Контрольна робота #2
з Фінансового Аналізу

Захаров Дмитро, Варіант 3

15 травня, 2025

1 Задача 1

Умова 1.1. Дано матрицю наслідків Q та параметр α:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0.7.$$

Побудувати матрицю ризиків, а також прийняти рішення по методу Вальда, Севіджа та Гурвіца із параметром α.

Розв'язання. Спочатку знайдемо максимальні доходи:

$$\hat{q}_1 = 8,\ \hat{q}_2 = 5,\ \hat{q}_3 = 8,\ \hat{q}_4 = 12.$$

Будуємо матрицю ризиків:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Правило Вальда. Вибираємо $a_{i_0} = \max_i \min_j q_{ij}$. Позначимо $a_i := \min_j q_{ij}$, тоді $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$. Видно, що максимум відповідає значенню $a_3 = 3$, тому обираємо рішення $i_0 = 3$.

Правило Севіджа. Знаходимо $c_i := \max_j r_{ij}$:

$$c_1 = 8, \quad c_2 = 6, \quad c_3 = 5, \quad c_4 = 7$$

Маємо знайти мінімум з цих значень: $c_{i_0} = 5$, тому обираємо рішення з індексом $i_0 = 3$.

Правило Гурвіца. Вибираємо

$$i_0 = \arg\max_i \left\{ \alpha \max_j q_{ij} + (1-\alpha) \min_j q_{ij} \right\}.$$

Мінімуми ми вже знайшли: $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$. Тепер знайдемо максимуми $b_i := \max_j q_{ij}$: маємо $b_1 = 8$, $b_2 = 12$, $b_3 = 10$, $b_4 = 8$. Позначимо $d_i(\alpha) := \alpha b_i + (1-\alpha)a_i$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
d_1 &= 0.7 \cdot 8 + 0.3 \cdot 2 = 6.2, \\
d_2 &= 0.7 \cdot 12 + 0.3 \cdot 2 = 9.0, \\
d_3 &= 0.7 \cdot 10 + 0.3 \cdot 3 = 7.9, \\
d_4 &= 0.7 \cdot 8 + 0.3 \cdot 1 = 5.9.
\end{aligned}$$

Отже маємо $\max_i d_i(\alpha) = d_2$, тому обираємо рішення $i_0 = 2$.

Відповідь. Вибір рішення за методом Вальда: $i_0 = 3$; за методом Севіджа: $i_0 = 3$; за методом Гурвіца: $i_0 = 2$.

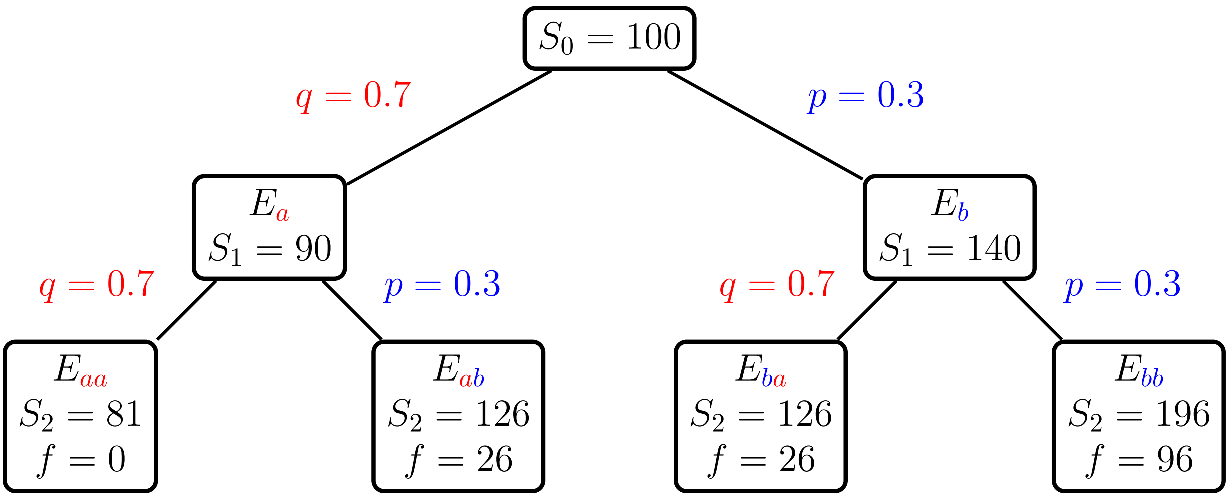
2 Задача 2

Умова 2.1. В рамках моделі Кокса-Роса-Рубінштейна знайти розподіл та справедливу вартість платіжного зобов'язання $f = (S_2 - S_0)^+$, а також відповідні досконалі геджуючі стратегії. $B_0 = 1$, $N = 2$, можливі значення дохідностей ризикового активу $a = -0.1, b = 0.4$, безризикової відсоткової ставки $r = 0.05$ та початкової вартості $S_0 = 100$ ризикового активу.

Розв'язання.

Розподіл f. Оскільки $r \in (a, b)$, то ринок безарбітражний і повний. Знаходимо мартингальну ймовірність: $p = \Pr[\rho_n = b] = \frac{r-a}{b-a} = 0.3$, також позначимо $q := 1 - p = 0.7$. Тоді маємо наступне дерево значень активу S_t:

Біноміальне дерево для S_t та $f = (S_2 - 100)^+$



Зазначимо, що відповідні ймовірності станів на кроці $t = 1$ дорівнюють $\Pr[E_a] = q = 0.7$, $\Pr[E_b] = p = 0.3$. В свою чергу, для кроку $t = 2$ маємо:

$$\Pr[E_{aa}] = q^2 = 0.49, \quad \Pr[E_{ab}] = \Pr[E_{ba}] = pq = 0.21, \quad \Pr[E_{bb}] = p^2 = 0.09.$$

Таким чином, розподіл f зображений в Таблиці 1.

Стан	Ймовірність	Платіжне зобов'язання
E_{aa}	0.49	0
$E_{ab} \cup E_{ba}$	0.42	26
E_{bb}	0.09	96

Табл. 1: Розподіл платіжного зобов'язання f

Геджуючі стратегії. Введемо наступні σ-алгебри:

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_1 = \sigma[E_a, E_b], \quad \mathcal{F}_2 = \sigma[E_{aa}, E_{ab}, E_{ba}, E_{bb}] = \mathcal{F}.$$

Тоді капітали інвестора, які він повинен мати для побудови стратегії, має вигляд $X_n^\pi = (1+r)^{n-N}\mathbb{E}_\rho[f_N|\mathcal{F}_n]$, себто:

$$X_0^\pi = \mathbb{E}_\rho\left[\frac{f_2}{(1+r)^2}\right] = \mathbb{E}_\rho\left[\frac{f_2}{1.05^2}\right] = \frac{1}{1.05^2}(26\cdot 0.42 + 96\cdot 0.09) \approx 17.7415$$
$$X_1^\pi(\omega) = \frac{1}{1+r}\cdot \mathbb{E}_\rho\left[f_2|\mathcal{F}_n\right] = \begin{cases} \frac{1}{1.05}\cdot\frac{0.21\cdot 26}{0.7}, & \omega\in E_a \\ \frac{1}{1.05}\cdot\frac{0.21\cdot 26+0.09\cdot 96}{0.3}, & \omega\in E_b\end{cases} = \begin{cases} 7.43, & \omega\in E_a \\ 44.76, & \omega\in E_b\end{cases}$$
$$X_2^\pi(\omega) = \mathbb{E}_\rho[f_2|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}_\rho[f_2|\mathcal{F}] = f_2(\omega)$$

Величиною справедливою вартістю опціону є як раз значення X_0^π, тобто наближено 17.74.

Стратегія має вигляд $\pi = \{(\beta_n,\gamma_n)\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$. Згідно лекції, "ризикові компоненти" $\{\gamma_n\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ досконалої стратегії інвестора обчислюється як:

$$\gamma_n = \frac{X_n^\pi - (1+r)X_{n-1}^\pi}{S_{n-1}(\rho_n - r)}.$$

Почнемо з γ_1. Маємо:

$$\gamma_1 = \frac{X_1^\pi - (1+r)X_0^\pi}{(\rho_1 - r)S_0}$$

Оскільки γ_1 не залежить від ρ_1 і приймає стале значення, то

$$\gamma_1 = \frac{X_1^\pi\big|_{E_a} - (1+r)X_0^\pi}{\left(\rho_1\big|_{E_a} - r\right)S_0} \approx \frac{7.43 - 1.05\cdot 17.74}{(-0.1-0.05)\cdot 100} \approx 0.765$$

Аналогічно, для γ_2 маємо:

$$\gamma_2 = \frac{X_2^\pi - (1+r)X_1^\pi}{(\rho_2 - r)S_1}$$

Ця величина не залежить від ρ_2 і приймає сталі значення на E_a, E_b:

$$\gamma_2\Big|_{E_a} = \frac{X_2^\pi\big|_{E_{aa}} - (1+r)X_1^\pi\big|_{E_a}}{(a-r)S_1\big|_{E_a}} = \frac{0 - 1.05\cdot 7.43}{(-0.1-0.05)\cdot 90} \approx 0.578$$
$$\gamma_2\Big|_{E_b} = \frac{X_2^\pi\big|_{E_{ba}} - (1+r)X_1^\pi\big|_{E_b}}{(a-r)S_1\big|_{E_b}} = \frac{26 - 1.05\cdot 44.76}{(-0.1-0.05)\cdot 140} \approx 1$$

Таким чином, остаточно, ризикові компоненти досконалої стратегії:

$$\gamma_1 \approx 0.765, \quad \gamma_2 \approx \begin{cases} 0.578, & \omega \in E_a \\ 1, & \omega \in E_b \end{cases}$$

Нарешті, безризикові компоненти $\{\beta_n\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ досконалої стратегії

$$\beta_1 = \frac{X_0^\pi - \gamma_1 S_0}{B_0} = \frac{17.74 - 0.765 \cdot 100}{1} = -58.76$$

$$\beta_2(\omega) = \frac{X_1^\pi - \gamma_2 S_1}{B_1} = \begin{cases} \frac{7.43 - 0.578 \cdot 90}{1.05}, \ \omega \in E_a \\ \frac{44.76 - 1 \cdot 140}{1.05}, \ \omega \in E_b \end{cases} \approx \begin{cases} -42.47, \ \omega \in E_a \\ -90.70, \ \omega \in E_b \end{cases}$$

3 Задача 3

Умова 3.1. Фінансовий ринок функціонує у моменти часу $n = 0, 1, 2$ та складено з двох активів: безризикового і ризикового ($N = 2, d = 1, B_0 = 1$). В таблиці 1 задано динаміку вартості ризикового активу, в таблиці 2 для кожного варіанту вказано значення параметрів ринку.

ω_i	$S_1(\omega_i)$	$S_2(\omega_i)$
ω_1	a	a_1
ω_2	a	a_2
ω_3	b	b_1
ω_4	b	b_2
ω_5	c	c_1
ω_6	c	c_2

S_0	r	a	b	c	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
10	0.05	10	18	5	6	13	18	24	6	5

Потрібно

1. Перевірити безарбітражність фінансового ринку, описати множину мартингальних мір.
2. Описати платіжні зобов'язання Європейського типу та клас досяжних платіжних зобов'язань Європейського типу. Навести приклад ненульового досяжного платіжного зобов'язання

Розв'язання.

Пункт 1. Будь-яка міра задається вектором $\rho = (p_1, \ldots, p_6)$ таким чином, що $p_j = \Pr[\omega_j] > 0$ для $j \in \{1, \ldots, 6\}$ та $\sum_{j=1}^{6} p_j = 1$. Безарібтражність означає існування такої міри ρ, що

$$\mathbb{E}_\rho \left[\frac{S_n}{B_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}, \quad n \in \{1, 2\}.$$

Як було показано на практиці, ця умова зводиться до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + \cdots + p_6 = 1, \\ \frac{a(p_1+p_2)+b(p_3+p_4)+c(p_5+p_6)}{B_1} = \frac{S_0}{B_0}, \\ \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{B_2(p_1+p_2)} = \frac{a}{B_1}, \\ \frac{p_3 b_1 + p_4 b_2}{B_2(p_3+p_4)} = \frac{b}{B_1}, \\ \frac{p_5 c_1 + p_6 c_2}{B_2(p_5+p_6)} = \frac{c}{B_1}, \end{cases}$$

з умовами $p_j \geq 0$ для всіх j. Підставляючи значення з таблиці 2, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1, \\ \frac{10(p_1+p_2)+18(p_3+p_4)+5(p_5+p_6)}{1+0.05} = 10, \\ \frac{p_1 \cdot 6 + p_2 \cdot 13}{(p_1+p_2)\cdot(1.00+0.05)} = 10, \\ \frac{p_3 \cdot 18 + p_4 \cdot 24}{(p_3+p_4)\cdot(1.00+0.05)} = 18, \\ \frac{p_5 \cdot 6 + p_6 \cdot 5}{(p_5+p_6)\cdot(1.00+0.05)} = 5, \end{cases}$$

Або, якщо дещо спростити:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1, \\ 10(p_1 + p_2) + 18(p_3 + p_4) + 5(p_5 + p_6) = 10.5, \\ 6p_1 + 13p_2 - 10.5p_1 - 10.5p_2 = 0, \\ 18p_3 + 24p_4 - 18.9p_3 - 18.9p_4 = 0, \\ 6p_5 + 5p_6 - 5.25p_5 - 5.25p_6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1, \\ 10(p_1 + p_2) + 18(p_3 + p_4) + 5(p_5 + p_6) = 10.5, \\ -4.5p_1 + 2.5p_2 = 0, \\ -0.9p_3 + 5.1p_4 = 0, \\ 0.75p_5 - 0.25p_6 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо наступний вигляд розв'язку:

$$\rho = \left(p, \frac{9}{5}p, \frac{187}{520} - \frac{119}{130}p, \frac{33}{520} - \frac{21}{130}p, \frac{15}{104} - \frac{28}{65}p, \frac{45}{104} - \frac{84}{65}p\right)$$

Таким чином, сукупність мартингальних мір задається як:

$$\mathcal{R} = \left\{ \rho^* = \begin{bmatrix} p \\ \frac{9}{5}p \\ \frac{187}{520} - \frac{119}{130}p \\ \frac{33}{520} - \frac{21}{130}p \\ \frac{15}{104} - \frac{28}{65}p \\ \frac{45}{104} - \frac{84}{65}p \end{bmatrix} : p \in X \right\},$$

де X — множина допустимих значень параметра p, за яких усі компоненти додатні. Очевидно, $p > 0$. З іншої сторони, маємо:

$$\begin{cases} \frac{187}{520} - \frac{119}{130}p > 0 \\ \frac{33}{520} - \frac{21}{130}p > 0 \\ \frac{15}{104} - \frac{28}{65}p > 0 \\ \frac{45}{104} - \frac{84}{65}p > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{11}{28} \\ p < \frac{11}{28} \\ p < \frac{75}{224} \\ p < \frac{75}{224} \end{cases} \Rightarrow p < \frac{75}{224}$$

Таким чином, остаточно сукупність мартингальних мір:

$$\mathcal{R} = \left\{ \rho^* = \begin{bmatrix} p \\ \frac{9}{5}p \\ \frac{187}{520} - \frac{119}{130}p \\ \frac{33}{520} - \frac{21}{130}p \\ \frac{15}{104} - \frac{28}{65}p \\ \frac{45}{104} - \frac{84}{65}p \end{bmatrix} : 0 < p < \frac{75}{224} \right\}.$$

Оскільки $\mathcal{R} \neq \emptyset$, то ринок безарбітражний.

Пункт 2. Нехай $f = f(\omega)$ є платіжне зобов'язання Європейського типу, $f(\omega_j) = f_j \geq 0$ для всіх j. Таким чином, $f = (f_1, \ldots, f_6)$. Математичне сподівання такого зобов'язання відносно міри $\rho \in \mathcal{R}$ обчислюється як:

$$\mathbb{E}_\rho[f] = pf_1 + \frac{9}{5}pf_2 + \left(\frac{187}{520} - \frac{119}{130}p\right) f_3 \\ + \left(\frac{33}{520} - \frac{21}{130}p\right) f_4 + \left(\frac{15}{104} - \frac{28}{65}p\right) f_5 + \left(\frac{45}{104} - \frac{84}{65}p\right) f_6$$

Таке платіжне зобов'язання буде досяжним тоді і тільки тоді, коли це математичне сподівання не залежить від вибору міри ρ. Еквівалентно, оскільки математичне сподівання має вид $\mathbb{E}_\rho[f] = \alpha(f) \cdot p + \beta$, то $\alpha(f) = 0$. Отже:

$$f_1 + \frac{9}{5}f_2 - \frac{119}{130}f_3 - \frac{21}{130}f_4 - \frac{28}{65}f_5 - \frac{84}{65}f_6 = 0.$$

Таким чином, клас досяжних зобов'язань має вигляд:

$$\mathcal{F} = \left\{ f = \{f_j\}_{j \in \{1,\ldots,6\}} \in \mathbb{R}^6_{\geq 0} : f_1 + \frac{9}{5}f_2 - \frac{119}{130}f_3 - \frac{21}{130}f_4 - \frac{28}{65}f_5 - \frac{84}{65}f_6 = 0 \right\}.$$

Прикладом ненульового досяжного платіжного зобов'язання може бути

$$f = \left(\frac{28}{65}, 0, 0, 0, 1, 0\right).$$