Домашня робота з математичного моделювання #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

13 лютого 2023 р.

1 Завдання 2.1.

Розв'язок.

Пункт А. Випадання не герба двічі.

Пункт Б. Принаймі 1 промах в результаті 3 пострілів.

Пункт В. Три промахи в результаті 3 пострілів.

2 Завдання 4.1.

Розв'язок. Якщо A та B є незалежними, то за означенням

$$p(A \cap B) = p(A)p(B) \tag{1}$$

Доведемо, що A та $\overline{B}$ також є незалежними, тобто $p(A \cap \overline{B}) = p(A)p(\overline{B})$. Для цього помітимо наступне:

$$A \cap \overline{B} = A \setminus B \tag{2}$$

Отже, можемо записати

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) \tag{3}$$

З рівняння 1 можемо записати:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A)p(\overline{B}) \quad (4)$$

Що і потрібно було довести.

Аналогічним чином доведемо незалежність $\overline{A}$ та $\overline{B}$. Маємо

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\Omega \setminus (A \cup B)) = p(\Omega) - p(A \cup B) \quad (5)$$

Використовуємо той факт, що $p(\Omega) = 1$ та те, що $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) \quad (6)$$

Знову підставляємо 1 і отримуємо:

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - p(A)) - p(B)(1 - p(A)) = (1 - p(A))(1 - p(B)) \quad (7)$$

Оскільки $1 - p(A) = p(\overline{A}), 1 - p(B) = p(\overline{B})$, то

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B}) \quad (8)$$

Що і потрібно було довести.

3 Завдання 4.7.

Розв'язок. Введемо простір елементарних подій $\Omega = \{[i, j]\}_{i,j=1}^{6}$ де кожен елемент $[i, j]$ позначає те, що на червоному кубіку випало i, а на рожевому j. Також вважаємо розподіл однорідним, тобто

$$\forall \omega \in \Omega : p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad (9)$$

Введемо подію E, що випала сума очок ≥ 10:

$$E = \{[i, j] \in \Omega \mid i + j \geq 10\} = \{[4, 6], [5, 5], [6, 4], [5, 6], [6, 5], [6, 6]\} \quad (10)$$

Також введемо ще 2 події A та B, що відповідають пунктам *а* та *б*:

$$A = \{[i, j] \in \Omega \mid i = 5\} = \{[1, 5], [2, 5], \dots, [6, 5]\} \tag{11}$$

$$B = \{[i, j] \in \Omega \mid i = 5 \vee j = 5\} = \{[1, 5], [2, 5], \dots, [6, 5], [5, 1], \dots, [5, 4], [5, 6]\} \tag{12}$$

Знайдемо відповідні ймовірності. Оскільки розподіл однорідний, то

$$\forall H \subset \Omega : p(H) = \sum_{\omega \in H} p(\omega) = \frac{|H|}{|\Omega|} \tag{13}$$

Тому достатньо просто знаходити відношення розміру множини та $|\Omega| = 36$. Тому маємо:

$$p(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \tag{14}$$

$$p(B) = \frac{|B|}{36} = \frac{11}{36} \tag{15}$$

В пункті *а* нам потрібно знайти $p(E \mid A)$, а в пункті *б* $p(E \mid B)$. В обидвах випадках нам потрібно знайти $p(E \cap A), p(E \cap B)$, тому зробимо це одразу. Бачимо,

$$E \cap A = \{[5, 5], [6, 5]\},\ E \cap B = \{[5, 5], [5, 6], [6, 5]\} \tag{16}$$

Отже

$$p(E \cap A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ p(E \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \tag{17}$$

Отже, перейдемо до відповідей на пункти.

Пункт А. За формулою Баєса маємо

$$p(E \mid A) = \frac{p(E \cap A)}{p(A)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{1}{3} \tag{18}$$

Пункт Б. Аналогічним чином,

$$p(E \mid B) = \frac{p(E \cap B)}{p(B)} = \frac{1/12}{11/36} = \frac{3}{11} \tag{19}$$

Відповідь. $\frac{1}{3}, \frac{3}{11}$.

4 Завдання 4.8.

Розв'язок. Позначимо $p(H = h)$ ймовірність того, що в урні h кульок, причому за умовою

$$p(H = h) = \frac{1}{n+1} \; \forall h = 0, \dots, n \tag{20}$$

Позначимо $p(X = 1)$ ймовірність того, що ми дістали білу кульку, відповідно $p(X = 0) = 1 - p(X = 1)$ це ймовірність того, що ми дістали не білу кульку. Тоді, можемо записати ймовірність $X = 1$ при умові, що в урні ми маємо h кульок:

$$p(X = 1 \mid H = h) = \frac{h}{n} \tag{21}$$

Нам потрібно знайти ймовірність $p(X = 1)$. Ми можемо її знайти за допомогою наступної формули:

$$p(X = 1) = \sum_{h=0}^{n} p(X = 1 \mid H = h) p(H = h) \tag{22}$$

Користуючись формулами 20 та 21, маємо

$$p(X = 1) = \sum_{h=0}^{n} \frac{h}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{h=0}^{n} h = \frac{1}{2} \tag{23}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

5 Завдання 4.10.

Розв'язок. Нехай $p(X = 1)$ ймовірність події, що ми переклали білу кульку. В такому разі доволі очевидно, що

$$p(X = 1) = \frac{m_1}{n_1} \tag{24}$$

Відповідно $p(X = 0)$ це ймовірність того, що ми переклали не білу кульку і оскільки $p(X = 0) + p(X = 1) = 1$, то можемо записати

$$p(X = 0) = 1 - p(X = 1) = \frac{n_1 - m_1}{n_1} \tag{25}$$

Далі нехай $p(Y = 1)$ це ймовірність того, що ми з другої урни взяли білу кульку. Тоді якщо виконалось $X = 1$, то в другій урні ми маємо $m_2 + 1$ білих кульок, а отже:

$$p(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{m_2 + 1}{n_2 + 1} \tag{26}$$

Якщо ж ми не переклали кульку, тобто виконалось $X = 0$, то в другій урні так і залишилось m_2 білих кульок і тоді

$$p(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{m_2}{n_2 + 1} \tag{27}$$

Нам потрібно знайти $p(Y = 1)$, отже, скористаємося наступною формулою:

$$p(Y = 1) = p(Y = 1 \mid X = 0)p(X = 0) + p(Y = 1 \mid X = 1)p(X = 1) \tag{28}$$

Користаємось усіма формула до цього і отримуємо:

$$p(Y = 1) = \frac{m_2}{n_2 + 1} \cdot \frac{n_1 - m_1}{n_1} + \frac{m_2 + 1}{n_2 + 1} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2 n_1 - m_1 m_2 + m_2 m_1 + m_1}{n_1(n_2 + 1)} \tag{29}$$

Отже остаточно

$$p(Y = 1) = \frac{m_2 n_1 + m_1}{n_1(n_2 + 1)} \tag{30}$$

Відповідь: $\frac{m_1 + n_1 m_2}{n_1(n_2 + 1)}$

6 Завдання 4.17.

Розв'язок. Позначимо $p(a = 1) = 0.6, p(b = 1) = 0.5, p(c = 1) = 0.4$ шанс того, що влучив стрілець A, B, C відповідно. Будемо використовувати запис $p(X \cap Y) \equiv p(X, Y)$ для зручності. Також вважаємо цю трійку подій незалежними, тобто

$$p(a = 1, b = 1, c = 1) = p(a = 1)p(b = 1)p(c = 1) \tag{31}$$

$$p(a = 1, b = 1) = p(a = 1)p(b = 1), \ldots \tag{32}$$

Позначимо подію 'два влучання' через H. Нам потрібно порівняти $p(c = 1 \mid H)$ та $p(c = 0 \mid H)$.

Запишемо вираз для $p(c = 1 \mid H)$:

$$p(c = 1 \mid H) = \frac{p(c = 1, H)}{p(H)} \tag{33}$$

Знайдемо ймовірність події H. Два влучання може бути або якщо попали A, B, або A, C, або B, C, або усі разом, тобто

$$p(H) = p(a = 1, b = 1) + p(a = 1, c = 1) + p(b = 1, c = 1) + p(a = 1, b = 1, c = 1) \tag{34}$$

Оскільки події незалежні, то маємо

$$p(H) = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 + p_1p_2p_3 \tag{35}$$

Залишилось знайти ймовірність того, що лучник C попав якщо було 2 влучання. Це означає, що або влучили A, C, або B, C, або усі разом, тобто

$$p(c = 1, H) = p_1p_3 + p_2p_3 + p_1p_2p_3 \tag{36}$$

Отже

$$p(c = 1 \mid H) = \frac{p_1p_3 + p_2p_3 + p_1p_2p_3}{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 + p_1p_2p_3} \approx 65.1\% \tag{37}$$

Оскільки $p(c = 0 \mid H) = 1 - p(c = 1 \mid H)$, то маємо, що більш ймовірно, що лучник C попав.

Відповідь. Більш ймовірно, що лучник C попав (вирогідність 0.651).

7 Завдання 4.19.

Розв'язок. Нехай ймовірність $p(x = 0)$ позначає ймовірність перетягнути 2 чорні кулі, $p(x = 1)$ ймовірність перетягнути 1 чорну і 1 білу кулю, а $p(x = 2)$ ймовірність перетягнути 2 білі кулі. В такому разі:

$$p(x = 0) = \frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10} \tag{38}$$

$$p(x = 1) = \frac{6}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \tag{39}$$

$$p(x = 2) = \frac{3}{C_5^2} = \frac{3}{10} \tag{40}$$

Позначимо через $p(y = 1)$ ймовірність дістати білу кулю з другої урни. Помітимо, що

$$p(y = 1) = \sum_{k=0}^{2} p(y = 1 \mid x = k) p(x = k) \tag{41}$$

Залишилось знайти $p(y = 1 \mid x = k), k = 0, 1, 2$. Маємо:

$$p(y = 1 \mid x = k) = \frac{4 + k}{10}, \tag{42}$$

бо $x = k$ відповідає випадку, коли ми переклали k білих кульок з першої купи у другу. Отже, остаточно маємо

$$p(y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = 0.52 \tag{43}$$

Відповідь. 0.52

8 Завдання 4.24.

Розв'язок. Нехай ймовірність того, що виріб підприємства задовольняє стандарту $p(y = 1) = 0.96$. Також на умовою маємо, що

$$p(x = 1 \mid y = 1) = 0.98,\ p(x = 1 \mid y = 0) = 0.05 \tag{44}$$

Де ми позначили $x = 1$, що контроль класифікує виріб як стандартний. Нам потрібно знайти $p(y = 1 \mid x = 1)$, тобто ймовірність того, що виріб задовольняє стандарт, якщо виріб витримав контроль. Застосуємо правило Баєса:

$$p(y = 1 \mid x = 1) = \frac{p(x = 1 \mid y = 1)p(y = 1)}{p(x = 1 \mid y = 1)p(y = 1) + p(x = 1 \mid y = 0)p(y = 0)} \tag{45}$$

Рахуємо:

$$p(y = 1 \mid x = 1) = \frac{0.98 \cdot 0.96}{0.98 \cdot 0.96 + 0.05 \cdot (1 - 0.96)} \approx 0.9979 \tag{46}$$

9 Вправа 1.

Теорема 1: Еквівалентність означень незалежних подій

2 події $A, B \subset \Omega$ називають незалежними якщо:

1. $p(A, B) = p(A)p(B)$
2. $p(A \mid B) = p(A)$

Довести еквівалентність цих означень.

Доведення. По суті, нам потрібно довести наступне твердження:

$$p(A, B) = p(A)p(B) \iff p(A \mid B) = p(A) \tag{47}$$

$\Rightarrow$. Доведемо твердження 47 зліва-направо. За означенням умовної ймовірності:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A,B)}{p(B)} \tag{48}$$

Користуємось лівою частиною твердження 47:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A) \tag{49}$$

Що і потрібно було довести.

$\Leftarrow$. За означенням умовної ймовірності:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A,B)}{p(B)} \tag{50}$$

Використовуємо твердження праворуч 47:

$$\frac{p(A,B)}{p(B)} = p(A) \implies p(A,B) = p(A)p(B) \tag{51}$$

Що і потрібно було довести.

10 Вправа 2.

Розв'язок. Запишемо умову незалежності у сукупності подій A, B, C, D:

$$\begin{aligned} p(A,B) = p(A)p(B),\ p(A,C) = p(A)p(C), \\ p(A,D) = p(A)p(D),\ p(B,C) = p(B)p(C), \\ p(B,D) = p(B)p(D),\ p(C,D) = p(C)p(D), \\ p(A,B,C) = p(A)p(B)p(C),\ p(A,B,D) = p(A)p(B)p(D), \\ p(B,C,D) = p(B)p(C)p(D),\ p(A,B,C,D) = p(A)p(B)p(C)p(D) \end{aligned}$$