Комплексний Аналіз

Весняний семестр 2024

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Гиря Н.П.*

Домашня робота 1

§ Обчислення лишків. Варіант 5 §

Задача 1:

Умова. Обчислити лишки в усіх ізольованих особливих точках, в тому числі при $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{z+4}{z-6}$$

Розв'язання. Тут маємо лише дві особливі точки: $z = 6$ – полюс першого порядку, а також $z = \infty$ – усувна особливість, оскільки

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1+\frac{4}{z}}{1-\frac{6}{z}} = 1 \tag{1.1}$$

Отже, щоб обчислити лишок у $z = \infty$, використовуємо формулу:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) &= \lim_{z\to\infty} \left(z(f(\infty) - f(z))\right) = \lim_{z\to\infty} \left(z\left(1 - \frac{z+4}{z-6}\right)\right) \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{-10z}{z-6} = -10 \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-\frac{6}{z}} = -10 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Оскільки в нас всього одна особлива точка $z = 6$ окрім ∞, то лишок в ній можна обчислити, використовши формулу

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) + \mathrm{Res}_{z=6} f(z) = .0 \implies \mathrm{Res}_{z=6} f(z) = -\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = 10 \tag{1.3}$$

Або, для самоперевірки, обрахуємо її наступним чином:

$$\mathrm{Res}_{z=6} f(z) = \lim_{z\to 6} (z-6) f(z) = \lim_{z\to 6} (z+4) = 10 \tag{1.4}$$

Відповідь. $\mathrm{Res}_{z=6} f(z) = 10,\ \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -10.$

Задача 2:

Умова. Обчислити лишки в усіх ізольованих особливих точках, в тому числі при $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{1}{z^5(z-3)(z+2i)^2}$$

Розв'язання. Перерахуємо усі особливі точки:

- $z = 0$ – полюс 5 порядку.
- $z = 3$ – полюс 1 порядку.
- $z = -2i$ – полюс 2 порядку.
- $z = \infty$ – усувна особливість (легко бачити, що $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$).

Окреслимо нашу "стратегію": найлегше обрахувати лишки у $z = \infty$, $z = 3$ та $z = -2i$, а вже лишок $z = 0$ п'ятого порядку знайдемо з рівності $\sum_k \text{Res}_{z=a_k} f(z) + \text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

По-перше бачимо, що $zf(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, тому $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Для $z = 3$ скористаємося тим, що

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=3} f(z) &= \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{z^5(z+2i)^2} \\ &= \frac{1}{3^5\cdot(3+2i)^2} = \frac{1}{3^5}\cdot\frac{1}{5+12i} = \frac{5-12i}{13^2\cdot 3^5} \\ &= \frac{5}{13^2\cdot 3^5} - \frac{4i}{3^4\cdot 13^2} = \frac{5}{41067} - \frac{4i}{13689}\end{aligned} \tag{2.1}$$

А для $z = -2i$ скористаємось схожою формулою:

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=-2i} f(z) &= \lim_{z\to -2i}((z+2i)^2 f(z))' = \lim_{z\to -2i}\left(\frac{1}{z^5(z-3)}\right)' \\ &= \lim_{z\to -2i}\frac{6z^5 - 15z^4}{z^{10}(z-3)^2} = \lim_{z\to -2i}\frac{6z-15}{z^6(z-3)^2} = \frac{-12i-15}{(-2i)^6(-2i-3)^2} \\ &= \frac{15+12i}{2^6(5+12i)} = -\frac{219}{10816} + \frac{15i}{1352}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Нарешті, для обрахунку $\text{Res}_{z=0} f(z)$ знаходимо:

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = -\text{Res}_{z=3} f(z) - \text{Res}_{z=-2i} f(z) = \frac{313}{15552} - \frac{7i}{648} \tag{2.3}$$

Відповідь. $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{313}{15552} - \frac{7i}{648}$, $\text{Res}_{z=-2i} f(z) = -\frac{219}{10816} + \frac{15i}{1352}$, $\text{Res}_{z=3} f(z) = \frac{5}{41067} - \frac{4i}{13689}$, $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Задача 3:

Умова. Обчислити лишки в усіх ізольованих особливих точках, в тому числі при $z = \infty$:

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z+7i}\right)$$

Розв'язання. $z = \infty$ є усувною особливістю, оскільки гранично маємо $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} e^0 = 1 = f(\infty)$. В такому разі лишок:

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left(z(f(\infty) - f(z))\right) = \lim_{z\to\infty} z\left(1 - \exp\left(\frac{1}{z+7i}\right)\right) \tag{3.1}$$

На нескінченності асимптотично $1 - \exp\left(\frac{1}{z+7i}\right) \sim_{z\to\infty} -\frac{1}{z+7i}$, тому

$$\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{1}{z+7i} = -\lim_{z\to\infty} \frac{1}{1+\frac{7i}{z}} = -1 \tag{3.2}$$

Друга особлива точка – це $z = -7i$, що є істотною особливістю (оскільки маємо нескінченне число доданків в головній частині ряда Лорана). Розглянемо ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z+7i}\right)^k = 1 + \frac{1}{z+7i} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+7i}\right)^2 + \dots \tag{3.3}$$

Лишок – це коефіцієнт c_{-1} в розкладі Лорана перед $\frac{1}{z+7i}$, в цьому випадку – 1. Тому, $\mathrm{Res}_{z=-7i} f(z) = 1$.

Відповідь. $\mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = -1,\ \mathrm{Res}_{z=-7i} f(z) = 1.$