Контрольна робота 2 з курсу "Дискретна теорія ймовірності"

Студента групи МП-31 Захарова Дмитра Олеговича

7 грудня 2023 р.

Варіант 3.

Завдання.

Умова. Випадкова величина ξ приймає значення $0, 2, -1, 1$ з ймовірностями $0.1, 0.2, 0.3, a$ відповідно. Знайти значення параметра a, функцію розподілу випадкової величини ξ та побудувати її графік. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ, а також ймовірності $\mathbb{P}(0 \leq \xi \leq 2), \mathbb{P}(0 < \xi < 2)$.

Розв'язання. Позначимо $\mathcal{X} = \{0, 2, -1, 1\}$ – набір усіх можливих значень випадкової величини. Щоб дискретний розподіл ймовірностней $\mathbb{P}(\xi = k)$ був коректно визначено, повинно виконуватись

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(\xi = x) = 1$$

Отже маємо:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = -1) + \mathbb{P}(\xi = 1) = 1$$
$$\implies 0.1 + 0.2 + 0.3 + a = 1.0 \implies \boxed{a = 0.4}$$

Тепер знайдемо функцію розподілу $F_\xi(x)$. Якщо ми розташуємо елементи $x_1, x_2, \ldots, x_N$ множини $\mathcal{X}$ у зростаючому порядку з відповідними ймовірностями $p_1, \ldots, p_N$ (тобто $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$), то отримаємо функцію розподілу:

$$F_\xi(x) \triangleq \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \sum_{i=1}^{k} p_i, & x_k < x \le x_{k+1},\ k \in \{1, \dots, N-1\} \\ 1, & x > x_N \end{cases}$$

Отже, підставляємо:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0.3, & -1 < x \le 0 \\ 0.4, & 0 < x \le 1 \\ 0.8, & 1 < x \le 2 \\ 1.0, & x > 2 \end{cases}$$

Графік цього розподілу зображено на рис. 1.

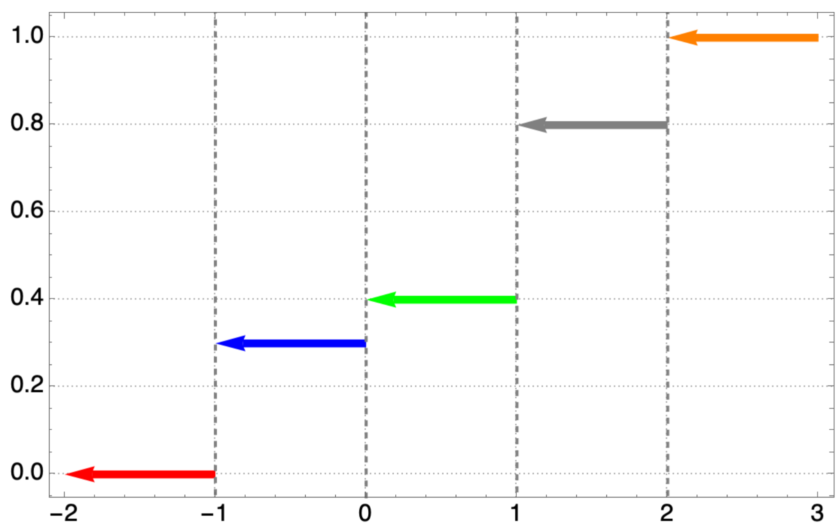

Рис. 1: Графік функції F_ξ розподілу випадкової величини ξ

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію. За означенням, математичне сподівання:

$$\mathbb{E}[\xi] \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot \mathbb{P}(\xi = x)$$

$$= 0 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + (-1) \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 = 0.4 - 0.3 + 0.4 = 0.5$$

Для знаходження дисперсії знайдемо $\mathbb{E}[\xi^2]$. Скористаємося тим фактом, що $\mathbb{E}[f(\xi)] = \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x)\mathbb{P}(\xi = x)$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi^2] = \sum_{x\in\mathcal{X}} x^2 \cdot \mathbb{P}(\xi = x) &= 0^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + (-1)^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.4 \\ &= 0.8 + 0.3 + 0.4 = 1.5\end{aligned}$$

Отже, дисперсію можна знайти за формулою

$$\mathrm{Var}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 = 1.5 - 0.5^2 = 1.25$$

Нарешті, знайдемо ймовірності з умови. Маємо:

$$\mathbb{P}(0 \le \xi \le 2) = \sum_{x\in\mathcal{X}:0\le x\le 2} \mathbb{P}(\xi = x) = \mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) + \mathbb{P}(\xi = 2) = 0.7$$

$$\mathbb{P}(0 < \xi < 2) = \sum_{x\in\mathcal{X}:0<x<2} \mathbb{P}(\xi = x) = \mathbb{P}(\xi = 1) = 0.4$$

Відповідь.

1. $a = 0.4$;
2. F_ξ див. у розв'язанні;
3. $\mathbb{E}[\xi] = 0.5$;
4. $\mathrm{Var}[\xi] = 1.25$;
5. $\mathbb{P}(0 \le \xi \le 2) = 0.7$;
6. $\mathbb{P}(0 < \xi < 2) = 0.4$.