Домашня робота #2 (друга частина) з курсу “Комплексний аналіз”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

6 листопада 2023 р.

Завдання 1 (Тест 7.1 #4).

Умова. Обчислити інтеграл:

$$\int_{\mathcal{C}} (2x - iy)dz, \; \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \operatorname{Re} z > 0\}$$

Розв'язок. Помітимо, що $dz = dx + idy$, тому

$$\mathcal{I} := \int_{\mathcal{C}} (2x - iy)(dx + idy) = \int_{\mathcal{C}} (2x - iy)dx + \int_{\mathcal{C}} (2ix + y)dy$$

Або можемо розбити на чотири інтеграли:

$$\mathcal{I} = 2\int_{\mathcal{C}} xdx - i\int_{\mathcal{C}} ydx + 2i\int_{\mathcal{C}} xdy + \int_{\mathcal{C}} ydy$$

Тепер треба параметризувати $\mathcal{C}$. Коло параметризується $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, проте треба обрати межу. Оскільки маємо праве півколо, то межі $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, тому $dx = \operatorname{Re} dz = -\sin\varphi d\varphi, dy = \operatorname{Im} dz = \cos\varphi d\varphi$. Тому можемо знайти кожен з інтегралів.

Перший інтеграл ($2\int_{\mathcal{C}} xdx$).

$$2\int_{\mathcal{C}} xdx = -2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\cos\pi - \cos(-\pi)}{2} = 0$$

Другий інтеграл ($i\int_{\mathcal{C}} ydx$).

$$i\int_{\mathcal{C}} ydx = -i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = -i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi$$
$$= -\frac{i\pi}{2} + \frac{i}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{i\pi}{2} + \frac{i(\sin\pi - \sin(-\pi))}{4} = -\frac{i\pi}{2}$$

Третій інтеграл ($2i\int_{\mathcal{C}} xdy$).

$$2i\int_{\mathcal{C}} xdy = 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi d\varphi = 2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = i\pi + i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\varphi d\varphi = i\pi$$

Четвертий інтеграл ($\int_{\mathcal{C}} ydy$).

$$\int_{\mathcal{C}} ydy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 0$$

Отже, по-ітогу:

$$\mathcal{I} = 0 + \frac{i\pi}{2} + i\pi = \frac{3i\pi}{2}$$

Відповідь. $\frac{3i\pi}{2}$.

Завдання 2 (Тест 7.1 #9).

Умова. Обчислити інтеграл $\int_{|z-2|=3} (z^2 - z)dz$

Розв'язок.

Спосіб I. Криву $|z-2| = 3$ можна параметризувати як $z = 2 + 3e^{i\varphi}$ для $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тому:

$$\mathcal{I} = \int_{|z-2|=3} (z^2 - z)dz = \int_0^{2\pi} ((2+3e^{i\varphi})^2 - 2 - 3e^{i\varphi})3ie^{i\varphi} d\varphi$$

Далі спрощуємо:

$$\mathcal{I} = 3i\int_0^{2\pi}(4+12e^{i\varphi}+9e^{2i\varphi}-2-3e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi =$$
$$3i\int_0^{2\pi}(2e^{i\varphi}+9e^{2i\varphi}+9e^{3i\varphi})d\varphi = 6i\int_0^{2\pi}e^{i\varphi}d\varphi + 27i\int_0^{2\pi}e^{2i\varphi}d\varphi + 27i\int_0^{2\pi}e^{3i\varphi}d\varphi$$

Бачимо інтеграли виду $\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}d\varphi$. Проінтегруємо:

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi}d\varphi = \frac{1}{ik}e^{ik\varphi}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{i(1-e^{2\pi ki})}{k} = 0$$

Отже, $\mathcal{I} = 0$.

Спосіб II. Оскільки функція $f(z) = z^2 - z$ голоморфна всередині шара $\mathcal{D} : |z-2| < 3$, то згідно теоремі Коші-Гурса $\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 0$.

Завдання 3 (Тест 8.1 #7).

Умова. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int_{|z+2|=3}\frac{\sin z}{z+3}dz$$

Розв'язок. Розглянемо функцію $f(z) = \sin z$. Вона є голоморфною на всьому $\mathbb{C}$, тому за інтегральною формулою Коші:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

В нашому випадку:

$$f(-3) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+2|=3}\frac{\sin\xi d\xi}{\xi+3} \implies \int_{|z+2|=3}\frac{\sin z dz}{z+3} = 2\pi i\sin(-3)$$

Відповідь. $2\pi i\sin(-3)$.

Завдання 4 (Тест 8.1 #8)

Умова. Обрати правильну формулу для обчислення інтеграла $\int_{|z+1|=3} \frac{\sin z}{(z+3)^2} dz$.

Розв'язок. Скористаємося наслідком інтегральної формули Коші:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

Отже, розглядаємо $f(z) = \sin z$. Похідна $f'(z) = \cos z$, тому:

$$f'(-3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=3} \frac{\sin z dz}{(z+3)^2} \implies \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=3} \frac{\sin z dz}{(z+3)^2} = 2\pi i \cos(-3)$$

Відповідь. $2\pi i \cos(-3)$.

Завдання 5 (Тест 8.1 #9)

Умова. За допомогою інтегральної формули Коші обчисліть інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+1)(z-3)}$$

Розв'язок. Розіб'ємо коло $|z| = 2$ на дві частини: півкулю, де $\operatorname{Re} z > 0$ і навпаки. Контур по правій півкулі назвемо $\mathcal{C}_1$, другу півкулю $\mathcal{C}_2$, а лінію по діаметру, відраховуючи зверху, $\mathcal{C}_3$ (див. рис. 1).

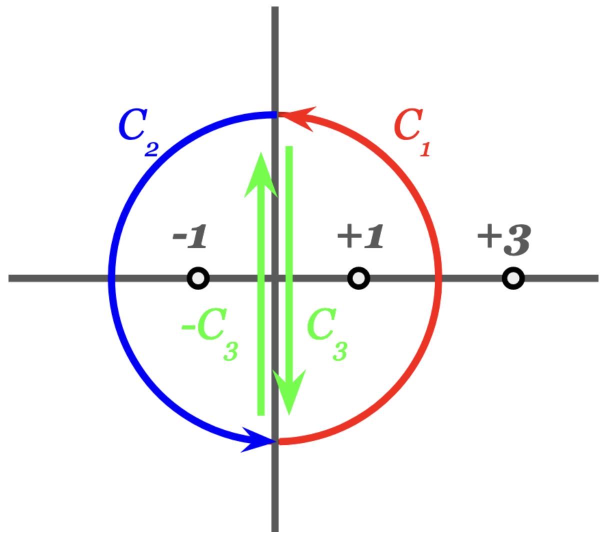

Рис. 1: Червоним відмічен контур $\mathcal{C}_1$, синім контур $\mathcal{C}_2$, а зеленим відрізок $\mathcal{C}_3$ зверху-вниз

Тоді наш інтеграл запишемо як:

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_3} \frac{dz}{(z-1)(z+1)(z-3)} + \int_{\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_3} \frac{dz}{(z-1)(z+1)(z-3)}$$

Для першого інтеграла введемо $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)}$, а для другого $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$. Помітимо, що в такому разі f є голоморфною у $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3$, а g у $\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3$. В такому разі:

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_3} \frac{f(z)dz}{z-1} + \int_{\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_3} \frac{g(z)dz}{z+1} = 2\pi i(f(1) + g(-1))$$

Підставляємо значення:

$$f(1) = \frac{1}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{4},\ g(-1) = \frac{1}{-2 \cdot (-4)} = \frac{1}{8}$$

В такому разі:

$$\mathcal{I} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi i}{4}$$

Відповідь. $-\frac{\pi i}{4}$.