9️⃣

Homework #9

Номер 164.

Тут я побачив 2 методи: один застосовуючі доволі стандартні перетворення, а інший за допомогою Feynman's Integral Trick (не знаю, чи розгалужений цей термін в саме східних регіонах), проте ми не вчили теорію, що дозволяє його застосувати.

Стандартний метод.

Зробимо заміну $x = \tan\theta \to \theta = \arctan x \to d\theta = \frac{dx}{1+x^2}$. Отже, змінні змінюють від $\arctan(0) = 0$ до $\arctan(1) = \pi/4$. Тому маємо:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)d\theta$$

Далі використовуємо доволі розповсюджену техніку знаходження таких інтегралів, а саме застосувати формулу

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Доволі нерідко буває, що потім вираз $2I = \int_a^b (f(x) + f(a+b-x))dx$ доволі просто рахується. Доказати цю формулу доволі легко: робимо заміну $x = a + b - t \to dx = -dt$, в такому разі область інтегрування змінюється на від b до a:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$$

Ну і зліва звісно можна перейменувати t на x і отримати вираз вище. Отже, повернімося до нашого інтегралу і застосуємо цю формулу:

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(\pi/4-\theta))d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

Спростовуємо вираз:

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right) = \int_0^{\pi/4} (\ln 2 - \ln(1+\tan\theta))d\theta$$

Користуємось лінійністю інтегралу:

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln 2 d\theta - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)d\theta = \frac{\pi \ln 2}{4} - I$$

Звідки отримуємо $2I = \frac{\pi \ln 2}{4} \to I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Техніка Фейнмана.

Розглянемо більш загальний інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$$

В такому разі наш інтеграл, що нам потрібно знайти $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = I(1)$.

Далі знайдемо часткову похідну по α:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+\alpha x)(1+x^2)}$$

Інтеграл справа вже знайти відносно легко, але я не хочу тут дуже багато розписувати, оскільки хочу показати розв’язок ідейно. А ідейно цей вираз розбивається на простіші дроби, а далі інтегрується кожен окремо. Після об’ємних перетворень отримаємо:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\ln 2}{2(1+\alpha^2)} - \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$$

А далі інтегруємо обидві частини по α від 0 до 1:

$$\int_0^1 \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = I(1) - I(0) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} - I(1)$$

Оскільки $I(0) = \int_0^1 \frac{\ln 1}{1+x^2} dx = 0$, то

$$2I(1) = 2J = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}$$

Перший інтеграл береться заміною $\beta = 1+\alpha^2 \to \alpha d\alpha = \frac{d\beta}{2}$, другий просто є $\arctan\alpha\Big|_0^1 = \pi/4$, тому

$$2J = \frac{\pi}{8}\int_1^2 \frac{d\beta}{\beta} + \frac{\pi\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8}\left(\ln 2 + \ln\beta\Big|_1^2\right) = \frac{\pi\ln 2}{4}$$

Звідси та сама відповідь $J = \pi\ln 2/8$. Менш елегантно, ніш перший спосіб, але працює в дуже багатьох складних інтегралах.

Номер 88.

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$$

Робимо заміну $r = 2x+1 \to dx = \frac{dr}{2}$, границі інтегрування змінюються від 1 до 9

$$I = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$$

Нехай тепер $w = \sqrt{r} \to dw = \frac{dr}{2\sqrt{r}} = \frac{dr}{2w} \to dr = 2wdw$. Границі інтегрування від 1 до 3:

$$I = \int_1^3 \frac{wdw}{1+w} = \int_1^3 dw - \int_1^3 \frac{dw}{1+w} = 2 - \ln(1+w)\Big|_1^3 = 2 - \ln 2$$

Номер 89.

$$I = \int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$$

Зробимо заміну $u = \frac{1}{x^2} \to du = \frac{-2dx}{x^3} \to \frac{dx}{x^3} = -\frac{du}{2}$. Межі інтегрування йдуть від 1 до $1/4$:

$$I = -\frac{1}{2}\int_1^{1/4} e^u du = \frac{1}{2}\int_{1/4}^1 e^u du = \frac{e - \sqrt[4]{e}}{2}$$

Номер 93.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Нехай $u = e^x \to du = e^x dx \to du = udx$, тому $dx = du/u$. Межі змінюються від 1 до e. Отже

$$I = \int_1^e \frac{du}{u(u + 1/u)} = \int_1^e \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u \Big|_1^e$$

З цього випливає відповідь $\arctan e - \frac{\pi}{4}$.

Номер 150.

$$I = \int_0^1 x^{15} \sqrt{1 + 3x^8} dx$$

Нехай $u = 1 + 3x^8$, тоді $du = 24x^7 dx \to x^7 dx = \frac{du}{24}$. Тоді

$$x^{15} dx = x^8 (x^7 dx) = \frac{u-1}{3} \cdot \frac{du}{24} = \frac{u-1}{72} du$$

Межі інтегрування змінюються тепер від 1 до 4. Отже

$$I = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{u-1}{72} du$$

Далі користуємось лінійністю інтегралу:

$$I = \frac{1}{72} \left(\int_1^4 u^{3/2} du - \int_1^4 u^{1/2} du \right) = \frac{1}{72} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} \Big|_1^4 - \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^4 \right)$$

Звідки отримуємо $I = \frac{1}{72} \left(\frac{62}{5} - \frac{14}{3} \right) = \frac{29}{270}$.