Homework #3

Завдання 1.

Лінійний простір L натягнутий на систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Виписати систему рівнянь, що задає доповнення $L^\perp$ та знайти базис доповнення.

Розв'язок. Якщо позначити $T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, то $L = \mathrm{Null}(T)$, отже

$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} =_{R_1 \xleftrightarrow{\text{swap}} R_3} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 12 \end{pmatrix} =^{R_3 - 5R_1}_{R_2 - 2R_1} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -12 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$$

Отже, нехай $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in L$, тому $x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 0, 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$.

Нескладно бачити, що $\dim L = 2$. Параметризуємо $x_4 = \xi, x_3 = \zeta$, в такому разі

$$x_2 = -\frac{\xi + 5\zeta}{4},\ x_1 = -4\xi - 9\zeta - \frac{7}{4}(-\xi - \zeta) = -\frac{9\xi + 29\zeta}{4}$$

Отже

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{9\xi+29\zeta}{4} \\ -\frac{\xi+5\zeta}{4} \\ \zeta \\ \xi \end{pmatrix} \mid \xi, \zeta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9\xi + 29\zeta \\ \xi + 5\zeta \\ -4\zeta \\ -4\xi \end{pmatrix} \mid \xi, \zeta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 29 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже $L = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} := \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Помітимо, що:

$$L^\perp = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \end{pmatrix}$$

В такому разі вже маємо систему рівнянь, що визначає $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in L^{\perp}$:

$$\begin{cases} 9y_1 + y_2 - 4y_4 = 0 \\ 29y_1 + 5y_2 - 4y_3 = 0 \end{cases}$$

Знайдемо базис. Нехай $y_2 = \alpha, y_4 = \beta$, в такому випадку $y_1 = \frac{4\beta - \alpha}{9}$, тоді

$$\frac{29}{9}(4\beta - \alpha) + 5\alpha - 4y_3 = 0 \to y_3 = \frac{4\alpha + 29\beta}{9}$$

В такому разі бачимо, що

$$L^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} -\alpha + 4\beta \\ 9\alpha \\ 4\alpha + 29\beta \\ 9\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 29 \\ 9 \end{pmatrix} \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Завдання 2.

Доповнення лінійного простору $L^{\perp}$ задано наступним чином:

$$L^{\perp} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Знайти L.

Розв'язок. Простір $L^{\perp}$ за своєю суттю є площиною, заданою двома векторами $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тому простір L є прямою, що перпендикулярна цій площині, а отже

$$L = \mathrm{Lin}\{[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]\} = \mathrm{Lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

Але зробимо це негеометрично. Оскільки $(L^{\perp})^{\perp} = L$, то достатньо знайти доповнення до $L^{\perp}$. Тобто:

$$L = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} =_{R_2 - R_1} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже, маємо систему рівнянь, що обтягують L (де $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Якщо параметризувати $x_3 = t \to x_2 = -t, x_1 = -t \to \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а отже $L = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, що ми і отримали до цього.