Домашня робота #1 з курсу "Комплексний аналіз" (частина друга)

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Розв'язати рівняння

$$\sin z = \frac{5}{3}$$

Розв'язок. Розпишемо синус як

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Позначимо $w := e^{iz}$, тоді маємо рівняння:

$$\frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = \frac{5}{3}$$

Звідси отримуємо:

$$\frac{w^2 - 1}{2wi} = \frac{5}{3} \to 3w^2 - 10wi - 3 = 0$$

Розв'язуємо відносно w:

$$w = \frac{5i \pm \sqrt{-25+9}}{3} = \frac{5i \pm 4i}{3} \to w = 3i \vee w = \frac{i}{3}$$

Отже, розглянемо випадок $w = 3i$, тобто $e^{iz} = 3i$.

В такому разі:

$$z = \frac{1}{i} \ln 3i = -i \ln e^{\ln 3 + (\pi/2 + 2\pi k)i} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln 3, \ k \in \mathbb{Z}$$

Аналогічно для $w = \frac{i}{3}$:

$$z = -i \ln \frac{i}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i \ln 3,\ k \in \mathbb{Z}$$

Відповідь. $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \pm i \ln 3,\ k \in \mathbb{Z}$

Завдання 2.

Умова. Знайти $\operatorname{Re} \cos 2i$

Розв'язок. Використаємо формулу:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Підставляємо:

$$\cos 2i = \frac{e^{i\cdot 2i} + e^{-i\cdot 2i}}{2} = \frac{e^{2} + e^{-2}}{2} = \cosh 2$$

В загальному випадку нескладно довести, що $\cosh r = \cos ir, r \in \mathbb{R}$.

Відповідь. $\cosh 2$.

Завдання 3.

Умова. Знайти $\operatorname{Im}(1 - \sqrt{3}i)^{5+2i}$

Розв'язок. Помітимо, що

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = e^{\ln 2 - i\frac{\pi}{3} + 2\pi k i},\ k \in \mathbb{Z}$$

Отже:

$$(1 - \sqrt{3}i)^{5+2i} = (e^{\ln 2 - i\frac{\pi}{3} + 2\pi k i})^{5+2i} = e^{(\ln 2 - i\frac{\pi}{3} + 2\pi k i)(5+2i)} =: z$$

Далі множимо вираз в експоненті:

$$z = e^{5\ln 2 + 2i\ln 2 - \frac{5i\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 10\pi k i - 4\pi k} = e^{5\ln 2 + \frac{2\pi}{3} - 4\pi k} e^{2i\ln 2 - \frac{5i\pi}{3} + 10 i\pi k}$$

Помітимо, що:

$$\operatorname{Im} e^{(2\ln 2 - 5\pi/3 + 10\pi k)i} = \sin\left(2\ln 2 - \frac{5\pi}{3} + 10\pi k\right) = \sin\left(2\ln 2 - \frac{5\pi}{3}\right)$$

Отже остаточно маємо:

$$\operatorname{Im}(1-\sqrt{3}i)^{5+2i} = 32e^{2\pi/3-4\pi k}\sin\left(2\ln 2 - \frac{5\pi}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

Відповідь. $32e^{2\pi/3-4\pi k}\sin\left(2\ln 2 - \frac{5\pi}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Завдання 4.

Умова. З'ясувати, в яких точках $f(z)$ є $\mathbb{C}$-диференційованою.

1. $f(z) = |z|^2$
2. $f(z) = 2xy - i(x^2-y^2)$

Розв'язок.

Пункт 1. Доведемо, що ця функція диференційована лише в нулі.

Розглянемо границю:

$$f'(z) \triangleq \lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}$$

Якщо розглянемо її в 0:

$$f'(0) = \lim_{\delta z\to 0}\frac{|\delta z|^2}{\delta z} = \lim_{\delta z\to 0}\frac{|\delta z|^2}{\delta z\cdot\delta z^*}\delta z^* = \lim_{\delta z\to 0}\delta z^* = 0$$

Бачимо, що проблем немає. Проте, розглянемо $z_0\neq 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{|z|-|z_0|}{z-z_0}(|z|+|z_0|)$$

Доведемо, що така границя не визначена, тобто знайдемо два шляхи, вздовж яких границя різна.

Нехай ми рухаємось вздовж кола з центром в початку координат, що проходить через z_0 (тобто вздовж $|z|=|z_0|$, див. рис. 1). В такому разі наша границя очевидно дорівнює 0.

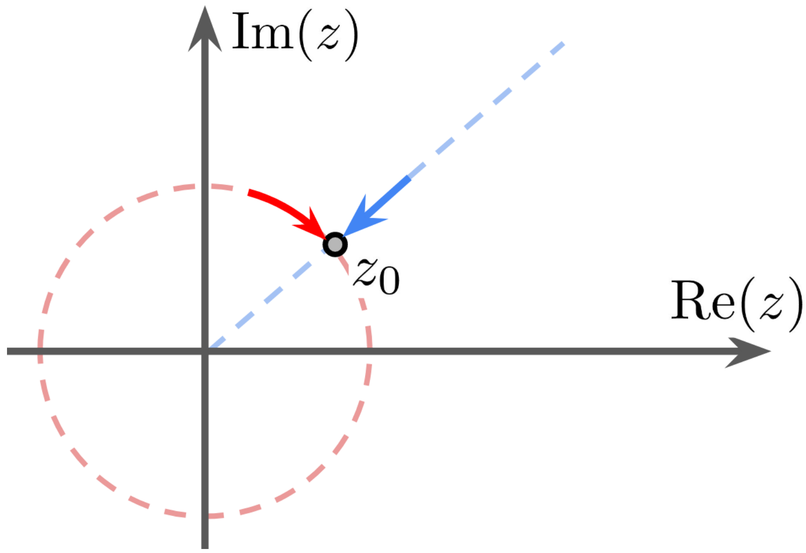

Рис. 1: Червоним помічена траєкторія руху вздовж $|z| = |z_0|$, а синім вздовж μz_0 для $\mu \in [1, +\infty)$

Якщо ж ми будемо рухатись вздовж променя $z = \mu z_0$ для $\mu > 1$, то:

$$f'(z_0) = \lim_{\mu \to 1^+} \frac{|\mu z_0| - |z_0|}{\mu z_0 - z_0}(|\mu z_0| + |z_0|) =$$
$$\lim_{\mu \to 1^+} \frac{|z_0|^2(|\mu| - 1)(|\mu| + 1)}{z_0(\mu - 1)} = \lim_{\mu \to 1^+} \frac{|z_0|^2}{z_0}(1 + \mu) = 2z_0^*$$

Ця границя в загальному випадку не дорівнює 0, тому ми отримали дві різні границі, що означає недиференційованість у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пункт 2. Скористаємося умовою Коші-Рімана:

Теорема 1: Умова Коші-Рімана

Щоб функція $f(x+iy) = \lambda(x, y)+\mu(x, y)i$ була диференційованою в $z = x_0+iy_0$, необхідно і достатньо, аби $\lambda(x, y), \mu(x, y)$ були диференційованими в (x_0, y_0) як функції дійсних змінних x, y і:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}, \ \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

В нашому випадку $\lambda(x, y) = 2xy, \mu(x, y) = y^2 - x^2$. Обидві функції є диференційованими на $\mathbb{R}^2$, отже наш цікавить лише умова з частковими похідними:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial\mu}{\partial y} = 2y \implies \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial\mu}{\partial x} = -2x \implies \frac{\partial\lambda}{\partial y} = -\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

Отже, наша функція f є диференційованою на всьому $\mathbb{C}$.

Відповідь. 1. Лише в $z = 0$. 2. На всьому $\mathbb{C}$.