

§ Біфуркації §

Задача 1: Система Лоренца.

Умова. Дослідіть залежність характеру поведінки розв'язків системи Лоренца від значення параметрів. Наприклад, перевірити розрахунки, подані у Вікіпедії.

Розв'язок. Система Лоренца має наступний вигляд де $\mathbf{r} := (x, y, z)$:

$$\dot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}), \quad f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\lambda - z) - y \\ xy - bz \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

По суті, маємо параметризацію відносно параметрів (σ, λ, b) . Змінювати усі параметри разом дуже складно, тому зафіксуємо $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ і будемо змінювати λ . Також ми наведемо лінеаризацію системи і розрахунок стаціонарних точок, проте аналізувати Якобіан аналітично не будемо: насправді, це дуже об'ємна задача. Тому ми спробуємо дійсно перевірити результати з Вікіпедії, зобразивши систему у відповідних значеннях λ .

Отже, права частина системи не є лінійною, оскільки містить доданки xz та xy . Лінеаризація системи:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \lambda - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Тепер знайдемо точки спокою. Для цього розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ x(\lambda - z) - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

З першого рівняння $x = y$, а тоді з третього $z = \frac{x^2}{b}$. Підставляючи у друге маємо $x \left(\lambda - \frac{x^2}{b} \right) - x = 0$. Очевидно, що один з розв'язків $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$. Якщо

ж $x \neq 0$, то маємо $\lambda - \frac{x^2}{b} = 1$, звідки $x^2 = b(\lambda - 1)$. Якщо $\lambda = 1$, то маємо єдину точку спокою – $(0, 0, 0)$. Інакше, якщо $\lambda > 1$, то $x = \pm\sqrt{b(\lambda - 1)} = y$, а тоді $z = \lambda - 1$. Отже, при $\lambda > 1$, маємо три точки спокою:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0) \\ &(\sqrt{b(\lambda - 1)}, \sqrt{b(\lambda - 1)}, \lambda - 1) \\ &(-\sqrt{b(\lambda - 1)}, -\sqrt{b(\lambda - 1)}, \lambda - 1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Далі, розглядаємо випадки.

Випадок 1. $0 < \lambda < 1$. Маємо лише одну стаціонарну точку $(0, 0, 0)$ – стійкий вузол, система стабільна.

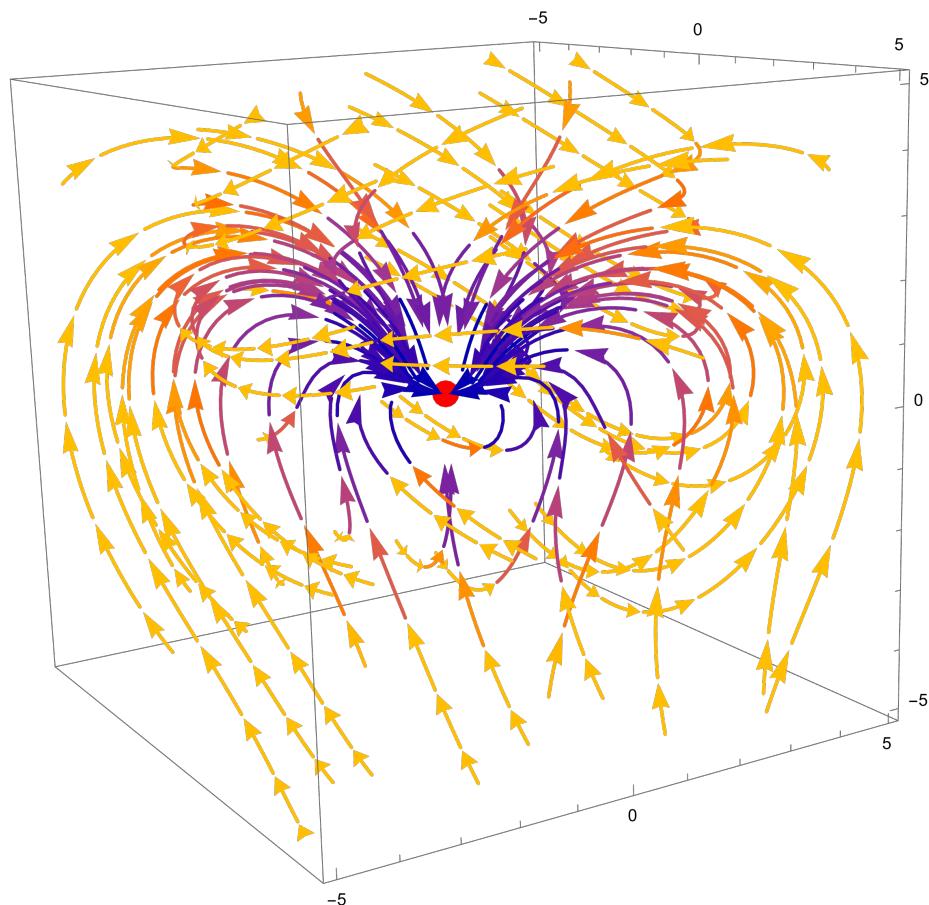


Рис. 1: Фазовий портрет системи при $\lambda = 0.5$.

Випадок 2. $1 < \lambda < 13.926$. Точка $(0, 0, 0)$ стає нестійкою, також з'являються дві нові точки спокою – фокуси. Параметр $\lambda_1 = 13.926$ знаходиться чисельно і відповідає випадку, коли траєкторія, що почалася в $(0, 0, 0)$, повертається в нуль через деякий час.

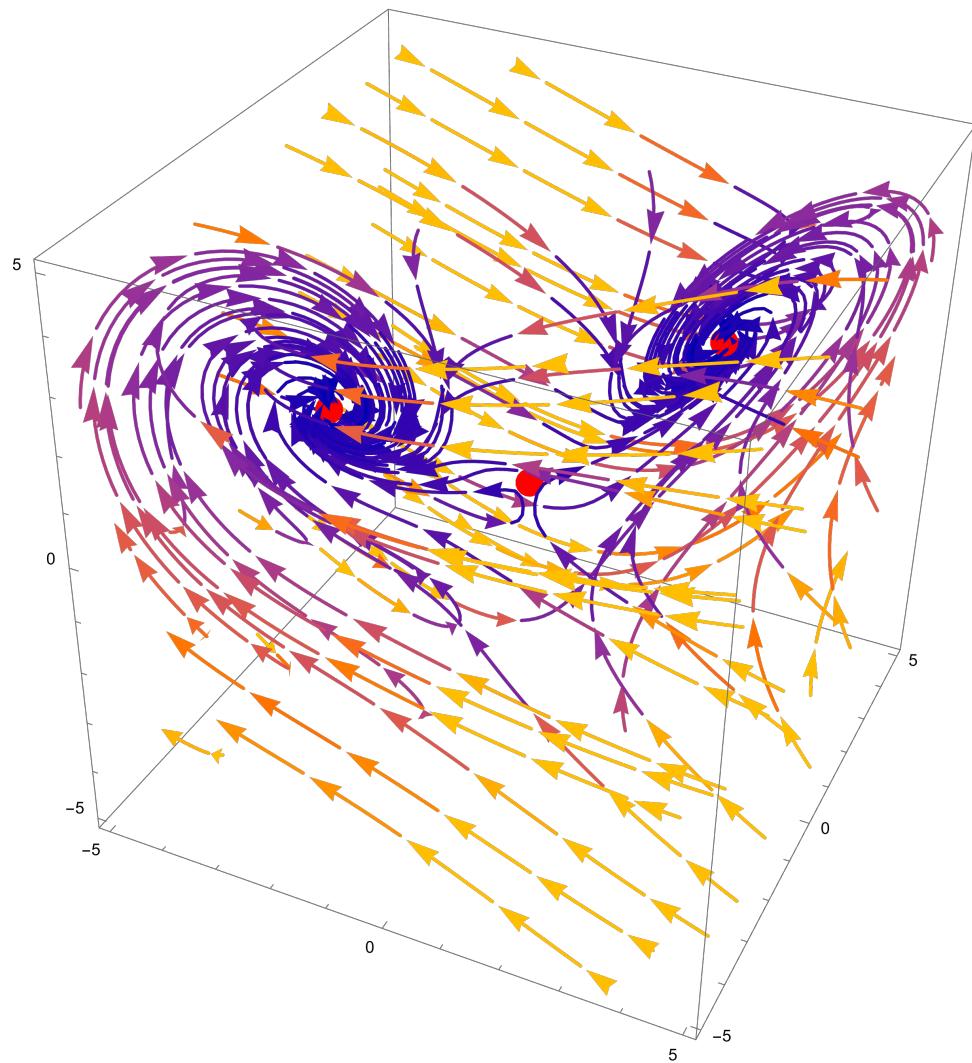


Рис. 2: Фазовий портрет системи при $\lambda = 3.0$.

Випадок 3. $13.926 < \lambda < 24$. $(0, 0, 0)$ і далі нестійка, а ось дві інші точки спокою набувають нестійкі граничні цикли навколо себе. Параметр $\lambda_2 \approx 24$ позначає, що далі стаціонарні точки втрачають стійкість¹.

¹Насправді, у Вікіпедії наведений ще один відрізок після λ_2 , але візуально вони у мене не сильно відрізняються.

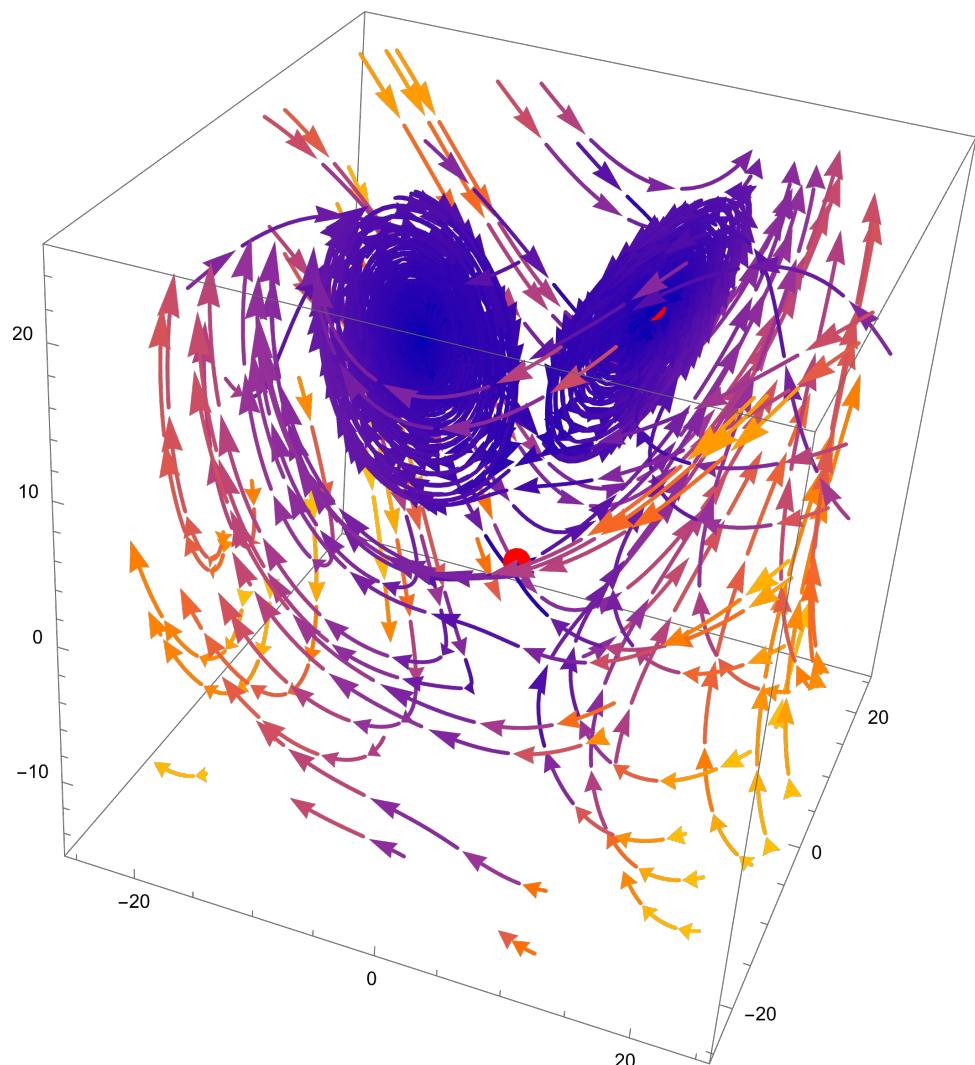


Рис. 3: Фазовий портрет системи при $\lambda = 18.0$.

Випадок 4. $\lambda > 24$. Стационарні точки втрачають стійкість і відбувається ефект дивного атрактора, коли точка може несподівано перестрибувати з однієї точки спокою на іншу.

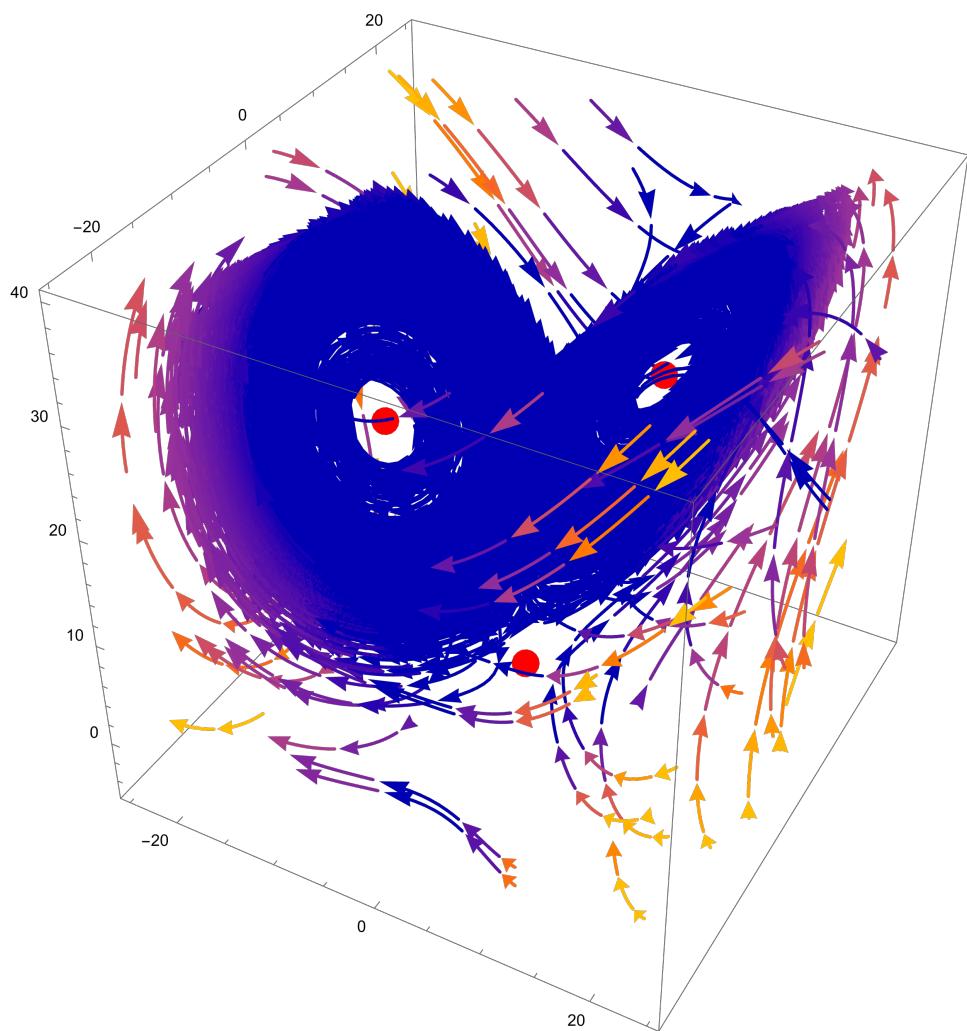
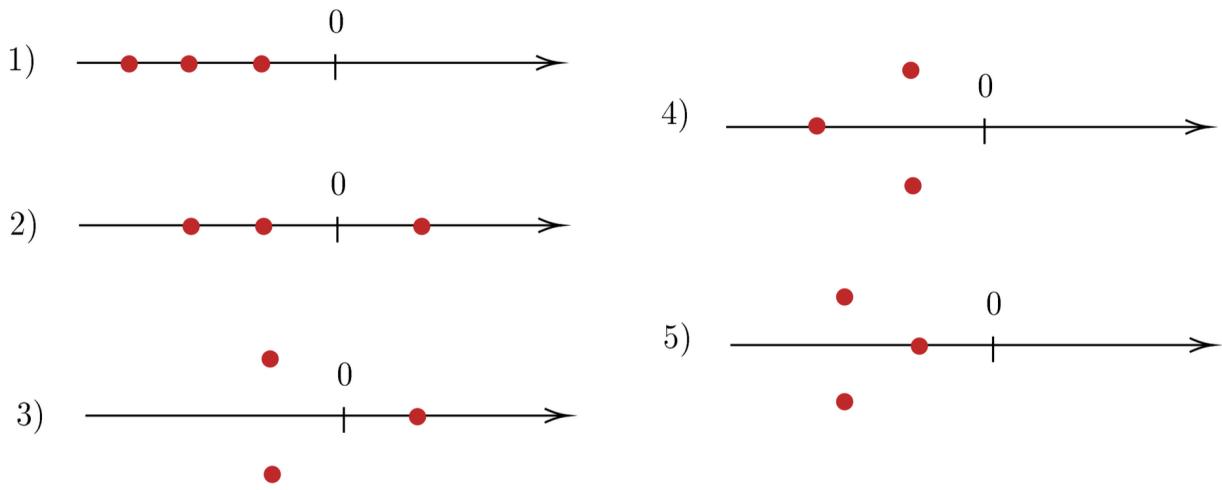


Рис. 4: Фазовий портрет системи при $\lambda = 27.0$.

Задача 2: Класифікація портретів в \mathbb{R}^3 .

Умова. Для лінійних тривимірних систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ існує 10 “грубих” варіантів розташування власних значень матриці \mathbf{A} на комплексній площині (які не змінюються при малих ворушіннях матриці): п'ять з них схематично зображені нижче, і ще п'ять симетричні поданим відносно уявної вісі.



Спробуйте намалювати ескізи фазових портретів систем з такими матрицями (у тривимірному просторі) або хоча б сформулювати, чим вони відрізняються один від одного.

Розв'язок. Отже, розглянемо кожен з випадків.

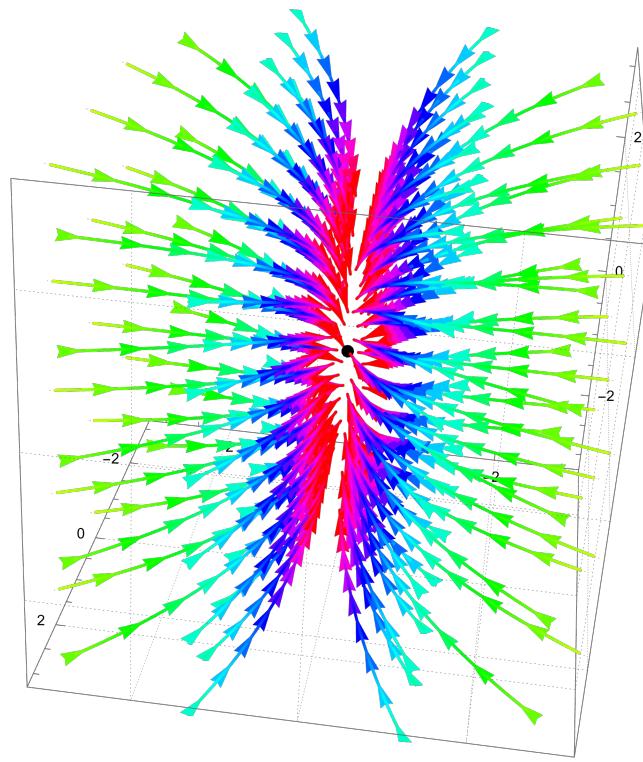
Випадок 1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. В такому випадку існує така зміна базису, в якій система набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = \lambda_3 y_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

Найлегше окремо розв'язати кожну систему. Маємо тоді параметризовану криву:

$$\mathbf{y}(t) = (A_1 e^{\lambda_1 t}, A_2 e^{\lambda_2 t}, A_3 e^{\lambda_3 t}) \quad (2.2)$$

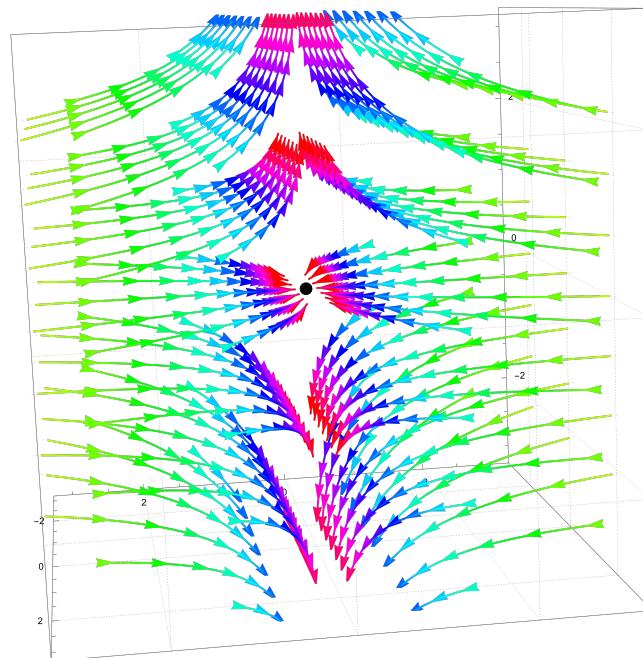
Помітимо, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$, оскільки усі $\lambda_i < 0$. Тому, маємо щось накшталт стійкового вузлу, оскільки все сімейство кривих буде прямувати до початку координат (дивись рисунок нижче).



Випадок 2. $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$. Це так само буде відповідати розв'язку

$$\mathbf{y}(t) = (A_1 e^{\lambda_1 t}, A_2 e^{\lambda_2 t}, A_3 e^{\lambda_3 t}) \quad (2.3)$$

Проте, в цьому випадку $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ – проекція на вісь Oxy буде прямувати до 0, але по вісі Oz точка буде віддалятись. Це дуже схоже на випадок сідла.



Випадок 3. $\lambda_1 = \lambda_2^*, \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0, \lambda_3 > 0$. Тоді якщо $\lambda_1 = a + ib$, то

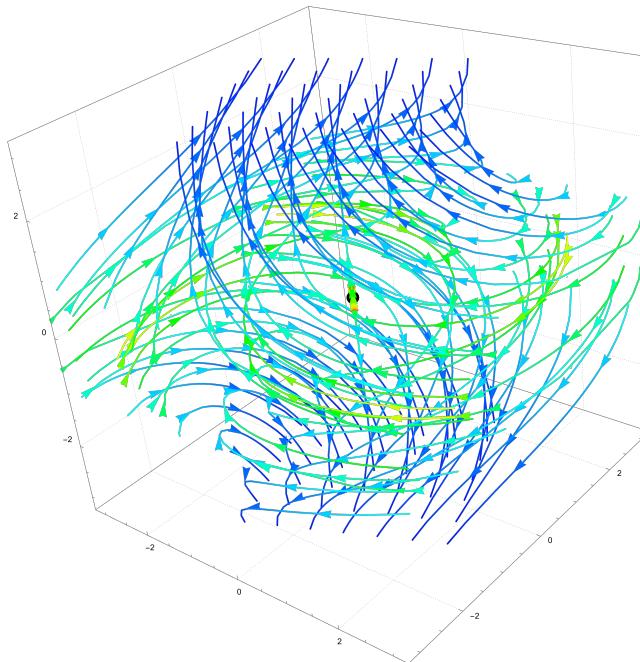
систему можна звести до вигляду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 \\ \dot{y}_2 = -by_1 + ay_2 \\ \dot{y}_3 = \lambda_3 y_3 \end{cases} \quad (2.4)$$

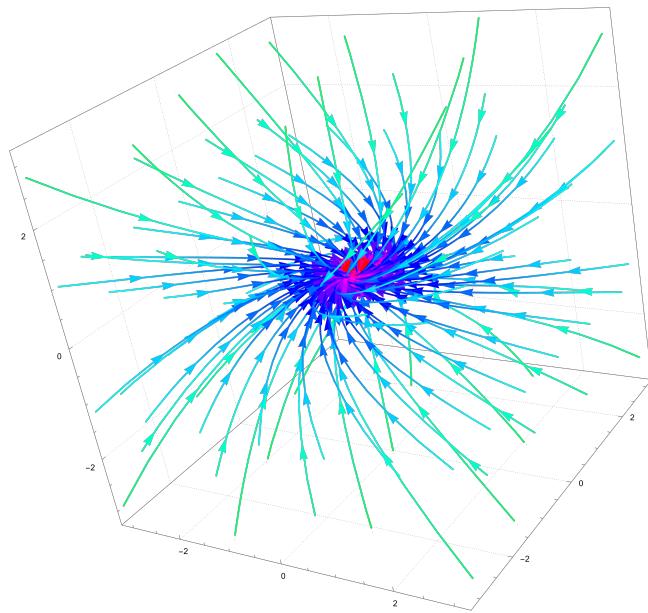
Розв'язок перших двох рівнянь ми вже наводили у випадку двовимірної системи (точніше, у полярній формі, але запишемо її у координатній):

$$(y_1(t), y_2(t)) = (C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt, C_2 e^{at} \cos bt - C_1 e^{at} \sin bt), \quad (2.5)$$

що відповідала фокусу – спіралі, що розкручується. У трьохвимірному випадку у якості третьої компоненти додаємо $C_3 e^{\lambda_3 t}$, $\lambda_3 > 0$. Маємо також щось накшталт фокусу, причому нестійкого (див. рис. 3).



Випадок 4. $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, $\lambda_3 < \operatorname{Re}(\lambda_1)$. По формулі маємо ту саму криву, як в випадку 3, лише за умови $\lambda_3 < 0$. Це буде відповідати стійкому фокусу.



Випадок 5. $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_1) < \lambda_3 < 0$. Формула знову така сама, але фазовий портрет виглядає зовсім інакше (див. рис. нижче): тут траєкторії “закручуються” над і під нашою точкою, що достатньо цікаво. Проте, я не дуже зрозумів, як це побачити з рівняння :)

