# Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #3

Захаров Дмитро

26 жовтня, 2024

## Зміст

1	Домашня Робота			
	1.1	Номер 3.1 (4)	2	
	1.2	Номер 3.2 (1)	4	

### 1 Домашня Робота

### 1.1 Номер 3.1 (4).

**Умова Задачі 1.1.** Знайти функцію Гріна методом конформних відображень для області:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}$$

**Розв'язання.** Метод конформних відображень полягає у тому, що якщо конформне відображення  $w:\Omega\to\mathbb{C}$  відображає область  $\Omega$  у одиничне коло |z|<1, то функція Гріна для області  $\Omega$  може бути знайдена у вигляді:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}{w(z) - w(\zeta)} \right|$$
, де  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ .

Отже, наша ціль — це побудувати w(z), що переведе верхню половину півкулі на одиничне коло. Це можна зробити за допомогою чотирьох відображень:

- 1.  $w_1: z \mapsto z/R$  відображає верхнє півколо радіусу R у одиничне півколо радіусу R;
- 2.  $w_2: z \mapsto (1+z)/(1-z)$  відобразить верхню півкулю у перший квадрант;
- 3.  $w_3: z \mapsto z^2$  відобразить перший квадрант у верхню півплощину;
- 4.  $w_4: z \mapsto (z-i)/(z+i)$  відобразить верхню півплощину у одиничне коло.

Отже, наше відображення має вигляд  $w(z) = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1(z)$ . Треба це розписати:

$$w(z) = \frac{\left(\frac{1+z/R}{1-z/R}\right)^2 - i}{\left(\frac{1+z/R}{1-z/R}\right)^2 + i} = \frac{(1+z/R)^2 - i(1-z/R)^2}{(1+z/R)^2 + i(1-z/R)^2}$$
$$= \frac{\frac{1-i}{R^2}(z^2 + 2iRz + R^2)}{\frac{1+i}{R^2}(z^2 - 2iRz + R^2)} = -i \cdot \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2}$$

Далі, нам потрібно знайти спряжений вираз до цього:

$$\overline{w(\zeta)} = \frac{\overline{-i(\zeta^2 + 2iR\zeta + R^2)}}{\overline{\zeta^2 - 2iR\zeta + R^2}} = \frac{i(\overline{\zeta}^2 + 2R\overline{i\zeta} + R^2)}{\overline{\zeta}^2 - 2R\overline{i\zeta} + R^2} = i \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2}$$

Далі починаємо рахувати сам дріб. Почнемо з чисельнику:

$$1 - w(z)\overline{w(\zeta)} = 1 - \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2} \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2} = \frac{4iR(\overline{\zeta} - z)(R^2 - \overline{\zeta}z)}{(R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2)(R^2 - 2iRz + z^2)}$$

Тепер знайдемо знаменник:

$$w(z) - w(\zeta) = -i \cdot \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2} + i \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2} = -\frac{4R(\zeta - z)(R^2 - \zeta z)}{(R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2)(R^2 - 2iRz + z^2)}$$

Отже, маємо:

$$T(z,\zeta) = \frac{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}{w(z) - w(\zeta)} = -i \cdot \frac{(\overline{\zeta} - z)(R^2 - \overline{\zeta}z)(R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta z)(R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2)}$$

Спочатку знайдемо модулі ось цих двох довгих виразів:

$$|R^{2} - 2iR\zeta + \zeta^{2}| = |R^{2} - 2iR(\xi_{1} + i\xi_{2}) + (\xi_{1} + i\xi_{2})^{2}|$$

$$= |R^{2} + \xi_{1}^{2} - \xi_{2}^{2} + 2R\xi_{2} - 2iR\xi_{1} + 2i\xi_{1}\xi_{2}|$$

$$= \sqrt{(R^{2} + \xi_{1}^{2} - \xi_{2}^{2} + 2R\xi_{2})^{2} + 4\xi_{1}^{2}(\xi_{2} - R)^{2}}$$

$$|R^{2} + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^{2}| = |R^{2} + 2iR(\xi_{1} - i\xi_{2}) + (\xi_{1} - i\xi_{2})^{2}|$$

$$= |R^{2} + 2R\xi_{2} + \xi_{1}^{2} - \xi_{2}^{2} + (2R\xi_{1} - 2\xi_{1}\xi_{2})i|$$

$$= \sqrt{(R^{2} + \xi_{1}^{2} - \xi_{2}^{2} + 2R\xi_{2})^{2} + 4\xi_{1}^{2}(\xi_{2} - R)^{2}}$$

Модулі вийшли однаковими. Дійсно, бо ці два вирази є спряженими:

$$\overline{R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2} = R^2 - 2R\overline{i\zeta} + \overline{\zeta}^2 = R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2$$

Тому, маємо:

$$|T(z,\zeta)| = |-i| \cdot \frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|} = \frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|}$$

З цього моменту можемо рахувати модулі усіх виразів:

$$|\overline{\zeta} - z| = |(\xi_1 - i\xi_2) - (x_1 + ix_2)| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2},$$
  

$$|\zeta - z| = |(\xi_1 + i\xi_2) - (x_1 + ix_2)| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2},$$

І наступних двох:

$$|R^{2} - \overline{\zeta}z| = |R^{2} - (\xi_{1} - i\xi_{2})(x_{1} + ix_{2})| = |R^{2} - \xi_{1}x_{1} - \xi_{2}x_{2} + (x_{1}\xi_{2} - x_{2}\xi_{1})i|$$

$$= \sqrt{(R^{2} - \xi_{1}x_{1} - \xi_{2}x_{2})^{2} + (x_{1}\xi_{2} - x_{2}\xi_{1})^{2}},$$

$$|R^{2} - \zeta z| = |R^{2} - (\xi_{1} + i\xi_{2})(x_{1} + ix_{2})| = |R^{2} - \xi_{1}x_{1} + \xi_{2}x_{2} - (x_{1}\xi_{2} + x_{2}\xi_{1})i|$$

$$= \sqrt{(R^{2} - \xi_{1}x_{1} + \xi_{2}x_{2})^{2} + (x_{1}\xi_{2} + x_{2}\xi_{1})^{2}}.$$

Отже, остаточно наша функція Гріна має вигляд:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2} \cdot \sqrt{(R^2 - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2 + (x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)^2}}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} \cdot \sqrt{(R^2 - \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2 + (x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1)^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \log \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} + \frac{1}{4\pi} \log \frac{(R^2 - \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2 + (x_1 \xi_2 - x_2 \xi_1)^2}{(R^2 - \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2 + (x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1)^2}$$

### 1.2 Номер 3.2 (1).

**Умова Задачі 1.2.** Розв'язати задачу для рівняння  $\Delta u = 0$ ,  $x_2 > 0$  з граничними умовами:

$$u\Big|_{x_2=0} = \theta(x_1-1), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

**Розв'язання.** Для початку згадаємо, що на практиці ми вже виписували функцію Гріна для такої задачі:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left( \log \left( (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2 \right) - \log \left( (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \right) \right)$$

Тепер згадаємо, що розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа можна записати у вигляді:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \phi(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}$$

В нашому випадку  $f(\xi) \equiv 0$ , тому все зводиться до обчислення другого інтегралу:

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \phi(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}$$

Отже, треба знайти часткову похідну за нормаллю. В нашому випадку, нормаль дивиться вертикально "вниз" від верхньої півплощини, тому  $\boldsymbol{\nu}=(0,-1)$ . Таким чином, маємо:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2 + \xi_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2 - \xi_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$$

Далі, оскільки ми інтегруємо за границею, то  $\xi_2 = 0$ . Тому, спростимо вираз і далі:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\xi_2=0} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}$$

Отже, наш інтеграл запишеться як:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \cdot \theta(\xi_1 - 1) d\xi_1 = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi_1 - 1) d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}$$

Помітимо, що за  $\xi_1 < 1$ , вираз під інтегралом нульовий, тому можемо змінити межі інтегрування:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi x_2} \int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{1 + \left(\frac{x_1 - \xi_1}{x_2}\right)^2}$$

Отже, зробимо заміну  $\zeta:=rac{\xi_1-x_1}{x_2}$ , тоді  $x_2d\zeta=d\xi_1$  і тому:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{(1-x_1)/x_2}^{+\infty} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\xi_1 - x_1}{x_2}\right) \Big|_1^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1 - x_1}{x_2}\right)\right)}$$