Homework #10

Заметка: для сокращения буду записывать $\mathrm{trace}_k(\mathcal{A}) = \mathrm{tr}_k\mathcal{A}$.

Задача 1.

Если перед нами уравнение:

$$f_{1,1}x^2 + 2f_{1,2}xy + f_{2,2}y^2 + h_1x + h_2y + g = 0$$

и если обозначить $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\vec{v}^T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, то наше уравнение имеет вид:

$$\vec{v}^T\mathcal{A}\vec{v} + \vec{h}\vec{v}^T + g = 0$$

где $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{1,2} & f_{2,2} \end{pmatrix}$ и $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$. По условию нам нужно найти собственные числа и вектора $\mathcal{A}$, а поэтому нам нужно рассмотреть характеристический полином $P_{\mathcal{A}}(\lambda)$:

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} f_{1,1} - \lambda & f_{1,2} \\ f_{1,2} & f_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(f_{1,1} + f_{2,2}) + \left(f_{1,1}f_{2,2} - f_{1,2}^2\right)$$

Если ещё проще — $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\mathcal{A}\cdot\lambda + \det\mathcal{A}$ (тут $\mathrm{tr}\mathcal{A} = \mathrm{tr}_1\mathcal{A}$). Далее полученные корни $\lambda_{1,2}$ нужно подставить в уравнение $\mathcal{A}\vec{v} = \lambda_{1,2}\vec{v}$ и найти собственные вектора. Если сделать это в общем виде немного преобразовав выражение, то получим, что собственному числу λ_j соответствует вектор $\vec{v}_j = t\begin{pmatrix} f_{1,2} \\ \lambda_j - f_{1,1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Пункт 1. Имеем $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$. Корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. Подставляя $\lambda_1 = 1$ в уравнение $\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ имеем $x - 2y = 0$, а поэтому собственный вектор $\vec{v}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если подставить $\lambda_2 = 6$, то получим $2x + y = 0$, поэтому собственный вектор $\vec{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Тоже самое можно было получить подставив всё в $\vec{v}_j = t \begin{pmatrix} f_{1,2} \\ \lambda_j - f_{1,1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Пункт 2. Имеем $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4$. Отсюда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$. Из условия $\lambda_1 = 1$ получим $\vec{v}_1 = t(2,1)^T$, а из $\lambda_2 = -4$: $\vec{v}_2 = t(1,-2)^T$.

Пункт 3. Имеем $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 25\lambda$. Отсюда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$. Из условия $\lambda_1 = 0$ получим $\vec{v}_1 = t(4,3)^T$, а из $\lambda_2 = 25$: $\vec{v}_2 = t(-3,4)^T$.

Пункт 4. Имеем $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$. Отсюда $\lambda_1 = 3/2, \lambda_2 = 1/2$. Из условия $\lambda_1 = 3/2$ получим $\vec{v}_1 = t(-1,1)^T$, а из $\lambda_2 = 1/2$: $\vec{v}_2 = t(1,1)^T$.

Пункт 5. Имеем $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 1/4$. Отсюда $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -1/2$. Из условия $\lambda_1 = 1/2$ получим $\vec{v}_1 = t(1,1)^T$, а из $\lambda_2 = -1/2$: $\vec{v}_2 = t(1,-1)^T$.

Задача 2(1).

Характеристический полином будет иметь вид:

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой:

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - \operatorname{tr}_1 \mathcal{A} \cdot \lambda^2 + \operatorname{tr}_2 \mathcal{A} \cdot \lambda - \det \mathcal{A} = 0$$

Нетрудно посчитать, что $\operatorname{tr}_1 \mathcal{A} = 3,\ \operatorname{tr}_2 \mathcal{A} = -24, \det \mathcal{A} = -80$. Имеем:

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda + 80 = (\lambda - 4)^2(\lambda + 5)$$

Корни $P_{\mathcal{A}}(\lambda)$ — это искомые собственные числа $\mathcal{A}$. Имеем $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 4$.

Теперь вспомним, что собственные числа, по определению:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \implies (\mathcal{A} - \lambda E)\vec{x} = 0$$

Поэтому когда мы нашли λ_k из уравнения $\det(\mathcal{A} - \lambda E) = 0$, то для нахождения собственных векторов нам нужно найти $\operatorname{Null}(\mathcal{A} - \lambda E)$ (*null space*, на русском полагаю ядро). Обозначим $\mathcal{H}_k := \mathcal{A} - \lambda_k E$. Имеем:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Сделав некоторые элементарные преобразования с матрицей, получим:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зададим $z = t$. В таком случае $y = -t, x = t$. Поэтому $\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \{t(1, -1, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$

Перейдём к $\mathcal{H}_2$:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_2) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Видим, что $\mathrm{Null}(\mathcal{H}_2) = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, т.е. множество векторов, координаты которых (x, y, z) лежат на плоскости $x - y + z = 0$. Зададим их параметрически. Вектор нормали плоскости $\vec{n} = (1, -1, 1)^T$. Выберем 2 других вектора, перпендикулярных между собой и вектору $\vec{n}$. Например, $\vec{a} = (2, 1, -1)^T, \vec{b} = (0, 1, 1)^T$. В таком случае $\mathrm{Null}(\mathcal{H}_2) = \mathrm{span}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{\alpha(2, 1, -1)^T + \beta(0, 1, 1)^T \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ — множество линейных комбинаций векторов $\vec{a}, \vec{b}$.

Ответ: $\lambda_1 = -5, \vec{v}_1(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_2 = 4, \vec{v}_2(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$, где $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Задача 2(2).

Интересно обобщить данную задачу. Пусть у нас есть заданные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и найдём собственные числа и вектора матрицы:

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \beta \\ -\beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

В нашем конкретно случае $\alpha = -1, \beta = 4$. Делаем всё по алгоритму, описанному в предыдущей ***задаче 2(1)***:

$$\mathrm{tr}_1\mathcal{A} = 3\alpha,\ \mathrm{tr}_2\mathcal{A} = 3(\alpha^2 - \beta^2),\ \det\mathcal{A} = (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta)^2$$

Поэтому характеристический полином $P_{\mathcal{A}}(\lambda)$:

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 3\alpha\lambda^2 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\lambda - (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta)^2$$

Его корни (ну тут удача либо как-то умно преобразовать выражение): $\lambda_1 = \alpha - 2\beta$ (корень кратности 1) и $\lambda_2 = \alpha + \beta$ (корень кратности 2). Введём обозначение $\mathcal{H}_j = \mathcal{A} - \lambda_j E$. Имеем:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2\beta & -\beta & \beta \\ -\beta & 2\beta & \beta \\ \beta & \beta & 2\beta \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Видим интересную особенность — собственные вектора $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ не зависят от α, β. Далее некоторыми операциями можно показать, что:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $z = t$. Тогда $y = -t$, а $x = 0$. Поэтому $\mathrm{Null}(\mathcal{H}_1) = \{t(0, -1, 1)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Теперь работаем с $\mathcal{H}_2$:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{H}_2) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

Вектор нормали $\vec{n} = (1, 1, -1)^T$. Выберем 2 вектора, которые перпендикулярны собой и вектору $\vec{n}$. Например, $\vec{a} = (2, -1, 1)^T, \vec{b} = (0, 1, 1)^T$. Таким образом, $\mathrm{Null}(\mathcal{H}_2) = \mathrm{span}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{v\vec{a} + u\vec{b} \mid v, u \in \mathbb{R}\}$.

Ответ: $\lambda_1 = -9, \vec{v}_1 = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_2 = 3, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2h \\ -h + g \\ h + g \end{pmatrix}$, где $t, h, g \in \mathbb{R}$.