Контрольна робота з диференціальних рівнянь #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

18 квітня 2023 р.

Варіант 6.

Завдання 1.

Умова. Розв'язати рівняння

$$y = x\frac{dy}{dx} - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

Розв'язок. Перед нами рівняння Клеро, тобто $y = xy' + \psi(y')$ де $\psi(t) = -4t^3$. Введемо параметр $p = \frac{dy}{dx}$. Тоді маємо:

$$y = xp - 4p^3$$

Беремо диференціал від обох частин:

$$dy = pdx + xdp - 12p^2dp$$

Врахуємо, що $dy = pdx$, тоді:

$$pdx = pdx + xdp - 12p^2dp = 0 \to (x - 12p^2)dp = 0$$

Отже перший випадок, це $dp = 0 \to p = C$, де $C = \text{const}$. Тоді:

$$y = xp = 4p^3 = Cx - 4C^3$$

є розв'язком нашого рівняння.

Коментар. В загальному вигляді розв'язок рівняння Клеро це $y = Cx + \psi(C)$. Оскільки в нашому випадку $\psi(C) = -4C^3$, то дійсно отримуємо так само $y = Cx - 4C^3$.

Якщо ж $x = 12p^2 \to p = \pm\sqrt{\frac{x}{12}}$, то маємо:

$$y = \pm\left(\frac{x}{3}\right)^{3/2}$$

І цей розв'язок так само підходить.

Відповідь. $y = Cx - 4C^3$ та $y = \pm(x/3)^{3/2}$ є розв'язками.

Завдання 2.

Умова. Розв'язати рівняння

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Розв'язок. Робимо підстановку $\frac{dy}{dx} = z(y)$, в такому разі:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

Отже маємо:

$$z^2 + 2yz\frac{dz}{dy} = 0$$

Помічаємо, що перед тим, як скоротити на z, можемо загубити розв'язок $z = 0$. Дійсно, тоді $\frac{dy}{dx} \equiv 0$, звідки $y = C$ де $C = \text{const}$, що підходить.

В такому разі рухаємося далі:

$$z + 2y\frac{dz}{dy} = 0 \to \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y} \to z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

Отже:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \to \sqrt{y}dy = C_1 dx \to \frac{2}{3}\sqrt{y^3} = C_1 x + C_2$$

Або:
$$\sqrt{y^3} = \frac{3C_1}{2}\left(x + \frac{3C_2}{2C_1}\right) = \widetilde{C}_1(x + \widetilde{C}_2)$$

Остаточно $y^3 = \hat{C}_1(x + \widetilde{C}_2)^2$.

Відповідь. $y^3 = C_1(x + C_2)^2$ або $y = C$, де $C, C_1, C_2 = \text{const}$.

Завдання 3.

Умова. Розв'язати рівняння
$$(x^2 + 1)((y')^2 - yy'') = xyy'$$

Розв'язок. Перепишемо рівняння у наступному вигляді:
$$\frac{(y')^2 - yy''}{yy'} = \frac{x}{1 + x^2}$$

Далі "попрацюємо" з лівою частиною:
$$\frac{(y')^2 - yy''}{yy'} = \frac{y'}{y} - \frac{y''}{y'} = (\ln y)' - (\ln y')' = (\ln y - \ln y')' = \left(\ln \frac{y}{y'}\right)'$$

Помітимо, що при діленні на y ми загубили $y = 0$. Нетрудно бачити, що $y \equiv C, C = \text{const}$ є розв'язком.

Продовжимо знаходити загальний розв'язок:
$$\left(\ln \frac{y}{y'}\right)' = \frac{x}{1 + x^2} \to \ln \frac{y}{y'} = \int \frac{xdx}{1 + x^2} = \ln \sqrt{1 + x^2} + C_1$$

Отже:
$$\ln \frac{y}{y'} - \ln \sqrt{1 + x^2} = C_1 \to \ln \frac{y}{y'\sqrt{1 + x^2}} = C_1 \to \frac{y}{y'\sqrt{1 + x^2}} = \hat{C}_1$$

Звідки нарешті маємо рівняння першого порядку:

$$\hat{C}_1 y' \sqrt{1+x^2} = y \to \frac{dy}{y} = \widetilde{C}_1 \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Звідси:

$$\ln y = -\widetilde{C}_1 \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + C_2$$

Або можна переписати як:

$$y = y_0 \cdot \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{\alpha}$$

Відповідь. Або $y \equiv \text{const}$, або $y = y_0 \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{\alpha}$ де $y_0, \alpha = \text{const}$.

Завдання 4.

Умова. Розв'язати рівняння і знайти особливий розв'язок

$$2xy' - y = \ln y'$$

Розв'язок. Перед нами рівняння Лагранжа:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y')$$

Де в нашому випадку $\varphi(t) = -2t, \psi(t) = -\ln t$.

Робимо заміну $y' = p$. Тоді маємо рівняння

$$2xp - y = \ln p$$

Беремо диференціали від обох частин:

$$2xdp + 2pdx - dy = \frac{dp}{p}$$

Заміняємо $dy = pdx$:

$$2xdp + 2pdx - pdx = \frac{dp}{p} \to 2xdp + pdx = \frac{dp}{p}$$

Отже маємо рівняння:

$$2pxdp + p^2dx = dp$$

Ділимо на dp:

$$p^2\frac{dx}{dp} + 2px - 1 = 0 \to \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}\cdot x = \frac{1}{p^2}$$

Маємо однорідне рівняння. Спочатку розв'язуємо рівняння:

$$\frac{d\widetilde{x}}{dp} + \frac{2\widetilde{x}}{p} = 0 \to \widetilde{x} = \frac{C}{p^2}$$

Тому шукаємо розв'язок у формі $x = \frac{C(p)}{p^2}$, маємо

$$\frac{pC'(p) - 2C}{p^3} + \frac{2C}{p^3} = \frac{1}{p^2} \to C'(p) = 1 \to C(p) = p + \widetilde{C}$$

Отже остаточно:

$$\frac{p + \widetilde{C}}{p^2} = x$$

Звідси:

$$p = \frac{1}{2x} \pm \frac{\sqrt{1 + \hat{C}x}}{2x}$$

В такому разі:

$$\left(1 \pm \sqrt{1 + \hat{C}x}\right) - y = \ln\left(\frac{1}{2x} \pm \frac{\sqrt{1 + \hat{C}x}}{2x}\right)$$

Отже звідси:

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + \hat{C}x} - \ln\left(\frac{1}{2x} \pm \frac{\sqrt{1 + \hat{C}x}}{2x}\right)$$

Окрім цього, оскільки ми купу разів ділили на p, то варто розглянути випадок $p = 0$, що відповідає $y = \text{const}$, проте воно не підходить, оскільки отримаємо $\ln(0)$.

Проаналізуємо на особливий розв'язок. Маємо:

$$\begin{cases} 2xp - y = \ln p \\ 2x = \frac{1}{p} \end{cases}$$

Звідси $p = \frac{1}{2x}$, тоді:

$$1 - y = \ln \frac{1}{2x} \to y = 1 - \ln \frac{1}{2x}$$

Перевіримо умову особливого розв'язку:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0(x_0) \\ y'(x_0) = y_0'(x_0) \end{cases}$$

Тобто:

$$\begin{cases} 1 \pm \sqrt{1 + Cx_0} - \ln\left(\frac{1}{2x_0} \pm \frac{\sqrt{1+Cx_0}}{2x_0}\right) = 1 - \ln \frac{1}{2x_0} \\ \frac{2+Cx_0+2\sqrt{1+Cx_0}}{2x_0+2x_0\sqrt{1+Cx_0}} = \frac{1}{x_0} \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $Cx_0 = 0$. Випадок $x_0 = 0$ не підходить, оскільки отримаємо невизначений вираз у першому рівнянні. Отже залишається лише $C = 0$. Якщо ж $C = 0$, то отримуємо в першому рівняння $\ln 2 = 1$, що звичайно неправда. Отже, $y = 1 - \ln \frac{1}{2x}$ не є особливими розв'язком.

Відповідь. $y = 1 \pm \sqrt{1 + Cx} - \ln\left(\frac{1}{2x} \pm \frac{\sqrt{1+Cx}}{2x}\right)$ де $C = \text{const}$. Особливих розв'язків немає.