Екзамен з аналітичної геометрії

Ім'я: Дмитро

Фамілія: Захаров

Група: МП-11

Білет: 2

Завдання 1.

Фокальні властивості еліпса.

Відповідь. Перед тим, як безпосередньо розглядати фокальні властивості еліпса, введомо поняття *фокального радіусу* — відрізок, що сполучає один із фокусів із точкою на самому еліпсі.

Нехай в нас є еліпс, заданий в канонічному виді:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

А також деяка точка на цьому еліпсі $M(x_0, y_0)$. Тоді якщо позначити через r_1 довжину фокального радіуса від цієї точки до фокуса F_1 (що зліва), а через r_2 від M до F_2, то є справедливим наступне твердження:

$$r_1 = a+\varepsilon x_0,\ r_2 = a-\varepsilon x_0$$

де $\varepsilon=\sqrt{1-b^2/a^2}$ — ексцентриситет еліпсу.

Доведення. r_1 — це відстань від $F_1(-c, 0)$ та $M(x_0, y_0)$, отже:

$$r_1=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}$$

Також врахуємо, що M належить еліпсу, що означає $x_0^2/a^2+y_0^2/b^2=1$, звідки можемо виразити y_0^2: $y_0^2=b^2(1-x_0^2/a^2)$. Підставляємо у вираз з r_1, розкриємо квадрат та врахуємо, що $c^2=a^2-b^2$:

$$r_1=\sqrt{x_0^2+2x_0c+c^2+b^2-x_0^2\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{x_0^2+2x_0c+a^2-b^2+b^2-x_0^2\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{x_0^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2x_0c+a^2}=\sqrt{}$$

Помітимо, що $\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2=\frac{c^2x_0^2}{a^2}+2cx_0+a^2$, а отже:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}=\sqrt{(\varepsilon x_0+a)^2}$$

Оскільки $\varepsilon<1$, $|x_0|<a$, то і $|\varepsilon x_0|<a$, то бачимо, що $|\varepsilon x_0+a|=\varepsilon x_0+a$. Отже, остаточно отримуємо $r_1=a+\varepsilon x_0$.

Для відстані r_2 доведення буде аналогічним.

Тепер візьмемо і додамо r_1 з r_2: $r_1+r_2=(a+\varepsilon x_0)+(a-\varepsilon x_0)=2a$. Отже, наслідком отримуємо фокальну властивість еліпсу: сума відстаней від точки до фокусів еліпсу є константою.

Тепер доведемо обернене твердження, тобто якщо маємо деякі дві точки F_1, F_2 на відстані $2c$, то ГМТ $G(x, y)$, для якого виконується твердження: $|GF_1|+|GF_2|=2a, a=\text{const}$, причому $a>c$, є еліпсом.

Доведення. Оберемо координатну систему так, щоб вісь Ox була направлена вздовж $\vec{F_1F_2}$, а вісь Oy поставимо перпендикулярно до Ox і щоб вона проходила через середину F_1F_2. Тоді в цій системі $F_1(-c, 0)$, а $F_2(c, 0)$. Розглянемо довільну точку з ГМТ $G(x, y)$ і розпишемо відстані: $|GF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, |GF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Отже відставляючі в умову ГМТ отримаємо:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Далі виконуємо алгебраїчні дії: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Підносячі обидви частини у квадрат (обидва корня точно не перевищують $2a$) та спростивши наш вираз, отримаємо:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

Ліва частина повинна бути додатня, тобто $cx/a < a \implies x < \frac{a^2}{c}$. Це точно виконується з врахуванням обмеження $a > c$. Підносячі ще раз у квадрат, маємо:

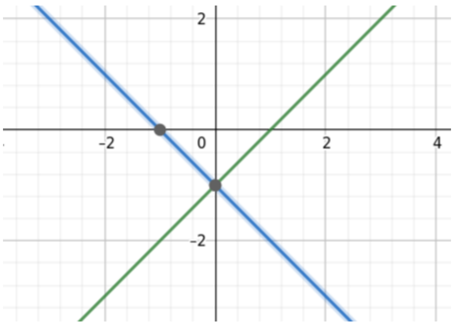
$$x^2\frac{a^2-c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2, \text{ або } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Якщо позначити $b^2 = a^2 - c^2$, маємо канонічне рівняння еліпсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Завдання 2.

Прямі $x - y - 1 = 0$ та $x + y + 1 = 0$ є осями симетрії гіперболи з півосями $2, 1$. Написати рівняння гиперболи в координатах (x, y).

Розв'язок. Зробимо перетворення координат $\mathbf{x} = \mathcal{R}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{p}$, тобто композицію повороту $\mathcal{R}$ та переносу $\mathbf{p}$. З останнім визначитись легше за всього — знайдемо перетин двох прямих і здвинемо систему координат (x, y) на радіус-вектор цієї точки. Перетин $(0, -1)$, а отже вектор $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Поворот описати теж доволі легко — помітимо, що прямі є перпендикулярними, а також вони по суті є поворотом на кут $\pi/4$ координат (x, y) (це легко побачити на малюнку):



Чорним помічено координатну вісь (x,y), а зеленим та синім нову вісь (x',y'). Бачимо, що вісь (x,y) потрібно повернути на кут 45 градусів та здвинути на одну одиницю вниз.

Отже наша матриця має вид $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Запишемо нашу гіперболу у координатах $\widetilde{\mathbf{x}}$:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{4} - \frac{\widetilde{y}^2}{1} = 1 \text{ або } \frac{\widetilde{x}^2}{1} - \frac{\widetilde{y}^2}{4} = 1$$

Отже, нам потрібно знайти не вираз $\mathbf{x}$, що залежить від $\widetilde{\mathbf{x}}$, а навпаки, тобто:

$$\mathbf{x} = \mathcal{R}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{p} \implies \widetilde{\mathbf{x}} = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

Обернена матриця: $\mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а тому:

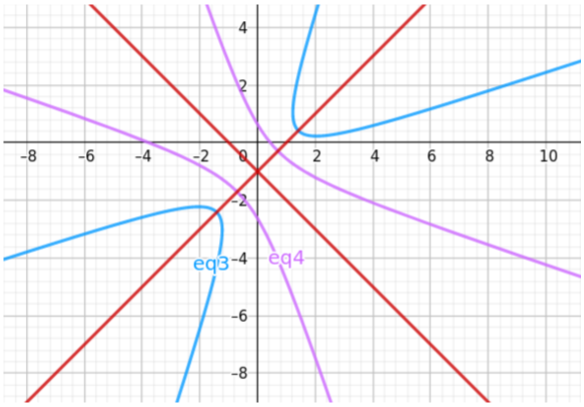
$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \implies \widetilde{x} = \frac{x+y+1}{\sqrt{2}}, \ \widetilde{y} = \frac{-x+y+1}{\sqrt{2}}$$

Підставимо це у обидва рівняння. Отримаємо:

$$\frac{(x+y+1)^2}{2\cdot 4} - \frac{(-x+y+1)^2}{2} = 1 \text{ або } \frac{(x+y+1)^2}{2} - \frac{(-x+y+1)^2}{8} = 1$$

Розписавши обидва рівняння, отримуємо:

$$-3x^2 + 10xy - 3y^2 + 10x - 6y - 11 = 0, \ 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 10x + 6y - 5 = 0$$



Червоним кольором помічені осі симетрії, а голубим та фіолетовими — рівняння гіпербол.

Завдання 3.

Перетворення коефіцієнтів рівняння квадріки при ортогональній заміні координат.

Відповідь: позначимо через $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ матрицю квадратної частини, через $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ лінійну частину, через γ вільний член і через $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ стовпчик координат у "початковому" базисі $\{\mathbf{e}_j\}$. Тоді ми можемо записати рівняння квадрики у двох варіантах:

$$\mathbf{x}^T \mathcal{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{b} + \gamma = 0 \text{ або } \langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \gamma = 0$$

Зараз ми будемо використовувати першу форму. Отже, за допомогою цього "матричного" виду ми можемо доволі легко записувати ортогональні перетворення переходу до іншої системи координат (а влучний вибір цього переходу може дуже спростити наше рівняння квадрики). Отже нехай маємо матрицю Q, що є матрицею, стопчики якої є координатами розкладання базисів $\{\mathbf{q}_j\}$ нової системи координат за векторами старого базису $\{\mathbf{e}_j\}$.

Зв'язок між старими координатами $\mathbf{x}$ та новими $\widetilde{\mathbf{x}}$ має вид $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$, де $\mathbf{x}_0$ — "зсув" координат. Маємо наступну лему.

Лема. Перетворення координат $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$ переводить рівняння квадрики $\mathbf{x}^T \mathcal{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{b} + \gamma = 0$ у іншу квадрику $\widetilde{\mathbf{x}}^T \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} + 2\widetilde{\mathbf{x}}^T \widetilde{\mathbf{b}} + \widetilde{\gamma} = 0$, де $\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mathbf{b}}, \widetilde{\gamma}$ — матриця, вектор та скаляр, що якимось чином залежать від $\mathcal{A}, \mathbf{b}, \gamma$ та $Q, \mathbf{x}_0$.

Доведення. Підставимо та будемо перетворювати наш вираз:

$$(Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0)^T \mathcal{A}(Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0)^T \mathbf{b} + \gamma = 0$$

$$((Q\widetilde{\mathbf{x}})^T + \mathbf{x}_0^T)\mathcal{A}(Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b} + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} + \gamma = 0$$

$$(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}(Q\widetilde{\mathbf{x}}) + (Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathcal{A}Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b} + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} + \gamma = 0$$

На цьому етапі позначимо $\widetilde{\gamma} = \mathbf{x}_0^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^T \mathbf{b} + \gamma$ та через $\widetilde{\mathcal{A}} = Q^T \mathcal{A} Q$. Отримаємо:

$$\widetilde{\mathbf{x}}^T \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathbf{x}} + (Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}^T Q^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b} + \widetilde{\gamma} = 0$$

Отже нам залишилось лише спростити вираз $(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}^T Q^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b}$. Згадаємо, що $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ для будь-яких $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, а також те, що матриця $\mathcal{A}$ є симетричною, тому $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$. Через це маємо:

$$(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 = (\mathcal{A}Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{x}_0 = \widetilde{\mathbf{x}}^T Q^T \mathcal{A}^T \mathbf{x}_0 = \widetilde{\mathbf{x}}^T Q^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0$$

Тому:

$$(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathcal{A}Q\widetilde{\mathbf{x}} + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b} = 2\widetilde{\mathbf{x}}^T Q^T \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + 2(Q\widetilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{b} = 2\widetilde{\mathbf{x}}^T (Q^T (\mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}))$$

Отже якщо замінити через $\widetilde{\mathbf{b}} = Q^T(\mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})$, отримаємо остаточно рівняння:

$$\widetilde{\mathbf{x}}^T \widetilde{\mathcal{A}} \widetilde{\mathbf{x}} + 2\widetilde{\mathbf{x}}^T \widetilde{\mathbf{b}} + \widetilde{\gamma} = 0$$

Більш докладно про $\mathbf{x} = Q\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$. В наступних розділах загальної теорії також знадобиться обернене перетворення: $\widetilde{\mathbf{x}} = Q^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = Q^T\mathbf{x} + \mathbf{p}$ якщо позначити $\mathbf{p} = -Q^T\mathbf{x}_0$. Якщо Q складена зі стовпчиків $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$, то $\mathbf{p} = -\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \ldots \\ \mathbf{q}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \ldots \\ x_0^n \end{pmatrix}$ або:

$$p_k = -\sum_{j=1}^{n} q_k^j x_0^j = -\langle \mathbf{q}_k, \mathbf{x}_0 \rangle$$

Тобто вектор $\mathbf{p}$ складається з скалярних добутків відповідного вектору $\mathbf{q}$ та $\mathbf{x}_0$.

Якщо обрати Q таким чином, що усі $\mathbf{q}_i$ є власними векторами $\mathcal{A}$, то таке перетворення дає дуже багато цікавих результатів. Проте, це вже тема іншого питання.

Завдання 4.

За допомогою інваріантів та напівінваріантів записати найпростіше рівняння поверхні

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$$

Розв'язок. Випишемо початкові “умови” завдання:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \gamma = 3$$

Запишемо матрицю $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \gamma \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Запишемо характеристичний поліном $\mathcal{A}$: $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 6)^2$. Отже нехай власні числа $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2$.

Інваріант I_3 матриці $\mathcal{A}$: $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 72$.

Інваріант матриці $\mathcal{B}$: $J = \det \mathcal{B} = -72$. Оскільки $I_3 \neq 0, J \neq 0$. Отже маємо рівняння:

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \widetilde{x}_j^2 + \frac{J}{I_3} = 0$$

Розпишемо:

$$6\widetilde{x}^2 + 6\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{z}^2 - 1 = 0 \implies \frac{\widetilde{x}^2}{1/6} + \frac{\widetilde{y}^2}{1/6} + \frac{\widetilde{z}^2}{1/3} = 1$$

Маємо еліпсоїд з півосями $a = \sqrt{1/6}, b = \sqrt{1/6}, c = \sqrt{1/3}$ (або точніше, сфероїд, бо $a = b$).