Домашня робота з диференціальної геометрії #5

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

21 березня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Знайдіть формулу для обчислення кривини довільної (класу $\mathcal{C}^2$) явно заданої кривої $y = F(x)$. Застосуйте знайдену формулу для обчислення кривини наступних явно заданих кривих:

$$y = \sin x,\ y = x^3$$

Проаналізуйте, в яких точках на кривій:

1. кривина обертається в нуль,
2. кривина приймає максимальне значення,
3. кривина приймає мінімальне значення.

Розв'язок. Спочатку знайдемо формулу для обчислення кривини. Для цього введемо параметр $t = x$, тоді параметрично маємо наступну формулу кривої:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Кривина знаходиться за наступною формулою:

$$k = \frac{\|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2}{\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2^3}$$

Перші і другі похідні мають вид:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{F} \end{bmatrix}, \ \ddot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{F} \end{bmatrix}$$

Норма першої похідної $\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \sqrt{1 + \dot{F}^2}$. Векторний добуток дорівнює (тут $\hat{\boldsymbol{x}}^3$ є базисом по x^3):

$$[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] = \det \begin{bmatrix} \dot{f}^1 & \dot{f}^2 \\ \ddot{f}^1 & \ddot{f}^2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}^3 = \det \begin{bmatrix} 1 & \dot{F} \\ 0 & \ddot{F} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}^3 = \ddot{F} \hat{\boldsymbol{x}}^3$$

Отже, модуль векторного добутку $\|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2 = |\ddot{F}|$. Тоді остаточно:

$$k(t) = \frac{|\ddot{F}|}{(1 + \dot{F}^2)^{3/2}}$$

Якщо перейти до змінної x:

$$k(x) = \frac{|F''(x)|}{(1 + (F'(x))^2)^{3/2}}$$

Пункт 1. Для функції $F(x) = \sin x$ маємо:

$$k(x) = \frac{|-\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}} = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$$

Бачимо, що кривизна обертається в нуль в точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. По суті це відповідає точкам на синусоїді, на яких пряма нахилена на $\pm\pi/4$ і відповідає "прямим" участкам.

Для аналізу максимума та мінімума помітимо, що якщо ми будемо збільшувати модуль синуса, то модуль косинуса буде відповідно зменшуватись. Але чим менший модуль косинуса, тим строго менший і знаменник, а це означає, що максимум і мінімум виразу $k(x)$ відповідає максимуму і мінімуму модуля синуса (більш строго, якщо замінити $t = |\sin x|$, то функція $k(t) = \frac{t}{(2-t^2)^{3/2}}$ монотонно зростає на $t \in [0, 1]$).

Отже маємо максимум кривини при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, це відповідає екстремумам синуса, а мінімальна кривина досягається у точках нульової кривини, тобто $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пункт 4. Для функції $F(x) = x^3$ маємо:

$$k(x) = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$$

Тут вже так легко не проаналізувати. Знаходимо точки екстремума:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{6 \cdot \operatorname{sign}(x)(1+9x^4)^{3/2} - 6|x| \cdot 36x^3 \cdot \frac{3}{2}(1+9x^4)^{1/2}}{(1+9x^4)^3} = \frac{6\sqrt{1+9x^4}(\operatorname{sign}(x)(1+9x^4) - 54|x|x^3)}{(1+9x^4)^3} = 6 \cdot \frac{\operatorname{sign}(x) - 45x^4 \operatorname{sign}(x)}{(1+9x^4)^{5/2}} = \frac{6 \cdot \operatorname{sign}(x)}{(1+9x^4)^{5/2}}(1-45x^4)$$

Для знаходження точок екстремуму достатньо дослідити функцію $h(x) = 1 - 45x^4$. Воно обертається в нуль у точках $x^4 = \frac{1}{45}$, тобто $x_{+/-} = \pm\frac{1}{\sqrt{3\sqrt{5}}}$.

Розглянемо значення кривини в цих точках:

$$k(x_+) = k(x_-) = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Окрім цього особливою точкою звичайно є $x = 0$. В цій точці кривина дорівнює 0. Нарешті,

$$\lim_{x \to \pm\infty} k(x) = 0$$

Отже бачимо, що точки, що відповідають $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3\sqrt{5}}}$ відповідають точкам максимальної кривизни зі значенням $\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$. Мінімальна кривизна у точці $(0, 0)$ і дорівнює 0.

Завдання 2.

Обчисліть кривину наступної плоскої кривої:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a/\cosh t \\ a(t + \tanh t) \end{bmatrix}, P(t = t_0)$$

Намалюйте криві та спробуйте, дивлячись на малюнок, висловити гіпотези стосовно точок нульової кривини, точок максимальної кривини, точок мінімальної кривини на кожній з кривих. Підтвердіть або спростуйте гіпотези, проаналізувавши отримані функції кривини.

Розв'язок. Знайдемо першу і другу похідну:

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t) = \begin{bmatrix} -a\sinh t/\cosh^2 t \\ a(1 + 1/\cosh^2 t) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{f}}(t) = \left[\frac{a}{2\cosh^3 t}(\cosh 2t - 3), -\frac{2a\sinh t}{\cosh^3 t}\right]^\top$$

Модуль першої похідної:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2\cosh^2 t}(7 + \cosh t)} = \frac{a}{\cosh t}\cdot\sqrt{\frac{7 + \cosh t}{2}}$$

Векторний добуток дорівнює (тут $\hat{\boldsymbol{x}}^3$ є базисом по x^3):

$$[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] = \det\begin{bmatrix} \dot{f}^1 & \dot{f}^2 \\ \ddot{f}^1 & \ddot{f}^2 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^3 =$$
$$\det\begin{bmatrix} -a\sinh t/\cosh^2 t & a(1 + 1/\cosh^2 t) \\ a(\cosh 2t - 3)/2\cosh^3 t & -2a\sinh t/\cosh^3 t \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}^3 =$$
$$-\frac{a^2(\cosh 2t - 5)}{2\cosh^3 t}\hat{\boldsymbol{x}}^3$$

Отже остаточно маємо, що модуль векторного добутку:

$$\|[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2 = \frac{a^2|\cosh 2t - 5|}{2\cosh^3 t}$$

Тоді кривина:

$$k(t) = \frac{2\sqrt{2}a^2|\cosh 2t - 5|\cosh^3 t}{2a^3\cosh^3 t(7+\cosh t)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{|\cosh 2t - 5|}{(7+\cosh t)^{3/2}}$$

Побудуємо графік і спробуємо вгадати, де будуть точки мінімальної, максимальної і нульової кривизни (див. рис. 1).

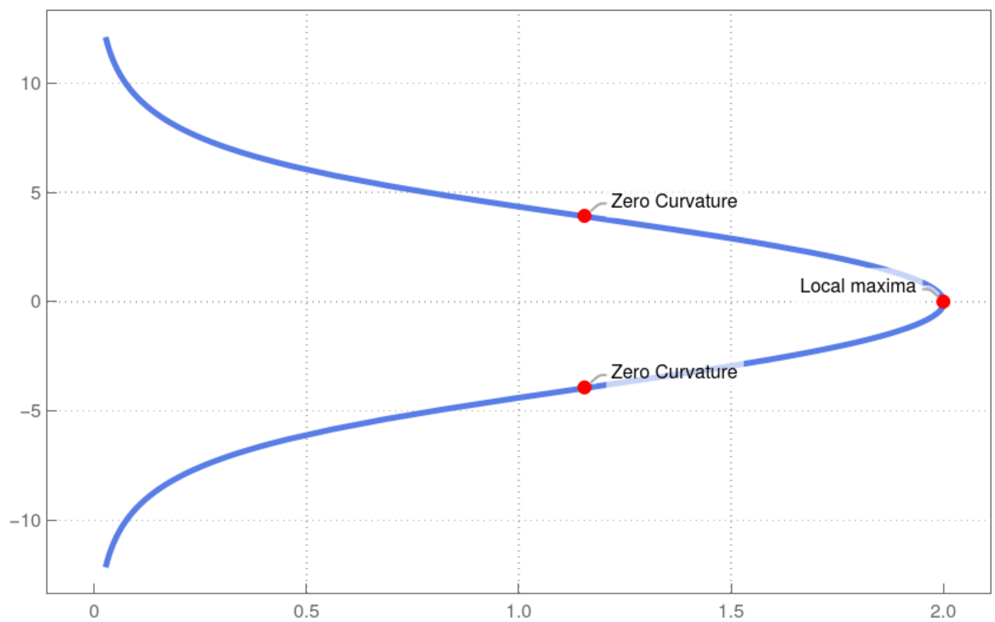

Рис. 1: Малюнок кривої для $a = 2.0$, $t \in [-5, 5]$

Можемо інтуїтивно побачити, що точка нульової кривини буде десь між $x = 1.0$ та $x = 1.5$. Окрім цього, у цієї кривої є асимптота $x = 0$ і тому при прямуванні параметра на $\pm\infty$ наша кривина буде прямувати на нескінченність. При цьому точка $t = 0$ (це відповідає “виступу”, найправішій точці на кривій) буде з великою кривиною, але меншою за значення в точках, умовно, з координатою $x = 0.1$ і менше, тому це скоріше за все буде локальним максимумом функції $k(t)$.

Дійсно, якщо побудувати функцію $k(t)$ (див. рис. 2), то бачимо той характер, що ми описали вище.

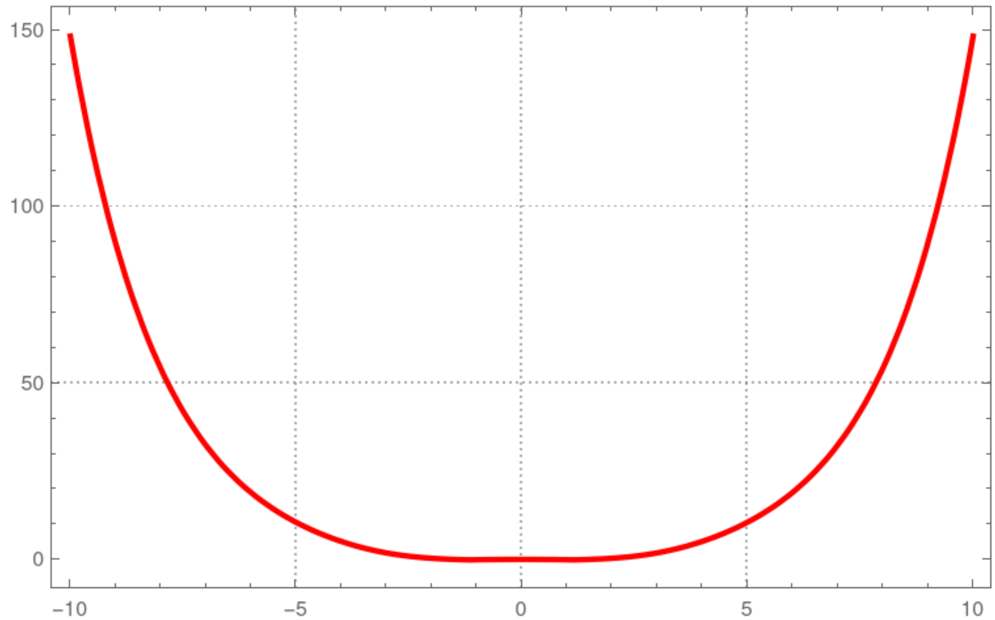

Рис. 2: Графік $k(t)$

Точки з нульовою кривиною відповідають параметру $t = \pm\frac{1}{2}\cosh^{-1} 5$. Точка $t = 0$ відповідає локальному максимуму, кривина в цій точці дорівнює $k(0) = \frac{1}{8}$, але це не є глобальним максимом, бо при $t \to \pm\infty$ наша кривина $k \to +\infty$.

Завдання 3.

Умова. Обчисліть кривину та скрут наступної кривої γ в тримірному просторі:

$$\gamma : \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} c\cos\beta t + r\cos\alpha t\cos\beta t \\ c\sin\beta t + r\cos\alpha t\sin\beta t \\ r\sin\alpha t \end{bmatrix}$$

1. Проаналізуйте, в залежності від значень додатних параметрів c, r, α, β, коли радіус-вектор кривої γ є періодичною вектор функцією, а крива γ є замкнутою.

2. Обчисліть натуральний параметр s на кривій γ, який відраховується відточки $(t = 0)$.
3. Обчисліть кривину та скрут кривої γ. Проаналізуйте наявність точок нульової кривини на кривій γ, а якщо вони існують – що відбувається в цих точках зі скрутом.
4. Чи може задана крива γ бути плоскою при якихось значеннях додатних параметрів c, r, α, β?
5. Спробуйте намалювати криву γ при якихось конкретних значеннях c, r, α, β.

Відповідь.

Пункт 1. Позначимо:

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{bmatrix} c + r\cos\alpha t \\ c + r\cos\alpha t \\ r\sin\alpha t \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} \cos\beta t \\ \sin\beta t \\ 1 \end{bmatrix}$$

то маємо

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{a}(t) \otimes \boldsymbol{b}(t)$$

де $\otimes$ позначає покомпонентний добуток. Причому, вектор-функція $\boldsymbol{a}(t)$ має період $T_a = \frac{2\pi}{\alpha}$, а вектор-функція $\boldsymbol{b}(t)$ має період $T_b = \frac{2\pi}{\beta}$. Отже, добуток цих функцій є періодичним лише якщо $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$. Інший можливий випадок це якщо $r = 0$, тоді функція завжди періодична оскільки $\boldsymbol{a}(t) \equiv c \cdot \mathbf{1}_3$. Також окремо або одночасно якщо $\beta = 0, \alpha = 0$.

Відповідь. Якщо $r = 0$ або $\alpha = 0$ або $\beta = 0$ або якщо $\alpha, \beta, r \neq 0$, то $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

Пункт 2. Далі обмежуть розгляданням випадку, коли $c = 0$. Як показали експерименти, цей параметр не впливає сильно на характер кривої і трошки її “нахиляє”.

Знайдемо першу похідну:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -r(\alpha\cos\beta t\sin\alpha t + \beta\cos\alpha t\sin\beta t) \\ r(\beta\cos\alpha t\cos\beta t - \alpha\sin\alpha t\sin\beta t) \\ \alpha r\cos\alpha t \end{bmatrix}$$

Модуль:

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 = r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \alpha t}$$

Щоб перейти до натуральної параметризації, потрібно розв'язати рівняння і знайти $t(s)$:

$$s = \int_0^t r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \alpha t} dt = \alpha r \int_0^t \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cos^2 \alpha t} dt$$

Цей інтеграл зводиться до еліптичного:

$$\frac{s}{r} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} E\left(\alpha t, \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

Пункти 3-4. Знайдемо другу похідну:

$$\ddot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -r(\alpha^2 + \beta^2)\cos \alpha t \cos \beta t + 2\alpha\beta r \sin \alpha t \sin \beta t \\ -r(\alpha^2 + \beta^2)\cos \alpha t \sin \beta t + 2\alpha\beta r \cos \beta t \sin \alpha t \\ -r\alpha^2 \sin \alpha t \end{bmatrix}$$

Далі потрібно знаходити модуль векторного добутку $\|[\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2$. Обмежусь лише відповіддю, бо розрахунки виходять величезні:

$$\|[\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2^2 = \frac{r^4}{8}(8\alpha^6 + 28\alpha^4\beta^2 + 13\alpha^2\beta^4 + 3\beta^6 +$$
$$4\beta^2(-\alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\cos 2\alpha t + (-\alpha^2\beta^4 + \beta^6)\cos 4\alpha t)$$

Далі спрощу собі трохи життя вважаючи $\alpha = \beta$. Тоді вираз стає зовсім простим:

$$\|[\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}]\|_2 = \alpha^3 r^2 \sqrt{\frac{13 + 3\cos 2\alpha t}{2}}$$

Тоді кривина:

$$k = \frac{2\sqrt{13 + 3\cos 2\alpha t}}{r(3 + \cos 2\alpha t)^{3/2}}$$

Достатньо легко бачити, що вона ніколи не обертається у нуль, бо $\cos 2\alpha t = -\frac{13}{3}$ не має розв'язків.

Що стосується скруту, то змішаний добуток і в загальному вигляді виглядає "зносно":

$$(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}, \dddot{\boldsymbol{f}}) = \frac{\alpha\beta r^3}{2}\cos\alpha t(4\alpha^4 + 7\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + (\beta^4 - \alpha^2\beta^2)\cos 2\alpha t)$$

Але все одно обмежимось випадком $\alpha = \beta$. Отримаємо:

$$(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}, \dddot{\boldsymbol{f}}) = 6\alpha^6 r^3 \cos\alpha t$$

Тоді скрут:

$$\kappa = \frac{|(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}, \dddot{\boldsymbol{f}})|}{k^2} = \frac{3r^5\alpha^6\cos\alpha t(3 + \cos 2\alpha t)^3}{26 + 6\cos 2\alpha t}$$

Як бачимо, скрут вже може обертатись у нуль. В загальному випадку це відбувається коли:

$$\left|\frac{4\alpha^4 + 7\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2\beta^2 - \beta^4}\right| < 1$$

а також, як і у спрощенному варіанті, у точках $t = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}k$. Хоча, як показали експерименти, нерівність вище не виконується при жодних α, β, але це потрібно окремо теоретично перевірити.

Завдання 5.

Отже, спочатку запишемо рівняння нашої кривої у $\mathbb{R}^2$ перед тим, як ми почали крутити прямокутники. В такому разі ми можемо задати цю криву наступним чином:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{cases} [-1 - \cos t, -\sin t]^\top, \ t \in [0, \pi] \\ [1 + \cos t, -\sin t]^\top, \ t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

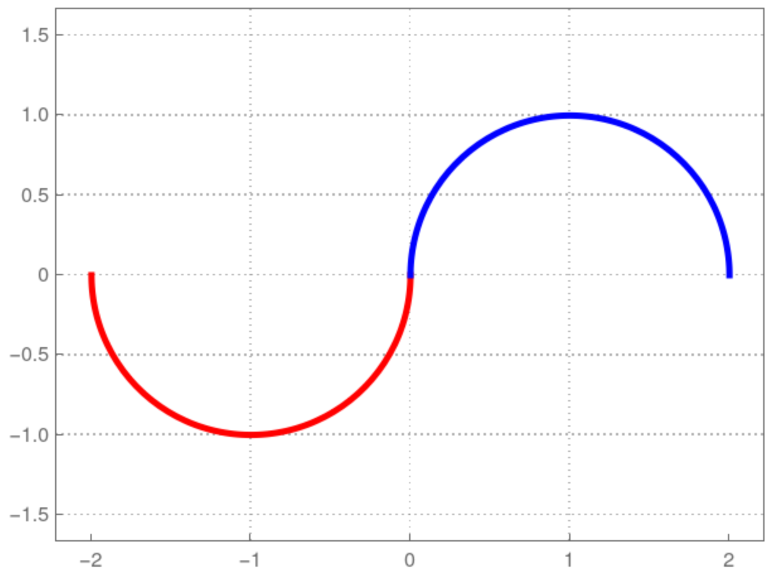

Рис. 3: Малюнок кривої до розгортання

Ця крива зображена на 3. Тут ми вважаємо, що сторона квадрата дорівнює двом умовним одиницям, але насправді це не впливає на характер кривої.

Далі переходимо у $\mathbb{R}^3$. Будемо вважати, що уся ця наша кривулька знаходиться на площині $z = 0$. Тоді до повертання маємо 2 криві:

$$\gamma_1 : \boldsymbol{f}_1(t) = \begin{bmatrix} -1-\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in [0,\pi],\ \ \gamma_2 : \boldsymbol{f}_2(t) = \begin{bmatrix} 1+\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in [\pi, 2\pi]$$

Далі повернімо першу криву γ_1 на кут $-\pi/4$, а другу γ_2 на $+\pi/4$ в площині x^1x^3 за допомогою множення на матриці

$$\mathcal{R}_+ = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_- = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4) & 0 & -\sin(-\pi/4) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\pi/4) & 0 & \cos(-\pi/4) \end{bmatrix}$$

Отримаємо 2 нові криві:

$$\gamma_1' : \boldsymbol{f}_1'(t) = \mathcal{R}_-\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -(1+\cos t)/\sqrt{2} \\ -\sin t \\ (1+\cos t)/\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \in [0,\pi],$$

$$\gamma_2' : \boldsymbol{f}_2'(t) = \mathcal{R}_+\boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} (1+\cos t)/\sqrt{2} \\ -\sin t \\ (1+\cos t)/\sqrt{2} \end{bmatrix}, t \in [\pi,2\pi]$$

Ця крива вже зображена на рисунку 4:

Зручно записати нашу криву у виді:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \left[\frac{1+\cos t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sign}(t-\pi), -\sin t, \frac{1+\cos t}{\sqrt{2}}\right]^\top, \ t \in [0,2\pi]$$

Далі проаналізуємо цю криву на неперервність та диференційованість. Насправді окрім точки $t = \pi$ в нас все чудово і насправді функція є нескінченно диференційованою (тобто належить класу $\mathcal{C}^\infty$). Але в цій точці виникають проблеми, причому тільки по компоненті $\varphi^1(t)$, тому обмежимось розгляданням лише її. Функція є очевидно неперервною в цій точці. Щодо першої похідної, то тут потрібно проаналізувати ліву і праву похідну:

$$\dot{\varphi}^1_+(\pi) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{\varphi^1(\pi+\delta) - \varphi^1(\pi)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{(1+\cos(\pi+\delta))\operatorname{sign}(\delta)}{\sqrt{2}\delta} =$$
$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-\cos\delta}{\sqrt{2}\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2\sin^2\delta/2}{\sqrt{2}\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2(\delta/2)^2}{\sqrt{2}\delta} = 0$$

$$\dot{\varphi}^1_-(\pi) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{\varphi^1(\pi-\delta) - \varphi^1(\pi)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{(1+\cos(\pi-\delta))\operatorname{sign}(-\delta)}{\sqrt{2}\delta} =$$
$$-\lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-\cos\delta}{\sqrt{2}\delta} = 0$$

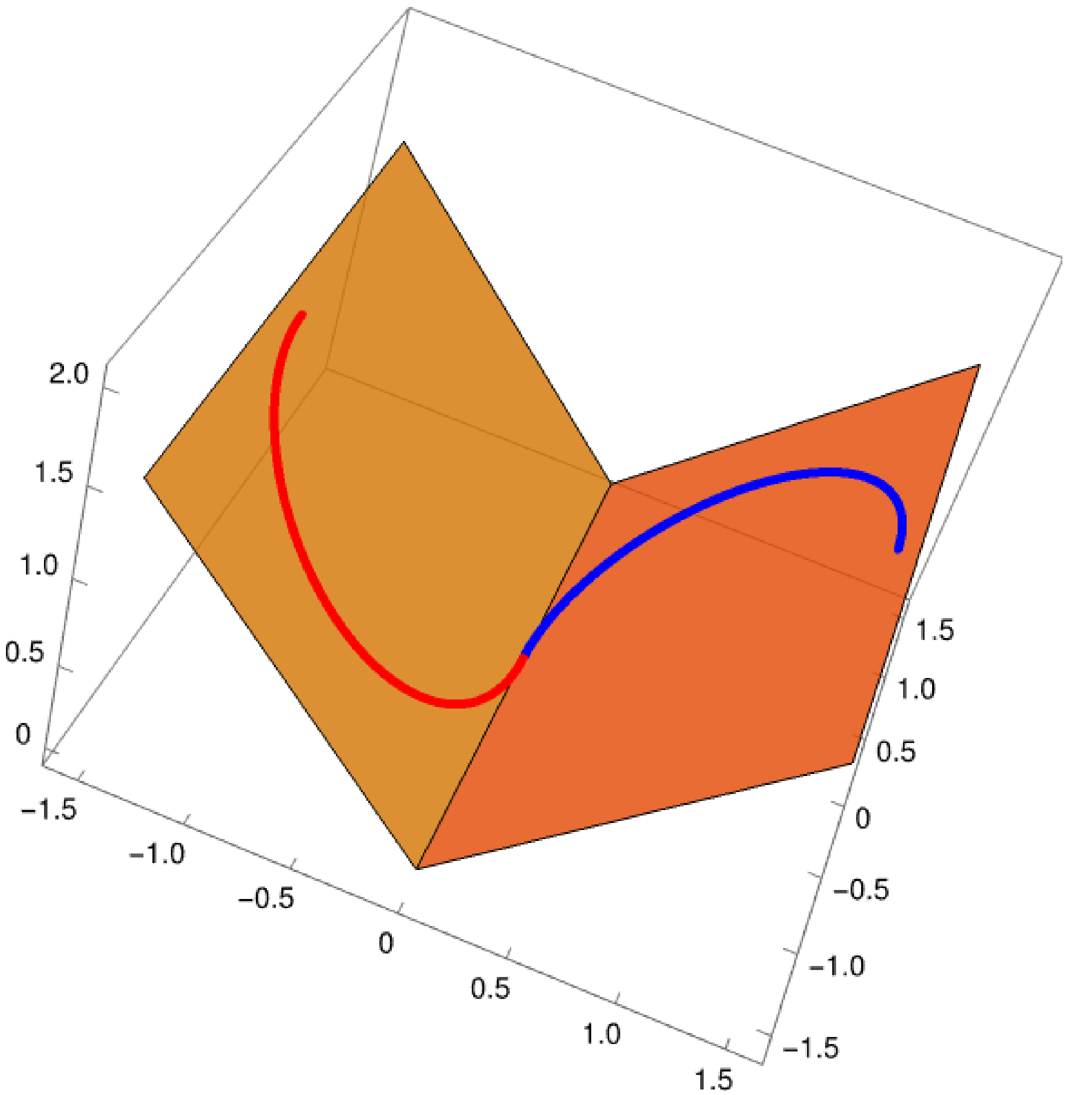

Рис. 4: Малюнок кривої після розгортання

Таким чином бачимо, що $\dot{\varphi}^1(\pi) = 0$, а похідну ми можемо подати у вигляді:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left[-\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{sign}(t-\pi), -\cos t, -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right]^\top, t \in [0, 2\pi]$$

Ось ця функція вже не є диференційованою в точці $t = \pi$, бо праві та ліві похідні відрізняються по знаку. Тому насправді $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1(0, 2\pi)$.

Чи є крива регулярною? Ні, бо у $t = \pi$ маємо нульову похідну. Чи є вона плоскою? Ні, це видно з малюнка.

Знайдемо векторне поле дотичних $\boldsymbol{\tau}(t)$. Насправді, воно просто дорівнює дотичному вектору, бо його модуль є одиницею. Він є неперервним, проте його дотична не є неперервною у $t = \pi$.

Щодо головної нормалі та бінормалі, то тут ми можемо аналізувати лише точки окрім $t = \pi$, оскільки в ній друга похідна не визначена, а отже і нормаль/бінормаль.

Вирази для нормалі і бінормалі мають вид:

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\mathrm{sign}(\pi - t)}{\sqrt{2}}\right]^\top, \ \boldsymbol{\nu}(t) = \left[\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{sign}(\pi - t), 1, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right]^\top$$

Бачимо, що $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi] \setminus \{\pi\})$.

Оскільки як довжина бінормалі, так і довжина вектора нормалі дорівнює 1, то і кривина в усіх точках (окрім $t = \pi$) дорівнює 1. Щодо скруту, то змішаний добуток дорівнює 0 всюди, а отже і скрут також.