Homework #11

Завданя 1.

Звести до канонічного рівняння криву

$$11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у "матрично-векторному" виді:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}\rangle + \gamma = 0$$

Де:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix},\ \gamma = 1$$

Запишемо характеристичний многочлен матриці $\mathcal{A}$:

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}\mathcal{A})\lambda + \det \mathcal{A} = \lambda^2 - 7\lambda - 144 = (\lambda - 16)(\lambda + 9)$$

Отже власні числа матриці: $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = -9$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_i$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$$

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$$

В якості власних векторів візьмемо наступні вектора: $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Побудуємо матрицю переходу Q:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Паралельний перенос $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ визначається за координатами $p_j = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_j \rangle}{\lambda_j}$:

$$p_1 = \frac{\langle \{-10, -4\}, \{2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\} \rangle}{16} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$p_2 = \frac{\langle \{-10, -4\}, \{1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\} \rangle}{-9} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Отже $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Вільний член рівняння $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2$:

$$\widetilde{\gamma} = 1 - 16 \cdot (1/5) + 9 \cdot (4/5) = 5$$

Отже після перетворення маємо рівняння:

$$16\widetilde{x}^2 - 9\widetilde{y}^2 + 5 = 0 \implies 16\widetilde{x}^2 - 9\widetilde{y}^2 = -5$$

Щоб отримати канонічне рівняння, нам потрібно змінити координати $\widetilde{x}, \widetilde{y}$, тобто перейти до нових координат $\hat{x}, \hat{y}$ так, щоб $\hat{x}^2 = \widetilde{y}^2, \hat{y}^2 = \widetilde{x}^2$. Це можна зробити поворотом на $\pi/2$, тобто матрицею переходу $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді дійсно $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}\hat{\mathbf{v}}$ або $\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$, звідки $\hat{x} = \widetilde{y}, \hat{y} = -\widetilde{x}$. Тоді:

$$9\hat{x}^2 - 16\hat{y}^2 = 5 \implies \frac{\hat{x}^2}{5/9} - \frac{\hat{y}^2}{5/16} = 1$$

Що є рівнянням гіперболи з півосями $\alpha = \sqrt{5}/3, \beta = \sqrt{5}/4$. Зауважимо, що ми застосували наступні перетворення:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = Q^T\mathbf{v} + \mathbf{p},\ \widetilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}\hat{\mathbf{v}} \implies \hat{\mathbf{v}} = \mathcal{R}^T\widetilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}^T(Q^T\mathbf{v} + \mathbf{p})$$

Тобто в результаті маємо перетворення $\hat{\mathbf{v}} = \mathcal{B}\mathbf{v} + \mathbf{s}$ де $\mathcal{B} = \mathcal{R}^T Q^T, \mathbf{s} = \mathcal{R}^T\mathbf{p}$:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже маємо перетворення $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ звідки:

$$\hat{x} = \frac{-x + 2y + 2}{\sqrt{5}}, \ \hat{y} = \frac{-2x - y + 1}{\sqrt{5}}$$

Центр знаходиться в точці $(0, -1)$.

Завданя 2.

Звести до канонічного виду

$$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$$

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & 30 \\ 30 & 32 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -30 \end{pmatrix}, \ \gamma = 7$$

Знайдемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 39\lambda - 676 = (\lambda + 13)(\lambda - 52)$.

Отже маємо власні числа $\lambda_1 = 52, \lambda_2 = -13$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_j$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} -45 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\}$$

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 45 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$$

Отже в якості власних векторів візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Отже матриця Q має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор переносу $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$. Тут координати мають вид $p_j = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_j \rangle}{\lambda_j}$. Отже:

$$p_1 = \frac{\langle \{-7, -30\}, \{2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}\} \rangle}{52} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$p_2 = \frac{\langle \{-7, -30\}, \{-3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}\} \rangle}{-13} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Вільний член рівняння: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2 = 7 - 52 \cdot (4/13) + 13 \cdot (9/13) = 0$. Отже, маємо рівняння:

$$52\widetilde{x}^2 - 13\widetilde{y}^2 = 0 \to 4\widetilde{x}^2 - \widetilde{y}^2 = 0$$

Отже маємо пару прямих $2\widetilde{x} - \widetilde{y} = 0$ та $2\widetilde{x} + \widetilde{y} = 0$. Перетворення координат має вигляд:

$$\widetilde{\mathbf{v}} = Q^T \mathbf{v} + \mathbf{p}$$

Звідси маємо $\widetilde{x} = \frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}}, \tilde{y} = \frac{-3x+2y+3}{\sqrt{13}}$. Запишемо рівняння прямої в координатах (x, y). З першого рівняння у $(\widetilde{x}, \tilde{y})$ маємо $2\widetilde{x} = \tilde{y}$. Отже $2 \cdot \frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}} = \frac{-3x+2y+3}{\sqrt{13}}$ звідки отримуємо $7x + 4y - 7 = 0$. Аналогічно для $\tilde{y} = -2\widetilde{x}$ отримаємо $x + 8y - 1 = 0$.

Завданя 3.

Звести до канонічного виду

$$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$$

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \gamma = 29$$

Знайдемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 30\lambda + 200 = (\lambda - 20)(\lambda - 10)$.

Отже маємо власні числа $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = 10$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_j$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 3y = 0\}$$

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 0\}$$

Отже в якості власних векторів візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Отже матриця Q має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор переносу $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$. Тут координати мають вид $p_j = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_j \rangle}{\lambda_j}$. Отже:

$$p_1 = \frac{\langle \{19, 3\}, \{3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}\} \rangle}{20} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$p_2 = \frac{\langle \{19, 3\}, \{-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}\} \rangle}{10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Вільний член рівняння: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2 = 29 - 20 \cdot (9/10) - 10 \cdot (1/10) = 10$. Отже, маємо рівняння:

$$20\widetilde{x}^2 + 10\widetilde{y}^2 + 10 = 0 \to 2\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + 1 = 0$$

Оскільки $2\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 \geq 0$, то $2\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + 1 \geq 1$, тобто перед нами пуста множина $\emptyset$.

Завданя 4.

Звести до канонічного виду

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$$

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \gamma = 20$$

Знайдемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 6)(\lambda - 4)$.

Отже маємо власні числа $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_j$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

Отже в якості власних векторів візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже матриця Q має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор переносу $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$. Тут координати мають вид $p_j = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_j \rangle}{\lambda_j}$. Отже:

$$p_1 = \frac{\langle \{-2, 10\}, \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\} \rangle}{6} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$p_2 = \frac{\langle \{-2, 10\}, \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\} \rangle}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Вільний член рівняння: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_1 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2 = 20 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 0$. Отже, маємо рівняння:

$$6\widetilde{x}^2 + 4\widetilde{y}^2 = 0 \to 3\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{y}^2 = 0$$

Маємо точку $(0, 0)$. Отже $\widetilde{\mathbf{v}} = \theta$. Отже $\widetilde{\mathbf{v}} = Q^T \mathbf{v} + \mathbf{p} \implies \mathbf{v} = -Q\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ — уся множина нашого рівняння.

Завданя 5.

Звести до канонічного виду

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8x + 14y + 3 = 0$$

Розв'язок. Запишемо початкові умови:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \gamma = 3$$

Знайдемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda = \lambda(\lambda - 13)$.

Отже маємо власні числа $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 13$. Знайдемо власні вектори $\mathbf{q}_j$:

$$\mathbf{q}_1 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$$

$$\mathbf{q}_2 : \mathrm{Null}(\mathcal{A} - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \{\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$$

Отже в якості власних векторів візьмемо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Отже матриця Q має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо вектор переносу $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$. Тут координати мають вид $p_1 = 0, p_2 = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_2 \rangle}{\lambda_2}$. Отже:

$$p_2 = \frac{\langle \{4, 7\}, \{3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}\} \rangle}{13} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Вільний член рівняння: $\widetilde{\gamma} = \gamma - \lambda_2 p_2^2 = 3 - 13 \cdot (4/13) = -1$. Також знайдемо значення $2\langle \mathbf{b}, \mathbf{q}_1 \rangle = 2\sqrt{13}$.

Отже, маємо рівняння:

$$13\widetilde{y}^2 + 2\sqrt{13}\widetilde{x} - 1 = 13\widetilde{y}^2 - 2\sqrt{13}\left(-\widetilde{x} + \frac{1}{2\sqrt{13}}\right) = 0$$

Зробимо перетворення координат $\hat{y} = \widetilde{y}, \hat{x} = -\widetilde{x} + \frac{1}{2\sqrt{13}}$. Звідси:

$$13\hat{y} = 2\sqrt{13}\hat{x}^2 \to \hat{y} = \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{x}^2$$

Тобто маємо параболу з фокальним параметром $p = 1/\sqrt{13}$. Перетворення до координат (x, y) пропущу, бо дуже об'ємно :(