Домашня робота з математичного аналізу #8

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

11 березня 2023 р.

Замітка. Рисунки прикріплені у додатку до цього домашнього завдання, намальовані у середовищі *Wolfram Mathematica.*

1 Завдання 3.

Умова. Знайти область інтегрування та обчислити цей повторний інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_1^3 dx \int_{x^3}^x (x-y)dy$$

Розв'язок.

$$\mathcal{I} = \int_1^3 \left(\int_{x^3}^x (x-y)dy\right)dx = \int_1^3 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^3}^{y=x} dx =$$
$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{2}\right)dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{x^6}{2}\right)dx =$$
$$\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{14}\right)\Big|_1^3 = \frac{11768}{105}$$

Відповідь. $\frac{11768}{105}$

2 Завдання 6.

Умова. Знайти область інтегрування та обчислити цей повторний інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr$$

Розв'язок.

$$\mathcal{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\bigg|_0^{r=2\cos\varphi} d\varphi =$$
$$4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$
$$\pi + \sin 2\varphi\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}$$

Відповідь. $\frac{3\pi}{2}$

3 Завдання 8.

Умова. Знайти область інтегрування та обчислити цей повторний інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_0^2 x dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy + \int_0^8 x dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y dy$$

Розв'язок.

$$\mathcal{I} = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy \right) xdx + \int_0^8 \left(\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy \right) xdx =$$

$$\int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=\sqrt{2x}} xdx + \int_0^8 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x-4}^{y=\sqrt{2x}} xdx = \int_0^8 \left(x - \frac{(x-4)^2}{2} \right) xdx =$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=8} - \frac{1}{2}\int_0^8 (x^3 - 8x^2 + 16x)dx =$$

$$32 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2 \right)\Big|_{x=0}^{x=8} = \frac{256}{3}$$

Відповідь. $\frac{256}{3}$.

4 Завдання 10.

Знайти область інтегрування та обчислити цей повторний інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_0^3 dy \int_0^{2y/3} (x+y)dx + \int_3^4 dy \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)dx$$

Розв'язок.

$$\mathcal{I} = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Big|_{x=0}^{x=2y/3} dy + \int_3^4 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Big|_{x=1-\sqrt{4-y}}^{x=1+\sqrt{4-y}} dy =: L + R$$

Обрахуємо лівий інтеграл L:

$$L = \int_0^3 \left(\frac{2y^2}{9} + \frac{2y^2}{3} \right) dy = \int_0^3 \frac{8y^2}{9} dy = \frac{8}{27} y^3 \Big|_0^3 = 8$$

Тепер правий інтеграл R:

$$R = \int_3^4 \left(\frac{(1+\sqrt{4-y})^2 - (1-\sqrt{4-y})^2}{2} + y \cdot 2\sqrt{4-y} \right) dy =$$

$$\int_3^4 \left(\frac{2\sqrt{4-y} \cdot 2}{2} + 2y\sqrt{4-y} \right) dy = 2\int_3^4 \sqrt{4-y}dy + 2\int_3^4 y\sqrt{4-y}dy$$

Знову окремо рахуємо інтеграли:

$$\int_3^4 \sqrt{4-y}dy = -\int_3^4 \sqrt{4-y}d(4-y) = -\frac{(4-y)^{3/2}}{3/2}\Big|_{y=3}^{y=4} = \frac{2}{3}$$

$$\int_3^4 y\sqrt{4-y}dy = \begin{vmatrix} z = 4-y \\ dz = -dy \\ y = 4-z \end{vmatrix} = \int_1^0 (4-z)\sqrt{z}(-dz) =$$

$$\int_0^1 (4\sqrt{z} - z^{3/2})dz = \frac{4z^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 - \frac{z^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3} - \frac{2}{5} = \frac{34}{15}$$

Отже, остаточно правий інтеграл:

$$R = 2\cdot\frac{34}{15} + 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{68}{15} + \frac{4}{3} = \frac{88}{15}$$

Тоді повний інтеграл:

$$\mathcal{I} = 8 + \frac{88}{15} = \frac{208}{15}$$

Відповідь. $\frac{208}{15}$