Homework #5

Задача 6.

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

Сделаем поворот координат на угол $\tan 2\phi = \frac{-4}{9-6} = -\frac{4}{3}$. Отсюда можем найти $2\tan\phi$:

$$\frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} = -\frac{4}{3} \implies 2\tan^2\phi - 3\tan\phi - 2 = 0$$

Отсюда получим $\tan\phi = 2$ или $\tan\phi = -1/2$. Возьмём $\tan\phi = 2$. Отсюда нетрудно найти, что $\sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, имеем преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Или же:

$$x = \frac{\tilde{x} - 2\tilde{y}}{\sqrt{5}},\ y = \frac{2\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{5}}$$

Подставив это в начальное уравнение, получим:

$$5\tilde{x}^2 + 10\tilde{y}^2 - 8\sqrt{5}\tilde{y} - 2 = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$(\sqrt{10}\tilde{y} - 2\sqrt{2})^2 + 5\tilde{x}^2 = 10 \to \frac{(\tilde{y} - 2/\sqrt{5})}{1} + \frac{\tilde{x}^2}{2} = 1$$

Сделав ещё одно преобразование координат: $\hat{x} = \tilde{x},\ \hat{y} = \tilde{y} - 2/\sqrt{5}$, окончательно получим эллипс:

$$\frac{\hat{y}^2}{1} + \frac{\hat{x}^2}{2} = 1$$

Центр в координатах $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — $(0, 2/\sqrt{5})$. Подставив это в формулу преобразования из (x, y) в $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, получим, что центр эллипса находится в точке $O(-4/5, 2/5)$.

Задача 7.

$$8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$$

Повернём систему координат на угол $\tan 2\phi = 3/4$. Отсюда находим $\tan\phi = 1/3$, а следовательно $\cos\phi = 3/\sqrt{10},\ \sin\phi = 1/\sqrt{10}$. Поэтому преобразование координат:

$$x = \frac{3\widetilde{x}}{\sqrt{10}} - \frac{\widetilde{y}}{\sqrt{10}},\ y = \frac{\widetilde{x}}{\sqrt{10}} + \frac{3\widetilde{y}}{\sqrt{10}}$$

Подставив это в начальное уравнение, получим:

$$9\widetilde{x}^2 - 9\sqrt{10}\widetilde{x} - \widetilde{y}^2 - \sqrt{10}\widetilde{y} + 11 = 0$$

Преобразовав, получим:

$$(\widetilde{x} - \sqrt{5/2})^2 - \frac{(\widetilde{y} + \sqrt{5/2})^2}{9} = 1$$

Сделав замену $\hat{x} = \widetilde{x} - \sqrt{5/2},\ \hat{y} = \widetilde{y} + \sqrt{5/2}$, получим гиперболу:

$$\frac{\hat{x}^2}{1} - \frac{\hat{y}^2}{9} = 1$$

В координатах $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ центр гиперболы $(\sqrt{5/2}, -\sqrt{5/2})$. В координатах (x, y) центр имеет координаты, соответственно, $(2, -1)$.

Задача 8.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

Сделаем поворот координат на угол $\tan 2\phi = -\infty$. Отсюда $2\phi = -\frac{\pi}{2} \to \phi = -\frac{\pi}{4}$. Т.е. имеем преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Отсюда:

$$x = \frac{\widetilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\widetilde{y}}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{\widetilde{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\widetilde{y}}{\sqrt{2}}$$

Подставив это в начальное уравнение, получим:

$$2\widetilde{x}^2 - 2\sqrt{2}\widetilde{x} - 8\sqrt{2}\widetilde{y} + 25 = 0$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(\widetilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(\widetilde{y} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

Сделаем такую замену координат:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Матрица $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ является по своей сути матрицей поворота на угол $\pi/2$. Таким образом имеем:

$$\hat{y} = -\left(\widetilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \hat{x} = \widetilde{y} - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Подставив это в уравнение выше, получим:

$$\hat{y}^2 = 4\sqrt{2}\hat{x}^2$$

Видим, что это парабола с параметром $p = 2\sqrt{2}$ и центром в $(0, 0)$ относительно координат $(\hat{x}, \hat{y})$. В координатах $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ центр имеет координаты $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Наконец, перейдя обратно в стандартные координаты, получим $O(2, 1)$.

Задача 9.

$$2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$$

Если пытаться повернуть систему координат на угол $\tan 2\phi = \frac{-5}{14}$, то мы столкнёмся с тем, что мы не можем найти адекватного выражения для $\cos\phi$ или $\sin\phi$. Поэтому тут остаётся, как по мне, 2 выхода: либо хитро преобразовывать выражение либо вот такой выход: предположить, что перед нами скрещивающиеся прямые, сделать замену $y = \alpha x + \beta$ и молится на адекватный результат (если перед нами эллипс, гипербола или парабола, то наша ситуация базнадёжная и придётся делать 100500 преобразований с кривыми косинусами и синусами).

Подставим это в наше уравнение. Получим:

$$(-12\alpha^2 - 5\alpha + 2)x^2 + (-5\beta - 24\alpha\beta - 1 + 26\alpha)x - (12\beta^2 - 26\beta + 10) = 0$$

Если перед нами скрещивающиеся кривые, то нам нужно подобрать такие 2 пары (α, β), что выражение вверху выполняется для любых x. Как минимум, коэффициенты перед x^2 и свободный член должны быть равны 0. Получим 2 квадратных уравнения из которых:

$$\beta = \{1/2, 5/3\},\ \alpha = \{1/4, -2/3\}$$

Далее перебирая (а всего нам в худшем случае перебирать 3 раза), находим, что для пар $(1/4, 1/2),\ (-2/3, 5/3)$ коэффициент перед x равен 0, что нам и нужно. Поэтому получаем 2 скрещивающеся прямые: $y = -2x/3 + 5/3,\ y = x/4 + 1/2$.

Комментарий: возможно есть какое-то умное решение этого пункта не используя поворота координат, буду очень рад его увидеть 🙂