Домашня робота з математичного аналізу #9

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

14 березня 2023 р.

1 Завдання 5.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E f(x,y)dS$ у вигляді повторного двома способами з різним порядком інтегрування якщо

$$E = \left\{(x,y) \mid \frac{y^2}{2c^2} \leq x \leq \sqrt{3 - \frac{y^2}{c^2}}, 0 \leq y \leq \sqrt{2}c\right\}$$

Розв'язок. Намалюємо нашу множину E, вона зображена на рис. 1. Перед тим, як безпосередньо знаходити інтеграли, знайдемо характерні точки E. По-перше, бачимо, що найлівіша точка має координати $(0,0)$. Знайдемо координати перетинів кривих $y^2 = 2c^2x$ та $x = \sqrt{3 - y^2/c^2}$. Якщо підставити перше рівняння у друге отримаємо:

$$x = \sqrt{3-2x} \to x^2 = 3 - 2x \to x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = 1, x = -3$$

Вочевидь $x = -3$ не підходить якщо підставити його знову у рівняння $x = \sqrt{3-2x}$. Отже, маємо, що усі точки перетину мають $x = 1$. В такому разі $y^2 = 2c^2$ і тому маємо 2 точки перетину:

$$(1, \sqrt{2}c),\ (1, -\sqrt{2}c)$$

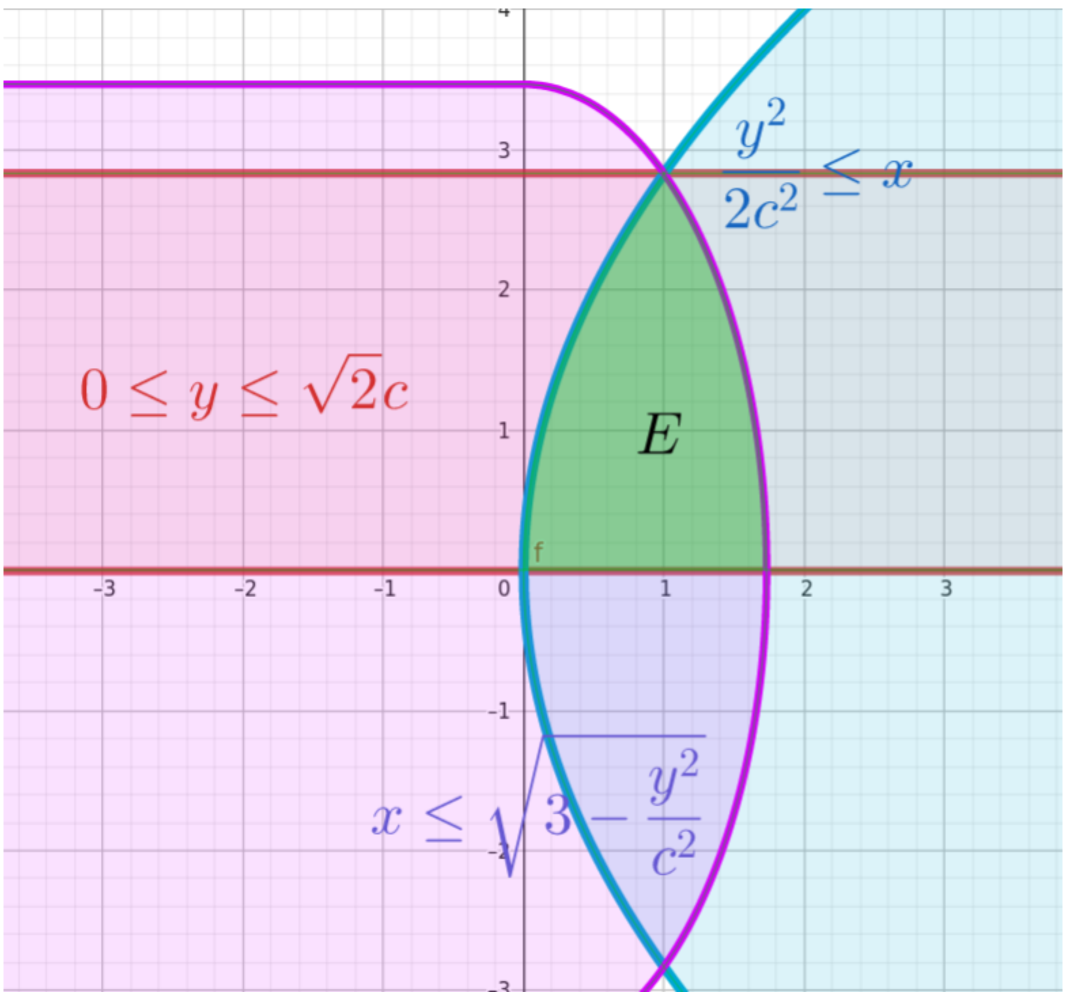

Рис. 1: Множина E для $c = 2$

Нарешті найправіша точка $(\sqrt{3}, 0)$. Спочатку випишемо інтеграл рухаючись по y:

$$\mathcal{I} = \int_{-\sqrt{2}c}^{\sqrt{2}c} dy \int_{y^2/2c^2}^{\sqrt{3-y^2/c^2}} f(x,y)dx$$

По x ситуація складніша. По-перше, виразимо y від x для двох кривих на проміжку $[0, \sqrt{3}]$. Для $x = \sqrt{3 - y^2/c^2}$ маємо дві гілки:

$$y = \pm c\sqrt{3 - x^2}$$

Для $x = y^2/2c^2$ маємо також 2 гілки $y = \pm c\sqrt{2x}$. Наш інтеграл розіб'ється на 2 інтервали: $[0, 1] \cup [1, \sqrt{3}]$ і тому:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \int_{-c\sqrt{2x}}^{c\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_{-c\sqrt{3-x^2}}^{c\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$

2 Завдання 6.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E f(x,y)dS$ у вигляді повторного двома способами з різним порядком інтегрування якщо

$$E = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1 - y, 0 \le y \le 1\right\}$$

Розв'язок. Намалюємо нашу область E, вона зображена на рис. 2.

Запишемо спочатку інтеграл, рухаючись по y. Легко бачити, що

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Для того, щоб записати його по x, виразимо y через x. Для прямої це очевидно $y = 1 - x$, а ось для кореня знайдемо обернену верхню вітку для проміжку $[-1, 0]$: $y = \sqrt{1 - x^2}$. Отже, маємо

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

Рис. 2: Множина E, виділена жовтим

3 Завдання 7.

Умова. Записати подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E f(x,y)dS$ у вигляді повторного двома способами з різним порядком інтегрування якщо E обмежена кривими

$$x^2 + y^2 = 2a^2,\ x^2 = ay,\ a, y > 0$$

Розв'язок. Намалюємо нашу область, вона зображена на 3. Спочатку знайдемо характерні точки нашої області. По-перше, вертикальні крайні точки вочевидь мають координати $(0,0), (0, \sqrt{2}a)$. Далі нам потрібно знайти точки перетину кола та $x^2 = ay$. Для цього підставляємо $y = x^2/a$ у рівняння кола:

$$x^2 + \frac{x^4}{a^2} = 2a^2 \to x^4 + a^2x^2 - 2a^4 = 0$$

Це біквадратне рівняння. Розв'язуємо його відносно x^2:

$$x^2 = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 8a^4}}{2} \to x^2 = \frac{-a^2 + 3a^2}{2} = a^2$$

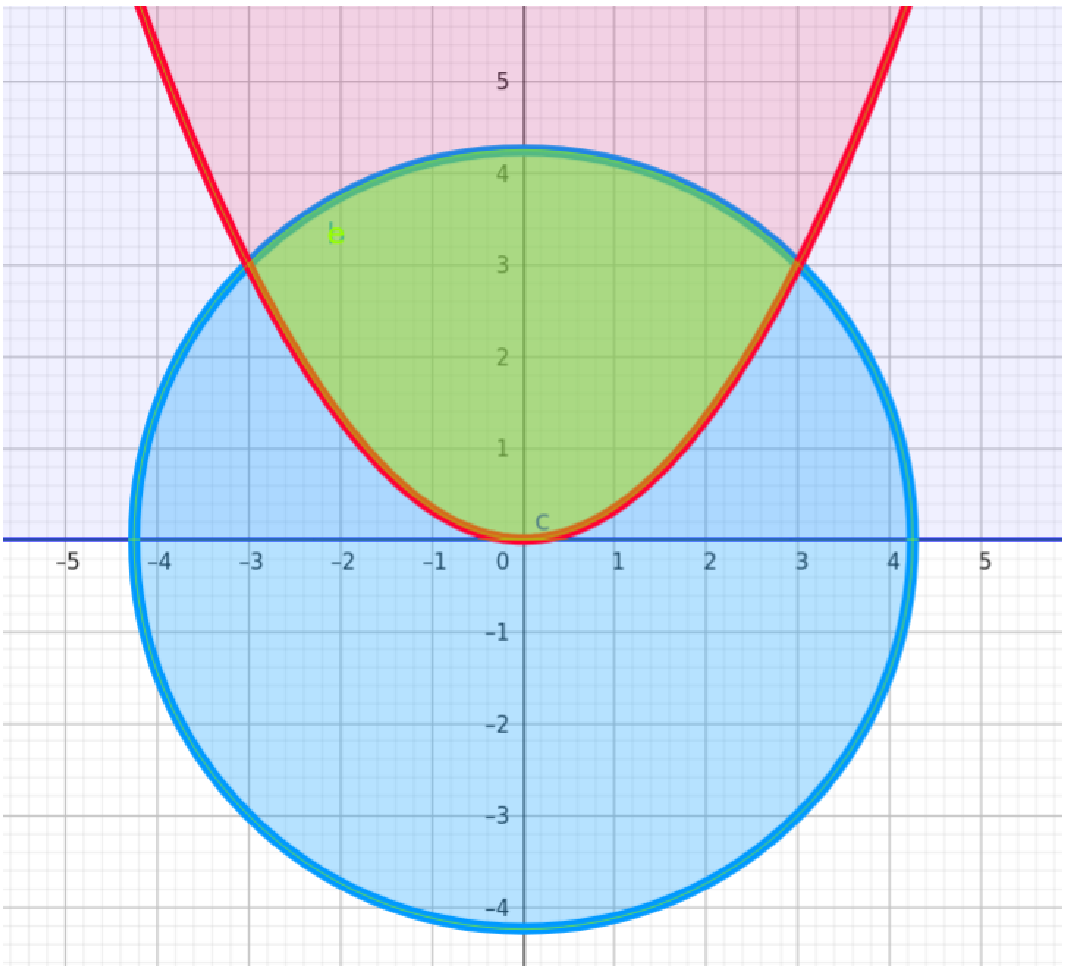

Рис. 3: Множина E для $a = 3$, виділена зеленим

Отже маємо дві точки $(a, a), (-a, a)$.

Запишемо спочатку інтеграл, рухаючись по Oy:

$$\mathcal{I} = \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx + \int_a^{\sqrt{2}a} dy \int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

Тепер рухаємось по Ox:

$$\mathcal{I} = \int_{-a}^a dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)dy$$