🧮

Homework #1

Задача 151

Разложить в произведение транспозиций, найти количество инверсий, определить знак перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Для начала разложим перестановку в произведение транспозиций:

$$(1,2,3,4,5) \xrightarrow{(1,4)} (4,2,3,1,5) \xrightarrow{(1,2)} (4,1,3,2,5) \xrightarrow{(3,5)} (4,1,5,2,3)$$

Таким образом, если считать, что $\pi_1 \circ \pi_2(i) = \pi_1(\pi_2(i))$:

$$\sigma = (3,5)(1,2)(1,4)$$

Всего в этой перестановке 5 инверсий:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Поэтому $\mathrm{Inv}(\sigma) = 5 \implies \mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} = -1.$

Задача 170

Разложить перестановку в произведение независимых циклов:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Пусть:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда $\pi_1 \circ \pi_2$:

$$\sigma = \pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & \downarrow\pi_2 & & \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & & \downarrow\pi_1 & & \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что в этой перестановке два цикла:

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 1$$

$$2 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2$$

Таким образом:

$$\sigma = (1,3)(2,5,4)$$

Задача 154

Разложить перестановку в произведение независимых циклов:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение. Заметим, что тут всего 3 независимых цикла:

$$1 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 1$$

$$2 \xrightarrow{\sigma} 8 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 2$$

$$3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 3$$

Таким образом:

$$\sigma = (1,5)(2,8,6,4)(3,9,7)$$

Задача 176

Найти A^{100}, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение. Заметим, что любую перестановку A мы можем единственным образом разложить в произведение независимых циклов. Пусть мы получили циклы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. Тогда если $A = \mu_1\mu_2\ldots\mu_k$, то также справедливо $A^n = \mu_1^n\mu_2^n\ldots\mu_k^n$. Поэтому разложим A в произведение независимых циклов:

$$A = (1,3,4)(2,5,7)(6,10,8) = \mu_1\mu_2\mu_3$$

Тут $\mu_1 = (1,3,4), \mu_2 = (2,5,7), \mu_3 = (6,10,8)$. Далее найдём отдельно $\mu_1^{100}, \mu_2^{100}, \mu_3^{100}$.

Заметим такой факт: пусть цикл $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$, где $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Тогда $\mu^k = E$, где $E = (1, 2, \ldots, m_k)$. Объясняется это тем, что сделав k “сдвижек” по циклу, мы вернёмся к первоначальной перестановке. Таким образом, если нам нужно возвести μ в степень n, то мы можем воспользоваться тем фактом, что: $\mu^n = \mu^{n \bmod k}$. Таким образом:

$$\mu_1^{100} = \mu_1,\ \mu_2^{100} = \mu_2,\ \mu_3^{100} = \mu_3$$

Поэтому:

$$A^{100} = \mu_1^{100}\mu_2^{100}\mu_3^{100} = \mu_1\mu_2\mu_3 = A$$

Таким образом, $A^{100} = A$.