Самостійна робота №2

Самостійна робота з предмету “Математичний аналіз”

студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Дмитра

Завдання 1.

Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-14}{n(n+2)}$$

Розв’язок. Маємо знакозмінну послідовність, тобто наш ряд можемо записати у вигляді

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_n, \; \gamma_n = \frac{5n-14}{n(n+2)}$$

Для аналізу збіжності скористаємось ознакою Лейбніца, тобто

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \; \{\gamma_n > \gamma_{n+1} > 0\} \wedge \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_n < +\infty$$

Для цього помітимо, що:

1. $\forall n \geq 3, \gamma_n > \gamma_{n+1} > 0$. Дійсно:

$$\Delta_n = \gamma_n - \gamma_{n+1} = \frac{5n-14}{n(n+2)} - \frac{5n-9}{(n+1)(n+3)} = \frac{(5n-14)(n+1)(n+3) - n(n+2)(5n-9)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(5n+7)(n-6)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Бачимо, що $\forall n > 6, \Delta_n > 0$, а отже $\forall n > 6 : \{\gamma_n - \gamma_{n+1} > 0\}$, що рівносильно $\gamma_n > \gamma_{n+1}$. Окрім того, $\forall n \geq 3$ маємо $\gamma_n > 0$, а отже отстаточно бачимо:

$$(\forall n > 6) \; \{\gamma_n > \gamma_{n+1} > 0\}$$

Далі доведемо, що $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. Дійсно:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-14}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n} - \frac{14}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{14}{n^2}}{1+\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

Отже дійсно:

$$(\forall n > 6) \; \{\gamma_n > \gamma_{n+1} > 0\} \wedge \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \implies \sum_{n=6}^{\infty} (-1)^n \gamma_n < \infty$$

Насправді тут не дуже важливо, що ця умова виконується лише з $n_0 = 6$, бо ми можемо нашу суму записати як $S = \sum_{n=1}^{6} (-1)^n \gamma_n + \sum_{n=1}^{7} (-1)^n \gamma_n$ і тоді для другої умови виконується для будь-яких n, а перша сума скінченна.

Дослідимо на абсолютну збіжність, тобто ряд

$$S_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{5n-14}{n(n+2)} \right|$$

Для цього помітимо, що $\gamma_n > 0 \; \forall n \geq 3$, тому

$$S_+ = \sum_{n=1}^{2} \left| \frac{5n-14}{n(n+2)} \right| + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-14}{n(n+2)} = a + R_+$$

Тому залишилось розглянути R_+

$$R_+ = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-14}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{(n+2)(n+4)} := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^+$$

А для цього візьмемо в розглядання гармонійний ряд:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} := \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

Бачимо, що $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{\gamma_n^+ > 0 \land h_n > 0\}$, а отже можемо скористатись другою ознакою порівняння:

$$k := \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n^+}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(5n-4)}{(n+2)(n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{4}{n}}{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{4}{n})} = \frac{5}{1} = 5$$

Бачимо, що $0 < (k=5) < +\infty$, а отже ряди R_+, H збігаються або розбігаються одночасно. Проте, гармонійний ряд розбігається (доволі відомий факт), а тому і R_+ розбігається.

Відповідь. Сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-14}{n(n+2)}$ збігається, але абсолютно розбігається.

Завдання 2.

Дослідити на рівномірну збіжність послідовність на вказаних множинах. Пояснити.

$$f_n = \frac{1}{x^3} \cos\frac{x}{n},\ E_1 = (0,1),\ E_2 = (1,+\infty)$$

Розв'язок. Почнемо з E_2. Скористаємось теоремою, що функціональна послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно збіжною на множині E до функції f тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Доведемо, що $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} \frac{1}{x^3}$. Маємо:

$$\delta_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{x^3}\cos\frac{x}{n} - \frac{1}{x^3}\right| = \\ \frac{1}{x^3}\left|\cos\frac{x}{n} - 1\right| = \frac{1}{x^3}\left|1 - \cos\frac{x}{n}\right| = \\ \frac{1}{x^3}\left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right| = \frac{2}{x^3}\sin^2\frac{x}{2n}$$

Тут ми скористались фактом, що оскільки $(\forall x \in E_2)\ \{x > 0\} \implies (\forall x \in E_2)\ \{\frac{1}{x^3} > 0\}$, тому $1/x^3$ можна винести за модуль. Отже, нам потрібно дослідити значення

$$k = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(1,+\infty)} \frac{2}{x^3}\sin^2\frac{x}{2n}$$

Помітимо, що $(\forall x \in (1, +\infty))\ \{\delta_n(x) < 2\sin^2 \frac{x}{2n}\}$, оскільки на E_2 функція $2/x^3$ монотонно спадає. Також звісно $\delta_n(x) > 0\ \forall x \in E_2$. Звідси випилває

$$\forall x \in E_2 : 0 < \delta_n(x) < 2\sin^2 \frac{x}{2n}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} 2\sin^2 \frac{x}{2n} = 0$, то маємо $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0$.

Можемо змінити порядок $\sup$ та $\lim$ (як на мене це доволі неочевидний шаг, проте доводити це окремо не вистачає часу, на жаль. Була ще спроба знайти рівняння $\delta_n'(x_0) = 0$, але це приведе до рівняння $\tan \frac{x_0}{2n} = \frac{x_0}{3n}$, яке розглядати не дуже приємно)):

$$k = \sup_{x\in(1,+\infty)} \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \sup_{x\in(1,+\infty)} 0 = 0$$

Оскільки $k = 0$, маємо $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} \frac{1}{x^3}$.

Нарешті розглянемо E_1. Доведемо, що тут ми не будемо мати рівномірно збіжність. Дійсно,

$$k_1 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_1} \delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} \frac{2}{x^3} \sin^2 \frac{x}{2n}$$

Оскільки $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^3} \sin^2 \frac{x}{2n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^3} \lim_{x\to 0^+} \sin^2 \frac{x}{2n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^3} \cdot (\frac{x}{2n})^2 = +\infty$, тому маємо, що $\sup_{x\in(0,1)} \delta_n(x) = +\infty$ і тому за критерієм послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно не збігається.

Завдання 3.

Дослідити на рівномірну збіжність ряд на вказаній множині. Пояснити:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+nx^3}\right)^3,\ E = [0, +\infty)$$

Розв'язок. Позначимо $w_n(x) = \left(\frac{x^2}{1+nx^3}\right)^3$ і $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)$.

Доведемо, що функціональний ряд $S(x)$ є рівномірно збіжним на E. Для цього проаналізуємо $w_n(x)$, а саме знайдемо максимальне значення:

$$\frac{dw_n(x)}{dx} = \frac{3x^5(2-nx^3)}{(nx^3+1)^4}$$

Бачимо, що в нас є лише одна критична точка $x_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{n}}$, причому до неї функція спадає (бо $\forall x \in [0, \sqrt[3]{2/n})$ в нас $w_n'(x) > 0$), а після цього зростає (бо $\forall x \in (\sqrt[3]{2/n}, +\infty)$ в нас $w_n'(x) < 0$). Окрім цього $\lim_{x\to\infty} w_n(x) = 0$ (оскільки $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+nx^3} = 0$, бо в чисельнику маємо поліном 2 ступеня від x, в знаменнику третього, а отже при прямуванні на нескінченність отримаємо 0. Піднесення у 3 ступень при цьому нічого не змінює).

Знайдемо тепер $w_n(x_0)$:

$$w_n\left(\sqrt[3]{\frac{2}{n}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^{2/3}}{1 + n\cdot\frac{2}{n}}\right)^3 = \left(\frac{(2/n)^{2/3}}{3}\right)^3 = \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{27} = \frac{4}{27n^2}$$

Окрім цього $w_n(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, а тому можемо зробити висновок, що максимальне значення $w_n(x)$ на E — це $\frac{4}{27n^2}$ для будь-яких $x \in E, n \in \mathbb{N}$. Тому, робимо висновок, що

$$(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left\{|w_n(x)| \le \frac{4}{27n^2}\right\}$$

Причому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{27n^2} = \frac{2\pi^2}{81} < \infty$ (насправді можна не використовувати той факт, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, а просто знати, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається). Отже з цього випливає, що наш функціональний ряд є рівномірно збіжним на E.

Завдання 4.

Знайти радіус збіжності та зобразити коло збіжності. Пояснити

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(2n-1)4^n}$$

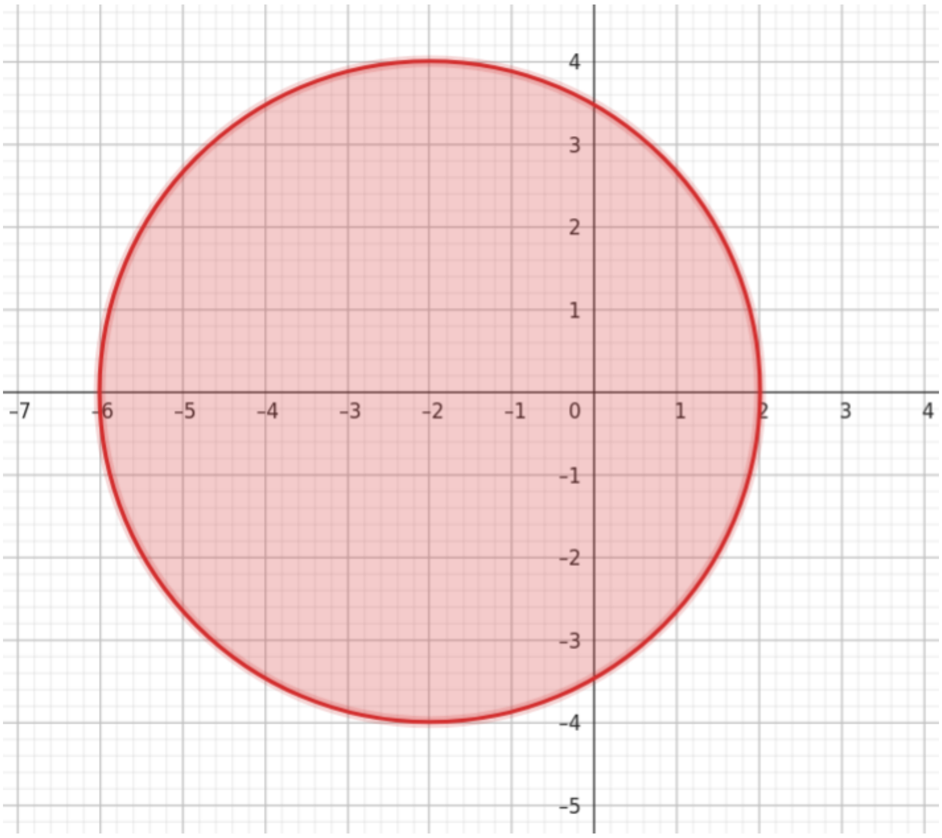
Розв'язок. Позначимо $z + 2 = w, \beta_n = \frac{1}{(2n-1)4^n}$, тоді отримаємо інший степеневий ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(2n-1)4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^n$$

Тоді радіус збіжності знайдемо з наступного відношення (доводилось в теорії):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)4^{n+1}}{(2n-1)4^n} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = 4$$

І звичайно радіус збіжності у виразу $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(z+2)^n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w^n$ однаковий, проте малюнок буде різним! Для другого ряду це буде коло з центром в $(0,0)$ радіуса 4, а для першого випадку з центром в $(-2,0)$ радіуса 4, тобто малюнок виглядає наступним чином:



Червоним показано область збіжності. По осі *Ox* маємо *Re(z)*, по осі *Oy* маємо *Im(z)*