📏

Homework #9

Задача 1085.

Т.к. искомая прямая параллельна данной, то она имеет вид:

$$x - y + z + D = 0,\ D \in \mathbb{R}$$

Данная плоскость касается нашей кривой, а значит $A^2 - B^2 = 2CD \implies D = 0$. Поэтому наша прямая имеет вид $x - y + z = 0$. Выразим z через x, y, тем самым получим проекцию пары прямых на плоскость Oxy: $z = y - x$. Подставим в уравнение гиперболического параболоида: $x^2 - y^2 = 2(y - x) \implies (x - y)(x + y + 2) = 0$. Поэтому имеем две образующие:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Записав их в векторном виде, получим:

$$l_1 : \vec{r} = \lambda\{1, 1, 0\},\ l_2 : \vec{r} = \{-2, 0, 2\} + t\{-1, 1, 2\}$$

Нетрудно видеть, что прямые пересекаются при $t = \lambda = -1$ в точке $(-1, -1, 0)$. Также видим, что направляющие вектора $\vec{l_1} = \{1, 1, 0\}$ и $\vec{l_2} = \{-1, 1, 2\}$ перпендикулярны, а значит угол между направляющими равен $\pi/2$.

Задача 1090.

Была в прошлом ДЗ, та и вы уже скидывали мне решение 🙂

Задача 1101.

Во всех пунктах идея одна — переход между тем, когда плоскость “пересекает” и “не пересекает” кривую происходит в момент, когда плоскость касается кривой. Дальше любое малейшее изменение каких-либо параметров приводят либо к тому, что плоскость перестаёт пересекать кривую либо начинает её пересекать. Поэтому остаётся лишь выбрать знак.

Пункт 1. Касание происходит в момент $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - D^2 = 0$. Мысленно сделаем D огромным. Это приведёт к тому, что плоскость далеко уйдёт от эллипсоида. При этом значение выражения будет большим по модулю и отрицательным. Значит, скорее всего данное выражение должно быть положительным, т.е. $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - D^2 > 0$.

Заметка: есть и чёткое аналитическое решение. Сделаем преобразование координат: $\widetilde{x} = x/a, \tilde{y} = y/b, \tilde{z} = z/c$. Тогда уравнение эллипса и плоскости:

$$\widetilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1,\ Aa\widetilde{x} + Bb\tilde{y} + Cc\tilde{z} + D = 0$$

Другими словами, мы получили сферу. Чтобы плоскость пересекала сферу, нужно, чтобы расстояние от $O(0,0,0)$ до плоскости было меньше или равно радиусу (иначе говоря, просто единице). Расстояние:

$$\rho = \frac{D}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2}} < 1 \implies a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 > D^2$$

Для других пунктов я такого аналитического подхода не нашёл.

Пункт 2. Касание происходит в момент $a^2A^2 + b^2B^2 - c^2C^2 + D^2 = 0$. Сделаем D очень большим. В таком случае, плоскость точно пересечёт нашу кривую, т.к. она уходит на бесконечность. Поэтому знак $a^2A^2 + b^2B^2 - c^2C^2 + D^2 > 0$.

Пункт 3. Аналогичным образом получаем условие $pA^2 + qB^2 - 2CD > 0$.

Задача 939.

Запишем наши прямые в векторном виде:

$$l_1 : \{0,1,0\} + t\{2,0,-1\},\ l_2 : \{2,0,0\} + \lambda\{0,1,1\},\ l_3 : \{0,-1,0\} + s\{2,0,1\}$$

Возьмём некоторую точку $P(t)$ на прямой l_1 и проведём плоскость через P и прямую l_2. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 2t-2 & 1 & -t \end{vmatrix} = 0 \implies t = \frac{-2y + 2z + 2 - x}{x - 2 - 2y + 2z}$$

Делаем тоже самое для прямой l_3:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 2t & 2 & -t \end{vmatrix} = 0 \implies t = \frac{x - 2z}{2y + 2}$$

Приравниваем 2 параметра:

$$t = \frac{x - 2z}{2y + 2} = \frac{-2y + 2z + 2 - x}{x - 2 - 2y + 2z} \implies \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$$

Задача 941.

Запишем наши прямые в векторном виде:

$$l_1 : \{6, 0, 1\} + t\{3, 2, 1\},\ l_2 : \{0, 8, -4\} + \lambda\{3, 2, -2\}$$

Возьмём некоторую точку $P(t)$ на прямой l_1 и проведём плоскость через P и прямую l_2. Имеем:

$$\begin{vmatrix} 6+3t & 2t-8 & 5+t \\ 3 & 2 & -2 \\ x & y-8 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \implies t = \frac{-24+12z+9y+2x}{2x-3y+24}$$

Теперь проведём плоскость, проходящую через P и параллельную данной плоскости. Уравнение плоскости имеет вид $2x+3y+D=0$. Подставив $x = 6 + 3t, y = 2t$, получим, что уравнение прямой $2x+3y-12-12t = 0 \implies t = \frac{2x+3y-12}{12}$.

Теперь приравняем оба значения t:

$$\frac{2x+3y-12}{12} = \frac{-24+12z+9y+2x}{2x-3y+24} \implies \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = z$$