Екзамен з Функціонального Аналізу

Захарова Дмитра Олеговича, МП-31

12 червня 2024 р.

Білет №16

Вміст

1 Стискаючі відображення

Умова. Стискаючі відображення. Теорема Банаха.

Відповідь. Перед тим, як перейти до стискаючих зображень, ми розглянемо Ліпшицеві відображення, з яких стискаючі відображення будуть частковим випадком.

1.1 Ліпшицеві відображення

Отже, наведемо означення K-Ліпшицевого відображення.

Definition 1.1. Нехай (X, d_X) та (Y, d_Y) є метричними просторами. Тоді функцію $f : X \to Y$ називають **Ліпшицевою** або K-**Ліпшицевою**, якщо існує таке $K > 0$, що:

$$(\forall x, y \in X) \ \{d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)\} \tag{1}$$

Візуалізацію означення можна побачити на Рисунку 1.

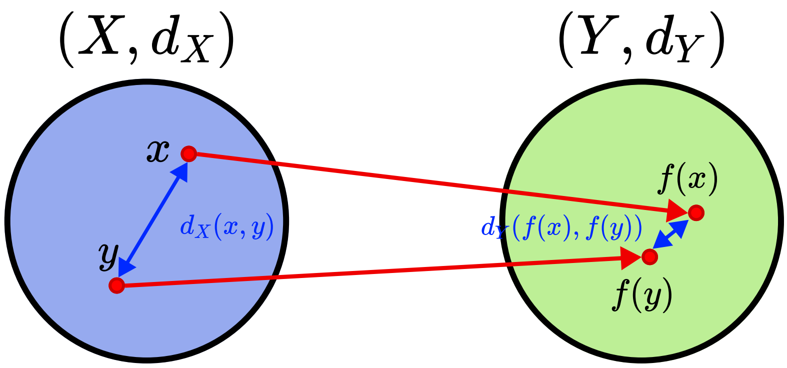

Рис. 1: Візуаліація K-Ліпшицевої функції. Як бачимо, початкова відстань $d(x, y)$ для $x, y \in X$ більша за кінцеву $d(f(x), f(y))$, $f(x), f(y) \in Y$.

Тут і далі будемо наводити багато прикладів, щоб зрозуміти кожне означення і поняття.

Example. Нехай $(X, d_X) = (Y, d_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ – стандартний простір дійсних чисел з модулем в якості метрики. Тоді, K-Ліпшицевою називають такі неперервно-диференційовані функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у яких $\sup_x |f'(x)| = K$. Наприклад, функція $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ є 1-Ліпшицевою.

1.2 Стискаючі відображення

Definition 1.2. Функція $f : X \to Y$ є стискаючою, якщо вона є k-Ліпшицевою для деякого $0 \leq k < 1$.

Теорема Банаха, про яку далі піде мова, також включає в себе наступне поняття.

Definition 1.3. Нехай маємо відображення $f : X \to X$. Тоді, $x^* \in X$ називають **нерухомою**, якщо $f(x^*) = x^*$.

Example. Нехай маємо функцію $f : x \mapsto -x^2 - 1$. Якщо вона задана над комплексним простором, то щоб знайти нерухому точку, потрібно розв'язати наступне рівняння:

$$z = -z^2 - 1 \implies z^2 + z + 1 = 0 \tag{2}$$

Звідси маємо дві нерухомі точки: $z_1^* = e^{2\pi i/3}$ та $z_2^* = e^{4\pi i/3}$.
Якщо ж мова б йшла про простір над $\mathbb{R}$, то нерухомих точок не було б.

Отже, ми готові розглянути ключову теорему цього питання.

Theorem 1.4. Банаха про стискаючі відображення. Нехай (X, d) – непустий повний метричний простір та $f : X \to X$ є стискаючою. Тоді f має єдину фіксовану точку.

Доведення. Отже за означенням потрібно довести існування такого $x^* \in X$, для якого $f(x^*) = x^*$. Як ми це зробимо?

Доведення буде конструктивим. Візьмемо будь-яке $x_0 \in X$ і задамо послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ рекурсивно: $x_{n+1} = f(x_n)$. Покажемо справедливість леми.

Lemma 1.5. Послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ для довільного x_0 та $x_{n+1} = f(x_n)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ є фундаментальною.

Для цього доведемо те, що

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \tag{3}$$

Це достатньо легко показати за означенням нашої послідовності:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0) \tag{4}$$

В першій рівності ми за означенням послідовності виписали $x_{n+1} = f(x_n), x_n = f(x_{n-1})$, а нерівності випливають з означення стискаючого відображення. Отже, це твердження ми довели.

Отже, тепер візьмемо деякі два $n, m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geq n$. Тоді:

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{m-1} k^i =: d(x_1, x_0) C_{n,m} \tag{5}$$

Перша нерівність випливає з нерівності трикутника, а наступна з доведеної пропозиції. Отже, зашилилось знайти простий вираз для $C_{n,m} = \sum_{i=n}^{m-1} k^i$.

Маємо:

$$C_{n,m} = k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i = \frac{k^n(1-k^{m-n})}{1-k} \leq \frac{k^n}{k-1} \tag{6}$$

Отже, отримали:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{k-1} \cdot d(x_1, x_0) \tag{7}$$

Отже, видно, що $d(x_m, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а отже послідовність є фундаментальною. Звідси випливає існування $\exists x \in X : x_n \to x$. Доведемо наступне твердження.

Proposition 1.6. Побудоване x і є єдиною фіксованою точкою.

Спочатку покажемо, що вона є фіксованою:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \tag{8}$$

Тепер покажемо єдиність. Нехай y – також фіксована точка. Тоді:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) \implies (1-k)d(x,y) \leq 0 \tag{9}$$

Оскільки $|k| < 1$ та $d(x,y) \geq 0$, то маємо $d(x,y) = 0$, звідки з визначення метрики одразу випливає $x = y$. Теорема доведена.

Розглянемо приклад.

Example. Скільки розв'язків на $[-1,1]$ має рівняння

$$\cos^2 x = 2x,\ x \in [-1,1] \tag{10}$$

Без знання теореми Банаха не зрозуміло, що робити. Проте, знаючи, задачу можна переформулювати так: скільки нерухомих точок має відображення $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x$ на $[-1,1]$? Оскільки $|f'(x)| = |\frac{1}{2}\sin 2x| \leq \frac{1}{2}$, то $k = \frac{1}{2}$ і тому за теоремою Банаха маємо єдину фіксовану точку.

2 Продовження оператора.

Умова. Продовження оператора по неперервності.

Відповідь. Отже, ключовою в цьому питання є **теорема Хана-Банаха**.

Theorem 2.1. Хана-Банаха. Нехай V – нормований векторний простір і нехай $W \subset V$ – підпростір. Якщо $T : W \to \mathbb{C}$ є лінійним відображенням для якого $\|T(w)\| \leq C\|w\|$ для всіх $w \in W$ (тобто маємо обмежений лінійний функціонал), тоді існує неперервне продовження оператора $\overline{T} : V \to \mathbb{C}$

таке, що $\overline{T}\Big|_W = T$ та $\|\overline{T}(v)\| \leq C\|v\|$ для всіх $v \in V$.

Проте, для доведення нам потрібно розібрати ще одну теорему.

2.1 Допоміжна Лема

Для доведення теореми Хана-Банаха, розглянемо допоміжну лему.

Lemma 2.2. Нехай V – нормований простір, $W \subset V$ – підпростір. Нехай $T : W \to \mathbb{C}$ – лінійний з $|T(w)| \leq C\|w\|$ для всіх $w \in W$. Якщо $x \notin W$, то існує функція $T' : W' \to \mathbb{C}$, що є лінійною на просторі $W' = W + \mathbb{C}x$ з $T'\Big|_W = T$ та $|T'(w')| \leq C\|w'\|$ для всіх $w' \in W'$.

Доведення Леми. По-перше, треба дізнатися трошки більше про простір W'. Доведемо, що:

1. W' є підпростором W.
2. Репрезентація довільного $w' \in W'$ як $w' = ax + w, w \in W, a \in \mathbb{C}$ є єдиним.

Перше твердження достатньо очевидне, а друге доводиться наступним чином: нехай вийшло, що $w' = \widetilde{a}x + \widetilde{w}$ для $\widetilde{a} \neq a, \widetilde{w} \neq w$. Тоді:

$$ax + w = \widetilde{a}x + \widetilde{w} \implies (a - \widetilde{a})x = \widetilde{w} - w \in W \tag{11}$$

Проте, при $a \neq \widetilde{a}$ звідси випливає $x \in W$ – протиріччя. Якщо ж $a = \widetilde{a}$, то і $w = \widetilde{w}$. Таким чином, w' задано єдиним чином через вираз $ax + w$.

Цей факт потрібен, щоб коректно визначити відображення T' наступним чином:

$$T'(ax + w) = T(w) + a\lambda \tag{12}$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$. Якщо $C = 0$, то $T \equiv 0$ і тоді $T' \equiv 0$. Якщо ж $C \neq 0$, то без обмеження загальності будемо вважати, що $C = 1$.

Отже, лише залишилось підібрати таке λ, щоб для всіх $a \in \mathbb{C}, w \in W$ виконувалось $|T(w)| \leq \|ax + w\|$. По-перше, це очевидно виконується за $a = 0$ з умови. Тому, сфокусуємось на випадку $a \neq 0$ і поділимо обидві частини на $|a|$:

$$\left|T\left(\frac{w}{-a}\right) - \lambda\right| \leq \left\|\frac{w}{-a} - x\right\| \tag{13}$$

Оскільки $w/-a \in W$, то це твердження еквівалентно:

$$|T(w) - \lambda| \leq \|w - x\| \; \forall w \in W \tag{14}$$

Доведемо існування такого $\alpha \in \mathbb{R}$, що для $R(w) = \mathrm{Re}\{T(w)\}$ виконується

$$|R(w) - \alpha| \leq \|w - x\| \tag{15}$$

Помітимо, що $|R(w)| \le \|T(w)\| \le \|w\|$ і оскільки R є функцією над $\mathbb{R}$:

$$R(w_1) - R(w_2) = R(w_1 - w_2) \le |R(w_1 - w_2)| \le \|w_1 - w_2\| \tag{16}$$

Отже, продовжуючи, бачимо, що

$$R(w_1) - R(w_2) \le \|(w_1 - x) + (x - w_2)\| \le \|w_1 - x\| + \|w_2 - x\| \tag{17}$$

Отже, для довільних $w_1, w_2 \in W$ маємо:

$$R(w_1) - \|w_1 - x\| \le R(w_2) + \|w_2 - x\| \tag{18}$$

Отже, візьмемо супремум по лівій частині:

$$\sup_{w \in W} \{R(w) - \|w - x\|\} \le R(w_2) + \|w_2 - x\| \; \forall w_2 \in W \tag{19}$$

і тому

$$\underbrace{\sup_{w \in W} \{R(w) - \|w - x\|\}}_{=L} \le \underbrace{\inf_{w \in W} \{R(w) + \|w - x\|\}}_{=U} \tag{20}$$

Твердження. Дійсно, якщо обрати будь-який $L \le \alpha \le U$, то він підійде. Дійсно, тоді для всіх $w \in W$:

$$R(w) - \|w - x\| \le \alpha \le R(w) + \|w - x\| \tag{21}$$

Звідси $|R(w) - \alpha| \le \|w - x\|$.
Такі самі міркування справедливі і для $I(w) = \mathrm{Im}\{T(w)\}$.

2.2 Доведення теореми Хана-Банаха

Для доведення згадаємо одне означення з математичної логіки.

Definition 2.3. Частковий порядок на множині E це відношення $\preceq$, що має наступні властивості:

1. Для всіх $e \in E : e \preceq e$.
2. Для всіх $e, e' \in E : e \preceq e' \wedge e' \preceq e \implies e = e'$.
3. Для всіх $e, e', e'' \in E : e \preceq e' \wedge e' \preceq e'' \implies e \preceq e''$.

Example. Нехай S множина, а на $E = 2^S$ ми задали частковий порядок: $A \preceq B$ якщо A є підмножиною B.

Definition 2.4. Нехай $(E, \preceq)$ є частково упорядкована множина. Тоді множина $C \subset E$ є **ланкою** якщо для всіх $e, f \in C$ маємо або $e \preceq f$, або $f \preceq e$.

Theorem 2.5. Лема Цорна. Якщо кожна ланка в непустій частково-упорядкованій множині E має верхню межу, то E є максимальним елементом.

Доведення теореми. Нехай $\mathcal{F}$ є множиною усіх неперервних розширень

$$\mathcal{F} = \{(\overline{T}, U) : W \subset U \subset V, \overline{T} \text{ є неперервним розширенням } T \text{ на } U\} \tag{22}$$

Ця множина непуста, оскільки $(T, W) \in \mathcal{F}$. Задаємо частковий порядок на цій множині наступним чином:

$$(T_1, U_1) \preceq (T_2, U_2) \text{ якщо } U_1 \subset U_2 \; T_2\Big|_{U_1} = T_1 \tag{23}$$

Легко бачити, що це дійсно є частковим порядком. Нехай тепер кожна ланка має верхню межу (це буде доведено нижче). Тоді за лемою Цорна, $\mathcal{F}$ має максимум $(\hat{T}, \hat{U})$. Доведемо, що $\hat{U} = V$. Нехай це не так. Тоді існує $x \in V \setminus \hat{U}$. Проте, за доведеною лемою існує неперервне розширення T' функціоналу $\hat{T}$ на $\hat{U} + x\mathbb{C}$. Тоді, $(T', \hat{U} + \mathbb{C}x) \in \mathcal{F}$, причому $(\hat{T}, \hat{U}) \preceq (T', \hat{U} + \mathbb{C}x)$ – протиріччя. Отже $\hat{U} = V$ і тому існує відповідне $\hat{U}$.

Перевіримо тепер, чи кожна ланка має верхню межу. Нехай ланка задана як $C = \{(T_i, U_i) : i \in I\}$. Тоді нехай $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. U є лінійним підпростором V: нехай $x_1, x_2 \in U$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Тоді ми можемо знайти такі індекси i_1, i_2, що $x_1 \in U_{i_1}, x_2 \in U_{i_2}$. Також, оскільки маємо ланку, то або $U_{i_1} \subset U_{i_2}$, або $U_{i_2} \subset U_{i_1}$. Тоді, без втрати загальності, нехай $x_1, x_2 \in U_{i_2}$. Оскільки U_{i_2} є підпростором V, то $a_1x_1 + a_2x_2 \in U_{i_2} \subset U$, що і треба було довести.

Маючи підпростір U, ми хочемо його перетворити на елемент $\mathcal{F}$, додавши функціонал $T : U \to \mathbb{C}$, що задовольняє нашим умовам. Проте, це достатньо просто: для кожного $u \in U$ ми знаємо, що існує $i \in I$, для якого $u \in U_i$, а тому $T(u) = T_i(u)$. Тоді $(T_i, U_i) \preceq (T, U)$, тому (T, U) – наш максимум.

3 Практичне завдання

Умова. Перевірити, що множина функцій $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ утворюють ортонормований базис в $L^2[0, \pi]$, але в просторі $L^2[-\pi, \pi]$ є тільки ортонормованою системою, яка не утворює базис.

Розв'язання.

Будемо позначати $e_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$. Розіб'ємо розв'язок на дві частини: спочатку покажемо, що системи є ортонормованими, а далі вже покажемо чому лише для $[0, \pi]$ маємо базис.

3.1 Ортонормованість систем

Отже, спочатку покажемо, що перед нами дійсно ортонормована система в обох випадках. Згадаємо означення.

Definition 3.1. Нехай H є пре-Гільбертовим простором. Підпростір $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ є **ортонормованим** якщо $\|e_\lambda\| = 1\ \forall\lambda \in \Lambda$ а також для усіх $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \Lambda$ маємо $\langle e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}\rangle = 0$.

Отже, нехай маємо простір $L^2(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}$ вимірна, а функції $f : \Omega \to \mathbb{C}$ є вимірними і $\int_\Omega f\,d\mu < \infty$, то внутрішній добуток на норма задаються наступним чином:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} \triangleq \int_\Omega f\overline{g}d\mu,\ \|f\|_{L^2(\Omega)} \triangleq \left(\int_\Omega |f|^2 d\mu\right)^{1/2} \tag{24}$$

Розглянемо випадок $\Omega = [0, \pi]$. Для двох $n, m \in \mathbb{N}$ маємо:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt \sin mt dt \tag{25}$$

Згадаємо наступну тригонометричну формулу:

$$\sin nt \sin mt = \frac{1}{2}(\cos(n-m)t - \cos(n+m)t) \tag{26}$$

Нехай $n \neq m$. Отже, наш добуток має вигляд:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi \cos((n-m)t)dt - \int_0^\pi \cos((n+m)t)dt\right) \tag{27}$$

Окремо інтеграли знайти легко. Маємо:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n-m)t}{n-m}\bigg|_{t=0}^{t=\pi} - \frac{\sin(n+m)t}{n+m}\bigg|_{t=0}^{t=\pi}\right) = 0$$

Якщо ж $n = m$, то тоді

$$\langle e_n, e_n\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 nt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2nt}{2}dt = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \int_0^\pi \cos(2nt)dt\right) \tag{28}$$

Інтеграл праворуч у дужках нуль, а тому $\langle e_n, e_n\rangle = 1$, а отже остаточно:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}, \tag{29}$$

що означає ортонормованість системи. Тепер розглянемо $[-\pi, \pi]$. Добре видно, що зміняться лише межі підстановки і тому видно, що результат такий самий. Перейдемо до того, що з цього є базисом.

3.2 Ортонормований базис

Введемо два додаткових означення:

Definition 3.2. Ортонормована підмножина $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пре-Гільбертового простору є **максимальною** якщо для кожного $u \in H$, що задовольняє $\langle u, e_\lambda\rangle = 0$ для кожного $\lambda \in \Lambda$, виконується $u = 0$.

Definition 3.3. Нехай H Гільбертів простір. **Ортонормованим базисом** називають зліченну максимальну ортонормовану підмножину H.

Оскільки наша множина $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є зліченною і ортонормованою, залишилось довести, що для $\Omega = [0, \pi]$ вона є максимальною, а для $\Omega = [-\pi, \pi]$ – ні.

Легше одразу розглянути $\Omega = [-\pi, \pi]$. Доведемо, що знайдеться така вимірна $u \in L^2[-\pi, \pi]$, що $\langle u, e_n\rangle = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, але $u \not\equiv 0$. Отже умова $\langle u, e_n\rangle = 0$ означає:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin nt dt = 0, \;\; n \in \mathbb{N} \tag{30}$$

Проте, нехай $u(t) = \cos t$. Тоді легко показати, що $\langle u, e_n\rangle = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Дійсно, $\cos t \sin nt$ є непарною, а інтеграл по симетричному відносно 0 відрізку дасть 0. Отже, аналогічно можна було взяти будь-яке парне $u \in L^2[-\pi, \pi]$, як наприклад $u(t) = t^2$.

Добре, залишилось розібратись з $\Omega = [0, \pi]$. Доводити аналог Рівняння 30 буде надто складно, оскільки по суті ми повторимо доведення максимальності базису Фур'є. Тому скористаємося тим, що ми вже знаємо, що наступна система функцій $\{\cos nx : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ є ортогональним базисом $L^2[-\pi, \pi]$ (позначимо через $\{e'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$). Також нехай $\langle u, e_n\rangle_{L^2[0,\pi]} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ Розглянемо розширену функцію:

$$g(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \pi] \\ -u(t), & t \in [-\pi, 0] \end{cases} \in L^2[-\pi, \pi] \tag{31}$$

Ця функція є неперервною, а також непарною: $g(-t) = -g(t)$. Тоді, за теоремою про ряд Фур'є-Бесселя, маємо наступне розкладання g у ряд:

$$g = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda e_\lambda, \tag{32}$$

де b_λ пропорційне $\langle g, e'_\lambda\rangle$. Для базисів виду $\{\cos nt : n \in \mathbb{N}\}$ будемо мати $\langle g, \cos nt\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt = 0$, оскільки функція g непарна, а для базисів $\{\sin nt : n \in \mathbb{N}\}$ за припущенням маємо $\langle g, \sin nt\rangle = \langle u, \sin nt\rangle = 0$. Отже, $g \equiv 0$ на $L^2[-\pi, \pi]$, а отже і на $L^2[0, \pi]$. Що і треба було довести.