Контрольна робота (частина 1) з курсу
"Дискретна теорія ймовірності"

Студента групи МП-31 Захарова Дмитра Олеговича

30 жовтня 2023 р.

Варіант 3.

Завдання 1.

Умова. Знайти ймовірність того, що в навмання обраному п'ятизначному числі хоча б дві цифри однакові.

Розв'язок. Всього існує 9×10^4 п'ятизначних чисел. Знайдемо кількість різних п'ятизначних чисел, де хоча б дві цифри однакові і позначимо як n. В такому разі, відповіддю буде $p = n/(9 \times 10^4)$.

Для цього легше знайти кількість п'ятизначних чисел, де всі цифри різні. На перше місце ми можемо поставити лише 9 цифр, оскільки нуль поставити не можемо. На друге місце 9 цифр (оскільки одне з 10 ми вже використали). На третє, аналогічно, 8, а далі 7 та 6. Отже, остаточно кількість способів $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$. Таким чином, $n = 9 \times 10^4 - 9^2 \times 8 \times 7 \times 6$.

Тому остаточно

$$p = \frac{9 \times 10^4 - 9^2 \times 8 \times 7 \times 6}{9 \times 10^4} = 1 - \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{10^4} = 0.6976$$

Відповідь. $1 - \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{10^4} = 0.6976$.

Завдання 2.

Умова. При заповненні документа перший бухгалтер помиляється з ймовірністю $p_1 = 0.05$, а другий із ймовірністю $p_2 = 0.01$. За певний час перший бухгалтер заповнив $n_1 = 80$ таких документів, а другий – $n_2 = 120$. Усі документи були складені в папку та перемішані. Навмання взятий із папки документ виявився з помилкою. Яка ймовірність, що його заповнював другий бухгалтер?

Розв'язок. Наведемо інтуїтивний розв'язок. В середньому (якщо бути точним, то ми кажемо про математичне очікування) кількість неправильних документів першого бухгалтера дорівнює $p_1 n_1$, а у другого $p_2 n_2$. Ймовірність того, що помилка була саме другого бухгалтера, це його частка у цій кількості, тобто $\frac{p_2 n_2}{p_1 n_1 + p_2 n_2} = \frac{1.2}{1.2+4} = \frac{3}{13} \approx 0.23$.

Отримаємо цю відповідь більш строго. Нехай подія A_i $(i = 1, 2)$ відповідає, що обраний документ належить iому бухгалтеру, B_1 означає, що документ правильний, а B_2 – неправильний.

Нам потрібно знайти $p(A_2 \mid B_2)$. За формулою Баєса:

$$p(A_2 \mid B_2) = \frac{p(B_2 \mid A_2) p(A_2)}{p(B_2)}$$

За умовою $p(B_2 \mid A_2) = p_2$. Ймовірність, що документ належить другому бухгалтеру, дорівнює $p(A_2) = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$.

Отже, залишилось лише знайти $p(B_2)$. Помітимо, що за формулою повної ймовірності

$$p(B_2) = p(B_2 \mid A_1) p(A_1) + p(B_2 \mid A_2) p(A_2)$$

За умовою $p(B_2 \mid A_i) = p_i$. Як ми вже виводили раніше, $p(A_i) = \frac{n_i}{n_1 + n_2}$. Отже

$$p(B_2) = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

Таким чином:

$$p(A_2 \mid B_2) = \frac{p_2 \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2}}{\frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{p_2 n_2}{p_1 n_1 + p_2 n_2}$$

Відповідь. $\frac{3}{13} \approx 0.23$.

Завдання 3.

Умова. Скільки разів потрібно підкидати гральний кубик, щоб з ймовірністю не меншою $q = 0.95$ отримати хоча б одне випадання п'ятірки?

Розв'язок. Розглядаємо класичну схему Бернуллі. Нехай подія A – п'ятірка **не** випала, а також нехай ми зробили n підкидувань. Ймовірність випадіння п'ятірки з одного "спостереження" дорівнює $\frac{1}{6}$, отже ймовірність невипадіння дорівнює $p = \frac{5}{6}$.

Схема Бернуллі знаходить ймовірність події B_k, котра полягає в тому, що A відбулося рівно k разів:

$$p(B_k) \triangleq C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Розглянемо подію C_n, котра полягає в тому, що не випало жодної п'ятірки. Вона дорівнює B_n (тобто не випала п'ятірка рівно n разів з n підкидувань). Нас цікавить подія $D_n = \overline{C}_n$ – випала хоча б одна п'ятірка. Таким чином:

$$p(D_n) = 1 - p(B_n) = 1 - C_n^n p^n (1-p)^{n-n} = 1 - p^n$$

Нас цікавить $N = \min\{n \in \mathbb{N} : p(D_n) \geq q\}$. Для цього розв'язуємо нерівність:

$$1 - p^n \geq q \implies p^n \leq 1 - q \implies n \geq \frac{\log(1-q)}{\log p} \approx 16.43$$

Отже $N = 17$.

Відповідь. Хоча б 17 разів.

Завдання 4.

Умова. З колоди в 36 карт навмання вибирають 7. Яка ймовірність, що серед них є туз, якщо відомо, що витягнуті карти мають однакову масть?

Розв'язок.

Спосіб I. Нехай подія A – з 7 карт випав хоча б один туз, а подія B – витягнуті 7 карт мають однакову масть. Отже, нас цікавить ймовірність:

$$p(A \mid B) \triangleq \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Знайдемо $p(A \cap B)$, тобто ймовірність того, що карти будуть однакової масті та серед них буде туз. Всього 7 карт з 36 можемо обрати C_{36}^7 способами. Оскільки є туз, то зафіксуємо його. Окрім туза, маємо 8 позицій (оскільки в одній масті 9 карт, а туз ми вже взяли), а на інші 6 позицій можемо поставити карти C_8^6 способами. Також враховуємо, що масті 4. Таким чином, $p(A \cap B) = \frac{4C_8^6}{C_{36}^7}$

Знайдемо $p(B)$, тобто ймовірність витягнути одну масть. Всього способів вибрати 7 карт з 36 дорівнює C_{36}^7. Кількість способів вибрати з 9 карт якоїсь однієї масті (з чотирьох можливих) 7 карт дорівнює C_9^7, а оскільки масті 4, то загальна кількість $4C_9^7$. Отже $p(B) = \frac{4C_9^7}{C_{36}^7}$. Отже:

$$p(A \mid B) = \frac{4C_8^6}{C_{36}^7} \cdot \frac{C_{36}^7}{4C_9^7} = \frac{C_8^6}{C_9^7}$$

Спосіб II. Якщо карти мають однакову масть, то серед 9 карт однієї масті нам потрібно знайти ймовірність взяти 7 карт з тузом. Фіксуємо туз, а на інші 8 позицій можемо поставити туз C_8^6 способами. Всього з 9 карт можемо взяти сім C_9^7 способами. Так само отримуємо $\frac{C_8^6}{C_9^7}$.

Цей вираз можна порахувати точніше. $C_8^6 = \frac{8!}{6! \times 2!}$, $C_9^7 = \frac{9!}{7! \times 2!}$, тому:

$$\frac{C_8^6}{C_9^7} = \frac{8! \times 7!}{9! \times 6!} = \frac{7}{9}$$

Відповідь. $\frac{7}{9}$.