Контрольна робота з математичного аналізу #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

15 травня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. У потрійному інтегралі $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$ перейти до повторного у вказаному порядку:

$$\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz,$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq x^2+y^2\}$$

Розв'язок. Спочатку зрозуміємо, яка фігура перед нами.

$x^2+y^2 \leq 1$ це циліндр радіуса 1, вісь якого збігається з Oz. $-1 \leq z \leq x^2+y^2$ задає на проміжку $-1 \leq z \leq 0$ просто частину простору між площинами $z=-1, z=0$, а ось на проміжку $z \in [0,1]$ маємо параболоїд.

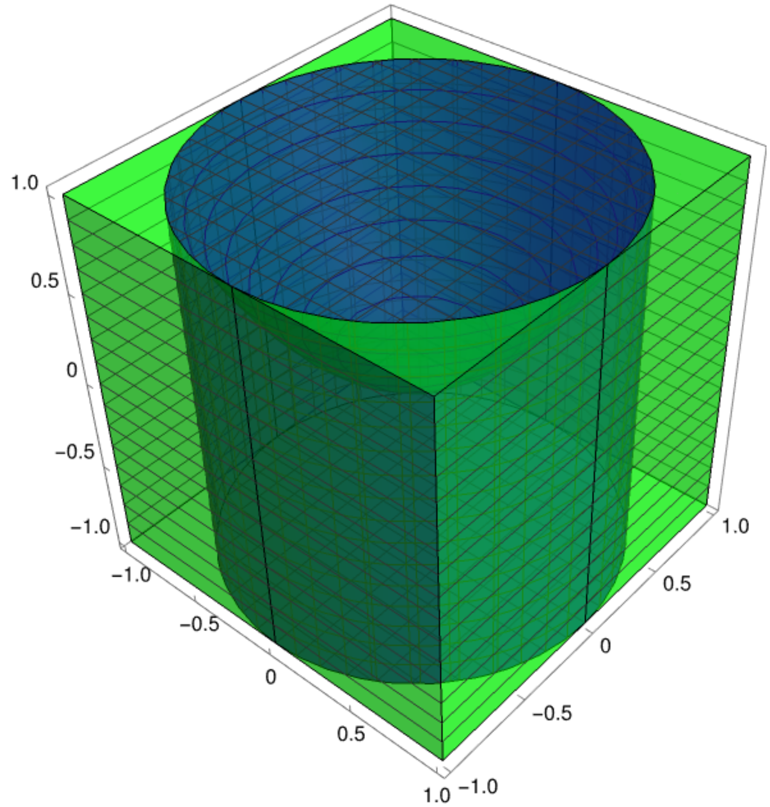

Рис. 1: Тіло з завдання 1

Отже, логічно розбити інтеграл на дві частини: одна, де z змінюється від -1 до 0, а другий від 0 до 1.

Інтеграл для $z \in [-1, 0]$. Отже, на цьому проміжку маємо частину циліндра, відрізаного по площинам $z = -1, z = 0$. Внутрішній інтеграл не буде залежати від z, оскільки маємо просто коло радіуса 1.

Проте, оскільки в завданні не дозволяється перейти до циліндричних координат, то нам потрібно явно виразити x через y, а саме $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Тоді якщо зафіксувати деякий $y = y_0 \in [-1, 1]$, то в нас x має пробігати від $-\sqrt{1 - y_0^2}$ до $+\sqrt{1 - y_0^2}$. Тоді наш інтеграл запишеться як:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

Інтеграл для $z \in [0,1]$. На цьому проміжку маємо параболоїд. Зафіксуємо дякий $z = z_0 \in [0,1]$. Тоді, маємо рівняння $z_0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ в проекції на Oxy. Тобто, по суті ми вирізаємо з кола радіуса 1 коло радіуса $\sqrt{z_0}$.

Отже, розглянемо малюнок 2. Нам потрібно розбити y на 3 інтервали: $[-1, -\sqrt{z_0}], [-\sqrt{z_0}, +\sqrt{z_0}], [+\sqrt{z_0}, 1]$.

Для першого інтервалу x буде змінюватись від $-\sqrt{1-y_0^2}$ до $+\sqrt{1-y_0^2}$, тоді інтеграл:

$$\mathcal{I}_{2,1} = \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

Для третього інтервалу ситуація аналогічна:

$$\mathcal{I}_{2,3} = \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{z}}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

А ось для другого інтервалу маємо розбиття x ще на 2 інтервали: один $[-\sqrt{1-y_0^2}, -\sqrt{1-z_0}]$, інший $[\sqrt{1-z_0}, \sqrt{1-y_0^2}]$. Тому:

$$\mathcal{I}_{2,2,1} = \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{+\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-z}} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

$$\mathcal{I}_{2,2,2} = \left(\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{+\sqrt{z}} \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz$$

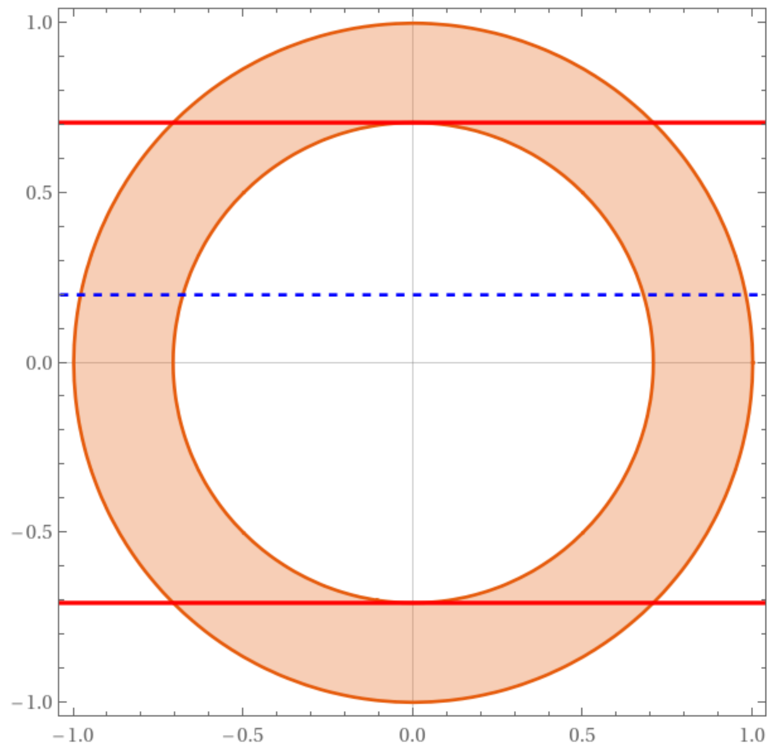

Рис. 2: Проекція на Oxy для $z \in [0, 1]$. Тут обрано $z_0 = 0.5$.

Отже остаточно відповідь це просто сума всіх отриманих інтегралів:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_{2,1} + \mathcal{I}_{2,2,1} + \mathcal{I}_{2,2,2} + \mathcal{I}_{2,3}$$

Відповідь. Див. розв'язок.

Завдання 2.

Умова. За допомогою потрійного інтегралу, знайти об'єм тіла

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2,\ z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\},\ b > a > 0$$

Розв'язок. Розберемося, яке перед нами тіло. Якщо розглянемо

$$a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$$

то маємо, що ми з кулі $x^2+y^2+z^2=b^2$ вирізаємо кулю $x^2+y^2+z^2=a^2$ (оскільки $b>a$).

Далі ми маємо конус $z^2 \geq x^2+y^2$, і по суті з нашої "стінки" кулі беремо ту частину, що міститься в конусі. Умова $z \geq 0$ показує, що ми беремо тільки один бік конуса. Малюнок зображений знизу

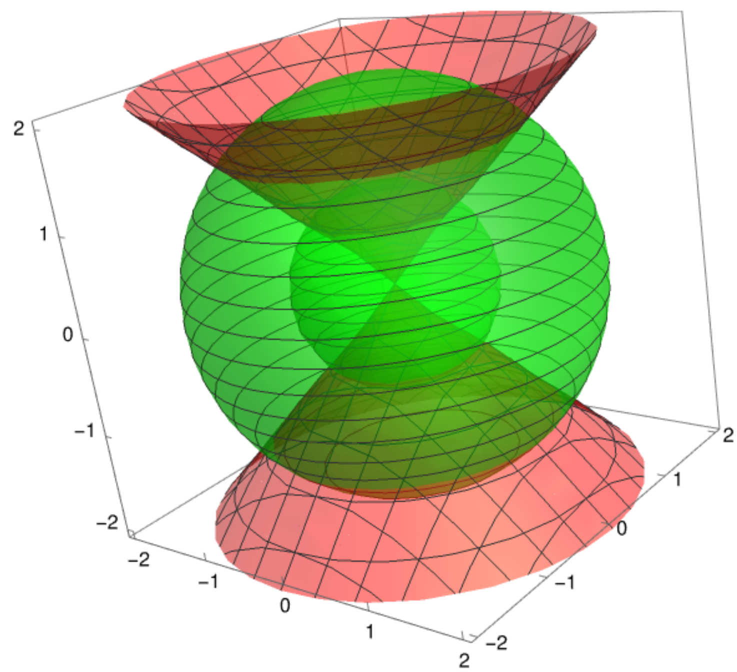

Рис. 3: Проекція на Oxy для $z \in [0,1]$. Тут обрано $z_0 = 0.5$.

Перейдемо до сферичних координат:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

Тоді з умови $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$ маємо, що $a \leq r \leq b$.

Друга умова набуде вигляду:

$$r^2\cos^2\theta \geq r^2\sin^2\theta \to \cos^2\theta \geq \sin^2\theta$$

Ну і нарешті $z>0$ означає, що ми обмежуємо рух кута θ від 0 до $\pi/2$.

Розберемося детальніше з другою умовою:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta \geq 0 \to \cos 2\theta \geq 0$$

Оскільки $\theta \in [0, \pi/2]$, то умова $\cos 2\theta \leq 0$ означає, що $\theta \in [0, \pi/4]$.

Отже остаточно наші межі:

$$a \leq r \leq b,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Якобіан перетворення:

$$J = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta$$

Об'єм це $\iiint_{\mathcal{D}} 1dxdydz$. Тому застосувавши **теорему про заміну змінних у кратному інтегралі** та **теорему Фубіні**, маємо:

$$\mathcal{I} = \int_a^b dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} r^2 \sin\theta d\theta$$

Далі просто обраховуємо цей інтеграл. Маємо:

$$\int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Далі

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

І остаточно:

$$\mathcal{I} = \int_a^b 2\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi(b^3 - a^3)}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Відповідь. $\frac{2\pi(b^3-a^3)}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Завдання 3.

Умова. Знайти масу тіла $\mathcal{D}$ з густиною розподілу речовини ρ:

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2,\ y \geq 0\},\ \rho(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$$

Розв'язок. Перед нами тіло, яке утворене наступним чином: з кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ вирізаємо кулю $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Малюнок зображений знизу

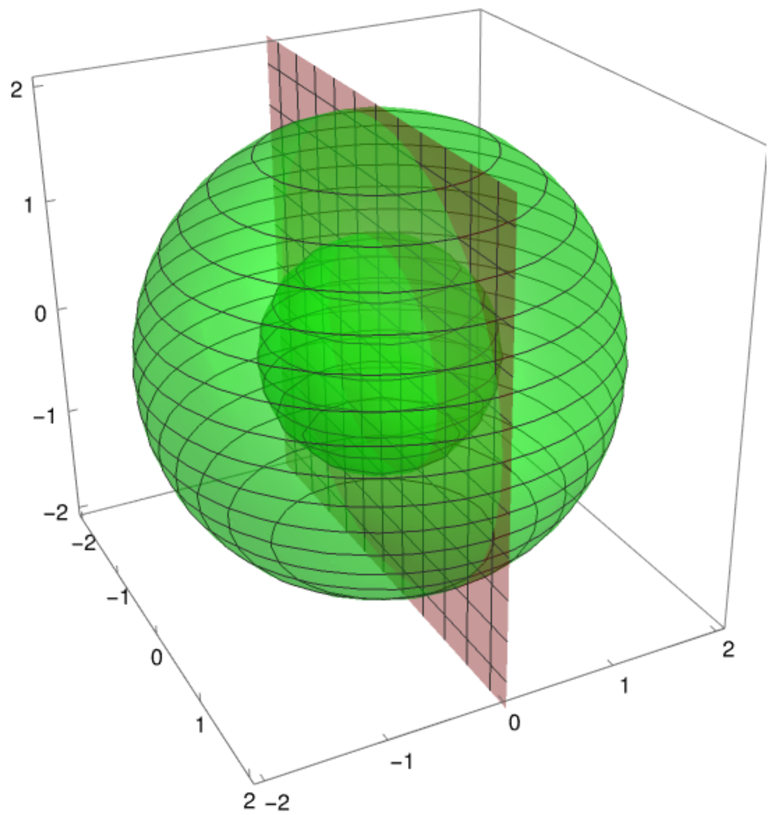

Рис. 4: Тіло з завдання 3. Нам треба відрізати зелений регіон порівну по червоній площині і взяти праву (відносно малюнка) частину

Зручно в такому разі перейти до сферичних координат. Отже, нехай

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta$$

Підставимо це у умови $\mathcal{D}$:

$$R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2 \to R^2 \leq r^2 \leq 4R^2 \to R \leq r \leq 2R$$

Друга умова це $y \geq 0$. Тобто, $\sin\theta \sin\varphi \geq 0$. Проте помітимо, що в нас θ вимірюється від 0 до π, тобто $\sin\theta \geq 0$. Це означає, що нам достатньо $\sin\varphi \geq 0$, тобто $\varphi \in [0, \pi]$. Отже, остаточно маємо наступні межі:

$$R \leq r \leq 2R,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

Якобіан нашого перетворення, як відомо:

$$J = \det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}\right) = r^2 \sin\theta$$

Отже, згідно **формулі заміни координат**:

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\mathcal{D}'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$

Наша підінтегральна функція $\rho(x, y, z) = r^2$. Згідно **теоремі Фубіні**, маємо

$$\iiint_{\mathcal{D}'} r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr\theta d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_R^{2R} r^4 \sin\theta dr$$

Далі просто залишається рахувати. Маємо для найвнутрішнього інтегралу:

$$\int_R^{2R} r^4 \sin\theta dr = \sin\theta \cdot \frac{r^5}{5}\bigg|_{r=R}^{r=2R} = \frac{31R^5}{5}\sin\theta$$

Далі якщо рухатись по θ:

$$\int_0^\pi \frac{31R^5}{5}\sin\theta d\theta = \frac{31R^5}{5}(-\cos\theta)_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{62R^5}{5}$$

І нарешті по φ:

$$\int_0^\pi \frac{62R^5}{5} d\varphi = \frac{62\pi}{5} R^5$$

Відповідь. $\frac{62\pi}{5}R^5$.

Завдання 4.

Умова. Обчислити інтеграл, переходячи до циліндричних або сферичних координат

$$\iiint_G x^2y^2dxdydz,$$

де G є областтю, що обмежена $x^2+y^2=1, z=x^2+y^2, z=0$.

Розв'язок. Рисунок аналогічний першому завданню, але якщо брати проміжок $z\in[0,1]$.

Але тут нам вже ніхто не забороняє перейти до циліндричних координат! Отже, нехай

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta, z=u$$

Тоді визначемо межі. Кут θ змінюється від 0 до 2π, оскільки маємо повні кола у перерізі. u змінюється від 0 до 1. А ось з межами на ρ ситуація складніша. Зафіксуємо деяке $u=u_0\in[0,1]$. Тоді маємо обмеження:

$$\rho^2=1,\ \rho=u_0$$

Оскільки $\rho>0$, то по суті маємо межу від u_0 до 1. Якобіан нашого перетворення:

$$J=\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\rho,u)}\right)=\rho$$

Отже, ми готові писати інтеграл згідно **формулі заміни змінних у кратному інтегралі**:

$$\mathcal{I}=\int_0^1du\int_0^{2\pi}d\theta\int_u^1\rho^2\cos^2\theta\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho d\rho=$$
$$\int_0^1du\int_0^{2\pi}d\theta\int_u^1\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta d\rho$$

Далі просто рахуємо. Отже, маємо:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \cos^2\theta \sin^2\theta \cdot \frac{1-u^6}{6} = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-u^6)du \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta$$

Знайдемо інтеграл по θ. Маємо:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\theta}{2} = \frac{1}{8}\cdot\left(2\pi - \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta\right) = \frac{\pi}{4}$$

Отже, наш інтеграл:

$$\mathcal{I} = \frac{\pi}{24}\int_0^1 (1-u^6)du = \frac{\pi}{24}\cdot\frac{6}{7} = \frac{\pi}{28}$$

Відповідь. $\pi/28$.