

Домашня робота з математичного аналізу

#10

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

19 березня 2023 р.

Завдання 3.

Умова. Обчислити подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E (x^2 + y^2) dS$ по множині E , обмежений даними кривими:

$$y = x, x + y = 2a, x = 0, a > 0$$

Розв'язок. Множина E зображена на рисунку 1. Бачимо, що перед нами трикутник з вершинами $A(0, 0)$, $B(0, 2a)$, $C(a, a)$. Отже, наш інтеграл можемо записати як:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^a dx \int_x^{2a-x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x}^{y=2a-x} dx = \\ &= \int_0^a \left(x^2(2a-x) + \frac{(2a-x)^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^a 2ax^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^a (2a-x)^3 dx - \frac{7}{3} \int_0^a x^3 dx = \\ &= 2a \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a-x)^4}{4} \Big|_{x=0}^{x=a} - \frac{7a^4}{12} = \frac{2a^4}{3} - \frac{a^4}{12} + \frac{(2a)^4}{12} - \frac{7a^4}{12} = \\ &= \frac{4a^4}{3}\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{4a^4}{3}$.

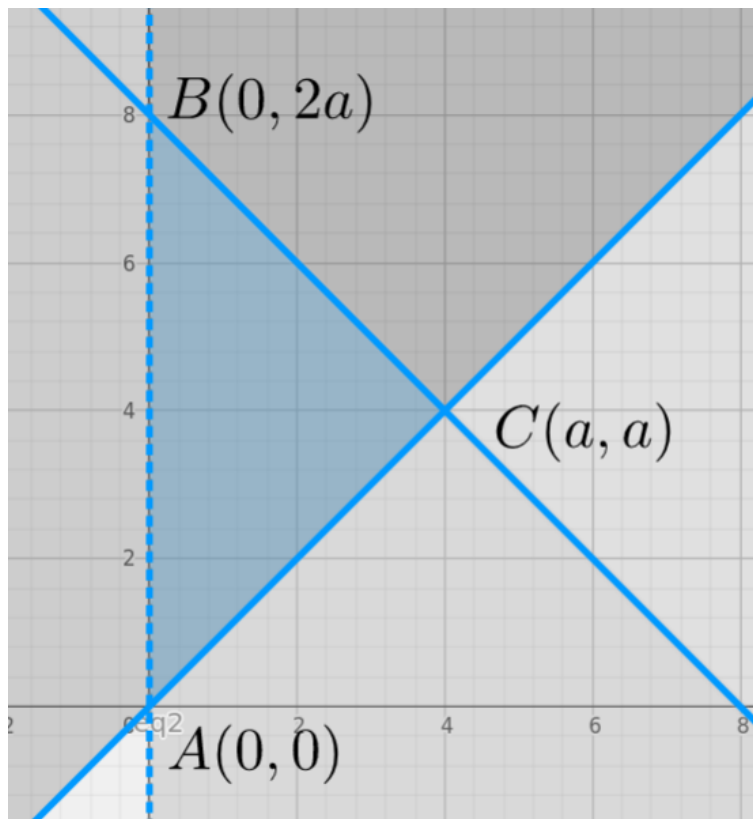


Рис. 1: Множина E для $a = 4$

Завдання 4.

Умова. Обчислити подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E \frac{x^2}{y^2} dS$ по множині E , обмежений даними кривими:

$$y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$$

Розв'язок. Множина E зображена на рисунку 2.

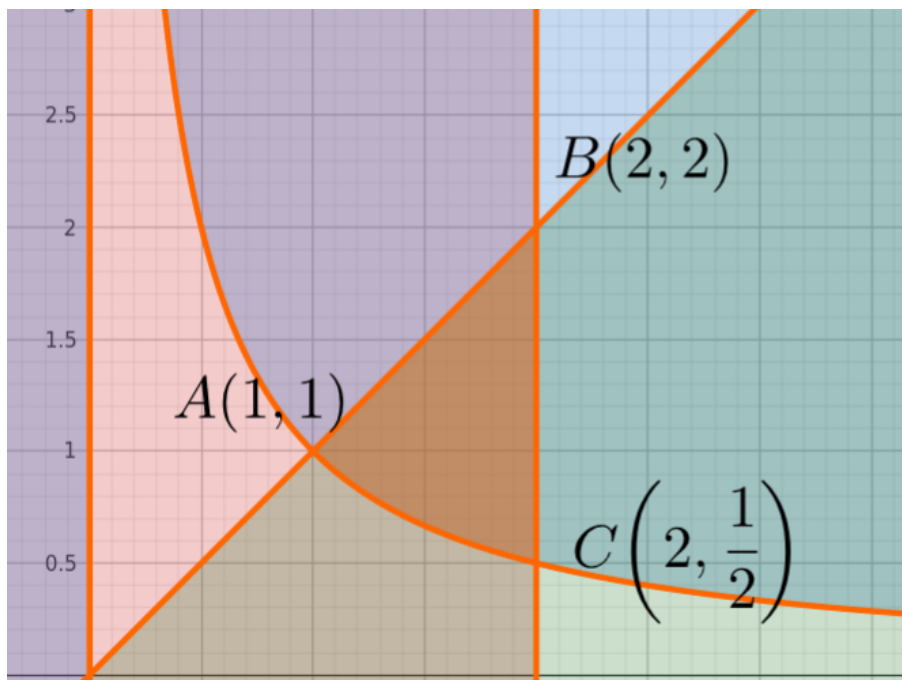


Рис. 2: Множина E

Отже бачимо, що наш інтеграл ми можемо записати як:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy = - \int_1^2 \frac{x^2}{y} \Big|_{y=1/x}^{y=x} dx = \\ &= - \int_1^2 (x - x^3) dx = - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = \\ &= -(2 - 4 - 0.5 + 0.25) = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{9}{4}$.

Завдання 5.

Умова. Обчислити подвійний інтеграл $\mathcal{I} = \iint_E e^x dS$ по множині E , обмежений даними кривими:

$$x = 0, y = 1, y = 2, x = \ln y$$

Розв'язок. Множина E зображена на рисунку 3.

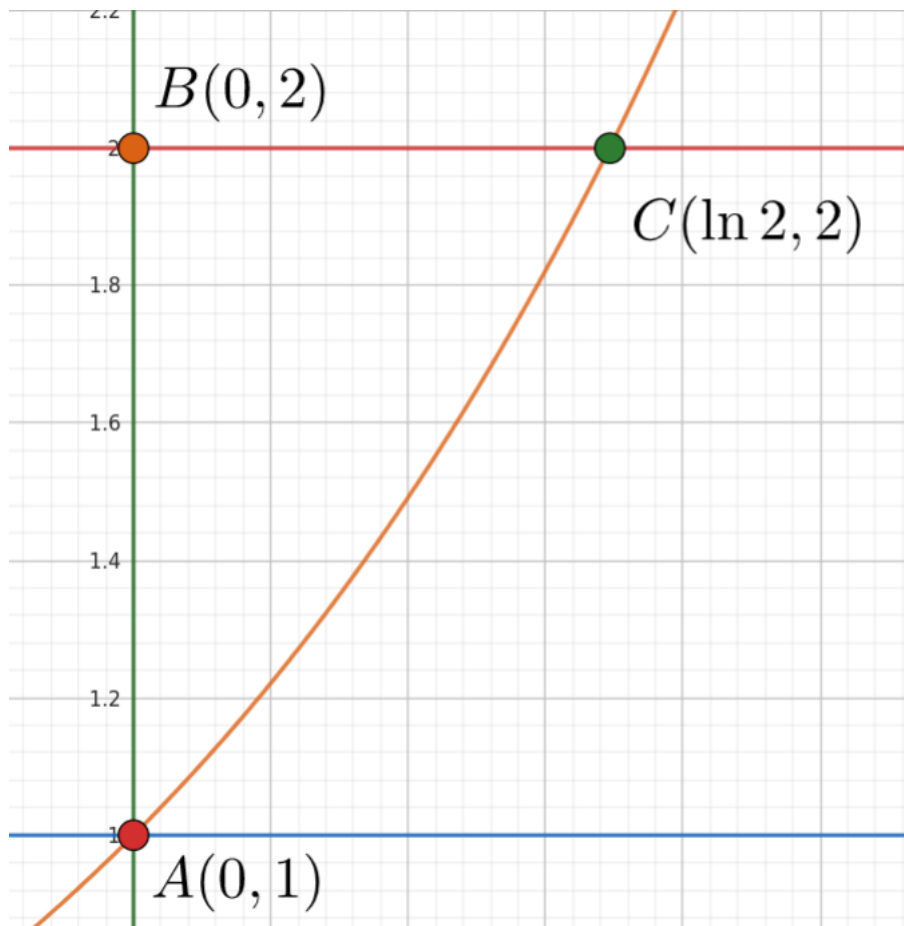


Рис. 3: Множина E

Як бачимо з малюнку, можемо записати інтеграл:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^{\ln 2} dx \int_{e^x}^2 e^x dy = \int_0^{\ln 2} e^x y \Big|_{y=e^x}^2 dx = \\ &= \int_0^{\ln 2} e^x (2 - e^x) dx = 2e^x \Big|_0^{\ln 2} - \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{x=0}^{x=\ln 2} = \\ &= 2(2 - 1) - \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.