Homework #13

Завдання 1.

Звести до канонічного виду

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 16 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові "умови" завдання:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \end{pmatrix}, \ \gamma = 16$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ -6 & 9 & 15 \\ -10 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda = \lambda(\lambda - 13)$, тобто маємо, що $\det \mathcal{A} = 0$. Інваріанти матриці $\mathcal{A}$:

$$I_1 = \text{tr}\mathcal{A} = 13, \ I_2 = \det \mathcal{A} = 0$$

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = 0$. Оскільки $J = I_2 = 0$, то інваріантом стає:

$$\xi = \mathrm{tr}_2\mathcal{B} = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = -117$$

Отже маємо рівняння $\widetilde{x}^2 + \frac{\xi}{I_1^2} = 0$. Маємо $\xi/I_1^2 = \frac{-117}{13^2} = -9/13$, тобто маємо пару паралельних прямих:

$$\widetilde{x}^2 - \frac{9}{13} = 0 \implies \widetilde{x} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \widetilde{x} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Завдання 2.

Звести до канонічного виду

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові "умови" завдання:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix},\ \gamma = -3$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -5 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 8)(\lambda - 2)$, тобто маємо, що $\det \mathcal{A} \neq 0$. Інваріанти матриці $\mathcal{A}$:

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathcal{A} = 10,\ I_2 = \det \mathcal{A} = 16$$

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = -128$. Оскільки $I_2 > 0, I_1 \cdot J < 0$, то маємо дійсний еліпс. Отже застосуємо наступну формулу:

$$\lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + \frac{J}{I_2} = 0$$

Маємо $8\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{y}^2 + (-128/16) = 0 \implies 4\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 = 4$. Остаточно наше рівняння:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{1} + \frac{\widetilde{y}^2}{4} = 1$$

Що є дійсним еліпсом з півосями $\alpha = 1, \beta = 2$.

Завдання 3.

Звести до канонічного виду

$$5y^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові "умови" завдання:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}, \ \gamma = -19$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & 5 & -11 \\ -6 & -11 & -19 \end{pmatrix}$$

Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = (\lambda - 9)(\lambda + 4)$, тобто маємо, що $\det \mathcal{A} \neq 0$. Інваріанти матриці $\mathcal{A}$:

$$I_1 = \mathrm{tr}\mathcal{A} = 5, \ I_2 = \det \mathcal{A} = -36$$

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = 1296$. Оскільки $I_2 < 0, I_1 \cdot J > 0$, то маємо гіперболу. Отже застосуємо наступну формулу:

$$\lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + \frac{J}{I_2} = 0$$

Маємо $9\widetilde{x}^2 - 4\widetilde{y}^2 - 1296/36$ або $9\widetilde{x}^2 - 4\widetilde{y}^2 = 36$. Остаточно наше рівняння:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{4} - \frac{\widetilde{y}^2}{9} = 1$$

Що є дійсним еліпсом з півосями $\alpha = 2, \beta = 3$.

Завдання 4.

Звести до канонічного виду

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові "умови" завдання:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \; \gamma = 45$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & -14 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 8 \\ -14 & 1 & 8 & 45 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник $\mathcal{A}$: $\det \mathcal{A} = 0$. Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 9)$. Отже нехай власні числа $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Інваріанти матриці $\mathcal{A}$: $I_1 = \mathrm{tr}_1 \mathcal{A} = 9, I_2 = I_3 = 0$.

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = 0$. Оскільки $J = I_3 = 0$, то маємо, що інваріантом $\mathcal{B}$ є $\mathrm{tr}_3 \mathcal{B}$. Обчислив його, отримаємо $\xi = \mathrm{tr}_3 \mathcal{B} = -144 - 144 - 36 = -324 \neq 0$. Отже маємо параболіний циліндр і рівняння має вид:

$$\lambda_1 \widetilde{x}^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\xi}{I_1}} \cdot \widetilde{z} = 0$$

Маємо $\sqrt{-\xi/I_1} = 6$, тому отримуємо $9\widetilde{x}^2 \pm 12\widetilde{z} = 0$ або $\widetilde{x}^2 \pm \frac{4}{3}\widetilde{z} = 0$.

Завдання 5.

Звести до канонічного виду

$$7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові "умови" завдання:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}7 & -5 & -4\\ -5 & 7 & -4\\ -4 & -4 & 16\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-8\\ -8\\ -4\end{pmatrix},\ \gamma=72$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b}^T & \gamma\end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix}7 & -5 & -4 & -8\\ -5 & 7 & -4 & -8\\ -4 & -4 & 16 & -4\\ -8 & -8 & -4 & 72\end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник $\mathcal{A}$: $\det\mathcal{A}=0$. Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-12)(\lambda-18)$. Отже нехай власні числа $\lambda_1=12,\lambda_2=18,\lambda_3=0$.

Інваріанти матриці $\mathcal{A}$: $I_1=\mathrm{tr}_1\mathcal{A}=\lambda_1+\lambda_2=30, I_2=\lambda_1\lambda_2=216, I_3=0$.

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J=\det\mathcal{B}=-31104$. Отже маємо параболоїд з рівнянням:

$$\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2\pm 2\sqrt{-\frac{J}{I_2}}\tilde{z}=0$$

Оскільки $\sqrt{-J/I_2}=12$ маємо $12\tilde{x}^2+18\tilde{y}^2\pm 24\tilde{z}=0, 2\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2\pm 4\tilde{z}=0$ або остаточно:

$$\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{4/3}\pm\tilde{z}=0$$

Завдання 6.

Звести до канонічного виду

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$$

Розв’язок. Випишемо початкові “умови” завдання:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-3\\ -12\\ 9\end{pmatrix},\ \gamma=30$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 30 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник $\mathcal{A}$: $\det \mathcal{A} = 162$. Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9)$. Отже нехай власні числа $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Інваріант I_3 матриці $\mathcal{A}$: $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 162$.

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = -972$. Отже маємо рівняння:

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \widetilde{x}_j^2 + \frac{J}{I_3} = 0$$

Розпишемо:

$$3\widetilde{x}^2 + 6\widetilde{y}^2 + 9\widetilde{z}^2 - 6 = 0,\ \frac{\widetilde{x}^2}{2} + \frac{\widetilde{y}^2}{1} + \frac{\widetilde{z}^2}{2/3} = 1$$

Маємо еліпсоїд з півосями $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2/3}$.