Самостійна робота з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Нехай

$$X = \{1, 2, 3, 4\},\ \mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

1. Чи є $\mathcal{H}$ півалгеброю?
2. Якщо ні, то доповніть $\mathcal{H}$ до $\widetilde{\mathcal{H}}$ так, щоб $\mathcal{H} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ і $\widetilde{\mathcal{H}}$ була півалгеброю.

Розвязок.

Пункт 1. За означенням, аби множина $\mathcal{H}$ була півалгеброю, потрібно $X \in \mathcal{H}$ та щоб $\mathcal{H}$ була півкільцем. Дійсно, $X \in \mathcal{H}$. Отже перевіряємо, чи перед нами півкільце. Для цього має виконуватись:

1. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cap B \in \mathcal{H}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{H}\ \exists \{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H} : (A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k \wedge \{C_k\}_{k=1}^n$ є неперетинними$)$

Перша властивість дійсно виконується, для цього достатньо попарно перетнути елементи і перевірити, що вони будуть в $\mathcal{H}$:

$$\emptyset \cap \{1\} = \emptyset \in \mathcal{H},\ \emptyset \cap \{1, 2\} = \emptyset \in \mathcal{H}, \dots$$

$$\{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} \in \mathcal{H},\ \{1\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \in \mathcal{H},\ \{1\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1\} \in \mathcal{H}$$
$$\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \in \mathcal{H},\ \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\} \in \mathcal{H}$$
$$\{3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{H}$$

А ось з другою властивістю є проблеми. Наприклад, візьмемо $A := \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1\}$. Тоді $A \setminus B = \{2, 3, 4\}$. В нас залишаються $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \emptyset$ і, хоча вони неперетинні, їх об’єднання не дасть $\{2, 3, 4\}$. Отже, перед нами не півкільце, а отже і не півалгебра.

Пункт 2. Найпростіший спосіб це звичайно доповнити $\mathcal{H}$ до 2^X, в такому разі 2^X буде півкільцем (оскільки $\forall A, B \in 2^X : A \cap B \in 2^X$, а також $\forall A, B \in 2^X : A \setminus B \in 2^X$).

Але давайте знайдемо менш тривіальний варіант. Для початку, повернімося до вибору $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1\}$. Нам би допомогло скласти $A \setminus B$ з інших елементів, якщо б в нас було ще $\{2\}$, оскільки ми б взяли $\{C_k\}_{k=1}^2 := \{\{2\}, \{3, 4\}\}$. Тому, додамо його.

Тепер перевіримо, чи цього достатньо, тобто чи буде тепер такий клас множин півалгеброю:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{\{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Із перетинів додалися перетини $\{2\}$ з усіма іншими елементами. Неважко переконатись, що всі перетини будуть лежати в $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Тепер розглянемо усі різниці. Спочатку віднімемо від $\{1, 2, 3, 4\}$ всі інші елементи:

$$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 2\} = \{3, 4\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2\} = \{1, 3, 4\} = \underbrace{\{1\}}_{\in \widetilde{\mathcal{H}}} \cup \underbrace{\{3, 4\}}_{\in \widetilde{\mathcal{H}}},\ \{1\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4\} = \underbrace{\{2\}}_{\in \widetilde{\mathcal{H}}} \cup \underbrace{\{3, 4\}}_{\in \widetilde{\mathcal{H}}},\ \{2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$$

Якщо віднімати в зворотній бік, то будемо отримувати $\emptyset \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

Тепер $\{3, 4\}$:

$$\{3, 4\} \setminus \{1, 2\} = \{3, 4\} \setminus \{1\} = \{3, 4\} \setminus \{2\} = \{3, 4\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

В зворотній бік ситуація аналогічна:

$$\{1, 2\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2\} \in \widetilde{\mathcal{H}},\ \{2\} \setminus \{3, 4\} = \{2\} \in \widetilde{\mathcal{H}},\ \{1\} \setminus \{3, 4\} = \{1\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

Тепер $\{1, 2\}$:

$$\{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\} \in \widetilde{\mathcal{H}},\ \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

$$\{1\} \setminus \{1, 2\} = \{2\} \setminus \{1, 2\} = \emptyset \in \widetilde{\mathcal{H}}$$

Нарешті, $\{1\} \setminus \{2\} = \{1\} \in \widetilde{\mathcal{H}}, \{2\} \setminus \{1\} = \{2\} \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

Отже, як перша, так і друга умови означення півкільця виконуються, а також $X \in \widetilde{\mathcal{H}}$, тому дійсно маємо півалгебру.

Відповідь.

1. Не є, не виконується 2 умова означення півкільця для $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1\}$.

2. $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{\{2\}\}$ або $\widetilde{\mathcal{H}} = 2^X$