§ Перетворення. Варіант 4 §

Задача 1: Лінійно-дробова функція #1

Умова. Знайти лінійно-дробове відображення $\omega : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ таке, що задовільняє $\omega(0) = 1+i, \omega(2) = \infty, \omega(1+i) = 3$.

Розв'язання. Як відомо, існує єдине лінійне-дробове відображення таке, що переводить трійку заданих точок в іншу трійок точок. Для знаходження ω скористаємось співвідношенням

$$\omega : \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2} \cdot \frac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1} \tag{1.1}$$

Власне, залишається лише підставити наші точки:

$$\frac{z-0}{z-2} \cdot \frac{1+i-2}{1+i-0} = \frac{\omega-(1+i)}{\omega-\infty} \cdot \frac{3-\infty}{3-(1+i)} \tag{1.2}$$

Тут виникає питання з тим, що робити з виразами типу $\omega - \infty$. Правило наступне: вирази, де є точка на нескінченності, треба заміняти одиничкою. Тому остаточно маємо:

$$\frac{z}{z-2} \cdot \frac{-1+i}{1+i} = \frac{\omega-(1+i)}{2-i} \tag{1.3}$$

Оскільки $\frac{-1+i}{1+i} = i$, то можна спростити до:

$$\omega = (2-i) \cdot \frac{iz}{z-2} + (1+i) = \frac{(2i+1)z + (1+i)(z-2)}{z-2} \tag{1.4}$$

$$= \boxed{\frac{(2+3i)z - 2(1+i)}{z-2}} \tag{1.5}$$

Відповідь. $\omega = \frac{(2+3i)z-2(1+i)}{z-2}$

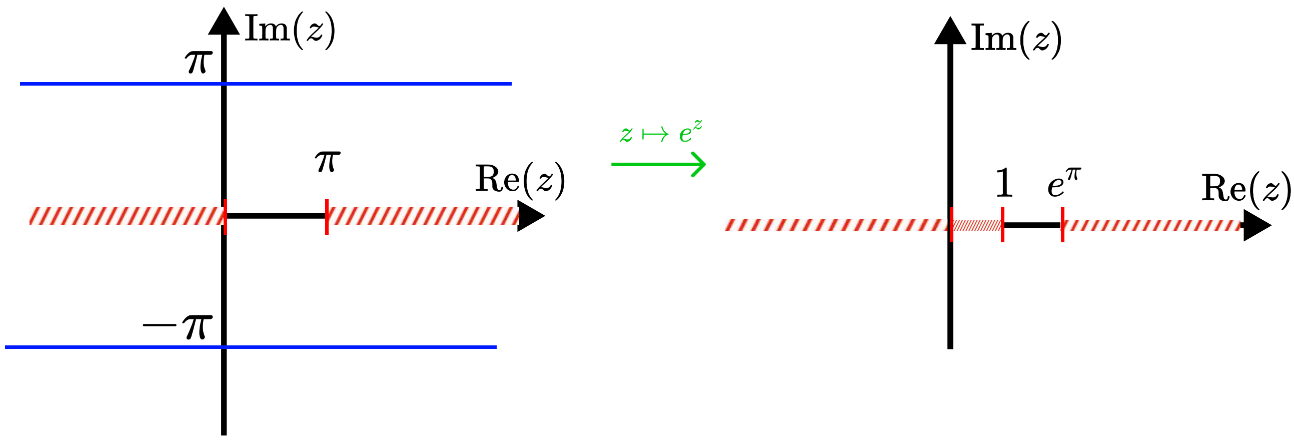

Рис. 1: Перетворення $z \mapsto e^z$ до початкового образу в задачі 2.

Задача 2: Перетворення

Умова. Перевести область $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \pi \wedge z \neq (\pi, +\infty) \cup (-\infty, 0)\}$ на верхню напівплощину.

Відповідь. Спочатку застосуємо експоненційне відображення $z \mapsto e^z$. Тоді прямі $z = x \pm i\pi$ перейдуть у $e^{x \pm i\pi} = e^{\pm i\pi} e^x = -e^x, x \in \mathbb{R}$. Це відповідає променю $(-\infty, 0)$. Тобто, $z \neq (-\infty, 0)$. Відрізок $(-\infty, 0)$ перейде у $(0, 1)$, а $(\pi, +\infty)$ у $(e^\pi, +\infty)$. Отже, маємо Рисунок 5.

Отже, по суті треба перевести $z \neq (-\infty, 1) \cup (e^\pi, +\infty)$ до $z \neq (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, а далі застосувати обернену функцію Жуковського. Для цього віднімемо $\frac{1+e^\pi}{2}$, це переведе нашу область в $z \neq (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{e^\pi}{2}) \cup (\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2})$. Ділимо на $\frac{e^\pi - 1}{2}$, отримаємо $z \neq (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, а далі засувавши функцію Жуковського, отримаємо результат. Отже, перші два перетворення мають вигляд:

$$z \mapsto \frac{e^\pi - 1}{2} \left(z - \frac{1 + e^\pi}{2} \right) \tag{2.1}$$

А далі $z \mapsto z + \sqrt{z^2 - 1}$. Весь процес проілюстровано на Рисунку 2. Наше відображення тоді доволі об'ємне, тому явно його не будемо виписувати.

Дещо більш просте перетворення можна отримати за допомогою дробово-лінійного відображення. Якщо спочатку застосувати $z \mapsto \frac{z - e^\pi}{z - 1}$ $(1 \mapsto \infty, e^\pi \mapsto 0)$, а далі взяти корінь з цього, то теж отримаємо шуканий результат. Тобто, $\omega(z) = \sqrt{\frac{e^z - e^\pi}{e^z - 1}}$.

Задача 3: Гіперболічний косинус

Умова. Знайти образ при застосуванні відображення $\omega : z \mapsto \cosh z$ на область $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0 \wedge -1 < \text{Im}(z) < 0\}$.

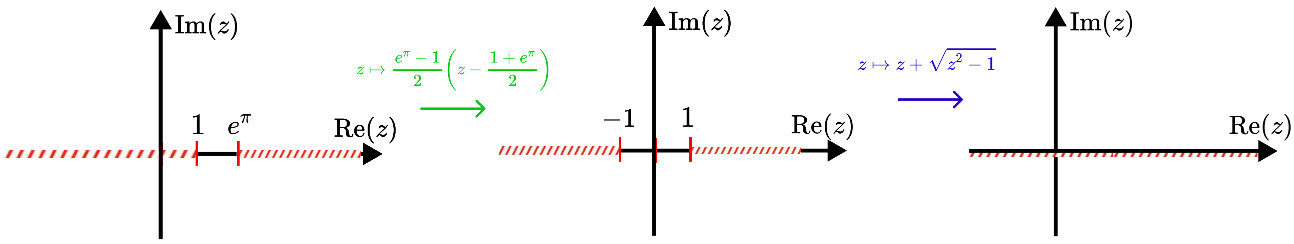

Рис. 2: Перетворення, що закінчує задачу 2.

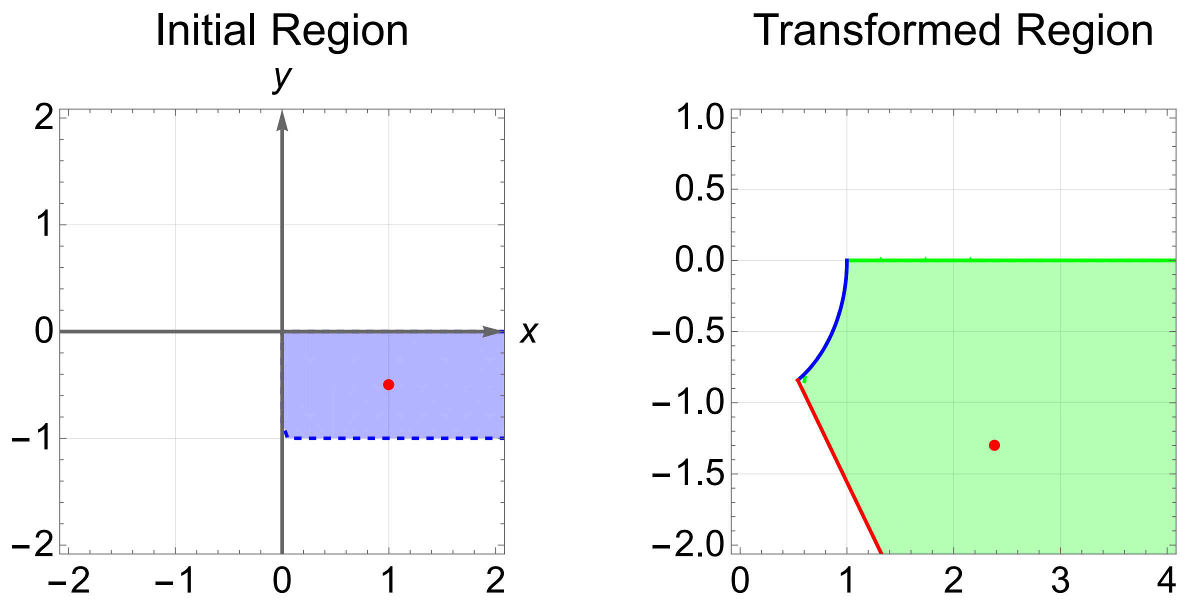

Рис. 3: Перетворення $z \mapsto e^z$ до початкового образу в задачі 3.

Коментар. У завданні було написано $\cosh \pi$ замість відображення, тому я підозрюю, що там мало стояти $\cosh z$.

Розв'язання. Як відомо, гіперболічний косинус можна записати за означенням як $\omega(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Тепер помітимо, що по суті, ми маємо композицію двох перетворень:

- Спочатку накладається експоненційне відображення $z \mapsto e^z$.
- Далі накладається функція Жуковського $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Отже, залишається послідовно накласти ці два відображення до заданої області $\mathcal{D}$.

Крок 1. Розглянемо, як перетворюються границі області при такому перетворенні. Дійна пряма $(0,+\infty)$ перейде у відрізок $(1,+\infty)$. Горизональна пряма $x-i$ для $x \in (0,+\infty)$ перетвориться на $e^{x-i} = e^x e^{-i} = z_0 e^x$ – це буде промінь від початку координат до z_0, починаючи з z_0, де $z_0 = e^{-i}$.

Вертикальна пряма it для $t \in (-1,0)$, тому образом буде дуга на одиничному колі між 1 та e^{-i}.

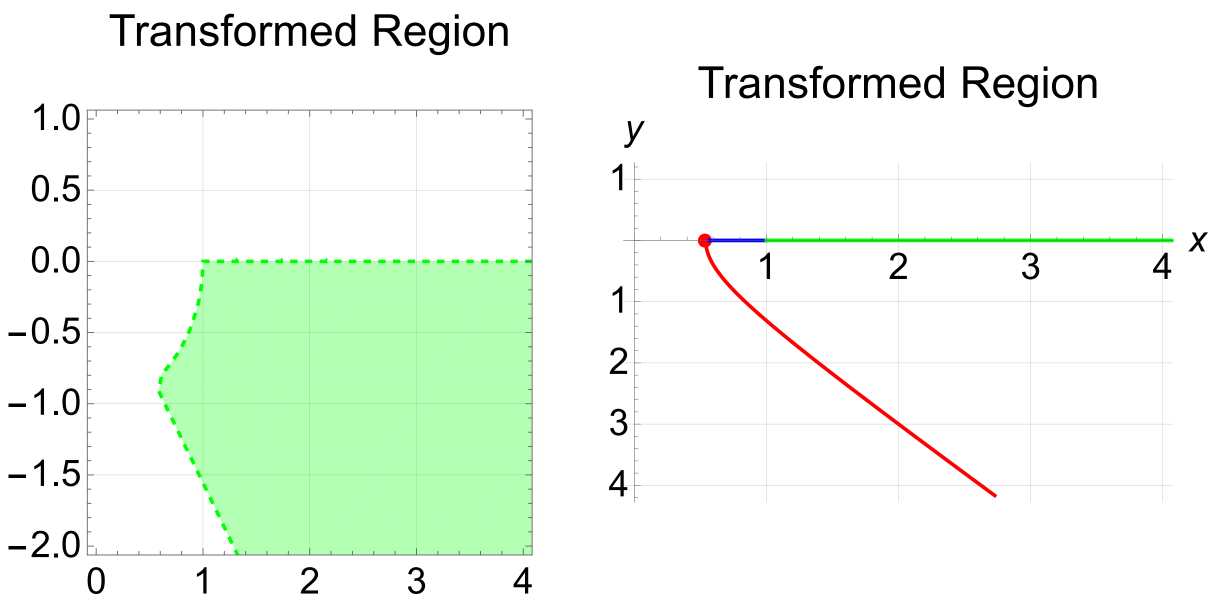

Рис. 4: Перетворення Жуковського до першого образу в задачі 3.

Нарешті, щоб визначити орієнтацію, підставимо якусь точку. Наприклад, $i\pi \notin \mathcal{D}$. Тоді $e^{i\pi} = -1$ не належить області, а отже маємо Рисунок 3.

Крок 2. Застосовуємо функцію Жуковсього на дугу та дві прямі. Дугу одиничного колу функція Жуковсього переводить на відрізок. Один кінець це $z = 1$, а інший $\frac{1}{2}(e^i + e^{-i}) = \cos 1$, тобто маємо відрізок $(\cos 1, 1)$. Далі промінь $z = t$ для $t \in (1, +\infty)$ відобразиться на промінь $(1, +\infty)$.

Нарешті, $z = z_0 t$ для $t \in (1, +\infty)$ перейде у:

$$\phi : z_0 t \mapsto \frac{1}{2}\left(z_0 t + \frac{1}{z_0 t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i} t + \frac{e^i}{t}\right) \tag{3.1}$$

Отже, можемо знайти конкретний параметричний вигляд образу. Наприклад, дійсна частина:

$$\mathrm{Re}(\phi(t)) = t\cos 1 + \frac{\cos 1}{t}, \ \mathrm{Im}(\phi(t)) = -t\sin 1 + \frac{\sin 1}{t} \tag{3.2}$$

Скоріше за все, цю криву можна віднести до якогось конкретного класу (наприклад, гіперболи), але явно я це не побачив, тому її і побудував. Результат на Рисунку 4. Область має бути замальованою всередині, під прямою $y = 0$.

Задача 4: Лінійно-дробова функція #2

Умова. Знайти образ при застосуванні відображення $\omega : z \mapsto \frac{2+z}{z+1}$ на область $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| > 2\}$.

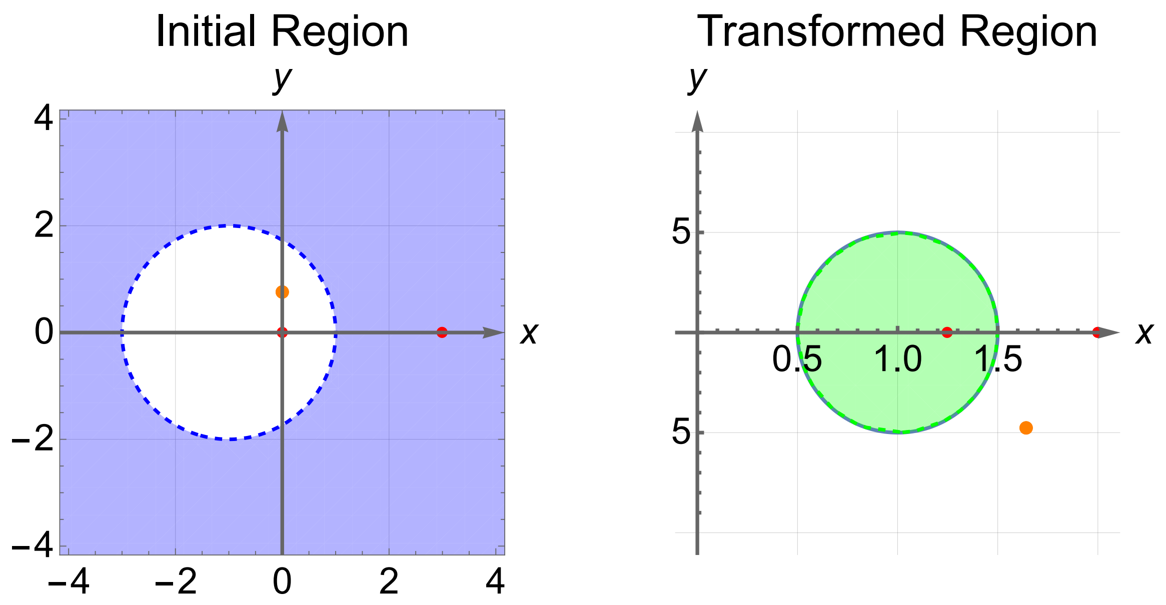

Рис. 5: Перетворення в задачі 4. Червоним відмічено симетричні точки до і після перетворення, помаранчевим – якась точка за областю.

Розв'язання. Як відомо, лінійно-дробове відображення переводить узагальнене коло у узагальнене коло. Це означає, що як результат ми або отримаємо інше коло, або пряму.

Помітимо, що у нашого лінійно-дробового відображення $\omega : z \mapsto \frac{2+z}{z+1}$ є особлива точка $z = -1$. Причому, -1 не належить нашій області і границі (а точніше, вона є центром кола $|z+1| = 2$).

За принципом симетрії, знайдемо центр відображення $\omega(\mathcal{D})$. Симетричним до центра кола є точка на нескінченності і навпаки. Тому, $\omega(\infty)$ має відповідати центру нового відображення. Легко бачити, що $\omega(\infty) = 1$ – отже це новий центр.

Отже, залишилося знайти радіус. Як відомов, дві точки z та z^* є симетричними відносно кола, якщо $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$. Тому візьмемо дві симетричні точки, вони переведуться у інші дві симетричні точки, а звідти ми знайдемо радіус.

Отже, нехай $z = 0$, тоді $1 \cdot |z^* + 1| = 4$ звідси $z^* = 3$ ($z^* = -5$ буде лежати на іншому промені). Тоді нова пара симетричних точок $\omega(0) = 2, \omega(3) = \frac{5}{4}$. Тому, радіус знайдемо як:

$$(2-1)\left(\frac{5}{4} - 1\right) = (R^*)^2 \implies R^* = \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

Отже, залишається лише знайти орієнтацію. Підставимо, наприклад, $2 \in \mathcal{D}$. Тоді $\omega(2) = \frac{4}{3}$ – належить всередині знайденого кола.

Отже остаточно наш образ $|z-1| < \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{2}\}$.