Індивідуальне завдання з курсу “Теоретична механіка”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Варіант 18

Завдання

Точка M рухається відносно тіла. За заданими рівняннями відносного руху точки M та руху тіла визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість та прискорення M.

$$OM(t) =: s(t) = 10t + t^3\,(\mathrm{cm}),\ \varphi(t) = 8t - t^2\,(\mathrm{rad}),\ t_1 = 2\,\mathrm{s},\ \alpha = \frac{\pi}{3}$$

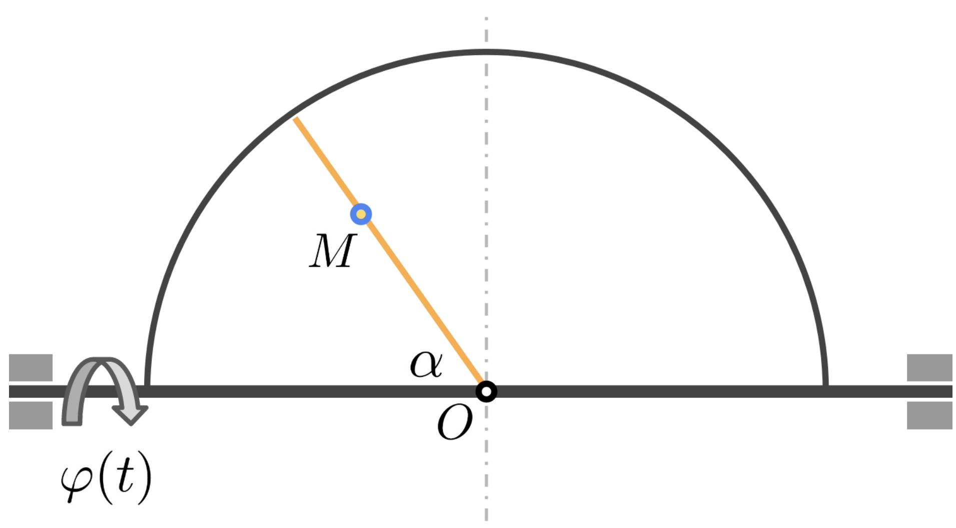

Рис. 1: Умова завдання

Розв'язок.

Спосіб I. Виведемо конкретну функцію радіус-вектору точки M від часу, а по ній легко знайдемо швидкість та прискорення.

Введемо систему координат, як показано на рисунку 2 (вісь Oz дивиться на нас).

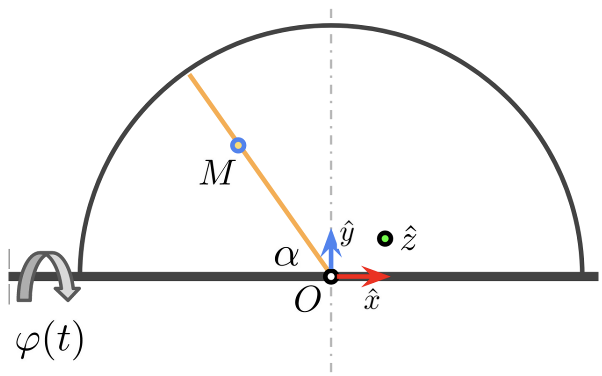

Рис. 2: Введення системи координат

У відносній системі координат тіла (тобто якщо прийняти, що базиси $\hat{x}$ та $\hat{y}$ рузаються разом з тілом; позначимо такий базис як $\hat{x}', \hat{y}'$), точка має координати

$$\widetilde{\mathbf{r}}_M(t) = -s(t)\cos\alpha\hat{x}' + s(t)\sin\alpha\hat{y}'$$

Проте, нас цікавлять саме абсолютні координати. Для цього помітимо, що нам потрібно повернути M на кут $\varphi(t)$ навколо вісі Ox. Для цього, достатньо помножити вектор $\mathbf{r}_M(t)$ на матрицю повороту

$$\boldsymbol{R}_{Ox}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Отже:

$$\mathbf{r}_M(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\cos\alpha \\ s\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\cos\alpha \\ s\sin\alpha\cos\varphi \\ s\sin\alpha\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Таким чином,

$$\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{r}}_M = -\dot{s}\cos\alpha\hat{x} + (\dot{s}\cos\varphi - s\dot{\varphi}\sin\varphi)\sin\alpha\hat{y} + (\dot{s}\sin\varphi + s\dot{\varphi}\cos\varphi)\sin\alpha\hat{z}$$

Таким чином, модуль:

$$v_M^2 = \dot{s}^2\cos^2\alpha + (\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2)\sin^2\alpha = \dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha$$

Підставимо числа. $\dot{s} = 10 + 3t^2, \dot{\varphi} = 8 - 2t$, тому $s(t_1) = 28, \dot{s}(t_1) = 22$. Окрім цього, $\varphi(t_1) = 12,\ \dot{\varphi}(t_1) = 4$. Тому:

$$v_M^2(t_1) = \left(22^2 + 28^2 \cdot 4^2 \cdot \frac{3}{4}\right) \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2} \implies v_M \approx 99.46\,\mathrm{cm/s} \approx 9.95\,\mathrm{m/s}$$

Тепер знайдемо похідну ще раз, запишемо все покомпонентно:

$$(a_M)_x = -\ddot{s}\cos\alpha$$

$$(a_M)_y = (\ddot{s}\cos\varphi - 2\dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi - s\ddot{\varphi}\sin\varphi - s\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\alpha$$
$$(a_M)_z = (\ddot{s}\sin\varphi + 2\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + s\ddot{\varphi}\cos\varphi - s\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\sin\alpha$$

Якщо підставити конкретні числа, маємо:

$$(a_M)_x = -6\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2},\ (a_M)_y \approx -262.9\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2},\ (a_M)_z \approx 290.3\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$

Модуль:

$$a_M = \sqrt{(a_M)_x^2 + (a_M)_y^2 + (a_M)_z^2} \approx 391.7\,\frac{\mathrm{cm}}{s^2} \approx 39.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Спосіб II. Наведемо більш фізичний розв'язок. Розглянемо швидкості, що зображені на рис. 3.

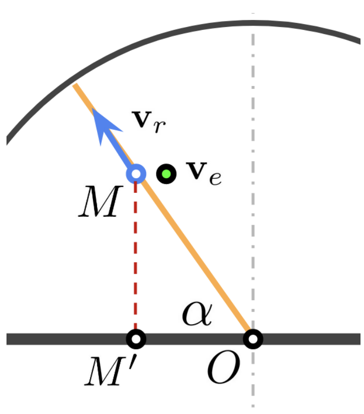

Рис. 3: Швидкості

Відносна швидкість $\mathbf{v}_r$ направлена вздовж OM і по модулю дорівнює $v_r = \dot{s}$. Переносна швидкість $\mathbf{v}_e$ направлена перпендикулярно площині малюнку і дорівнює $v_e = MM' \cdot \omega$ по модулю. З геометрії $MM' = s(t)\sin\alpha$. Таким чином, $v_e = \omega(t)s(t)\sin\alpha$. Абсолютна швидкість $\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$ і оскільки вектори $\mathbf{v}_e$ та $\mathbf{v}_r$ перпендикулярні, модуль:

$$v^2 = v_e^2 + v_r^2 = \dot{s}^2 + \omega^2 s^2 \sin^2\alpha = \dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2 s^2 \sin^2\alpha$$

Далі розрахунки такі самі, як в *Способі I*.

Перейдемо до розрахунку прискорення. Прискорення:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_K$$

де $\mathbf{a}_K$ – прискорення Коріоліса.

Ці компоненти зображені на рис. 4 ($\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$).

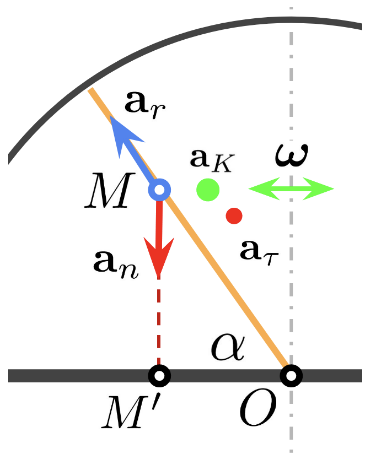

Рис. 4: Прискорення. Напрям кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ ми не визначаємо, оскільки це непринципово (а помилитися можна :)). $\mathbf{a}_K$ та $\mathbf{a}_\tau$ направлені перпендикулярно площині малюнку.

Розглянемо кожен доданок окремо. Відносне прискорення по модулю дорівнює $a_r = \ddot{s}$ і направлено вздовж OM.

Переносне прискорення дорівнює сумі доцентрового прискорення і тангенсального по колу. Доцентрове прискорення направлено вздовж MM'. Модуль доцентрового прискорення дорівнює $a_n = \omega^2 \cdot MM' = \omega^2 s \sin\alpha$, а тангенсального $a_\tau = \varepsilon \cdot MM' = \ddot{\varphi} s \sin\alpha$ і направлено перпендикулярно площині малюнку.

Нарешті, прискорення Коріоліса, за означенням, $\mathbf{a}_K = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r]$. Вектори $\boldsymbol{\omega}$ та $\mathbf{v}_r$ знаходяться в одній площині, тому вектор направлений перпендикулярно площині малюнку. Оскільки кут між векторами α, то модуль цього прискорення $a_K = 2\omega v_r \sin\alpha = 2\dot{\varphi}\dot{s}\sin\alpha$.

Тепер знайдемо векторну суму, спроектувавши все на вісі Ox', Oy', Oz' (орієнтація на рис. 2). По горизонтальній вісі маємо

$$a_x = -a_r \cos\alpha = -\ddot{s}\cos\alpha$$

По вертикальній вісі:

$$a_y = a_r \sin\alpha - a_n = \ddot{s}\sin\alpha - \dot{\varphi}^2 s\sin\alpha = (\ddot{s} - \dot{\varphi}^2 s)\sin\alpha$$

А перпендикулярно площині малюнку (можна перевірити, що a_K та a_τ сонаправлені для будь-якої орієнтації $\boldsymbol{\omega}$):

$$|a_z| = a_\tau + a_K = 2\dot{\varphi}\dot{s}\sin\alpha + \ddot{\varphi}s\sin\alpha = (2\dot{\varphi}\dot{s} + \ddot{\varphi}s)\sin\alpha$$

Таким чином, модуль:

$$a^2 = ((\ddot{s} - \dot{\varphi}^2 s)^2 + (2\dot{\varphi}\dot{s} + \ddot{\varphi}s)^2)\sin^2\alpha + \ddot{s}^2\cos^2\alpha$$

Підставляємо числа. $\ddot{s}(t_1) = 6t = 1.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $s(t_1) = 2.8\,\mathrm{m}$, $\dot{\varphi}(t_1) = 4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Тому:

$$a^2 = 1534.2 \implies a \approx 39.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$