Домашня робота з математичного аналізу #20

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

25 квітня 2023 р.

Завдання 2.2.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли другого родку:

$$\mathcal{I} = \int_\Gamma \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2},\ \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, 1 \le x \le 2\}$$

Розв'язок. Параметризуємо нашу криву як $x = t \in [1, 2]$, тоді $y = t$. Тому $dx = dy = dt$ і наш інтеграл стає:

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \frac{2tdt}{2t^2} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2$$

Завдання 2.3.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли другого родку:

$$\mathcal{I} = \int_\Gamma x^2dx + y^2dy,\ \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = e^x, 0 \le x \le 1\}$$

Розв'язок. Параметризуємо нашу криву як $x = t \in [0, 1]$, тоді $y = e^t$. Тому $dx = dt, dy = e^t dt$ і наш інтеграл стає:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 t^2dt + e^{2t} \cdot e^t dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{e^{3t}}{3}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{e^3}{3}$$

Завдання 2.4.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли другого родку:

$$\mathcal{I} = \int_{AB} y^2 dx + 2xydy$$

від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$ вздовж кривих:

$$y = x, y = x^2, y = \sqrt{x}$$

Розв'язок. Параметризуємо $x = t \in [0,1]$, тоді для першої кривої маємо $y = t$, для другої $y = t^2$, для третьої $y = \sqrt{t}$.

Тоді інтеграл для першої кривої, враховуючи, що $dx = dy = dt$:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 t^2 dt + 2t^2 dt = \int_0^1 3t^2 dt = t^3 \Big|_{t=0}^{t=1} = 1$$

Для другої кривої (тут $dx = dt, dy = 2tdt$):

$$\mathcal{I} = \int_0^1 t^4 dt + 2t^3 \cdot 2tdt = \int_0^1 5t^4 dt = t^5 \Big|_{t=0}^{t=1} = 1$$

Нарешті для третьої кривої ($dx = dt, dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$):

$$\mathcal{I} = \int_0^1 tdt + 2t\sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^1 2tdt = t^2 \Big|_{t=0}^{t=1} = 1$$

Отже всі інтеграли дорівнюють 1.

Насправді якщо позначити $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$, то можна помітити, що

$$\boldsymbol{F} = \nabla f, \ f = xy^2$$

Тобто векторне поле $\boldsymbol{F}$ є консервативним. Тоді:

$$\int_{AB} \langle \nabla f(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r} \rangle = f(\boldsymbol{r}_B) - f(\boldsymbol{r}_A) = 1 - 0 = 1$$