Test #2

Задача 1.

Маємо рівняння:

$$a_n = 2a_{n-1} + n - 1$$

Замінимо індекси з n на $n+1$:

$$a_{n+1} = 2a_n + n$$

Просумуємо обі частини за правилом $\sum_{k=0}^{\infty} \square x^k$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k = 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

Домножимо обидві частини на x:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} = 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

Нехай твірна функція послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ дорівнює $F(x)$. В такому разі:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - a_0 = F(x) - 1$$

Для того, щоб знайти $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ розглянемо $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. З одного боку легко бачити, що $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$. З іншого боку, візьмемо похідну: $\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$. Тепер домножимо обидві частини на x: $x\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$. В такому разі:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Остаточно отримали:

$$F(x) - 1 = 2xF(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

Звідси отримаємо функцію $F(x)$:

$$F(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(1-x)^2(1-2x)}$$

Помітимо, що ми можемо записати $F(x)$ у вигляді $\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2}$. Знаходимо, що $A = 2, B = 0, C = -1$, тобто:

$$F(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Тепер запишемо оба дроба у вигляді нескінченної суми:

$$\frac{2}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}2^{k+1}x^k$$

Для знаходження $\frac{1}{(1-x)^2}$ запишемо суму $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k$$

Візьмемо похідну від обох частин:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

Отже, маємо:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}2^{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2^{k+1}-k-1)x^k$$

За означенням $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, отже $a_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Відповідь: $a_n = 2^{n+1} - n - 1$.

Задача 2.

Запишемо $f(x)$:

$$f(x) = 0 + (b_2 - b_1)x + (b_4 - b_2)x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}(b_{2k} - b_k)x^k$$

Розіб'ємо суму на 2 компоненти:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$$

Бачимо, що $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = g(x)$. Отже залишається знайти $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} x^k$. Розглянемо функцію $g(x)$ у точках $\sqrt{x}$ та $-\sqrt{x}$:

$$g(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(\sqrt{x})^k = \sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}x^k\sqrt{x}$$

$$g(-\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k(\sqrt{x})^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}x^k\sqrt{x}$$

Бачимо, що $g(\sqrt{x}) + g(-\sqrt{x}) = 2\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}x^k$. Отже, бачимо, що:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}x^k = \frac{1}{2}(g(\sqrt{x}) + g(-\sqrt{x}))$$

Остаточно:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(g(\sqrt{x}) + g(-\sqrt{x})\right) - g(x)$$

Відповідь: $f(x) = \frac{g(\sqrt{x})+g(-\sqrt{x})}{2} - g(x)$.

Задача 3.

Нехай простір елементарних подій має вигляд: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{|\Omega|}\}$, у якому кожен елемент має вигляд $\omega_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}\}$, де $a_{i,j}$ — це число від 2 до 9, що позначає, на якому поверсі вийшла людина з номером j у елементарній події i. Нас цікавить така подія $E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{|E|}\} \subset \Omega$, де елемент $\varepsilon_i = \{e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, e_{i,4}, e_{i,5}\}$ має наступну властивість:

$$\exists k, m \in \mathbb{N}, k \neq m : a_{i,k} = a_{i,m}$$

Розглянемо подію, яку назвемо E^*, властивість кожного елементу ε_i^* якої є оберненою до тої, що наведена зверху, тобто:

$$\forall k, m \in \mathbb{N}, k \neq m : a_{i,k} \neq a_{i,m}$$

Помітимо, що у такому разі $E \cap E^* = \emptyset$, а також $E \cup E^* = \Omega$. Оскільки всі люди з рівною ймовірностю вибирають поверх, то $p(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|}\ \forall i = \overline{1, |\Omega|}$. Тому:

$$p(E) = \frac{|E|}{|\Omega|},\ p(E^*) = \frac{|E^*|}{|\Omega|}$$

Окрім того, $|E| + |E^*| = |\Omega|$, тому:

$$p(E) = \frac{|\Omega| - |E^*|}{|\Omega|} = 1 - p(E^*)$$

Знайдемо $p(E^*)$. Спочтку знайдемо $|\Omega|$. Всього в нас 5 позицій, на котрі ми можемо поставити будь-яке число від 2 до 9. Тому всього варіантів 8^5. Отже, $|\Omega| = 8^5$.

Тепер знайдемо $|E^*|$. Нам потрібно знайти кількість таких елементів $\varepsilon_i^* = \{a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}\}$ в якому всі числа різні і лежать між 2 до 9 включно. Маємо 5 позицій. На першу ми можемо поставити будь яке число (8 варіантів). На другу — будь-яке, окірм того, що стоїть на першій позиції (отже, всього маємо 7 варіантів). Отже, кількість елементів ε_i^* дорівнює $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = |E^*|$. Тому:

$$p(E^*) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^4} \approx 0.205$$

Отже, $p(E) = 1 - p(E^*) \approx 0.795$.

Відповідь: $1 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{8^4} \approx 0.795$.

Задача 4.

Розглянемо простір елементарних подій: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{|\Omega|}\}$, де кожен елемент має вигляд $\omega_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,12}\}$, де $a_{i,j}$ — число від 1 до 6, що позначає, що випало людині з номером j в події i. Нехай перше число позначає число, яке випало Кості (тобто $a_{i,1}$). В такому випадку нас цікавить подія $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{|S|}\} \subset \Omega$, в якій кожен елемент $\sigma_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,12}\}$ має правило:

$$\forall k = \overline{2, 12} \; s_{i,1} \neq s_{i,k}$$

Шукана ймовірність:

$$p(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

Знайдемо $|\Omega|$. Всього є 12 гравців, кожному з яких може випасти будь-яке число між 1 та 6. Тобто маємо, що всього варіантів $6^{12} = |\Omega|$.

Тепер знайдемо $|S|$. Нехай у Кості випало 1. Тоді у інших 11 гравців може бути будь-яке число між 2 та 6, тобто варіантів 5^{11}. Аналогічно, якщо Кості випаде $2 \ldots, 6$. Отже, $|S| = 6 \cdot 5^{11}$. Тому маємо:

$$p(S) = \frac{6 \cdot 5^{11}}{6^{12}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 0.135$$

Насправді, з відповіді можна запропонувати ще 1 розв'язок. Нехай Кості випало деяке число a (неважливе, яке саме). Тоді вирогідність того, що другому гравцю не випаде a дорівнює $\frac{5}{6}$. Вирогідність, що третьому гравцю також не випадке це число вже $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Якщо так продовжувати до 12ого гравця, то отримаємо $(5/6)^{11}$.

Відповідь: $(5/6)^{11} \approx 0.135$.

Задача 5.

Розглянемо простір подій: $\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, де кожен елемент позначає, який з пристроїв вийшов з ладу (наприклад, $\{1,2\}$ — зломався 1й та 2й пристрої). Позначимо числа з умови як $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3$. Знайдемо ймовірність елементарних подій $\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}$ (для інших формули аналогічні):

$$p(\emptyset) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3), \; p(\{1\}) = p_1(1-p_2)(1-p_3)$$

$$p(\{1,2\}) = p_1 p_2 (1-p_3), \; p(\{1,2,3\}) = p_1 p_2 p_3$$

Чому формули саме такі? Розглянемо, наприклад, $p(\{1\})$. Це означає, що 1й пристрій вийшов з ладу, а 2й та 3й — ні. Ймовірність того, що 1й пристрій вийде з ладу дорівнює p_1 за умовою. Ймовірність того, що 2й пристрій **НЕ** вийде з ладу дорівнює $1 - p_2$, аналогічно для 3ого пристрою. Оскільки всі ці 3 події незалежні, то маємо, що ймовірність такої елементарної події — $p_1(1 - p_2)(1 - p_3)$.

Тепер розглянемо подію, коли 3й пристрій **НЕ** вийшов з ладу: $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Далі нас цікавить подія, коли вийшли з ладу 2 пристрої: $H = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. За умовою нас цікавить $p(E \mid H)$, тобто ймовірність події E якщо подія H відбулась. З відомих нам формул:

$$p(E \mid H) = \frac{p(E \cap H)}{p(H)} = \frac{p(\{\{1, 2\}\})}{p(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\})} = \frac{p(\{1, 2\})}{p(\{1, 2\}) + p(\{1, 3\}) + p(\{2, 3\})}$$

Далі користуємося формулами, що ми вивели раніше:

$$p(E \mid H) = \frac{p_1 p_2 (1 - p_3)}{p_1 p_2 (1 - p_3) + p_1 p_3 (1 - p_2) + p_2 p_3 (1 - p_1)}$$

Підставивши числа, отримаємо:

$$p(E \mid H) = \frac{0.014}{0.014 + 0.024 + 0.054} = \frac{7}{46}$$

Відповідь: $7/46 \approx 0.152$.

Задача 6.

Грубо кажучі, ми можемо розбити події не на “випало число від 1 до 6”, а на “випав 0 або 1”, де 0 позначатиме те, що випало парне число, а 1 — непарне. Причому обидві події однаково вирогідні. Отже, вирогідність, що після n бросків попадеться парне число:

$$p_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

За умовою потрібно знайти $n_{\min} \in \mathbb{N}$ таке, що $p_{n_{\min}} > 0.9$. Легко побачити, що:

$$n_{\min} = \lceil \log_2 10 \rceil = 4$$

Відповідь: 4.