Домашня робота з математичного аналізу #17

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

16 квітня 2023 р.

Завдання 6.

Умова. Вивести формулу для обчислення $\mathcal{I} = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$ в узагальнених сферичних координатах:

$$x = a\rho\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ y = b\rho\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ z = c\rho\sin^\beta\varphi$$

і, зокрема, дістати формулу для обчислення об'єму тіла.

Розв'язок. Згідно формулі заміни змінних у кратному інтегралі, маємо:

$$\mathcal{I} = \iiint_{E'} f(a\rho\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi, b\rho\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi, c\rho\sin^\beta\varphi)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| d\rho d\theta d\varphi$$

Знаходимо Якобіан:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\theta\cos^\beta\varphi & -a\alpha\rho\cos^{\alpha-1}\theta\sin\theta\cos^\beta\varphi & -a\beta\rho\cos^\alpha\theta\cos^{\beta-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\cos^\beta\varphi & b\alpha\rho\sin^{\alpha-1}\theta\cos\theta\cos^\beta\varphi & -b\beta\rho\sin^\alpha\theta\cos^{\beta-1}\varphi\sin\varphi \\ c\sin^\beta\varphi & 0 & \beta c\rho\sin^{\beta-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$$

Після спрощень маємо:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = abc\alpha\beta\rho^2 \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{\beta-1} \cos^\beta \varphi$$

Або:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \frac{\alpha a\beta bc\rho^2}{2^{\alpha+\beta-2}} \sin^{\alpha-1}(2\theta)\sin^{\beta-1}(2\varphi)\cos^\beta \varphi$$

Отже наш інтеграл (не розписуючи x, y, z у функції):

$$\mathcal{I} = \frac{\alpha a\beta bc\rho^2}{2^{\alpha+\beta-2}} \iiint_{E'} f(\rho,\theta,\varphi)\sin^{\alpha-1}(2\theta)\sin^{\beta-1}(2\varphi)\cos^\beta \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Зокрема формула для обчислення об'єму це просто той самий вираз зверху, але без $f(\rho,\theta,\varphi)$.

Завдання 7.

Умова. Знайти об'єм тіла, обмеженого даними поверхнями, використавши узагальнені полярні або узагальнені сферичні координати:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$$

Розв'язок. Зручно взяти $x = a\rho\cos\theta\cos\varphi, y = b\rho\sin\theta\cos\varphi, z = c\rho\sin\varphi$. Тоді наша область перетвориться у:

$$\rho^4 = \frac{a\rho\cos\theta\cos\varphi}{h} \to \rho^3 = \frac{a\cos\theta\cos\varphi}{h}$$

Кути змінюються в нас $-\pi/2 < \varphi < \pi/2, 0 < \theta < 2\pi$. Також Якобіан:

$$J = abc\rho^2\cos\varphi$$

Отже, маємо наступний інтеграл для знаходження об'єму:

$$V = abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{a|\cos\theta|\cos\varphi/h}} \rho^2 \cos\varphi d\rho$$

Далі починаємо обраховувати:

$$\frac{V}{abc} = \frac{a}{3h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot |\cos\theta| \cos\varphi d\theta$$

Далі:

$$\frac{V}{abc} = \frac{2a}{3h} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta$$

Цей інтеграл вже обраховується і в кінці отримуємо:

$$V = \frac{2\pi a^2 bc}{3h}$$

Відповідь. $\frac{2\pi a^2 bc}{3h}$.