Домашня робота з курсу "Теорія Ймовірності"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Пивний завод відправив у магазин $n = 400$ ящиків пива. Імовірність того, що ящик буде розбитий при транспортуванні в даних умовах, що дорівнює $\theta = 0.005$. Після приїзду в магазин експедитор, який перевозив вантаж, заявив, що $m = 7$ ящиків із пивом були розбиті під час транспортування. Розмірковуючи, чи можна довіряти експедитору, директор магазину хоче знайти можливість розбити m ящиків, ймовірність розбити не менше m ящиків, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості ящиків ξ, розбитих під час транспортування, щоб оцінити можливість втрат, заявлених експедитором. Знайти вказані величини.

Розв'язок. Кількість розбитих ящиків розглядаємо як випадкову величину ξ. Ця величина має біноміальний розподіл, тобто $\xi \sim \text{Bin}(n, \theta)$ (маємо спостереження, в яких з ймовірністю θ відбудеться деяка подія, а з ймовірністю $1 - \theta$ – ні). Згідно означенню біноміального розподілу, маємо:

$$p(\xi = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

Таким чином, можемо відповісти на питання з якою ймовірністю було розбито $m = 7$ ящиків:

$$p(\xi = 7) = C_{400}^7 \times (0.005)^7 \times (1 - 0.005)^{400-7} \approx 0.00336$$

Ймовірність розбити не менше m ящиків це $p(\xi \geq m)$. З іншого боку:

$$p(\xi \geq m) = 1 - p(\xi < m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} p(\xi = k)$$

Отже, підставляємо у формулу:

$$p(\xi \geq 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} p(\xi = k) \approx 0.00441$$

Нарешті, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулами біноміального розподілу:

$$\mathbb{E}[\xi] = n\theta = 2$$

$$\mathrm{Var}[\xi] = n\theta(1-\theta) = 1.99, \ \sigma[\xi] = \sqrt{\mathrm{Var}[\xi]} \approx 1.41$$

Отже, бачимо, що 7 ящиків наврядше могло бути розбито.

Завдання 2.

Умова. До банку надійшло $n = 4000$ пакетів грошових знаків. Імовірність того, що пакет містить недостатню чи надмірну кількість грошових знаків, що дорівнює $\theta = 0.0001$. Знайти:

1. ймовірність того, що під час перевірки буде виявлено хоча б один помилково укомплектований пакет;
2. ймовірність того, що під час перевірки буде виявлено не більше трьох помилково укомплектованих пакетів;
3. математичне сподівання та дисперсію числа помилково укомплектованих пакетів.

Розв'язок. Нехай ξ – число помилково укомплектованих пакетів. Як і в минулій задачі, $\xi \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$, тобто

$$p(\xi = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

Пункт 1. Потрібно знайти $p(\xi \geq 1)$. Легше записати це значення як

$$p(\xi \geq 1) = 1 - p(\xi = 0) = 1 - (1-\theta)^n \approx 0.33$$

Пункт 2. Потрібно знайти $p(\xi \leq 3)$. Легше це записати як

$$p(\xi \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} p(\xi = k) \approx 0.9992$$

Пункт 3. Як і в минулій задачі:

$$\mathbb{E}[\xi] = n\theta = 0.4, \ \mathrm{Var}[\xi] = n\theta(1-\theta) = 0.39996$$

Завдання 3.

Умова. Для просування своєї продукції ринку фірма розкладає по поштовим скринькам рекламні листки. Колишній досвід роботи фірми показує, що приблизно в одному випадку з $m = 2000$ приходить замовлення. Знайти ймовірність того, що при розміщенні $n = 10000$ рекламних листків надійде хоча б одне замовлення, середню кількість замовлень, що надійшли, і дисперсію числа замовлень, що надійшли.

Розв'язок. Розглядаємо випадкову величину ξ_N – кількість замовлень, якщо дана кількість рекламних листків N.

Розглянемо наступну математичну модель: нехай з деякою ймовірністю θ людина, побачивши рекламний листок, зробить замовлення. Тоді ξ буде відповідати біноміальному розподілу: $\xi \sim \mathrm{Bin}(N, \theta)$.

Те, що приблизно в одному випадку з $m = 2000$ приходить замовлення, можна інтерпретувати так: математичне сподівання ξ при $m = 2000$ дорівнює 1. Оскільки математичне сподівання можна виразити як $\mathbb{E}[\xi_N] = \theta N$, то з рівняння $\mathbb{E}[\xi_m] = \theta \cdot m$ отримуємо $\theta = \frac{1}{m}$.

Отже, якщо розглянемо $n = 10000$ рекламних листків, то маємо розподіл:

$$p(\xi_n = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

За умовою треба знайти $p(\xi_n \geq 1)$, $\mathbb{E}[\xi_n]$ та $\mathrm{Var}[\xi_n]$. Отже:

$$p(\xi_n \geq 1) = 1 - p(\xi_n = 0) = 1 - (1 - 1/m)^n \approx 0.9933$$

$$\mathbb{E}[\xi_n] = n\theta = \frac{n}{m} = 5$$

$$\mathrm{Var}[\xi_n] = n\theta(1-\theta) = \frac{n}{m}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \approx 4.9975$$

Завдання 4.

Умова. Гральний кубик підкидують до тих пір, поки не випаде шістка. Знайти математичне сподівання та дисперсію числа підкидань.

Розв'язок. Розглядаємо випадкову величину ξ – число підкидань, поки не випала шістка. Перед нами геометричний розподіл $\xi \sim G(\theta)$ де $\theta = \frac{1}{6}$, який має вигляд:

$$p(\xi = k) = (1-\theta)^{k-1}\theta$$

Математичне сподівання геометричного розподілу:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{\theta} = 6$$

Дисперсія:

$$\mathrm{Var}[\xi] = \frac{1-\theta}{\theta^2} = 30$$

Завдання 5.

Умова. Кинуто 3 розрізні гральні кубики. Знайти таблицю розподілу випадкової величини – числа кубиків, на яких випаде шістка. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язок. Маємо біноміальний розподіл $\xi \sim \mathrm{Bin}\left(3, \frac{1}{6}\right)$, тобто:

$$p(\xi = k) = C_3^k \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$

Конкретні значення:

$$p(\xi = 0) \approx 0.58,\ p(\xi = 1) \approx 0.35$$

$$p(\xi = 2) \approx 0.07,\ p(\xi = 3) \approx 0.005$$

Математичне очікування:

$$\mathbb{E}[\xi] = 3 \cdot \frac{1}{6} = 0.5$$

Дисперсія:

$$\text{Var}[\xi] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$

Завдання 6.

Умова. В урні 4 білих та 4 чорних кулі. З неї навмання витягують 3 кулі. Побудувати таблицю розподілу випадкової величини ξ – числа білих куль, які витягнуто з урни. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язок. Вибрати 3 кулі з 8 можна C_8^3 способами. Вибрати 0 білих куль – це кількість способів вибрати 3 кулі з 4 чорних, тобто C_4^3. Ітого:

$$p(\xi = 0) = \frac{C_4^3}{C_8^3}$$

Вибрати 1 білу кулю означає знайти кількість способів взяти 1 білу кулю з 4, тобто C_4^1, помножити на кількість способів вибрати 2 чорні кулі з 4, тобто C_4^2. Ітого:

$$p(\xi = 1) = \frac{C_4^2 C_4^1}{C_8^3}$$

По аналогії можемо отримати:

$$p(\xi = k) = \frac{C_4^{3-k} C_4^k}{C_8^3},\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Математичне сподівання цієї величини:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{C_8^3} \sum_{k=0}^{3} k C_4^k C_4^{3-k} = 1.5$$

Математичне сподівання квадрату величини:

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \frac{1}{C_8^3} \sum_{k=0}^{3} k^2 C_4^k C_4^{3-k} \approx 2.79$$

Дисперсія:

$$\mathrm{Var}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 \approx 0.536$$

Завдання 7.

Умова. Навести приклад дискретної випадкової величини, яка має математичне сподівання та не має дисперсію.

Розв'язок. Оскільки дисперсія може бути знайдена за допомогою формули

$$\mathrm{Var}[\xi] \triangleq \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2$$

і $\mathbb{E}[\xi]$ існує, то достатньо підібрати таку випадкову величину, щоб $\mathbb{E}[\xi^2]$ не існувало.

Окрім того, $\xi(\Omega)$ має бути зліченною, оскільки для скінченних $\xi(\Omega)$ математичне сподівання ξ^2 завжди існує.

Отже, треба знайти, коли:

$$\exists\, \mathbb{E}[\xi] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = x_k) x_k \text{ та}$$

$$\nexists\, \mathbb{E}[\xi^2] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = x_k) x_k^2$$

$$\text{таке, що } \sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = x_k) = 1$$

де $\xi(\Omega) := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – можливі значення випадкової величини.

Покажемо, що при розподілі $p(\xi = x_k) = 2^{-k}$ з можливими значеннями випадкової величини $x_k = (3/2)^k$ виконується умова.

Дійсно, $\sum_{k=1}^{\infty} p(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Знаходимо математичні сподівання:

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot 2^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k \ln 3} \cdot e^{-2k \ln 2} =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{k(\ln 3 - 2\ln 2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 < +\infty$$

Що стосується математичного сподівання квадрату:

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^k \cdot 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^k$$

Цей ряд не збігається, оскільки це нескінченна геометрична прогресія зі знаменником більшим на 1.

Отже, розподіл визначено коректно, $\mathbb{E}[\xi]$ визначено, а $\mathbb{E}[\xi^2]$ не визначено, звідки випливає і невизначенність $\mathrm{Var}[\xi]$.