Домашня робота з математичного аналізу #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

13 лютого 2023 р.

1 Завдання 3627.1

Дослідити на екстремум:

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

Розв'язок. Запишемо вираз для диференціалу першого порядку:

$$df = f'_x dx + f'_y dy = (8x^3 - 2x)dx + (4y^3 - 4y)dy$$

Знайдемо, для яких точок (x_0, y_0) наш диференціал дорівнює 0, для цього потрібно аби $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Маємо:

$$\begin{cases} 8x_0^3 - 2x_0 = 0 \\ 4y_0^3 - 4y_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_0(2x_0 - 1)(2x_0 + 1) = 0 \\ 4y_0(y_0 - 1)(y_0 + 1) = 0 \end{cases}$$

Перше рівняння системи має розв'язки $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$. Друге рівняння має розв'язки $y_1 = 0, y_{2,3} = \pm 1$. Множина потрібних нам точок складається з усіх можливих пар, бо 2 рівняння в системі є незалежними, виписувати їх всі поки не будемо.

Розглянемо другий диференціал. Маємо:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2 = (24x^2 - 2)dx^2 + (12y^2 - 4)dy^2$$

Табл. 1: Знаки Δ_i

Точка	Δ_1	Δ_2
$(0, 0)$	$-$	$+$
$(0, 1)$	$-$	$-$
$(0, -1)$	$-$	$-$
$(0.5, 0)$	$+$	$-$
$(0.5, 1)$	$+$	$+$
$(0.5, -1)$	$+$	$+$
$(-0.5, 0)$	$+$	$-$
$(-0.5, 1)$	$+$	$+$
$(-0.5, -1)$	$+$	$+$

Якщо позначити $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$, то маємо

$$d^2 f = \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

Додатність або від'ємну орієнтованість квадратичної форми визначають детермінанти двох мінорів цієї матриці:

$$\Delta_1(x) = 24x^2 - 2 = 2(12x^2 - 1),\ \Delta_2(x, y) = 4\Delta_1(x) \cdot (3y^2 - 1)$$

Тепер випишемо усі точки і відповідні Δ_i відповідно до таблиці 1:

Форма є додатньо визначеною у випадку, коли $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$, тобто в точках $(0.5, 1), (0.5, -1), (-0.5, 1), (-0.5, -1)$. Це відповідає точкам локального мінімуму.

Форма є від'ємно визначеною у випадку, коли $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, тобто лише у точці $(0, 0)$. Це відповідає точкці локального максимуму.

Відповідь. Точки локального мінімуму: $(0.5, 1), (0.5, -1), (-0.5, 1), (-0.5, -1)$, точки локального максимуму: $(0, 0)$.

2 Завдання 3628

Дослідити на екстремум:

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},\ x, y > 0$$

Розв'язок. Знайдемо перший диференціал:

$$df = \left(y - \frac{50}{x^2}\right) dx + \left(x - \frac{20}{y^2}\right) dy$$

Знайдемо коли $df \equiv 0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20 \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \frac{50}{x^2}$. Підставивши у друге, маємо $x \cdot \frac{2500}{x^4} = 20$, отже $x^3 = 125$, звідки $x = 5$ (оскільки $x > 0$). Отже, $y = 2$. Отже, маємо єдину стаціонарну точку $(5, 2)$.

Знайдемо другий диференціал:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 = \frac{100}{x^3} dx^2 + 2 dx dy + \frac{40}{y^3} dy^2$$

Знову ж таки позначивши $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$, отримаємо

$$d^2 f = \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

Підставимо $(x, y) = (5, 2)$:

$$d^2 f = \mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{d}$$

Бачимо, що $\Delta_1 = 0.8 > 0, \Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, а отже квадратична форма додатньо означена. Звідси випливає, що $(5, 2)$ є точкою локального мінімуму.

Відповідь: Точка $(5, 2)$ є точкою локального мінімуму.