✏️

Homework #11 (1/1)

Завдання 1215

Запишемо квадратичну форму у вигляді

$$Q(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & \lambda & 5\\ \lambda & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Таким чином, щоб квадратична форма Q була позитивно визначена, потрібно, щоб

$$\Delta_1 := 1>0,\ \Delta_2 := \begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 4\end{vmatrix}=4-\lambda^2>0$$

$$\Delta_3 := \begin{vmatrix}1 & \lambda & 5\\ \lambda & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}\lambda & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-5-\lambda^2+15\lambda+15\lambda-100=-\lambda^2+30\lambda-105>0$$

З рівняння $\lambda^2-30\lambda+105=0$ можемо дістати 2 кореня:

$$\lambda_+=15+2\sqrt{30},\ \lambda_-=15-2\sqrt{30}$$

Отже, умова $\Delta_3>0$ еквівалентна:

$$\lambda^2-30\lambda+105\leq 0\to(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)\leq 0\to\lambda\in[\lambda_-,\lambda_+]$$

Умова $\Delta_2>0$ еквівалентна $\lambda\in(-2,2)$. Покажемо, що $[\lambda_-,\lambda_+]\cap(-2,2)=\emptyset$. Для цього достатньо показати, що $2<\lambda_-\wedge 2<\lambda_+$. Друге очевидне, а перше правильне бо

$$2<15-2\sqrt{30}\to-13<-2\sqrt{30}\to 13\geq 2\sqrt{30}\to 169\geq 120$$

Отже немає таких $\lambda\in\mathbb{R}$, для яких Q позитивно визначене.

Завдання 1250

Запишемо квадратичну форму

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

у наступному вигляді:

$$Q=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Знайдемо власні числа і вектори матриці $\mathbf{A}$. Для цього знайдемо характеристичний поліном $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$. Для цього знайдемо $\operatorname{tr}_1\mathbf{A},\operatorname{tr}_2\mathbf{A},\det\mathbf{A}$:

$$\operatorname{tr}_1\mathbf{A}=7,\ \operatorname{tr}_2\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-36$$

Отже, $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+36=(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$ і тому маємо 3 власні числа: $\lambda_1=-2,\lambda_2=3,\lambda_3=6$. Тому канонічний вид:

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2$$

Знайдемо перетворення. Для цього знайдемо власні вектори $\mathbf{A}$, тобто знайдемо базисні вектори $\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})$. Маємо

$$\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Тобто якщо $\mathbf{q}^1 = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})$, то $q_3^1 = 0$ і $q_1^1 = q_2^1$, отже в якості базисного вектора можна взяти $\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 3$:

$$\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Якщо $\mathbf{q}^2 = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \end{bmatrix} \in \operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})$, то якщо покласти $q_3^2 = t$, то будемо мати $q_2^2 = -t$ і в такому випадку $q_1^2 = q_2^2 + 2q_3^2 = -t + 2t = t$, тобто

$$\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Отже можемо обрати $\hat{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Нарешті для $\lambda_3 = 6$:

$$\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}) = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \operatorname{Null} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Якщо $\mathbf{q}^3 = \begin{bmatrix} q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_3^3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E})$, то якщо покласти $q_2^3 = t$, то будемо мати $q_3^3 = 2t$ і в такому випадку $q_1^3 = q_2^3 - q_3^3 = -t$, тобто

$$\operatorname{Null}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Отже можемо обрати $\hat{\mathbf{q}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Отже, наша матриця переходу

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

Якщо позначити $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, то маємо

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{L} \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{P}^T$$

Тому

$$Q = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{P}^T\mathbf{x}$$

Якщо позначити $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\widetilde{x}_1\\ \widetilde{x}_2\\ \widetilde{x}_3\end{bmatrix}$, то $\widetilde{\mathbf{x}}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{P}$ і тому

$$Q = \widetilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{x}}^T = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\widetilde{x}_j^2$$

Де $\begin{bmatrix}\widetilde{x}_1\\ \widetilde{x}_2\\ \widetilde{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$