# Контрольна робота #1 з курсу “Диференціальні рівняння”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

6 листопада 2023 р.

**Варіант 5**

## Завдання 1.

**Умова.** Розв'язати рівняння за допомогою степеневих рядів

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

**Розв'язок.** Отже, нехай $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. В такому разі

$$xy' = x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k$$

І для другої похідної маємо:

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k$$

Підставляємо це у наше початкове рівняння:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Заносимо все під знак суми:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1)c_{k+2} - kc_k + 2c_k\right) x^k = 0$$

Якщо сума зліва тотожньо 0, то усі коефіцієнти при $x^k$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}^+$ мають бути нулевими. Таким чином, отримуємо рекурентне рівняння:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = (k-2)c_k \implies c_{k+2} = \frac{k-2}{(k+1)(k+2)}c_k$$

Виведемо формулу для розрахунку $c_k$, якщо маємо $c_0$ та $c_1$. Отже:

$$c_2 = -c_0,\ c_4 = 0,\ c_6 = 0, \dots$$

Бачимо, що $c_{2k} = 0\, \forall k > 0$. Вже сильно спросили задачу.

Розглянемо тепер непарні коефіцієнти. Маємо:

$$c_3 = -\frac{1}{6}c_1,\ c_5 = \frac{1}{20}c_3 = -\frac{1}{120}c_1, \dots$$

Написати явну формулу не вийде, але можна зазначити, що

$$c_{2k+1} = c_1 \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-3}{2j(2j+1)}$$

Таким чином,

$$y(x) = c_0(1-x^2) + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-3}{2j(2j+1)} x^{2k+1}$$

**Відповідь.** $y(x) = c_0(1-x^2) + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-3}{2j(2j+1)} x^{2k+1}$.

# Завдання 2.

**Умова.** Розв'язати рівняння за допомогою степеневих рядів

$$xy'' + \left(\frac{4}{5} - x\right) y' + y = 0$$

**Розв'язок.** Нехай $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. В такому разі $\frac{4}{5}y' = \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k$, аналогічно минулій задачі $xy' = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k$, і нарешті

$$xy'' = x\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_{k+1}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)c_{k+1}x^k$$

Тому комбінуючи усе, маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)c_{k+1}x^k + \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Отже:

$$k(k+1)c_{k+1} + \frac{4}{5}(k+1)c_{k+1} - kc_k + c_k = 0$$

Звідки отримуємо:

$$c_k(k-1) = (k+1)\left(k + \frac{4}{5}\right)c_{k+1} \implies c_{k+1} = \frac{k-1}{(k+1)\left(k+\frac{4}{5}\right)}c_k$$

Оскільки в такому разі $c_2 = 0$, то і $c_j = 0$ для всіх $j \geq 2$. Також, оскільки $c_1 = -\frac{5}{4}c_0$, то якщо підставимо $c_0 = -\frac{4}{5}$, то маємо частковий розв'язок: $y_1(x) = x - \frac{4}{5}$.

Тепер використовуємо формулу Ліувіля, для цього перепишемо початкове рівняння у вигляді

$$y'' + \left(\frac{4}{5x} - 1\right) y' + \frac{y}{x} = 0$$

Якщо позначити $a(x) := \frac{4}{5x} - 1$, то другий розв'язок $y_2$ через $y_1$ можна знайти як:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int a(x)dx\right)}{y_1^2}dx$$

Отже, спочатку знаходимо інтеграл під експонентою:

$$\int a(x)dx = \int \left(\frac{4}{5x} - 1\right) dx = \frac{4}{5} \ln x - x + C$$

Отже $\exp\left(-\int a(x)dx\right) = \exp(-4\ln x/5 + x + C) = Cx^{-4/5}e^x$. Тому:

$$y_2(x) = C\left(x - \frac{4}{5}\right) \int \frac{x^{-4/5}e^x}{\left(x - \frac{4}{5}\right)^2} dx$$

Отже, загальний розв'язок можна записати у вигляді:

$$y = \left(x - \frac{4}{5}\right)\left(C_1 + C_2 \int \frac{x^{-4/5}e^x}{\left(x - \frac{4}{5}\right)^2} dx\right)$$

# Завдання 3.

**Умова.** Знайти загальний розв'язок та розв'язати задачі Коші:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$$

Умови Коші:

1. $\begin{cases} y + 2 = 0 \\ z = x - x^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = 2x \\ z + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

**Розв'язок.** Запишемо характеристичну систему:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}$$

З першої рівності дістаємо перший інтеграл $C_1 = \frac{y}{x}$.

Далі підставляємо у $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z-x^2-y^2}$, врахувавши $y = C_1 x$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - (1 + C_1^2)x^2}$$

Далі треба розв'язати це рівняння. Маємо:

$$zdx - (1 + C_1^2)x^2 dx = xdz \implies (1 + C_1^2)dx = \frac{zdx - xdz}{x^2}$$

Помітимо, що $d\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{xdz - zdx}{x^2}$, тому

$$-d\left(\frac{z}{x}\right) = (1 + C_1^2)dx \implies \frac{z}{x} = -(1 + C_1^2)x + C_2$$

Отже, ще один перший інтеграл $\frac{z}{x} + (1 + \frac{y^2}{x^2})x$. Тому розв'язок в загальному випадку:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)x\right) = 0$$

Тепер знайдемо розв'язки задачі Коші.

*Пункт 1.* Перші інтеграли:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{y}{x} \\ C_2 = \frac{z}{x} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)x \end{cases}$$

Підставляємо $y = -2, z = x - x^2$:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-2}{x} \\ C_2 = \frac{x - x^2}{x} + x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \end{cases}$$

Або, якщо простимо:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{2}{x} \\ C_2 = 1 + \frac{4}{x} \end{cases}$$

Звідси $C_2 = 1 - 2C_1$. Далі підставляємо вирази для $C_1, C_2$:

$$\frac{z}{x} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)x = 1 - \frac{2y}{x}$$

І далі множимо обидві частини на $x$:

$$z + x^2 + y^2 = x - 2y$$

*Пункт 2.* З умов маємо $y = 2x, z = -5x^2$. Підставляємо у перші інтеграли:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -5x + 5x = 0 \end{cases}$$

Отже, маємо нескінченну кількість розв'язків, оскільки рівняння $\Phi(2, 0) = 0$ має безліч розв'язків.

Наприклад, $\Phi(C_1, C_2) = C_1 + C_2 - 2$ задає $z = 2x - 1 - y^2 - y$.

**Відповідь.** $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)x\right) = 0$. Розв'язок задачі Коші $z + x^2 + y^2 = x - 2y$ для першого випадку, для другого маємо нескінченну кількість розв'язків.