# Домашня робота з диференціальної геометрії #10

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

30 квітня 2023 р.

## Завдання 1.1.

**Умова.** Розглянемо круговий конус $F$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = \begin{bmatrix} ru^2 \cos u^1 \\ ru^2 \sin u^1 \\ hu^2 \end{bmatrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої конуса $F$ в точці $P(\pi/2, 1)$.

**Розв'язок.** Запишемо часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(\pi/2, 1)}{\partial u^1} = \begin{bmatrix} -ru^2 \sin u^1 \\ ru^2 \cos u^1 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{(u^1, u^2) = (\pi/2, 1)} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(\pi/2, 1)}{\partial u^2} = \begin{bmatrix} r \cos u^1 \\ r \sin u^1 \\ h \end{bmatrix} \Bigg|_{(u^1, u^2) = (\pi/2, 1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ h \end{bmatrix}$$

Радіус-вектор у точці:

$$\boldsymbol{r}(\pi/2, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ h \end{bmatrix}$$

Отже рівняння площини:

$$\boldsymbol{\pi}(u,v) = \begin{bmatrix}0\\r\\h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-r\\0\\0\end{bmatrix}v + \begin{bmatrix}0\\r\\h\end{bmatrix}u = \begin{bmatrix}-rv\\(1+r)u\\(1+h)u\end{bmatrix}$$

Для знаходження рівняння нормалі, знайдемо векторний добуток векторів, що утворюють площину:

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}(\pi/2,1)}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(\pi/2,1)}{\partial u^2}\right] = \begin{bmatrix}0\\hr\\-r^2\end{bmatrix}$$

Отже, маємо рівняння прямої:

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \begin{bmatrix}0\\r\\h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\hr\\-r^2\end{bmatrix}t = \begin{bmatrix}0\\r(1+ht)\\h-r^2t\end{bmatrix}$$

**Відповідь.** Рівняння площини $[-rv,(1+r)u,(1+h)u]^\top$, рівняння нормалі $[0,r(1+ht),h-r^2t]^\top$.

# Завдання 1.3.

**Умова.** Розглянемо катеноїд $F$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2) = \begin{bmatrix}\cosh u^1 \cos u^2\\ \cosh u^1 \sin u^2\\ u^1\end{bmatrix}$$

Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої катеноїда $F$ в точці $P(0,\pi/3)$.

**Розв'язок.** Розглянемо часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(0,\pi/3)}{\partial u^1} = \begin{bmatrix}\sinh u^1 \cos u^2\\ \sinh u^1 \sin u^2\\ 1\end{bmatrix}\Bigg|_{(u^1,u^2)=(0,\pi/3)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(0,\pi/3)}{\partial u^2} = \begin{bmatrix} -\cosh u^1 \sin u^2 \\ \cosh u^1 \sin u^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{(u^1,u^2)=(0,\pi/3)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Радіус-вектор точки:

$$\boldsymbol{r}(0,\pi/3) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отже, рівняння площини:

$$\boldsymbol{\pi}(u,v) = \begin{bmatrix} 1/2 - \sqrt{3}v/2 \\ \sqrt{3}/2 + v/2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}v}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+v}{2} \\ u \end{bmatrix}$$

Напрямний вектор нормальної прямої:

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}(0,\pi/3)}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(0,\pi/3)}{\partial u^2}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Отже рівняння прямої:

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -t \end{bmatrix}$$

**Відповідь.** Рівняння площини $[(1-\sqrt{3}v)/2, (\sqrt{3}+v)/2, u]^\top$, рівняння прямої $[1/2, \sqrt{3}/2, -t]^\top$.

# Завдання 2.

**Умова.** Доведіть, що для регулярної циліндричної поверхні $F$ в $\mathbb{R}^3$ дотичні площини в усіх точках фіксованої твірної співпадають. Інакше кажучи, якщо точка рухається по фіксованій твірній на циліндричні поверхні $F$, то її дотична площина $T_P F$ не змінюється (ковзає сама по собі).

**Розв'язок.** Запишемо рівняння циліндричної поверхні:

$$\boldsymbol{x}(u^1, u^2) = \boldsymbol{f}(u^1) + \boldsymbol{\alpha} u^2$$

Запишемо часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^1} = \boldsymbol{f}'(u^1),\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^2} = \boldsymbol{\alpha}$$

Отже рівняння площини в деякій точці з внутрішніми координатами $(u_0^1, u_0^2)$ запишеться як:

$$\boldsymbol{\pi}(u, v) = \boldsymbol{f}(u_0^1) + \boldsymbol{\alpha} u_0^2 + \boldsymbol{f}'(u_0^1) u + \boldsymbol{\alpha} v$$

Якщо розглянути площини вздовж твірних, то зафіксуємо $u_0^1 = \text{const} \equiv C$ і будемо рухати $u_0^2 = t \in \mathbb{R}$. Тоді отримаємо площини:

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\boldsymbol{f}(C) + \boldsymbol{\alpha} t) + \boldsymbol{f}'(C) u + \boldsymbol{\alpha} v$$

По перше бачимо, що ця площина утворена константними векторами $\boldsymbol{f}'(C)$ та $\boldsymbol{\alpha}$, а площини проходять через точки вздовж твірної, отже маємо ковзаючу площину саму по собі.

# Завдання 3.

**Умова.** Доведіть, що для будь-якої регулярної поверхні обертання нормальна пряма в довільній точці поверхні перетинає вісь обертання.

**Розв'язок.** Поверхню обертання можна записати у вигляді:

$$\boldsymbol{x}(t, \varphi) = \begin{bmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Напрямний вектор нормальної прямої:

$$\boldsymbol{n}(t_0, \varphi_0) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}(t_0, \varphi_0)}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}(t_0, \varphi_0)}{\partial \varphi}\right] = \begin{bmatrix} -r(t_0)h'(t_0)\cos\varphi \\ -r(t_0)h'(t_0)\sin\varphi \\ r(t_0)r'(t_0) \end{bmatrix}$$

Отже рівняння прямої:

$$\boldsymbol{l}(v) = \begin{bmatrix} r(t_0)\cos\varphi(1 - h'(t_0)v) \\ r(t_0)\sin\varphi(1 - h'(t_0)v) \\ h(t_0) + vr(t_0)r'(t_0) \end{bmatrix}$$

Отже при $v = \frac{1}{h'(t_0)}$ наша пряма перетинає точку на вісі $Ox^3$ на висоті

$$x^3 = \frac{h(t_0)h'(t_0) - r(t_0)r'(t_0)}{h'(t_0)}$$

# Завдання 4.

**Умова.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню $F$ в $\mathbb{R}^3$:

$$x^3 - x^1x^2 = 0$$

- Запишіть рівняння дотичної площини і нормальної прямої поверхні $F$ в точці $P(1, 0, 0)$.
- *Запишіть рівняння дотичної площини поверхні $F$, що проходить через точку $A(0, 0, -1)$.
- *Запишіть рівняння нормальної прямої поверхні $F$, що проходить через точку $B(0, 0, 1)$.

**Розв'язок.**

**Пункт 1.** Рівняння дотичної площини:

$$\langle \nabla\Phi(\boldsymbol{r}_0), \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \rangle = 0$$

Градієнт:

$$\nabla\Psi = [-x^2, -x^1, 1]^\top$$

Підставивши нашу точку $\boldsymbol{r}_P = [1, 0, 0]^\top$ маємо:

$$\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^1 - 1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \rangle = 0 \to x^3 - x^2 = 0$$

Нормальна пряма:

$$\frac{x^1 - 1}{0} = \frac{x^2}{-1} = \frac{x^3}{1}$$

**Пункт 2.** Запишемо рівняння дотичної площини у довільній точці $[x_0^1, x_0^2, x_0^3]^\top$. Маємо:

$$\langle \begin{bmatrix} -x_0^2 \\ -x_0^1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x^1 - x_0^1 \\ x^2 - x_0^2 \\ x^3 - x_0^3 \end{bmatrix} \rangle = 0 \to -x_0^2 x^1 - x_0^1 x^2 + x^3 + (2x_0^1 x_0^2 - x_0^3) = 0$$

Оскільки $x_0^1 x_0^2 - x_0^3 = 0$ можемо дещо спростити:

$$x_0^2 x^1 + x_0^1 x^2 - x^3 - x_0^3 = 0$$

Відомо, що точка $A(0, 0, -1)$ належить цій площині, тобто

$$1 - x_0^3 = 0 \to x_0^3 = 1$$

Тобто для будь-яких $x_0^1 x_0^2 = 1$ площина буде проходити через задану точку. Можемо параметризувати сімейство таких площин. Отже нехай $x_0^1 = t$, тоді $x_0^2 = \frac{1}{t}$ і тоді:

$$\pi_t : \frac{x^1}{t} + t x^2 - x^3 = 1$$

**Пункт 3.** Рівняння нормальної площини:

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \begin{bmatrix} x_0^1 - x_0^2 t \\ x_0^2 - x_0^1 t \\ x_0^3 + t \end{bmatrix}$$

Відомо, що вона проходить через $[0, 0, 1]^\top$. Тому маємо для деякого $t = \tau$:

$$\begin{cases} x_0^1 - x_0^2 \tau = 0 \\ x_0^2 - x_0^1 \tau = 0 \\ x_0^3 + \tau = 1 \\ x_0^3 = x_0^1 x_0^2 \end{cases}$$

Єдиний розв'язок цієї системи $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, \tau) = (0, 0, 0, 0)$. Це відповідає точці $(0, 0, 0)$ на поверхні і рівнянню прямої $x^1 = x^2 = 0, x^3 = t$.

# Завдання 5.

**Умова.** Розглянемо регулярну неявно задану поверхню $F$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = 0.$$

Зафіксуємо в $\mathbb{R}^3$ точку $A(a^1, a^2, a^3)$, що не лежить на поверхні $F$. Доведіть (або спростуйте), що якщо точка $(p^1, p^2, p^3)$ на поверхні $F$ є найближчою або найдальшою серед усіх точок поверхні $F$ по відношенню до точки , то тоді пряма  є нормальною прямою поверхні $F$ в точці .

**Розв'язок.** Запишемо що саме означає, що точка $\boldsymbol{x}$ є найближчою або найдальшою точкою відносно $\boldsymbol{a}$. Для цього нам потрібно записати умову на умовний екстремум, тобто розглядаємо функцію квадрату відстані:

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

при умові $\Phi(\boldsymbol{x}) = 0$. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \lambda \Phi(\boldsymbol{x})$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \\ \Phi(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

Першу частину можна розписати як:

$$\lambda \cdot \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x})$$

Якщо розписати покомпонентно, то маємо

$$\lambda = \frac{2(a^1 - x^1)}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x^1, x^2, x^3)} = \frac{2(a^2 - x^2)}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(x^1, x^2, x^3)} = \frac{2(a^3 - x^3)}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(x^1, x^2, x^3)}$$

Тобто якщо ми розглядаємо найдальшу або найближчу точку $\boldsymbol{p}$, то повинна виконуватись умова:

$$\frac{a^1 - p^1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(p^1, p^2, p^3)} = \frac{a^2 - p^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(p^1, p^2, p^3)} = \frac{a^3 - p^3}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(p^1, p^2, p^3)}$$

Рівняння нормальної прямої в цій точці:

$$\frac{x^1 - p^1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(p^1, p^2, p^3)} = \frac{x^2 - p^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^2}(p^1, p^2, p^3)} = \frac{x^3 - p^3}{\frac{\partial \Phi}{\partial x^3}(p^1, p^2, p^3)}$$

Отже легко бачити, що точка $(a^1, a^2, a^3)$ належить цій прямій, а отже $AP$ і є нормальною прямою.