Домашня робота з курсу "Теоретична механіка"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 3

Умова. Точка рухається у площині так, що $r = 3t^2, \varphi = 2t$. Знайти кут між швидкістю та прискоренням в момент $t = 1$.

Розв'язок. Нехай $\boldsymbol{e}_r \triangleq [\cos\varphi, \sin\varphi]^\top, \boldsymbol{e}_\varphi \triangleq [-\sin\varphi, \cos\varphi]^\top$. Тоді вектор швидкості:

$$\boldsymbol{v}\Big|_{t=1} = \frac{dr}{dt}\Big|_{t=1}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=1}\boldsymbol{e}_\varphi = 6t\boldsymbol{e}_r + 3t^2 \cdot 2\boldsymbol{e}_\varphi\Big|_{t=1} = 6(\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\varphi)$$

Прискорення:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

Підставляємо $t = 1$:

$$\boldsymbol{a}\Big|_{t=1} = (6 - 3t^2 \cdot 4)\boldsymbol{e}_r + 2 \cdot 6t \cdot 2\boldsymbol{e}_\varphi\Big|_{t=1} = -6\boldsymbol{e}_r + 24\boldsymbol{e}_\varphi = 6(-\boldsymbol{e}_r + 4\boldsymbol{e}_\varphi)$$

Знаходимо модулі векторів:

$$\|\boldsymbol{v}(t=1)\| = 6\sqrt{2},\ \|\boldsymbol{a}(t=1)\| = 6\sqrt{17}$$

Скалярний добуток:

$$\langle \boldsymbol{v}(t=1), \boldsymbol{a}(t=1)\rangle = -36\boldsymbol{e}_r^2 + 6 \cdot 24\boldsymbol{e}_\varphi^2 = 108$$

Тут ми скористалися тим, що $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_r\rangle = \langle \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\varphi\rangle = 1, \langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\rangle = 0$. Отже:

$$\cos\alpha = \frac{108}{36\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Завдання 5

Умова. Рух точки задано в полярних координатах компонентами її швидкості:

$$v_r = \frac{1}{r^2},\ v_\varphi = \frac{1}{\alpha r}$$

Визначити траєкторію, а також тангенсальне та нормальне прискорення.

Розв'язок. Швидкість у полярних координатах:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Отже:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r^2},\ \frac{1}{\alpha r} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

З першого рівняння $r^2 dr = dt$ звідки $r^3 = 3t + C$, отже $r(t) = \sqrt[3]{3(t - t_0)}$. Підставляємо це у друге рівняння:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\alpha r^2} \to d\varphi = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dt}{(3(t - t_0))^{2/3}}$$

Проінтегруємо обидві частини:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{t - t_0}}{1/3} \to \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{3}{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{t - t_0}{9}}$$

Для аналізу типу траєкторії підставимо $t_0 = \varphi_0 = 0$. Тоді:

$$r(t) = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{t},\ \varphi(t) = \frac{3}{\sqrt[3]{9}\alpha} \cdot \sqrt[3]{t}$$

Звідси:

$$r(\varphi) = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{\alpha\sqrt[3]{9}}{3} \cdot \varphi = \alpha\varphi$$

Що є архімедовою спіраллю. Цей факт можна було отримати одразу, підставивши $dt = r^2 dr$ у вираз $\frac{1}{\alpha r} = r\frac{d\varphi}{dt}$, але тоді в нас не було б функцій від часу.

Знайдемо прискорення:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

Будемо все виражати через r. Отже:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} = 2r\dot{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^4}\right) = -\frac{2\dot{r}}{r^3} = -\frac{2}{r^5}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\alpha r^2},\ \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{r}}{\alpha} = -\frac{2}{\alpha r^5}$$

Тому радіальна компонента:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{2}{r^5} - r \cdot \frac{1}{\alpha^2 r^4} = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

А кутова:

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{2}{\alpha r^4} + 2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\alpha r^2} = 0$$

Отже бачимо, що:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\boldsymbol{e}_r$$

Для знаходження тангенсального прискорення, знайдемо модуль швидкості:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r^4} + r^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2 r^4} = \frac{1}{r^4} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}$$

Отже:

$$a_\tau \triangleq \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}}\right) = -\frac{\dot{r}}{r^2}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-\frac{2}{r^3}\dot{r}}{2\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}}}$$

Підставляємо той факт, що $\dot{r} = 1/r^2$:

$$a_\tau = -\frac{1}{r^4}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}} - \frac{1}{r^6\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}}} = -\frac{1}{r^6\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}}}\left(r^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right) + 1\right)$$

Отже остаточно:

$$a_\tau = -\frac{2 + r^2/\alpha^2}{r^6\sqrt{1/r^2 + 1/\alpha^2}} = -\frac{2\alpha^2 + r^2}{\alpha r^5\sqrt{r^2 + \alpha^2}} = -\frac{\alpha}{r^3\sqrt{r^2 + \alpha^2}}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Якщо позначити $\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{r^2+\alpha^2}}$, то $a_\tau = a\cos\theta$, тому $a_n = a\sin\theta$.

Відповідь.

1. Траєкторія – Архімедова спіраль.

2. $a_\tau = a\cos\theta, a_n = a\sin\theta$, де $\tan\theta = \frac{r}{\alpha}$, $a = \frac{1}{r^3}\left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\alpha^2}\right)$