Домашня робота з курсу “Теорія Ймовірності”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Дано таблицю розподілу двовимірного випадкового вектору $[\xi, \eta]^\top$. Перевірити, чи є незалежними ξ та η.

–	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
$\xi = 0$	0.1	0.1	0.2
$\xi = 1$	0.1	0.1	0.1
$\xi = 2$	0.2	0.1	0.0

Розв’зок. Покажемо, що $p(\xi = 0, \eta = 0) \neq p(\xi = 0)p(\eta = 0)$. Помітимо, що:

$$p(\xi = 0) = p(\xi = 0, \eta = 0) + p(\xi = 0, \eta = 1) + p(\xi = 0, \eta = 2) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$$

$$p(\eta = 0) = p(\xi = 0, \eta = 0) + p(\xi = 1, \eta = 0) + (\xi = 2, \eta = 0) = 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4$$

Проте, добре видно, що $p(\xi = 0, \eta = 0) = 0.1 \neq 0.4 \times 0.4 = 0.16$. Отже, η та ξ не є незалежними.

Завдання 2.

Умова. Випадкові величини ξ, η незалежні, причому випадкова величина ξ приймає кожне значення $0, 1, 2$ з ймовірностями $0.2, 0.1, 0.7$, а випадкова величина η приймає значення $-1, 0, 1$ з ймовірностями $0.3, 0.3, 0.4$, відповідно. Побудувати таблицю розподілу випадкового вектор $[\xi, \eta]^\top$. Знайти розподіл суми $\xi + \eta$.

Розв'язок. Оскільки випадкові величини незалежні, $p(\xi = \alpha, \eta = \beta) = p(\xi = \alpha)p(\eta = \beta)$ за означенням. Таким чином, розподіл $[\xi, \eta]^\top$ має наступний вигляд:

–	$\eta = -1$	$\eta = 0$	$\eta = 1$
$\xi = 0$	0.06	0.06	0.08
$\xi = 1$	0.03	0.03	0.04
$\xi = 2$	0.21	0.21	0.28

Знайдемо розподіл $\xi + \eta$. Якщо перебрати усі суми, то множина можливих значень $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Скористаємось тим фактом, що

$$p(\xi + \eta = \zeta) = \sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\zeta} p(\xi = \alpha, \eta = \beta)$$

Таким чином,

$$p(\xi + \eta = -1) = p(\xi = 0, \eta = -1) = 0.06$$

$$p(\xi + \eta = 0) = p(\xi = 0, \eta = 0) + p(\xi = 1, \eta = -1) = 0.09$$

$$p(\xi + \eta = 1) = p(\xi = 0, \eta = 1) + p(\xi = 1, \eta = 0) + p(\xi = 2, \eta = -1) = 0.32$$

$$p(\xi + \eta = 2) = p(\xi = 1, \eta = 1) + p(\xi = 2, \eta = 0) = 0.25$$

$$p(\xi + \eta = 3) = p(\xi = 2, \eta = 1) = 0.28$$

Таким чином, маємо наступний розподіл:

ζ	-1	0	1	2	3
$p(\xi + \eta = \zeta)$	0.06	0.09	0.32	0.25	0.28

Завдання 3.

Умова. Двічі кинуто монету. Нехай ξ – число гербів, які випали при першому кидку, η — число гербів, які випали при двох кидках. Чи є незалежними випадкові величини ξ, η?

Розв'язок. Якщо ξ, η незалежні, то має місце $p(\xi = 0, \eta = 0) = p(\xi = 0)p(\eta = 0)$. Проте, $p(\eta = 0) = p(\xi = 0, \eta = 0)$, оскільки якщо б $\xi = 1$, то і $\eta > 0$. Звідси випливає $p(\xi = 0) = 1$ або $p(\eta = 0) = 0$ – протиріччя. Отже ξ, η є залежними.

Завдання 4.

Умова. З колоди гральних карт вилучають дві карти. Нехай X – число тузів, Y – число карт червоного кольору серед вилучених карт. Чи є незалежними випадкові величини X та Y?

Розв'язок. Всього дві карти можна вибрати C_{36}^2 способами. Розглянемо три ймовірності: $p(X = 0, Y = 0), p(X = 0), p(Y = 0)$.

$p(X = 0)$ відповідає ймовірності не отримати жодного туза. Кількість способів вибрати 2 "не туза" це C_{32}^2, тому ймовірність $p(X = 0) = \frac{C_{32}^2}{C_{36}^2}$.

$p(Y = 0)$ відповідає ймовірності не отримати жодної карти червогого кольору. Аналогічно, $p(Y = 0) = \frac{C_{18}^2}{C_{36}^2}$.

$p(X = 0, Y = 0)$ відповідає ймовірності не отримати жодного туза і жодної карти червогого кольору. Всього тузів 4, а червоних карт 18, проте оскільки два тузи є червоними, то кількість карт, що є ані тузами, ані картами червогого кольору, дорівнює 16. Тому $p(X = 0, Y = 0) = \frac{C_{16}^2}{C_{36}^2}$.

Оскільки $C_{32}^2 C_{18}^2 \neq C_{16}^2$, то і $p(X = 0, Y = 0) \neq p(X = 0)p(Y = 0)$, що означає, що випадкові величини X, Y є залежними.

Завдання 5.

Умова. 2 білі та 3 чорні кулі навмання розкладають по двом ящикам. Нехай ξ – число білих куль у першому ящику, η – номер ящика, в якому лежить більшість чорних куль. Чи є незалежними випадкові величини ξ та η?

Розв'язок. Розглянемо $p(\xi = n, \eta = m)$, $n \in \{0, 1, 2\}, m \in \{1, 2\}$, тобто ймовірність, що у першому ящику буде n білих куль, а у mому ящику буде більшість чорних куль.

Достатньо легко бачити, що $p(\xi = n, \eta = m) = p(\xi = n)p(\eta = m)$. Дійсно, події "у першому ящику n білих куль" (що відповідає $\xi = n$) та "у mому ящику більшість чорних куль" ($\eta = m$) є незалежними, оскільки на те, в якому ящику більшість чорних куль не впливає кількість білих куль у першому ящику і навпаки. Тому випадкові величини також є незалежними.