Домашня робота з математичного аналізу #26

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

20 травня 2023 р.

Для завдань 4.2, 4.3 запишемо формулу Остроградського-Гаусса

Означення 1: Формула Остроградського-Гаусса

Нехай маємо деяку область $V \subset \mathbb{R}^3$, яка обмежена поверхнею $\mathcal{S}$. Якщо $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ є неперервно диференційованою на V, то

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV = \oiint_{\mathcal{S}} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle dS$$

Завдання 4.2.

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \oiint_{\mathcal{S}} (x^3 \cos\alpha + y^3 \cos\beta + z^3 \cos\gamma) dS$$

де $\mathcal{S}$ є зовнішньою поверхньою сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язок. Маємо векторне поле $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x^3, y^3, z^3]^\top$. Його дивергенція:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Отже, згідно формулі Остроградського-Гаусса:

$$\oiint_{\mathcal{S}}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)dS = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV$$

Отже залишилось знайти $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV$ по нашому шару. Насправді, можемо доволі швидко його порахувати не переходячі до сферичних координат. Геометрично маємо масу шара з густиною $\rho = r^2$ де r відстань від центру. Розіб'ємо нашу сферу на багато "шарів". Тоді елемент маси це $dm(r) = A(r)\rho(r)dr = 4\pi r^2\rho(r)dr = 4\pi r^4 dr$. В такому разі повна маса $\int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{4\pi R^5}{5}$. Отже наш повний інтеграл це просто $\frac{12\pi R^5}{5}$

Відповідь. $\frac{12\pi R^5}{5}$.

Завдання 4.3.

Умова. Знайти інтеграл

$$\mathcal{I} = \oiint_{\mathcal{S}} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$$

де $\mathcal{S}$ є внутрішньою поверхнею конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ 0\le z\le b$.

Розв'язок. Наша область зображена на рис. 1.

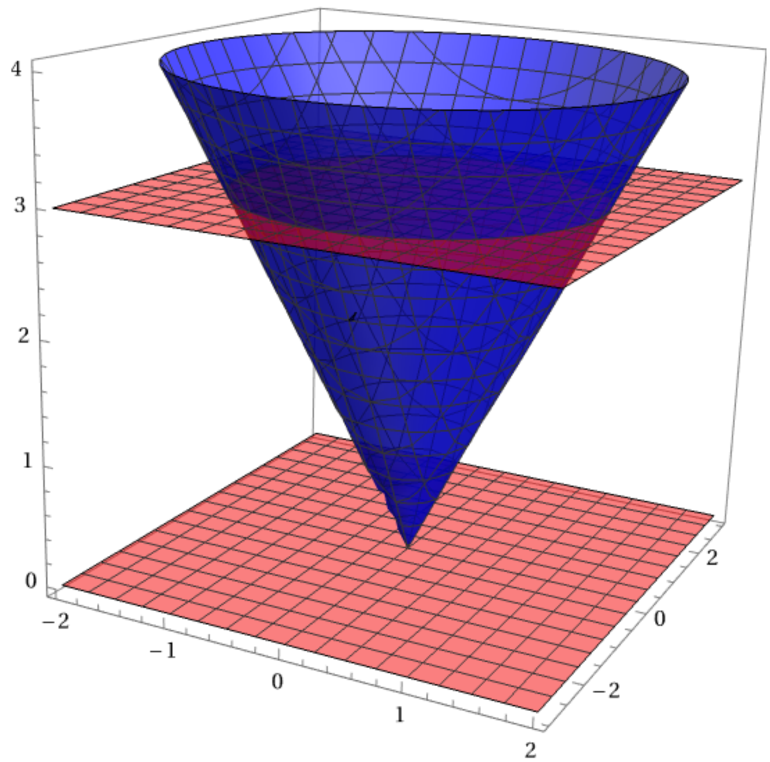

Рис. 1: Область $\mathcal{S}$ з завдання 4.3 для $a = 1, b = 2, c = 3$.

Маємо векторне поле $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x^2, y^2, z^2]^\top$. В такому разі його дивергенція:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 2(x + y + z)$$

Тоді згідно формулі Остроградського-Гаусса можемо звести наш інтеграл до:

$$\oiint_{\mathcal{S}^-} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = -2 \iiint_V (x + y + z) dV$$

Тут ми взяли мінус, оскільки нам потрібно брати внутрішню поверхню. Отже, все зводиться до обрахунку $Q = \iiint_V (x+y+z)dV$ і тут вже як в минулому прикладі легко не вийде. Введемо узагальнену циліндричну систему координат, себто

$$x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta,\ z = u$$

Якобіан цієї заміни $|J| = ab|\rho|$. Тепер визначемось з межами. Тут θ пробігає від 0 до 2π, тут все зрозуміло. Далі підставляємо нашу заміну у рівняння поверхні:

$$\rho^2 - \frac{u^2}{c^2} = 0 \to u = c\rho$$

а також $0 \leq u \leq b$. Отже, якщо ми оберемо деякий $u \in [0, b]$, то відповідний ρ буде пробігати від 0 до u/c. Отже, можемо записати наш інтеграл:

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b du \int_0^{u/c} (\rho(a\cos\theta + b\sin\theta) + u)ab\rho d\rho$$

Помітимо, що потрійний інтеграл починаючи з $\rho^2(a\cos\theta + b\sin\theta)$ занулиться, оскільки $\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$. Отже наш інтеграл зводиться до:

$$Q = 2\pi ab \int_0^b du \int_0^{u/c} u\rho d\rho = 2\pi ab \int_0^b udu \cdot \frac{u^2}{2c^2} = \frac{\pi ab}{c^2} \int_0^b u^3 du = \frac{\pi ab^5}{4c^2}$$

Отже остаточно відповідь $\mathcal{I} = -2Q = -\frac{\pi ab^5}{2c^2}$.

Відповідь. $-\pi ab^5/2c^2$.

Для наступних завдань сформулюємо формулу Стокса.

Означення 2: Формула Стокса

Нехай $\mathcal{D}$ є гладкою поверхнею в $\mathbb{R}^3$ з границею $\mathcal{C}$ і векторне поле $\boldsymbol{F}$ є неперервно диференційованою на $\mathcal{D}$. Тоді справедливо наступне:

$$\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{curl} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$$

Завдання 1.1.

Умова. Обчислити

$$\oint_{\Gamma_+} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

де Γ є колом $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, Γ_+ позначає напрямок "за год. стрілкою".

Розв'язок. Отже маємо векторне поле $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [y+z, x+z, x+y]^\top$. Його ротор:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\theta}$$

Отже бачимо, що наше векторне поле є потенціальним, оскільки можна помітити, що $\boldsymbol{F} = \nabla f$ де $f = xy+yz+xz$. Тоді і інтеграл по замкнутій поверхні дорівнює 0.

Застосувавши формулу Стокса отримаємо $\iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{S} = 0$.

Відповідь. 0.

Завдання 1.2.

Умова. Обчислити

$$\oint_{\Gamma_+} x^2y^3dx + dy + zdz$$

де Γ це коло $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$.

Розв'язок. Отже маємо векторне поле $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [x^2y^3, 1, z]^\top$. Тоді ротор:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = [0, 0, -3x^2y^2]^\top$$

Згідно формулі Стокса, отримаємо

$$\mathcal{I} = \oint_{\Gamma_+} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = -3 \iint_{\mathcal{D}} x^2 y^2 dx dy$$

Тепер параметризуємо нашу поверхню. Нехай вона параметризується як $\boldsymbol{\Phi}(\rho, \theta) = [\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0]$ для $\theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R]$. Тоді наш інтеграл знайдеться за допомогою формули:

$$\mathcal{I} = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times \boldsymbol{F}) d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{D}'} \left\langle (\nabla \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi}(u,v)), \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v} \right\rangle du dv$$

Отже:

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \langle [0, 0, -3\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta]^\top, [0, 0, \rho]^\top \rangle d\rho =$$
$$-3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^5 d\rho = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{R^6}{6} = -\frac{\pi R^6}{8}$$

Відповідь. $-\pi R^6/8$.