Варіаційний Аналіз

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Бебія М.О.*

Весняний семестр 2024

Контрольна робота 1

§ Контрольна робота. Варіант 2 §

Задача 1: Принцип максимума Понтрягіна.

Умова. Мінімізувати $J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt - x(1)$ під дією системи

$$\dot{x} = x + u, \; x(0) = 0$$

без обмежень на керування $u(t) \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Скористаємось **принципом максимума Понтрягіна**. Сформулюємо цей принцип в дещо спрощеному вигляді знизу.

Спрощене формулювання принципу максимума Понтрягіна. Нехай маємо наступну динамічну систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \; \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}, \; t \in [0, T] \tag{1.1}$$

і ми маємо функціонал $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T \ell(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt \to \inf$. Введемо вектор множників Лагранжа $\boldsymbol{\psi}(t)$, деяке $\lambda_0 < 0$ та Гамільтоніан

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t) := \boldsymbol{\psi}^\top f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \lambda_0 \ell(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Принцип максимуму Понтрягіна стверджує, що оптимальна траєкторія $\mathbf{x}^*(t)$, керування $\mathbf{u}^*(t)$, та відповідний вектор множників Лагранжа $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ має максимізувати Гамільтоніан $\mathcal{H}$, тобто

$$(\forall t \in [0, T]) \; (\forall \mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}) \; \{\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}^*(t), t) \geq \mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t)\}, \tag{1.2}$$

де вектор множників знаходиться з рівнянь

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\psi}, t), \; \boldsymbol{\psi}(T) = -\nabla_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}(T)) \tag{1.3}$$

Отже, застосуємо цей принцип. В нашому випадку маємо траєкторію $x(t)$, множина обмежень управлінь $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, а функції мають вид:

$$f(x(t), u(t)) = x + u, \ \Psi(x(1)) = -x(1), \ \ell(x(t), u(t)) = u^2(t) \tag{1.4}$$

Таким чином, якщо ввести множник Лагранжа $\psi(t)$ та покласти $\lambda_0 := -1$, то Гамільтоніан запишеться як:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t) = -u^2 + \psi x + \psi u \tag{1.5}$$

Отже, нам потрібно обрати $u^* = \arg\max_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)$. Відносно u наш Гамільтоніан задає параболу, що направлена вниз, а вершина, що відповідає глобальному максимуму, знаходиться через умову $\frac{\partial \mathcal{H}(u^*)}{\partial u} = 0$. Отже,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(u^*)}{\partial u} = -2u^* + \psi \implies u^* = \frac{\psi}{2} \tag{1.6}$$

Отже, тепер знаходимо множник Лагранжа з рівняння $\dot{\psi}(t) = -\nabla \mathcal{H}$:

$$\dot{\psi} = -\psi \implies \psi(t) = Ce^{-t} \tag{1.7}$$

Отже, залишилось знайти константу C. Скористаємось умовою трансверсальності $\psi(T) = -\nabla \Psi(x(T))$:

$$Ce^{-1} = 1 \implies C = e \tag{1.8}$$

Отже, остаточно $\boxed{\psi(t) = e^{1-t}}$. Отже керування має вигляд $u^*(t) = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}e^{1-t}$. Отже, тепер знайдемо траєкторію:

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2}e^{1-t} \tag{1.9}$$

Це лінійне диференціальне рівняння, тому розв'язок однорідної системи відповідає $\dot{x} = x$, звідки $x = Ce^t$. Далі методом варіації підставляємо $x(t) = C(t)e^t$ у наше рівняння:

$$\dot{C}e^t + Ce^t = Ce^t + \frac{1}{2}e^{1-t} \implies \dot{C} = \frac{1}{2}e^{1-2t} \implies C(t) = -\frac{1}{4}e^{1-2t} + \gamma \tag{1.10}$$

Отже розв'язок має вигляд $x(t) = (-\frac{1}{4}e^{1-2t} + \gamma)e^t$. З умови $x(0) = 0$ маємо $\gamma = \frac{e}{4}$, тому остаточно оптимальна траєкторія та керування:

$$x^*(t) = \frac{1}{4}e^{1-t}(e^{2t} - 1), \ u^*(t) = \frac{1}{2}e^{1-t} \tag{1.11}$$

Обрахуємо функціонал:

$$J^* = J(u^*) = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{2(1-t)} dt - \frac{1}{4} e^0 (e^2 - 1)$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1 - e^2}{8} \tag{1.12}$$

Відповідь. $u^*(t) = \frac{1}{2} e^{1-t},\ x^*(t) = \frac{e^{1-t}}{4}(e^{2t} - 1),\ J^* = \frac{1-e^2}{8}$.