Домашня робота з математичного аналізу #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

19 лютого 2023 р.

1 Завдання 3651

Знайти екстремальні значення функції z від x, y, заданної неявно:

$$\Psi(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

Розв'язок. Спочатку розв'яжемо цю задачу чисто геометрично. Помітимо, що ми можемо записати цей вираз наступним чином:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4^2$$

Що є сферою з центром у точці $(1,-1,2)$ радіуса 4. Очевидно, що при цьому максимальне значення z досягається у точці $(1,-1,6)$ (отже $z_{\text{max}} = 6$), мінімальне у $(1,-1,-2)$ (отже $z_{\text{min}} = -2$) при $x = 1, y = -1$, бо z може пробігати усі значення від -2 до 6.

Розв'яжемо задачу використовуючи математичний аналіз. Помітимо, що ми можемо записати похідну z'_x та z'_y наступним чином:

$$z'_x = -\frac{\Psi'_x}{\Psi'_z},\ z'_y = -\frac{\Psi'_y}{\Psi'_z}$$

Оскільки диференціал $dz = z'_x dx + z'_y dy$ має бути нулем, то нам потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Psi'_x/\Psi'_z = 0 \\ \Psi'_y/\Psi'_z = 0 \\ \Psi = 0 \end{cases}$$

Отже, знаходимо похідні:

$$\Psi'_x = 2x - 2,\ \Psi'_y = 2y + 2,\ \Psi'_z = 2z - 4$$

Бачимо, що стаціонарна точка має абцису 1 та ординату -1. Підставляючи це у рівняння $\Psi = 0$ отримуємо квадратне рівняння

$$z^2 - 4z - 12 = 0$$

Звідси маємо 2 значення: $z_1 = -2, z_2 = 6$, причому в цих точках $\Psi_z \neq 0$ і тому ці точки є регулярними.

Знайдемо, де мінімум, а де максимум. Для цього потрібен другий диференціал, який ми знайдемо просто продиференціювавши наші вирази для z'_x, z'_y:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\Psi'_x}{\Psi'_z}\right) = -\frac{\Psi''_{xx}\Psi'_z - \Psi'_x\Psi''_{xz}}{(\Psi'_z)^2}, \\ z''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\Psi'_x}{\Psi'_z}\right) = -\frac{\Psi''_{xy}\Psi'_z - \Psi'_x\Psi''_{zy}}{(\Psi'_z)^2}, \\ z''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\Psi'_y}{\Psi'_z}\right) = -\frac{\Psi''_{yy}\Psi'_z - \Psi'_y\Psi''_{zy}}{(\Psi'_z)^2} \end{aligned}$$

Бачимо, що $\Psi''_{xx} \equiv \Psi''_{yy} \equiv \Psi''_{zz} \equiv 2$, а всі $\Psi''_{xy} \equiv \Psi''_{xz} \equiv \Psi''_{yz} \equiv 0$. Отже бачимо одразу, що $z''_{xy} = 0$, а для z''_{xx}, z''_{yy} маємо:

$$z''_{xx} = -\frac{2}{\Psi'_z} = z''_{yy}$$

Помітимо, що нам потрібно дослідити знак значень z''_{xx} та $z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2$. Друге значення завжди додатнє, бо

$$z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2 = z''_{xx}z''_{yy} = \frac{4}{(\Psi'_z)^2} > 0$$

Отже якщо $z''_{xx} < 0$, що в нашому випадку еквівалентно $\Psi'_z > 0$ то маємо локальний максимум, інакше якщо $\Psi'_z < 0$, то локальний мінімум.

Отже, $(1,-1,-2)$ маємо $\Psi''_z = 2\cdot(-2)-4 = -8 < 0$, отже це є точкою локального мінімуму. А в точці $(1,-1,6)$ маємо $\Psi''_z = 2\cdot 6 - 4 = 8 > 0$, отже це точка локального максимуму.

Відповідь. Точка локального максимуму це $(1,-1,6)$ та точка локального мінімуму це $(1,-1,-2)$.

2 Завдання 3644

Умова. Знайти екстремуми функції

$$u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ x,y,z > 0$$

Розв'язок. Знайдемо перший диференціал:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$$

Знаходимо похідні:

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}$$
$$u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}$$
$$u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}$$

Аби $du = 0$ нам потрібно занулити усі часткові похідні. Легше почати з $u'_x = 0$, бо звідси випливає, що $y^2 = 4x^2$, а отже $y = 2x$ (не може бути $y = -2x$, бо $x, y > 0$). Підставляємо у друге, маємо $z^2 = y^2 = 4x^2$, а отже $z = 2x$ (знову ж таки, оскільки $z, x > 0$, то варіант $z = -2x$ нам не підходить). Отже, залишається підставити усе у третє рівняння:

$$\frac{2 \cdot 2x}{2x} - \frac{2}{4x^2} = 0 \to \frac{1}{2x^2} = 2 \to x = \frac{1}{2}$$

А отже $y = z = 1$ і отримуємо стаціонарну точку $(0.5, 1, 1)$.

Далі знаходимо вираз для інших часткових похідних:

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= \frac{y^2}{2x^3} \\ u''_{yy} &= \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} \\ u''_{zz} &= \frac{2}{y} + \frac{1}{z^3} \\ u''_{xy} &= -\frac{y}{2x^2} \\ u''_{xz} &= 0 \\ u''_{yz} &= -\frac{2z}{y^2} \end{aligned}$$

Знаходимо конкретні значення у точці $(0.5, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} u''_{xx} = 4, u''_{yy} = 3, u''_{zz} = 3, \\ u''_{xy} = -2, u_{xz} = 0, u''_{yz} = -2 \end{aligned}$$

Тепер випишемо повний диференціал другого порядку:

$$du = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz$$

Або якщо позначити $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$, то маємо

$$du = \boldsymbol{\delta}^T \begin{bmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{xy} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{xz} & u''_{yz} & u''_{zz} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} := \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\delta}$$

Отже, визначемо орієнтацію цієї квадратичної форми. Запишемо отриманні значення других похідних у нашу матрицю $\mathbf{M}$ і скористаємось критерієм Сильвестера:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Отже, знайдемо детермінанти кутових мінорів:

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

Отже функція є додатньо визначеною, а отже наша підозріла точка $(0.5, 1, 1)$ є точкою локального мінімуму.

Відповідь. Точка $(0.5, 1, 1)$ є точкою локального мінімуму.