Домашня робота з математичного моделювання #5

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 березня 2023 р.

Вправа з лекції 1.

Умова. Довести, що якщо:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

де $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{E}$ є одиничною матрицею розміру $k \times k$, $\mathbf{O} \in 0^{k\times(n-k)}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ і нарешті $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, то

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k\right)\mathbf{R} & \mathbf{Q}^n \end{bmatrix}$$

P.S. *в лекції в сумі верхня межа n, хоча скоріше за все там $n-1$, як ми тут виписали*

Доведення. Доведемо за індукцією.

База індукції. Формула працює для $n = 1$, можна про всяк випадок перевірити це для $n = 2$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{EE} + \mathbf{OR} & \mathbf{EO} + \mathbf{OQ} \\ \mathbf{RE} + \mathbf{QR} & \mathbf{RO} + \mathbf{QQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{E} + \mathbf{Q})\mathbf{R} & \mathbf{Q}^2 \end{bmatrix}$$

Дійсно отримуємо формулу з припущення.

Індукційний перехід. Отже, нехай наше твердження виконується. Потрібно довести, що

$$\mathbf{P}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{Q}^k\right) \mathbf{R} & \mathbf{Q}^{n+1} \end{bmatrix}$$

Отже, маємо:

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k\right) \mathbf{R} & \mathbf{Q}^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{EE} + \mathbf{OR} & \mathbf{EO} + \mathbf{OQ} \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k\right) \mathbf{RE} + \mathbf{Q}^n\mathbf{R} & \mathbf{O}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{Q}^k\right) + \mathbf{Q}^n\mathbf{Q} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{Q}^k + \mathbf{Q}^n\right) \mathbf{R} & \mathbf{Q}^{n+1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{Q}^k\right) \mathbf{R} & \mathbf{Q}^{n+1} \end{bmatrix}$$

що і потрібно було довести.

Вправа з лекції 2.

Умова. Для марківського ланцюга (стани a_0, a_1, a_2)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

знайти середній час перебування в непоглинаючих станах за умови, що спочатку ланцюг перебував

- у стані a_1
- у стані a_2

З якою ймовірністю процес потрапить у поглинаючій стан a_0 в умовах вище?

Розв'язок. Якщо брати позначення з вправи 1, то маємо:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Знаходимо матрицю

$$\mathbf{E} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Фундаментальна матриця ланцюга:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Далі середні часи очікування:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[T_1] \\ \mathbb{E}[T_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3/4 \\ 0 + 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Отже маємо середній час $\frac{7}{4}$ та $\frac{3}{2}$ для станів a_1, a_2 відповідно.

Для знаходження ймовірностей знаходимо матрицю:

$$\mathbf{H} = \mathbf{NR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Очікувано, маємо ймовірність 1 для обох випадків.

Завдання 1.

Умова. Які з наступних ланцюгів є ергодичними, а які поглинаючими? Які з ергодичних ланцюгів є регулярними?

$$1.\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, 2.\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, 3.\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 5. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 6. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 7. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Розв'язок. Перша матриця не є ані поглинаючою, ані ергодичною, бо не можна попасти у стан 1 зі станів $2, 3, 4$. Друга матиця не є коректною, бо сума у третьому рядку дорівнює двом, але якщо замість $1/2$ стояв би 0, то вона не є поглинаючою і з будь-якого стану можна потрапити у будь-який інший, тобто ергодичною.

Третя матриця є поглинаючою, причому в неї аж 2 стана (1 та 2) є поглинаючими.

Четверта матриця не є поглинаючою, але і не є ергодичною, бо з жодного стану ми не можемо потрапити у стан 1.

П'ята матриця не є поглинаючою і є ергодичною.

Шоста матриця не є поглинаючою і є ергодичною (бо це просто матриця, де ми з першого стану одразу попадаємо в другий і навпаки).

Сьома матриця теж не є поглинаючою і є ергодичною.

Завдання 2.

Умова. Відвідувач банку із наміром одержати кредит проходить ряд перевірок (станів): e_1 – оформлення документів; e_2 – кредитна історія; e_3 – поверненість; e_4 – платоспроможність. За результатами перевірки можливі два рішення: відмова в видачі кредиту (e_6) та одержання кредиту (e_5). Якщо на поточному тижні відвідувач банка займався оформленням документів, то з ймовірністю 0.2 відвідувач продовжить цим займатися і на наступному тижні, проте з ймовірністю 0.8 банк на наступному тижні прийме його документи та буде вивчати кредитну історію відвідувача. У випадку, якщо на поточному тижні банк вивчає кредитну історію, то на наступному тижні з ймовірністю 0.2 банк продовжить цим займатися, з ймовірністю 0.4 буде оцінювати поверненість кредиту відвідувачем та із тією ж ймовірністю прийме рішення про відмову у видачі кредиту. Якщо на поточному тижні банк оцінює поверненість кредиту, то на наступному тижні з ймовірністю 0.1 банк продовжить цим займатися, з ймовірністю 0.2 прийме рішення про відмову в видачі кредиту та з ймовірністю 0.7 буде вивчати платоспроможність відвідувача. Якщо на поточному тижні банк вивчав платоспроможність відвідувача, то з ймовірністю 0.05 він продовжить цим займатися і на наступному тижні, з ймовірністю 0.8 прийме рішення про видачу кредиту, з ймовірністю 0.15 прийме рішення про відмову про видачу кредиту.

Побудувати матрицю переходів і діаграму марківського ланцюга. Припустимо, на поточному тижні відвідувач буде зайнятий оформленням документів. Яка ймовірність, що йому в цьому випадку нададуть кредит?

Скільки в середньому тижнів у цій ситуації знадобиться, щоб банку прийняти рішення про видачу кредиту або про відмову про видачу кредиту? Яка ймовірність одержання кредиту, якщо на поточному тижні банк перевіряє поверненість кредиту? Скільки в середньому тижнів знадобиться, щоб банку прийняти рішення про видачу кредиту або про відмову про видачу?

Розв'язок. Запишемо матрицю переходів:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} - & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ e_1 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ e_3 & 0 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.8 & 0.15 \\ e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Маємо 2 поглинаючих стана: e_5 та e_6, тому перепишемо нашу матрицю у вигляді:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

Тому маємо:

$$
\mathbf{P}' = \begin{array}{cc} - & \begin{matrix} e_5 & e_6 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_5 \\ e_6 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Звідки

$$
\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.15 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}
$$

Фундаментальна матриця ланцюга:

$$
\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & -0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{9} & \frac{70}{171} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{9} & \frac{70}{171} \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} & \frac{140}{171} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{19} \end{bmatrix}
$$

Отже середні часи:

$$
\begin{bmatrix} \mathbb{E}[T_1] \\ \mathbb{E}[T_2] \\ \mathbb{E}[T_3] \\ \mathbb{E}[T_4] \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.47 \\ 2.22 \\ 1.93 \\ 1.05 \end{bmatrix}
$$

Отже, в середньому якщо починати з оформлення документів (e_1) доведеться чекати 3.47 тижня. Середнє значення по всім станам приблизно 2.17 тижнів. Щоб порахувати ймовірності потрібно знайти значення матриці

$$
\mathbf{H} = \mathbf{N}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{9} & \frac{70}{171} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{9} & \frac{70}{171} \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} & \frac{140}{171} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.15 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 \\ 0.65 & 0.35 \\ 0.84 & 0.16 \end{bmatrix}
$$

Отже ймовірність отримати кредит дорівнює 0.33. Якщо починати з етапу поверненості, то шанс стає 0.65.

Завдання 3.

Умова. Деяку сукупність сімей поділено на три групи: ε_1 – сім'ї, що не мають автомашини та не збираються її придбати; ε_2 – сім'ї, що не мають автомашини, які збираються її придбати, ε_3 – сім'ї, що мають автомашину. Статистичні обслідування дали можливість оцінити ймовірність переходу сімей з однієї групи протягом року в іншу. Ймовірність того, що сім'я, що не має автомашини і не збирається її придбати, буде планувати в поточному році її придбати, дорівнює 0.1. Ймовірність того, що сім'я, що не мала у минулому році машини та не мала намірів її придбати, придбає автомобіль у поточному році, також дорівнює 0.1. Ймовірність того, що сім'я, що не мала в минулому році машини, але мала намір її придбати, здійснить свій намір у поточному році, дорівнює 0.3. Ймовірність того, що сім'я, яка мала намір купити автомашину в минулому році, в поточному році від цього наміру відмовиться дорівнює 0.05. Сім'я, що має автомашину, ніколи вже не потрапить до груп ε_1, ε_2. Побудувати матрицю переходів і діаграму марківського ланцюга. Чи є цій ланцюг регулярним або поглинаючим? Якщо на поточному році відомо, що сім'я планує придбати автомашину, то скільки в середньому років вона буде знаходитися в цьому стані?

Розв'язок. Маємо наступну матрицю переходу:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} - & \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.65 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Бачимо, що стан ε_3 є поглинаючим. Перенумеруємо стани:

$$\mathbf{P}' = \begin{array}{cc} - & \begin{array}{ccc} \varepsilon_3 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.05 & 0.65 \end{bmatrix} \end{array}$$

Отже згідно наших позначень, маємо

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.65 \end{bmatrix}$$

Фундаментальна матриця ланцюга:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \approx \begin{bmatrix} 5.39 & 1.54 \\ 0.77 & 3.08 \end{bmatrix}$$

Отже середні часи:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[T_1] \\ \mathbb{E}[T_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.93 \\ 3.85 \end{bmatrix}$$

Отже якщо сім'я хотіла купити машину, то їм знадобиться близько 3.85 років на покупку.

Завдання 4.

Умова. Миша може переміщатися між двома суміжними кімнатами A та B без будь-якого ризику. Якщо вона покине кімнату A через зовнішні двері, то її спіймає кішка, тоді якщо миша покине кімнату B через зовнішні двері, то вона потрапить у мишоловку. Спочатку миша знаходиться в кімнаті A. Припустимо, що кожної хвилини вона переміщується наступним чином: з кімнати A у кімнату B з ймовірністю $3/4$, з кімнати B до кімнати A з ймовірністю $7/8$; причому миша ніколи не залишається в одній кімнаті більш, ніж на хвилину. Знайдіть: (а) ймовірність, що кішка спіймала мишу; (б) ймовірність, що миша потрапила у мишоловку; (в) середнє значення кількості хвилин, які залишилися до загибелі миші.

Розв'язок. Введемо 4 стани: e_1 це мишу з'їла кішка, e_2 це потрапила у мишоловку, e_A, e_B це миша знаходиться у кімнаті A та B відповідно. Тоді матрицю переходів запишемо як:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} - & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_A & e_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_A \\ e_B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Згідно наших означень:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

В такому разі фундаментальна матриця:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{32}{11} & \frac{24}{11} \\ \frac{28}{11} & \frac{32}{11} \end{bmatrix}$$

Отже середні часи:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}[T_A] \\ \mathbb{E}[T_B] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{56}{11} \\ \frac{60}{11} \end{bmatrix}$$

Звідки середній час миши, якщо вона розпочинає з кімнати A, дорівнює $\frac{56}{11}$ хвилин. Щоб знайти ймовірності, знаходимо матрицю:

$$\mathbf{H} = \mathbf{NR} = \begin{bmatrix} \frac{32}{11} & \frac{24}{11} \\ \frac{28}{11} & \frac{32}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \end{bmatrix}$$

Отже ймовірність, що спіймала кішка дорівнює $\frac{8}{11}$, а шанс на мишоловку дорівнює $\frac{3}{11}$.

Завдання 5.

Умова. У вершині п'ятикутника $ABCDE$ знаходиться яблуко, а на відстані двох ребер, у вершині C, знаходиться черв'як. Кожного дня черв'як переповзає в одну з двох сусідніх вершин з рівною ймовірністю. Через один день черв'як опиниться у вершині B з ймовірністю 0.5 або у вершині D з ймовірністю 0.5. Після двох днів черв'як може знову опинитися в C, оскільки він не запам'ятовує попередніх положень. Досягнувши вершини A, червяк зупиняється на обід.

Чому дорівнює математичне сподівання числа днів, що минули до обіду?

Розв'язок. Введемо стани a, b, c, d, e, що відповідають знаходженню у вершинах A, B, C, D, E, відповідно. Матриця переходів тоді має вигляд:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} - & a & b & c & d & e \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ e & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Отже, згідно нашим позначенням:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Фундаментальна матриця:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1.2 & 0.8 & 0.4 \\ 1.2 & 2.4 & 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1.6 & 2.4 & 1.2 \\ 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix}$$

Якщо черв'як починає у вершині C, то середнє очікування дорівнює $0.8 + 1.6 + 2.4 + 1.2 = 6$ днів.