Самостійна робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Нехай $X = \mathbb{N}$, а також

$$\mathcal{H} = \{\{2k\} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$$

Чи є $\mathcal{H}$ кільцем? Якщо ні, то знайдіть $k(\mathcal{H})$.

Розв'язок. За означенням кільця, має виконуватись наступні дві умови:

1. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cup B \in \mathcal{H}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B \in \mathcal{H}$

Одразу бачимо, що перша умова не виконується. Наприклад, нехай $A = \{2\} \in \mathcal{H}, B = \{10\} \in \mathcal{H}$. В такому разі $A \cup B = \{2, 10\} \notin \mathcal{H}$.

Знайдемо кільце, породжене класом $\mathcal{H}$. За означенням:

$$k(\mathcal{H}) \triangleq \bigcap_{\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_\alpha,\, \mathcal{K}_\alpha \text{ є кільцем}} \mathcal{K}_\alpha$$

$k(\mathcal{H})$ є кільцем і окрім того, має містити $\mathcal{H}$. Значить, нам потрібно якимось чином мінімально доповнити $\mathcal{H}$ до кільця.

Наприклад, таким доповненням може бути просто множина усіх скінченних множин з парних чисел. Дійсно, $\mathcal{H}$ треба доповнити, додавши усі можливі об'єднання елементів з $\mathcal{H}$ (включно з тими, що ми "потенціально" додамо). Якщо в нас будуть усі скінченні множини з парних чисел, то як би ми не об'єднували або віднімали дві скінченні множини з парних чисел, ми все ще будемо отримувати якусь іншу скінченну множину парних чисел. Так само очевидно, що сам $\mathcal{H}$ міститься в $k(\mathcal{H})$, оскільки $\mathcal{H}$ це просто множина з множин, що містять одне парне число, що теж є скінченною множиною парних чисел (просто лише одного).

Відповідь. $\mathcal{H}$ не є кільцем. $k(\mathcal{H}) = \{A \in 2^{2\mathbb{N}} : A - \text{скінченна}\}$