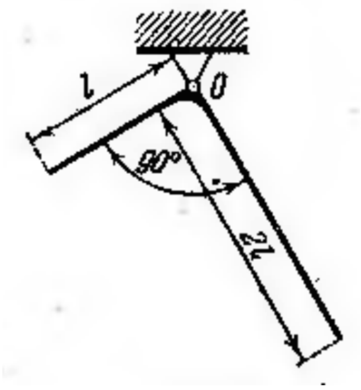
$$\omega^2 = \frac{\widetilde{k}}{\widetilde{m}} = \frac{8k}{3m}\left(1 + \frac{2a}{d}\right)$$

Звідси період коливань:

$$T = \pi\sqrt{\frac{3m}{2k\left(1 + \frac{2a}{d}\right)}}$$

3 Задача 4

Умова 3.1. Визначте період малих коливань у вертикальній площині фізичного маятника, який складається з двох стержнів з масами m і $2m$ та довжинами ℓ і 2ℓ відповідно. Стержні прикріплені один до одного під прямим кутом.



Розв'язання. Спочатку знайдемо момент інерції системи. Момент інерції стержня довжиною ℓ відносно його кінцю дорівнює $I = \frac{1}{3}m\ell^2$. В нашому випадку маємо:

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{1}{3}(2m)(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2 + \frac{8}{3}m\ell^2 = 3m\ell^2$$

Тепер знайдемо положення рівноваги системи. Нехай кут відхилення від вертикалі правого стержня дорівнює θ. Тоді кут відхилення від вертикалі лівого стержня дорівнює $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$. В положені рівноваги, центр мас системи має лежати під точкою підвісу. Таким чином, можемо записати рівняння рівноваги:

$$2m \cdot \ell \sin\theta = m \cdot \frac{\ell}{2} \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 4\sin\theta$$

Оскільки $\sin\varphi = \cos\theta$, то $\cos\theta = 4\sin\theta$ або $\tan\theta = \frac{1}{4}$. Звідси $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ та $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Знайдемо висоту центра мас системи h від точки підвісу. Маємо:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{3m}\left(\frac{m\ell}{2}\cos\varphi + 2m\ell\cos\theta\right) = \frac{1}{6}\ell\sin\theta + \frac{2}{3}\ell\cos\theta \\ &= \frac{1}{6}\ell \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{2}{3}\ell \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{6}\ell \end{aligned}$$

Таким чином, маємо фізичний маятник маси $3m$ з моментом інерції $I = 3m\ell^2$ та висотою центра мас $h = \frac{\sqrt{17}}{6}\ell$. Циклічна частота коливань:

$$\omega^2 = \frac{3mgh}{I} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}mg\ell}{3m\ell^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}\frac{g}{\ell}$$

Звідси період коливань $T = 2\pi\sqrt{6\ell/\sqrt{17}g}$.