Залікова робота з диференціальної геометрії #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра. Варіант 5.

28 травня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Знайти обгортки сімейства кривих

$$y = 2mx + m^4$$

з параметром m.

Розв'язок. Позначимо:

$$\Phi(x, y, m) = y - 2mx - m^4$$

І за умовою сімейство кривих в неявному виді записується як $\Phi(x, y, m) = 0$. Система для знаходження обгортки, як було показано на лекціях:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, m) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial m}(x, y, m) = 0 \end{cases}$$

Отже, напишемо ці умови:

$$\begin{cases} y - 2mx - m^4 = 0 \\ -2x - 4m^3 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $x = -2m^3$. Підставляючи у перше, маємо:

$$y = 2m \cdot (-2m^3) + m^4 = -3m^4$$

Отже, маємо рівняння обгортки:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} -2t^3 \\ -3t^4 \end{bmatrix}$$

Це не обов'язково є обгорткою, тому намалюємо малюнок, щоб переконатись у цьому:

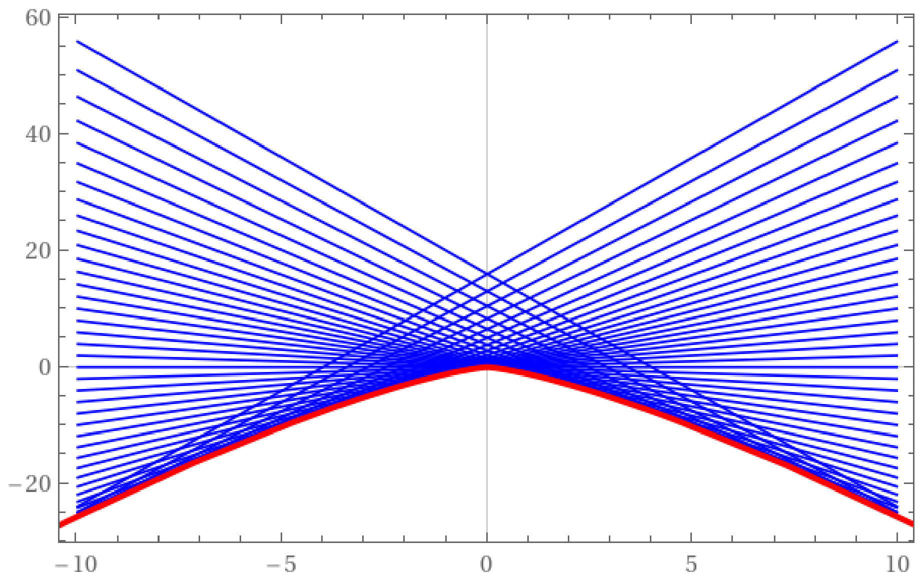

Рис. 1: Сімейство кривих для $m \in [-2, 2]$ (помічено синім) та рівняння обгортки (помічено червоним)

Отже, бачимо, що перед нами дійсно рівняння обгортки.

Відповідь. $\boldsymbol{r}(t) = [-2t^3, -3t^4]^\top$.

Завдання 2.

Умова. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі у довільній точці циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна задана рівняннями

$$x = f(u),\ y = g(u),\ z = 0$$

Розв'язок. Рівняння поверхні можна записати у виді:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} f(u) \\ g(u) \\ v \end{bmatrix}$$

Для знаходження дотичної площини, нам потрібно знайти часткові похідні по u, v:

$$\boldsymbol{r}'_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}'_u = \begin{bmatrix} f'(u) \\ g'(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

В такому разі рівняння площини у деякій точці (u, v) можна записати як:

$$\boldsymbol{\pi}(t,\tau) = \boldsymbol{r}(u,v) + \boldsymbol{r}'_v t + \boldsymbol{r}'_u \tau$$

Або якщо розписати отримані результати:

$$\boldsymbol{\pi}(t,\tau) = \begin{bmatrix} f(u) + f'(u)\tau \\ g(u) + g'(u)\tau \\ v + t \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо вектор нормалі до дотичної площини, що буде напрямним вектором для нормалі. Отже:

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \boldsymbol{r}'_v \times \boldsymbol{r}'_u = \begin{bmatrix} -g'(u) \\ f'(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тому рівняння площини ще можна записати наступним чином (якщо позначити $\boldsymbol{\rho} = [x, y, z]^\top$):

$$\langle \boldsymbol{n}(u,v), \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(u,v) \rangle = 0$$

Або:

$$g'(u)(x - f(u)) = f'(u)(y - g(u))$$

Рівняння нормалі в точці (u, v):

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \boldsymbol{r}(u,v) + \boldsymbol{n}(u,v) \cdot t = \begin{bmatrix} f(u) - g'(u)t \\ g(u) + f'(u)t \\ v \end{bmatrix}$$

Або, аналогічно

$$\frac{x - f(u)}{-g'(u)} = \frac{y - g(u)}{f'(u)} = \frac{z - v}{0}$$

Відповідь. Рівняння площини $g'(u)(x - f(u)) = f'(u)(y - g(u))$, рівняння прямої $\frac{x-f(u)}{-g'(u)} = \frac{y-g(u)}{f'(u)} = \frac{z-v}{0}$.

Завдання 3.

Умова. Знайти площу області $u \in (0, a)$ на катеноїді

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [b \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, u]^\top$$

Розв'язок.

Спосіб 1. Нам потрібно по суті знайти наступний інтеграл:

$$A = \iint_{\mathcal{S}} 1 \cdot dS$$

З курсу математичного аналізу маємо

$$A = \iint_{\mathcal{D}} \|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\| \, dA$$

Отже, знайдемо часткові похідні:

$$\boldsymbol{r}'_u = \begin{bmatrix} b \cos v \sinh u \\ b \sin v \sinh u \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{r}'_v = \begin{bmatrix} -b \cosh u \sin v \\ b \cos v \cosh u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отже, векторний добуток:

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \begin{bmatrix} -b\cos v \cosh u \\ -b\cosh u \sin v \\ b^2 \cosh u \sinh u \end{bmatrix}$$

Отже модуль:

$$\|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\| = b\cosh u\sqrt{1 + b^2\sinh^2 u}$$

Визначимось з межами інтегрування. Для цього розглянемо малюнок знизу:

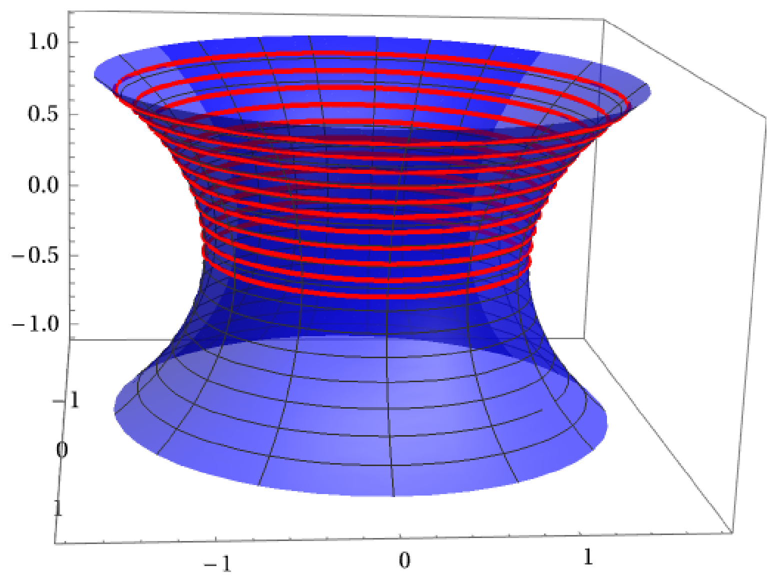

Рис. 2: Катеноїд з $b = 1$, область $u \in (0, 1)$

Бачимо, що в нас u визначає "висоту", на якій ми малюємо кола, а v визначає позицію на самому колі. Отже, u в нас рухається за умовою від 0 до a, а ось v, оскільки воно описує коло, від 0 до 2π.

Таким чином, наш інтеграл:

$$A = \int_0^a du \int_0^{2\pi} b\cosh u\sqrt{1+b^2\sinh^2 u}dv =$$
$$2\pi b\int_0^a \cosh u\sqrt{1+b^2\sinh^2 u}du$$

Спосіб 2. По своїй суті аналогічний способу 1, але більш “диференціальногеометричний”. Знайдемо першу фундаментальну форму:

$$\langle \boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_u\rangle = b^2\sinh^2 u + 1,\ \langle \boldsymbol{r}'_v, \boldsymbol{r}'_v\rangle = b^2\cosh^2 u,\ \langle \boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v\rangle = 0$$

Тобто:

$$ds^2 = (1+b^2\sinh^2 u)(du)^2 + b^2\cosh^2 u(dv)^2,\ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1+b^2\sinh^2 u & 0 \\ 0 & b^2\cosh^2 u \end{bmatrix}$$

Згідно теорії, площу на поверхні можна знайти згідно формули:

$$A = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\det \boldsymbol{G}}dS = \int_0^a du\int_0^{2\pi} dv\cdot b\cosh u\sqrt{1+b^2\sinh^2 u}$$

Отже, ми отримали той самий результат.

Для знаходження інтегралу, зробимо заміну $\xi = b\sinh u$, в такому разі $d\xi = b\cosh u du$, тоді:

$$A = 2\pi\int_0^{b\sinh a} \sqrt{1+\xi^2}d\xi =$$
$$\pi\left(\xi\sqrt{1+\xi^2} - \ln(\sqrt{1+\xi^2}-\xi)\right)_0^{b\sinh a} =$$
$$\pi b\sinh a\sqrt{1+b^2\sinh^2 a} + \pi\text{arcsinh}(b\sinh a)$$

Цікавий частковий випадок це $b=1$. Тоді маємо:

$$A = \pi\sinh a\sqrt{1+\sinh^2 a} + \pi\text{arcsinh}(\sinh a) = \pi\left(a + \frac{1}{2}\sinh 2a\right)$$

Відповідь. $\pi b\sinh a\sqrt{1+b^2\sinh^2 a} + \pi\text{arcsinh}(b\sinh a)$