3️⃣

Homework #3

Завдання 1.

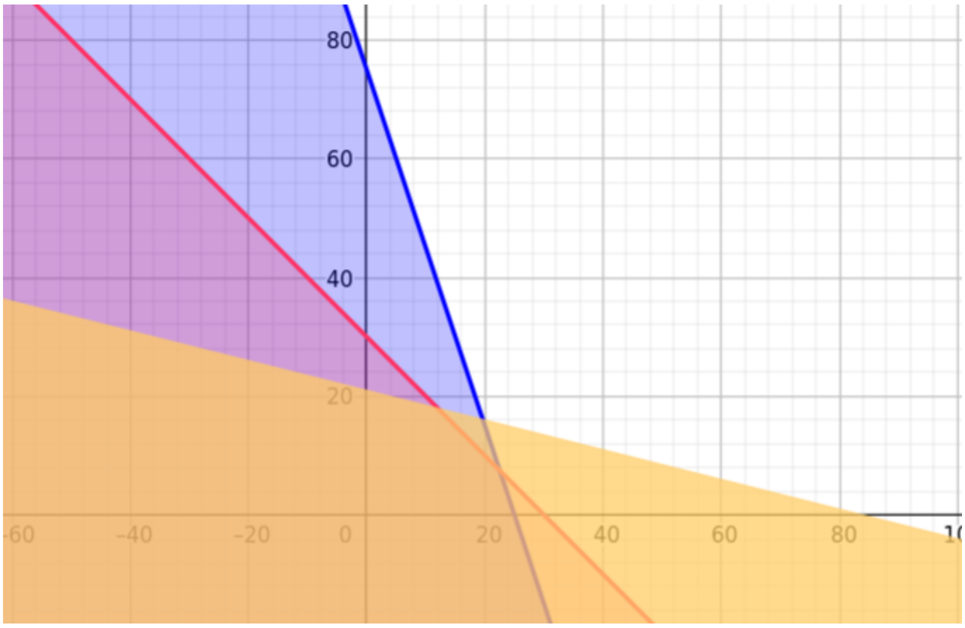
Побудуємо математичну модель. Нехай a — кількість сировини A, а b — кількість сировини B. В такому разі цільова функція:

$$\mathcal{C}(a,b) = 30a + 40b \to \max$$

Тепер запишемо обмеження на кожен з видів сировини:

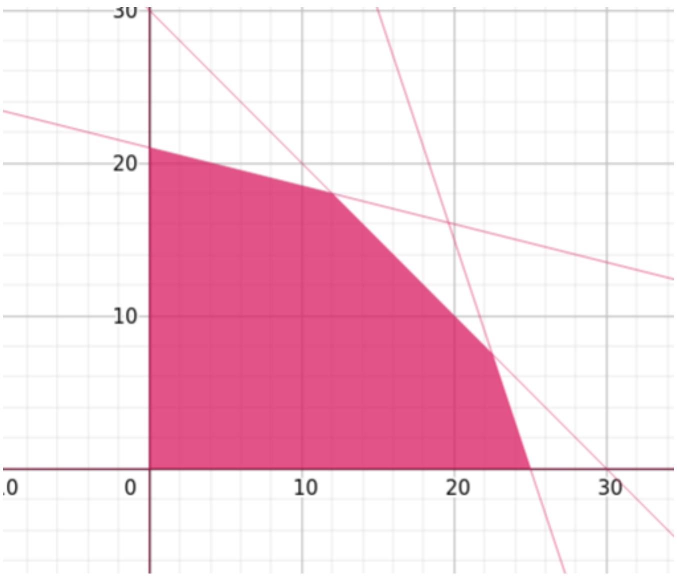
$$\begin{gathered}\mathcal{B}_1 : 12a + 4b \leq 300 \to 3a + b \leq 75 \\ \mathcal{B}_2 : 4a + 4b \leq 120 \to a + b \leq 30 \\ \mathcal{B}_3 : 3a + 12b \leq 252 \to a + 4b \leq 84\end{gathered}$$

Побудуємо багатокутник $\left\{(a,b) \mid (a,b) \in \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{B}_i\right\}$:



Три граничні умови, де за ***x*** взято ***a***, а за ***y*** — ***b*:** синім показано *B1*, червоним *B2*, помаранчевим *B3*. Умова на натуральність a, b поки не вказана.

Тепер об'єднаємо це в один багатокутник, врахувавши умову $\mathcal{B}_4 : a, b \in \mathbb{N}^+$:



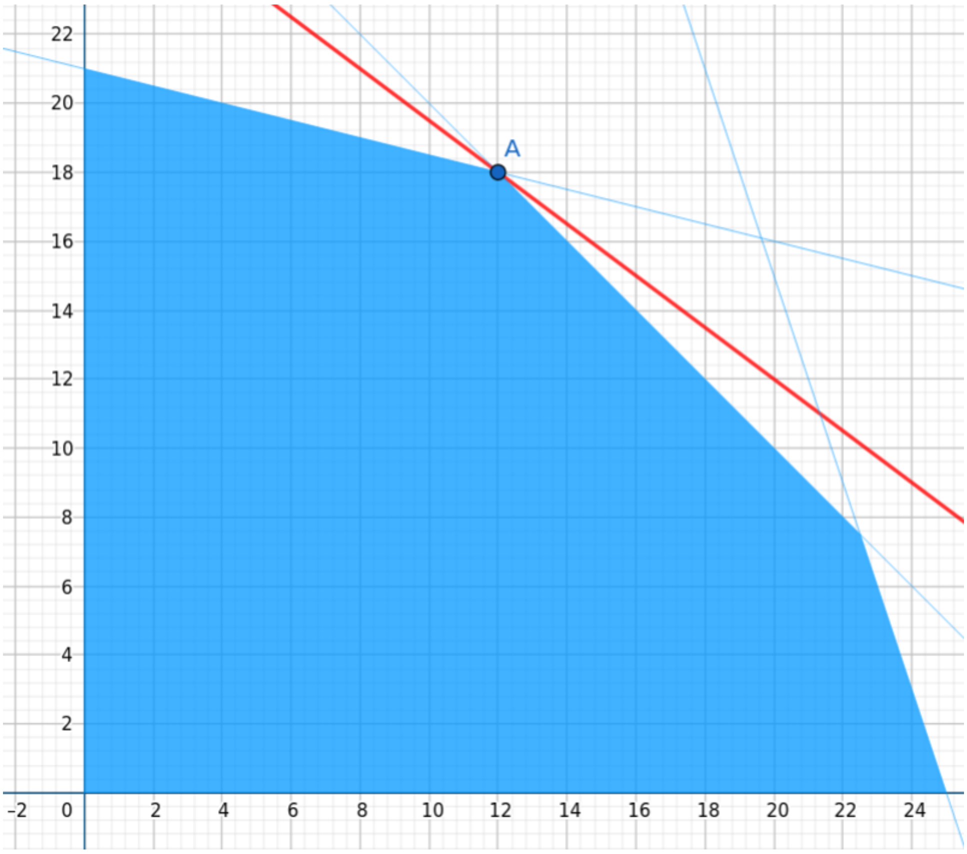
Обмежувальний багатокутник *B*, що включає в себе об'єднання *B1, B2, B3, B4*.

Тепер на цьому багатокутнику потрібно знайти такі точки (a, b), що будуть максимізувати цільову функцію $\mathcal{C}(a, b)$. Для цього проведемо сімейство прямих.

$$3a + 4b = \lambda, \lambda \in \mathbb{N}^{+}$$

Ремарка: ми беремо $\lambda \in \mathbb{N}^{+}$, оскільки при $a, b \in \mathbb{N}^{+}$ цільова функція $\mathcal{C}(a, b) \in \mathbb{N}^{+}$. Також замість $30a + 40b$ ми взяли $3a + 4b$, оскільки якщо ми максимізуємо $3a + 4b$, то ми автоматично і максимізуємо $30a + 40b$, оскільки $30a + 40b = 10(3a + 4b)$.

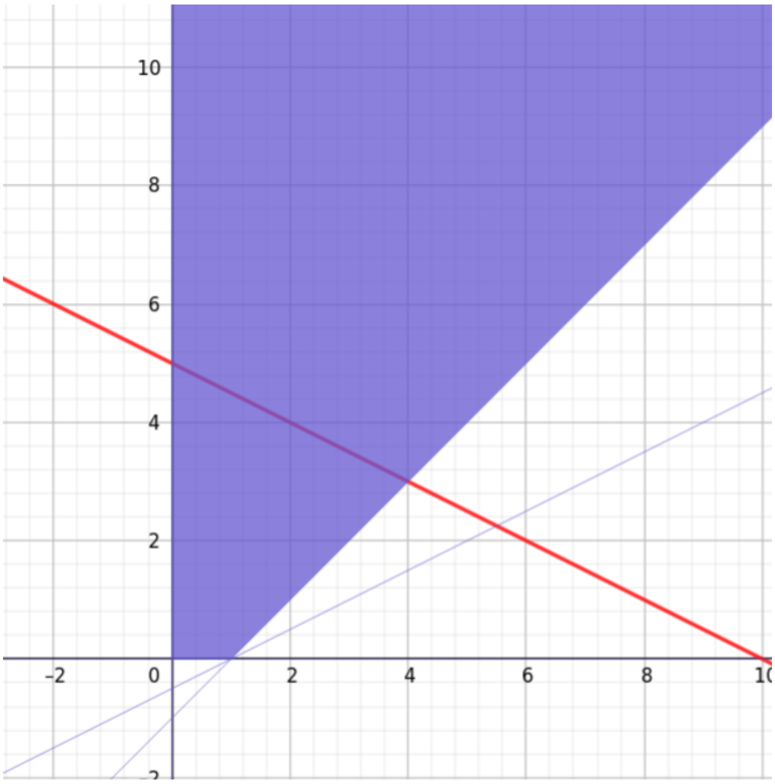
І будемо рухати λ вгору, допоки пряма не перестане перетинати $\mathcal{B}$. Отримаємо наступний результат:



Тобто ми отримали точку $(12, 18)$, що відповідає $\mathcal{C}(12, 18) = 1080$.

Завдання 2.

Побудуємо багатокутник можливих значень (x_1, x_2), поклавши через абцису значення x_1, а через ординату — x_2. Тоді маємо:

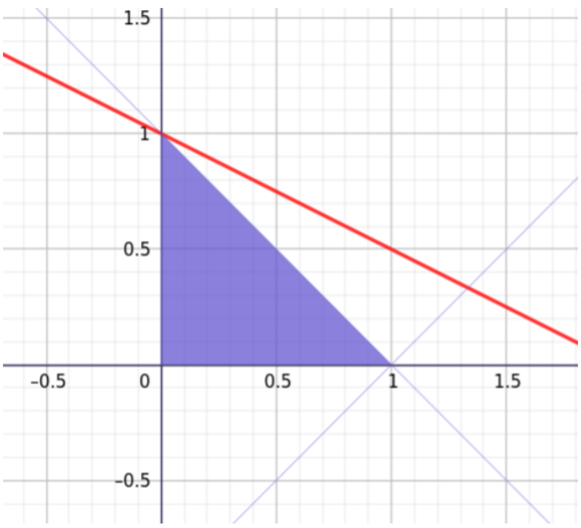


Як можна побачити, багатокутник ніяк не обмежений “зверху”, і тому рухаючі пряму вгору, можемо отримувати все більше і більше значення цільової функції $\mathcal{C}(x_1, x_2)$.

Окрім цього, не складно побачити, що умова $x_1 \leq 1 + x_2$ є зайвою, оскільки $1 + x_2 \leq 1 + 2x_2\ \forall x_2 \geq 0$.

Завдання 3.

Робимо те саме:



Бачимо, що найбільше значення досягається при точці $(0, 1)$. Можемо перевірити це аналітично. Видно, що умова $x_1 - x_2 \leq 1$ є зайвою. Тому маємо:

$$\begin{cases} \mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

З другої умови маємо $x_1 \leq 1 - x_2$, тому

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) \leq 1 - x_2 + 2x_2 = 1 + x_2$$

Тому потрібно взяти як можна більше x_2, але так, щоб $x_1 \geq 0$, тобто при умові $x_2 \leq 1$. Отже, якщо візьмемо $x_2 = 1$, будемо мати максимальне значення цільової функції $\mathcal{C}(0, 1) = 2$ і іншу точку $x_1 = 0$.