1️⃣

Homework #1

Задание 1.

Найти предел:

$$L = \lim_{x \to a} \frac{x^\mu - a^\mu + (x-a)^\mu}{(x^2 - a^2)^\mu}, \ a, \mu \in \mathbb{R}$$

Решение:

Сделаем замену $z = x - a \implies x = z + a, z \to 0$. Получим:

$$L = \lim_{z \to 0} \frac{(z+a)^\mu - a^\mu + z^\mu}{((z+a)^2 - a^2)^\mu} = \lim_{z \to 0} \frac{a^\mu((1 + z/a)^\mu - 1) + z^\mu}{z^\mu (z + 2a)^\mu}$$

Снова сделаем замену $\xi = z/a \implies z = a\xi, \xi \to 0$. Имеем:

$$L = \lim_{\xi \to 0} \frac{((1+\xi)^\mu - 1) + \xi^\mu}{\xi^\mu a^\mu (\xi + 2)^\mu} = \lim_{\xi \to 0} \left(\frac{(1+\xi)^\mu - 1}{\xi^\mu a^\mu (\xi + 2)^\mu} + \frac{1}{a^\mu (\xi + 2)^\mu} \right)$$

Воспользуемся эквивалентностью $(1+\xi)^\mu - 1 \sim \mu\xi, \xi \to 0$:

$$L = \lim_{\xi \to 0} \left(\frac{\mu}{\xi^{\mu - 1} (\xi + 2)^\mu} + \frac{1}{a^\mu} \cdot \frac{1}{(\xi + 2)^\mu} \right)$$

Теперь рассмотрим 2 функции:

$$f(\xi) = \frac{\mu}{\xi^{\mu-1}(\xi+2)^{\mu}},\ h(\xi) = \frac{1}{a^{\mu}} \cdot \frac{1}{(\xi+2)^{\mu}}$$

Тогда:

$$L = \lim_{\xi \to 0} \left(f(\xi) + h(\xi) \right)$$

Начнём с функции $h(\xi)$:

$$\lim_{\xi \to 0} h(\xi) = \frac{1}{a^{\mu}} \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{(\xi+2)^{\mu}} = \frac{1}{(2a)^{\mu}}\ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Теперь рассмотрим функции $f(\xi)$:

$$\lim_{\xi \to 0} f(\xi) = \mu \lim_{\xi \to 0} \frac{\xi^{1-\mu}}{(\xi+2)^{\mu}} = \frac{\mu}{2^{\mu}} \lim_{\xi \to 0} \xi^{1-\mu}$$

Тут стоит разобрать несколько случаев:

Случай 1. $\mu < 1$. В таком случае:

$$\lim_{\xi \to 0} \xi^{1-\mu} = 0,\ \lim_{\xi \to 0} (\xi+2)^{\mu} = 2^{\mu} \implies \lim_{\xi \to 0} f(\xi) = 0 \implies L = (2a)^{-\mu}$$

Случай 2. $\mu = 1$. В таком случае $\lim_{\xi \to 0} \xi^{1-\mu} = 1 \implies L = 1/a$.

Случай 3. $\mu > 1$. В таком случае:

$$\lim_{\xi \to 0^{+}} \xi^{1-\mu} = +\infty$$

Т.к. один из пределов (правосторонний) равен $+\infty$, то предел L не сходится.

Номер 443

Найти предел:

$$L = \lim_{x \to 8} \frac{(9+2x)^{1/2} - 5}{x^{1/3} - 2}$$

Сделаем замену $t = x - 8 \implies t \to 0, x = t + 8$. Тогда:

$$L = \lim_{t \to 0} \frac{(25+2t)^{1/2} - 5}{(t+8)^{1/3} - 2} = \lim_{t \to 0} \frac{5\sqrt{1+2t/25} - 5}{2(1+t/8)^{1/3} - 2} = \frac{5}{2} \lim_{t \to 0} \frac{(1+2t/25)^{1/2} - 1}{(1+t/8)^{1/3} - 1}$$

Воспользуемся тем, что $(1+\alpha x)^{\beta} - 1 = \alpha\beta x + \overline{o}(x)$. Тогда:

$$L = \frac{5}{2} \lim_{t \to 0} \frac{t/25}{t/24} = \frac{12}{5}$$