§ Випадкові вектори §

Задача 1: Завдання з файлу

Умова. Дано таблицю розподілу двовимірного випадкового вектору $\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta)$. Знайти невідоме значення параметру x. Чи будуть випадкові величини ξ, η незалежними?

ξ/η	-1	1	2
0	0.02	0.01	0.03
1	0.01	0.04	0.01
3	0.08	0.01	x

Табл. 1: Таблиця розподілу (ξ, η).

Розв'язання. Для знаходження x достатньо лише скористатись умовою (тут $\mathcal{X}$ позначає множину можливих значень ξ, а $\mathcal{Y}$ – значень η):

$$\sum_{x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}} \Pr[\xi = x, \eta = y] = 1 \tag{1.1}$$

Звідси $0.21 + x = 1.0 \implies \boxed{x = 0.79}$. Для з'ясування залежності чи незалежності ξ, η скористуємось означенням. Має виконуватись:

$$\Pr[\xi = x, \eta = y] = \Pr[\xi = x]\Pr[\eta = y], \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall y \in \mathcal{Y} \tag{1.2}$$

Отже, потрібно знайти ймовірності $\Pr[\xi = x]$ та $\Pr[\eta = y]$ окремо. Для цього, скористаємось формулою:

$$\Pr[\xi = x] = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \Pr[\xi = x, \eta = y], \ \forall x \in \mathcal{X} \tag{1.3}$$

$$\Pr[\eta = y] = \sum_{x\in\mathcal{X}} \Pr[\xi = x, \eta = y], \ \forall y \in \mathcal{Y} \tag{1.4}$$

Підставляємо значення:

$$\Pr[\xi = 0] = 0.06,\ \Pr[\eta = -1] = 0.11 \tag{1.5}$$

Бачимо, що $\Pr[\xi = 0, \eta = -1] = 0.02 \neq \Pr[\xi = 0]\Pr[\eta = -1] = 0.06 \cdot 0.11$. Отже, події не є незалежними.

Задача 2: Завдання з файлу

Умова. Неперервний двовимірний випадковий вектор (ξ, η) має щільність

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \gamma xy \cdot \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x, y), \tag{2.1}$$

де γ – стала. Знайти γ та щільності розподілу f_ξ, f_η. Чи будуть ці величини незалежними?

Розв'язання. Запишемо умову нормування випадкового вектору:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dxdy = 1. \tag{2.2}$$

Отже, знайдемо значення інтегралу:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \gamma xydxdy = \gamma \int_0^1 xdx \int_0^1 ydy \tag{2.3}$$

$$= \gamma \int_0^1 xdx \cdot \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{4} = 1 \implies \boxed{\gamma = 4} \tag{2.4}$$

Тепер знайдемо щільності окремо. Маємо:

$$f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dy = \int_0^1 4xydy = 2x,\ x \in [0, 1] \tag{2.5}$$

$$f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x, y)dx = \int_0^1 4xydx = 2y,\ y \in [0, 1] \tag{2.6}$$

Отже, $f_\xi(x) = 2x\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, $f_\eta(y) = 2y\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$. Дійсно бачимо, що $f_{(\xi,\eta)}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$, а тому випадкові величини ξ, η є незалежними.

Задача 3: Завдання з файлу

Умова. Неперервний двовимірний випадковий вектор (ξ, η) має щільність

$$f_{(\xi,\eta)}(x, y) = \gamma(x^2 + y^2) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x, y) \tag{3.1}$$

де γ – стала. Знайти γ та щільності розподілу f_ξ, f_η. Чи будуть ці величини незалежними?

Розв'язання. Знову скористаємося умовою нормування:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dxdy = 1 \tag{3.2}$$

Отже, маємо:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dxdy &= \gamma\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)dxdy \\ &= \gamma\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy = \frac{2\gamma}{3} = 1 \implies \boxed{\gamma = \frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Знайдемо маргінальні розподіли:

$$f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)dy = \frac{1+3x^2}{2} \tag{3.4}$$

$$f_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)dx = \frac{1+3y^2}{2} \tag{3.5}$$

Видно, що $f_{(\xi,\eta)}(x,y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, тому ξ та η не є незалежними.

Задача 4: Завдання з файлу

Умова. Випадкова величина ξ приймає значення $0, 1, 2$ з ймовірностями $0.2, 0.3, 0.5$, а випадкова величина η приймає значення $1, 2, 3$ з ймовірностями $0.1, 0.6, 0.3$ відповідно. Побудувати таблицю розподілу (ξ, η), якщо випадкові величини ξ, η випадкові.

Розв'язання. В нашому випадку $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ – множина значень ξ, а $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$ – множина значень η. Тоді, таблиця має вигляд:

$$\Pr[\xi = x, \eta = y] = \Pr[\xi = x]\Pr[\eta = y],\ \forall x \in \mathcal{X},\ \forall y \in \mathcal{Y} \tag{4.1}$$

Отже, таблиця наведена нижче.

ξ/η	1	2	3
0	0.02	0.12	0.06
1	0.03	0.18	0.09
2	0.05	0.30	0.15

Табл. 2: Таблиця розподілу (ξ, η).

Задача 5: Завдання з файлу

Умова. Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні і кожна з них має показниковий розподіл з одним і тим самим параметром $\lambda > 0$. Знайти закон розподілу випадкового вектору $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Розв'язання. Згідно означенню показникового розподілу, густина кожної з випадкових величин $f_{\xi_k}(x_k) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Таким чином, густина розподілу вектору:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \\
&= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Якщо позначити $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$, то остаточно маємо:

$$
f_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_n \rangle\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(\mathbf{x}) \qquad (5.2)
$$

Задача 6: Завдання з файлу

Умова. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_\xi(x) = 2x \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, а випадкова величина η щільність $f_\eta(x) = \frac{1}{2} \sin x \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$, причому випадкові величини ξ та η незалежні. Знайти щільність розподілу $\boldsymbol{\zeta} = (\xi, \eta)$.

Розв'язок. Якщо випадкові величини незалежні, то щільність вектору – це добуток окремих щільностей, тобто

$$
f_{\boldsymbol{\zeta}}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y) = x \sin y \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,\pi]}(y) = x \sin y \mathbb{1}_{[0,1] \times [0,\pi]}(x, y) \qquad (6.1)
$$