✏️

Homework #1 (+)

Завдання 1414.

Знайдемо похідну виразу:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x$$

Бачимо, що похідна від'ємна для $x > 1/2$ та додатня для $x < 1/2$, отже точка $x = 1/2$ є локальним максимумом функції y. Насправді в цьому можна легко переконатись: перед нами парабола з гілками, що спрямовані донизу, тому $x = 1/2$ відповідає вершині, що звісно є максимумом (причому і глобальним, а не лише локальним). Значення функції у цій точці дорівнює $y = 9/4$.

Завдання 1432.

Знайдемо похідну виразу:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Бачимо одразу 2 критичні точки: $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$. Бачимо, що в точці $x_1 = -1$ знак похідної змінюється з "$+$" на "$-$" (для цього звісно бажано намалювати вісь, але це доволі нелегко робиться в редакторі 🙂), тому $x_1 = -1$ — це локальний максимум з значенням функції у цій точці $y = -2$. Для точки $x_2 = 1$ все навпаки, а тому це локальний мінімум зі значенням $y = 2$. Також варто відмітити точку $x_3 = 0$, що є точкою розриву другого роду.

Завдання 1445.

Оскільки функція $f(x) = 2^x$ монотонно зростає на проміжку $[-1, 5]$ та вона є неперервною, то можемо просто взяти значення в крайніх точках:

$$\min_{x \in [-1,5]} f(x) = f(-1) = \frac{1}{2}, \quad \max_{x \in [-1,5]} f(x) = f(5) = 32$$

Завдання 1448.

На проміжку $[0.01, 100]$ функція $x + \frac{1}{x}$ є неперервною (вона не є неперервною лише в точці $x = 0$), тому достатньо знайти значення функції у точках $x = 0.01, x = 100$ (крайні точки) та $x = 1$ (точка екстремума — локальний мінімум, див. завдання 1432):

$$f(0.01) = f(100) = 100 + 0.01 = 100.01,\ f(1) = 2$$

Отже $\min_{x \in [0.01, 100]} f(x) = f(1) = 2, \max_{x \in [0.01, 100]} f(x) = f(100) = f(0.01) = 100.01$.

Завдання 1433.

Знайдемо похідну:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Оскільки $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, то знак df/dx визначається виразом $(1 - x)(1 + x)$ у чисельнику. Цей вираз ми розглядали у завданні 1432, але з протилежним знаком, тобто $x_1 = -1$ — це локальний мінімум, а $x_2 = 1$ — локальний максимум (більш того, це є відповідно глобальними мінімумами і максимумами).