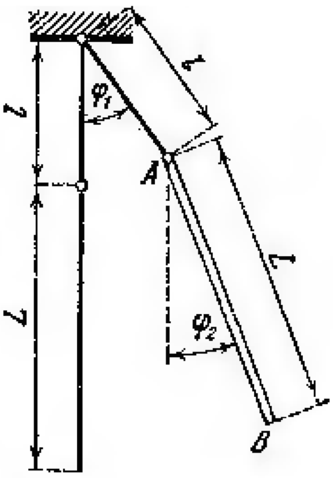
Домашня Робота #4 з Теорії Коливань

Захаров Дмитро

16 березня, 2025

1 Задача 3

Умова 1.1. Визначте частоти і форми малих коливань у вертикальній площині однорідного стержня довжини $L = 2\ell$, прив'язаного до нитки довжини ℓ.



Розв'язання. Нехай, як і на малюнку, амплітуди кутів відхилення від вертикалі дорівнюють φ_1 та φ_2. Початкова потенціальна енергія $\Pi_0 = -2mg\ell$. Оскільки масою нитки ми нехтуємо, то потенціальна енергія в такому разі:

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = -mg\ell\cos\varphi_1 - mg\ell\cos\varphi_2 = -mg\ell(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

Таким чином, зміна потенціальної енергії:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi(\varphi_1, \varphi_2) &= 2mg\ell - mg\ell(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \\ &= mg\ell((1-\cos\varphi_1) + (1-\cos\varphi_2)) \\ &\approx \frac{1}{2}mg\ell\varphi_1^2 + \frac{1}{2}mg\ell\varphi_2^2\end{aligned}$$

Цікавіша ситуація з кінетичною енергією. Вона складаєтсья з обертальної кінетичної енергії стержня та кінетичної енергії руху центра мас. Кінетична енергія обертального руху може бути записана як $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}_2$, де I - момент інерції стержня, $I = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$, тому $T_{\text{rot}} = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}_2$.

Розберемося з кінетичною енергією руху центра мас. Виразимо координати центра мас стержня:

$$\begin{aligned} x_C &= \ell(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2), \\ y_C &= -\ell(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \end{aligned}$$

Похідні по часу:

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \ell(\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\cos\varphi_2), \\ \dot{y}_C &= \ell(\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

Модуль швидкості можна знайти як $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}$, тому

$$\begin{aligned} v_C^2 &= \ell^2(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2\cos^2\varphi_2 \\ &\quad + \dot{\varphi}_1^2\sin^2\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2\sin^2\varphi_2) \\ &= \ell^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)) \\ &= \ell^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Проте, цей вираз, взагалі кажучи, не є квадратичною формою відносно $(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$, оскільки нам треба ще скористатися малістю φ_1, φ_2. Для чого скористаємося наближенням $\cos\varphi_i \approx 1 - \frac{\varphi_i^2}{2}$, та $\sin\varphi_i \approx \varphi_i$. Тоді:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 &\approx \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right) + \varphi_1\varphi_2 \\ &\approx 1 + \varphi_1\varphi_2 - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2} = 1 - \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} \end{aligned}$$

(тут ми відкинули $\frac{1}{4}\varphi_1^2\varphi_2^2$ у силу малості). Таким чином, отримуємо:

$$v_C^2 \approx \ell^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\left(1 - \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}\right)\right) = \ell^2((\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2)$$

Оскільки вираз $\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2$ наближено має четвертий порядок малості, то остаточно отримуємо $v_C \approx \ell(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$. Таким чином,

$$T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}_2^2 \approx \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\varphi}_2^2$$

Тепер, запишемо як потенціальну, так і кінетичну енергію у вигляді квадратичної форми. Для потенціальної енергії все доволі просто:

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\varphi^\top A_\Pi \varphi, \quad A_\Pi = \begin{pmatrix} mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

З кінетичною енергією, розкриємо дужки:

$$T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}_1^2 + m\ell^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\varphi}_2^2$$

Таким чином, квадратична форма:

$$T(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^\top A_T \dot{\varphi}, \quad A_T = \begin{pmatrix} m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

Для аналізу частот, знайдемо розв'язок рівняння $\det\left(-\omega^2 A_T + A_\Pi\right) = 0$:

$$-\omega^2 A_T + A_\Pi = \begin{pmatrix} mg\ell - m\ell^2\omega^2 & -m\ell^2\omega^2 \\ -m\ell^2\omega^2 & mg\ell - \frac{4}{3}m\ell^2\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} & -\frac{\omega^2}{\Omega^2} \\ -\frac{\omega^2}{\Omega^2} & 1 - \frac{4}{3}\frac{\omega^2}{\Omega^2} \end{pmatrix} mg\ell,$$

де $\Omega^2 = g/\ell$ – величина з розмірністю частоти для позбавлення від одиниць вимірності. Тоді, визначник:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) - \frac{\omega^4}{\Omega^4} = 0$$

Розкриваємо дужки:

$$\frac{1}{3}\frac{\omega^4}{\Omega^4} - \frac{7}{3}\frac{\omega^2}{\Omega^2} + 1 = 0$$

Якщо позначити $\xi := \omega^2/\Omega^2$, то отримуємо рівняння $\xi^2 - 7\xi + 3 = 0$, звідки $\xi = \frac{7\pm\sqrt{37}}{2}$. Оскільки $\sqrt{37} \approx \sqrt{36} = 6$, то наближено $\xi_1 = \frac{13}{2}$ та $\xi_2 = \frac{1}{2}$. Таким чином, наближено, $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{13g}{2\ell}}$ та $\omega_2 \approx \sqrt{\frac{g}{2\ell}}$ або $\omega_1 \approx 2.56\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ та $\omega \approx 0.68\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Для знаходження φ_2/φ_1 при кожній частоті, достатньо знайти власні вектори матриці $-\omega_i^2 A_T + A_\Pi$ для $i = 1, 2$, а далі знайти відношення їх компонент. Для ω_1 маємо власний вектор $(-0.763, 0.646)$, тому відношення $\varphi_1/\varphi_2 = -0.763/0.646 \approx -1.18$. Для ω_2 аналогічно маємо $\varphi_1/\varphi_2 \approx 0.85$.