✏️

Homework #10 (1/1)

Завдання 1213

$$2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

Запишемо рівняння у вигляді $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ де $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. За критерієм Сильвестера, маємо $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} > 0$. З другої нерівності $2 - \lambda^2 > 0$, отже $|\lambda| < \sqrt{2}$. З третьої нерівності

$$\Delta_3 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3\lambda^2 - 1 > 0$$

Звідси $5 - 3\lambda^2 > 0 \implies \lambda^2 < \frac{5}{3} \implies |\lambda| < \sqrt{5/3}$. Отже, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} |\lambda| < \sqrt{2} \\ |\lambda| < \sqrt{5/3} \end{cases}$$

Оскільки $\sqrt{2} > \sqrt{5/3}$, то маємо $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

Завдання 1244(П)

Матриця рівняння:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Знайдемо характеристичний поліном

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - (\mathrm{tr}_1 \mathbf{A})\lambda^2 + (\mathrm{tr}_2 \mathbf{A})\lambda - \det \mathbf{A}$$

Маємо

$$\operatorname{tr}_1 \mathbf{A} = 7 \cdot 3 = 21, \ \operatorname{tr}_2 \mathbf{A} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 144$$

$$\det \mathbf{A} = 7 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 324$$

Отже маємо $\lambda^3 - 21\lambda^2 + 144\lambda - 324 = 0$. Звідси маємо $\lambda_1 = 6$ — корень другого ступеня та $\lambda_2 = 9$ — корінь першого ступеня. В такому разі, в канонічному виді маємо

$$P(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) = 6\widetilde{x}_1^2 + 6\widetilde{x}_2^2 + 9\widetilde{x}_3^2$$