Домашня робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання О3

Умова.

Довести, що

1. кільце є замкненим відносно операцій $\cap$ та Δ;
2. об'єднання та перетин скінченної сукупності елементів кільця належать до кільця.

Розв'язок.

1. Нехай маємо кільце $\mathcal{H}$. Тоді, згідно означенню, справедливо:

1. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cup B \in \mathcal{H}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B \in \mathcal{H}$

Кільце є замкненим відносно $\cap$ якщо $\forall A, B \in \mathcal{H}$ буде справедливо $A \cap B \in \mathcal{H}$. Цю властивість було доведено на лекції наступним чином: запишемо

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

Згідно означенню 1 різниця множин буде належати $\mathcal{H}$, а отже після двічі застосування різниці знову опиняємось у $\mathcal{H}$.

Доведемо тепер, що $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \,\Delta\, B \in \mathcal{H}$. Згідно означенню:

$$A \,\Delta\, B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$

Згідно властивості 2, маємо $B \setminus A \in \mathcal{H}, A \setminus B \in \mathcal{H}$. Згідно властивості 1, об'єднання елементів з кільця дасть елемент кільця, а отже весь вираз $A\Delta B$ знаходиться в кільці.

2. Нехай маємо $\{H_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{H}, n > 1$. Потрібно довести $\bigcup_{k=1}^n H_k, \bigcap_{k=1}^n H_k \in \mathcal{H}$.

Випадок $n = 2$ доведений з поперднього пункту (для операції $\cap$) та з означення (для операції $\cup$).

Якщо $n > 2$, то можна довести, наприклад, за індукцією. База в нас вже є. Отже, нехай твердження справедливе для $m > 2$, тобто $\bigcup_{k=1}^m H_k =: S_m \in \mathcal{H}$. Тоді це справедливо і для $m + 1$, оскільки $\bigcup_{k=1}^{m+1} H_k = S_m \cup H_{m+1} \in \mathcal{H}$, що випливає з означення кільця. Аналогічно можна довести і для $\cap$.

Завдання C3

Умова. Довести, що сукупність усіх обмежених підмножин прямої $\mathbb{R}$ утворює кільце, але не є ані σ-кільцем, ані σ-алгеброю.

Розв'язок. Нехай маємо сукупність обмежених підмножин $\mathcal{H}$ прямої $\mathbb{R}$. Тоді

$$\forall H \in \mathcal{H}\ \exists \rho > 0\ \forall x, y \in H : d(x, y) < \rho$$

Доведемо, що $\mathcal{H}$ є кільцем. Спочатку доведемо, що $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \cup B \in \mathcal{H}$. Тобто, нехай ми знаємо, що

$$\exists \rho_A > 0\ \forall x, y \in A : d(x, y) < \rho_A$$
$$\exists \rho_B > 0\ \forall x, y \in B : d(x, y) < \rho_B$$

Нам потрібно знайти таке $\rho_{A\cup B} > 0$, що $\forall x, y \in A \cup B : d(x, y) < \rho_{A\cup B}$. Для цього покладемо $\rho_{A\cup B} := \rho_A + \rho_B$. Тоді, який елемент б ми не взяли, будь це з A або B, все одно відстань між ними буде менша за $\rho_A + \rho_B$.

Тепер покажемо, що $A \setminus B \in \mathcal{H}$. Тобто знайдемо таке $\rho_{A\setminus B} > 0$, що $\forall x, y \in A \setminus B : d(x, y) < \rho_{A\setminus B}$. Для цього достатньо покласти $\rho_{A\setminus B} := \rho_A$, оскільки віднімання від A якоїсь частини не збільшує "радіус" множини.

Доведемо, що $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем. Згідно означенню, має виконуватись:

1. $\forall \{H_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H} : \bigcup_{k=1}^\infty H_k \in \mathcal{H}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{H} : A \setminus B \in \mathcal{H}$

Друга властивість, як ми довели вище, виконується. Доведемо, що

$$\exists \{H_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{H} : \bigcup_{k=1}^\infty H_k \notin \mathcal{H}$$

Дійсно, візьмем $H_k := [k, k+1]$. Тоді якщо позначити $S_n := \bigcup_{k=1}^n H_k$, то $S_n = [1, n+1]$. В такому разі $\lim_{n\to\infty} S_n = [1, +\infty)$, що звичайно не є обмеженою множиною, тобто вона не належить $\mathcal{H}$.

Оскільки $\mathcal{H}$ не є σ-кільцем, то вона і не є σ-алгеброю. Окрім цього, $\mathbb{R} \notin \mathcal{H}$, оскільки $\mathbb{R}$ не є обмеженою.

Завдання Д1

Умова. Довести, що клас множин є кільцем, якщо він замкнений відносно 1. $(\cup, \Delta)$ та 2. $(\cap, \Delta)$.

Розв'язок.

1. Нехай маємо $\mathcal{H}$, що є замкненою відносно $(\cup, \Delta)$. Нам потрібно довести замкнення відносно $(\cup, \setminus)$, тобто лише відносно $\setminus$. Візьмемо дві множини $A, B \in \mathcal{H}$. Тоді помітимо, що:

$$A \setminus B = (A \cup B)\Delta B$$

Дійсно,

$$(A \cup B)\Delta B = ((A \cup B) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup B)) = (A \setminus B) \cup \emptyset = A \setminus B$$

Оскільки $A \cup B \in \mathcal{H}$, то і $A \setminus B = (A \cup B)\Delta B \in \mathcal{H}$.

2. Нехай $\mathcal{H}$ замкнена відносно $(\cap, \Delta)$. Доведемо замкнення відносно $\setminus$. Маємо

$$A \setminus B = (A\Delta B) \cap A$$

Знову, ми виразили все через операції $(\Delta, \cap)$, тому звідси випливає замкненість через $\setminus$.

Об'єднання можемо записати як:

$$A \cup B = \underbrace{(A\Delta B)}_{\in\mathcal{H}} \Delta \underbrace{(A \cap B)}_{\in\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$$

Отже, ми довели замкненість по $(\cup, \setminus)$, що означає, що $\mathcal{H}$ є кільцем.