Домашня робота з курсу "Чисельний аналіз"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Нехай маємо вузли $\{x_j\}_{j=0}^n$ та значення функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в них $\{f_j\}_{j=0}^n := \{f(x_j)\}_{j=0}^n$. Інтерполяційний поліном Лагранжа має вигляд:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x),\ \ell_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

У якості вузлів для прикладу візьмемо $\widetilde{x}_1 := \frac{x_1+x_2}{2}$ та $\widetilde{x}_2 := \frac{x_2+x_3}{2}$ і після знаходження $L_n(x)$, обрахуємо $L_n(\widetilde{x}_1), L_n(\widetilde{x}_2)$.

Абсолютна похибка обраховується за допомогою:

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x^* - x_i) \right|,\ \text{де } M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{[n+1]}(x) \right|$$

Обрахунок полінома Лагранжа та $n+1$ похідної f було здійснено за допомогою бібліотеки `sympy` мови `Python`, яка прикріплена до цього завдання.

Завдання 1. $f(x) = \sin 2\pi x$

Частина 1.

$$\ell_1 = (1 - 8x)(1 - 4x),\ \ell_2 = 16x(1 - 4x),\ \ell_3 = 4x(8x - 1)$$

$$L_n(x) = 0 + 8\sqrt{2}x(1 - 4x) + 4x(8x - 1) = 32(1 - \sqrt{2})x^2 + 4(2\sqrt{2} - 1)x$$

Частина 2. Обираємо $\widetilde{x}_1 := 1/16, \widetilde{x}_2 := 3/16$. Тоді:

$$L_n(\widetilde{x}_1) = -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8},\ L_n(\widetilde{x}_2) = \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Частина 3. Маємо $f^{[n+1]}(x) = -8\pi^3 \cos 2\pi x$. Оскільки $\forall x \in [0, 1/4] : \cos 2\pi x \geq 0$, то $|f^{[n+1]}(x)| = 8\pi^3 \cos 2\pi x$. Максимум, очевидно, досягається при $x = 0$. Отже,

$$\max_{x\in[0,1/4]} |f^{[n+1]}(x)| = 8\pi^3$$

Таким чином,

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \leq \frac{8\pi^3}{3!} \left| x^* \left(x^* - \frac{1}{8} \right) \left(x^* - \frac{1}{4} \right) \right| = \frac{4\pi^3}{3} |x^*(x^* - 1/8)(x^* - 1/4)|$$

Завдання 2. $f(x) = e^x$

Частина 1.

$$\ell_1 = \frac{1}{2}x(1-x),\ \ell_2 = 1 - x^2,\ \ell_3 = \frac{1}{2}x(1+x)$$

$L_n(x) \approx 0.543x^2 + 1.175x + 1$

Частина 2. Обираємо $\widetilde{x}_1 := -1/2, \widetilde{x}_2 := 1/2$. Тоді:

$$L_n(\widetilde{x}_1) \approx 0.548,\ L_n(\widetilde{x}_2) \approx 1.723$$

Частина 3. $|f^{[n+1]}(x)| = e^x$, максимум на відрізку $[-1, 1]$ досягається, очевидно, для $x = 1$ і дорівнює e. Отже:

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \leq \frac{e}{6} |x(x-1)(x+1)|$$

Завдання 3. $f(x) = \sqrt{x}$

Частина 1.

$\ell_1 \approx (3.273 - 0.023x) \cdot (5.761 - 0.048x),\ \ell_2 \approx (6.261 - 0.043x) \cdot (0.048x - 4.762),\ \ell_3 \approx (0.023x - 2.273)$

$L_n(x) \approx -9.411x^2 + 0.068x + 4.1.$

Частина 2. Обираємо $\widetilde{x}_1 := 110.5, \widetilde{x}_2 := 132.5$. Тоді:

$$L_n(\widetilde{x}_1) \approx 10.51,\ L_n(\widetilde{x}_2) \approx 11.51$$

Частина 3. $|f^{[n+1]}(x)| = \frac{3}{8}x^{-5/2}$, отже бачимо, що функція монотонно спадає на $\mathbb{R}^+$. Тому $\max_{x\in[100,144]} |f^{[n+1]}(x)| = f^{[n+1]}(100) = \frac{3}{8\cdot 10^5}$. Тому:

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \leq \frac{1}{16 \cdot 10^5} |(x-100)(x-121)(x-144)|$$

Завдання 4. $f(x) = e^{-x^2}/\sqrt{2\pi}$

Частина 1.

$$\ell_1 = \frac{10}{3}\left(\frac{7}{10} - x\right)(1-2x),\ \ell_2 = \frac{10}{3}\left(\frac{7}{10} - x\right)(5x-1),$$
$$\ell_3 = 10\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$L_n(x) \approx -0.18x^2 - 0.12x + 0.41$$

Частина 2. Обираємо $\widetilde{x}_1 = 0.35, \widetilde{x}_2 = 0.6$. Маємо:

$$L_n(\widetilde{x}_1) \approx 0.351,\ L_n(\widetilde{x}_2) \approx 0.279$$

Частина 3. Беремо похідні:

$$f'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2},\ f''(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-4xe^{-x^2} - 2x(1-2x^2)e^{-x^2}) = -\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(2x^2-3)e^{-x^2}$$

Отже, модуль:

$$|f^{[n+1]}(x)| = \frac{2\sqrt{2}e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}|2x^3 - 3x|$$

Для підозрілих точок знімемо модуль і візьмемо похідну:

$$f^{[n+1]\prime}(x) = e^{-x^2}(-4x^4 + 12x^2 - 3)$$

Маємо єдину додатню підозрілу точку: $x_? = \sqrt{(3-\sqrt{6})/2}$. Якщо її підставити:

$$|f^{[n+1]}(x_?)| = \sqrt{\frac{6\sqrt{6} - 12}{\pi}} e^{\sqrt{3/2} - 3/2} \approx 1.56$$

Це значення виявляється більшим ніж при $x = 0.2, 0.7$. Отже, маємо оцінку:

$$|f(x^*) - L_n(x^*)| \le 0.26|(x-0.2)(x-0.5)(x-0.7)|$$