Контрольна робота з диференціальних рівнянь #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

14 березня 2023 р.

Варіант 6.

1 Завдання 1.

Умова. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^2\frac{dy}{dx} = y(x+y)$$

Розв'язок. Перед нами **однорідне диференціальне рівняння**. Запишемо рівняння трошки в іншому виді:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

Робимо заміну $y = \xi(x)x$. Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{d\xi}{dx}x + \xi(x)$. Підставляючи, маємо:

$$\frac{d\xi}{dx}x + \xi - \xi - \xi^2 = 0 \implies \frac{d\xi}{dx}x = \xi^2$$

Це вже рівняння з роздільними змінними:

$$\frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{dx}{x} \to -\frac{1}{\xi} = \ln|x| + C \to \xi(x) = -\frac{1}{\ln|Cx|}$$

Остаточно маємо:

$$y(x) = -\frac{x}{\ln|Cx|}$$

Також походу ми втратили розв'язок $y = 0$. Отже запишемо відповідь.

Відповідь. $y(x) = -\frac{x}{\ln|Cx|}, y \equiv 0$.

2 Завдання 2.

Умова. Розв'язати диференціальне рівняння

$$2x\frac{dy}{dx} + y^2 = 1$$

Розв'язок. Це звичайне **рівняння з відокремленими змінними**, отже маємо:

$$\frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{2x}$$

Інтегруємо обидві частини. Права частина вочевидь дорівнює $\frac{1}{2}\ln|x| + C$. Розпишемо ліву частину:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \int \left(\frac{1}{2(y+1)} - \frac{1}{2(y-1)}\right) dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C$$

Отже, остаточно:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}\ln|Cx|$$

Трохи спростимо вираз:

$$\frac{1+y}{1-y} = Cx \to y(x) = \frac{Cx-1}{Cx+1} \to y(x) = \frac{x+\gamma}{x-\gamma}$$

Також походу втрачені розв'язки $y = 1$, $y = -1$.

Відповідь. $y(x) = \frac{x+\gamma}{x-\gamma}, y \equiv 1, y \equiv -1$.

3 Завдання 3.

Умова. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

Розв'язок. Це є **рівнянням у повних диференціалах**. Для того, щоб переконатись в цьому, потрібно перевірити, що $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ де $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. В нашому випадку:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3 + \ln x\right) = \frac{1}{x}$$

Отже дійсно бачимо, що $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{1}{x}$.

Знайдемо функцію $\mu(x,y)$, диференціалом якої є $M(x,y)$, тобто:

$$\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x} \implies \mu(x,y) = y\ln x + \nu(y)$$

Функцію $\nu(y)$ шукаємо з умови $\frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = y^3 + \ln x$:

$$\ln x + \frac{d\nu}{dy} = y^3 + \ln x \to d\nu = y^3 dy \to \nu(y) = \frac{y^4}{4} + C$$

Звідси $\mu(x,y) = y\ln x + \frac{y^4}{4} + C$. Отже загальним розв'язком є $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$.

Відповідь. $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$.

4 Завдання 4.

Умова. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(2xe^y + y^4)y' = ye^y$$

Розв'язок. Перепишемо рівняння як:

$$ye^y\frac{dx}{dy} - 2xe^y = y^4$$

Далі ділимо обидві частини на ye^y:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^3e^{-y}$$

Якщо замінити $\alpha(y) = -\frac{2}{y}, \beta(y) = y^3e^{-y}$, маємо:

$$x' + \alpha(y)x = \beta(y)$$

Що є **лінійним диференціальним рівнянням**. Тому спочатку розв'язуємо $\widetilde{x}' + \alpha(y)\widetilde{x} = 0$:

$$\widetilde{x}' = \frac{2\widetilde{x}}{y} \to \frac{d\widetilde{x}}{dy} = \frac{2\widetilde{x}}{y} \to \frac{d\widetilde{x}}{2\widetilde{x}} = \frac{dy}{y} \to \frac{1}{2}\ln\widetilde{x} = \ln y + C$$

Звідси маємо $\widetilde{x} = Cy^2$. Тепер у початкове рівняння підставляємо $x = C(y)y^2$:

$$C'y^2 + 2yC - 2Cy = y^3e^{-y} \to C' = ye^{-y}$$

Зауваження: тут ми скоротили на y^2, якщо перевірити, то $y = 0$ також є розв'язком ДР.

Далі інтегруємо:

$$C(y) = \int ye^{-y}dy = -e^{-y}(1+y) + \gamma,\ \gamma = \text{const}$$

Отже:

$$x = (\gamma - e^{-y}(1+y))y^2,\ y = 0$$

Або:

$$x = \gamma y^2 - \frac{y^2(1+y)}{e^y},\ y = 0$$

Відповідь. $x = \gamma y^2 - \frac{y^2(1+y)}{e^y},\ y = 0.$

5 Завдання 5.

Умова. Розв'язати диференціальне рівняння

$$3x^2 - y = \frac{dy}{dx}(x+1),\ y(0) = 5$$

Розв'язок. Це **лінійне диференціальне рівняння**. Для цього перепишемо рівняння у іншому вигляді:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = \frac{3x^2}{x+1}$$

Якщо замінити $\alpha(x) = \frac{1}{x+1}, \beta(x) = \frac{3x^2}{x+1}$:

$$\frac{dy}{dx} + \alpha(x)y = \beta(x)$$

Що є лінійним диференціальним рівнянням. Для його розв'язання спочатку розв'яжемо $\frac{d\widetilde{y}}{dx} + \alpha(x)\widetilde{y} = 0$. Отже:

$$\frac{d\widetilde{y}}{dx} + \frac{\widetilde{y}}{x+1} = 0 \to \frac{d\widetilde{y}}{dx} = -\frac{\widetilde{y}}{x+1} \to \frac{d\widetilde{y}}{\widetilde{y}} = -\frac{dx}{x+1}$$

Інтегруємо обидві частини:

$$\ln \widetilde{y} = -\ln(x+1) + C \to \widetilde{y}(x) = \frac{C}{x+1}$$

В наше початкове рівняння підставляємо:

$$y(x) = \frac{C(x)}{x+1} \to \frac{dy}{dx} = \frac{C'(x+1) - C}{(x+1)^2}$$

Отже:

$$3x^2 - \frac{C(x)}{x+1} = \frac{C'(x+1) - C}{(x+1)^2}(x+1)$$

Далі спрощуємо:

$$3x^2 = \frac{dC}{dx} \to C(x) = x^3 + \gamma,\ \gamma = \text{const}$$

Отже маємо остаточно:

$$y(x) = \frac{x^3 + \gamma}{x + 1}$$

Підставляємо $y(0) = 5$:

$$5 = \gamma$$

Отже $y(x) = \frac{x^3+5}{x+1}$.

Відповідь. Загальний розв'язок $y(x) = \frac{x^3+\gamma}{x+1}$. З початковими умовами $y(x) = \frac{x^3+5}{x+1}$.