МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Півень О.Л.*

§ Варіант 5 §

Задача 1: Номер 1

Умова. У кімнаті 10 осіб, кожна з яких має номер від 1 до 10. Навмання вибираються 3 особи. Знайти ймовірність, що людина з більшим номером має номер 6.

Розв'язання.

Введемо ймовірнісний простір. Нехай елементарна подія – це трійка (n_1, n_2, n_3), де n_1, n_2, n_3 попарно різні та $n_1, n_2, n_3 \in \{1, \ldots, 10\}$. Відповідна універсальна множина Ω має вигляд:

$$\Omega = \{(n_1, n_2, n_3) \in \{1, \ldots, 10\}^3 : n_1 \neq n_2 \wedge n_2 \neq n_3 \wedge n_1 \neq n_3\} \tag{1.1}$$

Нехай A – шукана подія, тобто

$$A = \{(n_1, n_2, n_3) \in \Omega : \max\{n_1, n_2, n_3\} = 6\}. \tag{1.2}$$

Скористаємось *класичним визначенням ймовірності*, тобто ймовірність події A знайдемо як:

$$\Pr[A] \triangleq \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1.3}$$

Отже, залишилось порахувати кількість елементів множин A, Ω. Почнемо з Ω. Уявімо 3 клітинки, на які ми ставимо числа від 1 до 10. На першу клітинку можемо поставити одне з 10 значень, на друге вже 9 (оскільки перше вже зайнято), а далі вже 8. Тому $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Тепер подивимось на A. Нехай перша клітинка (n_1) зайнята числом 6, тобто $n_1 = 6$. На позиції n_2, n_3 потрібно знайти кількість способів поставити числа **до** 6, оскільки інакше $\max\{n_1, n_2, n_3\} > 6$. Оскільки залишається 5 чисел від 1 до 5, то в якості n_2 можемо поставити 5 чисел, а на третю клітинку n_3 лише 4 числа. Тобто кількість способів дорівнює $5 \times 4 = 20$. Але! Ми врахували лише випадок $n_1 = 6$. Аналогічно, якщо поставити $n_2 = 6$ або $n_3 = 6$, то кількість способів так само 20 (при цьому елементи між випадками

$n_i = 6$ не будуть повторюватись). Отже загальна кількість елементів $|A| = 3 \times 20 = 60$. Отже, шукана ймовірність:

$$\Pr[A] = \frac{60}{720} = \boxed{\frac{1}{12}} \tag{1.4}$$

Відповідь. $\frac{1}{12}$.

Коментар. При розв'язанні ми вважали, що трійки упорядковані, тобто наприклад (n_1, n_2, n_3) та (n_2, n_1, n_3) є різними варіантами. Якщо враховувати, що ці варіанти однакові, то $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$, а $|A| = C_5^2 = 10$, звідки отримуємо ту саму ймовірність $\Pr[A] = \frac{1}{12}$. Отже, в цій задачі не важлива різниця між тим, чи вважати трійки упорядкованими чи ні.

Задача 2: Номер 2

Умова. Три студенти складають іспит. Імовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0.95, другий – 0.9, третій – 0.85. Визначити ймовірність того, що тільки два студенти складуть іспит.

Розв'язання. Нехай подія $A_i, i \in \{1, 2, 3\}$ полягає в тому, що i студент склав іспит. Логічно вважати ці події незалежними, причому за умовою

$$\Pr[A_1] = 0.95,\ \Pr[A_2] = 0.90,\ \Pr[A_3] = 0.85. \tag{2.1}$$

Запишемо подію E – тільки два студенти складають іспит. На мові множин, таку подію можна записати наступним чином:

$$E = (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3), \tag{2.2}$$

тобто або скали тільки студенти 2 та 3 (відповідно, при цьому студент 1 **не** склав), або склали тільки студенти 1 і 3, або тільки 1 та 2. Наша задача тепер – знайти $\Pr[E]$, що і буде відповіддю на поставлене питання.

По-перше помітимо, що події $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$ та $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ є несумісними (доведення у **додатку 1**). Тому, можна записати (формально, користуючись адитивністю міри):

$$\Pr[E] = \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3] + \Pr[A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3] + \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3] \tag{2.3}$$

Далі помічаємо, що події $\overline{A}_1, A_2, A_3$ є незалежними (аналогічно для випадків, де ми ставимо доповнення до іншої однієї події, дивись **додаток 2**). В такому разі, ми можемо записати:

$$\Pr[\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3] = \Pr[\overline{A}_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3] \tag{2.4}$$

Нарешті помічаємо, що $\Pr[\overline{A}_1] = 1 - \Pr[A_1]$, тому остаточно:

$$\Pr[\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3] = (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3]. \tag{2.5}$$

Аналогічна формула, якщо доповнювати іншу подію. Отже, залишається підставити числа:

$$\Pr[\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3] = (1 - 0.95) \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 0.03825 \tag{2.6}$$

$$\Pr[A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3] = 0.95 \cdot (1 - 0.9) \cdot 0.85 = 0.08075 \tag{2.7}$$

$$\Pr[A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3] = 0.95 \cdot 0.9 \cdot (1 - 0.85) = 0.12825 \tag{2.8}$$

Отже, остаточно отримуємо:

$$\Pr[E] = 0.03825 + 0.08075 + 0.12825 = \boxed{0.24725}. \tag{2.9}$$

Відповідь. Ймовірність шуканої події дорівнює 0.24725.
Додаток 1. Події $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$ та $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$ є несумісними, бо:

$$\begin{aligned}&(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)\\ &= (\overline{A}_1 \cap A_1) \cap (A_2 \cap \overline{A}_2) \cap (A_3 \cap A_3)\\ &= \emptyset \cap \emptyset \cap A_3 = \emptyset \quad \square\end{aligned} \tag{2.10}$$

Аналогічно можна розглянути перетин будь-яких інших 2 подій або перетин усіх трьох.

Додаток 2. Під час розв'язку ми користувались тим фактом, що якщо A_1 та A_2 є незалежними, то і $\overline{A}_1$ та A_2 є незалежними. Дійсно,

$$\begin{aligned}\Pr[\overline{A}_1 \cap A_2] &= \Pr[A_2 \cap (\Omega \setminus A_1)] = \Pr[(A_2 \cap \Omega) \setminus (A_1 \cap A_2)]\\ &= \Pr[A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)] = \Pr[A_2] - \Pr[A_2 \cap A_1 \cap A_2]\\ &= \Pr[A_2] - \Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_2] - \Pr[A_1]\Pr[A_2]\\ &= (1 - \Pr[A_1])\Pr[A_2] = \Pr[\overline{A}_1]\Pr[A_2] \quad \square\end{aligned} \tag{2.11}$$

Наслідок додатку 2. Саме тому під час розв'язку ми могли записати $\Pr[\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3] = \Pr[\overline{A}_1]\Pr[A_2]\Pr[A_3]$. Дійсно, якщо позначимо $B := A_2 \cap A_3$, то оскільки A_1 та B незалежні, то $\overline{A}_1$ та Bтеж незалежні і тому $\Pr[\overline{A}_1 \cap B] = \Pr[\overline{A}_1]\Pr[B] = \Pr[\overline{A}_1]\Pr[A_2]\Pr[A_3]$.

Задача 3: Номер 3

Умова. На відрізок $[-2, 2]$ навмання кидають пару точок. Нехай x – координати однієї точки, y – іншої. Знайти ймовірність того, що $(y - 2x)(y + 2x) \geq 0$.

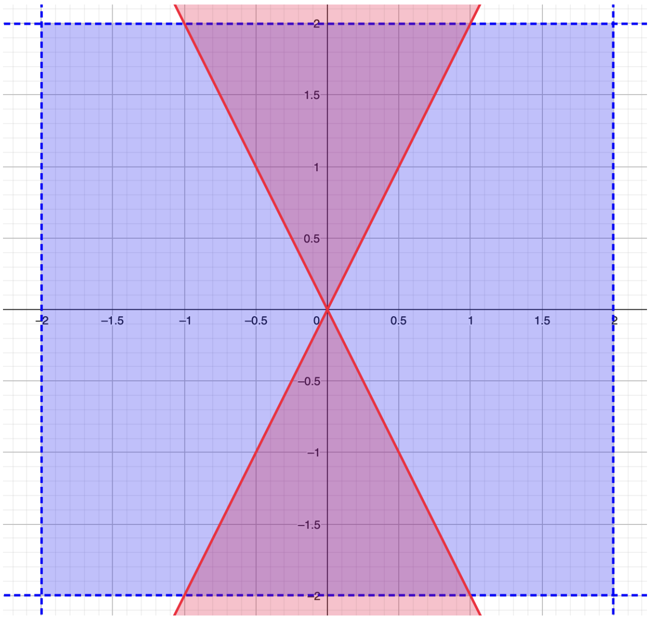

Рис. 1: Квадрат $\Omega = [-2,2]\times[-2,2]$, зображений синім кольором та область $(y-2x)(y+2x) \geq 0$, помічена червоним кольором.

Розв'язання. У якості універсальної множини маємо $\Omega = [-2,2]\times[-2,2]$. Лебігова міра цієї множини, очевидно, $\lambda(\Omega) = 4\times 4 = 16$.

Нехай подія E полягає у тому, що $(Y-2X)(Y+2X) \geq 0$, де X, Y – величини (насправді випадкові з розподілу $\mathcal{U}[-2,2]$), взяті навмання з відрізку $[-2,2]$. Тобто, формально:

$$E = \{(x,y) \in [-2,2]^2 : (y-2x)(y+2x) \geq 0\} \tag{3.1}$$

В такому разі, користуючись геометричним означенням ймовірності, нам потрібно знайти:

$$\Pr[E] = \frac{\lambda(E)}{\lambda(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Оскільки ми вже знаємо, що $\lambda(\Omega) = 16$, то залишилось знайти $\lambda(E)$.

Отже, як саме її знайти? По-перше помітимо, що геометрично, рівняння

$$(y-2x)(y+2x) = 0 \tag{3.3}$$

задає на $\mathbb{R}^2$ пару прямих $y = 2x$ та $y = -2x$. Тому, $(y-2x)(y+2x) \geq 0$ відповідає деякій частині площини, що розділяється цими прямими: це або область "між" прямими, або "за" прямими. В нашому випадку – це область "між" прямими (для деталей, дивіться Рис. 1).

Також, з малюнку одразу видно, що обидві прямі перетинають верхню і нижню сторони квадрату $\Omega = [-2,2]\times[-2,2]$ (це звичайно можна було вивести і аналітично), тобто сторони, що лежать на прямих $y = \pm 2$. Тоді відповідні x координати мають вигляд $x = \pm 1$. Отже, бачимо, що область E – це два рівнобічних трикутника з висотою 2 (сторона квадрата) і базою 2.

Тому площа кожного з трикутників $\frac{2\times 2}{2} = 2$, а отже сумарна площа $\lambda(E) = 2 \times 2 = 4$. Тому відповідь: $\Pr[E] = \frac{4}{16} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

Відповідь. Ймовірність дорівнює $1/4$.