Homework #1

Задание 292

Направим ось Ox вдоль отрезка AB, а ось Oy проведём через серединный перпендикуляр к AB. В таком случае можем записать, что координаты точек $A(-c, 0), B(c, 0)$.

Рассмотрим произвольную точку $I(x, y)$, удовлетворяющую условию задачи. Запишем квадраты расстояний до точек A и B:

$$AI^2 = (x+c)^2 + y^2,\ BI^2 = (x-c)^2 + y^2$$

По условию $|AI^2 - BI^2| = 4a^2$. Итак, имеем:

$$|x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2| = 4a^2$$

$$|4xc| = 4a^2 \to |x| = \frac{a^2}{c}$$

Проанализируем, когда это уравнение имеет решения. Если $A = B$ (что аналогично $c = 0$), то разность всегда равна 0. Если $a = 0$, то тогда решением является вся плоскость, а если $a \neq 0$, то $\emptyset$.

Если $A \neq B$, то решение одно если $a = 0$ и это будет просто серединный перпендикуляр к прямой AB (что логично, ведь *ГМТ*, равноудалённое от 2 точек, — это серединный перпендикуляр). Если же $a \neq 0$, то решением будет 2 прямые, перпендикулярные AB и находящиеся на расстоянии a^2/c от середины AB.

Задание 294

Введём систему координат в середине одной из сторон и ось Ox направим вдоль этой стороны. Пусть сторона треугольника равна b. В таком случае координаты сторон треугольника в выбранной системе координат $A(-b, 0), B(b, 0), C(0, b\sqrt{3})$.

Рассмотрим произвольную точку $I(x, y)$, удовлетворяющую условию задачи. Запишем квадраты расстояний до точек A, B и C:

$$AI^2 = (x+b)^2 + y^2,\ BI^2 = (x-b)^2 + y^2,\ CI^2 = x^2 + (y - b\sqrt{3})^2$$

Запишем сумму квадратов расстояний и расскроем скобки ($w = const$):

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2by\sqrt{3} + 5b^2 = w$$

Заметим, что $(w - 5b^2)/3 = s = const$. Тогда:

$$x^2+y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}by=s$$

Наконец выделим полный квадрат (заменим константу в правой части на t^2):

$$x^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}b\right)^2=t^2$$

Имеем, что центр окружности находится в точке $O(0,b/\sqrt{3})$, что соответствует центру треугольника, с радиусом t.

Зададим $t=0$ и начнём мысленно “растягивать” окружность. Дойдём до момента, когда окружность станет вписанной окружностью в треугольник ($t_0=b/\sqrt{3}$). В этот момент окружность начнёт касаться всех 3 середин сторон. При любых $t\neq t_0$ окружность уже не будет касаться ни одной из середин. Значит, ответом является вписанная окружность в треугольник.

Задание 302

Для начала запишем уравнения окружностей в канонической форме:

$$\omega_1:(x-3)^2+y^2=5^2,\ \omega_2:(x+4)^2+y^2=(3\sqrt{2})^2$$

Теперь решим задачу в общем виде, а затем подставим числа. Пусть у нас центры окружностей имеют координаты (x_1,y_1) и (x_2,y_2), а их радиусы равны соответственно r_1 и r_2. Пусть у нас есть точка $I(x,y)$ из которой можно провести 2 равные касательные. Длина касательной определяется по формуле $\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2-r_i^2}$ (т.к. касательная является катетом в треугольнике, где другой катет - радиус, а гипотенуза - отрезок, соединяющий точку I и центр окружности). Таким образом, должно выполняться:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2^2$$

Преобразовав это выражение, получим уравнение:

$$2y(y_2-y_1)+2x(x_2-x_1)=(x_2^2+y_2^2-r_2^2)-(x_1^2+y_1^2-r_1^2)$$

В конкретной данной задаче $y_1=y_2=0$, поэтому уравнение можно слегка упростить перед тем, как подставлять числа:

$$x=\frac{(x_2^2-r_2^2)-(x_1^2-r_1^2)}{2(x_2-x_1)}$$

Наконец, подставим числа:

$$x=\frac{(16-18)-(9-25)}{2(-4-3)}=-1$$

Стоит также проверить, чтобы наша прямая $x=-1$ не проходила внутрь одной из окружностей, т.е. должно выполняться:

$$(-1-3)^2+y^2>5^2\wedge(-1+4)^2+y^2>18$$

Имеем $y^2>9$ из обоих уравнений. Значит, наше ГМТ - это $x=-1$ при $|y|>3$.

Задание 306

Без потери общности, можем ввести в рассмотрение квадрат единичной длины таким образом, что координаты вершин находятся в точках $(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$. Рассмотрим произвольную точку $I(x,y)$. Расстояние до двух вертикальных сторон равна $|x|$ и $|x-1|$, а до двух горизонтальных $|y|$ и $|y-1|$. Из условия ГМТ удовлетворяет условию:

$$|x||x-1| = |y||y-1|$$

Тут есть 2 случая: или одна из частей домножается на -1, либо это уравнение решается просто с раскрытием модулей. В первом случае:

$$x^2 - x = -y^2 + y \to \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 1/2$$

Таким образом:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

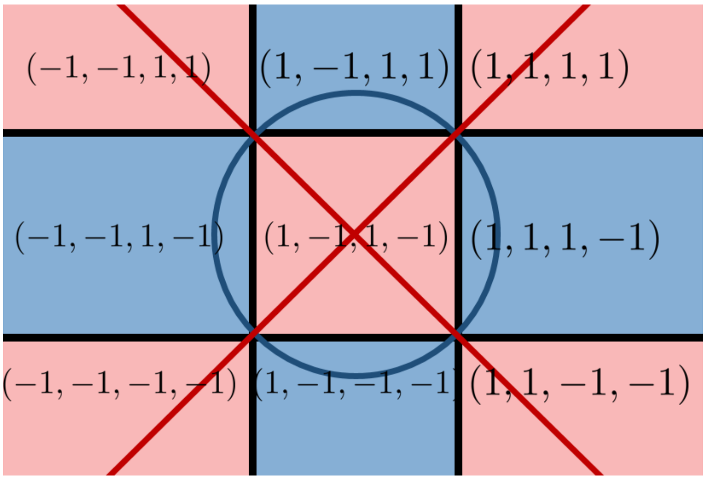
Что является описанной окружностью вокруг квадрата.

Во втором случае имеем:

$$x^2 - x = y^2 - y \to (x-y)(x+y) = x - y$$

Отсюда решением является 2 прямые: $x = y,\ y = 1 - x$. Эти прямые являются диагоналями квадрата.

Осталось сделать одно: определить, в каком случае нужно открывать модули одним способом, а когда другим. Для этого введём функции $\sigma_1 = \operatorname{sgn}(x), \sigma_2 = \operatorname{sgn}(x-1), \sigma_3 = \operatorname{sgn}(y), \sigma_4 = \operatorname{sgn}(y-1)$ и нарисуем рисунок:



Тут мы изобразили четвёрку $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x), \sigma_4(x))$ для разных точек плоскости. Синим цветом мы подстветили области, где модули открываются с домножением на -1, а красным - без. Как мы выяснили, в синих областях у нас рисуется описанная окружность вокруг квадрата, а в красных - диагонали квадрата. Видим, что решением является описанная окружность, а также обе диагонали квадрата.

Задание 326

Если принять ту систему координат, что указана в условии, то координаты точек $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. Пусть мы имеем некоторую точку $I(x, y)$ которая удовлетворяет условию задачи. Квадраты расстояний:

$$F_1I^2 = (x+c)^2 + y^2,\ F_2I^2 = (x-c)^2 + y^2$$

По условию $|F_1I||F_2I| = c^2 \implies |F_1I|^2|F_2I|^2 = c^4$. Имеем:

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = c^4$$

Преобразовываем данное выражение:

$$(x^2-c^2)^2+y^2(x+c)^2+y^2(x-c)^2+y^4=c^4$$

$$(x^2-c^2)^2+y^2(x^2+2xc+c^2+x^2-2xc+c^2)+y^4=c^4$$

$$x^4-2x^2c^2+c^4+2x^2y^2+2c^2y^2+y^4=c^4$$

$$(x^4+2x^2y^2+y^4)=2c^2(x^2-y^2)\to(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$$

Таким образом, уравнение в декартовой системе координат:

$$(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$$

Теперь сделаем замену $x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi$, то получим:

$$\rho^4=2c^2\rho^2(cos^2\phi-\sin^2\phi)$$

Можно сократить на ρ (в дальнейшем мы увидим, что $\rho(\phi)$ принимает 0). Имеем:

$$\rho^2=2c^2\cos 2\phi\to\rho(\phi)=c\sqrt{2\cos 2\phi}$$

Действительно, если $\phi=\pi/4$, то $\rho(\pi/4)=0$.

Задание 396

Для начала запишем вектора нормали ко всем прямым:

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1\},\ \boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2\},\ \boldsymbol{n}_3=\{A_3,B_3\}$$

Первое условие, что прямые образовывают треугольник - это то, что из тройки прямых не найдутся 2 параллельные прямые. Две линии с векторами нормалей $\boldsymbol{n}_i=\{A_i,B_i\},\ \boldsymbol{n}_j=\{A_j,B_j\}$ параллельны тогда и только тогда, когда:

$$[\boldsymbol{n}_i\times\boldsymbol{n}_j]=0$$

Иначе говоря:

$$A_iB_j-B_iA_j=0\to\begin{vmatrix}A_i & B_i\\ A_j & B_j\end{vmatrix}=0$$

Таким образом, если обозначить:

$$\delta_{12}:=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},\ \delta_{23}:=\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}=0,\ \delta_{13}:=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_3 & B_3\end{vmatrix},$$

то должо выполняться $\delta_{12}\neq 0,\delta_{23}\neq 0,\delta_{13}\neq 0$.

Однако важно учесть ещё тот факт, что все прямые не должны пересекаться в одной точке. Предположим обратное - пусть они пересекаются в $M(x_m,y_m)$. Тогда имеем:

$$\begin{cases}A_1x_m+B_1y_m+C_1=0\\ A_2x_m+B_2y_m+C_2=0\\ A_3x_m+B_3y_m+C_3=0\end{cases}$$

Из первых 2 уравнений имеем:

$$\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_1\\ -C_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

Подставляя это во второе и третье уравнение:

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

После алгебраических преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_{12} \\ \delta_{23} & \delta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \delta_{12} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_2\delta_{12} \\ C_1\delta_{23} + C_2\delta_{13} \end{pmatrix} = \delta_{12} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Отсюда имеем:

$$C_1\delta_{23} + C_2\delta_{13} - C_3\delta_{12} = 0$$

Однако это в точности эквивалентно:

$$\mu := \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, должно выполняться $\delta_{12} \neq 0, \delta_{23} \neq 0, \delta_{13} \neq 0, \mu \neq 0$.

Задание 296

Пусть базис соответствует 2 векторам от вершины A до вершин B и C, т.е. $\vec{AB} = \vec{e}_1$ и $\vec{AC} = \vec{e}_2$. Рассмотрим точку $I(x, y)$ в этой системе координат. Расстояние до 3 вершин:

$$|AI|^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2$$

$$|BI|^2 = g_{11}(x-1)^2 + 2g_{12}y(x-1) + g_{22}y^2$$

$$|CI|^2 = g_{11}x^2 + 2g_{12}x(y-1) + g_{22}(y-1)^2$$

По условию $|AI|^2 + |BI|^2 + |CI|^2 = a^2$. Расскрыв скобки и преобразовав, получим:

$$3x^2g_{11} + 3y^2g_{22} - 2xg_{11} - 2xg_{12} - 2yg_{12} - 2yg_{22} + g_{11} + g_{22} + 6xyg_{12} = a^2$$

Ну собственно дальше ничего не остаётся делать, как просто преобразовывать это выражение. После долгих преобразований, можем прийти к уравнению:

$$\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) g_{11} + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) g_{12} + \left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) g_{22} = \frac{1}{9}\left(3a^2 - 2(g_{11} - g_{12} + g_{22})\right)$$

Если заметить, что $|AB|^2 = g_{11}, |AC|^2 = g_{22}, |BC|^2 = g_{11} - 2g_{12} + g_{22}$, то можем получить, что $g_{11} - g_{12} + g_{22} = (|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2)/2$. Кроме того, выделим полные квадраты:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 g_{11} + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) g_{12} + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 g_{22} = \frac{1}{9}(3a^2 - (|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2))$$

Заметим, что слева стоит квадрат расстояния от точки (x, y) до $(1/3, 1/3)$, а справа - некоторая константа. Это означает, что перед нами окружность с центром в точке $(1/3, 1/3)$ и радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - (|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2)}$.

Вернёмся к непосредственно геометрии. Заметим, что вектор $\vec{AM} = (1/3)\vec{e}_1 + (1/3)\vec{e}_2$ это ровно $2/3$ вектора $(1/2)\vec{e}_1 + (1/2)\vec{e}_2$, что является медианой, проведённой из точки A. Т.е. ГМТ - это окружность, центр которой находится в точке пересечения медиан, радиус которой $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - (|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2)}$.