Домашня робота з математичного моделювання #3

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

5 березня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. У будь-який день людина здорова чи хвора. Якщо людина здорова сьогодні, то ймовірність того, що вона буде здоровою й завтра оцінюється в 98%. Якщо людина сьогодні хвора, то завтра вона буде здоровою лише в 30% випадків. Побудувати матрицю переходів і діаграму марківського ланцюга. Знайти ймовірність того, що людина одужує завтра, післязавтра або на третю добу, якщо сьогодні він хворіє. Скільки при цьому в середньому протягом тижня ця людина буде хворіти?

Розв'язок. Маємо 2 стани: людина хвора (1) та людина здорова (2). Тоді матриця буде виглядати наступним чином:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{1\to 1} & p_{1\to 2} \\ p_{2\to 1} & p_{2\to 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}$$

Початково за умовою людина хворіє і цей стан детермінований, тому наш початковий стовпець ймовірностей:

$$\boldsymbol{p}_0 = [1.0, 0.0]$$

Новий стовпець ймовірностей через n днів можемо знайти як:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_0 \mathbf{P}^n$$

Отже, маємо:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix} = [0.7, \mathbf{0.3}]$$

Звідси 0.3 ймовірність того, що через 1 день людина одужує. Для $2, 3$ днів розраховуємо:

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}^2 = [0.496, \mathbf{0.504}]$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}^3 = [0.35728, \mathbf{0.64272}]$$

В середньому час хвороби T (через p_i^j будемо позначати jий елемент $\boldsymbol{p}_i$):

$$T = \sum_{k=0}^{6} p_k^1 = 3.17022$$

Відповідь. Ймовірності $0.3, 0.504, 0.64272$. Значення середнього часу хвороби 3.17022 днів.

Завдання 2.

Умова. Відвідувач банку із наміром одержати кредит проходить ряд перевірок(станів): e_1 – оформлення документів; e_2 – кредитна історія; e_3 – поверненість; e_4 – платоспроможність. За результатами перевірки можливі два рішення: відмова в видачі кредиту e_6 та одержання кредиту $_5$. Якщо на поточному тижні відвідувачбанка займався оформленням документів, то з ймовірністю 0.2 відвідувач продовжить цим займатися і на наступному тижні, проте з ймовірністю 0.8 банк на наступному тижні прийме його документи та буде вивчати кредитну історію відвідувача. У випадку, якщо на поточному тижні банк вивчає кредитну історію, то на наступному тижні з ймовірністю 0.2 банк продовжить цим займатися, з ймовірністю 0.4 буде оцінювати поверненість кредиту відвідувачем та із тією ж ймовірністю прийме рішення про відмову у видачі кредиту. Якщо на поточному тижні банк оцінює поверненість кредиту, то на наступному тижні з ймовірністю 0.1 банк продовжить цим займатися, з ймовірністю 0.2 прийме рішення про відмову в видачі кредиту та з ймовірністю 0.7 буде вивчати платоспроможність відвідувача. Якщо на поточному тижні банк вивчав платоспроможність відвідувача, то з ймовірністю 0.05 він продовжить цим займатися і на наступному тижні, з ймовірністю 0.8 прийме рішення про видачу кредиту, з ймовірністю 0.15 прийме рішення про відмову про видачу кредиту.

Побудувати матрицю переходів і діаграму марківського ланцюга. Припустимо, на поточному тижні відвідувач буде зайнятий оформленням документів. Яка ймовірність, що через 4 тижня йому видадуть кредит?

Розв'язок. Отже маємо 6 станів. Матриця за умовою:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.8 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Початково наш стовпець ймовірностей:

$$\boldsymbol{p}_0 = [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

Отже, через 4 тижня цей стовпець буде мати значення:

$$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_0 \mathbf{P}^4 = [0.0016, 0.0256, 0.0544, 0.1232, \mathbf{0.1792}, 0.616]$$

Бачимо, що йомвірність видачі кредиту через 4 дні дорівнює 0.1792.

Відповідь. 0.1792.

Завдання 3.

Умова. Деяку сукупність сімей поділено на три групи: ε_1 – сім'ї, що не мають автомашини та не збираються її придбати; ε_2 – сім'ї, що не мають автомашини, які збираються її придбати, ε_3 – сім'ї, що мають автомашину. Статистичні обслідування дали можливість оцінити ймовірність переходу сімей з однієї групи протягом року в іншу. Ймовірність того, що сім'я, що не має автомашини і не збирається її придбати, буде планувати в поточному році її придбати, дорівнює 0.1. Ймовірність того, що сім'я, що не мала у минулому році машини та не мала намірів її придбати, придбає автомобіль у поточному році, також дорівнює 0.1. Ймовірність того, що сім'я, що не мала в минулому році машини, але мала намір її придбати, здійснить свій намір у поточному році, дорівнює 0.3. Ймовірність того, що сім'я, яка мала план купити автомашину в минулому році, в наступному за ним році від цього наміру відмовиться дорівнює 0.05. Сім'я, що має автомашину, ніколи вже не попаде в групи ε_1, ε_2.

Розв'язок. Отже, маємо матрицю переходу:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.65 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Це відповідає малюнку 1. Перейдемо до розв'язків окремих пунктів.

Пункт 1. Якщо сім'я не збиралась купувати машину, то маємо початковий вектор ймовірностей $\boldsymbol{p}_0 = [1.0, 0.0, 0.0]$. Через 2 роки цей вектор зміниться на $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_0\mathbf{P}^2 = [0.645, 0.145, 0.21]$, а отже з ймовірністю 0.645 сім'я не захоче купувати машину.

Пункт 2. Якщо сім'я збиралась купувати машину, то маємо початковий вектор ймовірностей $\boldsymbol{q}_0 = [0.0, 1.0, 0.0]$. Через 2 роки цей вектор

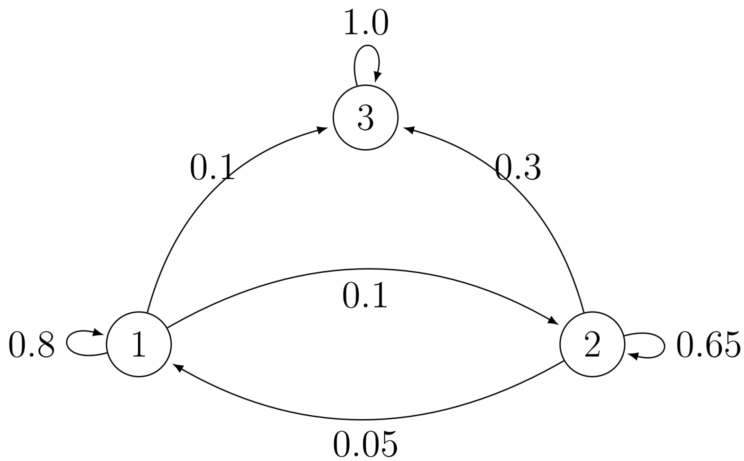

Рис. 1: Марков ланцюг для завдання 3.

зміниться на $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_0\mathbf{P}^2 = [0.0725, 0.4275, 0.5]$, а отже з ймовірністю 0.5 сім'я купить машину.

Відповідь. 0.645, 0.5.

Завдання 4.

Умова. На колі відзначено п'ять точок. Процес потрапляє з будь-якої даної точки до одної з сусідніх з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Знайти перехідну матрицю даного марківського ланцюга та скласти діаграму переходу.

Розв'язок. Діаграма ланцюга зображена на рис. 2. Відповідна матриця:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

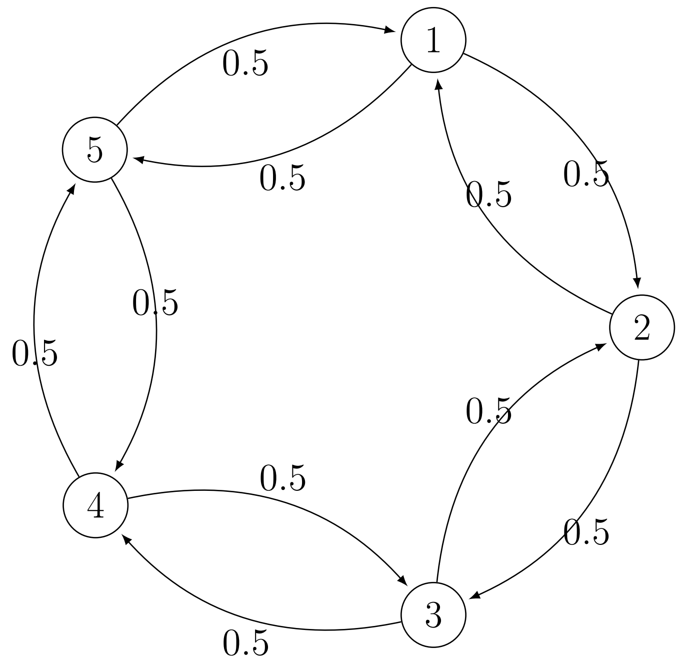

Рис. 2: Марков ланцюг для завдання 4.

Завдання 5.

Умова. Аптека продає препарати від печії трьох торговельних марок – A, B, C. Покупці змінюють марки препарату відповідно матриці переходу:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Якщо препарат купують щомісяця, то:

1. Якою є ймовірність того, що якщо в цьому місяці придбаний препарат марки A, то через три місяці куплять препарат марки C?
2. Якою є ймовірність того, що якщо в цьому місяці придбаний препарат марки B, то через два місяці буде куплений препарат марки C?
3. Якою є ймовірність того, що якщо в цьому місяці придбаний препарат марки C, то через три місяці буде знов придбаний препарат

марки C?

Розв'язок.

Пункт 1. Маємо початковий вектор $\boldsymbol{p}_0 = [1, 0, 0]$. Через три місяці будемо мати $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_0\mathbf{P}^3 = [0.451, 0.289, 0.26]$. Отже, з шансом 0.26 купиться препарат C.

Пункт 2. Маємо початковий вектор $\boldsymbol{q}_0 = [0, 1, 0]$. Через два місяці будемо мати $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_0\mathbf{P}^2 = [0.28, 0.42, 0.3]$, а отже з шансом 0.3 купиться препарат C.

Пункт 3. Маємо початковий вектор $\boldsymbol{w}_0 = [0, 0, 1]$. Через три місяці будемо мати $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_0\mathbf{P}^3 = [0.218, 0.197, 0.585]$. Отже, з ймовірностю 0.585 буде куплений препарат C.

Відповідь. $0.26, 0.3, 0.585$.

Завдання 6.

Припустимо, що Конгрес об'явив про можливе скорочення податків, і це повідомлення розповсюджується від людини до людини. Якщо скорочення податків відбудеться, то ймовірність того, що повідомлення буде передано наступній людині правильно, складає $\alpha = 0.6$. Якщо скорочення податків не буде, то ймовірність правильності передачі інформації складає $\beta = 0.7$.

1. Якщо скорочення податків відбудеться, то якою є ймовірність, що четверта людина, яка почула цю новину, почула її вірно?
2. Якщо скорочення податків не відбудеться, то якою є ймовірність, що п'ята людина, яка почула цю новину, зрозуміє, що скорочення податків відбудеться?
3. Якщо скорочення податків не відбудеться, то якою є ймовірність, що третя людина, яка почула цю новину, почув її правильно?

Розв'язок.

Пункт 1. Отже, нехай маємо 2 стани: 1 позначає, що до людини дійшла правдива інформація, а 2 що неправдива. Тоді матриця буде виглядати як:

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

Будемо вважати, що перша людина отримала інфу правильно. Тоді маємо стовпчик $\boldsymbol{x}_1 = [1, 0]$. Тоді:

$$\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_0 \mathbf{P}_\alpha^3 = [0.504, 0.496]$$

Отже ймовірність почути правильно дорівнює 0.504.

Пункт 2. Аналогічно пункту 1 маємо матрицю:

$$\mathbf{P}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}$$

Також вважаємо, що перша людина почула інформацію правильно $\boldsymbol{y}_1 = [1, 0]$. Отже, через 5 людей отримуємо:

$$\boldsymbol{y}_5 = \boldsymbol{y}_1 \mathbf{P}_\beta^4 = [0.5128, 0.4872]$$

Отже ймовірність, що людина неправильно отримає інформацію, дорівнює 0.4872.

Пункт 3. Аналогічно до пункту 2 маємо:

$$\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{y}_1 \mathbf{P}_\beta^2 = [0.58, 0.42]$$

Отже ймовірність того, що людина почула правильно інформацію, дорівнює 0.58.

Відповідь. $0.504, 0.4872, 0.58$.

Завдання 7.

Умова. Команди A, B приймають участь у щорічному чемпіонаті з бейсболу. Кожна команда має однакові шанси виграти першу гру, нічиїх бути не може. Якщо команда A виграє першу гру, то ймовірність її перемоги в наступній грі дорівнює $\alpha = 0.6$. Якщо першу гру виграє команда B, то ймовірність її перемоги у наступній грі дорівнює $\beta = 0.7$. Якою є ймовірність, що команда B виграє третю гру? Якою є ймовірність, що команда A виграє четверту гру?

Розв'язок. Маємо набір незалежних змінних X_i, де $X_i \in \{a, b\}$ позначає результат iого матчу, a позначає, що виграла команда A, а b що виграла команда B. В такому разі нам потрібно знайти $p(X_3 = b)$.

Але почнемо з початкових умов. Маємо:

$$p(X_1 = a) = p(X_1 = b) = 0.5$$

$$p(X_{n+1} = a \mid X_n = a) = 0.6,\ p(X_{n+1} = b \mid X_n = b) = 0.7,\ n \in \mathbb{N}$$

Для початку знайдемо ймовірність, що команда $B` переможе у другій грі:

$$p(X_2 = b) = p(X_2 = b \mid X_1 = b)p(X_1 = b) + p(X_2 = b \mid X_1 = a)p(X_1 = a) = 0.7 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.55$$

Ймовірність того, що переможе команда A у другій грі (можна звісно порахувати її як $1 - p(X_2 = b)$, але для самоперевірки порахуємо):

$$p(X_2 = a) = p(X_2 = a \mid X_1 = a)p(X_1 = a) + p(X_2 = a \mid X_1 = b)p(X_1 = b) = 0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.45$$

Знаходимо ймовірності перемоги у третій грі:

$$p(X_3 = b) = p(X_3 = b \mid X_2 = a)p(X_2 = a) + p(X_3 = b \mid X_2 = b)p(X_2 = b) = 0.4 \cdot 0.45 + 0.7 \cdot 0.55 = 0.565$$

А отже $p(X_3 = a) = 1 - p(X_3 = b) = 0.435$.

Отже вже бачимо закономірність. Нехай $p(X_n = b) \equiv p_n$. Тоді:

$$p(X_n = b) = p(X_n = b \mid X_{n-1} = a)p(X_{n-1} = a) + p(X_n = b \mid X_{n-1} = b)p(X_{n-1} = b)$$

Бачимо, що $p(X_{n-1} = a) = 1 - p_{n-1}, p(X_{n-1} = b) = p_{n-1}$. Окрім того, ща умовою $p(X_n = b \mid X_{n-1} = a) = 1 - \alpha$, а $p(X_n = b \mid X_{n-1} = b) = \beta$. Отже:

$$p_n = (1 - \alpha)(1 - p_{n-1}) + \beta p_{n-1},\ p_1 = 0.5$$

Що еквівалентно:

$$p_n = (1 - \alpha) + (\beta + \alpha - 1)p_{n-1},\ p_1 = 0.5$$

Якщо позначити $\lambda = 1 - \alpha = 0.4, \mu = \alpha + \beta - 1 = 0.3$, то маємо:

$$p_n = \lambda + \mu p_{n-1},\ p_1 = 0.5$$

Або якщо записати ще більш явно:

$$p_n = \frac{1 - \mu^{n-1}}{1 - \mu}\lambda + \mu^{n-1}p_1,\ p_1 = 0.5$$

Тому:

$$p_3 = (1 + \mu)\lambda + \mu^2 p_1 = 0.565$$

$$p_4 = (1 + \mu + \mu^2)\lambda + \mu^3 p_1 = 0.5695$$

Отже шанс $p(X_4 = a) = 1 - p_4 = 0.4305$.

Відповідь. $0.565, 0.4305$.