Варіаційний Аналіз

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Бебія М.О.*

Весняний семестр 2024
Домашня робота 1

§ Умова Веєрштрасса-Ердмана §

Задача 1: Завдання

Умова.

$$\begin{cases} J(y) = \int_0^1 ((y')^4 - 2(y')^2 + 3)dx \to \inf \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Знайдемо точну нижню грань:

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^4 - 2(y')^2 + 3)dx = \int_0^1 ((y'^2 - 1)^2 + 2)dx$$
$$= \underbrace{\int_0^1 (y'^2 - 1)^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{2\int_0^1 dx}_{=2} \geq 2$$

Отже, 2 – точна нижня грань, причому досягається вона при

$$\int_0^1 (y'^2 - 1)^2 dx = 0 \implies y'^2 = 1 \implies y' = \pm 1$$

Отже, $J(y^*) = 2$ – точна нижня грань для будь-якої функції

$$y^*(x)' = \pm 1,\ y^*(0) = y^*(1) = 0$$

Тепер знайдемо екстремаль з однією точкою зламу. Запишемо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,\ F(x, y, y') = y'^4 - 2y'^2 + 3$$

Підставляючи, маємо:

$$0 - \frac{d}{dx}\left(4y'^3 - 4y'\right) = 0 \implies y'(y'^2 - 1) = \text{const} \implies y' = \text{const}$$

Отже, якщо y' є константою, то y має вигляд $y = \alpha x + \beta$ на кожному проміжку гладкості.

Якщо перед нами одна точку зламу, то функцію можна записати як:

$$y = \begin{cases} \alpha_- x + \beta_-, \ x \in [0, \xi] \\ \alpha_+ x + \beta_+, \ x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

Підставимо умову $y(0) = y(1) = 0$:

$$y(0) = 0 \implies \beta_- = 0$$
$$y(1) = 0 \implies \alpha_+ + \beta_+ = 0 \implies \beta_+ = -\alpha_+$$

Тому, функцію можна дещо спростити:

$$y = \begin{cases} \alpha_- x, & x \in [0, \xi] \\ \alpha_+(x-1), & x \in [\xi, 1] \end{cases}, \quad y' = \begin{cases} \alpha_-, & x \in [0, \xi) \\ \alpha_+, & x \in (\xi, 1] \end{cases}$$

Далі треба впевнитись, що y – неперервна. Для цього має виконуватись:

$$\lim_{x \to \xi^-} y(x) = \lim_{x \to \xi^+} y(x) \implies \alpha_- \xi = \alpha_+(\xi - 1)$$

Звідси зручно виразити ξ:

$$\xi = \frac{\alpha_+}{\alpha_+ - \alpha_-}$$

Отже, лишається лише дві невідомі: (α_+, α_-).
Для їх знаходження скористаємося умовою Веєрштрасса-Ердмана:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=\xi^-} = \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=\xi^+}$$
$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|_{x=\xi^-} = \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Big|_{x=\xi^+}$$

Перед тим, як розписати ці умови, знайдемо $F - y'F_{y'}$:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = y'^4 - 2y'^2 + 3 - y'(4y'^3 - 4y') = -3y'^4 + 2y'^2 + 3$$

Отже, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_-^3 - \alpha_- = \alpha_+^3 - \alpha_+ \\ -3\alpha_-^4 + 2\alpha_-^2 = -3\alpha_+^4 + 2\alpha_+^2 \end{cases}$$

Далі залишається розв'язати. Запишемо:

$$\begin{cases} \alpha_+^3 - \alpha_-^3 = \alpha_+ - \alpha_- \\ 3(\alpha_+^4 - \alpha_-^4) = 2(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \end{cases} \implies \begin{cases} (\alpha_+ - \alpha_-)(\alpha_+^2 + \alpha_+\alpha_- + \alpha_-^2) = \alpha_+ - \alpha_- \\ 3(\alpha_+^2 + \alpha_-^2)(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) = 2(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \end{cases}$$

Далі користуємось тим, що $\alpha_+ \neq \alpha_-$, бо інакше при $x = \xi$ не було б точки зламу. Тому, в першому рівнянні можемо скоротити на $\alpha_+ - \alpha_-$.

З другим складніше: на $\alpha_+^2 - \alpha_-^2$ скоротити не можемо, бо може статися (і воно станеться), що $\alpha_- = -\alpha_+$. Перевіримо цей випадок, підставивши у перше рівняння:

$$2\alpha_+^2 - \alpha_+^2 = 1 \implies \alpha_+^2 = 1$$

Тому звідси або $(\alpha_+, \alpha_-) = (1, -1)$, або $(\alpha_+, \alpha_-) = (-1, 1)$ – підходить. При цьому, $\xi = \frac{1}{2}$ у обох випадках.

Якщо ж $\alpha_+^2 \neq \alpha_-^2$, то тоді маємо систему:

$$\begin{cases} \alpha_+^2 + \alpha_+\alpha_- + \alpha_-^2 = 1 \\ 3\alpha_+^2 + 3\alpha_-^2 = 2 \end{cases}$$

Розв'язавши, маємо або $\alpha_+ = \alpha_- = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ – немає точки зламу, тоді це не підходить.

Відповідь. $J(y^*) = 2$ – точна нижня грань при

$$y^* = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \vee y^* = \begin{cases} -x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$