Домашня Робота #1 з Теорії Коливань

Захаров Дмитро

15 лютого, 2025

1 Задача 3

Умова 1.1. Частинка маси m знаходиться в полі сили тяжіння і може ковзати без тертя вздовж лінії (по поверхні), заданої рівнянням (вісь Oz спрямована вертикально догори). Знайдіть положення рівноваги частинки та дослідіть їхню стійкість.

(А) $z = 2xy$.

(Б) $z = x^4 - 2x^2y + 2y^2$

Розв'язання.

Пункт (А). Маємо потенціальну енергію $V(x,y) = 2mgxy$. Очевидно, що єдине положення рівноваги відповідає точці $(0,0)$. Проте, ця точка є напівстійкою. Дійсно, розглянемо маленьке відхилення точки. В такому разі:

$$V(\varepsilon,\varepsilon) = 2mg\varepsilon^2 > 0, \quad V(\varepsilon,-\varepsilon) = -2mg\varepsilon^2 < 0.$$

Отже, при малих збуреннях, потенціальна енергія може як зростати, так і спадати, що свідчить про напівстійкість точки $(0,0)$.

Пункт (Б). Маємо потенціальну енергію $V(x,y) = mg(x^4 - 2x^2y + 2y^2)$. Тут положення рівноваги знаходиться дещо складніше. Знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = mg(4x^3 - 4xy), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = mg(-2x^2 + 4y).$$

Прирівняємо їх до нуля: $x(x^2 - y) = 0$ та $-x^2 + 2y = 0$. Отже, перша точка рівноваги відповідає $x = 0$ з першого рівняння, а отже $y = 0$ з другого. Друга точка рівноваги відповідає $x^2 = y$ з першого рівняння, проте підставляючи це у друге, отримуємо так само $x = 0$, $y = 0$. Отже, єдине положення рівноваги відповідає точці $(0,0)$.

Тепер помітимо, що функція $V(x, y)$ може бути записана як:

$$V(x, y) = mg\left(2\left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^4}{2}\right)$$

Отже, функція є додатно визначеною і є нульовою лише в точці $(0, 0)$. Таким чином, маємо $V(0, 0) = 0$ та $V(x, y) > 0$ для всіх інших точок. Отже, точка $(0, 0)$ є стійкою.

2 Задача 4

Умова 2.1. Намистинка маси m насаджена на гладке дротяне кільце з радіусом R і може ковзати по ньому без тертя. Кільце обертається зі сталою кутовою швидкістю Ω навколо свого нерухомого вертикального діаметру. Знайдіть положення відносної рівноваги намистинки та визначте їхню стійкість.

Розв'язання. Нехай намистинка зрушилась на кут ϕ. Тоді її потенціальна енергія поля тяжіння дорівнює $V_G(\phi) = mgR(1 - \cos\phi)$, якщо рахувати від найнижчої точки. Також, треба врахувати енергію кутової кінетичної енергії намистинки, яка дорівнює $T(\phi) = -\frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\phi$. Таким чином, загальна функція енергії:

$$V(\phi) = T(\phi) + V_G(\phi) = -\frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\phi + mgR(1 - \cos\phi).$$

Знайдемо точки рівноваги. Для цього знайдемо похідну функції $V(\phi)$:

$$\frac{dV}{d\phi} = -mR^2\Omega^2\sin\phi\cos\phi + mgR\sin\phi = mR\sin\phi(g - \Omega^2R\cos\phi)$$

Таким чином, маємо три можливості: дві тривіальні це $\sin\phi = 0$, що відповідає нижній точці $\phi = 0$ та $\phi = \pi$, що відповідає верхній точці. Третя можливість це $g - \Omega^2R\cos\phi_0 = 0$, звідки $\cos\phi_0 = \frac{g}{\Omega^2R}$. Таким чином, маємо ще два положення рівноваги $\phi_0 = \pm\arccos\left(\frac{g}{\Omega^2R}\right)$. Помітимо, що такі точки існують лише за умови $g < \Omega^2R$.

Для аналізу стійкості, візьмемо другу похідну:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mR^2\Omega^2(\sin^2\phi - \cos^2\phi) + mgR\cos\phi$$

Підставляємо різні значення. $V''(0) = -mR^2\Omega^2 + mgR = mR(g - \Omega^2R)$. Бачимо, що за умовою $g > \Omega^2R$, нульова точка буде стійкою, а інакше — ні.

В свою чергу $V''(\pi) = -mR^2\Omega^2 - mgR < 0$, а отже верхня точка рівноваги є завжди нестійкою.

Тепер підставимо ϕ_0:

$$\begin{aligned} V''(\phi_0) &= mR^2\Omega^2(1 - 2\cos^2\phi_0) + mgR\cos\phi_0 \\ &= mR^2\Omega^2 - 2m\frac{g^2}{\Omega^2} + m\frac{g^2}{\Omega^2} \\ &= mR^2\Omega^2 - m\frac{g^2}{\Omega^2} \\ &= mR^2\left(\Omega^2 - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2}\right) \end{aligned}$$

Отже, за умовою $\Omega^4 R^2 > g^2$ або $\Omega^2 R > g$, точка ϕ_0 є стійкою. Проте, оскільки це умова існування точки рівноваги, то це завжди буде виконуватись. Таким чином, положення рівноваги ϕ_0 є стійким.

3 Задача 5

Умова 3.1. Стійкість циліндрів. Однорідний циліндр з радіусом r лежить поперек зверху на нерухомо закріпленому горизонтальному циліндрі з радіусом R і може перекочуватися ним без ковзання. Визначте умову стійкості горизонтального положення рівноваги рухомого циліндру.

Відповідь. Потенціальна енергія системи як функція кута θ записується як

$$V(\theta) = mg(R\theta\sin\theta + R + r\cos\theta).$$

Візьмемо другу похідну:

$$V''(\theta) = -R\theta\sin\theta + 2R\cos\theta - r\cos\theta$$

Маємо $V''(0) = 2R - r$. Ця значення додатнє за умови $r < 2R$. За такою умовою точка $\theta = 0$ є стійкою.

Відповідь. За умови $r < 2R$ горизонтальне положення рівноваги є стійким.