Комплексний Аналіз

Весняний семестр 2024

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Гиря Н.П.*

Домашня робота 3

§ Обчислення Інтегралів #2. Варіант 5 §

Задача 1:

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}x^2dx}{(x^2+4ix-5)^2}$$

Розв'язання. Введемо допоміжний контур (див. Рисунок 1):

$$\gamma = \underbrace{[-R,R]}_{\leftarrow} \cup C_R,\ C_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0\}, \tag{1.1}$$

де C_R – нижнє півколо радіусу R. Також позначимо $\mathcal{I}_\gamma = \oint_\gamma f(z)dz$ де

$$f(z) = \frac{e^{-2iz}z^2}{(z^2+4iz-5)^2}. \tag{1.2}$$

В такому разі з нашого розбиття маємо:

$$\mathcal{I}_\gamma = -\int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz \tag{1.3}$$

Якщо взяти граничний перехід при $R \to +\infty$:

$$\mathcal{I}_\gamma = -\mathcal{I} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz \tag{1.4}$$

Ідея наступна: нам потрібно спочатку знайти $\mathcal{I}_\gamma$, а потім довести, що $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$, з чого ми знаходимо шуканий інтеграл $\mathcal{I} = -\mathcal{I}_\gamma$.

Крок 1. Обчислення допоміжного інтегралу. Для цього спочатку знайдемо особливі точки. Для цього прирівнюємо до нуля поліном в знаменнику:

$$z^2 + 4iz - 5 = 0 \implies z = -1-2i,\ z = 1-2i \tag{1.5}$$

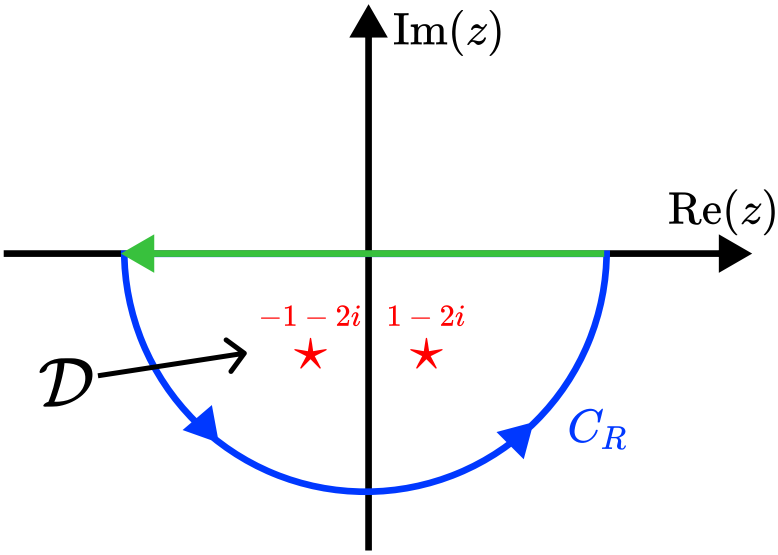

Рис. 1: Контур γ в задачі 1 з особливими точками $f(z)$.

Отже, маємо дві особливі точки – $z_1 = -1 - 2i$ та $z_2 = 1 - 2i$. Обидві точки є полюсом другого порядку (оскільки поліном додатково стоїть у другій ступені), причому обидві належать області $\mathcal{D}$ ($\partial\mathcal{D} = \gamma$). Тому,

$$\mathcal{I}_\gamma = 2\pi i(\text{Res}_{z=z_1} f(z) + \text{Res}_{z=z_2} f(z)) \tag{1.6}$$

Знайдемо лишки:

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}((z-z_1)^2 f(z))' = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\frac{e^{-2iz}z^2}{(z-z_2)^2} \\ = \lim_{z\to z_1}\frac{(-2ie^{-2iz}z^2 + 2ze^{-2iz})(z-z_2)^2 - 2(z-z_2)e^{-2iz}z^2}{(z-z_2)^4} \\ = \lim_{z\to z_1}\frac{2ze^{-2iz}\left((1-iz)(z-z_2) - z\right)}{(z-z_2)^3} \\ = \lim_{z\to z_1}\frac{2ze^{-2iz}(izz_2 - z_2 - iz^2)}{(z-z_2)^3} \\ = \frac{2z_1e^{-2iz_1}(iz_1z_2 - z_2 - iz_1^2)}{(z_1-z_2)^3} = \left(\frac{3}{4} + \frac{3i}{2}\right)e^{-4+2i}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Аналогічним чином:

$$\text{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{2z_2e^{-2iz_2}(iz_1z_2 - z_1 - iz_2^2))}{(z_2-z_1)^3} = \left(-\frac{3}{4} + \frac{3i}{2}\right)e^{-4-2i} \tag{1.8}$$

Отже, остаточно маємо:

$$\mathcal{I}_\gamma = 2\pi i\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{3i}{2}\right)e^{-4+2i} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3i}{2}\right)e^{-4-2i}\right) \tag{1.9}$$

Цей вираз можна дещо спростити, якщо врахувати той факт, що $e^{-4+2i} = e^{-4}(\cos 2 + i\sin 2)$, а $e^{-4-2i} = e^{-4}(\cos 2 - i\sin 2)$:

$$\mathcal{I}_\gamma = -\frac{3\pi(2\cos 2 + \sin 2)}{e^4}. \tag{1.10}$$

Крок 2. Оцінка інтегралу. Тепер доведемо, що $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Для цього помітимо, що

$$f(z) = e^{-2iz}g(z),\ g(z) = \frac{z^2}{(z^2+4iz-5)^2} \tag{1.11}$$

А далі скористаємось наслідком **леми Жордана** для нижнього півкола C_R: якщо $f(z) = e^{i\alpha z}g(z)$ і $\alpha < 0$, то

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{z\in C_R}|g(z)| = 0 \implies \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0 \tag{1.12}$$

Отже, покажемо, що дійсно $\lim_{R\to\infty}\sup_{z\in C_R}|g(z)| = 0$:

$$|g(z)| = \frac{|z|^2}{|z^2+4iz-5|^2} = \frac{R^2}{|z-z_1|^2|z-z_2|^2} \tag{1.13}$$

Оцінимо знаменник за допомогою нерівності $|z-w| \geq ||z|-|w||$:

$$|z-z_1| \geq ||z|-|z_1|| = |R-\sqrt{5}| = R-\sqrt{5} \text{ (для великих } R) \tag{1.14}$$

Аналогічно $|z-z_2| \geq R-\sqrt{5}$. Тому,

$$|g(z)| \leq \frac{R^2}{(R-\sqrt{5})^4} \sim \frac{1}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{1.15}$$

Отже, звідси отримуємо $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Отже, остаточно:

$$\boxed{\mathcal{I} = \frac{3\pi(2\cos 2 + \sin 2)}{e^4}} \tag{1.16}$$

Відповідь. $\frac{3\pi(2\cos 2+\sin 2)}{e^4}$.

Задача 2:

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{4+e^x}dx$$

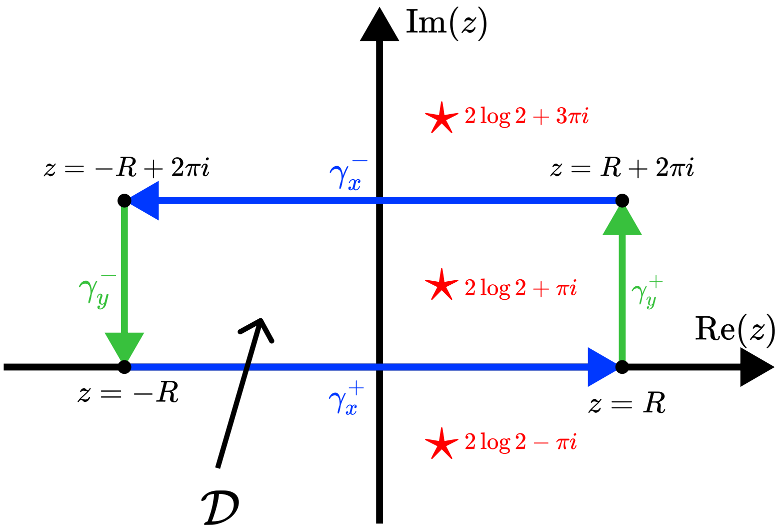

Рис. 2: Контур γ в задачі 2 з особливими точками $f(z)$.

Розв'язання. В цій задачі спочатку знайдемо особливі точки підінтегральної функції $f(z) = \frac{e^{z/4}}{4+e^z}$. Прирівняємо знаменник до 0:

$$e^z = -4 \implies z = \mathrm{Log}(-4) = 2\log 2 + i\pi + 2\pi i k, \; k \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

В якості контуру оберемо прямокутник ширини R і висоти 2π. Тоді, наш контур (див. Рисунок 2):

$$\gamma = \gamma_x^+ \cup \gamma_y^+ \cup \gamma_x^- \cup \gamma_y^-, \tag{2.2}$$

де γ_x^+ – горизональний відрізок від $(-R, 0)$ до $(R, 0)$, γ_x^- – відрізок від $(R, 2\pi)$ до $(-R, 2\pi)$, γ_y^+ – вертикальний відрізок від $(R, 0)$ до $(R, 2\pi)$, а γ_y^- – вертикальний відрізок від $(-R, 2\pi)$ до $(-R, 0)$.

Параметризація на кожному відрізку:

$$\gamma_x^+ : \quad z = x, dz = dx \quad x \in [-R, R] \tag{2.3}$$
$$\gamma_y^+ : \quad z = R + iy, dz = idy, \quad y \in [0, 2\pi] \tag{2.4}$$
$$\gamma_x^- : \quad z = -x + 2\pi i, dz = -dx, \quad x \in [-R, R] \tag{2.5}$$
$$\gamma_y^- : \quad z = -R + (2\pi - y)i, dz = -idy, \quad y \in [0, 2\pi] \tag{2.6}$$

Таким чином, маємо:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \left(\int_{\gamma_x^+} + \int_{\gamma_y^+} + \int_{\gamma_x^-} + \int_{\gamma_y^-}\right) f(z)dz \tag{2.7}$$

Спочатку знайдемо увесь інтеграл $\mathcal{I}_\gamma := \oint_\gamma f(z)dz$. Для цього помітимо, що всередині контуру лише одна особлива точка $z_0 = 2\log 2 + i\pi$ через вибір висоти в 2π. В такому разі:

$$\mathcal{I}_\gamma = 2\pi i \cdot \frac{e^{z/4}}{(4+e^z)'}\bigg|_{z=2\log 2+i\pi} = 2\pi i e^{-3z/4}\bigg|_{z=2\log 2+i\pi} = -2\pi i \cdot \frac{1+i}{4} = \frac{\pi(1-i)}{2}$$

Отже, залишилось оцінити чотири інтеграли у правій частині рівняння 2.7 при прямуванні $R \to \infty$.

Інтеграл по γ_x^+. $\int_{\gamma_x^+} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx$, тому $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_x^+} f(z)dz = \mathcal{I}$ – шуканий інтеграл.

Інтеграл по γ_x^-. Розпишемо:

$$\int_{\gamma_x^-} f(z)dz = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{\frac{-x+2\pi i}{4}}}{4+e^{-x+2\pi i}}dx = -i\int_{-R}^{R} \frac{e^{-\frac{x}{4}}dx}{4+e^{-x}} = -i\int_{-R}^{R} \frac{e^{\frac{x}{4}}dx}{4+e^{x}} \tag{2.8}$$

З цього можна отримати $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_x^-} f(z)dz = -i\mathcal{I}$.

Інтеграл по γ_y^+. Тут нам треба показати, що $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_y^+} f(z)dz = 0$. Для цього оцінимо наш інтеграл. Спочатку підставимо $z = R + iy$:

$$\int_{\gamma_y^+} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{(R+iy)/4}dy}{4+e^{R+iy}} = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{R/4}e^{iy/4}dy}{4+e^R e^{iy}} \tag{2.9}$$

Далі починаємо оцінювати:

$$\left|\int_{\gamma_y^+} f(z)dz\right| \le 2\pi \sup_{y\in[0,2\pi]} \frac{e^{R/4}|e^{iy/4}|}{|4+e^R e^{iy}|} = 2\pi \sup_{y\in[0,2\pi]} \frac{e^{R/4}}{|4+e^R e^{iy}|} \tag{2.10}$$

Оцінимо знаменник як $|e^R e^{iy} + 4| \ge ||e^R e^{iy}| - 4| = e^R - 4$[1], тому

$$\left|\int_{\gamma_y^+} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi e^{R/4}}{e^R - 4} \sim \frac{2\pi}{e^{3R/4}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{2.11}$$

Отже $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_y^+} f(z)dz = 0$.

Інтеграл по γ_y^-. Аналогічно покажемо, що $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_y^-} f(z)dz = 0$. Підставимо $z = -R + (2\pi - y)i$:

$$\int_{\gamma_y^-} f(z)dz = -i\int_0^{2\pi} \frac{e^{(-R+(2\pi-y)i)/4}dy}{4+e^{-R+(2\pi-y)i}} = -i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-R/4}e^{\pi i/2}e^{-iy/4}dy}{4+e^{-R}e^{2\pi i}e^{-iy}}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-R/4}e^{-iy/4}dy}{4+e^{-R}e^{-iy}} \tag{2.12}$$

Отже, модуль:

$$\left|\int_{\gamma_y^-} f(z)dz\right| \le 2\pi \sup_{y\in[0,2\pi]} \frac{|e^{-R/4}||e^{-iy/4}|}{|4+e^{-R}e^{-iy}|} = 2\pi \sup_{y\in[0,2\pi]} \frac{e^{-R/4}}{|4+e^{-R}e^{-iy}|} \tag{2.13}$$

[1]Вважаємо R достатньо великим, так що $e^R > 4$

Оцінимо знаменник як $|4 + e^{-R}e^{-iy}| \geq |4 - |e^{-R}e^{-iy}|| = 4 - e^{-R}$, тому

$$\left|\int_{\gamma_y^-} f(z)dz\right| \leq \frac{2\pi e^{-R/4}}{4 - e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{2.14}$$

Таким чином $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_y^-} f(z)dz = 0$.
Остаточно маємо:

$$\mathcal{I}_\gamma = \mathcal{I} - i\mathcal{I} \implies \mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_\gamma}{1-i} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \tag{2.15}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Задача 3:

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+5} dx$$

Розв'язання. Оскільки розглядання функції $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{z^2+5}$ тут слабо допоможе, то замість цього будемо розглядати функцію

$$f(z) = \frac{\mathrm{Log}^2(z)}{z^2+5} \tag{3.1}$$

Далі оберемо контур (див. Рисунок 3)

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = C_R \cup C_\epsilon \cup \underbrace{[\varepsilon, R]}_{\text{двічі}} \tag{3.2}$$

Отже, запишемо інтеграл по $\Gamma_{\varepsilon,R}$:

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5} + \int_{C_R} f(z)dz - \int_\varepsilon^R \frac{(\ln x + 2\pi i)^2 dx}{x^2+5} + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

Далі ми покажемо, що $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0$, а інтеграл $\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5} = \mathcal{I}$ – шуканий. Тому поки не зрозуміло, що робити з третім інтегралом в правій частині. Тому, розпишемо його:

$$\int_\varepsilon^R \frac{(\ln x + 2\pi i)^2 dx}{x^2+5} = \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5} + \int_\varepsilon^R \frac{4\pi i \ln x dx}{x^2+5} - \int_\varepsilon^R \frac{4\pi^2 dx}{x^2+5} \tag{3.3}$$

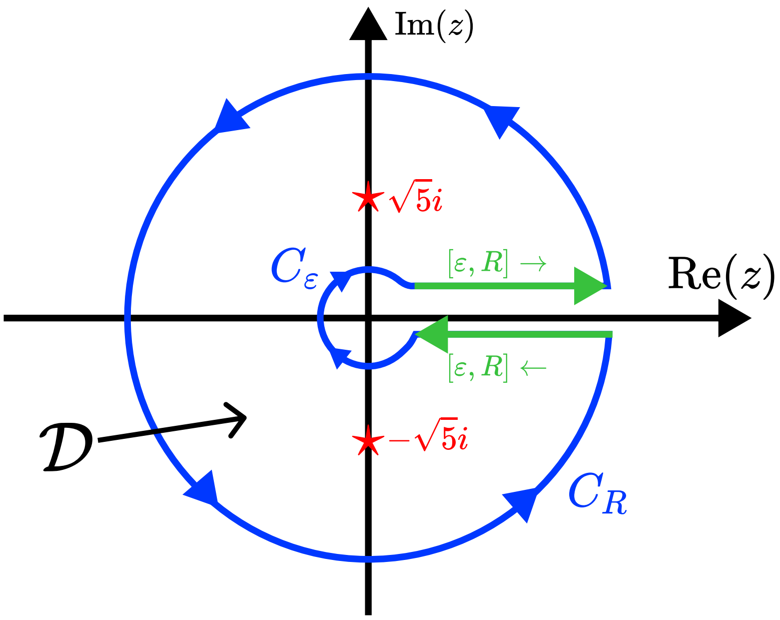

Рис. 3: Контур γ в задачі 3 з особливими точками $f(z)$.

Перший інтеграл праворуч пізніше скоротиться, а другий є шуканим при $\varepsilon \to 0, R \to \infty$. Залишається розібратися з інтегралом праворуч. Хоча його не обов'язоково зараз обчислювати (в кінці можна буде уникнути цього, скориставшись системою рівнянь), ми для зручності це зробимо, бо він є стандартним:

$$\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \int_\varepsilon^R \frac{4\pi^2 dx}{x^2+5} = 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}}\Big|_{x\to 0}^{x\to+\infty} = \frac{2\pi^3}{\sqrt{5}} \tag{3.4}$$

Отже, повернемось до нашого початкового інтегралу:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5} \\ - \int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5} - 4\pi i \int_\varepsilon^R \frac{\ln x dx}{x^2+5} + 4\pi^2 \int_\varepsilon^R \frac{dx}{x^2+5}\end{aligned} \tag{3.5}$$

Бачимо, що дійсно $\int_\varepsilon^R \frac{\ln^2 x dx}{x^2+5}$ скоротилося, а при переході $\varepsilon \to 0, R \to \infty$ маємо:

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -4\pi i \cdot \mathcal{I} + \frac{2\pi^3}{\sqrt{5}} \tag{3.6}$$

Отже, наш розв'язок зводиться до трьох кроків: оцінці інтегралу по C_R, по C_ε, а також обрахунок $\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz$.

Обрахунок інтеграла по $\Gamma_{\varepsilon,R}$. Дві особливі точки функції $f(z) = \frac{\mathrm{Log}^2(z)}{z^2+5}$ є $z = \pm\sqrt{5}i$ – обидві лежать всередині контуру і є полюсами першого порядку.

Таким чином,

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=\sqrt{5}i} f(z) + \mathrm{Res}_{z=-\sqrt{5}i} f(z)\right) \tag{3.7}$$

Тепер обраховуємо лишки:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=\sqrt{5}i} f(z) = \frac{\mathrm{Log}^2(z)}{(z^2+5)'}\Big|_{z=\sqrt{5}i} = \frac{\mathrm{Log}^2(\sqrt{5}i)}{2\sqrt{5}i} = \frac{(\log\sqrt{5} + i\cdot\arg(i\sqrt{5}))^2}{2\sqrt{5}i} \\ = \frac{(\log\sqrt{5} + i\cdot\frac{\pi}{2})^2}{2\sqrt{5}i} = \frac{\log^2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}i} + \frac{2\log\sqrt{5}\cdot i\pi}{2\cdot 2\sqrt{5}i} - \frac{\pi^2}{4\cdot 2\sqrt{5}i} \\ = \frac{\log^2 5 - \pi^2}{8\sqrt{5}i} + \frac{\pi\log 5}{4\sqrt{5}}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Другий лишок:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=-\sqrt{5}i} f(z) = \frac{\mathrm{Log}^2(z)}{(z^2+5)'}\Big|_{z=-\sqrt{5}i} = -\frac{(\log\sqrt{5} + \frac{3\pi i}{2})^2}{2\sqrt{5}i} \\ = -\frac{\log^2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}i} - \frac{3\pi i\log\sqrt{5}}{2\sqrt{5}i} + \frac{9\pi^2}{4\cdot 2\sqrt{5}i} \\ = \frac{-\log^2 5 + 9\pi^2}{8\sqrt{5}i} - \frac{3\pi\log 5}{4\sqrt{5}}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким чином, інтеграл:

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{5}i} - \frac{\pi\log 5}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{2\pi^3}{\sqrt{5}} - \frac{\pi^2\log 5}{\sqrt{5}}i \tag{3.10}$$

Таким чином, можемо знайти наш шуканий інтеграл:

$$\frac{2\pi^3}{\sqrt{5}} - \frac{\pi^2\log 5}{\sqrt{5}}i = -4\pi i\cdot\mathcal{I} + \frac{2\pi^3}{\sqrt{5}} \implies \mathcal{I} = \frac{\pi^2\log 5}{4\pi\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\pi\log 5}{4\sqrt{5}}} \tag{3.11}$$

Оцінка інтегралу по C_R. Тепер покажемо, що $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Починаємо робити оцінку:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq 2\pi R\sup_{z\in C_R}\frac{|\mathrm{Log}^2(z)|}{|z^2+5|} \leq \frac{2\pi R(\log^2 R + 4\pi^2)}{R^2-5} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \tag{3.12}$$

Оцінка інтегралу по C_ε. Тепер покажемо, що $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0$. Знову робимо оцінку:

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq 2\pi\varepsilon\sup_{z\in C_\varepsilon}\frac{|\mathrm{Log}^2(z)|}{|z^2+5|} \leq \frac{2\pi\varepsilon(\log^2\varepsilon + 4\pi^2)}{5-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{3.13}$$

Отже, остаточно $\boxed{\mathcal{I} = \dfrac{\pi \log 5}{4\sqrt{5}}}$.

Відповідь. $\frac{\pi \log 5}{4\sqrt{5}}$.