# Екзамен з лінійної алгебри

**Фамілія:** Захаров

**Ім'я:** Дмитро

**Група:** МП11

**Білет:** 56

## Задание 1

**Означення детермінанту.** Нехай в нас є деяка матриця $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$. За означенням, детермінант матриці:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

Тут $S_n$ — множина перестановок $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

**Чи є вірним, що для довільних матриць** $\det(A + B) = \det A + \det B$? Ні, це неправильно. Наприклад, візьмемо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$. Маємо $\det A = \det B = 1$. Якщо візьмемо суму, то отримаємо $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, звідси $\det(A + B) = 4 \neq \det A + \det B = 2$. Отже, це дійсно не виконується.

Однак, є випадок, коли це виконується: $A = \alpha \in \mathbb{R}, B = \beta \in \mathbb{R}$. В таком разі дійсно $\det(A + B) = \det(\alpha + \beta) = \alpha + \beta = \det A + \det B$.

Для будь-яких більших розмірностей матриць за $n > 1$ можна привести контрприклад $A = B = E_n$. Тоді $\det A = \det B = 1$, а $\det(A + B) = 2^n \neq 2$.

**Обчисліть визначник матриці:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Змінимо 1ий рядок з $n$им, 2ий рядок з $(n - 1)$им тощо. Отримаємо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

Її детермінант вже знаходиться легко: $\det B = \prod_{i=1}^{n} a_i$. При цьому, з властивостей детермінанту, ми отримали, що $\det A = (-1)^m \det B$, де $m$ — кількість перестановок рядків. Кількість перестановок дорівнює $[n/2]$, тому маємо:

$$\det A = (-1)^{[n/2]} \prod_{j=1}^{n} a_j$$

Знайдемо **ранг матриці**. Зручно розглянути стовпчатий ранг матриці $B$ (який з доведеної в курсі лінійної алгебри теореми рівний усім рангам матриці):

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$$

*(**коментар:** оскільки при зміні рядків ранг не змінюється, ми розглянемо для зручності матрицю $B$)*

**Твердження.** $\operatorname{rg}(A) = n - k$, де $k$ — кількість нульових векторів з $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$

**Доведення.** Приберемо усі нульові вектори з $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Без обмеження загальності, нехай ми отримали $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, $k < n$. Доведемо, що те, що залишилось — лінійно незалежні вектори. Розглянемо їх лінійну комбінацію:

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ a_{n-k} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$$

Звідки маємо систему відносно $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$:

$$\alpha_0 a_n = 0,\ \alpha_1 a_{n-1} = 0, \dots,\ \alpha_{k-1} a_{n-k} = 0$$

Оскільки вектори ненульові, то $a_i \neq 0, i = \overline{n-k, n}$, отже $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. В такому разі дійсно маємо систему незалежних векторів.

При додаванні будь-якого з векторів $\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+2}, \dots, \mathbf{a}_n$, які є нульовими, до нашого набору зробить цей набір лінійно залежним (цю теорему ми вже доводили). Отже твердження доведено.

## Задание 2

Нехай в нас є $L$ — лінійний простір в полі $F$.

**Означення.** Відображення $\mathcal{A} : L \to L$ називається лінійним оператором в $L$, якщо

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \ \forall \lambda, \mu \in F : \mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y})$$

**Питання.** Чи є відображення $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ лінійним оператором у просторі $\mathbb{R}^2$?

По-перше, $\mathbb{R}^2$ — дійсно лінійний простір в полі $\mathbb{R}$. Тепер розглянемо вираз $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для довільних $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{A}\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{A}\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 - 3 \\ 2\lambda x_2 + 2\mu y_2 \end{pmatrix}$$

Якщо розглянути $\lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 - 3 \\ 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 - 3(\lambda + \mu) \\ 2\lambda x_2 + 2\mu y_2 \end{pmatrix}$, то бачимо, що це не завжди збігається з $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})$, а лише коли $\lambda + \mu = 1$. Дійсно, наведемо контрприклад: нехай $\mathbf{x} = (0, 1)^T, \mathbf{y} = (1, 0)^T$, а $\lambda = \mu = 1$. В такому разі $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, 1)^T$. Тоді:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = (-2, 0)^T, \ \mathcal{A}\mathbf{y} = (-3, 2)^T, \ \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (-2, 2)^T \neq \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{y}$$

Що суперечить визначенню.

**Питання.** Наведіть приклад лінійного оператора, який у всіх базисах має одну й ту саму матрицю.

Отже, нехай в нас матриця $A_e$ оператора в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$. Нехай в нас є матриця переходу $T_{e \to u}$ до нового базису $\{\mathbf{u}_i\}$. Матриця цього оператора в базисі $\{\mathbf{u}_i\}$:

$$A_u = T_{e \to u}^{-1} A_e T_{e \to u}$$

За умовою $A_u = A_e = A$. Тому маємо, що для будь-яких матриць переходу $T$:

$$A = T^{-1} A T \to TA = AT \to TA - AT = 0$$

Іншими словами, треба знайти будь-які $A$, що є комутативні за множенням до будь-яких матриць $T$.

В якості прикладу можна взяти $A = O$ — нульову матрицю (тобто $\mathcal{A}\mathbf{x} = \theta$) або одиничну матрицю $A = E$ (тобто $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

## Задание 3

**Означення.** Нехай маємо євклідовий простір $E$, в якому $\mathcal{A} : E \to E$ — лінійний оператор. Тоді оператор є самоспряженим, якщо $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ (тобто спряжений до оператора дорівнює самому оператору). Іншими словами:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle$$

**Питання:** навести приклад лінійного оператора в $\mathbb{R}^3$, який не є самоспряженим. Дійсно, нехай лінійному оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A$ у деякому ортонормованому базисі. В такому разі, як ми доводили, $A^* = \overline{A^T} = A^T$ (оскільки ми в $\mathbb{R}^3$), тому нам достатньо взяти таку матрицю, що $A \neq A^T$. Дійсно, наприклад $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, що відповідає лінійному оператору $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$. Тоді якщо наприклад $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, то маємо:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \to \langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 15$$

$$\mathcal{A}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \to \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle = 17$$

Отже маємо $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle$.

**Питання:** коли число $\lambda = (a-2) + (a+6)i$ може бути власним числом деякого самоспряженого оператора $\mathcal{A}$ у комплексному євклідовому просторі?

**Твердження.** Якщо $\mathcal{A}$ — самоспряжений оператор, то $\lambda_i \in \mathbb{R}$, де $\lambda_i$ — власні числа $\mathcal{A}$.

**Доведення.** Розглянемо деяке $\lambda$. Оскільки $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$, то $\exists \mathbf{x}_0 \in E : \mathcal{A}\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \neq \theta$. В такому разі, оскільки $\mathcal{A}$ — самоспряжений оператор:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \mathcal{A}\mathbf{x}_0 \rangle \to \langle \lambda\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{x}_0, \lambda\mathbf{x}_0 \rangle \to \lambda = \overline{\lambda} \to \lambda \in \mathbb{R}$$

Отже, якщо $\lambda(a)$ — власне число самоспряженого оператору $\mathcal{A}$, то $\lambda \in \mathbb{R}$, отже $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$, тому маємо, що $a + 6 = 0 \to a = -6$. Звідси $\lambda = -8$ — єдине можливе власне число.

Наведемо приклад для $\mathbb{R}^2$. Маємо, що матриця повинна бути симетричною (тобто $A = A^T$). Спробуємо підібрати цю матрицю так, щоб:

**1)** $\operatorname{trace}(A) = -8$,

**2)** $\det A = 0$,

**3)** $A = A^T$.

В такому разі $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{trace}(A) \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + 8\lambda \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -8$. Отже, поставимо на головну діагональ числа $-2, -6$. Отже, матриця буде мати вигляд $A = \begin{pmatrix} -2 & \mu \\ \mu & -6 \end{pmatrix}$. Оскільки $\det A = 0$, оберемо $\mu = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Отже, в якості приклада маємо не дуже тривіальну, однак дійсно самоспряжену матрицю з $\lambda = -8$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -6 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 2\sqrt{3}x_2 \\ 2\sqrt{3}x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}$$

Перевіримо, що це дійсно самоспряжений оператор. Розглянемо довільні $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Маємо:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -2x_1 + 2\sqrt{3}x_2 \\ 2\sqrt{3}x_1 - 6x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = -2x_1y_1 + 2\sqrt{3}x_2y_1 + 2\sqrt{3}x_1y_2 - 6x_2y_2$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2y_1 + 2\sqrt{3}y_2 \\ 2\sqrt{3}y_1 - 6y_2 \end{pmatrix} \rangle = -2x_1y_1 + 2\sqrt{3}y_2x_1 + 2\sqrt{3}x_2y_1 - 6x_2y_2$$

Бачимо $\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} \rangle\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, отже він дійсно є самоспряженим.