Самостійна робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

25 листопада 2023 р.

Завдання

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^+} 8^{-[3x]} d\lambda_1(x)$$

Розв'язок. Помітимо, що

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\right),$$

і позначимо $A_n = \left[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\right)$. Елементи послідовності $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є попарно неперетинними, а тому, використовуючи σ-адитивність інтеграла Лебега, маємо

$$\mathcal{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} 8^{-[3x]} d\lambda_1(x)$$

Розглянемо тепер значення підінтегральної функції на множині A_n. Значення $3x$ в такому разі лежать між $[n-1, n)$, а тому $[3x] = n-1$.

Тому маємо:

$$\mathcal{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\left[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\right)} 8^{-(n-1)} d\lambda_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 8^{1-n} \int_{\left[\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\right)} d\lambda_1(x)$$

Далі скористаємося тим фактом, що $\int_{[\alpha,\beta)} d\lambda_1(x) = \beta - \alpha$. Звідси

$$\mathcal{I} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 8^{1-n} \cdot \frac{n-(n-1)}{3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 8^{-n}$$

Отже, маємо суму геометричної прогресії з першим членом 1 і знаменником $\frac{1}{8}$, тому

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8}{21}$$

Відповідь. $\mathcal{I} = \frac{8}{21}$.