6️⃣

Homework #6

Завдання 755(с)

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2$$

Маємо многочлен від 3 змінних, а отже ми можемо його розкласти на симетричні многочлени

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\ \sigma_3 = x_1x_2x_3$$

Старший член — це x_1^4. Отже, маємо наступну таблицю:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	Product
4	0	0	4	0	0	σ_1^4
3	1	0	2	1	0	$\sigma_1^2\sigma_2$
2	2	0	0	2	0	σ_2^2
2	1	1	1	0	1	$\sigma_1\sigma_3$

Отже маємо розкладання

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4 + \alpha\sigma_1^2\sigma_2 + \beta\sigma_2^2 + \gamma\sigma_1\sigma_3,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Знайдемо коефіцієнти α, β, γ. Зручно спочатку занулити σ_1. Для цього оберемо трійку $(1, -1, 0)$. В такому разі $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = 0$. Тоді, з одного боку

$$P(1, -1, 0) = \beta\sigma_2^2 = \beta$$

З іншого боку $P(1, -1, 0) = 0$, тому $\beta = 0$.

Отже маємо $P(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4 + \alpha\sigma_1^2\sigma_2 + \gamma\sigma_1\sigma_3$. Тепер занулимо σ_3. Нехай $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$. В такому випадку $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1$

$$P(1, 1, 0) = 16 + 4\alpha = 0 \to \alpha = -4$$

Таким чином $P(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + \gamma\sigma_1\sigma_3$. Залишилось занулити σ_2. Нехай $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, -1)$. Тоді $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -4$. Отже

$$P(2,2,-1) = 81 - 12\gamma = -15 \to 12\gamma = 96 \to \gamma = 8$$

Отже $P(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$.

Завдання 756(b)

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$$

Старший член $x_1^3x_2x_3x_4$. Маємо 4 змінні, тому нам потрібно виразити P через

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,\ \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$$

Маємо наступну таблицю

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	Product
3	1	1	1	2	0	0	1	$\sigma_1^2\sigma_4$
2	2	2	0	0	0	2	0	σ_3^2
2	2	1	1	0	1	0	1	$\sigma_2\sigma_4$

Отже, маємо розкадання

$$P = \sigma_1^2\sigma_4 + \alpha\sigma_3^2 + \beta\sigma_2\sigma_4$$

Насправді оскільки маємо лише 2 коефіцієнти, тому можна не придумувати хитрі схеми по "зануленню" σ_j. Просто відставимо якісь 2 четвірки. Наприклад, $(1,1,1,0)$ та $(1,1,1,1)$. Тому маємо для першої четвірки

$$\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 3,\ \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0$$

Отже $P(1,1,1,0) = \alpha = 1$, звідки $P = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 + \beta\sigma_2\sigma_4$. З другої четвірки маємо

$$\sigma_1 = 4,\ \sigma_2 = 6,\ \sigma_3 = 4,\ \sigma_4 = 1$$

Отже $P(1,1,1,1) = 16 + 16 + 6\beta = 8 \implies \beta = -4$. Остаточно

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$$