📝

Test #1 (14/15)

Фамілія: Захаров

Ім'я: Дмитро

Група: Мп-21

Завдання 1.

Скористаємось процесом ортогоналізації. Покладемо перший вектор:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Далі за алгоритмом:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle}\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2(-1) + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1(-1)}{1+1+4+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Нарешті $\mathbf{b}_3$. Для цього знайдемо величини:

$$\gamma_1 = \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} = \frac{7}{7} = 1, \; \gamma_2 = \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle} = -1$$

В такому разі маємо:

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \gamma_1 \mathbf{b}_1 - \gamma_2 \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Тепер нормалізуємо вектора:

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{\sqrt{23}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{b}}_3 = \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

Щоб знайти координати $\mathbf{x}$ у цьому базисі, краще його спочатку знайти у базисі $\mathbf{b}_i$. Отже, маємо

$$\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 + \gamma\mathbf{b}_3 = \mathbf{x}$$

Або систему рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta - 5\gamma = -8 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 10 \\ 2\alpha + \beta = 13 \\ -\alpha + 2\beta + 6\gamma = 2 \end{cases}$$

Звідси маємо $\alpha = 6, \beta = 1, \gamma = 1$. Отже, маємо

$$6\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{x}$$

Переходимо до базису $\mathbf{e}_i$. Оскільки $\mathbf{b}_i = \|\mathbf{b}_i\|\mathbf{e}_i$, то маємо

$$6\|\mathbf{b}_1\|\mathbf{e}_1 + \|\mathbf{b}_2\|\mathbf{e}_2 + \|\mathbf{b}_3\|\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}$$

Оскільки $\|\mathbf{b}_1\| = \sqrt{7}, \|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{23}, \|\mathbf{b}_3\| = \sqrt{62}$, а отже координати мають вид $\{6\sqrt{7}, \sqrt{23}, \sqrt{62}\}$.

Завдання 2.

Спочатку знайдемо базисні вектори L:

$$\text{Null}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Null}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже одразу бачимо $\dim L = 2$. Тому якщо це перевести у систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

То якщо покласти параметри $x_3 = a, x_4 = b$, то $x_2 = -a - b, x_1 = 7a + 4b$. Отже, маємо базисні вектори L:

$$L = \{ \begin{pmatrix} 7a + 4b \\ -a - b \\ a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Отже базиси L — це $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тепер розглянемо $\mathbf{y} \in L^{\perp}$. В такому випадку $\langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, тому знаходимо

$$\operatorname{Null} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо покласти $y_1 = a, y_2 = b$, то маємо $y_3 = b - 7a, y_4 = b - 4a$, тому

$$L^{\perp} = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b - 7a \\ b - 4a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Отже $L^{\perp}$ образують вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо відстань вектору $\mathbf{x}$ до L.

Маємо $\operatorname{proj}_L \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2,\ \mathbf{x} = \operatorname{ort}_L \mathbf{x} + \operatorname{proj}_L \mathbf{x} = \operatorname{ort}_L \mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$.

Домножимо скалярно друге рівняння на $\mathbf{a}_1$ і на $\mathbf{a}_2$:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + \langle \operatorname{ort}_L \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle + \langle \operatorname{ort}_L \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \end{cases}$$

Оскільки $\operatorname{ort}_L \mathbf{x} \in L^{\perp}, \mathbf{a}_j \in L \implies \langle \operatorname{ort}_L \mathbf{x}, \mathbf{a}_j \rangle = 0$. А далі лише залишається розв'язати рівняння відносно α_1, α_2.

$$\begin{cases} 22 = 51\alpha_1 + 29\alpha_2 \\ 11 = 29\alpha_1 + 18\alpha_2 \end{cases} \to (\alpha_1, \alpha_2) = (1, -1)$$

Звідси $\operatorname{proj}_L \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (3, 0, 1, -1)^T, \operatorname{ort}_L \mathbf{x} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_L \mathbf{x} = (2, 11, -3, 3)^T$.
Отже, відстань $d(\mathbf{x}, L) = \|\operatorname{ort}_L \mathbf{x}\| = \sqrt{143}$.

Завдання 3.

Щоб переконатись, що матриця є унітарною, перевіримо, що

$$UU^* = U^* U = E$$

Оскільки $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, то $U^* = U^T$, отже достатньо перевірити

$$UU^T = U^T U = E$$

Ортогональна матриця

$$U^T = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ну і власне

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -\sqrt{6}/4 \\ 1/4 & 3/4 & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогічно, якщо прорахувати $U^T U$, то теж отримаємо E, отже матриця є унітарною.

Тепер знайдемо власні числа. Для цього запишемо характеристичний поліном

$$\chi_U(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}_1 U \cdot \lambda^2 + \mathrm{tr}_2 U \cdot \lambda - \det U = 0$$

Маємо

$$\mathrm{tr}_1 U = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\mathrm{tr}_2 U = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 2$$

$\det U = 1$, бо матриця унітарна. Тому маємо характеристичний поліном

$$\chi_U(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

Звідси маємо корені $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3} i}{2} = e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$. Отже, випишемо канонічний вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\pi/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Отже, тепер знайдемо власні вектори. Знаходимо $\mathrm{Null}(U - \lambda_j E)$:

$$\mathrm{Null}(U - \lambda_1 E) = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & \sqrt{6}/4 \\ 1/4 & -1/4 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{Null} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Отже маємо множину векторів $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, які задоволняють умові

$$\begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases}$$

Помітимо, шо $x - y = \sqrt{6}z, x - y = \frac{2z}{\sqrt{6}}$, звідси $z = 0, x = y = t$, тому маємо власні вектори

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тому маємо власний вектор $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, нормалізувавши його маємо $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Для $\lambda_2 = e^{i\pi/3}$ маємо власний вектор, аналогічним чином

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Беремо окремо дійсну і комплексну частину: $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{e}_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Геометричний зміст краще вказати по канонічному виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. По суті, якщо б ми мали, наприклад, базис xyz, то це було в поворотом навколо вісі x. В довільному ортонормованому базисі це є просто матрицею повороту довколо деякої вісі.