Домашня робота з математичного аналізу #15

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

9 квітня 2023 р.

Завдання 5.

Умова. Знайти $\mathcal{I} = \iint_E \sqrt{xy}dxdy$, де E обмежена кривими:

$$y^2 = ax,\ y^2 = bx,\ xy = p,\ xy = q,\ 0 < a < b,\ 0 < p < q$$

за допомогою заміни $y^2 = ux, xy = v$

Розв'язок. Спочатку знайдемо нову область E'. Для цього просто підставляємо наші вирази:

$$u = a,\ u = b,\ v = p,\ v = q,\ 0 < a < b.\ 0 < p < q$$

Отже просто маємо прямокутник

$$\Pi = \{(v, u) \mid (a < u < b) \wedge (p < v < q)\}$$

Вираз, що інтегруємо, просто змінюється з $\sqrt{xy}$ на $\sqrt{v}$. Отже, залишилось лише знайти Якобіан. Нескладно знайти явний вигляд $x(u, v)$ та $y(u, v)$:

$$y^2 = ux \to x = \frac{y^2}{u} \to y \cdot \frac{y^2}{u} = v \to y = \sqrt[3]{vu}$$

Отже $x = \frac{(vu)^{2/3}}{u} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$. Тому маємо:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3u}$$

Отже наш інтеграл записується як:

$$\mathcal{I} = \iint_\Pi \sqrt{v} \cdot \frac{1}{3u} dvdu = \frac{1}{3} \int_a^b du \int_p^q \frac{\sqrt{v}}{u} dv =$$
$$\frac{1}{3} \int_a^b \frac{du}{u} \cdot \frac{v^{3/2}}{3/2}\Big|_{v=p}^{v=q} = \frac{2(q^{3/2} - p^{3/2})}{9} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Завдання 6.

Умова. Знайти $\mathcal{I} = \iint_E e^{k(x+y)^2} dxdy$, де E задана множиною (x, y):

$$x + y \le 1, \; x \ge 0, y \ge 0$$

за допомогою заміни $x = u - uv, y = uv$.

Розв'язок. Спочатку підставимо нашу заміну у наші нерівності:

$$x + y \le 1 \to u - uv + uv \le 1 \to u \le 1$$

$$y \ge 0 \to uv \ge 0$$
$$x \ge 0 \to u - uv \ge 0 \to u(1 - v) \ge 0$$

Насправді ця система еквівалентна області:

$$\Pi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \le u \le 1) \wedge (0 \le v \le 1)\}$$

Тепер знайдемо новий вид підінтегрального виразу:

$$\exp\left(k(x + y)^2\right) = \exp(ku^2)$$

Нарешті Якобіан:

$$J = -u$$

Отже маємо:

$$\mathcal{I} = \iint_{\Pi} e^{ku^2} dudv = \int_0^1 dv \int_0^1 e^{ku^2} udu = \int_0^1 \frac{e^{ku^2}}{2k}\Big|_{u=0}^{u=1} dv = \frac{e^k - 1}{2k}$$

Завдання 7.

Умова. Знайти $\mathcal{I} = \iint_E dxdy$, де E обмежена кривими:

$$y^2 = 2x,\ y^2 = 3x,\ xy = 1,\ xy = 2$$

за допомогою заміни $xy = u, y^2/x = v$.

Розв'язок. Спочатку знаходимо нові обмеження на E:

$$y^2 = 2x \to \frac{y^2}{x} = 2 \to v = 2$$

$$y^2 = 3x \to v = 3$$

$$xy = 1 \to u = 1$$

$$xy = 2 \to u = 2$$

Отже знову маємо область у вигляді квадрату:

$$\Pi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 \leq v \leq 3) \wedge (1 \leq u \leq 2)\}$$

Тепер знаходимо Якобіан. Для цього виражаємо $x(u, v), y(u, v)$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}},\ y = \sqrt[3]{uv}$$

Звідки Якобіан:

$$J = -\frac{1}{3v}$$

Отже маємо інтеграл:

$$\mathcal{I} = \iint_{\Pi} dudv = \int_2^3 dv \int_1^2 \frac{1}{3v} du = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{dv}{v} = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}$$