Homework #4

Задача 765.

Воспользуемся свойством кривых второго порядка, а именно отношение фокального радиуса r к расстоянию до диррректрисы d равняется эксцентриситету:

$$\varepsilon = \frac{r}{d}$$

По условию нам дан фокус $F_1(2,0)$, директриса имеет уравнение $x = 5$ и дана точка на кривой $M(10,6)$. Заметим, что в этом случае $r = |\overline{F_1 M}| = 10$ и $d = 5$. Таким образом, имеем, что $\varepsilon = 2$, т.е. данная кривая — это гипербола.

Далее отметим, что раз директриса параллельна Oy, то два фокуса и центр гиперболы находятся на одной ординате (в нашем случае — $y = 0$). В таком случае имеем, что расстояние от директрисы до фокуса 3. С другой стороны, это расстояние равняется:

$$c - \frac{a}{\varepsilon} = a\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{3a}{2} = 3 \implies a = 2$$

Следовательно, $c = \varepsilon a = 4$. Отсюда можем найти и b:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \implies b = 2\sqrt{3}$$

Теперь найдём второй фокус. Для этого вроде к x координате F_1 добавим $2c$, таким образом, $F_2(10,0)$. Координата центра гиперболы в таком случае $O(6,0)$, а вторая директриса имеет уравнение $x=7$. Уравнение гиперболы:

$$\frac{(x-6)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

Задача 776.

Параметр c одинаковый у обоих кривых и равен он $\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$. Пусть большая и малая полуоси эллипса равны $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$. Учитывая, что $c^2=\widetilde{a}^2-\widetilde{b}^2$, имеем:

$$2a^2=\widetilde{a}^2-\widetilde{b}^2 \implies \widetilde{a}^2=2a^2+\widetilde{b}^2$$

Таким образом, уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{2a^2+\widetilde{b}^2}+\frac{y^2}{\widetilde{b}^2}=1$$

Подставим точку $(a\sqrt{2},a)$:

$$\frac{2a^2}{2a^2+\widetilde{b}^2}+\frac{a^2}{\widetilde{b}^2}=1$$

Обозначим $\lambda=\widetilde{b}/a$, тогда:

$$\frac{2}{2+\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1$$

Таким образом, всё сводится к уравнению $\lambda^4-\lambda^2-2=0$. Отсюда имеем 2 корня — $\lambda^2=2$ и $\lambda^2=-1$, однако второй корень по очевидным причинам не подходит. Поэтому имеем, что $\frac{\widetilde{b}^2}{a^2}=2$ т.е. $\widetilde{b}^2=2a^2$. Тогда $\widetilde{a}^2=4a^2$. Таким образом, уравнение:

$$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$$

Задача 782.

Уравнение этой линии можно задать уравнением:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Раз $x = 2$ является директрисой, то в таком случае $a/\varepsilon = 1$. Таким образом, $a = \varepsilon = c/a$, т.е. $c = a^2$.

Пусть перед нами гипербола. В таком случае, получим, что $a^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, откуда $b^2 = a^4 - a^2$. Подставляем это в первое уравнение и подставляем точку из условия

$$\frac{16}{a^2} - \frac{36}{a^4 - a^2} = 1$$

Решая это уравнение, получим, что либо $a^2 = 4$ и соответственно $b^2 = 12$. Либо $a^2 = 13$ и тогда $b^2 = 156$. Таким образом, имеем 2 уравнения:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \ \frac{(x-1)^2}{13} - \frac{y^2}{156} = 1$$

Пусть это эллипс. Тогда $\sqrt{a^2 - b^2} = a^2 \to b^2 = a^2 - a^4$. Имеем уравнение:

$$\frac{16}{a^2} + \frac{36}{a^2 - a^4} = 1$$

Однако это уравнение аналогично тому, что мы выписывали выше, поэтому мы снова получим 2 гиперболы.

Задача 798.

Запишем уравнение слегка в другом виде:

$$\rho(\varphi) = \frac{9/4}{1 - (5/4)\cos\varphi}$$

Видим, что $p = 9/4$ и $\varepsilon = 5/4$. Т.к. $\varepsilon > 1$, то перед нами гипербола. Имеем:

$$p = \frac{b^2}{a}, \ \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Решая это уравнение, находим $a = 4, b = 3$. Тогда уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Задача 803.

В полярных координатах уравнения всех кривых имеет вид (запишем это для левого фокуса, для правого доказательство аналогично):

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

Рассмотрим некоторую точку на кривой и пусть ей соответствует некоторый угол β. Тогда отрезок до этой точки имеет длину $\rho(\beta)$. Если провести хорду через эту точку и фокус, то получим точку, которой соответсвует угол $\beta + \pi$ и следовательно отрезок до этой точки имеет длину $\rho(\beta + \pi)$. Поэтому, нужная нам сумма:

$$\frac{1}{\rho(\beta)} + \frac{1}{\rho(\beta + \pi)} = \frac{1 + \varepsilon \cos\beta}{p} + \frac{1 - \varepsilon \cos\beta}{p} = \frac{2}{p} = \mathrm{const}$$