Контрольна робота #2 з курсу “Диференціальні рівняння”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

7 грудня 2023 р.

Варіант 5

Завдання 1.

Умова. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші за визначенням:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 1) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Розв'язок. Знайдемо спочатку розв'язок у явному вигляді:

$$\frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = dt$$

Помітимо, що

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

Тому після інтегрування маємо

$$-\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) = t + C$$

Або

$$\boxed{x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+Ae^{2t}}}}$$

Для нашої задачі Коші $x(0) = 1$, маємо $x \equiv 1$, оскільки у нас вийде $A = 0$. Далі скористаємося означенням стійкості за Ляпуновим.

Визначення: Стійкість за Ляпуновим

Нехай маємо систему

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Розв'язок $\boldsymbol{\varphi}(t)$ є стійким за Ляпуновим при $t \to \infty$, якщо

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0\ \forall \mathbf{x}(t) : \text{розв'язок рівняння}$$
$$\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta(\epsilon) \implies \|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| < \epsilon\ \forall t \geq t_0$$

Доведемо, що наш розв'язок не є стабільним. Будуємо протилежне твердження:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \mathbf{x}(t) : \|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)\| < \delta \land \exists t_1 \geq t_0 : \|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{\varphi}(t_1)\| \geq \epsilon$$

Отже, покладемо $\epsilon = 0.01$ для конкретності. Тоді для нашого випадку:

$$\forall \delta > 0\ \exists A_\delta \in \mathbb{R} : \left|\frac{1}{\sqrt{1+A_\delta}} - 1\right| < \delta \land \exists \tau \geq 0 : \left|\frac{1}{\sqrt{1+A_\delta e^{2\tau}}} - 1\right| \geq 0.01$$

Візьмемо A_δ, що буде задовольняти першій умові (оскільки функція $f(A_\delta) = \left|\frac{1}{\sqrt{1+A_\delta}} - 1\right|$ приймає усі значення від 0 до $+\infty$). Далі вже в незалежності від знаку або значення A_δ, бачимо, що

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+A_\delta e^{2\tau}}} - 1\right| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 1$$

Тому точно знайдеться номер, з якого модуль різниці буде більшим за 0.01. Отже, розв'язок не є стабільним.

Відповідь. Розв'язок не є стабільним за Ляпуновим.

Завдання 2.

Умова. Знайти точки спокою та дослідити їх тип по першому наближенню:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin 2y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$$

Розв'язок. Спочатку знаходимо точки спокою. Для цього прирівнюємо правий стовчик рівнянь до нуля:

$$\begin{cases} \sin 2y = 0 \\ -x + x^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x(x^2-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \lor x = \pm 1 \end{cases}$$

Отже, маємо 3 зліченні набори точок спокою:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi k}{2} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\pi k}{2} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\pi k}{2} \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{Z}$$

Тепер знайдемо матрицю Якобі нашої системи:

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2\cos 2y \\ -1+3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Власні числа такої матриці можна знайти і в загальному вигляді. Отже, характеристичний поліном

$$\chi_J(\lambda) \triangleq \det(\mathbf{J}(x,y) - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2\cos 2y \\ -1+3x^2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\cos 2y(3x^2-1)$$

Отже, власні числа знаходяться з рівняння:

$$\lambda^2 = 2\cos 2y(3x^2-1)$$

Тепер проаналізуємо наші точки спокою окремо.

Випадок 1. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi k/2 \end{bmatrix}$. Підставляючи, маємо

$$\lambda^2 = 2\cos\pi k \cdot (-1) = 2 \cdot (-1)^{k+1}$$

Якщо k – непарні, то $\lambda = \pm\sqrt{2}$ і оскільки власні числа різного знаку, то маємо **сідло**. Якщо ж k – парне, то $\lambda = \pm\sqrt{2}i$ і тоді цей конкретно аналіз нам нічого не дає. Тому залишимо ці точки на потім.

Випадок 2. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pi k/2 \end{bmatrix}$. Підставляючи, маємо

$$\lambda^2 = 2\cos\pi k(3 \cdot (\pm 1)^2 - 1) = 4\cos\pi k = 4 \cdot (-1)^k$$

Отже, якщо k – парні, то $\lambda = \pm 2$ і знову маємо **сідло**. Якщо ж k – непарне, то маємо $\lambda = \pm 2i$ і тому тут теж нам недостатньо цього аналізу для визначення типу.

Для точок $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi m \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \frac{\pi(2m+1)}{2} \end{bmatrix}$ для $m \in \mathbb{Z}$ проведемо аналіз окремо. Розглянемо рівняння траєкторії, для цього знайдемо

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^3}{\sin 2y}$$

Отже маємо:

$$\sin 2y dy = (-x + x^3)dx \implies -\frac{1}{2}\cos 2y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

Тому остаточно рівняння траєкторії:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2y}{2} = C$$

Далі вже аналізуємо це сімейство кривих. Декілька з цих кривих можна побачити на рис. 1.

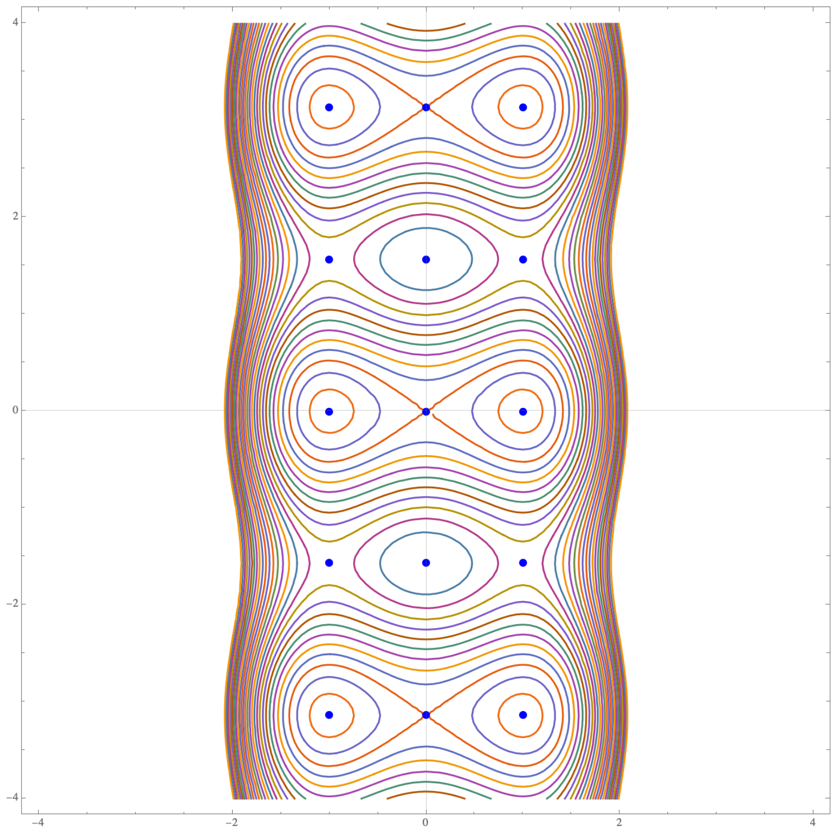

Рис. 1: Сімейство кривих $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2y}{2} = C$ для $C \in [-2, 2]$

Добре видно, що точки, що ми до цього знайшли (а саме $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi(2m+1)}{2} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pi m \end{bmatrix}$ для $m \in \mathbb{Z}$) дійсно виглядають, як седла. А ось точки, характер яких ми не могли визначити, дуже схожі на "центри", оскільки маємо сімейство замкнутих кривих навколо них.

Відповідь.

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi(2m+1)}{2} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \pi m \end{bmatrix}$ для $m \in \mathbb{Z}$ є седлами.
2. $\begin{bmatrix} 0 \\ \pi m \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} \pm 1 \\ \frac{\pi(2m+1)}{2} \end{bmatrix}$ для $m \in \mathbb{Z}$ є центрами.

Завдання 3.

Умова. Дослідити нульовий розв'язок на стійкість методом Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^5 - x^5 \\ \dot{y} = -x - 3y^3 \end{cases}$$

Розв'язок. Одразу будемо шукати функцію Ляпунова у наступному вигляді:

$$V(x,y) = \alpha x^{2n} + \beta y^{2m}, \ \alpha, \beta > 0$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= 2\alpha n x^{2n-1}\dot{x} + 2\beta m y^{2m-1}\dot{y} \\ &= 2\alpha n x^{2n-1}(2y^5 - x^5) + 2\beta m y^{2m-1}(-x - 3y^3) \\ &= -2\alpha n x^{2n+4} + 4\alpha n x^{2n-1}y^5 - 2\beta m y^{2m-1}x - 6\beta m y^{2m+2} \end{aligned}$$

Нам бажано позбавитись знакозмінного виразу $4\alpha n x^{2n-1}y^5 - 2\beta m y^{2m-1}x$. Отже, маємо вимагати в такому випадку

$$4\alpha n x^{2n-1}y^5 = 2\beta m y^{2m-1}x$$

Спочатку прирівнюємо ступені. Маємо $2n - 1 = 1 \implies n = 1$, а також $2m - 1 = 5 \implies m = 3$. Тепер прирівнюємо коефіцієнти, маємо:

$$4\alpha n = 2\beta m \implies 4\alpha = 6\beta \implies 2\alpha = 3\beta$$

Для зручності покладемо $\alpha = 3, \beta = 2$. Остаточно, отримали наступну функцію Ляпунова:

$$V(x,y) = 3x^2 + 2y^6,$$

похідна якої:

$$\dot{V}(x,y) = -6x^6 - 36y^8$$

Бачимо, що виконуються $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \dot{V}(x,y) < 0$, а отже розв'язок є **стійким**.

Відповідь. Функція Ляпунова $V(x,y) = 3x^2 + 2y^6$, нульовий розв'язок **стійкий**.