Самостійна робота з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

16 листопада 2023 р.

Завдання

Умова. Довести, що множина A є борельовою і обчислити $\lambda_1(A)$ для

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left(e^n - \frac{1}{\cosh n + \sinh n}, e^n + \frac{1}{\cosh n + \sinh n}\right]$$

Розв’язок. З теоретичного матеріалу відомо, що будь-який відрізок $(\alpha, \beta] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Отже, нескінченне об’єднання борельових множин теж є борельовою множиною, тому $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Обчислимо міру Лебега:

$$\lambda_1(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^n + \frac{1}{\cosh n + \sinh n} - \left(e^n - \frac{1}{\cosh n + \sinh n} \right) \right)$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cosh n + \sinh n} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{e^n + e^{-n}}{2} + \frac{e^n - e^{-n}}{2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{2e}{e-1}$$

Відповідь. $\frac{2e}{e-1}$.