§ Граничні цикли §

Задача 1: Напівстійкий цикл.

Умова. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Вона теж має граничний цикл, що є колом радіуса 1. Але, на відміну від системи 2, цей граничний цикл є напівстійким: частина фазових траєкторій наближається до нього, а частина – віддаляється. Доведіть цей факт, тобто з'ясуйте, які траєкторії наближаються, а які віддаляються. Нарисуйте фазовий портрет цієї системи.

Розв'язок. Оскільки рівняння $\dot{\varphi} = 1$ лише задає умову на те, що траєкторія "обертається" з постійною кутовою швидкістю, то сконцетруємось на рівнянні $\dot{r} = r(1-r)^2$. Вигляд траєкторії головним чином залежить від початкової умови $r(0) := r_0$. Оскільки $r > 0$, бо ми знаходимось у полярних координатах (випадок $r = 0$ буде просто відповідати знаходженні у початку координат), то тут принципово маємо три випадки:

- $r_0 = 1$: згідно рівнянню, $\dot{r} \equiv 0$, а тому радіус-вектор буде залишатись з постійною довжиною 1 і обертатись з постійною кутовою швидкістю. Отже, маємо рівномірний рух по колу.

- $r_0 \in (0, 1)$: маємо, що початкова швидкість $\dot{r}(0) > 0$, тобто радіус-вектор почне збільшуватись. Помітимо, що при цьому, коли радіус-вектор буде близьким до 1, то швидкість буде постійно зменшуватись і в рештірешт наближатись до 0. Тобто, траєкторія асимптотично вийде на те саме коло у випадку $r_0 = 1$.

- $r_0 > 1$: початкова швидкість $\dot{r}(0)$ знову буде додатною (це обумовлено тим, що доданок $(1-r)^2$ піднесений у парний степінь), причому чим далі r від 1, тим більше це значення. Отже, траєкторія буде віддалятись на нескінченність.

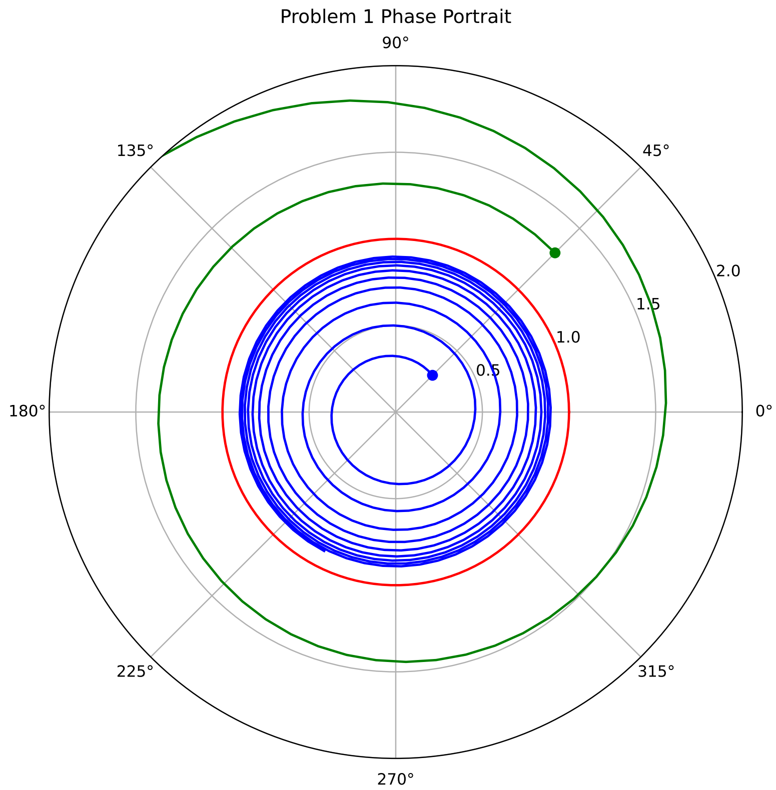

Рис. 1: Фазовий портрет для системи з задачі 1. Синім показано траєкторію для точки, що починає рух всередині круга $r = 1$, а зеленим – за кругом.

Отже, будь-які траєкторії, що починаються всередині кола $r = 1$ (окрім нестабільної точки $r = 0$) будуть виходити на це коло, а ось все, що залишилось за ним, буде нескінченно віддалятись. Отже, дійсно маємо напівстійкість. Це можна побачити на Рисунку 1.

Задача 2: Кількість граничних циклів.

Умова. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r)(r-2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Скільки граничних циклів має ця система? Які вони з точки зору стійкості?

Розв'язок. Знову концентруємось на рівнянні $\dot{r} = r(1-r)(r-2)$. Його нулі праворуч – це $r = 0, r = 1, r = 2$. Рівняння $r = 0$ задає точку спокою, що знаходиться у початку координат. У свою чергу, $r = 1$ та $r = 2$ задають два кола радіуса 1 та 2, відповідно. Далі, розглядаємо наступні проміжки для початково значення $r(0) := r_0$:

- $r_0 \in (0, 1)$: в цьому випадку початкова швидкість від'ємна, а отже точка почне наближуватись до 0. Ближче до 0, швидкість зміни довжини радіус-вектора буде наближатись до 0, а отже асимптотично траєкторія буде "тормозити" у початок координат.

- $r_0 \in (1, 2)$: тут початкова швидкість буде додатньою, а отже точка буде віддалятись від кола $r = 1$. Далі, швидкість буде тормозити, поки точка не вийде на коло $r = 2$.

- $r_0 > 2$: початкова швидкість від'ємна і при наближенні до $r = 2$ буде тормозити. Таким чином, знову траєкторія буде виходити на коло $r = 2$.

Таким чином, маємо два граничні цикли: $r = 1$ – нестійкий цикл, а також $r = 2$ – стійкий.

Задача 3: Система з трьома різними циклами.

Умова. Придумайте систему, у якої три граничні цикли: один стійкий, один напівстійкий і один нестійкий. Випишіть систему і нарисуйте її фазовий портрет.

Розв'язок. В якості такої системи візьмемо систему з завдання 2, але додамо доданок $(r - 3)^2$ до системи:

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r)(r - 2)(r - 3)^2 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}, \ \alpha > 0 \tag{3.1}$$

Що це нам дає? По-перше, $r = 1$ та $r = 2$ все ще будуть нестійким та стійким циклом, відповідно, оскільки доданок $(r-3)^2$ не впливатиме на знаки похідних. Отже, якщо $r_0 \in (2, 3)$, то точка буде все ще виходити на коло $r = 2$. В свою чергу, якщо $r_0 > 3$, то точка буде рухатись в тому самому напрямку, що і при $r_0 \in (2, 3)$, але вже гранично "накручуватись" на граничний цикл $r = 3$. Таким чином, як і в завданні 1, він буде напівстійким. Фазовий портрет зображений на Рисунку 2.

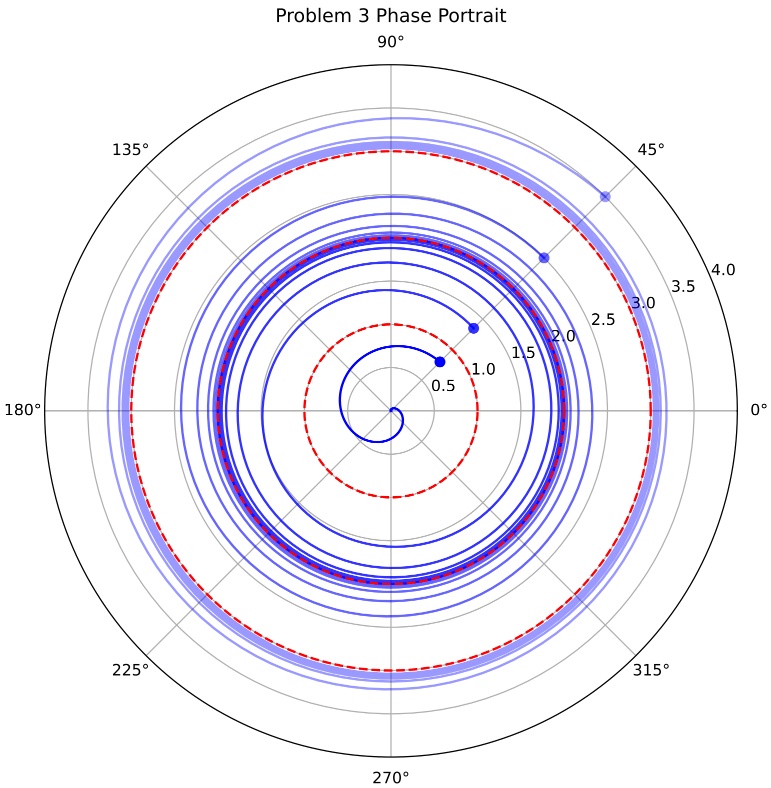

Рис. 2: Фазовий портрет для системи з задачі 3 для $\alpha = \frac{1}{15}$. Різними відтінками синього відмічено різні траєкторії в залежності від початкової довжини радіус-вектора. Червоним пунктиром відмічено три граничні цикли: $r = 1, r = 2, r = 3$. Бачимо, що на коло $r = 1$ не намотується жодна траєкторія, на $r = 2$ – дві траєкторії з обох боків, а на $r = 3$ – тільки одна ззовні кола $r = 3$.