Homework #1

с. 14 № 2 (Парні номера)

Зауваження: в усіх пунктах після цього вважаємо C за константу.

Пункт 2. Знайти

$$I = \int (x^2 - 1)^2 dx$$

Розв'язок. Відкриємо дужки:

$$I = \int (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx - 2\int x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

Відповідь: $x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$

Пункт 4. Знайти

$$I = \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

Розв'язок. Поділимо кожен додаток в чисельнику на $\sqrt{x}$ і запишемо кожен отриманний додаток у вигляді x^α (і звісно скористаємося фактом, що $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$):

$$I = \int (x^{3/2} - x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \int x^{3/2} dx - \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C$$

Відповідь: $2x^{5/2}/5 - 2x^{3/2}/3 + 2x^{1/2} + C$

Пункт 6. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{7 + x^2}$$

Розв'язок. Можна одразу скористатися формулою для $\int \frac{dx}{\beta^2 + x^2}, \beta \in \mathbb{R}$, але можна багато сперечатися, чи це є табличним інтегралом, тому зробимо зведенням до інтегралу $\int \frac{dx}{1+x^2}$, що вже безперечно є табличним 🙂

Отже, маємо

$$I = \int \frac{dx}{7(1 + x^2/7)} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1 + (x/\sqrt{7})^2}$$

Зробимо заміну $q = x/\sqrt{7} \implies dq = dx/\sqrt{7} \implies dx = \sqrt{7}dq$, отже

$$I = \frac{1}{7}\int \frac{\sqrt{7}}{1 + q^2} dq = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dq}{1 + q^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan q + C = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$

Пункт 8. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 - 8}}$$

Розв'язок. Зведемо інтеграл до форми $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \beta^2}}, \beta \in \mathbb{R}$:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{7}\sqrt{x^2 - 8/7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2}}$$

Далі застосовуємо формулу $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\beta^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-\beta^2}| + C, \beta \neq 0$:

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{8}{7}} \right| + C$$

Відповідь: $(1/\sqrt{7}) \ln |x + \sqrt{x^2 - 8/7}| + C$

Пункт 10. Знайти

$$I = \int (16^{1/3} - x^{2/3})^3 dx$$

Розв'язок. Можливо є якісь способи полегше, але перше, що спадає на думку, це знову ж таки просто розкрити дужки:

$$(16^{1/3} - x^{2/3})^3 = 16 - 12 \cdot (2x)^{2/3} + 6 \cdot 2^{1/3} x^{4/3} - x^2$$

А далі просто почленно інтегруємо:

$$I = 16x - 12 \cdot 2^{2/3} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 6 \cdot 2^{1/3} \frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^3}{3} + C$$

Спрощуємо (наскільки це можливо) і отримаємо:

$$I = 16x - \frac{36\sqrt[3]{4x^5}}{5} + \frac{18\sqrt[3]{2x^7}}{7} - \frac{x^3}{3} + C$$

Пункт 12. Знайти

$$I = \int 2^{2x} e^x dx$$

Розв'язок. Зробимо деякі перетворення підінтегрального виразу:

$$2^{2x} e^x = e^{\ln 2^{2x}} e^x = e^{2x \ln 2} e^x = e^{2x \ln 2 + x} = e^{x(2 \ln 2 + 1)}$$

Тому достатньо знайти

$$I = \int e^{x(2\ln 2 + 1)} dx$$

Зробимо заміну $\eta = (2 \ln 2 + 1)x \implies d\eta = (2 \ln 2 + 1) dx \implies dx = \frac{d\eta}{2 \ln 2 + 1}$:

$$I = \int e^{\eta} \frac{d\eta}{2 \ln 2 + 1} = \frac{1}{1 + 2\ln 2} \int e^{\eta} d\eta = \frac{e^{\eta}}{1 + 2 \ln 2} + C = \frac{2^{2x} e^x}{1 + 2 \ln 2} + C$$

Пункт 14. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - x^4} dx$$

Розв'язок. Розіб'ємо інтеграл на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{3x^2 - x^4} = \frac{1}{x^2(3 - x^2)} = \frac{1}{x^2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{\sqrt{3} - x} + \frac{\gamma}{\sqrt{3} + x}$$

Знайдемо коефіцієнти α, β, γ:

$$\frac{1}{x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)} \equiv \frac{\alpha(3-x^2)+\beta x^2(x+\sqrt{3})+\gamma x^2(\sqrt{3}-x)}{x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}$$

Або $(\beta-\gamma)x^3+(-\alpha+\sqrt{3}\beta+\sqrt{3}\gamma)x^2+3\alpha \equiv 1$. Звідси $\alpha = 1/3$, а усі коефіцієнти перед x^2, x^3 дорівнюють 0, тобто $\beta=\gamma$ і $\sqrt{3}(\beta+\gamma)=\alpha$. Звідси отримуємо $2\beta\sqrt{3}=1/3$ або $\beta=\gamma=\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}, \alpha=\frac{1}{3}$. Отже, можемо нарешті інтегрувати:

$$I = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{\sqrt{3}}{18}\int\frac{dx}{\sqrt{3}-x}+\frac{\sqrt{3}}{18}\int\frac{dx}{\sqrt{3}+x}$$

Перший інтеграл вочевидь $\frac{1}{3}\int x^{-2}dx=\frac{1}{3}\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{3x}+\mathrm{C}$. Останній інтеграл теж очевидний: якщо зробити заміну $r=\sqrt{3}+x \implies dr=dx$, тому $\frac{\sqrt{3}}{18}\int\frac{dx}{\sqrt{3}+x}=\frac{\sqrt{3}}{18}\ln|x+\sqrt{3}|+C$. Другий інтеграл аналогічиним чином $-\frac{\sqrt{3}}{18}\ln|\sqrt{3}-x|+C$, але тут знак “мінус” через те, що при заміні на $r=\sqrt{3}-x$ отримаємо $dr=-dx$. Отже:

$$I = -\frac{1}{3x}+\frac{\sqrt{3}}{18}\ln|x+\sqrt{3}|-\frac{\sqrt{3}}{18}\ln|\sqrt{3}-x|+C$$

Якщо скористатися тим фактом, що $\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$, остаточно отримаємо:

$$I = -\frac{1}{3x}+\frac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right|+C$$

Пункт 16. Знайти

$$I = \int\frac{1}{\tan^2 x}dx$$

Розв’язок. Запишемо $\tan x=\sin x/\cos x$:

$$I = \int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx$$

Перший інтеграл табличний: $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$, тому маємо:

$$I = -\left(x+\frac{1}{\tan x}\right)+C$$

Пункт 18. Знайти

$$I = \int \operatorname{cth}^2 x dx$$

Розв’язок. Помітимо, що $\operatorname{cth}^2 x=\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=\frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Отже маємо

$$I = \int\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)dx = x+\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}+C$$

Другий інтеграл є табличним, а отже

$$I = x-\operatorname{cth} x+C$$

с. 15 № 7 (2,4,6)

Пункт 2. Знайти

$$I = \int\sin(ax+b)dx$$

Розв’язок. Зробимо заміну $t=ax+b \implies dt=adx \implies dx=\frac{dt}{a}$. Отже:

$$I = \frac{1}{a}\int \sin t dt = -\frac{1}{a}\cos t + C = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

Пункт 4. Знайти

$$I = \int \sin^2(ax+b)dx$$

Розв'язок. Якщо позначити $\theta = ax+b$ (поки це не заміна для інтегрування), то можемо написати, що $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, звідки $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$. Тоді:

$$I = \int \frac{1-\cos(2(ax+b))}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2(ax+b))dx$$

Зробимо заміну $\xi = 2(ax+b) \implies 2adx = d\xi \implies dx = \frac{1}{2a}d\xi$, звідки

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\int \cos\xi d\xi = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin\xi + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2(ax+b))}{4a} + C$$

Пункт 6. Знайти

$$I = \int \sin ax \sin(ax+b)dx$$

Розв'язок. Скористаємося тим, що $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, тобто:

$$I = \frac{1}{2}\int (\cos(-b) - \cos(2ax+b))dx = \frac{\cos b}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2ax+b)dx$$

Зробимо заміну $\xi = 2ax+b \implies dx = \frac{1}{2a}d\xi$, отримаємо:

$$I = \frac{\cos b}{2}x - \frac{1}{4a}\int \cos\xi d\xi = \frac{\cos b}{2}x - \frac{\sin(2ax+b)}{4a} + C$$

с. 15 № 8 (2,4,6)

Пункт 2. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{5 - 12x - 9x^2}$$

Розв'язок. Помітимо, що $9x^2 + 12x = (3x+2)^2 - 4$, тому

$$I = \int \frac{dx}{5 - (3x+2)^2 + 4} = \int \frac{dx}{9 - (3x+2)^2}$$

Зробимо заміну $n = 3x+2 \implies dx = \frac{dn}{3}$, тоді

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dn}{3^2 - n^2}$$

Розіб'ємо підінтегральний вираз на дроби:

$$\frac{1}{9-n^2} \equiv \frac{\alpha}{3-n} + \frac{\beta}{3+n} = \frac{3(\alpha+\beta) + n(\alpha-\beta)}{9-n^2}$$

Отже $\alpha + \beta = 1/3, \alpha = \beta$, звідки $\alpha = \beta = 1/6$, тобто:

$$I = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3-n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3+n}\right)dn = \frac{1}{18}\int \frac{dn}{3-n} + \frac{1}{18}\int \frac{dn}{3+n} = \frac{1}{18}\left(\ln|3+n| - \ln|3-n|\right) + C = \frac{1}{18}\ln$$

Скористаємося тим, що $n = 3x+2$, тому

$$I = \frac{1}{18}\ln\left|\frac{5+3x}{1-3x}\right| + C$$

Пункт 4. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{15x^2 - 34x + 15}$$

Розв'язок. Виділимо повний квадрат:

$$I = \frac{1}{15}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{34}{15}x + 1}$$

Використуємо той факт, що $x^2 - \frac{34}{15}x = (x - \frac{17}{15})^2 - \frac{289}{225}$

$$I = \frac{1}{15}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{17}{15}\right)^2 + 1 - \frac{289}{225}} = \frac{1}{15}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{17}{15}\right)^2 - \frac{64}{225}}$$

Використаємо заміну $\eta = x - 17/15 \implies d\eta = dx$, а також $a = 8/15$, тоді

$$I = \frac{1}{15}\int \frac{d\eta}{\eta^2 - a^2} = \frac{1}{30a}\ln\left|\frac{\eta - a}{\eta + a}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x - 17/15 - 8/15}{x - 17/15 + 8/15}\right| + C$$

Остаточно

$$I = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x - 5/3}{x - 3/5}\right| + C$$

Пункт 6. Знайти

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$$

Розв'язок. Трошки "підредагуємо" наш вираз:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + (3/2)x + 1}}$$

Далі виділемо повний квадрат: $x^2 - 3x/2 = (x - 3/4)^2 - 9/16$, тому

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 9/16 - (x - 3/4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(5/4)^2 - (x - 3/4)^2}}$$

Зробимо заміну $\xi = x - 3/4 \implies d\xi = dx, b = 5/4$, отримаємо:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\xi}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\xi}{b} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x - 3/4}{5/4} + C$$

Або, остаточно

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x - 3}{5} + C$$