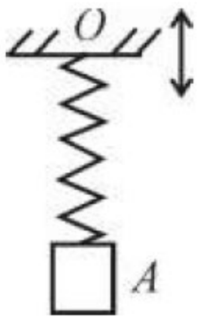
Контрольна робота #1 з Теорії Коливань

Захаров Дмитро

31 березня, 2025

1 Задача 1

Умова 1.1. Тіло маси $m = 1.4\,\text{кг}$ з'єднане за допомогою пружини з жорсткістю $k = 11340\,\text{Н/м}$ з точкою O, яка здійснює коливання за законом $x_O = a \sin \Omega t$, де $a = 0.002\,\text{м}$, $\Omega = 80\,\text{с}^{-1}$. Визначте частоту Ω, при якій настане резонанс. Знайдіть амплітуду вимушених коливань системи за заданих значень параметрів.



Розв'язання. Введемо систему координат $O'x$, де O' — це початкова точка підвісу, лінія дивиться вниз. Будемо вважати, що відхилення $x_O(t)$ задане у тому самому напрямку. Тоді другий закон Ньютона для тіла маси m можна записати у вигляді:

$$m\ddot{x} = mg - k(x - x_O(t)) = mg - k(x - a\sin\Omega t)$$

Змістимо систему координат на величину $\frac{mg}{k}$: нехай $z := x - \frac{mg}{k}$. Тоді:

$$m\ddot{z} = -kz + ka\sin\Omega t \quad \text{або} \quad \ddot{z} = -\omega^2(z - a\sin\Omega t)$$

Однорідна частина має розв'язок $z = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t$. Неоднорідний розв'язок подамо у вигляді $z = F_0 \sin \Omega t$. В такому разі:

$$-F_0 \Omega^2 \sin \Omega t = -\omega^2 (F_0 \sin \Omega t - a \sin \Omega t)$$

Бачимо, що на $\sin \Omega t$ можемо скоротити. Таким чином,

$$F_0 = \frac{\omega^2}{\Omega^2}(F_0 - a) \implies F_0 = \frac{\frac{\omega^2}{\Omega^2}}{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1} \cdot a = \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Таким чином, загальний розв'язок:

$$z(t) = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t + \frac{a}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \sin \Omega t$$

Видно, що резонанс настає за умови $\Omega = \omega$, в іншому випадку амплітуда вимушених коливань буде $\frac{a}{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}}$.

Підставимо конкретні числа. Маємо частоту $\omega^2 = 11340/1.4\,\text{с}^{-2} = 8100\,\text{с}^{-2}$. Звідси $\omega = 90\,\text{с}^{-1}$. Це і є частота, при якій настане резонанс. Проте, за $\Omega = 80\,\text{с}^{-1}$ маємо $\Omega^2/\omega^2 = 64/81$, тому амплітуда вимушених коливань має вигляд $\frac{a}{1-64/81} = \frac{81}{17}a \approx 0.0095\,\text{м}$ або $0.95\,\text{см}$.

2 Задача 2

Умова 2.1. Визначте малі коливання механічної системи з двома ступенями вільності, якщо функція Лагранжа для неї відома. (Треба визначити власні частоти і форми коливань)[a]

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{3W_0}{2v_0^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y^2) + \frac{2W_0}{\ell_0^2}xy, \quad q = (x, y),$$

де W_0, v_0, ℓ_0 — константи.

[a] Я дещо змінив умову, щоб розмірність Лагранжіана збігалася з розмірністю енергії.

Розв'язання. Знайдемо матриці квадратичних форм потенціальної та кінетичної енергій. Трошки перепишемо функцію Лагранжа:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \underbrace{\frac{W_0}{2v_0^2}(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2)}_{=T(\dot{q})} - \underbrace{\frac{W_0}{2\ell_0^2}\left(3x^2 - 4xy + 3y^2\right)}_{=V(q)}$$

Таким чином, маємо вирази для кінетичної та потенціальної енергій:

$$\color{blue}{T(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^\top A_T \dot{q}}, \quad A_T = \begin{pmatrix} 3W_0/v_0^2 & 0 \\ 0 & 3W_0/v_0^2 \end{pmatrix},$$
$$\color{red}{V(q) = \frac{1}{2}q^\top A_V q}, \quad A_V = \begin{pmatrix} 3W_0/\ell_0^2 & -2W_0/\ell_0^2 \\ -2W_0/\ell_0^2 & 3W_0/\ell_0^2 \end{pmatrix}$$

Для знаходження власних частот та форми коливань, розглянемо допоміжну матрицю $Q(\omega) = -\omega^2 A_T + A_V$. Маємо

$$Q(\omega) = \begin{pmatrix} 3W_0/\ell_0^2 - 3W_0\omega^2/v_0^2 & -2W_0/\ell_0^2 \\ -2W_0/\ell_0^2 & 3W_0/\ell_0^2 - 3W_0\omega^2/v_0^2 \end{pmatrix}$$

Власні частоти знаходимо з умови $\det Q(\omega) = 0$:

$$\det Q(\omega) = \left(\frac{3W_0}{\ell_0^2} - \frac{3\omega^2 W_0}{v_0^2}\right)^2 - \frac{4W_0^2}{\ell_0^4} = 0 \implies \frac{3W_0}{\ell_0^2} - \frac{3\omega^2 W_0}{v_0^2} = \pm\frac{2W_0}{\ell_0^2}$$

Звідси маємо два випадки: $\omega^2 = \frac{v_0^2}{3\ell_0^2}$ або $\omega^2 = \frac{5v_0^2}{3\ell_0^2}$. Звідси:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{v_0}{\ell_0}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{v_0}{\ell_0}.$$

Для визначення форм коливання, знайдемо власні вектори матриці $Q(\omega)$ для $\omega = \omega_1$ та $\omega = \omega_2$. Маємо:

$$Q(\omega_1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\frac{W_0}{\ell_0^2}, \quad Q(\omega_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\frac{W_0}{\ell_0^2}$$

Знайдемо власні вектори для обох матриць:

$$v_{\omega_1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\omega_1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$v_{\omega_2}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\omega_2}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже видно, що відношення x_1/x_2 для першої частоти дорівнює 1 (себто дві координати збігаються), а для другої частоти дорівнює -1 (тобто вони протилежні).

3 Задача 3

Умова 3.1. Вантаж на пружині рухається згідно рівнянню:

$$m\ddot{x} + kx = \sum_{i=1}^{n} f_i \cos \omega_i t$$

Визначте закон руху вантажу, якщо в початковий момент часу його переміщення та швидкість дорівнювали нулю. Зокрема, розгляньте випадок, де права частина має вигляд $5f_0 \cos \Omega t + 2f_0 \cos 3\Omega t$. Визначте також, за якої умови виникне резонанс.

Розв'язання. Розв'язком однорідної частини є $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а A та φ_0 — константи, які визначаються з початкових умов.

Для визначення загального розв'язку неоднорідної частини, потрібно знайти n часткових розв'язків для кожного $f_i \cos \omega_i t$. Для цього кожен з часткових розв'язків будемо шукати у вигляді $\widetilde{x}_i(t) = \widetilde{a}_i \cos \omega_i t$. Тоді, підставивши у рівняння, отримаємо:

$$-m\omega_i^2 \widetilde{a}_i \cos \omega_i t + k\widetilde{a}_i \cos \omega_i t = f_i \cos \omega_i t \implies (-m\omega_i^2 + k)\widetilde{a}_i = f_i$$

Звідси отримуємо амплітуду кожного доданку:

$$\widetilde{a}_i = \frac{f_i}{k - m\omega_i^2} = \frac{f_i}{m\left(\frac{k}{m} - \omega_i^2\right)} = \frac{f_i}{m(\omega_0^2 - \omega_i^2)} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{f_i}{m\omega_0^2}$$

Таким чином, загальний розв'язок:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{f_i}{m\omega_0^2} \cos \omega_i t$$

Оскільки початкова швидкість нульова, то:

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{f_i \omega_i}{m\omega_0^2} \sin \omega_i t$$

Оскільки $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \varphi_0 = 0$, то $\varphi_0 = 0$. При умові $x(0) = 0$ маємо:

$$x(0) = A + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{f_i}{m\omega_0^2} = 0 \implies A = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{f_i}{m\omega_0^2}$$

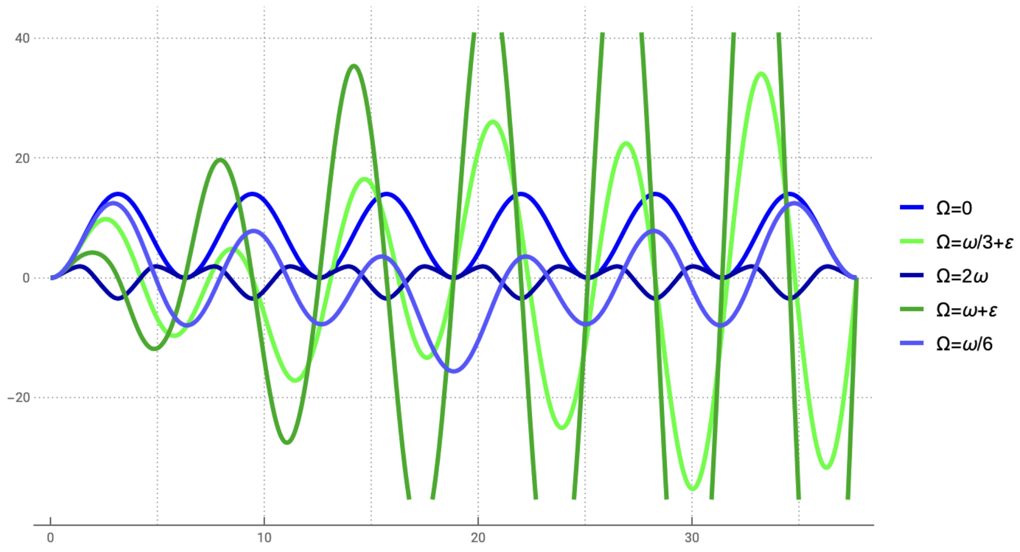


Рис. 1: Графік $x(t)$ за різних відношень Ω/ω_0. Видно, що за умови $\Omega/\omega = 1/3$ та $\Omega/\omega = 1$ виникає резонанс. Зеленим показані коливання, близькі до резонансу, синім — далеко від резонансу.

Таким чином, маємо:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{m\omega_0^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}\left(\cos\omega_i t - \cos\omega_0 t\right)}$$

Підставимо конкретні числа. Маємо $f_1 = 5f_0$, $\omega_1 = \Omega$, $f_2 = 2f_0$, $\omega_2 = 3\Omega$. Маємо:

$$x(t) = \frac{f_0}{m\omega_0^2}\left(\frac{2(\cos 3\Omega t - \cos\omega_0 t)}{1-\frac{9\Omega^2}{\omega_0^2}} + \frac{5(\cos\Omega t - \cos\omega_0 t)}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Бачимо, що знаменник різко зростає за умови $\omega_0^2 = 9\Omega^2$ та $\omega_0^2 = \Omega^2$, себто $\omega_0 = \Omega$ та $\omega_0 = 3\Omega$. Зокрема, це видно на графіку 1.