Екзаменаційна робота з навчальної дисципліни “Чисельний аналіз”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра Олеговича

22 грудня 2023 р.

Білет #3

Питання 1.

Умова. Обчислити інтеграл за формулою трапецій і оцінити похибку обчислення:

$$\mathcal{I} = \int_{[0,1]} \cos x^2 dx, \; n = 5$$

Розв'язок. Будемо вважати, що $n = 5$ відповідає розбиттю інтервалу на n частин (тобто, маємо $n + 1$ вузлів).

Отже, маємо інтервал $[0, 1]$. Розбиваємо його рівномірно, тоді маємо вузли:

$$x_k = \frac{k}{5}, \; k \in \{0, \ldots, 5\}, \; h = \frac{1}{5}$$

Згадаємо з теорії, що квадратурна формула трапеції має вигляд:

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx \approx \frac{(\beta - \alpha)(f(\alpha) + f(\beta))}{2}$$

Проте, застосування цієї формули безпосередньо на всьому відрізку $[0, 1]$ не дасть точного результату, тому скористаємося складеною квадратурною формулу трапеції:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{[0,1]} \cos x^2 dx \approx \sum_{k=1}^{5} \int_{[x_{k-1},x_k]} \cos x^2 dx$$
$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{10} \left(\cos \left(\frac{k-1}{5} \right)^2 + \cos \left(\frac{k^2}{25} \right) \right)$$

Далі залишається акуратно порахувати цей вираз. Маємо:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{10} \Big(\cos 0 + \cos \frac{1}{25} + \cos \frac{1}{25} + \cos \frac{4}{25} + \cos \frac{4}{25}$$
$$+ \cos \frac{9}{25} + \cos \frac{9}{25} + \cos \frac{16}{25} + \cos \frac{16}{25} + \cos 1 \Big) \approx 0.8989$$

Візуально, процес знаходження цього інтегралу зображено на рис. 1.

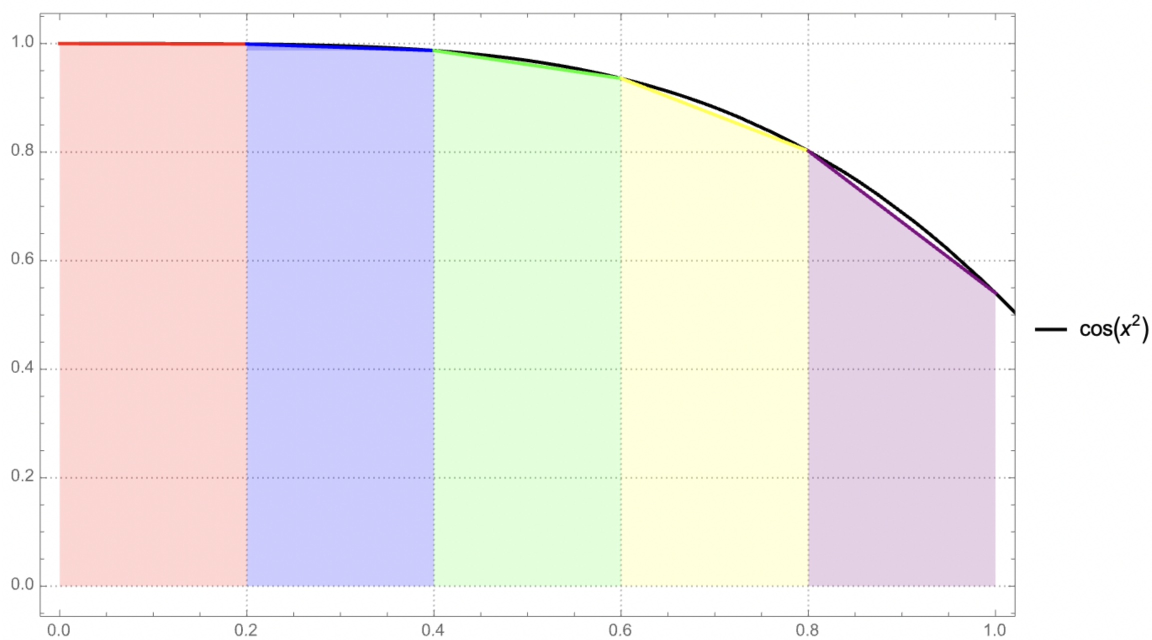

Рис. 1: Знаходження інтегралу методом трапецій

Таким чином, значення нашого інтегралу $\mathcal{I} \approx \mathcal{I}_1 \approx 0.8989$. Тепер оцінимо похибку $\Delta := |\mathcal{I} - \mathcal{I}_1|$:

$$\Delta \le \frac{\mu_2(\beta - \alpha)h^2}{12} = \frac{1}{25 \cdot 12} \max_{x \in [0,1]} |(\cos x^2)''|$$

Тепер треба оцінити $\max_{x \in [0,1]} |(\cos x^2)''|$. Знайдемо другу похідну:

$$|(\cos x^2)''| = |(2x \sin x^2)'| = |2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2|$$

Оцінимо цей вираз наступним чином:

$$\max_{x \in [0,1]} |2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2| \le 6$$

В такому разі похибка:

$$\Delta \le \frac{6}{25 \cdot 12} = \frac{1}{50}$$

Відповідь. $\mathcal{I}_1 \approx 0.8989, \ |\mathcal{I} - \mathcal{I}_1| \le 0.02.$