# Домашня робота з диференціальної геометрії #4

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

15 березня 2023 р.

## Завдання 1(2)

**Умова.** Розглянемо параметрично задану криву $\gamma$ в площині $\mathbb{R}^2$ і точку $P$ на цій кривій. Знайдіть вектори базису Френе в довільній точці кривої $\gamma$. Запишіть рівняння дотичної та нормальної прямих кривої $\gamma$ в точці $P$:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} at \\ a\cosh t \end{bmatrix}$$

**Розв'язок.** Спочатку знайдемо похідну:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} a \\ a\sinh t \end{bmatrix}$$

Якщо нормалізувати цю похідну, то отримаємо перший вектор базису:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\dot{\boldsymbol{f}}} = \frac{1}{a\sqrt{1+\sinh^2 t}} \begin{bmatrix} a \\ a\sinh t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\cosh t \\ \tanh t \end{bmatrix}$$

Далі достатньо знайти будь-який вектор, перпендикулярний цьому і нормалізувати. Наприклад,

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \tanh t \\ -1/\cosh t \end{bmatrix}$$

Рівняння нормальної прямої:

$$\ell_n : \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} at + \tau \tanh t \\ a \cosh t - \tau / \cosh t \end{bmatrix}$$

Відповідно дотичної прямої:

$$\ell_\tau : \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} at + \tau / \cosh t \\ a \cosh t + \tau \tanh t \end{bmatrix}$$

# Завдання 2.1.

**Умова.** Розглянемо регулярну параметрично задану криву $\gamma$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ ht \end{bmatrix}$$

Знайти вектори базису Френе в довільній точці кривої $\gamma$. Записати рівняння елементів тригранника Френе кривої $\gamma$ в точці $t = \pi$.

**Розв'язок.** Запишемо вектори базису. Для цього знайдемо похідну виразу:

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ h \end{bmatrix} =: \boldsymbol{t}$$

Тепер нормалізуємо її, для цього спочатку запишемо модуль:

$$\left\| \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \right\|_2 = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + h^2} = \sqrt{1 + t^2 + h^2}$$

Тому перший вектор:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + h^2}} \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ h \end{bmatrix}$$

Для другого вектору знайдемо другу похідну:

$$\frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2} = \begin{bmatrix} -\sin t - \sin t - t\cos t \\ \cos t + \cos t - t\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Другий вектор (поки не нормалізований) задається як:

$$\boldsymbol{b} = \left[\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{f}}{dt^2}\right] = \begin{bmatrix} h(-2\cos t + t\sin t) \\ -h(2\sin t + t\cos t) \\ 2 + t^2 \end{bmatrix}$$

Знаходимо норму:

$$\|\boldsymbol{b}\|_2 = \sqrt{(2+t^2)^2 + h^2(4+t^2)}$$

Отже, другий вектор:

$$\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\sqrt{(2+t^2)^2 + h^2(4+t^2)}} \begin{bmatrix} h(t\sin t - 2\cos t) \\ -h(t\cos t + 2\sin t) \\ 2 + t^2 \end{bmatrix}$$

Нарешті, третій вектор:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}] = \begin{bmatrix} -t(2+h^2+t^2)\cos t - (2+2h^2+t^2)\sin t \\ (2+2h^2+t^2)\cos t - t(2+h^2+t^2)\sin t \\ ht \end{bmatrix}$$

Далі модуль цього вектора... Після перетворень, отримаємо:

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \sqrt{(1+t^2)(2+t^2)^2 + h^4(4+t^2) + h^2(8+7t^2+2t^4)}$$

Тому треій вектор просто записується як $\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2}$.

Підставимо точку $t = \pi$. Тоді наші вектори будуть мати вигляд:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2+h^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -\pi \\ h \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{(2+\pi^2)^2 + h^2(4+\pi^2)}} \begin{bmatrix} 2h \\ h\pi \\ 2+\pi^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{(1+\pi^2)(2+\pi^2)^2 + h^4(4+\pi^2) + h^2(8+7\pi^2+2\pi^4)}} \begin{bmatrix} \pi(2+h^2+\pi^2) \\ -(2+2h^2+\pi^2) \\ h\pi \end{bmatrix}$$

Далі рівняння елементів не будемо записувати явно. Позначимо точку на кривій, що відповідає $t = \pi$ як $\boldsymbol{f}_0 := \boldsymbol{f}(\pi) = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi h \end{bmatrix}$.

Тоді рівняння дотичної $\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{\tau} t$, рівняння головної нормалі $\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{\nu} t$, рівняння бінормалі $\boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{\beta} t$.

Нормальна площина $\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_0 \rangle = 0$, спрямна площина $\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_0 \rangle = 0$, щільнодотична площина $\langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_0 \rangle = 0$ де $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

# Завдання 2.2.

**Умова.** Розглянемо гвинтову лінію $\gamma$ в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{bmatrix}$$

Доведіть (або спростуйте), що усі головні нормалі гвинтової лінії перетинають координатну вісь $x^3$.

**Доведення.** Рівняння головної нормалі має вигляд:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t) + \frac{\left[[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] \times \dot{\boldsymbol{f}}\right]}{\left\|\left[[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] \times \dot{\boldsymbol{f}}\right]\right\|_2} \tau$$

Знаходимо ненормалізований вектор головної нормалі:

$$\boldsymbol{v} = \left[[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] \times \dot{\boldsymbol{f}}\right] = \begin{bmatrix} -r(h^2+r^2)\cos t \\ -r(h^2+r^2)\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Його довжина:

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = r(h^2 + r^2)$$

Вектор головної нормалі:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отже рівняння головних нормалей мають вид:

$$\ell_\nu : \boldsymbol{g}(t, \tau) = \begin{bmatrix} (r - \tau)\cos t \\ (r - \tau)\sin t \\ ht \end{bmatrix}$$

Пряма перетинає вісь $x^3$ коли ми можемо одночасно занулити перші 2 координати. Ми це дійсно можемо зробити обравши параметр $\tau = r$, який насправді навіть не залежить від параметра $t$. Отже дійсно всі головні нормалі перетинають вісь $x^3$ в точці $(0, 0, ht)$ для довільного $t \in \mathbb{R}$.

# Завдання 3.1.

**Умова.** Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$ проходять через фіксовану точку $O$, то крива $\gamma$ є прямою.

**Розв'язок.** Нехай ми маємо криву $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$. Тоді рівняння дотичних можемо задати як функцію від двох параметрів:

$$\boldsymbol{\ell}(t, \tau) = \boldsymbol{f}(t) + \dot{\boldsymbol{f}}(t)\tau$$

Якщо усі дотичні прямі проходять через деяку точку, що має координати $\boldsymbol{r}_0$, то знайдеться така функція $\tau(t)$, що:

$$\boldsymbol{\ell}(t, \tau(t)) \equiv \boldsymbol{r}_0$$

Це твердження по суті є еквівалентним тому, що для будь якої точки $t \in I$ ми знайдемо таке значення $\tau$, то $\boldsymbol{\ell}(t, \tau) = \boldsymbol{r}_O$. Отже, маємо:

$$\boldsymbol{f}(t) + \dot{\boldsymbol{f}}(t)\tau(t) = \boldsymbol{r}_0$$

Якщо позначимо $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{f}(t)$, то отримаємо рівняння:

$$-\dot{\boldsymbol{\varphi}}\tau = \boldsymbol{\varphi}$$

Розглянемо його покомпонентно:

$$-\dot{\varphi}_j\tau = \varphi_j \to \frac{d\varphi_j}{\varphi_j} = -\frac{dt}{\tau(t)} \to \varphi_j(t) = u_j \exp\left(-\int \frac{dt}{\tau(t)}\right)$$

Помітимо, що експонента з інтегралом є іншою функцією від $t$, нехай $\psi(t)$. В такому разі маємо:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{u}\psi(t)$$

І тоді наша функція має вид:

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{u}\psi(t)$$

Що є рівнянням прямої з напрямним вектором $\boldsymbol{u}$, що проходить через $O$.

# Завдання 3.2.

**Умова.** Доведіть (або спростуйте), що якщо усі дотичні прямі регулярної параметрично заданої кривої $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$ є паралельними деякій фіксованій прямій, то крива $\gamma$ є прямою.

**Розв'язок.** Нехай ми маємо криву $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}^n$. Тоді наша умова по суті означає:

$$\forall t \in I : \dot{\boldsymbol{f}}(t) \parallel \boldsymbol{e},$$

де $\boldsymbol{e}$ напрямний вектор заданної прямої. Цю умову можна ще записати як:

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{e},$$

де $\varphi(t)$ деяка функція. В такому разі, проінтегрувавши обидва вирази, маємо

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{e}\int \varphi(t)dt$$

Позначимо $\int \varphi(t)dt = \phi(t)$, то отримаємо

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \phi(t)\boldsymbol{e}$$

Що є рівнянням прямої.

# Завдання 3.3.

**Умова.** Доведіть (або спростуйте), що якщо усі нормальні прямі регулярної параметрично заданої кривої $\gamma$ в $\mathbb{R}^2$ проходять через фіксовану точку, то крива $\gamma$ є колом.

**Розв'язок.** Нехай ми маємо функцію $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$. Тоді напрямний вектор дотичної має вид $\dot{\boldsymbol{f}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \end{bmatrix}$. В такому разі вектор нормалі можна задати як $\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{bmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{bmatrix}$. Це означає, що нормальні прямі ми можемо задати у виді:

$$\boldsymbol{n}(t,\tau) = \boldsymbol{f}(t) + \tau\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) - \tau\dot{f}_2(t) \\ f_2(t) + \tau\dot{f}_1(t) \end{bmatrix}$$

Якщо для будь-якого параметра $t$ знайдеться значення $\tau$, що наша функція $\boldsymbol{n}(t,\tau) = \boldsymbol{a}$, то цю умову ми можемо записати як:

$$\boldsymbol{n}(t,\tau(t)) \equiv \boldsymbol{a}$$

Інакше кажучи,

$$\begin{cases} f_1(t) - \tau(t)\dot{f}_2(t) = a_1 \\ f_2(t) + \tau(t)\dot{f}_1(t) = a_2 \end{cases}$$

Маємо систему диференціальних рівнянь. Помітимо, що

$$\begin{cases} \tau(t)\dot{f}_2(t) = f_1(t) - a_1 \\ \tau(t)\dot{f}_1(t) = a_2 - f_2(t) \end{cases}$$

Зробимо заміну $\phi_1(t) = f_1(t) - a_1, \phi_2(t) = a_2 - f_2(t)$, тоді:

$$\begin{cases} -\tau(t)\dot{\phi}_2(t) = \phi_1(t) \\ \tau(t)\dot{\phi}_1(t) = \phi_2(t) \end{cases}$$

Ділимо одне рівняння на інше, отримаємо:

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2} \to \phi_2 d\phi_2 = -\phi_1 d\phi_1 \to \phi_1^2 + \phi_2^2 \equiv R^2$$

Підставимо цей результат у $\phi_2(t) = \tau(t)\dot{\phi}_1(t)$:

$$R\sqrt{1 - \frac{\phi_1^2}{R^2}} = \tau(t)\frac{d\phi_1}{dt} \to \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - \frac{\phi_1}{R}}} = R \cdot \frac{dt}{\tau(t)}$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\phi_1(t) = R\sin\left(\theta + \int \frac{dt}{\tau(t)}\right)$$

Якщо позначити $\zeta(t) = \theta + \int \frac{dt}{\tau(t)}$, то отримуємо:

$$\phi_1(t) = R\sin\zeta(t) \to \phi_2(t) = R\cos\zeta(t)$$

Повертаючись до $f_1(t), f_2(t)$:

$$f_1(t) = a_1 + R\sin\zeta(t),\ \ f_2(t) = a_2 - R\cos\zeta(t)$$

Тому остаточно наша крива має рівняння:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + R\begin{bmatrix} \sin\zeta(t) \\ \cos\zeta(t) \end{bmatrix}$$

Що є рівнянням кола.