Домашня робота з математичного моделювання #6

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

22 березня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Нехай a, x_0 – сталі, $\{f(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – задана послідовність. Довести, що послідовність:

$$x(0) = x_0,\ x(t) = a^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} f(j),\ t = 1, 2, \dots$$

визначає єдиний розв'язок початкової задачі:

$$x(t+1) = ax(t) + f(t), t = 0, 1, 2, \dots,\ x(0) = x_0$$

Який вигляд прийме розв'язок $x(t)$ у часткових випадках арифметичної прогресії $a = 1$, $f(t) \equiv \text{const}$, геометричної прогресії $f(t) \equiv 0$, а також у випадку сталої $f(t) \equiv \text{const}$.

Розв'язок. Щоб перевірити, що це дійсно розв'язок, достатньо просто її підставити у задачу. В лівій частині будемо мати:

$$x(t+1) = a^{t+1} x_0 + \sum_{j=0}^{t} a^{t-j} f(j)$$

В правій частині:

$$ax(t) + f(t) = a\left(a^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} f(j)\right) + f(t) =$$

$$a^{t+1}x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j} f(j) + f(t) = a^{t+1}x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j} f(j) + a^{t-j} f(j)\Big|_{j=t} =$$

$$a^{t+1}x_0 + \sum_{j=0}^{t} a^{t-j} f(j)$$

Отже бачимо, що вирази збігаються.

Єдиність розв'язку випливає банально з того, яким саме чином він отримується. Ось нехай нам потрібно знайти $x(1)$. Тоді маємо $x(1) = ax(0) + f(0) = ax_0 + f(0)$. Якщо нам потрібно знайти $x(2)$, то робимо так само:

$$x(2) = ax(1) + f(1) = a^2 x_0 + af(0) + f(1)$$

Якщо $x(3)$, то

$$x(3) = a^3 x_0 + a^2 f(0) + af(1) + f(2)$$

І так далі. Таким чином виходить послідовність з умови, і вона очевидно єдина.

Якщо маємо арифметично прогресію $a = 1, f(t) \equiv \hat{f}$, то маємо:

$$x(t) = 1^t x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} 1^{t-j-1} \hat{f} = x_0 + t\hat{f}$$

Якщо це геометрична прогресія $f(t) \equiv 0$, то маємо:

$$x(t) = a^t x_0$$

Якщо ж просто маємо $f(t) \equiv \hat{f}$ без обмежень на a, то:

$$x(t) = a^t x_0 + \hat{f} \sum_{j=0}^{t-1} a^{t-j-1} = a^t x_0 + \hat{f} \sum_{k=0}^{t-1} a^k = a^t x_0 + \frac{\hat{f}(1 - a^t)}{1 - a}$$

Завдання 2.

Умова. Вкладник поклав деяку суму на депозит під 10% річних. Через скільки років його дохід збільшиться удвічі (без урахування жодних зовнішніх інвестицій та витрат)?

Розв'язок. Нехай вкладник вклав суму I_0. Тоді через t років (якщо позначити $r = 0.1$) вкладник має суму:

$$B(t) = B_0(1+r)^t$$

Дохід збільшився удвічі, тобто став $2B_0$. Таким чином маємо рівняння:

$$(1+r)^t = 2 \to t = \frac{\log 2}{\log(1+r)} \approx 7.27$$

Тобто через 8 років його дохід збільшиться більше ніж удвічі, але через 7 років меж ніж удвічі.

Завдання 3.

Умова. Вкладник поклав $B_0 = 100$ на депозит під $r = 10\%$ річних. Через скільки років його дохід збільшиться вдвічі, якщо кожен рік він одержує додатково $\Delta B = 10$?

Розв'язок. Дохід вкладника $B(t)$ через t років знаходиться за допомогою формули:

$$B(t+1) = (1+r)B(t) + \Delta B,\ B(0) = 100$$

За допомоги задачі 1 маємо формулу доходу в будь-який час:

$$B(t) = (1+r)^t B_0 + \frac{\Delta B}{r}((1+r)^t - 1)$$

Або нам буде більш зручно записати як:

$$B(t) = (1+r)^t \left(B_0 + \frac{\Delta B}{r}\right) - \frac{\Delta B}{r}$$

За умовою нам потрібно розв'язати рівняння $B(t) = 2B_0$, то маємо:

$$(1+r)^t \left(B_0 + \frac{\Delta B}{r}\right) - \frac{\Delta B}{r} = 2B_0$$

Отже:

$$(1+r)^t = \frac{2B_0 + \Delta B/r}{B_0 + \Delta B/r} = \frac{2rB_0 + \Delta B}{rB_0 + \Delta B}$$

Отже наш час:

$$t = \log_{1+r}\left(\frac{2rB_0 + \Delta B}{rB_0 + \Delta B}\right) \approx 4.25$$

Отже через 4 роки прибуток не буде перевищувати удвічі, а вже через 5 буде перевищувати більш ніж удвічі.

Завдання 4.

Умова. Вкладник поклав 100 у.о. на депозит під 5 відсотків річних. Яку суму він одержить через 5 років, якщо зовнішні надходження складають 20 у.о. у перші три та 30 у.е. протягом останніх двох років?

Розв'язок. Дохід вкладника знаходиться за допомогою формули:

$$B(0) = 100,\ B(t+1) = 1.05B(t) + \Delta B(t),\ \Delta B(t) = \begin{cases} 20,\ t = 1,2,3, \\ 30,\ t = 4,5 \end{cases}$$

для $t = 1, 2, \ldots, 4$. Легше за все порахувати руками. Маємо:

$$B(1) = 1.05 \cdot 100 + 20 = 125,\ B(2) = 1.05 \cdot 125 + 20 = 151.25$$

$$B(3) = 1.05 \cdot 151.25 + 20 = 178.8125,\ B(4) = 1.05 \cdot 178.8125 + 30 = 217.753125$$

$$B(5) = 1.05 \cdot 217.753125 + 30 \approx 258.64$$

Отже вкладник отримує близько 258.64 у.о.

Завдання 5.

Умова. Нехай чисельність населення у 1970 році деякого міста складала 50 тис. осіб, а у 1980 році – 75 тис. осіб. Припускаючи, що чисельність населення у кінці року пропорційна чисельності населення на початку року зі сталим коефіцієнтом пропорційності, знайти, якою буде чисельність населення міста у 2000 році.

Розв'язок. Нехай $P(t)$ чисельність населення у t році. За умовою:

$$P(t+1) = \kappa P(t)$$

Спочатку знайдемо цей коефіцієнт. Тоді:

$$P(1980) = \kappa^{10} P(1970) \to \kappa = \left(\frac{75}{50}\right)^{1/10} \approx 1.04138$$

В такому разі чисельність населення у 2000 році:

$$P(2000) = P(1980) \cdot \kappa^{20} = 75 \cdot \frac{3^2}{2^2} = 168.75$$

Отже чисельність буде складати 168.75 тис. осіб за нашим припущенням.

Завдання 6.

Умова. Нехай чисельність населення в теперешній рік складає $N_0 = 6 \cdot 10^5$. Припускаючи, що коефіцієнт народжуваності довірнює $\beta = 0.05$ та смертності $\delta = 0.001$, з'ясувати, через скільки років чисельність населення сягне $N = 10^6$ (міграцію не враховувати).

Розв'язок. Чисельність населення $N(t)$ від кількості років від теперешнього t залежить наступним чином:

$$N(t+1) = (1 + \beta - \delta) N(t)$$

Враховуючи, що $N(0) = N_0$, то маємо:

$$N(t) = (1 + \beta - \delta)^t N_0 \to t = \frac{\log N/N_0}{\log(1 + \beta - \delta)} \approx 10.68$$

Отже, приблизно через 10.68 років населення досягне мільйона.

Завдання 7.

Умова. Нехай чисельність населення в теперешній рік складає $N = 3 \cdot 10^5$. Припускаючи, що коефіцієнт народжуваності довірнює $\beta = 0.05$ та смертності $\delta = 0.01$, з'ясувати, через скільки років чисельність населення сягне $N = 10^6$,якщо кожен рік населення за рахунок міграції збільшується на $\Delta N = 10^3$.

Розв'язок. Чисельність населення $N(t)$ від кількості років від теперешнього t залежить наступним чином:

$$N(t+1) = (1 + \alpha - \beta)N(t) + \Delta N,\ N(0) = N_0$$

Тоді, згідно завданню 1, маємо наступну явну залежність:

$$N(t) = (1 + \alpha - \beta)^t N_0 + \frac{\Delta N((1 + \alpha - \beta)^t - 1)}{\alpha - \beta}$$

Або:

$$N(t) = \left(N_0 + \frac{\Delta N}{\alpha - \beta}\right)(1 + \alpha - \beta)^t - \frac{\Delta N}{\alpha - \beta}$$

Тому шуканий час:

$$(1 + \alpha - \beta)^t = \frac{N + \frac{\Delta N}{\alpha - \beta}}{N_0 + \frac{\Delta N}{\alpha - \beta}} = \frac{(\alpha - \beta)N + \Delta N}{(\alpha - \beta)N_0 + \Delta N}$$

Тому остаточно:

$$t = \log_{1+\alpha-\beta} \frac{(\alpha - \beta)N + \Delta N}{(\alpha - \beta)N_0 + \Delta N} \approx 29.3$$

Отже потрібно приблизно 29.3 роки.

Завдання 8.

Умова. Знайти $\lim_{t\to\infty} D(t)$, де $D(t)$ позначає кількість речовини препарату в організмі людини після t-го застосування препарату зі сталою дозою $f(t) \equiv D_0$.

Розв'язок. Згідно формулі з параграфу:

$$D(t+1) = (1-p)D(t) + D_0$$

Знову ж таки, відповідно завданню 1 маємо наступну формулу:

$$D(t) = (1-p)^t D(0) + \frac{D_0(1-(1-p)^t)}{1-p}$$

Трошки відсортуємо додатки:

$$D(t) = (1-p)^t \left(D(0) - \frac{D_0}{1-p}\right) + \frac{D_0}{1-p}$$

І далі помітимо, що $|1-p| < 1$ (беремо звичайно випадки $p \neq 0, p \neq 1$ і тому $\lim_{t\to\infty}(1-p)^t = 0$. Тому остаточно:

$$\lim_{n\to\infty} D(t) = \frac{D_0}{1-p}$$

Завдання 9.

Умова. Нехай одноразово введено препарат в організм та кожної доби виводиться $p = 0.005$ речовини. Через скільки діб організм буде позбавлений 50% речовини?

Розв'язок. Кількість речовини від часу задається рівнянням:

$$D(t+1) = (1-p)D(t)$$

Отже, якщо $D(0) = D_0$, то маємо

$$D(t) = (1 - p)^t D_0$$

За умовою потрібно знайти такий час t, що $D(t) = 0.5D_0$, отже:

$$(1 - p)^t = \frac{1}{2} \to t = \frac{-\log 2}{\log(1 - p)} \approx 138.28$$

Отже, потрібно приблизно 138 діб.

Завдання 10.

Умова. Знайти $r(t)$ в явному вигляді (ханойські вежі).

Розв'язок. Згідно параграфу маємо:

$$r(t) = 1 + 2r(t - 1)$$

Згідно завданню 1 маємо:

$$r(t) = 2^{t-1}r(1) + (2^{t-1} - 1) = 2^{t-1}(r(1) + 1) - 1$$

Оскільки $r(1) = 1$, то

$$r(t) = 2^t - 1$$