Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #3

Захаров Дмитро

26 жовтня, 2024

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Номер 3.1 (4).

Умова Задачі 1.1. Знайти функцію Гріна методом конформних відображень для області:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_2 > 0\}$$

Розв'язання. Метод конформних відображень полягає у тому, що якщо конформне відображення $w : \Omega \to \mathbb{C}$ відображає область Ω у одиничне коло $|z| < 1$, то функція Гріна для області Ω може бути знайдена у вигляді:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}{w(z) - w(\zeta)} \right|, \text{ де } z = x_1 + ix_2,\ \zeta = \xi_1 + i\xi_2.$$

Отже, наша ціль — це побудувати $w(z)$, що переведе верхню половину півкулі на одиничне коло. Це можна зробити за допомогою чотирьох відображень:

1. $w_1 : z \mapsto z/R$ відображає верхнє півколо радіусу R у одиничне півколо радіусу R;
2. $w_2 : z \mapsto (1 + z)/(1 - z)$ відобразить верхню півкулю у перший квадрант;
3. $w_3 : z \mapsto z^2$ відобразить перший квадрант у верхню півплощину;
4. $w_4 : z \mapsto (z - i)/(z + i)$ відобразить верхню півплощину у одиничне коло.

Отже, наше відображення має вигляд $w(z) = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1(z)$. Треба це розписати:

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\left(\frac{1+z/R}{1-z/R}\right)^2 - i}{\left(\frac{1+z/R}{1-z/R}\right)^2 + i} = \frac{(1 + z/R)^2 - i(1 - z/R)^2}{(1 + z/R)^2 + i(1 - z/R)^2} \\ &= \frac{\frac{1-i}{R^2}(z^2 + 2iRz + R^2)}{\frac{1+i}{R^2}(z^2 - 2iRz + R^2)} = -i \cdot \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2} \end{aligned}$$

Далі, нам потрібно знайти спряжений вираз до цього:

$$\overline{w(\zeta)} = \frac{\overline{-i(\zeta^2 + 2iR\zeta + R^2)}}{\overline{\zeta^2 - 2iR\zeta + R^2}} = \frac{i(\overline{\zeta}^2 + 2R\overline{i\zeta} + R^2)}{\overline{\zeta}^2 - 2R\overline{i\zeta} + R^2} = i \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2}$$

Далі починаємо рахувати сам дріб. Почнемо з чисельнику:

$$1 - w(z)\overline{w(\zeta)} = 1 - \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2} \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2} = \frac{4iR(\overline{\zeta} - z)(R^2 - \overline{\zeta}z)}{(R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2)(R^2 - 2iRz + z^2)}$$

Тепер знайдемо знаменник:

$$w(z) - w(\zeta) = -i \cdot \frac{z^2 + 2iRz + R^2}{z^2 - 2iRz + R^2} + i \cdot \frac{\overline{\zeta}^2 - 2iR\overline{\zeta} + R^2}{\overline{\zeta}^2 + 2iR\overline{\zeta} + R^2} = -\frac{4R(\zeta - z)(R^2 - \zeta z)}{(R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2)(R^2 - 2iRz + z^2)}$$

Отже, маємо:

$$T(z, \zeta) = \frac{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}{w(z) - w(\zeta)} = -i \cdot \frac{(\overline{\zeta} - z)(R^2 - \overline{\zeta}z)(R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2)}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta z)(R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2)}$$

Спочатку знайдемо модулі ось цих двох довгих виразів:

$$\begin{aligned}|R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2| &= |R^2 - 2iR(\xi_1 + i\xi_2) + (\xi_1 + i\xi_2)^2| \\ &= |R^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 + 2R\xi_2 - 2iR\xi_1 + 2i\xi_1\xi_2| \\ &= \sqrt{(R^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 + 2R\xi_2)^2 + 4\xi_1^2(\xi_2 - R)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2| &= |R^2 + 2iR(\xi_1 - i\xi_2) + (\xi_1 - i\xi_2)^2| \\ &= |R^2 + 2R\xi_2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 + (2R\xi_1 - 2\xi_1\xi_2)i| \\ &= \sqrt{(R^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 + 2R\xi_2)^2 + 4\xi_1^2(\xi_2 - R)^2}\end{aligned}$$

Модулі вийшли однаковими. Дійсно, бо ці два вирази є спряженими:

$$\overline{R^2 - 2iR\zeta + \zeta^2} = R^2 - 2R\overline{i\zeta} + \overline{\zeta}^2 = R^2 + 2iR\overline{\zeta} + \overline{\zeta}^2$$

Тому, маємо:

$$|T(z,\zeta)| = |-i| \cdot \frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|} = \frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|}$$

З цього моменту можемо рахувати модулі усіх виразів:

$$\begin{aligned}|\overline{\zeta} - z| &= |(\xi_1 - i\xi_2) - (x_1 + ix_2)| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}, \\ |\zeta - z| &= |(\xi_1 + i\xi_2) - (x_1 + ix_2)| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2},\end{aligned}$$

І наступних двох:

$$\begin{aligned}|R^2 - \overline{\zeta}z| &= |R^2 - (\xi_1 - i\xi_2)(x_1 + ix_2)| = |R^2 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2 + (x_1\xi_2 - x_2\xi_1)i| \\ &= \sqrt{(R^2 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 - x_2\xi_1)^2}, \\ |R^2 - \zeta z| &= |R^2 - (\xi_1 + i\xi_2)(x_1 + ix_2)| = |R^2 - \xi_1x_1 + \xi_2x_2 - (x_1\xi_2 + x_2\xi_1)i| \\ &= \sqrt{(R^2 - \xi_1x_1 + \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 + x_2\xi_1)^2}.\end{aligned}$$

Отже, остаточно наша функція Гріна має вигляд:

$$\begin{aligned}G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{|\overline{\zeta} - z| \cdot |R^2 - \overline{\zeta}z|}{|\zeta - z| \cdot |R^2 - \zeta z|} \\ &= \frac{1}{2\pi}\log\frac{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2} \cdot \sqrt{(R^2 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 - x_2\xi_1)^2}}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} \cdot \sqrt{(R^2 - \xi_1x_1 + \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 + x_2\xi_1)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi}\log\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} + \frac{1}{4\pi}\log\frac{(R^2 - \xi_1x_1 - \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 - x_2\xi_1)^2}{(R^2 - \xi_1x_1 + \xi_2x_2)^2 + (x_1\xi_2 + x_2\xi_1)^2}\end{aligned}$$

1.2 Номер 3.2 (1).

Умова Задачі 1.2. Розв'язати задачу для рівняння $\Delta u = 0$, $x_2 > 0$ з граничними умовами:

$$u\Big|_{x_2=0} = \theta(x_1 - 1), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Для початку згадаємо, що на практиці ми вже виписували функцію Гріна для такої задачі:

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi}\left(\log\left((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2\right) - \log\left((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\right)\right)$$

Тепер згадаємо, що розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа можна записати у вигляді:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \phi(\boldsymbol{\xi}) dS_{\xi}$$

В нашому випадку $f(\boldsymbol{\xi}) \equiv 0$, тому все зводиться до обчислення другого інтегралу:

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \phi(\boldsymbol{\xi}) dS_{\xi}$$

Отже, треба знайти часткову похідну за нормаллю. В нашому випадку, нормаль дивиться вертикально "вниз" від верхньої півплощини, тому $\boldsymbol{\nu} = (0, -1)$. Таким чином, маємо:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2 + \xi_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2 - \xi_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$$

Далі, оскільки ми інтегруємо за границею, то $\xi_2 = 0$. Тому, спростимо вираз і далі:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\xi_2=0} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}$$

Отже, наш інтеграл запишеться як:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \cdot \theta(\xi_1 - 1) d\xi_1 = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\xi_1 - 1) d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2}$$

Помітимо, що за $\xi_1 < 1$, вираз під інтегралом нульовий, тому можемо змінити межі інтегрування:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi x_2} \int_1^{+\infty} \frac{d\xi_1}{1 + \left(\frac{x_1 - \xi_1}{x_2}\right)^2}$$

Отже, зробимо заміну $\zeta := \frac{\xi_1 - x_1}{x_2}$, тоді $x_2 d\zeta = d\xi_1$ і тому:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{(1-x_1)/x_2}^{+\infty} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\xi_1 - x_1}{x_2}\right)\Big|_1^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1 - x_1}{x_2}\right)\right)}$$