📝

Test #2 (12/15)

Контрольна робота з лінійної алгебри

студента групи МП-21

Захарова Дмитра

Варіант 4

Завдання 1.

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

Старший член x_1^5, отже маємо наступну таблицю

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	Product
5	0	0	5	0	0	σ_1^5
4	1	0	3	1	0	$\sigma_1^3\sigma_2$
3	2	0	1	2	0	$\sigma_1\sigma_2^2$
3	1	1	2	0	1	$\sigma_1^2\sigma_3$
2	2	1	0	1	1	$\sigma_2\sigma_3$

Тому можемо записати $P = \sigma_1^5 + \alpha\sigma_1^3\sigma_2 + \beta\sigma_1\sigma_2^2 + \gamma\sigma_1^2\sigma_3 + \delta\sigma_2\sigma_3$. Для початку підставимо набір $(2, -1, -1)$. В такому разі $P = 2^5 - 2 = 30$, і іншого боку маємо $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 - 2 = -3$ і $\sigma_3 = 2$. В такому випадку $P = \delta \cdot (-3) \cdot 2 = 30 \to \delta = -5$.

Тепер підставимо $(2, 2, -1)$, в такому разі $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -4$, а $P = 63$, тому

$$63 = 243 + 9 \cdot (-4) \cdot \gamma \implies \gamma = \frac{-180}{-36} = 5$$

Тепер підставимо $(1, 1, 0)$, в такому випадку $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$ і тому

$$P = 2 = 2^5 + 8\alpha + 2\beta \implies 8\alpha + 2\beta = -30 \implies 4\alpha + \beta = -15$$

Тепер підставимо $(1, 1, 1)$, в такому випадку $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1$:

$$P = 3 = 3^5 + \alpha \cdot 3^3 \cdot 3 + \beta \cdot 3^3 + 9\gamma + 3\delta$$

$$81\alpha + 27\beta + 9\gamma + 3\delta = -240 \to 27\alpha + 9\beta + 3\gamma + \delta = -80$$

Підставляємо $\gamma = 5, \delta = -5$, тоді

$$27\alpha + 9\beta + 15 - 5 = -80 \to 27\alpha + 9\beta = -90$$

$$3\alpha + \beta = -10$$

В такому випадку маємо систему рівнянь $\begin{cases} 3\alpha + \beta = -10 \\ 4\alpha + \beta = -15 \end{cases}$

Віднімемо від другого рівняння перше, отримаємо $\alpha = -5$. Отже $\beta = -10 + 15 = 5$.

$$P = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$$

Завдання 2.

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j}^{n} x_i^3 x_j$$

Старший член $x_1^3 x_2$, отже маємо наступну таблицю

x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	$\ldots$	σ_n	Product
3	1	0	0	$\ldots$	0	2	1	0	0	$\ldots$	0	$\sigma_1^2\sigma_2$
2	2	0	0	$\ldots$	0	0	2	0	0	$\ldots$	0	σ_2^2
2	1	1	0	$\ldots$	0	1	0	1	0	$\ldots$	0	$\sigma_1\sigma_3$
1	1	1	1	$\ldots$	0	0	0	0	1	$\ldots$	0	σ_4

Отже $P = \sigma_1^2\sigma_2 + \alpha\sigma_2^2 + \beta\sigma_1\sigma_3 + \gamma\sigma_4$. Підставимо спочатку набір $(1,1,0,\ldots,0)$. В такому разі $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_k = 0\ \forall k > 2$, отже

$$P = 4 + \alpha = 1 \to \alpha = -3$$

Тепер нехай $\mathbf{x} = (1,1,1,0,\ldots,0)^T$, в такому разі $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0, \ldots$. В такому разі

$$P = 27 + 9\alpha + 3\beta = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 = 3$$

Підставимо $\alpha = -3$:

$$P = 3\beta = 3 \to \beta = 1$$

Отже залишилось лише знайти σ_4. Підставимо $(1,1,1,1,0,\ldots,0)$. В такому разі $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1$, тому

$$P = 6 = 96 - 3\cdot 36 + 16 + \gamma \to \gamma = 2$$

Отже, остаточно

$$P = \sigma_1^2\sigma_2 - 3\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$$

Завдання 3.

Запишемо квадратичну форму у вигляді

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Знайдемо власні числа $\mathbf{A}$. Запишемо характеристичний поліном:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}_1\mathbf{A}\cdot\lambda^2 + \mathrm{tr}_2\mathbf{A}\cdot\lambda - \det\mathbf{A}$$

Де $\mathrm{tr}_1\mathbf{A} = 12, \mathrm{tr}_2\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 15 + 8 = 39$, тому

$$\det\mathbf{A} = 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 48 - 20 = 28$$

Тому маємо $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28$. Його корені — $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 7$. Тому канонічний вид $Q(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3) = \widetilde{x}_1^2 + 4\widetilde{x}_2^2 + 7\widetilde{x}_3^2 = \widetilde{x}_1^2 + (2\widetilde{x}_2)^2 + (\sqrt{7}\widetilde{x}_3)^2$, звідси нормальний вид $Q(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2$.

Далі знайдемо власні вектора. Для цього знайдемо базисні вектори $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E}), k = 1,2,3$. Отримаємо $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, тому матриця перетворення

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Якщо позначити $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, то маємо $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{L} \to \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{P}^T$ і тому

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{P}^T\mathbf{x} = (\mathbf{P}^T\mathbf{x})^T\mathbf{L}(\mathbf{P}^T\mathbf{x})$$

Якщо позначити $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$, то будемо мати $Q(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \widetilde{x}_k^2$.

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Завдання 4.

Запишемо квадратичну форму у вигляді

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2\lambda & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{bmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Вона є додатно визначеною якщо $\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 9 > 0$, тобто $\lambda > 9/2$. Нарешті, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2\lambda & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 1 - 9\lambda - 6 - 6 - 8\lambda = 2\lambda^2 - 17\lambda - 13 > 0$.
Розв'язком $2\lambda^2 - 17\lambda - 13 = 0$ є

$$\lambda_- = \frac{17 - \sqrt{393}}{4},\ \lambda_+ = \frac{17 + \sqrt{393}}{4}$$

В такому разі з умови $\Delta_3 > 0$ випливає $\lambda \in (-\infty, \lambda_-) \cup (\lambda_+, +\infty)$. Перетнемо з другою умовою, тобто $\lambda \in (9/2, +\infty)$. Для цього порівняємо λ_+ та $9/2$:

$$\lambda_+ > \frac{17 + \sqrt{361}}{4} = \frac{17 + 19}{4} = 9 \implies \lambda_+ > 9/2$$

Отже маємо $\lambda > \frac{17+\sqrt{393}}{4}$.

Оберемо $\lambda = 10$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 20x_2^2 + 10x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Перетворюємо:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_1(3x_2 - 2x_3) + (3x_2 - 2x_3)^2) - (3x_2 - 2x_3)^2 + 20x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + 3x_2 - 2$$

Тут ми позначили $\widetilde{x}_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3$. Далі помітимо, що $6x_3^2 + 14x_2x_3 + \frac{49}{6}x_2^2 = (\sqrt{6}x_3 + \frac{7}{\sqrt{6}}x_2)^2$

Тому

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{x}_1^2 + (6x_3^2 + 14x_2x_3 + \frac{49}{6}x_2^2) - \frac{49}{6}x_2^2 + 11x_2^2 = \widetilde{x}_1^2 + (\sqrt{6}x_3 + \frac{7}{\sqrt{6}}x_2)^2 + \frac{17}{6}x_2^2$$

Якщо позначити $\widetilde{x}_2 = \sqrt{6}x_3 + \frac{7}{\sqrt{6}}x_2,\ \widetilde{x}_3 = \sqrt{\frac{17}{6}}x_2$, то будемо мати $Q = \widetilde{x}_1^2 + \widetilde{x}_2^2 + \widetilde{x}_3^2$.