Контрольна Робота з Рівнянь Математичної Фізики

Захаров Дмитро

26 листопада, 2024

Варіант 5

Зміст

1 Контрольна Робота

1.1 Номер 1.

Умова Задачі 1.1. Розв'язати задачу методом Фур'є: $-\Delta u = 0$, $r > 4$ за $u\Big|_{r=4} = \sin\frac{5\varphi}{2}$.

Розв'язання. Оскільки маємо зовнішній круг $r > 4$, то розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[r^{-n}(F_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi)\right]$$

Маємо умову на те, що $u(4,\varphi) = \sin\frac{5\varphi}{2}$. Проте, щоб співставити коефіцієнти $\{F_n, G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ із правою частиною, розкладемо $g(\varphi) = \sin\frac{5\varphi}{2}$ в ряд Фур'є:

$$g(\varphi) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

де:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Отже, починаємо рахувати:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{5\varphi}{2}d\varphi = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{5}\cos\frac{5\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5\pi}$$

Тепер рахуємо a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{5\varphi}{2}\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(\frac{5\varphi}{2}+n\varphi\right)+\sin\left(\frac{5\varphi}{2}-n\varphi\right)\right]d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin\left(\left(\frac{5}{2}+n\right)\varphi\right)d\varphi + \int_0^{2\pi}\sin\left(\left(\frac{5}{2}-n\right)\varphi\right)d\varphi\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{2}+n}\cos\left(\left(\frac{5}{2}+n\right)\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{5}{2}-n}\cos\left(\left(\frac{5}{2}-n\right)\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{-1-1}{5\pi+2n\pi} - \frac{-1-1}{5\pi-2\pi n} = \frac{2}{\pi(5+2n)} + \frac{2}{\pi(5-2n)} = \boxed{\frac{20}{\pi(25-4n^2)}}
\end{aligned}$$

Аналогічно, можемо порахувати b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{5\varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi$$

Цей інтеграл нульовий. Щоб це показати, зробимо заміну $\varphi \mapsto \varphi - \pi$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{5(\varphi-\pi)}{2}\sin n(\varphi-\pi)d\varphi = (-1)^{n+1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{5\varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi$$

Оскільки підінтегральна функція $\cos \frac{5\varphi}{2} \sin n\varphi$ непарна, а межі інтегралу симетричні, то інтеграл нульовий. Отже, $b_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином:

$$g(\varphi) = \frac{2}{5\pi} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{20}{\pi(25-4n^2)} \cdot \cos n\varphi$$

Таким чином, маємо:

$$C + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[4^{-n}(F_n \cos n\varphi + G_n \sin n\varphi)\right] = \frac{2}{5\pi} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{20}{\pi(25-4n^2)} \cdot \cos n\varphi$$

Звідси одразу $C = \frac{2}{5\pi}$ та $G_n \equiv 0$. Для коефіцієнтів F_n маємо:

$$4^{-n}F_n = \frac{20}{\pi(25-4n^2)} \implies F_n = \frac{5 \cdot 4^{n+1}}{\pi(25-4n^2)}$$

Отже остаточно:

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{5\pi} + \frac{5}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4^{n+1}}{25-4n^2} r^{-n} \cos n\varphi$$

Відповідь. $u(r,\varphi) = \frac{2}{5\pi} + \frac{5}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4^{n+1}}{25-4n^2} r^{-n} \cos n\varphi$.

1.2 Номер 2.

Умова Задачі 1.2. Розв'язати задачу методом Фур'є: $-\Delta u = r^2 \cos\varphi$, $r < 4$ за умови $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=4} = 4\cos 2\varphi$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n(r)\cos n\varphi + B_n(r)\sin n\varphi).$$

Запишемо функцію $f(r) = r^2\cos\varphi$ у вигляді $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n(r)\cos n\varphi + d_n(r)\sin n\varphi)$. Маємо $d_n \equiv 0$, а для коефіцієнтів з косинусами $c_1(r) = r^2$, $c_n(r) = 0$ для $n \neq 1$. Далі, знаходимо градієнт функції u:

$$-\Delta u = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-A_n''(r) - \frac{1}{r}A_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}A_n(r)\right)\cos n\varphi + \left(-B_n''(r) - \frac{1}{r}B_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}B_n(r)\right)\sin n\varphi\right]$$

Бачимо, що $-A_1''(r) - \frac{1}{r}A_1'(r) + \frac{1}{r^2}A_1(r) = r^2$ (інші рівняння для $n \neq 1$ набувають стандартного вигляду $-A_n''(r) - \frac{1}{r}A_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}A_n(r) = 0$). Знайдемо початкові умови. Для цього використовуємо умову $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=4} = 4\cos 2\varphi$. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\sum_{n=0}^{\infty}(A_n(r)\cos n\varphi + B_n(r)\sin n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n'(r)\cos n\varphi + B_n'(r)\sin n\varphi)$$

Маємо, що $A_2'(4) = 4$. Для всіх інших коефіцієнтів, $B_n'(4) = 0$ та $A_n'(4) = 0$ (для $n \neq 2$). Таким чином, маємо наступні (нетривіальні) рівняння:

- $-A_1''(r) - \frac{1}{r}A_1'(r) + \frac{1}{r^2}A_1(r) = r^2$, $A_1'(4) = 0$.
- $-A_2''(r) - \frac{1}{r}A_2'(r) + \frac{4}{r^2}A_2(r) = 0$, $A_2'(4) = 4$.

Рівняння 1. Розв'язуємо перше рівняння. Маємо розв'язок:

$$A_1(r) = \frac{256}{15}r - \frac{1}{15}r^4 + \frac{\gamma}{x} + \frac{\gamma x}{16}$$

Оскільки $r < 4$, то $\gamma = 0$ і тому $A_1(r) = \frac{256}{15}r - \frac{1}{15}r^4$.
Рівняння 2. Розв'язуємо друге рівняння. Маємо розв'язок:

$$A_2(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\gamma r^2}{256}$$

По аналогічним причинам, $\gamma = 0$ і тому $A_2(r) = \frac{r^2}{2}$.
Отже, остаточна відповідь:

$$\boxed{u(r,\varphi) = \left(\frac{256}{15}r - \frac{1}{15}r^4\right)\cos\varphi + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi}$$

Відповідь. $u(r,\varphi) = \left(\frac{256}{15}r - \frac{1}{15}r^4\right)\cos\varphi + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi$.

2 Додаток

В задачі два ми пропустили розв'язок рівнянь. Тут ми наведемо їх розв'язання. Почнемо з другого рівняння.

Рівняння 2. Маємо:

$$-A_2''(r) - \frac{1}{r}A_2'(r) + \frac{4}{r^2}A_2(r) = 0, \quad A_2'(4) = 4$$

Як відомо з лекцій та практик, розв'язок такого рівняння $A_n(r) = \beta r^n + \gamma r^{-n}$, де в нашому випадку $n = 2$. Оскільки ми знаходимось всередині круга, то $\gamma = 0$. Отже, оскільки $A_2(r) = \beta r^2$, то $A_2'(r) = 2\beta r$ і тому $8\beta = 4$, звідки $\beta = \frac{1}{2}$. Звідси і розв'язок $A_2(r) = \frac{1}{2}r^2$.

Рівняння 1. Маємо:

$$-A_1''(r) - \frac{1}{r}A_1'(r) + \frac{1}{r^2}A_1(r) = r^2, \quad A_1'(4) = 0 \qquad (h(r) = r^2)$$

Спочатку розв'язуємо однорідну частину $-A_1''(r) - \frac{1}{r}A_1'(r) + \frac{1}{r^2}A_1(r) = 0$, звідки $A_1(r) = \beta r + \frac{\gamma}{r}$. Отже, нехай $\phi_1(r) := r, \phi_2(r) := 1/r$. Складаємо функцію Коші:

$$K(r,\rho) = \frac{\det \begin{bmatrix} \rho & 1/\rho \\ r & 1/r \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \rho & 1/\rho \\ 1 & -1/\rho^2 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{\rho}{r} - \frac{r}{\rho}}{-\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{r} - r\right) = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

Далі частковий розв'язок $\psi(r)$:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \int_0^r K(r,\rho)h(\rho)d\rho = -\int_0^r \frac{r}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)\rho^2 d\rho \\ &= -\frac{r}{2}\int_0^r \rho^2 d\rho + \frac{1}{2r}\int_0^r \rho^4 d\rho = -\frac{r^4}{6} + \frac{r^4}{10} = -\frac{1}{15}r^4 \end{aligned}$$

Таким чином, загальний розв'язок:

$$A_1(r) = -\frac{1}{15}r^4 + \beta r + \frac{\gamma}{r}$$

Застосуємо умову $A_1'(4) = 0$. Оскільки $A_1'(r) = -\frac{4}{15}r^3 + \beta - \frac{\gamma}{r^2}$, то:

$$-\frac{4^4}{15} + \beta - \frac{\gamma}{16} = 0 \implies \beta = \frac{\gamma}{16} + \frac{256}{15}$$

Таким чином, остаточно:

$$A_1(r) = -\frac{1}{15}r^4 + \frac{\gamma r}{16} + \frac{256r}{15} + \frac{\gamma}{r}$$