Залікова робота з диференціальних рівнянь

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 травня 2023 р.

Варіант 6.

Завдання.

Умова. Знайти визначник крайової задачі та функцію Гріна:

$$\begin{cases} y'' - 4y = f(x) \\ y(0) - y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Спочатку згадаємо, що таке визначник крайової задачі:

Означення 1: Визначник крайової задачі

Якщо ми маємо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t) y^{(n-j)} = f(t),\ a_k(1), f(t) \in \mathcal{C}[a,b]$$

з крайовими умовами

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y^{(j-1)}(a) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y^{(j-1)}(b) = 0,\ i = 1, \dots, n$$

Якщо $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{n}$ є ФСР ЛОР, то **визначником** крайової задачі називається

$$\Delta = \det\{U_i(\varphi_j)\}_{i,j=1}^{n}$$

Для нашого конкретного випадку маємо $n = 2, a = 0, b = 1$. Крайові умови:

$$U_1(y) = y(0) - y(1),\ U_2(y) = y'(1)$$

Для знаходження ФСР ЛОР знаходимо розв'язок $y'' - 4y = 0$. Характеристичний поліном $\lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$, отже маємо ФСР $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$. Отже, наш визначник, якщо позначити $\varphi_1(x) = e^{2x}, \varphi_2(x) = e^{-2x}$:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(0) - \varphi_1(1) & \varphi_2(0) - \varphi_2(1) \\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 - e^2 & 1 - e^{-2} \\ 2e^2 & -2e^{-2} \end{bmatrix} = \\ -2e^{-2} + 2 - 2e^2 + 2 = 4 - 2e^{-2} - 2e^2 = 4(1 - \cosh 2) \neq 0$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то крайова задача має єдиний розв'язок. Тепер, знайдемо функцію Коші:

$$K(x,\xi) = \frac{\det\begin{bmatrix}\varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}\varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi)\\ \varphi_1'(\xi) & \varphi_2'(\xi)\end{bmatrix}} = \frac{\det\begin{bmatrix}e^{2\xi} & e^{-2\xi}\\ e^{2x} & e^{-2x}\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}e^{2\xi} & e^{-2\xi}\\ 2e^{2\xi} & -2e^{-2\xi}\end{bmatrix}} =$$
$$\frac{e^{-2x+2\xi} - e^{2x-2\xi}}{-2-2} = \frac{1}{2}\sinh 2(x-\xi)$$

Отже, шукатимемо функцію Гріна у вигляді:

$$g(x,\xi) = \begin{cases} K(x,\xi) + \sum_{i=1}^2 C_i(\xi)\varphi_i(x), & x > \xi \\ \sum_{i=1}^2 C_i(\xi)\varphi_i(x), & x < \xi \end{cases}$$

Або якщо розписати:

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sinh 2(x-\xi) + C_1(\xi)e^{2x} + C_2(\xi)e^{-2x}, & x > \xi \\ C_1(\xi)e^{2x} + C_2(\xi)e^{-2x}, & x < \xi \end{cases}$$

Отже, підставляємо її у наші крайові умови:

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) - C_1(\xi)e^2 - C_2(\xi)e^{-2} = \frac{1}{2}\sinh 2(1-\xi) \\ \cosh 2(1-\xi) + 2C_1(\xi)e^2 - 2C_2(\xi)e^{-2} = 0 \end{cases}$$

Або:
$$\begin{cases} (1-e^2)C_1(\xi) + (1-e^{-2})C_2(\xi) = \frac{1}{2}\sinh 2(1-\xi) \\ 2e^2 C_1(\xi) - 2e^{-2}C_2(\xi) = -\cosh 2(1-\xi) \end{cases}$$

Звідси:

$$C_1(\xi) = -\frac{1}{2(e^2-1)}\cosh 2(1-\xi) + \frac{1}{2(e^2-1)^2}\sinh 2(1-\xi),$$
$$C_2(\xi) = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}\cosh 2(1-\xi) + \frac{e^4}{2(e^2-1)^2}\sinh 2(1-\xi)$$

Далі це можна підставити у вираз $g(x, \xi)$, але він буде дуже об'ємним, тому залишимо так.

Далі якщо нам потрібно знаходити розв'язок нашого рівняння, то достатньо просто знайти значення $\int_0^1 g(x,\xi) f(\xi) d\xi$.

Відповідь. $g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sinh 2(x-\xi) + C_1(\xi)e^{2x} + C_2(\xi)e^{-2x}, & x > \xi \\ C_1(\xi)e^{2x} + C_2(\xi)e^{-2x}, & x < \xi \end{cases}$ з функціями $C_1(\xi), C_2(\xi)$, що вказані у розв'язку.