Домашня робота з диференціальної геометрії #6

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

26 березня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Обчисліть натуральний параметр, кривину і скрут кривої в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ at^2 + bt + c \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Спочатку знайдемо натуральний параметр. Обчислюємо похідну і її модуль:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 2at + b \end{bmatrix}$$

Отже модуль:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \sqrt{4(a^2+1)t^2 + 4abt + (b^2+1)}$$

Для знаходження натурального параметра потрібно розв'язати відносно $t(s)$ рівняння:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{f}}(\xi)\|_2 d\xi$$

Якщо позначити $\alpha = 2\sqrt{a^2+1}, \beta = 2ab, \gamma = \sqrt{b^2+1}$, то нам по суті потрібно проінтегрувати:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\alpha^2\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma^2} d\xi$$

Цей інтеграл знаходиться навіть у явному виді, але виглядає він не сильно гарно:

$$s = \left(\frac{\beta}{2\alpha^2} + \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\alpha^2\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma^2} - \gamma^2\frac{\ln\alpha}{4\alpha} +$$
$$\left(\frac{\beta^2}{2\alpha^3} - \frac{\gamma^2}{2\alpha}\right)\ln\left(\alpha^2\xi + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2\xi^2 + 2\beta\xi + \gamma^2}\right)\Big|_{\xi=t_0}^{\xi=t}$$

Якщо покласти $t_0 = 0$, то вираз справа сводиться до:

$$\frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} - \gamma^2\frac{\ln\alpha}{4\alpha} + \left(\frac{\beta^2}{2\alpha^3} - \frac{\gamma^2}{2\alpha}\right)\ln(\beta - \alpha\gamma)$$

Тому з урахуванням меж:

$$s = \left(\frac{\beta}{2\alpha^2} + \frac{t}{2}\right)\sqrt{\alpha^2t^2 + 2\beta t + \gamma^2} - \frac{\beta\gamma}{2\alpha^2} +$$
$$\left(\frac{\beta^2}{2\alpha^3} - \frac{\gamma^2}{2\alpha}\right)\ln\frac{a^2t + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2t^2 + 2\beta t + \gamma^2}}{\beta - \alpha\gamma}$$

Щоб обчислити кривину знаходимо другу похідну:

$$\ddot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2a \end{bmatrix}$$

Одразу бачимо, що $\dddot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{\theta}$, а отже скрут дорівнює 0.

Векторний добуток першої і другої похідної:

$$[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] = \begin{bmatrix} -2b \\ -2a \\ 2 \end{bmatrix}$$

І бачимо, що модуль:

$$\|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2 = 2\sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Отже кривина:

$$k(t) = \frac{\|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2}{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2^{3/2}} = \frac{2\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{(4(a^2+1)t^2 + 4abt + (b^2+1))^{3/2}}$$

Завдання 2

Умова. Доведіть, що крива в $\mathbb{R}^3$ з радіус-вектором

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 + 3t + 2t^2 \\ 2 - 2t + 5t^2 \\ 1 - t^2 \end{bmatrix}$$

є плоскою. Знайдіть плоскість в $\mathbb{R}^3$, якій належить крива.

Розв'язок. Всі компоненти радіус-вектора є поліномами другого ступеня, а отже $\dddot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{\theta}$, звідси змішаний добуток $(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}, \dddot{\boldsymbol{f}}) \equiv 0$, тому крива плоска.

Нехай площина, в якій лежить наша крива $\boldsymbol{f}(t)$, задається рівнянням $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \rangle + \delta = 0$ де $\boldsymbol{n} = [\alpha, \beta, \gamma]^\top$. Тоді:

$$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \rangle + \delta \equiv 0 \to \alpha f^1 + \beta f^2 + \gamma f^3 + \delta \equiv 0$$

Тому виписуємо:

$$(2\alpha + 5\beta - \gamma)t^2 + (3\alpha - 2\beta)t + (\alpha + 2\beta + \gamma + \delta) \equiv 0$$

Що еквівалентно системі рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Звідси:

$$\alpha = -2t, \beta = -3t, \gamma = -19t, \delta = 27t, t \in \mathbb{R}$$

Якщо підставити наприклад $t = -1$, то маємо рівняння площини:

$$\pi : 2x + 3y + 19z - 27 = 0$$

Завдання 3.2.

Умова. Запишіть натуральне рівняння логарифмічної спіралі:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos t \\ e^{\alpha t}\sin t \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Знаходимо похідну:

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{\alpha t}\cos t - e^{\alpha t}\sin t \\ \alpha e^{\alpha t}\sin t + e^{\alpha t}\cos t \end{bmatrix}$$

Модуль похідної:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \sqrt{\alpha^2 e^{2\alpha t} + e^{2\alpha t}} = e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + 1}$$

Перейдемо до натуральної параметризації:

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}\dot{(}\xi)\|_2 d\xi = \sqrt{\alpha^2 + 1}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha\xi} d\xi = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} e^{\alpha\xi}\Big|_{\xi=t_0}^{\xi=t}$$

Для визначеності візьмемо $t_0 = 0$, тоді:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} s = e^{\alpha t} - 1$$

Позначимо $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, тоді:

$$e^{\alpha t} = 1 + s\cos\varphi$$

Знайдемо кривину зі знаком:

$$k^* = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{(1+\alpha^2)e^{2\alpha t}}{(1+\alpha^2)^{3/2}e^{3\alpha t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}e^{\alpha t}}$$

Отже підставимо вираз з параметрізацією і позначимо $r = \sqrt{1+\alpha^2}$:

$$k^* = \frac{1}{r(1 + s\cos\varphi)}$$

Завдання 4.2.

Умова. Відновіть криву в $\mathbb{R}^2$, задану натуральним рівнянням $k^* \equiv e^s$.

Розв'язок. Спочатку знаходимо функцію кута від s:

$$k^* = \frac{d\alpha}{ds} \to \alpha = \int k^*(s)ds = e^s + \alpha_0$$

Далі знаходимо координати вектора:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \int \cos\alpha(s)ds \\ \int \sin\alpha(s)ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^s \cos(e^s + \alpha_0)ds + f_0^1 \\ \int_0^s \sin(e^s + \alpha_0)ds + f_0^2 \end{bmatrix}$$

Цей інтеграл виражається через тригонометричні інтеграли:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 \cdot \mathrm{Ci}(e^s) - \sin\alpha_0 \cdot \mathrm{Si}(e^s) \\ \sin\alpha_0 \cdot \mathrm{Ci}(e^s) + \cos\alpha_0 \cdot \mathrm{Si}(e^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix}$$

Або:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Ci}(e^s) \\ \mathrm{Si}(e^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0^1 \\ f_0^2 \end{bmatrix}$$

Тобто з точністю до повороту та руху наша крива має вид:

$$\boldsymbol{f}(s) = \begin{bmatrix} \mathrm{Ci}(e^s) \\ \mathrm{Si}(e^s) \end{bmatrix}$$

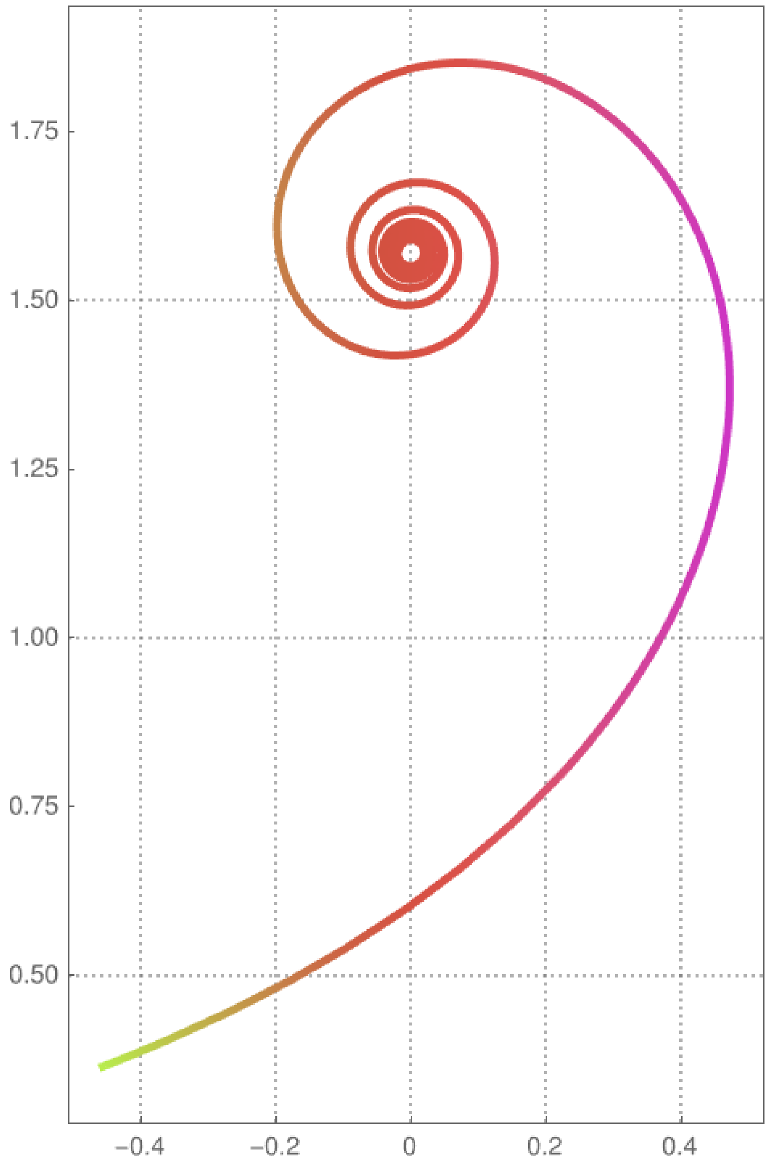

Рис. 1: Крива $[\mathrm{Ci}(e^s), \mathrm{Si}(e^s)]^\top$

Якщо прибрати експоненти, то перед нами була б спіраль Нільсона, згідно інтернету :)

Наша ж зображена на рис. 1.