Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #5

Захаров Дмитро

23 листопада, 2024

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Номер 11.5.

Умова Задачі 1.1. Розв'язати задачу $-\Delta u = 0,\ r < 3$ за $u\Big|_{r=3} = 1 + \cos\varphi$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Маємо, що $u(3,\varphi) = 1 + \cos\varphi$. Таким чином,

$$u(3,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = 1 + \cos\varphi.$$

Звідси видно, що $B_n \equiv 0$, $C = 1$, а $3A_1 = 1$ ($A_n = 0$ для $n > 1$). Тому:

$$u(r,\varphi) = 1 + \frac{r}{3}\cos\varphi.$$

Відповідь. $u(r,\varphi) = 1 + \frac{r}{3}\cos\varphi$.

1.2 Номер 11.9.

Умова Задачі 1.2. Розв'язати задачу $-\Delta u = 1 + \frac{1}{r}$, $2 < r < 3$ за $u\Big|_{r=2} = u\Big|_{r=3} = 0$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n(r)\cos n\varphi + B_n(r)\sin n\varphi).$$

Знайдемо Лапласіан:

$$-\Delta u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(F_n(r)\cos n\varphi + G_n(r)\sin n\varphi),$$

де

$$F_n(r) = -A_n''(r) - \frac{1}{r}A_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}A_n(r), \quad G_n(r) = -B_n''(r) - \frac{1}{r}B_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}B_n(r).$$

За умовою, отриманий вираз дорівнює $1 + \frac{1}{r}$. В такому разі, легко бачити, що $F_n(r) = G_n(r) = 0$ для всіх $n \geq 1$. Таким чином, маємо:

$$-A_0''(r) - \frac{1}{r}A_0'(r) = 1 + \frac{1}{r}, \quad -B_0''(r) - \frac{1}{r}B_0'(r) = 0.$$

Додатково, маємо наступні граничні умови:

$$u(2, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n(2)\cos n\varphi + B_n(2)\sin n\varphi) = 0,$$
$$u(3, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n(3)\cos n\varphi + B_n(3)\sin n\varphi) = 0.$$

Звідси видно, що $A_n(2) = A_n(3) = B_n(2) = B_n(3) = 0$ для всіх $n \geq 0$. Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned}
&-A_0''(r) - \frac{1}{r}A_0'(r) = 1 + \frac{1}{r}, && A_0(2) = A_0(3) = 0,\\
&-A_n''(r) - \frac{1}{r}A_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}A_n(r) = 0, && A_n(2) = A_n(3) = 0, \quad n \geq 1,\\
&-B_n''(r) - \frac{1}{r}B_n'(r) + \frac{n^2}{r^2}B_n(r) = 0, && B_n(2) = B_n(3) = 0, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Друге та третє рівняння дають розв'язок $A_n \equiv 0$ та $B_n \equiv 0$ для всіх $n \geq 0$ (окрім $n = 0$ для другого рівняння). Отже, нас цікавить лише перше рівняння. Маємо рівняння:

$$-A_0''(r) - \frac{1}{r}A_0'(r) = 1 + \frac{1}{r}$$

Позначимо $q(r) := -A_0'(r)$, тоді $q'(r) = -A_0''(r)$ і рівняння зведеться до звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$q'(r) + \frac{1}{r}q(r) = 1 + \frac{1}{r}$$

Маємо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо однорідну частину:

$$\widetilde{q}'(r) + \frac{1}{r}\widetilde{q}(r) = 0 \Rightarrow \frac{d\widetilde{q}}{dr} = -\frac{\widetilde{q}}{r} \Rightarrow \widetilde{q}(r) = \frac{\alpha}{r},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Отже, загальний розв'язок шукаємо у вигляді $q(r) = \alpha(r)/r$. Підставляємо в неоднорідне рівняння:

$$-\frac{1}{r^2}\alpha(r) + \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr} + \frac{1}{r^2}\alpha(r) = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr} = 1 + \frac{1}{r}$$

Отримане рівняння розв'язати вже зовсім легко: $\alpha'(r) = r+1$, а отже $\alpha(r) = \gamma + r + \frac{1}{2}r^2$ для $\gamma \in \mathbb{R}$. Таким чином, загальний розв'язок:

$$q(r) = \frac{\gamma + r + \frac{1}{2}r^2}{r} = 1 + \frac{\gamma}{r} + \frac{r}{2}$$

Далі, можемо знайти $A_0(r)$ зі співвідношення $q(r) = -A_0'(r)$:

$$\frac{dA_0}{dr} = -1 - \frac{\gamma}{r} - \frac{r}{2} \Rightarrow A_0(r) = -r - \frac{r^2}{4} + \delta + \gamma \log r, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Користаємось початковою умовою, що $A_0(2) = A_0(3) = 0$:

$$\begin{cases} -2 - 1 + \delta + \gamma \log 2 = 0, \\ -3 - \frac{9}{4} + \delta + \gamma \log 3 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta + \gamma \log 2 = 3, \\ \delta + \gamma \log 3 = \frac{21}{4}. \end{cases}$$

Віднявши друге рівняння від першого, маємо $\gamma \log \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, звідки $\gamma = \frac{9}{4 \log \frac{3}{2}}$. Тоді, скажімо, з першого рівняння, маємо $\delta = 3 - \frac{9 \log 2}{4 \log \frac{3}{2}}$. Отже,

$$u(r, \varphi) = u(r) = -r - \frac{r^2}{4} + \frac{9}{4 \log \frac{3}{2}} \log r + 3 - \frac{9 \log 2}{4 \log \frac{3}{2}}.$$