Домашня робота #2 з курсу "Моделювання на *Python*"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

25 лютого 2024 р.

Умова

Розглядається задача випадкового блукання: нехай ми стоїмо у точці $x = 0$ і на кожному кроці з ймовірністю $\frac{1}{2}$ рухаємось праворуч, а з ймовірністю $\frac{1}{2}$ – ліворуч. Завдання, дослідити:

- Частку кроків, коли x координата додатня.
- Кількість змін знаку x координати.

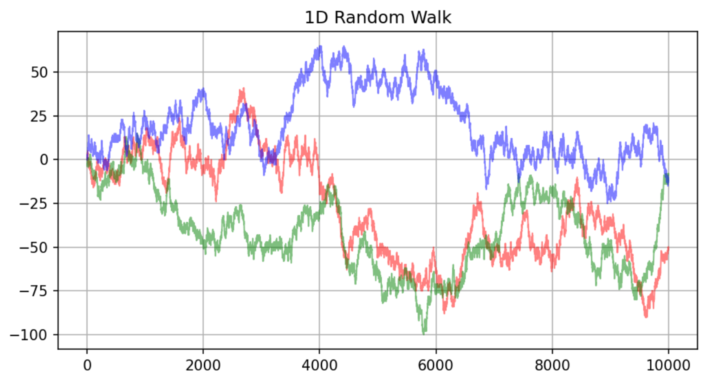

Рис. 1: Процес випадкового блукання

1 Частка кроків з додатною координатою

Умова. Проведіть експеримент для знаходження часу, коли координата є додатною. Що вони означають у термінах випадкових шляхів? Спробуйте розділити відрізок $[0, 1]$ на $20, 30$ частин. Що можна сказати тепер?

Відповідь. Трошки формалізуємо постановку задачі. Нехай X_i – випадкова величина, що позначає x координату на $i^{\text{ому}}$ кроці (при цьому вважаємо, що $X_0 = 0$).

Якщо випадкове блукання відбувається за N кроків, то по суті ми маємо набір випадкових величин $\{X_i\}_{i=0}^{N}$.

Коли ми знаходимо середню частку перебування на додатній координаті, то ми знаходимо наступну випадкову величину:

$$\nu_N := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \mathbb{1}[X_i \geq 0]. \tag{1}$$

Ця величина розподілена по деякому закону, тобто існують значення:

$$\mathbb{P}\left(\nu_N = \frac{1}{n}\right),\ n \in \{1, \ldots, N\} \tag{2}$$

Гістограма, що ми будуємо, по суті і є наближеним розподілом. Тобто, нехай ми проводимо m експериментів, на кожному робимо N кроків, а далі на основі цих m експериментів ми ділимо відрізок на k частин і будуємо гістограму.

Нехай ми отримали набір значень $\{f_i\}_{i=0}^{k-1}$, де f_i – частота знаходження на додатній x координаті від $\frac{i}{k}$ до $\frac{i+1}{k}$ частку кроків. Гіпотеза наступна:

$$\lim_{m\to\infty} f_i = \mathbb{P}\left(\frac{i}{k} \leq \nu_N \leq \frac{i+1}{k}\right),\ i \in \{0, \ldots, k-1\}, \tag{3}$$

тобто якщо зробити нескінченно багато експериментів, то f_i мають давати приблизний розподіл $\mathbb{P}\left(\nu_N = \frac{1}{n}\right)$.

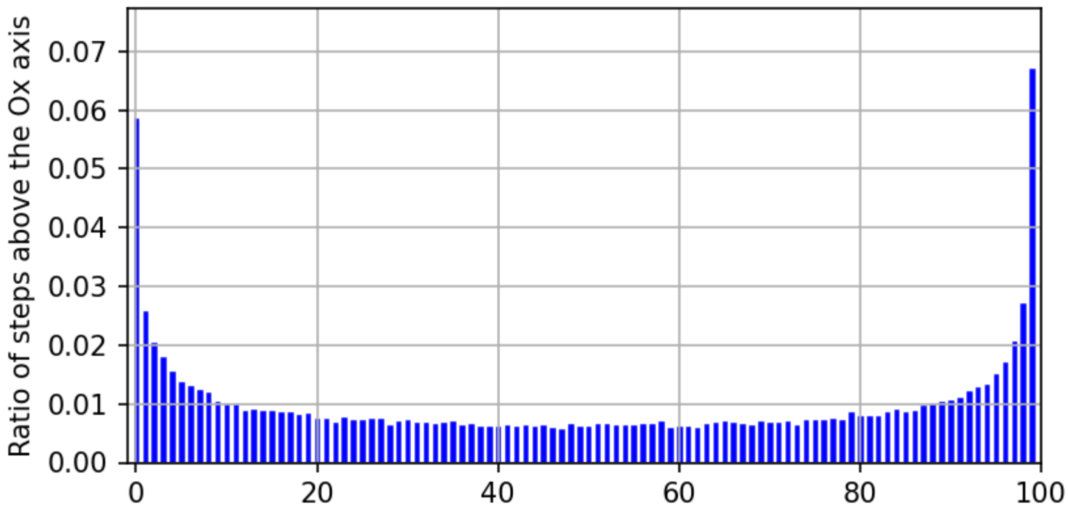

Рис. 2: Гістограма розподілу частоти знаходження на додатній координаті

Якщо провести експеримент для $N = 10000, k = 100, m = 10000$, то отримаємо графік, що зображено на рис. 2. Можна побачити цікаву особливість – майже уся густина розподілу знаходиться по краях малюнку. Тобто, або майже увесь час або ми знаходимось на додатній координаті, або весь час на від'ємній.

Звідси, можна сформулювати наступну гіпотезу:

Гіпотеза 1. Гранично, розподіл ν_N записується так:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\nu_N = \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 1 \\ \frac{1}{2}, & n = N \\ 0, & n \neq 1 \wedge n \neq N \end{cases} \tag{4}$$

Це було б достатньо логічно, бо в такому разі математичне сподівання:

$$\mathbb{E}[\nu_N] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{P}(\nu_N = 1) + \mathbb{P}\left(\nu_N = \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}, \tag{5}$$

тобто ми приблизно половину часу знаходимось на додатній координаті.

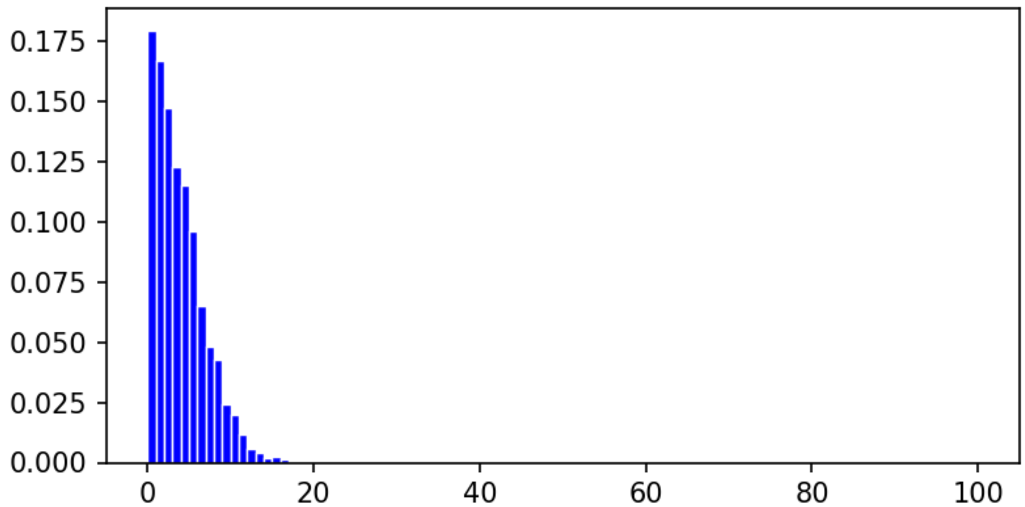

Рис. 3: Гістограма розподілу частоти зміни знаку координати для відрізку $[0.0, 0.1]$.

2 Частка змін лідерства

Тепер розглянемо задачу, де ми шукаємо частоту події "зміна знаку координати".

Нехай після експерименту на N кроках ми отримали набір x координат $\{x_i\}_{i=0}^N$. Тоді, будемо вважати, що на $j^{\text{ому}}$ кроці відбувалась зміна лідерства якщо:

$$x_j = 0 \wedge x_{j-1}x_{j+1} < 0, \text{ для } j \in \{1, \dots, N-1\}. \tag{6}$$

Тобто, на $j^{\text{ому}}$ кроці ми повернулись у початок координат, а на $(j+1)^{\text{ому}}$ кроці ми змінили знак відносно $(j-1)^{\text{ого}}$ кроку. Формально, введемо набір випадкових величин $\{Y_j\}_{j=1}^{N-1}$, де

$$Y_j := \mathbb{1}\left[X_j = 0 \wedge X_{j-1}X_{j+1} < 0\right] \tag{7}$$

і будемо розглядати $\xi_N := \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} Y_j$. Якщо побудувати гістограму для ξ_N на відрізку $[0.0, 0.1]$, то отримаємо результат на рис. 3.

Тут вже видна наступна особливість: майже завжди в експерименті $\hat{\xi}_N < 0.02$, тобто густина майже повністю знаходиться біля 0. Також, якщо знайти середнє значення усіх відношень кількостей змін лідерства до N, то вийде значення доволі близьке до 0. Звідси, можна сформулювати наступні дві гіпотези:

Гіпотеза 2. Гранично,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[\xi_N = \alpha] = \mathbb{1}[\alpha = 0]. \tag{8}$$

Гіпотеза 3. $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[\xi_N] = 0$.