5️⃣

Homework #5

Завдання 1 (№ 1575).

Спочатку знайдемо власні вектора матриці. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}_1(A)\lambda^2 + \mathrm{tr}_2(A)\lambda - \det A = 0$$

Знаходимо сліди:

$$\mathrm{tr}_1(A) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\mathrm{tr}_2(A) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 2$$

$$\det A = \frac{3}{4} \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} = 1$$

Отже характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

Одне власне число вгадати легко: $\lambda_1 = 1$. Поділивши на $\lambda - 1$, отримуємо:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

Розв'язавши друге рівняння, маємо $\lambda_2 = e^{i\pi/3}, \lambda_3 = e^{-i\pi/3}$. Отже, в канонічній формі буде присутній блок у вигляді матриці повороту $R_{\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Тобто канонічна форма матриці A має вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\pi/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо матрицю перетворення T. Знайдемо власні вектори. Оскільки $A\mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}$ або $(A - \lambda_j E)\mathbf{v} = \theta$, то нам достатньо знайти базісні вектори $\mathbf{v}_j$ з $\mathrm{Null}(A - \lambda_j E)$. Отже

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & -1/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

Отже нам потрібно знайти множину векторів $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ таких, що

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння $x - y = -\sqrt{6}z$, а з другого $x - y = \frac{2}{\sqrt{6}}z$, отже $z = 0$, $x = y = t$, тому для цього власного числа, власні вектори будуть мати вид $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отже, достатньо взяти вектор $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в якості власного вектора.

Тепер проробимо те саме з $\lambda_2 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Маємо:

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3}i & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 1 - 2\sqrt{3}i & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

Або знаходимо розв'язок системи

$$\begin{cases} (1 - 2\sqrt{3}i)x + y - \sqrt{6}z = 0 \\ x + (1 - 2\sqrt{3}i)y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{2}iz = 0 \end{cases}$$

Якщо покласти $x = t$, то після доволі муторних дій отримуємо $y = -t, z = -i\sqrt{2}t$, тому власні вектора для $\lambda_2 = e^{i\pi/3}$ мають вид $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Для зручності покладемо $t = \frac{i}{\sqrt{2}}$, отримавши множину $k\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Розділимо це на дійсну і уявну частину:

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Отже, оберемо 2 вектори $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отже, матрицю перетворення до канонічного виду побудуємо наступним чином:

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, канонічна форма:

$$A = T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Завдання 2.

Для початку перевіримо унітарність. За означенням наша матриця з умови A є унітарною, якщо $A^*A = E$. Перевіримо це:

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}$$

(друга рівність виконується, бо матриця симетрична, тому $A = A^T$). Тому:

$$A^*A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - i & 1 + i \\ 1 + i & 1 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Знайдемо діагоналізацію матриці. Запишемо матрицю трохи в іншому виді:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Так вона виглядає трохи красивіше. Знайдемо власні вектора:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A$$

Звідси $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$. А детермінант:

$$\det A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2}\right) = -i$$

Для знаходження власних чисел розв'язуємо $\chi_A(\lambda) = 0$ або $\lambda^2 - (1-i)\lambda - i = 0$. Звідси маємо 2 розв'язки: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i$.

Тепер знайдемо множину власних векторів. За означенням $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ або $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \theta$, отже $\mathbf{v} \in \operatorname{Null}(A - \lambda E)$. Знаходимо ядро $A - \lambda_1 E$ та $A - \lambda_2 E$:

$$\operatorname{Null}(A - \lambda_1 E) = \operatorname{Null}\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} - 1 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} - 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Null}\begin{pmatrix} -1-i & 1+i \\ 1+i & -1-i \end{pmatrix} = \left\{\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x - y = 0\right\}$$

Отже в якості власного вектора $\mathbf{v}_1$ візьмемо $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Друге ядро:

$$\operatorname{Null}(A - \lambda_2 E) = \operatorname{Null}\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} + i & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} + i \end{pmatrix} = \operatorname{Null}\begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} = \left\{\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 0\right\}$$

Звідси візьмемо другий власний вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Отже, диагоналізація матриці A:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Тобто при лінійній трансформації $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ будемо мати диагоналізацію:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}T^{-1}$$