Теорія Ймовірності

Весняний семестр 2024

Домашня робота 4

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Півень О.Л.*

§ Випадкові величини §

Задача 1: Номер 1

Умова. Випадкова величина ξ задає кількість нулів в автомобільному номері з 4-х цифр. Скласти таблицю розподілу ξ, записати функцію розподілу ξ, побудувати її графік. Знайти ймовірність $\Pr\left[\frac{1}{\pi} \leq \xi \leq \pi\right]$.

Розв'язання. Множина можливих значень $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. З них на відрізок $[\pi^{-1}, \pi]$ попадають лише $\{1, 2, 3\}$, тому

$$\begin{aligned}\Pr\left[\frac{1}{\pi} \leq \xi \leq \pi\right] &= \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ \pi^{-1} \leq x \leq \pi}} \Pr[\xi = x] \\ &= \Pr[\xi = 1] + \Pr[\xi = 2] + \Pr[\xi = 3] \\ &= 1 - (\Pr[\xi = 0] + \Pr[\xi = 4]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Далі знаходимо ці ймовірності. Для цього покажемо, що перед нами біноміальний розподіл $\xi \sim \mathrm{Bin}\left(4, \frac{1}{10}\right)$. Дійсно, окремим експериментом вважатимемо випадіння 0 серед 10 навмання обранних цифр; шанс цієї події в рамках експерименту $\frac{1}{10}$. Експериментів всього 4 – для кожної позиції на номері. Отже,

$$\Pr[\xi = x] \triangleq \binom{4}{x} \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{4-x}, \; x \in \mathcal{X} \tag{1.2}$$

З цього нам потрібно лише $\Pr[\xi = 0]$ та $\Pr[\xi = 4]$, тому

$$\begin{aligned}\Pr[\xi = 0] &= \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0.6561 \\ \Pr[\xi = 4] &= \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0.0001\end{aligned} \tag{1.3}$$

Остаточно

$$\Pr\left[\frac{1}{\pi} \leq \xi \leq \pi\right] = 1 - (0.6561 + 0.0001) = \boxed{0.3438} \tag{1.4}$$

Відповідь. 0.3438.

Задача 2: Номер 2

Умова. По лосю було випущено 3 балістичні ракети. Перша влучає з ймовірністю 0.2, друга – з ймовірністю 0.3, третя – з ймовірністю 0.5. Випадкова величина ξ описує кількість ракет, що влучили в тварину.

Скласти таблицю розподілу ξ, записати функцію розподілу ξ, побудувати її графік. Знайти ймовірність $\Pr[3\xi - \xi^2 \geq 2]$.

Розв'язання. Множина можливих значень ξ це $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$. Введемо три події: E_j – влучила ракета з номером j. Тоді, запишемо ймовірності подій $\xi = x, x \in \mathcal{X}$:

$$\Pr[\xi = 0] = \Pr[\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3] \tag{2.1}$$

$$\Pr[\xi = 1] = \Pr[(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) \cup (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3)] \tag{2.2}$$

$$\Pr[\xi = 2] = \Pr[(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E}_3) \cup (E_1 \cap \overline{E}_2 \cap E_3) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2 \cap E_3)] \tag{2.3}$$

$$\Pr[\xi = 3] = \Pr[E_1 \cap E_2 \cap E_3]. \tag{2.4}$$

За умовою ми знаємо

$$\Pr[E_1] = 0.2 =: p_1,\ \Pr[E_2] = 0.3 =: p_2,\ \Pr[E_3] = 0.5 =: p_3. \tag{2.5}$$

Тепер, запишемо $\Pr[\xi = x], x \in \mathcal{X}$ в термінах $p_j, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\Pr[\xi = 0] = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \tag{2.6}$$

$$\Pr[\xi = 1] = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 \tag{2.7}$$

$$\Pr[\xi = 2] = p_1p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)p_3 + (1 - p_1)p_2p_3 \tag{2.8}$$

$$\Pr[\xi = 3] = p_1p_2p_3 \tag{2.9}$$

Отже, підрахуємо:

$$\Pr[\xi = 0] = 0.28 \tag{2.10}$$

$$\Pr[\xi = 1] = 0.47 \tag{2.11}$$

$$\Pr[\xi = 2] = 0.22 \tag{2.12}$$

$$\Pr[\xi = 3] = 0.03 \tag{2.13}$$

Це і є нашою таблицею розподілу величини ξ. Для підрахунку функції розподілу, знайдемо:

$$F_\xi(t) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}: x < t} \Pr[\xi = x] = \begin{cases} 0.00, & t \leq 0 \\ 0.28, & 0 < t \leq 1 \\ 0.75, & 1 < t \leq 2 \\ 0.97, & 2 < t \leq 3 \\ 1.00, & t > 3 \end{cases} \tag{2.14}$$

Отже, залишилось знайти $\Pr[3\xi - \xi^2 \geq 2]$. Для цього розглянемо поліном $-\xi^2 + 3\xi - 2 \geq 0$: його корені – це $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2$. На проміжку $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ значення поліному невід'ємне, а значить для $\mathbb{R} \setminus [\xi_1, \xi_2]$ воно є строго від'ємним. Тому розв'язок рівняння $\xi \in [1, 2]$, з них ті, що належать $\mathcal{X}$ – це $\{1, 2\}$. Отже:

$$\Pr[3\xi - \xi^2 \geq 2] = \Pr[\xi = 1] + \Pr[\xi = 2] = 0.69. \tag{2.15}$$

Задача 3: Номер 3

Умова. З п'яти карток, занумерованих числами від 1 до 5, одночасно витягли 3 картки. Нехай ξ – найменший витягнутий номер. Скласти таблицю розподілу ξ, записати функцію розподілу ξ, побудувати її графік. Знайти ймовірність $\Pr[\xi^2 - 6\xi + 8 \leq 0]$.

Розв'язання. Множина можливих значень ξ це $\mathcal{X} = \{1, \ldots, 3\}$, оскільки 4 або 5 не може бути мінімумом. Розглянемо ймовірність кожної з подій $\xi = x, x \in \mathcal{X}$:

Випадок $\xi = 1$. Нехай на будь-якій з карток випала 1. Тоді кількість способів вибрати всі інші цифри $\binom{4}{2}$. Оскільки всього способів вибрати три картки це $\binom{5}{3}$, то $\Pr[\xi = 1] = \binom{4}{2} / \binom{5}{3} = \frac{3}{5}$.

Випадок $\xi = 2$. Нехай на одній з карток випала 2. Тоді на інших картках випало щось з набору $\{3, 4, 5\}$, бо мінімум був би вже $\xi = 1$. Тоді шукана ймовірність – це відношення кількості варіантів $\binom{3}{2}$ до загальної кількості $\binom{5}{3}$, тобто $\Pr[\xi = 2] = \frac{3}{10}$.

Випадок $\xi = 3$. Якщо випало 3, то інші дві картки – це 4 та 5, тому $\Pr[\xi = 3] = 1/\binom{5}{3} = \frac{1}{10}$.

Отже, таблиця розподілу:

$$\Pr[\xi = 1] = \frac{3}{5},\ \Pr[\xi = 2] = \frac{3}{10},\ \Pr[\xi = 3] = \frac{1}{10}, \tag{3.1}$$

а функція розподілу:

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 < t \leq 2 \\ \frac{9}{10}, & 2 < t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

Щоб знайти ймовірність $\Pr[\xi^2 - 6\xi + 8 \leq 0]$, то помічаємо, що розв'язок рівняння у дужках це $\mathbb{R} \setminus (2, 4)$, з яких множині $\mathcal{X}$ належать $\{1, 2\}$, тому

$$\Pr[\xi^2 - 6\xi + 8 \leq 0] = \Pr[\xi = 1] + \Pr[\xi = 2] = F_\xi(3) = \frac{9}{10} \tag{3.3}$$

Задача 4: Номер 4

Умова. Снайпер стріляє в мішень до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює $\theta = 0.2$. Нехай ξ – номер пострілу, на якому він влучив вперше. Скласти таблицю розподілу ξ та знайти ймовірність того, що влучення станеться не раніше 6-го пострілу.

Розв'язання. Нехай подія E_n позначає, що снайпер влучив на пострілі $n \in \mathbb{N}$. Тоді,

$$\Pr[\xi = n] = \Pr\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{E}_i\right) \cap E_n\right] = (1-\theta)^{n-1}\theta \tag{4.1}$$

Отже наша таблиця розподілу $\Pr[\xi = n] = (0.8)^{n-1} \times 0.2$.

Знайдемо, що влучення станеться не раніше 6-го пострілу. По суті, треба знайти $\Pr[\xi \geq 6]$, або:

$$\begin{aligned}
\Pr[\xi \geq 6] &= \sum_{n=6}^{\infty}(1-\theta)^{n-1}\theta = \theta\sum_{n=6}^{\infty}(1-\theta)^{n-1} \\
&= \theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(1-\theta)^{n+5} = \theta(1-\theta)^5\sum_{n=0}^{\infty}(1-\theta)^n \\
&= \theta(1-\theta)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-\theta)} = (1-\theta)^5 = 0.8^5 = 0.32768
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Задача 5: Вправа 1

Умова. Наведіть приклад дискретної випадкової величини, для якої виконується $\mathcal{F} \neq 2^\Omega$.

Розв'язання. Задамо простір $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ як $\Omega = \{1, 2, 3\}$, сігма-алгебра $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$, ймовірність $\Pr(\Omega) = 1, \Pr(\emptyset) = 0$. Очевидно, що при цьому $2^\Omega \neq \mathcal{F}$. $\square$

Задача 6: Вправа 3

Умова. Перевірте коректність визначення розподілу Пуассона.
Розв'язання. Розподіл Пуассона:

$$\Pr[\xi = n] = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\ n \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.1}$$

Для доведення коректності достатньо показати $\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \Pr[\xi = n] = 1$. Отже,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \Pr[\xi = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=e^{\lambda}} = 1. \tag{6.2}$$

Тут ми скористались розкладенням у ряд $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. □