Підготовка до колоквіуму

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

5 грудня 2023 р.

1. Комплексні числа, дії з ними, модуль, аргумент, тригонометрическая форма, нерівності з комплексними числами. Функції $\exp(z)$, $\ln z$, z^w. Комплексні $\sin z$ і $\cos z$.

Доволі зрозуміло, розписувати не буду.

2. Комплексна площина, зв'язна множина, компакт, лема про компакт та замкнену множину. Сферична метрика, сфера Рімана, нескінченність. Функції комплексної змінної, їхні властивості.

Комплексна площина – кожному комплексному числу $z = x + iy$ ставимо у відповідність точку (x, y) на декартовій площині. (див. Горіанов ст. 11).

Зв'язна множина – множина $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається зв'язною, якщо не існує двох відкритих множин G_1, G_2, що задовольняють умови:

1. $E \subset G_1 \cup G_2$
2. $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$
3. $G_1 \cap E \neq \emptyset,\ G_2 \cap E \neq \emptyset$

Компакт – будь-яка обмежена замкнена множина $K \subset \mathbb{C}$.

Лема про компакт та замкнену множину. Нехай K – компакт, F – замкнена множина на $\mathbb{C}$. Якщо $K \cap F = \emptyset$, то

$$\inf_{z \in K, w \in F} |z - w| > 0$$

Доведення. Нехай $\alpha := \inf_{z\in K, w\in F}|z-w|$. З визначення inf випливає, що існують такі послідовності $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, що $|z_n - w_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$.

Знайдемо підпослідовність $\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ таку, що $z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{z} \in K$...

Див. Лекцію 2.

Сферична метрика. Розглядаємо сферу $x^2+y^2+(w-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Кожній точці на сфері, ставимо у відповідність перетин Oxy з прямою, що проходить через цю точку та північний полюс (стереографічна проекція).

Кожній точці на площині відповідає єдина точка на сфері (сфера Рімана). Є неперервним зображенням сфери на площину.

Північному полюсу ставимо у відповідність ∞. Тому маємо відображення $\mathbb{S}$ з $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$.

Окіл нескінченності це окіл північного полюсу. Сферична відстань між точками:

$$\rho_{\mathbb{S}}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}},\ \rho_{\mathbb{S}}(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

Функції. $f : E \to \mathbb{C}, E \subset \mathbb{C}$.

Границя функції.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \forall\epsilon>0\ \exists\delta(\epsilon)>0\ \ 0<|z-a|<\delta \implies |f(z)-A|<\epsilon$$

Неперервність функції. $f(z) \in \mathcal{C}(\{z_0\})$, якщо

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta(\epsilon)>0\ |z-z_0|<\delta \implies |f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

Далі див. Горіанінов ст. 21.

3. $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$-диференційованість, умови Коші-Рімана, голоморфність. Обчислення похідних.

$\mathbb{R}$-*диференційовaність*: якщо $\operatorname{Re} f(z)$ та $\operatorname{Im} f(z)$ є обидві диференційованими.

$\mathbb{C}$-*диференційовaність*: Беремо малу зміну $\Delta f(z)$:

$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + i v'_x \Delta x + i v'_y \Delta y + \overline{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$

Якщо позначимо $u'_x + i v'_x = f'_x$ і $u'_y + i v'_y = f'_y$, то

$$\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \overline{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Враховуючи, що

$$\Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2},\ \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}$$

Таким чином,

$$\Delta f = f'_x \left(\frac{\Delta z + \Delta \overline{z}}{2} \right) + f'_y \left(\frac{\Delta z - \Delta \overline{z}}{2i} \right) + \overline{o}(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$\Delta f = \frac{\Delta z}{2}\left(f'_x - i f'_y \right) + \frac{\Delta \overline{z}}{2}\left(f'_x + i f'_y \right) = \frac{1}{2} f'_z \Delta z + \frac{1}{2} f'_{\overline{z}} \Delta \overline{z}$$

Інше визначення:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

Властивості диференціювання – такі самі, як і в звичайному математичному аналізі (див. лекцію 2, самий кінець).

Умова Коші-Рімана. Для $\mathbb{C}$-диференційованості необхідно і досить, щоб $f(z)$ була $\mathbb{R}$-диференційованою та $f'_{\overline{z}} = 0$.

Доведення. $\rightarrow$

$$\Delta f = f'_z \Delta z + f'_{\overline{z}} \Delta \overline{z} + \overline{o}(|\Delta z|)$$

Якщо $f'_{\overline{z}} = 0$, то

$$\Delta f = f'_z \Delta z + \overline{o}(|\Delta z|) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_z + \overline{o}(1)$$

Отже, f є $\mathbb{C}$-диференційованою, оскільки тоді

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \xrightarrow[z \to 0]{} f'_x - i f'_y$$

і f'_x, f'_y існують, оскільки f є $\mathbb{R}$-диференційованою.

$\leftarrow$. Якщо $f(z)$ є $\mathbb{C}$-диференційованою, то $\exists L = \alpha + i\beta : \frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \overline{o}(1)$. Тоді

$$\Delta f = A\Delta z + \overline{o}(|\Delta z|) = \underbrace{\alpha \Delta x - \beta \Delta y}_{\Delta u} + i \underbrace{(\alpha \Delta y + \beta \Delta x)}_{\Delta v} + \overline{o}(|\Delta z|)$$

Отже u, v диференційовані та

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_z + f'_{\overline{z}} \frac{\Delta \overline{z}}{\Delta z} + \overline{o}(1)$$

Ця границя існує тільки при $f'_{\overline{z}} = 0$. ■

Голоморфність. $f(z)$ є голоморфною у $\mathcal{H}$ якщо $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$.

4. Якобіан голоморфних відображень. Геометричний сенс аргументу похідної.

Геометричний сенс аргументу похідної. Див. ст. 35. Мельник. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|} = |f'(z)|$. Нехай $z(t)$ крива. Тоді, $\Delta z = z(t) - z(0), t \to 0$. $\arg \Delta z$ – кут між Δz та Ox. Тоді $\lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$ – це кут нахила дотичної.

Далі третя лекція, початок.

Якобіан. Нехай маємо Якобіан для $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\mathbf{J}_f \triangleq \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{bmatrix}$$

Є лінійним перетворенням:

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x x + u'_y y \\ -u'_y x + u'_x y \end{bmatrix} \iff (u'_x - i u'_y) z = ...$$

$\det \mathbf{J}_f = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = |u'|^2$.

5. Інтегрування функцій комплексного змінного. Зв'язок з криволінійними інтегралами I і II роду. Оцінка інтеграла.

Нехай $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ – деяка крива в $\mathbb{C}$. Довжина:

$$L(\gamma) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |z(t_i) - z(t_{i-1})|$$

де τ розбиття $\alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$. Розглянемо дві інтегральні суми:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z(\xi_i))(z(t_i) - z(t_{i-1})), \ \sum_{i=1}^{n} f(z(\xi_i))|z(t_i) - z(t_{i-1})|$$

де $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx)$$

$$\int_{\gamma} f(z)|dz| = \int_{\gamma} uds + i \int_{\gamma} vds$$

де $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$, а ds – елемент довжини. У випадку кусково-гладкої функції

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt, \ \int_{\gamma} f(z)|dz| = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))|z'(t)|dt$$

Нерівність трикутників:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| \cdot |dz|$$

Якщо $f(z)$ обмежена M, тобто $|f(z)| < M$, то

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| < M \cdot \ell(\gamma)$$

див. Мельник ст. 79.

6. Теорема Ньютона-Лейбніца. Інтеграл по замкненій кривій. Лема: інтеграл по колу від ступеня $z - a$.

Первісна – нехай $F \in \mathcal{A}(\Omega), f \in \mathcal{C}(\Omega)$. F є первісною f в області Ω, якщо

$$F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$$

Теорема Ньютона-Лейбніца. Нехай $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ – кусково-гладка крива, шлях E_γ якої належить Ω. Якщо $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ і має первісну Ψ уздовж γ, тоді

$$\int_\gamma f(z)dz = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha)$$

Доведення. Нехай γ лежить в колі $K \subset \Omega$, в якому існує первісна F функції f. Тоді суперпозиція $F \circ \gamma(t)$ – первісна функції f вздовж γ, тому

$$\Psi(t) = F \circ \gamma(t) + C$$

Оскільки $F' = f$ у K і γ – гладка крива, то $\dot{\Psi}(t) = \dot{F}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$, тому

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_{[\alpha,\beta]} \dot{\Psi}(t)dt = \Psi(\alpha) - \Psi(\beta)$$

Якщо немає такого кола K, то ділимо $\gamma = \bigcup_m \gamma_m$, де $\gamma_m \subset K_m$ – коло $K_m \subset \Omega$.

Інтеграл по замкненій кривій. Нехай f та f' – аналітичні в $\mathcal{D}$. Тоді

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 0$$

Доведення. Скористаємося теоремою Гріна. Якщо $P(x,y), Q(x,y)$ неперервно диференційовані в $\mathcal{D}$, то

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Нехай $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, тоді

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = \oint_{\partial\mathcal{D}} (udx - vdy) + i\oint_{\partial\mathcal{D}} (vdx + udy)$$

Отже:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\oint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

За теоремою Коші-Рімана, обидва інтеграли нульові.

Лема. Інтеграл по колу від ступеня $z - a$.

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^n = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Доведення. Якщо $n \neq -1$, тоді первісна від $(z-a)^n$ дорівнює $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$, тому інтеграл по замкненому шляху 0. Для $n = -1$ вводимо параметризацію $z(t) = a + re^{2\pi it}$ для $t \in [0, 1]$ і тоді:

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} = \int_{[0,1]} \frac{1}{re^{2\pi it}} \cdot 2\pi i r e^{2\pi it} = 2\pi i$$

7. Теорема Коші. $\mathcal{D}$ однозв'язна, $f(z)$ голоморфна в $\mathcal{D}$, тоді

$$\oint_L f(z)dz = 0$$

Доведення. Будемо вважати, що $f'(z)$ – неперервна. Тоді вона випливає з формули Гріна (див. попередній пункт).

8. Випадок, коли невідомо про неперервність похідної. Випадок трикутника. Загальний випадок.

Лема. Нехай f голоморфна в Ω. Тоді для довільного трикутника Δ, який разом зі своїм замиканням належить Ω $(\Delta \subset \Omega)$, маємо

$$\int_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$$

де $\partial^+\Delta$ – позитивно орієнтована сторона трикутника. Див. ст. 80 Мельник.

9. Теорема Коші для функцій, безперервних аж до кордону і для багатозв'язної області.

10. Інтегральна формула Коши.

Нехай $f(z)$ аналітична на $\mathcal{D}$, $z \in \mathcal{D}$, тоді

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Малюємо коло K_r радіусу r навколо z достатньо маленьке так, що $K_r \subset \mathcal{D}$. Оскільки $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ аналітично в $\mathcal{D} \setminus K_r$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z)}{2\pi i} \oint_{K_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Останній інтеграл дорівнює $f(z)$. Покажемо, що перший 0. Отже

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists(\delta) > 0 \; |\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$$

Обиражмо $r < \delta$, тоді

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{K_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{K_r} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |d\zeta| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi r} \oint_{K_r} |d\zeta| = \frac{\epsilon}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \epsilon \; \blacksquare \end{aligned}$$

11. Гармонійні функції та їх зв'язок з голоморфними.

Функція $u(x, y)$ гармонійна, якщо $u \in \mathcal{C}^2$ та $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$ (або просто $\Delta u = 0$).

Теорема 1. f голоморфна, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, тоді u гармонійна (див. лекцію 5).

Доведення.

$$u''_{x^2} = (u'_x)'_x = (v'_y)'_x = (v'_x)'_y = (-u'_y)'_y = -u''_{y^2}$$

Теорема 2. $u(x,y)$ гармонійна в однозв'язній $\mathcal{D}$. Існує $v(x,y)$ спряжена гармонійна така, що $u(x,y)+iv(x,y)$ голоморфна в $\mathcal{D}$, причому $v(x,y)$ визначена до сталої.

Доведення. Візьмемо

$$v(x,y) := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy$$

Не має залежити від шляху. Є, оскільки умова $P'_y = Q'_x$ для $\int P dx + Q dy$.

Єдиність – легко доводиться.

12. Формула для похідних. Диференційовність похідних.

Наслідок інтегральної теореми Коші. За інтегральною умовою Коші за відповідними умовами для f:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Справедливо також наступне:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

Доведення. Доведемо, що $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$. Далі довести можна за індукцією. Позначимо $\eta := \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$\begin{aligned}\eta = \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) \frac{1}{\Delta z} \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}\end{aligned}$$

Тоді

$$\eta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{\Delta z}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}$$

Помітимо тут тепер, що $|\zeta - z| \geq \mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{D})$. Так само

$$|\zeta - z - \Delta z| \geq \mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{D}) - |\Delta z| \geq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{D})$$

Отже

$$\left|\eta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\zeta\in\partial\mathcal{D}}|f(\zeta)|}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{dist}^3(z, \partial\mathcal{D})} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

13. Теорема Морери.

Зворотня до теореми Коші.

Теорема. Нехай $f(z) \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ і $\oint_L f(z)dz = 0$, тоді $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$.

Доведення. По-перше, $\int_a^b f(z)dz$ не залежить від обраного шляху. Дійсно, нехай є два шляхи L_1, L_2 від a до b. В такому разі

$$\int_{L_1} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{-L_2} f(z)dz = \int_{L_1 - L_2} f(z)dz = 0,$$

оскільки $L_1 - L_2$ є замкненою кривою. Отже, $\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz \ \forall L_1, L_2$.

Розглянемо функцію $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta$. Розглядаємо $\eta := \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$

$$\eta = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_a^{z+\Delta z} - \int_a^z\right) f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Розглядаємо

$$\eta - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{[z, z+\Delta z]} (f(\zeta) - f(z))d\zeta$$

Причому,

$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{[z,z+\Delta z]}(f(\zeta) - f(z))d\zeta\right| \leq |\Delta z|^{-1} \cdot \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |\Delta z|$$
$$= \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$$

Отже, $|\eta - f(z)| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$, отже $F'(z) = f(z)$, тому $f(z)$ теж голоморфна.

14. Формули для середнього значення.

Теорема. Нехай $f(z)$ голоморфний у крузі $\mathcal{U}_r(a)$. Тоді

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Доведення. Використовуємо інтегральну формулу Коші:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a}$$

Підставляємо $\zeta = a + re^{i\theta}$, тоді $\dot{\zeta} = rie^{i\theta}$, тому

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Теорема.

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{U}_R(a)} f(x, y) dx dy$$

Доведення. Нехай $x = \operatorname{Re} a + r\cos\theta, y = \operatorname{Im} a + r\sin\theta$. Тоді $r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]$. Тому

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{\mathcal{U}_R(a)} f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r \int_0^{2\pi} f(\operatorname{Re} a + r\cos\theta + (\operatorname{Im} a + r\sin\theta) i) d\theta dr$$
$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta dr = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r f(a) 2\pi dr = f(a)$$

15. Теорема Вейєрштрасса. Степеневі ряди.

$\mathcal{H}(D)$ – голоморфні на D. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до f, якщо

$$\forall K \subset D : \ K \text{ – компакт } f_n(z) \rightrightarrows f(z) \text{ на } K$$

Теорема Вейєрштрасса. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_K f(z)$. Причому $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$.
Тоді:

1. $f(z)$ голоморфна в D.
2. $\forall p \in \mathbb{N} : f_n^{(p)} \to f^{(p)}$

Доведення.

Пункт 1. Розглянемо

$$\oint_\gamma f_n(z)dz - \oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma (f_n(z) - f(z))dz$$

γ – компакт, оскільки замкнута обмежена множина. Тому $f_n \rightrightarrows f$ на γ. Візьмемо модуль:

$$\left|\oint_\gamma (f_n(z) - f(z))dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f_n(z) - f(z)|\ell_\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тому $\oint_\gamma f(z)dz = 0$, оскільки $\oint_\gamma f_n(z)dz = 0$, а отже $f(z)$ неперервна на кожному компакті D, а отже і на D.

Пункт 2.

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}$$

Візьмемо $\overline{B(z^0, r)} \subset D,\ z \in B(z^0, \frac{r}{2})$

$$f_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}$$

Візьмемо різницю:

$$f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z^0| = r} \frac{(f(\zeta) - f_n(\zeta))d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}$$

Розглядаємо модуль:

$$|f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z)| \leq \frac{p!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{\max_{|\zeta - z^0| = r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{\left(\frac{r}{2}\right)^{p+1}}$$

Тут ми скористалися тим, що $|\zeta - z| \geq |\zeta - z^0| + |z^0 - z| \geq \frac{r}{2}$. Отже,

$$|f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z)| \leq \frac{p! \cdot 2^{p+1}}{r^p} \max_{|\zeta - z^0| = r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Отже $f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z) \rightrightarrows 0$, тобто

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\epsilon : \max_{z \in B(z^0, r/2)} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

Беремо $K \subset D$. Існує скінченна кількість $B(z^j, r^j/2), j \in \{1, \ldots, N\}$ такі, що $K \subset \bigcup B(z^j, r^j/2)$.

Якщо ж візьмемо $n \geq \max_j n_j$, то отримаємо цю нерівність для усіх точок $z \in K$.

Наслідок. Нехай $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$. Нехай $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ збігається рівномірно на $\mathcal{H}(D)$. Тоді $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{H}(D)$ та $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)} \rightrightarrows \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)\right)^{(p)}$.

Доведення. Розглядаємо

$$g_N(z) := \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

А далі використовується теорема Вейєрштрасса.

Визначення. Степеневий ряд це

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-a)^n$$

Теорема. Якщо позначимо $R := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n}}$, то якщо взяти $|z - a| \leq r < R$, то ряд збігається рівномірно, інакше розбігається.

16. Теорема про розклад голоморфної функції в ряд Тейлора.

Теорема. Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ і $B(a, r) \subset D$. Тоді

1. $\exists \{c_n\}_{n=0}^{\infty} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ в $B(a, r)$

2. $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

3. $r_{\text{збіжності}} > r$

Доведення. Візьмемо $\rho < r$. $f(z) \in \mathcal{H}(B(a,\rho)) \cap \mathcal{C}(B(a,\rho))$. Тоді:

$$z \in B(a,\rho) : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Помітимо, що

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}$$

Тому

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \text{ збігається рівномірно по } \zeta \text{ якщо } \zeta \in \partial B(a,\rho)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,\rho)} d\zeta f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint_{\partial B(a,\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi i f^{(n)}}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-a)^n \end{aligned}$$

Отже, пункти 1 та 2 вже довели.

Доводимо 3 від протилежного. Нехай $r_{\text{збіжності}} \leq r$. Візьмемо $r_{\text{зб}} < |z-a| < r$. Якщо взяти $|z-a| < r$ збігається у точці z, але розбігається при $|z-a| > r_{\text{зб}}$. Протиріччя.

17. Наслідки Теореми про розклад. Нерівність Коші. Теорема Ліувілля.

Нерівність Коші. Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(B(a,r))$, причому $|f(z)| \leq M$. Тоді:

$$|c_n| \leq \frac{M}{2^n}$$

Доведення. Маємо формулу

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(a,\rho)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Оцінюємо:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho \cdot \frac{\max|f(z)|}{\rho^{n+1}} \leq \frac{M}{\rho^n},\ \rho\to r$$

Теорема Ліувілля. Нехай $f(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ і $|f(z)|\leq M$. Тоді $f\equiv \text{const}$.

Доведення. Розкладаємо $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

З нерівності Коші, $|c_n|\leq \frac{M}{\rho^n}$. Спрямовуємо $\rho\to\infty$. Для $n\neq 0$ маємо

$$|c_n|\leq \frac{M}{\rho^n}\xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0 \implies c_n\equiv 0\ \forall n>0$$

Отже $f(z)=c_0=\text{const}$.

Теорема.

1. $\varlimsup_{r\to\infty}\max_{|z|=r}|f(z)|<\infty \implies f(z)\equiv\text{const}$.

2. $\exists\alpha : \varlimsup_{r\to\infty}\max_{|z|=r}|f(z)|\cdot\frac{1}{z^\alpha}<\infty \implies f(z)$ поліном $P(z)$, $\deg P(z)\leq[\alpha]$.

Доведення. Так само як попередній приклад.

18. Теорема єдності. Аналітичне продовження.

Перша теорема єдності. Якщо $f(z)\in\mathcal{H}(D)$, $a\in D$, $f^{(n)}(a)=0\ \forall n \implies f(z)\equiv 0$

Доведення. Нехай $A=\{z\in D : \exists k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ f^{(k)}(z)\neq 0\}$ та $D\setminus A=\{z\in D: f^{(k)}(z)=0\ \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$.

D – зв'язна, тоді якщо доведемо, що A – відкрита, то або A порожня, або $D\setminus A$ порожня. Але $D\setminus A$ непорожня, тому A порожня, що буде означати, що $f(z)\equiv 0$.

Якщо ж $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ і $f^{(k)}$ неперервна, то $f^{(k)}(z) \neq 0$ в околі z_0. Тобто A – відкрита.

$D \backslash A$ також відкрита. Беремо $z_0 \in D \backslash A$ і розкладаємо в ряд: $\exists B(z_0, r) \subset D : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0$. А якщо $f(z) \equiv 0$ в деякому околі, то і похідні теж будуть нулями.

Нулі $f(z)$? Нехай $f(z)$ голоморфна в околі a.

Визначення. $f(z)$ має нуль кратності k в a, якщо $f(z) = (z-a)^k g(z)$ в околі a, причому $g(a) \neq 0, g(a) \in \mathcal{H}(\text{окіл } a)$.

Тобто $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,\ \ b_0 \neq 0.\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n,\ c_m = b_{m-k}$.

Тому

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)(z-a)^m}{m!},\ c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

Тобто $f^{(m)}(a) = 0$ для $m = 0, \ldots, k-1$.

Друга форма єдності. Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(D)$, $f(z) = 0$, $O \subset D$, O – відкрита. Тоді $f(z) = 0$ в D – форма першої теореми єдності.

Третя форма єдності. Нехай $f, g \in \mathcal{H}(D)$ і $f \equiv g$ на $O \subset D$. Тоді $f \equiv g$ на D.

Аналітичне продовження.

Визначення. Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Беремо $D \subset D_1$. І беремо $F(z) \in \mathcal{H}(D_1)$. $F(z)$ є аналітичним продовженням $f(z)$ на область D_1 якщо $f(z) = F(z)$ в D.

Теорема. Якщо продовження існує, то воно єдине!

Доведення. Нехай маємо два продовження F_1, F_2, але вони збігаються на D, а отже збігаються і на D тотожньо. Тому $F_1 \equiv F_2$.

Приклад. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ та $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

19. Нулі голоморфних функцій. Принцип несгущованості нулів.

Принцип несгущованості нулів (друга теорема єдності). Нехай $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ та $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to a \in D,\ f(z_n) = 0 \implies f(z) = 0$.

Доведення. Мусимо довести, що $f^{(n)}(a) = 0\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Від противного. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Причому $c_0 = 0$, оскільки $c_0 = f(a) = 0,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Беремо $k = \min\{n : c_n \neq 0\}$ – кратність нуля в точці a. Тоді

$$f(z) = (z-a)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n}_{=g(z)}$$

Тоді $g(a) = c_k \neq 0$ і $g(z) \neq 0$ в околі a.

$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k g(z_n)$. Протиріччя, оскільки $g(z_n) \neq 0, (z_n - a)^k \neq 0$, а $f(z_n) = 0$.

20. Принцип максімуму модуля для гармонійних та голоморфних функцій.

Теорема.

1. Якщо $u(z)$ гармонічна в D та $u(z) \not\equiv \text{const}$, тоді

$$\inf_{\zeta\in D} u(\zeta) < u(z) < \sup_{\zeta\in D} u(\zeta)$$

2. $f(z) \in \mathcal{H}(D)$, причому $f \not\equiv \text{const}$. Тоді

$$|f(z)| < \sup_{\zeta\in D} |f(\zeta)|\ \forall z \in D$$

Доведення.

Доведення правої частини для гармонійних функцій. Нехай $M := \sup_{\zeta\in D} u(\zeta)$. Розглянемо дві множини: $A = \{z \in D : u(z) = M\}$ та $D \setminus A = \{z \in D : u(z) < M\}$.

Легше почати з $D \setminus A$. Оскільки функція гармонійна, то вона неперервна, а отже якщо в деякій точці $u(z) < M$, то так само буде і для деякого її околу.

Залишилось довести відкритість A. Нехай $z_0 \in A$. Розглянемо $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. Маємо

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z_0,r)} u(z)dxdy$$

Випадок 1. $B(z_0, r) \subset A$, тоді A відкрите.

Випадок 2. $\exists z_1 \in B(z_0, r) \wedge z_1 \notin A$. Отже, $u(z_1) < M - \epsilon$. Отже

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z_0,r) \setminus B(z,\rho)} u(z)dxdy + \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z,\rho)} u(z)dxdy \\ &\le \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z_0,r) \setminus B(z,\rho)} M dxdy + \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z,\rho)} (M - \epsilon)dxdy \\ &= \frac{M(\pi r^2 - \pi \rho^2)}{\pi r^2} + \frac{(M-\epsilon)\pi\rho^2}{\pi r^2} = M - \frac{\epsilon \rho^2}{r^2} < M \end{aligned}$$

2. Для голоморфних. Доведемо від протилежного. Нехай $\exists z_0 : |f(z_0)| = M = \sup_D |f(\zeta)|$, тому $f(z_0) = Me^{i\alpha}$.

Розглядаємо $g(z) = f(z)e^{-i\alpha}$. Тоді $g(z_0) = M$.

$\operatorname{Re} g(z_0)$ гармонійна, $\operatorname{Re} g(z) \le M,\ g(z_0) = M$. Отже $g(z) \equiv \text{const}$, тоді за умовою Коші-Рімана $g(z) \equiv \text{const},\ f(z) \equiv \text{const}$, протиріччя умові.

21. Наслідки принципу максимуму модуля: Варіант теореми Вейерштрасса, лема Шварца.

Головний наслідок. $f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, D – обмежена область.

$$|f(z)| \le \max_{\partial D} |f(\zeta)|$$

Доведення. Розглядаємо $|f(z)|$ – неперервна на $\overline{D}$, тобто десь досягає максимума в точці z_0. Причому $z_0 \in \partial D$, оскільки не належить D.

Теорема Вейерштрасса в іншій формі.

Нехай $f_n(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$, D обмежена, $f_n \rightrightarrows \varphi$ на ∂D. Тоді

$$\exists f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \overline{C}(\overline{D}) : f(z) \rightrightarrows \varphi \text{ в } \overline{D}$$

Доведення. Маємо

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \max_{\partial D} |f_n(z) - f_m(z)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Звідки $f_n \rightrightarrows f \in \mathcal{C}(\overline{D})$. Звідси одразу випливає те, що доводили.

Лема Шварца. $f(z) \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ та $|f(z)| < 1$ та $f(0) = 0$. Звідси випливає

$$|f(z)| \le |z|$$

Якщо ж $\exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = z_0$, то $f(z) = e^{i\gamma} z,\ \gamma \in \mathbb{R}$

Відповідь. Розглядаємо

$$g(z) := \frac{f(z)}{z}$$

Розглядаємо ряд Тейлра:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Помічаємо, що $c_0 = f(0) = 0$, тому

$$g(z) = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + \dots}{z} = c_1 + c_2 z + \dots$$

Отже $g(z)$ є аналітичним продовженням $f(z)$ з $0 < |z| < 1$ на $|z| < 1$ і є голоморфною на $|z| < 1$.

Розглядаємо $|z| \le r < 1$. Маємо

$$|g(z)| \le \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}$$

Гранично переходимо до $r \to 1$, маємо

$$|g(z)| < 1$$

Якщо ж $|g(z_0)| = 1$, то $|g(z_0)| \equiv \text{const}$, то $g(z) = ze^{i\gamma}, \gamma \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} < 1 \implies |f(z)| < |z| \blacksquare$$

22. Ряд Лорана, теорема про розкладання голоморфної функції в ряд Лорана. Єдність.

Означення. Ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

Введемо $w = (z-a)^{-1}$, тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$$

Теорема. $f(z) \in \mathcal{H}(r < |z-a| < R)$, тоді

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

причому c_n визначаються однозначно.

Доведення. Візьмемо r', R' так, щоб $r' < |z-a| < R'$. Фіксуємо z в цьому кільці. Застосовуємо інтегральну формулу Коші для $r' < |z-a| < R'$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial(r'<|z-a|<R')} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=R'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Тепер помітимо те, що

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}
\end{aligned}
$$