Homework #6

Задача 1.

Решение этой задачи уже приведена в материале для практики, поэтому я пропущу оформление этой задачи. Я попробовал найти другой способ, но ничего особо в голову не пришло 🙂

Задача 2.

Параметризуем конус следующим образом:

$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = t \end{cases}$$

Таким образом, образующие направлены вдоль вектора $\vec{r}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ 1\end{pmatrix}$.

Подставим эти x, y, z в уравнение плоскости:

$$5\cos\theta + 10\sin\theta = 11$$

Решая это уравнение, получаем 2 решения, которые как раз и соответствует двум образующим:

$$\cos\beta = 3/5, \sin\beta = 4/5,\ \cos\delta = 7/25, \sin\delta = 24/25$$

Таким образом нам надо найти угол между двумя образующими:

$$\vec{r}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3/5 \\ 4/5 \\ 1\end{pmatrix},\ \vec{r}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7/25 \\ 24/25 \\ 1\end{pmatrix}$$

Угол между двумя векторами γ можно найти из формулы:

$$\gamma = \arccos\langle\vec{r}(\beta), \vec{r}(\delta)\rangle$$

Скалярное произведение этих двух векторов равно $121/125$, а поэтому окончательный ответ:

$$\gamma = \arccos \frac{121}{125}$$

Задача 1018.

Параметризуем нашу сферу в таком виде:

$$x^2 + z^2 = t^2, \ t \in [0, 3]$$

Мысленно зафиксируем некоторую $t = t_0$ (иначе говоря, некоторую y координату) и "разрежем" окружность по плоскости $x = z$. Получим 2 точки: $(-\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}})$. По сути наша окружность будет формироваться из всех таких точек, пока t пробегает от 0 до 3.

Но из всех этих точек нас интересует только $t = 0$ и $t = 3$. Заметим, что если эллипс проходит через эту окружность, то точки $(0, 0)$ и $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ принадлежат эллипсу (это точки на окружности, соответствующие $t = 0$ и $t = 3$ соответственно). По 3 точкам можем построить эллипс (зная, что его оси соблюдают с осями координат). Наше уравнение имеет вид:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

(тут вид слегка нестандратный для простоты решения системы уравнения). Подставив 3 точки, найдём $\alpha = 1/12, \beta = 1/9, \gamma = 5/36$. Поэтому итого:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36/5} = 1$$

Задача 4.

Составим следующее уравнение:

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{4} - 1 - \lambda \left(x + y - z - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Как мы показывали раньше (в предыдущих задачах) — перед нами семейство эллипсоидов (зависищее от параметра λ), оси которого параллельны осям координат и которые проходят через линию пересечения заданного в условии эллипсоида и плоскости. Нам нужно выбрать такой эллипсоид, который проходит через точку $(-1, 1, 1)$. Подставив эту точку, получим, что нужный нам эллипсоид имеет параметр $\lambda = -\frac{5}{9}$. Ну а далее... Просто преобразовывать уравнение, чтобы получить канонический вид:

$$\frac{1}{16}\left(x^2 + \frac{62x}{9} + \frac{961}{81}\right) + \frac{1}{9}\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(z^2 - \frac{2z}{9} + \frac{1}{81}\right) - \frac{97}{162} = 0$$

Или же:

$$\frac{(x + 31/9)^2}{16} + \frac{(y - 1/2)^2}{9} + \frac{(z - 1/9)^2}{4} = \frac{97}{162}$$

Можно конечно ещё обе части поделить на $97/162$, но от этого не будет приятней смотреть на уравнение 🙂

Задача 5.

Направляющие вектора данных прямых:

$$\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Сделаем преобразование координат, выбрав новый базис, состоящий из единичных векторов $\vec{l}_i$:

$$\vec{e}_1 = \hat{l}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \hat{l}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \hat{l}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим интересную особенность такого базиса: это ортогональный базис, причём $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$. Таким образом, если мы рассмотрим матрицу

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

то это будет матрицей поворота базиса $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ на некоторый угол вокруг осей Ox, Oy, Oz (какие именно нам не важно). Кроме этого, центр эллипса находится в точке $M(1, -1, 1)$. Поэтому сделаем следующее преобразование координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В системе координат $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{16} + \frac{\widetilde{y}^2}{4} + \frac{\widetilde{z}^2}{1} = 1$$

Поэтому нам нужно найти выражения для $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ как функцию от x, y, z. Сделав некоторые манипуляции с уравнением преобразования координат, имеем:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица имеет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Поэтому имеем:

$$\widetilde{x} = \frac{2x+2y+z-1}{3}, \ \widetilde{y} = \frac{2x-y-2z-1}{3}, \ \widetilde{z} = \frac{x-2y+2z-5}{3}$$

Подставляем это в уравнение эллипса. После упрощений, получаем:

$$4x^2 - 8xy + 4xz - 20x + 8y^2 - 12yz + 36y + 9z^2 - 34z + 29 = 0$$