Контрольна Робота. Частина #3

Захаров Дмитро

30 листопада, 2024

1 Завдання 1

Умова Задачі 1.1. Знайти розв'язок задачі синтезу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + \nu x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -\nu x_1 + \mu x_2 + u_2 \end{cases}, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1,$$

для $\mu = -3$, $\nu = 6$. А саме:

1. Задати довільну початкову точку. Розв'язати в ній рівняння $2\mu\Theta - 1 + e^{-2\mu\Theta} = 2\mu^2(x_1^2 + x_2^2)$. Цей розв'язок і є часом руху. **(3б)**
2. Підставити керування $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \left(-\frac{\Theta(x_1,x_2)x_1}{x_1^2+x_2^2}, -\frac{\Theta(x_1,x_2)x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$ у початкову систему. Похідна від функці керованості дорівнює -1. Розв'язати задачу Коші. **(3б)**
3. Побудувати траєкторію керування 1 і 2. **(4б)**

Розв'язання.

Пункт 1. Задамо, наприклад, $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. В такому разі, маємо рівняння:

$$2\mu\Theta_T - 1 + e^{-2\mu\Theta_T} = 2\mu^2(x_1^2 + x_2^2) \Leftrightarrow -6\Theta_T + 1 + e^{6\Theta_T} = 9,$$

де $\Theta_T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ — час руху. Це рівняння можна розв'язати чисельно за допомогою *Wolfram Mathematica*. Чисельно, отримуємо $\Theta_T \approx 0.42$.

Замітка. Для відносно великих за модулем $\mu < 0$ (як в нашому випадку), можна вважати, що $e^{-2\mu\Theta_T} \gg 2|\mu|\Theta_T$ і тому наближено розв'язок можна знайти як $e^{-2\mu\hat{\Theta}_T} = 1 + 2\mu^2(x_1^2 + x_2^2)$, звідки:

$$\hat{\Theta}_T = -\frac{1}{2\mu}\log\bigl(1 + 2\mu^2(x_1^2 + x_2^2)\bigr).$$

Така оцінка дає $\hat{\Theta}_T \approx 0.38$ — досить близьке значення до чисельного.

Пункти 2-3. Найбільша проблема цього пункту полягає у тому, що розв'язок $\Theta(x_1, x_2)$ не є аналітично виразним. Тому, функцію $\Theta(x_1, x_2)$ ми знайдемо чисельно. Проте, яким саме чином?

Ми знаємо, що увесь рух обмежений в квадраті $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}_0\|_1$, тому достатньо згенерувати сітку на цьому квадраті (скажімо, $\{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \Theta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}))\}_{i\in[N]}$) і знайти значення Θ в кожній точці, розв'язавши відповідне рівняння. Приклад сітки зображено на рисунку 1.

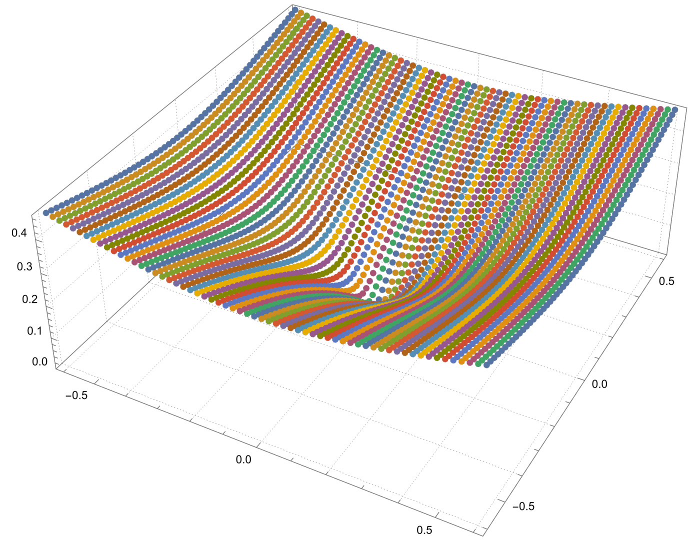

Рис. 1: Сітка $\{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \Theta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}))\}_{i\in[N]}$.

Далі, цю сітку ми інтерполюємо або апроксимуємо якимось методом (наприклад, за допомогою методу `Interpolate` в *Wolfram Mathematica*). Таким чином, ми отримуємо неперервно-диференційовану (навіть кілька разів) функцію $\hat{\Theta}(x_1, x_2)$. Результат зображено на рисунку 2.

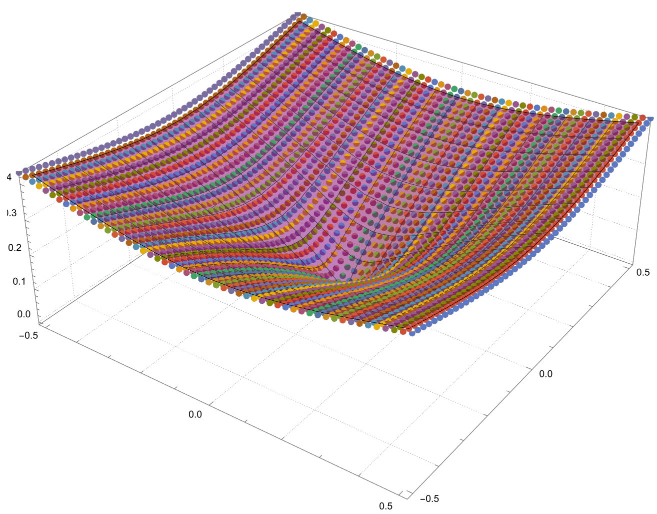

Рис. 2: Функція $\hat{\Theta}(x_1, x_2)$.

Далі, як і каже умова, вибираємо керування:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \left(-\frac{\hat{\Theta}(x_1, x_2)x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{\hat{\Theta}(x_1, x_2)x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right).$$

І чисельно розв'язуємо задачу Коші для початкової системи. Траєкторія системи зображена на рисунку 3. Зокрема, графіки $u_1(t)$ та $u_2(t)$, а також $u_1^2(t) + u_2^2(t)$ можна знайти у доданому файлі *Wolfram Mathematica*.

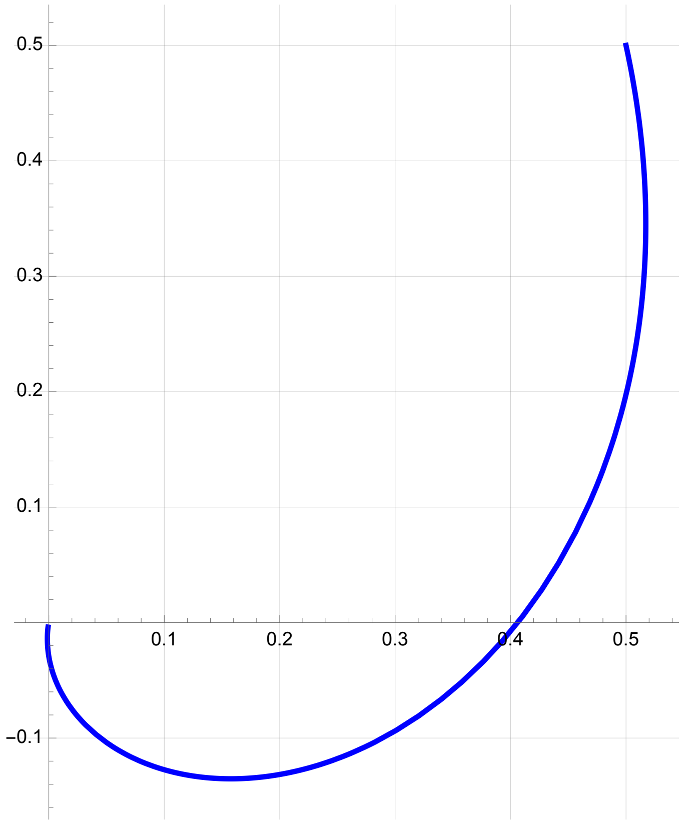

Рис. 3: Траєкторія системи.

2 Завдання 2

Умова Задачі 2.1. Розглянемо наступну систему, де $\varepsilon = 0.005$, $\delta = 0.01$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon(x_2^2 + x_1 u), \\ \dot{x}_2 = u + \delta(x_1^2 - x_2 u) \end{cases}, \quad |u| \le 1,$$

1. Задати довільну початкову точку, яка належить заданій області $\mathcal{Q} = \left\{(x_1, x_2) : 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \le \frac{2}{9}\right\}$. Намалювати область (лінія рівня функції θ при $\theta = 1$). Потім взяти точку в середині і знайти її координати. **(3б)**
2. Розв'язати в цій точці рівняння $\frac{2}{9}\Theta^4 - \Theta^2 x_2^2 - 2\Theta x_1 x_2 - 3x_1^2 = 0$. **(3б)**
3. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 0.01\left(-\frac{x_1^2}{x_3^2} - \frac{2x_1x_2}{x_3} + x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{x_3^2} - \frac{2x_2}{x_3} + 0.01\left(\frac{x_1x_2}{x_3^2} + \frac{2x_2^2}{x_3} + x_1^2\right), \\ \dot{x}_3 &= \frac{x_1^2 + x_3^2x_2^2}{6x_1^2 + 3x_3x_1x_2 + x_3^2x_2^2} \\ &\quad + \frac{(-3 + x_3^3)x_1^3 + x_3(-8 + x_3^3)x_1^2x_2 - 2x_3^2x_1x_2^2 - x_3^3x_2^3}{100x_3(6x_1^2 + 3x_3x_1x_2 + x_3^2x_2^2)}, \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = \Theta_0 \end{aligned}$$

   Час руху знаходиться з умови, що $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 0.01$. **(3б)**
4. Побудувати траєкторію, керування і похідну від функції керованості. **(4б)**

Розв'язання.

Пункт 1. Власне, в цьому пункті малюємо область $\mathcal{Q}$ у *Wolfram Mathematica* і обираємо випадкову точку. Я, наприклад, обрав $\mathbf{x}_0 = (0.2, -0.4)$. Легко переконатися, що $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{Q}$. Результат зображено на рисунку 4.

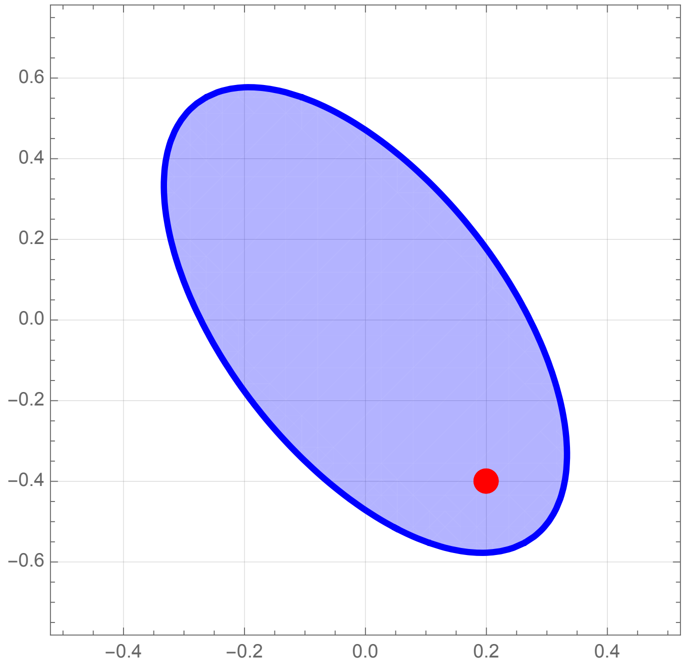

Рис. 4: Область $\mathcal{Q}$.

Пункт 2. Чисельно розв'язуємо рівняння в цій точці:

$$\frac{2}{9}\Theta_0^4 - \Theta_0^2 x_2^2 - 2\Theta_0 x_1 x_2 - 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\Theta_0^4 - 0.16\Theta_0^2 + 0.16\Theta_0 - 0.12 = 0.$$

З цього рівняння можна знайти $\Theta_0 \approx 0.809$.

Пункт 3. З цього пункту починаються деякі труднощі. По-перше, без повного аналізу параграфу, дуже складно зрозуміти, як перетворити рівняння, щоб воно включало нові параметри ε та δ. Тим не менш, моя інтуїція підказує на те, що рівняння стає наступним:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \varepsilon\left(-\frac{x_1^2}{x_3^2} - \frac{2x_1x_2}{x_3} + x_2^2\right), \\
\dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{x_3^2} - \frac{2x_2}{x_3} + \delta\left(\frac{x_1x_2}{x_3^2} + \frac{2x_2^2}{x_3} + x_1^2\right), \\
\dot{x}_3 &= \frac{x_1^2 + x_3^2x_2^2}{6x_1^2 + 3x_3x_1x_2 + x_3^2x_2^2} \\
&\quad + \frac{(-3 + x_3^3)x_1^3 + x_3(-8 + x_3^3)x_1^2x_2 - 2x_3^2x_1x_2^2 - x_3^3x_2^3}{100x_3(6x_1^2 + 3x_3x_1x_2 + x_3^2x_2^2)}, \\
x_1(0) &= 0.2, \quad x_2(0) = -0.4, \quad x_3(0) \approx 0.809.
\end{aligned}$$

Для нього я зробив програму, що розв'язує задачу Коші, будує траєкторію та функцію керування. Отримав, що час руху приблизно $T \approx 1.74$ (в якості критерію кінця руху, я взяв мінімальне T, за яке $\sqrt{x_1(T)^2 + x_2(T)^2} \leq 0.01$, згідно умові). Результат зображено на рисунках 5 та 6.

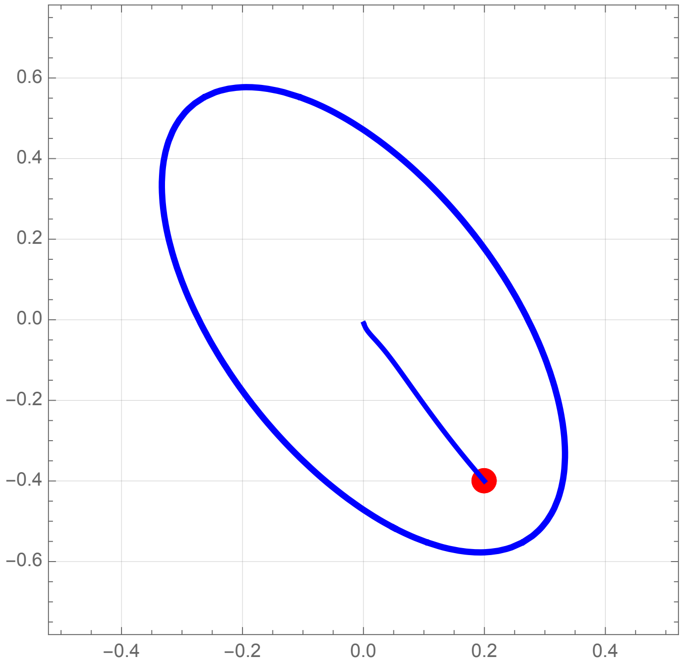

Рис. 5: Траєкторія системи.

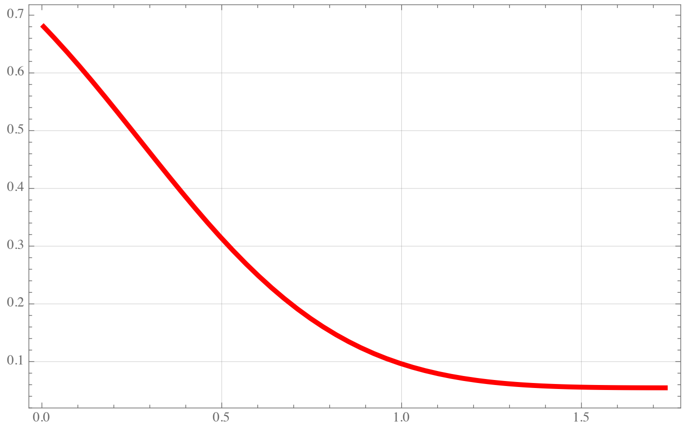

Рис. 6: Функція керування $u(t)$.

Проте, оскільки я не впевнений у правильності рівняння, я вирішив розв'язати задачу заново, користуючись наступним алгоритмом:

1. Розв'язати рівняння $\frac{2}{9}\Theta^4 - x_2^2\Theta^2 - 2\Theta x_1 x_2 - 3x_1^2 = 0$ на певному наборі точок на квадраті $[-0.8, 0.8] \times [-0.8, 0.8]$.
2. По отриманним точкам побудувати інтерполяцію $\hat{\Theta}(x_1, x_2)$.
3. Побудувати функцію керування як $u(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{\hat{\Theta}^2(x_1,x_2)} - \frac{2x_2}{\hat{\Theta}(x_1,x_2)}$.
4. Підставити керування у початкову систему та розв'язати задачу Коші.
5. Побудувати траєкторію системи, керування та похідну від функції керованості.

Результати додані у програмі *Wolfram Mathematica*. З цікавого, функція $\dot{\Theta}$ виглядає доволі екзотично — дивись рисунок 7.

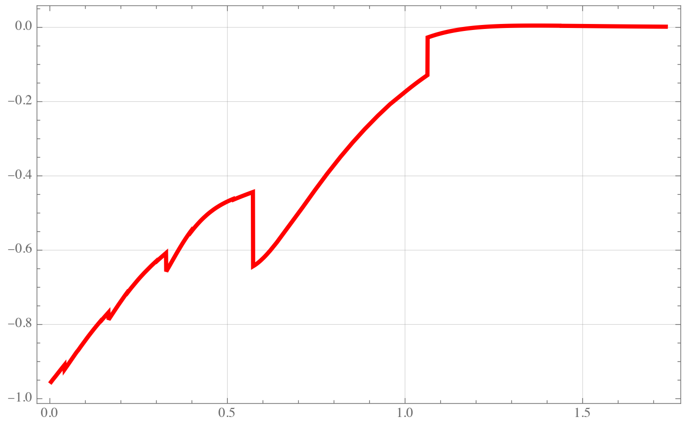

Рис. 7: Похідна від функції керованості $\dot{\Theta}(\mathbf{x}(t))$.