Теорія Ймовірності

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Півень О.Л.*

Весняний семестр 2024
Домашня робота 5

§ Неперервні Випадкові величини §

Задача 1: Файл, номер 1

Умова. Випадкова величина ξ має функцію розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2+2x}{3}, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$ цієї випадкової величини.
Розв'язання. За означенням, функція розподілу:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx \tag{1.1}$$

Продиференціюємо обидві частини:

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x) \tag{1.2}$$

Знайдемо похідну функції розподілу:

$$F'_\xi(x) = \frac{2}{3}(x+1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \tag{1.3}$$

де $\mathbb{1}_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ – індикаторна функція. Таким чином, шукана щільність розподілу:

$$\boxed{f_\xi(x) = \frac{2}{3}(x+1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x)} \tag{1.4}$$

Задача 2: Файл, номер 2

Умова. Нехай неперервна випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_\xi(x) = \alpha \sin x \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$, де α – стала. Знайти значення параметру α, функцію розподілу випадкової величини ξ та ймовірності $\Pr\left[-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}\right]$ та $\Pr\left[-\frac{\pi}{2} < \xi \leq \frac{\pi}{2}\right]$.

Розв'язання. Щільність розподілу має задовольняти умові:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = 1 \tag{2.1}$$

Тому, маємо:

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \alpha \sin x \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)dx = \alpha \int_0^\pi \sin x dx = 2\alpha = 1, \tag{2.2}$$

отже $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$. Щоб знайти функцію розподілу, рахуємо

$$F_\xi(x) \triangleq \int_{-\infty}^x f_\xi(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2}\sin x dx, & x \in [0,\pi] \\ 1, & x > \pi \end{cases}. \tag{2.3}$$

Після інтегрування, маємо

$$\boxed{F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin^2 \frac{x}{2}, & x \in [0,\pi] \\ 1, & x > \pi \end{cases}} \tag{2.4}$$

Нарешті, щоб знайти ймовірності знаходимо:

$$\Pr\left[-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}\right] = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f_\xi(x)dx = \int_0^{\pi/2} f_\xi(x)dx = F_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Відповідь для випадку $\Pr\left[-\frac{\pi}{2} < \xi \leq \frac{\pi}{2}\right]$ однаковий. Дійсно,

$$\begin{aligned} \Pr\left[-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}\right] &= \int_{(-\pi/2,\pi/2]} f_\xi(x)dx + \underbrace{\int_{\{-\pi/2\}} f_\xi(x)dx}_{=0} \\ &= \int_{(-\pi/2,\pi/2]} f_\xi(x)dx = \Pr\left[-\frac{\pi}{2} < \xi \leq \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Задача 3: Файл, номер 3

Умова. Чи може при деякій сталій α функція $f_\xi(x) = \alpha \cos x \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$ визначати щільність розподілу деякої неперервної величини? Якщо так, то знайдіть α.

Розв'язання. Якщо таке α існує, то має виконуватись

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = 1 \tag{3.1}$$

В такому разі

$$\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = \int_0^\pi \alpha \cos x dx = 0 \tag{3.2}$$

Оскільки при будь-якому α, $\int_{\mathbb{R}} f_\xi(x)dx = 0$, то f_ξ не може бути щільністю розподілу.

Задача 4: Турчін, номер 9.13

Умова. Нехай $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -\xi$.

Розв'язання. Нехай шуканий розподіл $G(x)$. За означенням,

$$\begin{aligned} F(x) = \Pr[\xi < x] = \Pr[-\xi \geq -x] = 1 - \Pr[-\xi < -x] \\ = 1 - \Pr[\eta < -x] = 1 - G(-x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Якщо замінимо $x \mapsto -x$, то маємо

$$\boxed{G(x) = 1 - F(-x)} \tag{4.2}$$

Задача 5: Турчін, номер 9.15

Умова. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром 1. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = 1 - e^{-\xi}$.

Розв'язання. Показниковий розподіл з параметром $\theta = 1$ має щільність $f_\xi(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}$, а отже функція розподілу $F_\xi(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ для $x > 0$ і тотожньо 0 для $x \leq 0$.

Тепер знайдемо функцію розподілу $F_\eta(x)$. При від'ємних x очевидно функція розподілу тотожньо 0, як і для $F_\xi(x)$. Інакше, за означенням:

$$F_\eta(x) \triangleq \Pr[\eta < x] = \Pr[1 - e^{-\xi} < x] = \Pr[e^{-\xi} > 1 - x] \tag{5.1}$$

Якщо $1 - x \leq 0$, тобто $x \geq 1$, то така подія відбудеться гарантовано, оскільки експонента – функція невід'ємна. Таким чином, $F_\eta(x)\Big|_{x\geq 1} = 1$. Якщо ж $x \in (0,1)$, то

$$\begin{aligned} F_\eta(x) = \Pr[-\xi > \ln(1-x)] = \Pr[\xi \leq -\ln(1-x)] \\ = F_\xi(-\ln(1-x)) = 1 - e^{\ln(1-x)} = x \end{aligned} \tag{5.2}$$

Отримали достатньо простий вираз:

$$\boxed{F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}} \tag{5.3}$$

Задача 6: Турчін, номер 9.16(1)

Умова. Нехай $f_\xi(x)$ – щільність розподілу випадкової величини ξ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$.

Розв'язання. Виразимо функцію розподілу η:

$$F_\eta(x) \triangleq \Pr[\eta < x] = \Pr[|\xi| < x] \tag{6.1}$$

Помічаємо, що якщо $x \leq 0$, то ймовірність такої події нульова, тому $F_\eta(x)\Big|_{x\leq 0} = 0$. Інакше,

$$F_\eta(x) = \int_{-x}^{x} f_\xi(t)dt = F_\xi(x) - F_\xi(-x), \ x \geq 0 \tag{6.2}$$

Продиференціюємо обидві частини:

$$\frac{dF_\eta(x)}{dx} = \frac{dF_\xi(x)}{dx} + \frac{dF_\xi(-x)}{dx} \implies \boxed{f_\eta(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x), \ x \geq 0} \tag{6.3}$$

Задача 7: Турчін, номер 9.17

Умова. Нехай $F_\xi(x)$ – функція розподілу ξ. Знайти функцію розподілу $\eta = \xi^2$.

Розв'язання.

$$F_\eta(x) \triangleq \Pr[\eta < x] = \Pr[\xi^2 < x] \tag{7.1}$$

Якщо $x \leq 0$, то ймовірність такої події нуль, тому $F_\eta(x)\Big|_{x\leq 0} = 0$. Інакше,

$$F_\eta(x) = \Pr[\xi < \sqrt{x}] - \Pr[\xi < -\sqrt{x}] = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) \tag{7.2}$$

Отже, остаточно, $\boxed{F_\eta(x) = (F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}))\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)}$.

Задача 8: Турчін, номер 9.18

Умова. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром λ. Знайти щільності розподілів випадкових величин:

- $\eta = |\xi - 1|$.
- $\eta = (\xi - 1)^3$

Розв'язання. Якщо випадкова величина ξ розподілена показниково, то її щільність розподілу має вигляд $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$.

Пункт 1. Розглянемо функцію розподілу $\eta = |\xi - 1|$. Маємо:

$$F_\eta(x) \triangleq \Pr[\eta < x] = \Pr[|\xi - 1| < x] = \Pr[-x + 1 < \xi < x + 1] \tag{8.1}$$

По-перше, якщо $x \leq 0$, то ймовірність такої події нульова (оскільки модуль завжди невід'ємний), тому $F_\eta(x)\Big|_{x\leq 0} = 0$. Інакше, помічаємо

$$F_\eta(x) = F_\xi(1 + x) - F_\xi(1 - x) \tag{8.2}$$

Тепер диференціюємо $\frac{d}{dx}$:

$$\begin{aligned} f_\eta(x) &= f_\xi(1 + x) + f_\xi(1 - x) \\ &= \lambda e^{-\lambda(1+x)}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(1 + x) + \lambda e^{-\lambda(1-x)}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(1 - x) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Оскільки $x > 0$, то можна дещо спростити:

$$f_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda}\left(e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(1 - x)\right) \tag{8.4}$$

Далі можна розглянути два випадки: $x \in (0, 1)$ та $x \in [1, +\infty)$. В другому випадку формула спрощується до $f_\eta(x) = \lambda e^{-\lambda(1+x)}$. Інакше,

$$f_\eta(x)\Big|_{x\in(0,1)} = \lambda e^{-\lambda}(e^{-\lambda x} + e^{\lambda x}) = 2\lambda e^{-\lambda}\cosh \lambda x \tag{8.5}$$

Отже, остаточно отримуємо:

$$\boxed{f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda} \cosh \lambda x, & x \in (0,1) \\ \lambda e^{-\lambda(1+x)}, & x \geq 1 \end{cases}} \tag{8.6}$$

Пункт 2. В цьому випадку маємо:

$$F_\eta(x) \triangleq \Pr[\eta < x] = \Pr[(\xi - 1)^3 < x] \tag{8.7}$$

Оскільки ξ може приймати лише додатні значення, то для $x \leq -1$, ймовірність події вище нульова. Тому $F_\eta(x)\Big|_{x \leq -1} = 0$. Інакше,

$$F_\eta(x) = \Pr[\xi < 1 + \sqrt[3]{x}] = F_\xi(1 + \sqrt[3]{x}) \tag{8.8}$$

Продиференціюємо обидві частини:

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(1 + \sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\lambda e^{-\lambda(1+\sqrt[3]{x})}}{3\sqrt[3]{x^2}} \tag{8.9}$$