Контрольна робота з математичного аналізу #3

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

16 травня 2023 р.

Варіант 6.

Завдання 1.

Умова. Розв'язати рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x-1},$$

знаходячи частковий розв'язок за допомогою функції Коші.

Розв'язок. Спочатку знайдемо розв'язок ЛОР. Для цього розв'язуємо:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Характеристиний поліном має вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

Отже маємо корінь -2 кратності 2. Отже, розв'язок ЛОРу:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Тепер знаходимо функцію Коші:

$$K(x,\xi) = \frac{\det\begin{bmatrix}\varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}\varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi)\\ \varphi_1'(\xi) & \varphi_2'(\xi)\end{bmatrix}} = \frac{\det\begin{bmatrix}e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi}\\ e^{-2x} & xe^{-2x}\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi}\\ -2e^{-2\xi} & e^{-2\xi}(1-2\xi)\end{bmatrix}}$$

Детермінант чисельника:

$$\det\begin{bmatrix}e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi}\\ e^{-2x} & xe^{-2x}\end{bmatrix} = xe^{-2(x+\xi)} - \xi e^{-2(x+\xi)} = e^{-2(x+\xi)}(x-\xi)$$

Детермінант знаменника:

$$\det\begin{bmatrix}e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi}\\ -2e^{-2\xi} & e^{-2\xi}(1-2\xi)\end{bmatrix} = e^{-4\xi}(1-2\xi) + 2\xi e^{-4\xi} = e^{-4\xi}$$

Отже, наша функція Коші:

$$K(x,\xi) = \frac{e^{-2(x+\xi)}(x-\xi)}{e^{-4\xi}} = e^{-2(x-\xi)}(x-\xi)$$

Тоді частковий розв'язок ЛНР знаходиться за формулою:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} e^{-2(x-\xi)}(x-\xi)\frac{e^{-2\xi}}{\xi-1}d\xi$$

Далі рахуємо інтеграл:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-2x}\cdot\frac{x-\xi}{\xi-1}d\xi = -e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{\xi-x}{\xi-1}d\xi$$

Робимо заміну $\zeta = \xi - 1$, тоді:

$$y_p(x) = -e^{-2x}\int_{x_0}^{x-1}\frac{\zeta+1-x}{\zeta}d\zeta = -e^{-2x}\left(\int_{x_0}^{x-1}d\zeta + (1-x)\int_{x_0}^{x-1}\frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

Отже остаточно:

$$y_p(x) = -e^{-2x}\left(x - 1 - x_0 + (1-x)\ln\left|\frac{x-1}{x_0}\right|\right)$$

Зручно покласти $x_0 = -1$, тоді

$$y_p(x) = -xe^{-2x} + e^{-2x}(x-1)\ln|1-x|$$

Остаточно повний розв'язок:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + e^{-2x}(x-1)\ln|1-x|$$

Відповідь. $c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + e^{-2x}(x-1)\ln|1-x|$

Завдання 2.

Умова. Розв'язати рівняння

$$y''' + 4y' = 2x - \cos x,$$

знаходячи частковий розв'язок методом невизначених коефіцієнтів.

Розв'язок. Як і завжди, спочатку знаходимо розв'язок ЛОР:

$$y''' + 4y' = 0$$

Характеристичний поліном має вид $\lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4)$. Звідси розв'язок ЛОР:

$$y_l(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$$

Загальний розв'язок ЛНР можемо записати у виді:

$$y(x) = y_l(x) + y_p(x)$$

де $y_p(x)$ це сума часткових розв'язків. Бачимо, що права частина складається з суми двох квазіполіномів. Отже, можемо знайти окремо 2 часткових розв'язки.

Отже, нехай спочатку $y''' + 4y' = -\cos x$. Права частина є просто лінійним поліномом, отже шукатимемо частковий розв'язок у вигляді $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Тоді:

$$-\beta \cos x + \alpha \sin x + 4(\beta \cos x - \alpha \sin x) = -\cos x$$

Отже маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\beta = -1 \\ -3\alpha = 0 \end{cases},$$

звідки $\beta = -\frac{1}{3}, \alpha = 0$ і остаточно частковий розв'язок має вид $y_{p_1} = -\frac{1}{3}\sin x$.

Тепер розглядаємо $y''' + 4y' = 2x$. Будемо шукати розв'язок у виді $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, тоді

$$8\alpha x + 4\beta = 2x$$

Звідки $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 0$. Тоді маємо інший часткоий розв'язок $y_{p_2} = \frac{1}{4}x^2$.

Отже маємо загальний розв'язок нашого початково рівняння:

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{4}x^2$$

Відповідь. $c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{4}x^2$

Завдання 3.

Умова. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 2x,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Ров'язок. Спочатку розв'яжемо рівняння Ейлера:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Характеристичний поліном:

$$\lambda(\lambda-1)-3\lambda+4=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$$

Отже маємо єдиний корінь $\lambda=2$ кратності 2. Отже, розв'язок має вид:

$$y(x)=c_1x^2+c_2x^2\ln|x|$$

Частковий розв'язок шукатимемо у вигляді $y=\alpha x+\beta$. Отже:

$$-3\alpha x+4\alpha x+4\beta=2x\to\alpha x+4\beta=2x$$

Звідси $\alpha=2,\beta=0$. Тому загальний розв'язок нашого рівняння:

$$y(x)=c_1x^2+c_2x^2\ln|x|+2x$$

Тепер підставляємо умови $y(1)=1,y'(1)=0$:

$$y(1)=c_1+2=1\to c_1=-1$$

$$y'(1)=(2xc_1+c_2\left(2x\ln x+x\right)+2)\Big|_{x=1}=2c_1+2+c_2=c_2=0$$

Отже з умовами остаточна відповідь:

$$y(x)=2x-x^2$$

Відповідь. з умовами $2x-x^2$, в загальному виді $c_1x^2+c_2x^2\ln|x|+2x$.

Завдання 4.

Умова. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами (можливо меншого порядку), що має дані часткові розв'язки $3x, x\cos x$.

Розв'язок. Частковий розв'язок $3x$ відповідає додатку λ^2. У свою чергу розв'язок $x\cos x$ відповідає додатку $(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2=(1+\lambda^2)^2$.

Отже, характеристичний поліном:

$$\lambda^2(1+\lambda^2)^2 = \lambda^2 + 2\lambda^4 + \lambda^6$$

Тому можемо навести, наприклад, наступне диференціальне рівняння:

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0$$

Його повний розв'язок

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + c_5 x \cos x + c_6 x \sin x$$

містить частові розв'язки $3x, x\cos x$.

Відповідь. $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 0$.