Іспит з Варіаційного Числення та Оптимального Керування

Захарова Дмитра Олеговича. МП-31

7 червня 2024 р.

Екзаменаційний Білет #5

Вміст

1 Загальне обчислення варіації

Питання. Загальна формула для обчислення варіації. Задачі з кінцями на кривих, умови трансверсальності.

1.1 Додаткові теоретичні відомості.

Як і завжди, нехай нам потрібно максимізувати або мінімізувати наступний функціонал:

$$J[f] = \int_a^b L(x, f, f')dx \to \text{extr}, \tag{1}$$

проте, тут ми вже не фіксуємо значення f у точках a та b (тобто маємо задачу з вільними кінцями).

Для подальної дискусії, введемо поняття відстані між кривими.

Definition 1.1. **Відстанню** між кривими $y = f(x)$ та $y = g(x)$ будемо вважати вираз

$$\rho(f, g) = \max |f - g| + \max |f' - g'| + \rho(F_0, G_0) + \rho(F_1, G_1), \tag{2}$$

де F_0, F_1 – лівий та правий кінець кривої $f(x)$, а G_0, G_1 – кривої $g(x)$, де відстань між точками розуміємо у метриці Евкліда.

Розглянемо дві близькі у сенсі відстані криві $f(x)$ та $\widetilde{f}(x)$ та покладемо $\eta(x) := \widetilde{f}(x) - f(x)$. Покладемо $F_0 = (x_0, y_0)$ та $F_1 = (x_1, y_1)$ – початкові та кінцеві точки $y = f(x)$. Початкову та кінцеву точки кривої $\widetilde{f}(x) = f(x) + \eta(x)$ позначимо як $F_0^* = (x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ та $F_1^* = (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

Definition 1.2. **Загальною варіацією** функціонала $J[f]$ будемо називати лінійну варіацію відносно $\eta, \eta', \delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$ та відрізняющуюся від прирісту

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] \tag{3}$$

на величину порядку вище першого відносно відстані $\rho(f, f + \eta)$.

1.2 Виведення загальної варіації.

Як ми і робили до цього, знаходимо приріст функціоналу, де ми розглядаємо збурення нашої функції $f(x) + \eta(x)$:

$$\Delta J = J[f+\eta] - J[f] = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} L(x, f+\eta, f'+\eta')dx - \int_{x_0}^{x_1} L(x, f, f')dx \tag{4}$$

Далі маємо розбиття на наступні інтеграли:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[L(x, f+\eta, f'+\eta') - L(x, f, f')\right] dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} L(x, f+\eta, f'+\eta')dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} L(x, f+\eta, f'+\eta')dx \tag{5}$$

Далі розкладаємо у ряд Тейлора. Перший доданок буде як при виведені формули Ейлера, а другий набуде наступного вигляду:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f}\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial f'}\eta'(x)\right] dx$$
$$+ L(x, f, f')\Big|_{x=x_1} \delta x_1 - L(x, f, f')\Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \overline{o}(\rho(f, f+\eta)) \tag{6}$$

Далі після інтегрування частинами знову маємо:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right] \eta(x)dx + \frac{\partial L}{\partial f'}\eta(x)\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}$$
$$+ L(x, f, f')\Big|_{x=x_1} \delta x_1 - L(x, f, f')\Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \overline{o}(\rho(f, f+\eta)) \tag{7}$$

За нашою побудовою (ми продовжували дотичною) маємо $\eta(x_0) = \delta y_0 - (f'(x_0) - \eta'(x_0))\delta x_0$, тому наближено:

$$\eta(x_0) \approx \delta y_0 - f'(x_0)\delta x_0, \;\; \eta(x_1) \approx \delta y_1 - f'(x_1)\delta x_1 \tag{8}$$

і відкидаючи малий доданок $\overline{o}(\rho)$ маємо **формулу загальної варіації**.

Definition 1.3. **Формулою загальної варіації** називають формулу

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right] \eta(x)dx + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - f'\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\delta x\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \tag{9}$$

Для кращого розуміння, що ми називаємо варіаціями $\delta x_i, \delta y_i$, розглянемо вже відомі нам задачі:

Example. Якщо кінці лежать на прямих $x_0 = a, x_1 = b$, то $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$.

Example. Якщо кінці фіксовані, то $\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = \delta y_1$.

Зауваження. Якщо $\widetilde{f}$ є екстремумом функціоналу, то вона є екстремаллю, а також виконується

$$\frac{\partial L}{\partial f'}\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial f'}f'\right)\delta x\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0 \tag{10}$$

для $f(x) = \widetilde{f}(x)$.

1.3 Задача з кінцями на кривих

Нехай $y(x_0) = \psi_0(x_0), y(x_1) = \psi_1(x_1)$, тобто на кінцях x_0 та x_1 (що не є фіксованими), ми маємо точку на кривій.

Нагадаємо, що загальною варіацією називаємо вираз виду

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right]\eta(x)dx + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta y\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - f'\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\delta x\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}, \tag{11}$$

тому нас тут цікавить знайти вирази для δy_i відносно δx_i. Дійсно,

$$\delta y_i = \psi_i(x_i + \delta x_i) - \psi_i(x_i) = [\psi_i'(x_i) + \overline{o}(1)]\delta x_i. \tag{12}$$

Тоді умова $\delta J = 0$ прийме вигляд

$$\delta J = \left(\frac{\partial L}{\partial f'}\psi_1' + L - \frac{\partial L}{\partial f'}f'\right)\Big|_{x=x_1}\delta x_1 - \left(\frac{\partial L}{\partial f'}\psi_0' + L - \frac{\partial L}{\partial f'}f'\right)\Big|_{x=x_0}\delta x_0 = 0. \tag{13}$$

Оскільки δx_i є незалежними і довільні, то отримуємо так звану умову трансверсальності.

Definition 1.4. **Умовами трансверсальності** називають рівняння

$$\left(L + (\psi_i' - f')\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\Big|_{x=x_i} = 0,\ i = 1, 2 \tag{14}$$

2 Задача швидкодії

Питання. Задача швидкодії для лінійних систем. Множина досяжності (керованості) за час T, властивості досяжності (опуклість, властивість внутрішніх точок).

Відповідь.

2.1 Теоретичні відомості.

Розглянемо задачу виду: $t_1 - t_0 \to \inf$ під дією

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t), \ t \in [t_0, t_1] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \ u(t) \in \Omega \end{cases} \tag{15}$$

Будемо вважати Ω – замкнена, обмежена і випукла множина, $0 \in \Omega$.

Definition 2.1. Множина Ω називається випуклою, якщо разом з будь-якими своїми точками $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, воно містить і весь відрізок, що їх з'єднує. Формально:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \Omega \tag{16}$$

Для зручності далі нехай $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Definition 2.2. Множиною досяжності для системи $\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t)$ за час T будемо називати множину точок $\mathbf{x}_0$ з яких можна попасти в $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ за час T під дією деякого допустимого управління.

Lemma 2.3. Якщо з $\mathbf{x}_0$ можна потрапити в нуль за час T, то в точку 0 можна потрапити і за будь-який більший час.

Доведення. Нехай $\mathbf{x}_0 \xrightarrow[\mathbf{u}(t)]{T} \mathbf{0}$, тоді покладемо

$$\widetilde{\mathbf{u}}(t) := \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t_0 \le t < t_1 \\ \mathbf{0}, & t_1 \le t \le t_1 + \delta t \end{cases} \tag{17}$$

Тоді $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ на $[t_0, t_1)$, а на проміжку $[t_1, t_1 + \delta t]$ буде в нулі, тому час $T + \delta t > T$.

2.2 Властивості множини досяжності.

Отже, позначимо через V_T множину досяжності для нашої системи.

Lemma 2.4. V_T – випукла множина.

Доведення. Перевіримо, що $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in V_T \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{y}_0 \in V_T$. За означенням,

$$\mathbf{x}_0 \in V_T \implies \exists \mathbf{u}_1(t) \in \Omega : \mathbf{x}_0 \xrightarrow[(0,T)]{\mathbf{u}_1(t)} \mathbf{0} \tag{18}$$

$$\mathbf{y}_0 \in V_T \implies \exists \mathbf{u}_2(t) \in \Omega : \mathbf{y}_0 \xrightarrow[(0,T)]{\mathbf{u}_2(t)} \mathbf{0} \tag{19}$$

Покладемо:

$$\widetilde{\mathbf{u}}(t) = \lambda \mathbf{u}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2(t) \tag{20}$$

Це є допустим керуванням, оскільки за умовою множина Ω випукла. Тоді це керування задасть траєкторію

$$\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \lambda \mathbf{x}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{x}_2(t), \tag{21}$$

якщо $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ – траєкторії при керуваннях $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)$ відповідно. Дійсно, подивимось на похідну:

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}(t) &= \lambda \dot{\mathbf{x}}_1(t) + (1-\lambda)\dot{\mathbf{x}}_2(t) \\
&= \lambda(\boldsymbol{A}\mathbf{x}_1(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}_1(t)) + (1-\lambda)(\boldsymbol{A}\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}_2(t)) \\
&= \boldsymbol{A}(\lambda \mathbf{x}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{x}_2(t)) + \boldsymbol{B}(\lambda \mathbf{u}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2(t)) \qquad (22) \\
&= \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\widetilde{\mathbf{u}}(t) \qquad (23)
\end{aligned}$$

Залишилося помітити, що $\widetilde{\mathbf{x}}(0) = \lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{y}_0$ та $\widetilde{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{0}$. Отже, дійсно можемо перевести $\lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{y}_0$ у $\mathbf{0}$ за час T, а тому $\lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{y}_0 \in V_T$.

Lemma 2.5. Якщо $\mathbf{x}_0$ – внутрішня точка V_T, то з $\mathbf{x}_0$ можна потрапити в $\mathbf{0}$ за час, строго менший за T.

Доведення. Отже, $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int}(V_T)$. Тоді існує куля $B(\mathbf{x}_0, r) \subset V_T$, а отже і куб C з центром в $\mathbf{x}_0$.

Нехай $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$ – вершини куба, $\mathbf{y}_i \in V_T$. Тоді,

$$\exists \mathbf{u}_i(t) \in \Omega : \mathbf{y}_i \xrightarrow[(0,T)]{\mathbf{u}_i(t)} \mathbf{0}, \ i \in \{1, \dots, N\} \tag{24}$$

Для достатньо малого $\delta > 0$ розглянемо точки $\mathbf{y}_1(t_0+\delta), \dots, \mathbf{y}_N(t_0+\delta)$.

Маємо:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_i = \boldsymbol{A}\mathbf{y}_i + \boldsymbol{B}\mathbf{u}_i, \ t_0 + \delta \le t \le t_1 \\ \mathbf{y}_i(\widetilde{t_0}) = \mathbf{y}_i(t_0 + \delta) \\ \mathbf{y}_i(t_1) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_i \in \Omega, \ t_0 + \delta \le t \le t_1 \end{cases} \tag{25}$$

При достатньо малих $\delta > 0$ випукла оболонка з точок $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta)$ буде мало відрізнятися від куба C. Тоді при достатньо малих $\delta > 0$ ця випукла оболонка буде містити $\mathbf{x}_0$. З точок $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta)$ можна потрапити за час $T - \delta$. Тоді $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta) \in V_{T-\delta}$, звідки в силу випуклості множини випливає, що множині $V_{T-\delta}$ належить і весь багатогранник. Це означає, що і з $\mathbf{x}_0 \in V_{T-\delta}$, тобто з точки $\mathbf{x}_0$ можна потрапити за час $T - \delta < T$.

Definition 2.6. Нехай $A_0, \ldots, A_n$ не лежать в одній $(k-1)$-мірній площині, тоді випукла оболонка цих точок називають **симплексом**.

Lemma 2.7. Допоміжна. Нехай $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{KC}[t_0, t_1], \mathbf{x}(t) \in \mathcal{KC}^1[t_0, t_1]$ – траєкторія. Нехай $\boldsymbol{\psi}(t)$ – довільний розв'язок рівняння $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\psi}(t)$. Тоді

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t_1), \mathbf{x}(t_1) \rangle - \langle \boldsymbol{\psi}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) \rangle dt \tag{26}$$

Доведення. В точках неперервності $\mathbf{u}(t)$ маємо $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t)$. Тоді:

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) \rangle = -\langle \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) \rangle \tag{27}$$

$$= \langle \boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t) \rangle \tag{28}$$

$\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)$ – неперервні всюду та мають похідну всюду окрім скінченного числа точок. Тоді проінтегрувавши від t_0 до t_1 отримаємо потрібне рівняння.

3 Практична задача

Умова. Розв'язати наступну варіаційну задачу. Знайти допустимі екстремалі, перевірити необхідні умови Лежандра та Якобі, достатні умови слабкого екстремуму. Перевірити необхідну умову Вейєрштрасса та достатні умови сильного екстремуму.

$$\int_1^e (2f(x) - x^2 f'(x)^2)dx \to \text{extr},\ f(1) = e,\ f(e) = 0 \tag{29}$$

Відповідь. Маємо задачу з фіксованими кінцями. Спочатку розв'яжемо рівняння Ейлера.

3.1 Рівняння Ейлера

Як відомо, екстремалі можемо знайти з рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \tag{30}$$

В нашому випадку маємо $L(x, f, f') = 2f(x) - x^2 f'(x)^2$, тому

$$\frac{\partial L}{\partial f} = 2,\ \frac{\partial L}{\partial f'} = -2x^2 f'(x),\ \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = -2(2xf'(x) + x^2 f''(x)) \tag{31}$$

Отже, рівнняння Ейлера набуде вигляду:

$$2 + 2(2xf'(x) + x^2 f''(x)) = 0 \implies x^2 f''(x) + 2xf'(x) + 1 = 0 \tag{32}$$

Розв'язок цього рівняння (сам розв'язок наведемо у додатку):

$$f(x) = -\frac{c_1}{x} + c_2 - \log x \tag{33}$$

Підставляємо у граничні умови:

$$f(1) = e \implies -c_1 + c_2 = e \tag{34}$$

$$f(e) = 0 \implies -\frac{c_1}{e} + c_2 - 1 = 0 \tag{35}$$

Отже, розв'яжемо відносно c_1, c_2. З першого рівняння $c_2 = c_1 + e$, а з другого $c_2 = 1 + \frac{c_1}{e}$, а тому

$$c_1 + e = 1 + \frac{c_1}{e} \implies c_1 = \frac{1-e}{1-\frac{1}{e}} = -e \tag{36}$$

Отже, $c_2 = 0$ і остаточно наша екстремаль має вигляд:

$$\boxed{f_{?!}(x) = \frac{e}{x} - \log x} \tag{37}$$

Це і є підозріла точка на мінімум або максимум.

3.2 Необхідні умови

Перевіримо умову Лежандра:

Theorem 3.1. Необхідна умова Лежандра слабкого максимуму. Нехай функціонал $J[f] = \int_a^b L(x, f, f')dx$ з фіксованими кінцями має максимум на кривій $\widetilde{f}$. Тоді для будь-якої точці на криві виконано

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} \leq 0 \tag{38}$$

Отже, пoразуємо нашу похідну:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} = \frac{\partial}{\partial f'}\frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\partial}{\partial f'}(-2x^2 f'(x)) = -2x^2 < 0 \tag{39}$$

для усіх $x \neq 0$. Проте, оскільки ми на відрізку $[1, e]$, то умова Лежандра виконана. Отже, маємо підозру на максимум.

Тепер перевіримо умову Якобі. Для цього розглядаємо спряжену задачу:

$$J^*[\eta] = \int_1^e \left(P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2\right) dx \to \inf,\ \eta(1) = \eta(e) = 0, \tag{40}$$

де позначені функції мають вигляд:

$$P(x) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2},\ Q(x) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'}\right) \tag{41}$$

Отже, знайдемо вигляд цих функцій. Для $P(x)$ у нас все просто, оскільки ми цю часткову похідну вже рахували, тому маємо $P(x) = -x^2$. Для $Q(x)$ ситуація трошки гірше, але не критична:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} = 0 \implies Q \equiv 0 \tag{42}$$

Тому, спряжена задача має вигляд:

$$J^*[\eta] = \int_1^e (-x^2\eta'(x)^2)dx = -\int_1^e (x\eta(x))^2 dx \tag{43}$$

В принципі на цьому етапі вже добре видно, що в нас спряжений функціонал від'ємно визначений, проте давайте все-таки доб'ємо умову Якобі. Рівняння Якобі (або рівняння Ейлера до спряженої задачі):

$$-\frac{d}{dx}(P(x)\eta'(x)) + Q(x)\eta(x) = 0 \implies -\frac{d}{dx}(P(x)\eta'(x)) = 0 \tag{44}$$

Підставляємо:

$$-\frac{d}{dx}(-x^2\eta'(x)) = 0 \implies x^2\eta'(x) = C_1 \implies \eta'(x) = \frac{C_1}{x^2} \implies \eta(x) = -\frac{C_1}{x}+C_2 \tag{45}$$

З огляду на те, що $\eta(1) = 0$, то $C_2 = C_1$, а тому $\eta(x) = C - \frac{C}{x}$. Якщо додатково вимагати $\eta'(1) = 1$, то $\eta(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Видно, що спряжених до точки $a = 1$ на відрізку $(1, e]$ не існує, оскільки нуль функції $\eta(x)$ є лише $x = 1$. Отже, умова Якобі на слабкий максимум виконується.

Подивимось на достатню умову. Нагадаємо формулювання:

Theorem 3.2. **Достатня умова слабкого екстремуму.** Якщо допустима крива $y = f(x)$ для функціоналу

$$\int_a^b L(x, f, f')dx \quad f(a) = A, \; f(b) = B \tag{46}$$

задовольняє наступним умовам:

1. $f = f(x)$ є екстремаллю, тобто задовольняє рівняння Ейлера $\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0$.
2. Вздовж цієї кривої $P \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} < 0$, тобто виконується посилена умова Лежандра.
3. Відрізок $[a, b]$ не містить точок спряжених з a (посилена умова Якобі),

то на цій кривій реалізується слабкий максимум.

Бачимо, що дві останні умови виконуються, а також $f_{?!}(x) = \frac{e}{x} - \log x$ є екстремаллю. Отже, дійсно маємо слабкий максимум.

3.3 Умова Веєрштраса

Далі будемо користуватись так званою *функцією Веєрштраса*. Нагадаємо, що це:

Definition 3.3. **Функцією Веєрштраса** називають вираз

$$E(x, f, P, Q) = L(x, f, Q) - L(x, f, P) - (Q - P)\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f, P) \tag{47}$$

Необхідна умова стверджує, що $E(x, f_{?!}, f'_{?!}, f'_{?!} + \xi) \geq 0$ для усіх $x \in$

$[1, e], \xi \in \mathbb{R}$. Перевіримо:

$$f'_{?!} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e}{x} - \log x\right) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{e+x}{x^2} \tag{48}$$

Отже,

$$L(x, f_{?!}, f'_{?!}) = 2\left(\frac{e}{x} - \log x\right) - x^2\left(-\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x}\right)^2 = -1 - \frac{e^2}{x^2} - 2\log x \tag{49}$$

$$L(x, f_{?!}, f'_{?!} + \xi) = 2f(x) - x^2(f'(x) + \xi)^2 = \\ -\frac{e^2}{x^2} + 2e\xi - (-1 + \xi x)^2 - 2\log x \tag{50}$$

А також залишилось ще:

$$\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f_{?!}, f'_{?!}) = -2x^2 f'_{?!}(x) = 2(e + x) \tag{51}$$

Отже, остаточно наша функція має вигляд:

$$E(x, f_{?!}, f'_{?!}, f'_{?!} + \xi) = -\frac{e^2}{x^2} + 2e\xi - (-1 + \xi x)^2 - 2\log x - \left(-1 - \frac{e^2}{x^2} - 2\log x\right) \\ -2\xi(e + x) = -\xi^2 x^2 < 0 \tag{52}$$

Отже, необхідна умова виконана. Для достатньої дивимось:

$$E(x, f, P, Q) = -Q^2x^2 + P^2x^2 - (Q - P)(-2x^2P) = -(P - Q)^2x^2, \tag{53}$$

а отже достатня умова на сильний максимум також виконана!

Відповідь. Маємо сильний і слабкий максимум при $f = \widetilde{f}(x) = \frac{e}{x} - \log x$.

3.4 Розв'язок диференціального рівняння

Розв'яжемо

$$x^2 f''(x) + 2xf'(x) + 1 = 0 \tag{54}$$

Перепишемо у вигляді:

$$f''(x) + \frac{2}{x}f'(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{55}$$

Спочатку розв'яжемо лінійне однорідне рівняння, тобто

$$\widetilde{f}''(x) + \frac{2}{x}\widetilde{f}'(x) = 0 \tag{56}$$

Робимо заміну $u(x) = \widetilde{f}'(x)$, тоді маємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} \implies \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x} \implies u(x) = \frac{c_1}{x^2} \tag{57}$$

Отже звідси $\widetilde{f}(x) = \int u(x) = c_2 - \frac{c_1}{x}$. Отже, розв'язок початкового рівняння має вигляд:

$$f(x) = \widetilde{f}(x) + f_0(x), \tag{58}$$

де $f_0(x)$ – будь-який розв'язок неоднорідного рівняння. Тут, можна просто вгадати, що $f_0(x) = -\log x$ підходить, тому

$$f(x) = -\frac{c_1}{x} + c_2 - \log x, \tag{59}$$

що і треба було довести.