Homework #4 (0.5/1)

Номер 1586.

Спочатку знайдемо власні вектора матриці. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}_1(A)\lambda^2 + \mathrm{tr}_2(A)\lambda - \det A = 0$$

Знаходимо сліди:

$$\mathrm{tr}_1(A) = 17 + 17 + 11 = 45$$

$$\mathrm{tr}_2(A) = \begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{vmatrix} = 567$$

$$\det A = 2187$$

Отже характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 45\lambda^2 + 567\lambda - 2187$$

Не дуже приємне рівняння, але корні таки гарні: $\lambda_1 = 9$ (корінь другого ступеня) та $\lambda_2 = 27$.

Знайдемо власні вектора. Оскільки за означенням власний вектор $\mathbf{v}$ повинен бути таким, що $A\mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}$ або $(A - \lambda_j E)\mathbf{v}$, то $\mathbf{v} \in \mathrm{Null}(A - \lambda_j E)$. Тому знаходимо ядра і почну я з другого власного числа:

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} =^{(R_2 - (4/5)R_1)}_{(R_3 - (1/5)R_1)} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 9/5 & 18/5 \\ 0 & -9/5 & -18/5 \end{pmatrix}$$

Отже маємо множину векторів виду $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ таких, що $5x + 4y - 2z = 0, y + 2z = 0$, тобто по суті маємо перетин двох площин, отже пряму. Нехай $z = t$. В такому разі $y = -2t$, $5x - 8t - 2t = 0 \to x = 2t$. Тому маємо множину вида $t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Оберемо $t = 1$ і запишемо у власний вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер перше власне число:

$$\mathrm{Null}\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже маємо множину векторів виду $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ таких, що їх компоненти лежать у площині $2x - 2y + z = 0$.

Вектор нормалі цієї площини $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, достатньо знайти 2 вектора, що перпендикулярні цьому вектору.

Перший вгадаємо: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Інший знайдемо як $\mathbf{v}_3 = [\mathbf{n} \times \mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Також нормалізуємо ці вектора:

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Таким чином матриця перетворення:

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

В цьому базисі матриця буде мати вид $A_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

Номер 1589.

Знайдемо власні числа. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det A$$

Слід: $\mathrm{tr}(A) = 10$, детермінант: $\det A = 21 - (4 - i^2) = 16$. Тому маємо характеристичний поліном $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 8)(\lambda - 2)$, звідки власні числа $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$. Знайдемо власні вектора:

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix} =^{R_2 - (2+i)R_1} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} 1 & 2-i \end{pmatrix}$$

Отже маємо множину власних векторів $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ таких, що $z + (2-i)w = 0$. Звідси бачимо, що $z = (i-2)w$, тому множина векторів має вид $w\begin{pmatrix} i-2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Візьмемо $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тепер для другого власного числа:

$$\mathrm{Null}(A - \lambda_2 E) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{pmatrix} =_{R_2 + \frac{2+i}{5}R_1} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & 2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -5 & 2-i \end{pmatrix}$$

Тоді маємо $-5w + (2-i)z = 0 \to 5w = (2-i)z \to w = \frac{5}{2-i}z = (2+i)z$, тому маємо множину власних векторів $z\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$. Візьмемо $z = 1$ і покладемо в $\mathbf{v}_2$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$.

Отже, маємо перетворення $T = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$. Щоб зробити матрицю унітарною, запишемо її у виді ηT так, щоб $\det \eta T = 1$. Оскільки $\det T = 6$, а $\det \eta T = \eta^2 \det T = 1$, то маємо $\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, тому

$$T = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Матриця A у цьому базисі буде мати вид $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ (коефіцієнти у цієї матриці не зміняться після зміни T на коефіцієнт, бо $(\eta T)^{-1} A (\eta T) = \frac{1}{\eta} \cdot T^{-1}AT \cdot \eta = T^{-1}AT = \Lambda$.