📝

Індивідуальні завдання

Робота з курсу “Методи оптимізації”

Студента 2 курсу групи МП-21

Захарова Д.О.

Варіант 6

Завдання 1.

Умова. Графічне розв’язання задачі лінійного програмування. Знаходження максимуму і мінімуму цільової функції.

Розв’язок. Спочатку сформулюємо задачу лінійного програмування у довільному випадку. Нехай у нас є $n_x \in \mathbb{N}$ змінних, які запишемо у вектор змінних $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

і нам потрібно мінімізувати або максимізувати деяку цільову функцію (візьмемо наприклад $\max$ без зменшення загальності):

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max, \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

> ❗ **Замітка 1.** Вважаємо, що $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^{n_x} c_k x_k$ — стандартна евклідова метрика.

❗ **Замітка 2.** Насправді неважливо, стоїть в нас $\max$ чи $\min$, бо ми завжди можемо обрати замість вектора $\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$ і тоді наша задача зведеться до протилежної (тобто наприклад $\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max\} \iff \{\langle \mathbf{c}', \mathbf{x} \rangle \to \min\}$)

Також маємо деяку систему обмежень (згідно *замітки 2* не принципіально, який саме знак стоїть при формулюванні):

$$\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{x} \rangle \geq \beta_k,\ \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^{n_x},\ \beta_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n_\beta}$$

Або інакше кажучі, якщо записати у вигляді сум:

$$\sum_{j=1}^{n_x} b_{k,j} x_j \geq \beta_k,\ k = \overline{1, n_\beta}$$

❗ **Замітка 3.** Зазвичай при формулюванні задачі лінійного програмування додають умову $x_k \geq 0,\ k = \overline{1, n_x}$, але нам це для опису графічного розв'язання не так важливо (як мінімум можемо просто додати умови $(\mathbf{b}_m : b_i = \delta_{i,m}), (\beta_m = 0)$).

Отже, сформулювавши завдання, перейдемо все-таки до відповіді на запитання 🙂. Зробимо це у вигляді "алгоритму", розбивши його на 3 відносно прості кроки.

Крок 1. Почнемо з кінця, а саме з систем умов $\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{x} \rangle \geq \beta_k,\ \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^{n_x},\ k = \overline{1, n_\beta}$. Якщо ми запишемо кожну умову у вигляді рівності, тобто

$$\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{x} \rangle = \beta_k$$

то це по суті буде описувати площину у просторі (або якщо $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, то пряму на плоскості). Причому будь-яка площина ділить цей простір на 2 частини, і лише одна з них і буде містити усі точки, при яких виконується умова нерівності. Тому достатньо підставити якусь довільну точку з якогось півпростору та перевірити чи виконується нерівність і якщо так — обрати цей півпростір, а якщо ні — інший.

Нехай ми обрали півпростір $\mathcal{S}_1$ для рівняння $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{x} \rangle \geq \beta_1$. Те саме ми робимо і для інших рівнянь, тим самим отримуючи набір півпросторів $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n_\beta}\}$.

Крок 2. Знайти об'єднання цих всіх півпросторів, тобто $\mathcal{S} = \bigcap_{k=1}^{n_\beta} \mathcal{S}_k$. Усі точки з $\mathcal{S}$ будуть виконувати нашу систему обмежень.

Якщо $\mathcal{S} = \emptyset$, то нам в якомусь сенсі пощастило — тобто немає жодної точки, що підходить до обранної системи обмежень і тому оптимізувати нічого. Закриваємо завдання 🙂

Якщо нам не "пощастило", рухаємось до третього кроку.

Крок 3. На секунду уявимо, що ми вже знайшли оптимальне значення $\gamma \in \mathbb{R}$, яке максимізує цільову функцію $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \gamma \to \max$, і воно існує. Якщо взяти рівність $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \gamma$, то перед нами, як і в *кроці 1*, деяка площина $\mathcal{P}_\gamma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle = \gamma\}$. Причому оскільки розв'язок $\mathbf{x}$ задовольняє системі обмежень, то $\mathcal{P}_\gamma \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ — це може бути або одна точка, або якийсь шматок площини $\mathcal{P}_\gamma$.

Окрім того, справедливо те, що якщо ми візьмемо якесь значення $\gamma' > \gamma$ і для неї знайдемо деяку площину $\mathcal{P}_{\gamma'}$, то вона не буде перетинати $\mathcal{S}$. Якщо більш строго, то

$$(\forall \gamma' \in \mathbb{R})\ (\gamma' > \gamma) : \{\mathcal{P}_{\gamma'} \cap \mathcal{S} = \emptyset\}$$

Це дозволяє сформулювати достатньо простий алгоритм знаходження оптимального розв'язку. Візьмемо деяке початкове значення γ_0 (з форми $\mathcal{S}$ часто доволі інтуїтивно зрозуміло, яке саме взяти) і побудуємо площину $\mathcal{P}_{\gamma_0}$. Почнемо потрохи збільшувати значення γ_0 допоки при збільшенні ми більше не будемо отримувати перетин. Інакше кажучі, знайдемо множину значень $G = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \mathcal{P}_\gamma \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}$ і в якості розв'язку візьмемо $g := \max G$ і в якості множини оптимальних параметрів $\mathcal{P}_g \cap \mathcal{S}$.

Але насправді не завжди взагалі існує такий оптимальний параметр, тобто як б ми не збільшували γ, все одно буде знаходитись прямі $\mathcal{P}_\gamma \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ і тому в цьому випадку в нас також не можна знайти конкретний розв'язок.

Для випадку знаходження мінімуму функції дії такі самі, але ми знаходимо $\min G$ (або виносимо мінус і знаходимо максимум).

Приклад застосування цього алгоритму можна побачити у *завданні 2*.

Завдання 2.

Умова. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

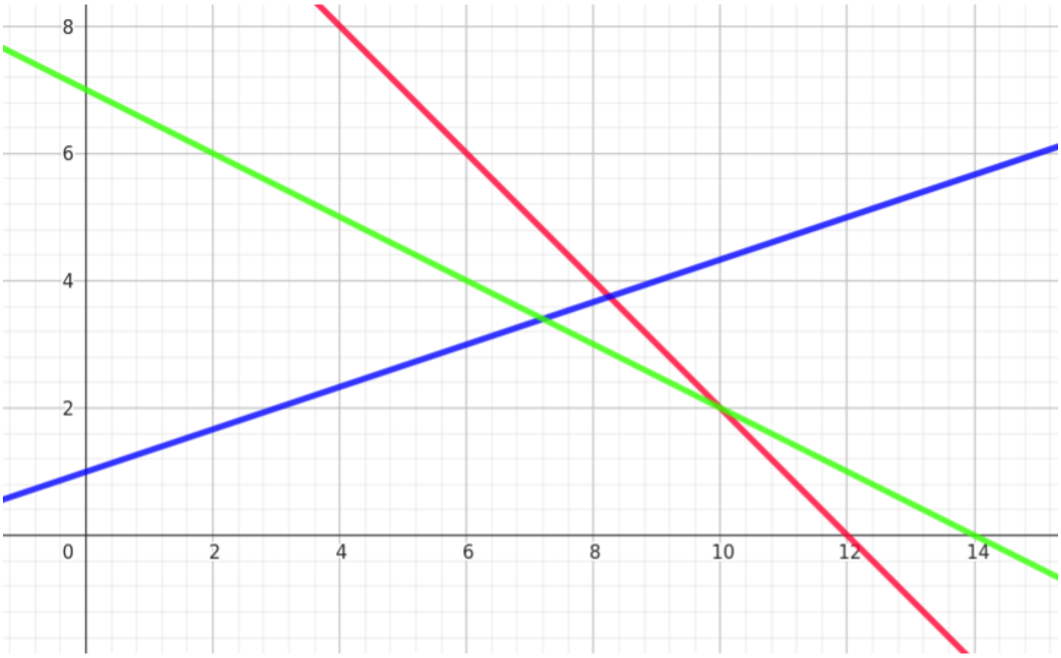
$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \end{cases}$$

Розв’язок. Йдемо по кроках, як це описано у *завданні 1*.

Крок 1. Побудуємо прямі

$$x_1 + x_2 = 12, \; -x_1 + 3x_2 = 3, \; x_1 + 2x_2 = 14$$

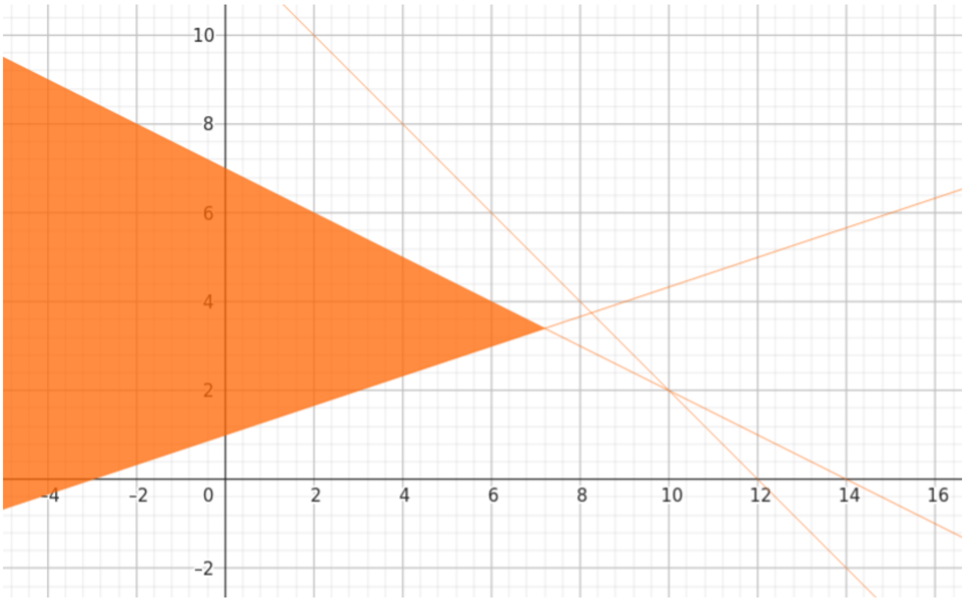
Отримаємо наступний малюнок:



Червоним, синім і зеленим відміченні рівняння у порядку виписаному вище

Далі обираємо напівплощини $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ згідно знакам нерівностей:

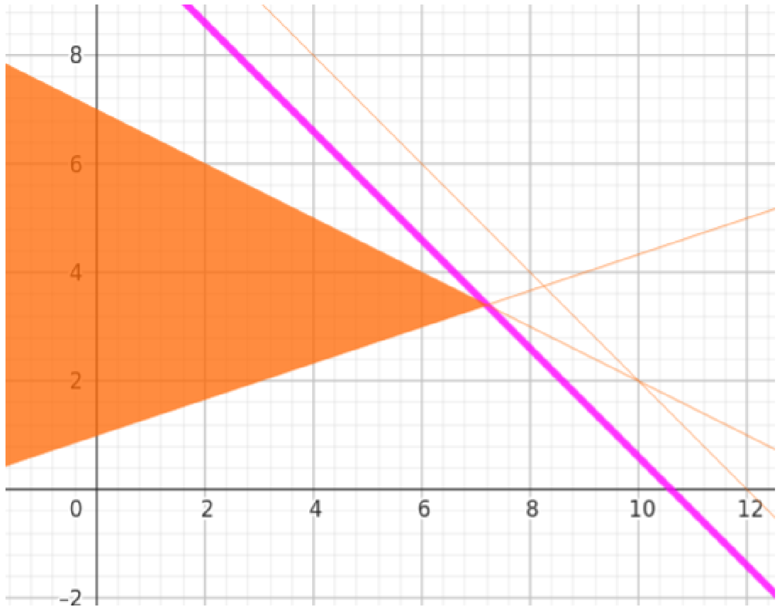
Знаходимо перетин $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$:



Далі починаємо будувати множину прямих $x_1 + x_2 = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$. Насправді доволі інтуїтивно зрозуміло, що нам потрібно знайти таке значення γ, що наша пряма $x_1 + x_2 = \gamma$ буде перетинати одну єдину точку, що є перетином $(-x_1 + 3x_2 = 3) \cap (x_1 + 2x_2 = 14)$. Для цього спочатку знайдемо перетин цих двох прямих. Якщо скласти два рівняння, отримаємо $5x_2 = 17 \to x_2 = 17/5$ і тому $x_1 = 14 - \frac{34}{5} = \frac{36}{5}$. Отже, наше значення γ:

$$\gamma = x_1 + x_2 = \frac{17 + 36}{5} = \frac{53}{5}$$

Також згадаємо, що оптимізувати потрібно $\mathcal{C}(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$, тобто насправді максимальне значення $\mathcal{C}$ дорівнює $2\gamma = \frac{106}{5}$ і досягається при $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 36 \\ 17 \end{bmatrix}$. В цьому тепер можна переконатись, побудувавши графік $2x_1 + 2x_2 = 106/5$:



Відповідь. $\mathcal{C}(36/5, 17/5) = 106/5 \to \max$.

Завдання 3.

Спочатку складемо математичну модель. Нехай ми взяли x_1 виробів виду Π_1 та x_2 виробів виду Π_2. Тоді нам потрібно максимізувати виручку:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

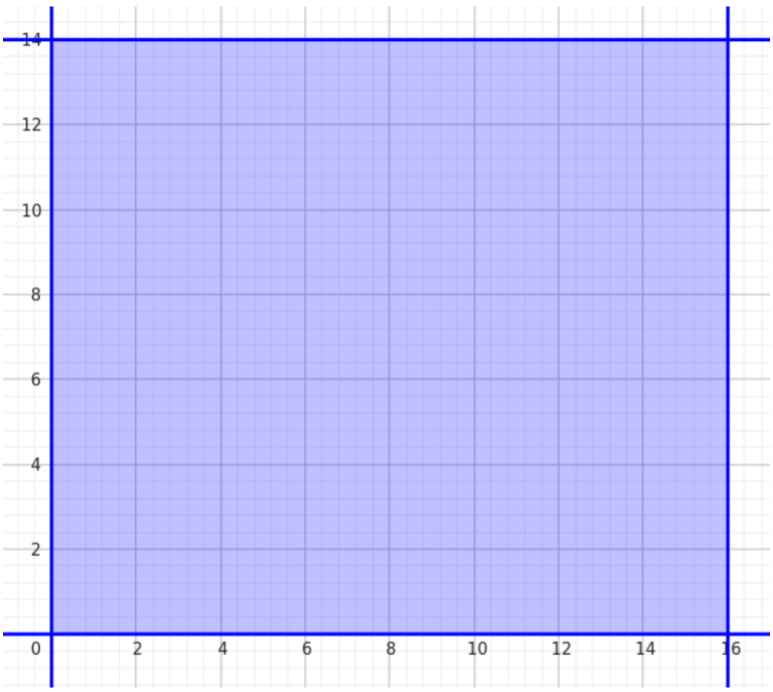
Оскільки виробів виду Π_1 потрібно не більше n_1 штук, то маємо умову $x_1 \leq n_1$. Аналогічно для виду $\Pi_2 : x_2 \leq n_2$. Окрім цього, кількість виробів не може бути від'ємною, а отже можна додати умову $0 \leq x_i \leq n_i$. Також скоріше за все, кількість виробу — це число ціле, тому $x_i \in \mathbb{Z}$. Затрати сировини від двох виробів $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2$ і ці затрати не повинні перебільшувати запасів сировини, тобто $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \leq b$. Отже, маємо наступне ЗЛП:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \le b \\ 0 \le x_1 \le n_1 \\ 0 \le x_2 \le n_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

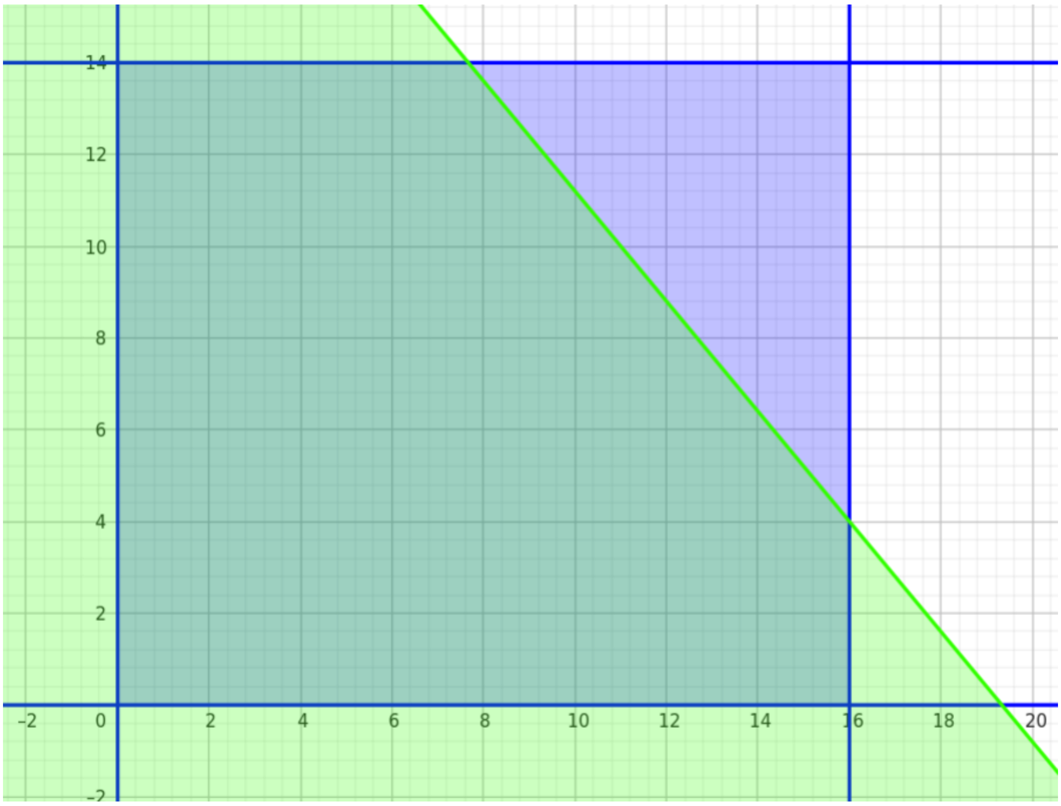
Умова. Підставимо числа з мого варіанту ($b = 116, n_1 = 16, n_2 = 14, a_{1,1} = 6, a_{1,2} = 5, c_1 = 32, c_2 = 24$):

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = 32x_1 + 24x_2 = 8(4x_1 + 3x_2) \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 116 \\ 0 \le x_1 \le 16 \\ 0 \le x_2 \le 14 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

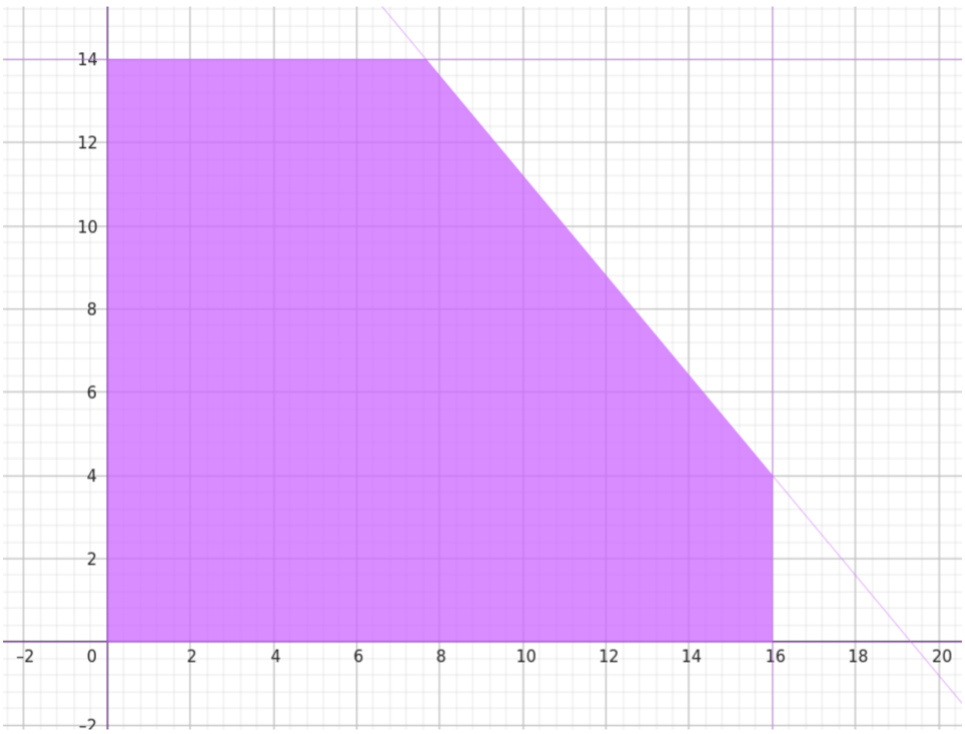
Знову починаємо з обмежень. Обмеження $0 \le x_1 \le 16, 0 \le x_2 \le 14$ описує прямокутник зі сторонами $16, 14$, тобто множину:



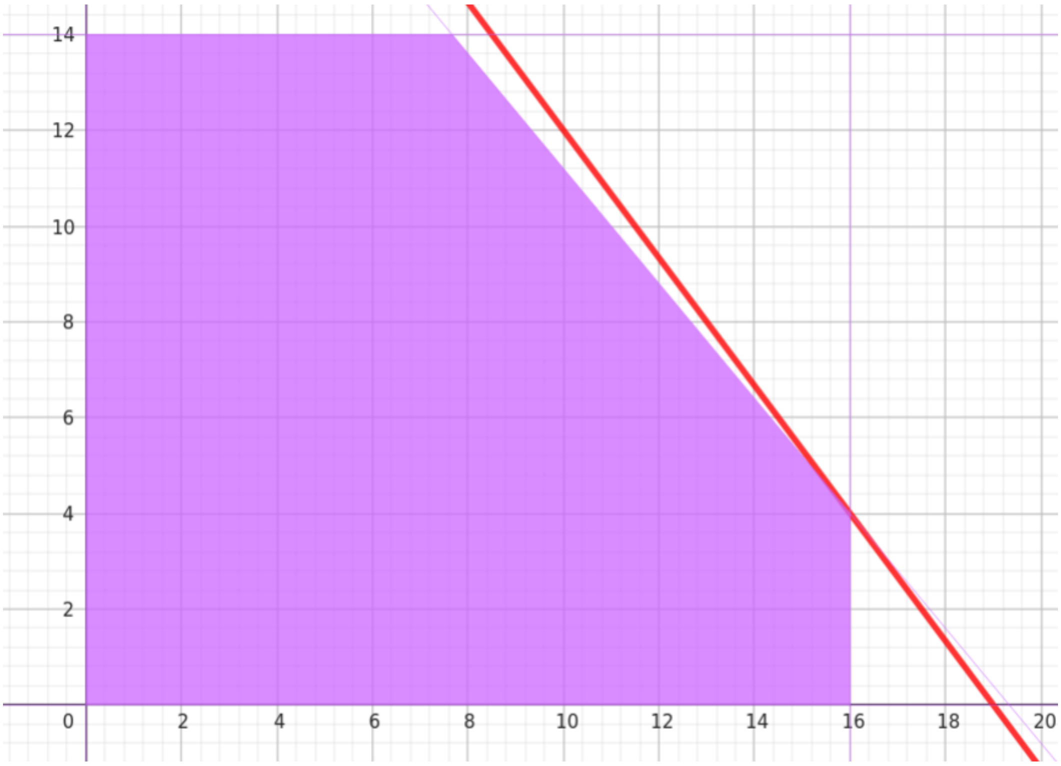
Далі будуємо пряму $6x_1 + 5x_2 = 116$ і обираємо нижчу напівплощину (тобто ту, що містить точку $(0, 0)$). Після цього беремо перетин з нашим "прямокутником". Отримаємо:



Або якщо обрізати верхній правий кут прямокутника:



Далі будуємо множину прямих $\{4x_1 + 3x_2 = \gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Якщо помалювати, то можна побачити, що ця пряма повинна перетинати точку, що є перетином прямих $x_1 = 16$ та $6x_1 + 5x_2 = 116$, тобто:



Нескладно бачити, що перетином є точка $(16, 4)$. В цій точці цільова функція досягає значення

$$\mathcal{C}(16, 4) = 32 \cdot 16 + 24 \cdot 4 = 608$$

Відповідь. Потрібно виробити 16 одиниць продукції Π_1 та 4 одиниці продукції Π_2, що дасть прибуток у 608 грошових одиниць.

Завдання 4.

Умова. За допомогою симплекс методу з алгебраїчними перетвореннями, знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \\ 4x_1 - x_2 \leq 35 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Допомовнимо нашу систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ x_1 - x_2 - x_5 = -3 \\ 4x_1 - x_2 + x_6 = 35 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Далі виражаємо x_3, x_4, x_5, x_6 через x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 18 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 3 + x_1 - x_2 \\ x_6 = 35 - 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

Як бачимо вільні члени усі додатні, а отже маємо розв'язок $(0, 0, 10, 18, 3, 35)$.

Повернімося до цільової функції. Маємо:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 0 - (-x_1 + x_2)$$

Бачимо, що у виразі $-x_1 + x_2$ єдиний від'ємний додаток — це $-x_1$. Далі згідно виразу для x_3, x_4, x_5, x_6, знаходимо значення $\{10/1, 18/3, -3/1, 35/4\}$ та знаходимо мінімальний додатній з них. В цьому випадку — це 6, що відповідає x_4. Отже, змінюємо x_1 та x_4 (поки зміню лише для однієї строчки):

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_1 = 6 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 = 3 + x_1 - x_2 \\ x_6 = 35 - 4x_1 + x_2 \end{cases}$$

Підставляємо у цільову функцію:

$$\mathcal{C} = x_1 - x_2 = 6 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 - x_2 = 6 - \left(\frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right) \to \max$$

Оскільки $x_2, x_4 \geq 0$, то $\frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \geq 0$ і тому $\mathcal{C} \leq 6$ і тому максимум функції $\mathcal{C}$ досягається при $\mathcal{C} = 6$. Якщо зробити залежність x_1, x_3, x_5, x_6 через x_2, x_4, то отримаємо оптимальний розв'язок $(6, 0, 4, 0, 9, 11)$.

Завдання 5.

Запишемо ЗЛП у загальному вигляді. Нехай ми виробили вироби $1, 2, 3$ у кількості $x_1, x_2, x_3, (x_i \geq 0)$, відповідно. Тоді обладнання першого типу (A) ми використовували $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3$ годин і це число не повинно перебільшувати Φ_1. Аналогічно для інших виробів: наприклад для обладнання другого типу будемо мати умову $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \leq \Phi_2$. Тому якщо позначити матрицю

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

То маємо систему обмежень

$$\mathbf{Wx} \leq \mathbf{\Phi}$$

Окрім цього $\mathbf{x} \geq \theta$. При цьому прибуток $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T\mathbf{x}$ (тут ми позначили $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$) потрібно максимізувати. Отже наша завдання формулюється наступним чином:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T\mathbf{x} \to \max$$
$$\begin{cases} \mathbf{Wx} \leq \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{x} \geq \theta \end{cases}$$

Умова для мого варіанту виглядає наступним чином:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \to \max$$

при обмеженні

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \\ 80 \\ 50 \\ 56 \end{bmatrix}, \ x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,3})$$

Тобто:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \le 60 \\ 3x_1 + 4x_3 \le 80 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \le 80 \\ 3x_2 + 4x_3 \le 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 56 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Введемо додаткові змінні до системи обмежень:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_5 = 80 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_6 = 80 \\ 3x_2 + 4x_3 + x_7 = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_8 = 56 \end{cases}$$

Побудуємо сімплекс-таблицю:

$-$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
x_4	6	1	0	1	0	0	0	0	60
x_5	3	0	4	0	1	0	0	0	80
x_6	1	5	1	0	0	1	0	0	80
x_7	0	3	4	0	0	0	1	0	50
x_8	2	3	2	0	0	0	0	1	56
$\mathcal{C}$	-6	-5	-7	0	0	0	0	0	0

Бачимо, що $(0, 0, 0, 60, 80, 80, 50, 56)$ — допустимий розв'язок. Бачимо, що через останньої строчки -7 — мінімальна. Тому беремо колонку зі значенням x_3 і ділимо значення зі стовпця B на значення у колонці x_3. Маємо набір $\{80/4, 80/1, 50/4, 56/2\} = \{20, 80, 12.5, 28\}$, з яких мінімальний — це 12.5. Отже змінюємо місцями x_3 та x_7. Для цього спочатку ділимо строку з x_7 на 4:

$-$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
x_4	6	1	0	1	0	0	0	0	60
x_5	3	0	4	0	1	0	0	0	80
x_6	1	5	1	0	0	1	0	0	80
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
x_8	2	3	2	0	0	0	0	1	56
$\mathcal{C}$	-6	-5	-7	0	0	0	0	0	0

А далі віднімаємо від кожної строчки де $x_3 \neq 0$ строку з x_7, помножену на значення x_3 у данної строчки. Тобто

$-$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
x_4	6	1	0	1	0	0	0	0	60
x_5	3	-3	0	0	1	0	-1	0	30
x_6	1	$\frac{17}{4}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{135}{2}$
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
x_8	2	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	31
$\mathcal{C}$	-6	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{175}{2}$

Тепер беремо -6 з останнього рядка, що відповідає стовпцю x_1 (всі значення у стопці B додатні). Діливо значення у стовпці B на ненульові коефіцієнти перед x_1, тобто отримуємо набір $\{60/6, 30/3, 135/2, 31/2\} = \{10, 10, 67.5, 15.5\}$. Тому можемо або змінити x_1 на x_4, або на x_5. Зробимо обмін x_1, x_4, тому ділимо строчку з x_4 на 6:

$-$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	10
x_5	3	-3	0	0	1	0	-1	0	30
x_6	1	$\frac{17}{4}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{135}{2}$
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
x_8	2	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	31
$\mathcal{C}$	-6	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{175}{2}$

Далі зануляємо усе від x_1:

$-$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	B
x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	10
x_5	0	$-\frac{7}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	0
x_6	0	$\frac{49}{12}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{115}{2}$
x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{25}{2}$
x_8	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	11
$\mathcal{C}$	0	$\frac{5}{4}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{295}{2}$

Отже цільова функція $\mathcal{C} = \frac{295}{2} - \left(\frac{5}{4}x_2 + x_4\right)$ і оскільки $x_2, x_4 \geq 0$, то максимум цільової функції дорівнює $\frac{295}{2}$ при оптимальному розв’язку $(10, 0, 12.5, 0, 0, 57.5, 0, 11)$, тобто при значенні $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}$.

Відповідь. Якщо виробити сировину у кількості $(10, 0, 12.5)$ то отримаємо максимальний прибуток 147.5.

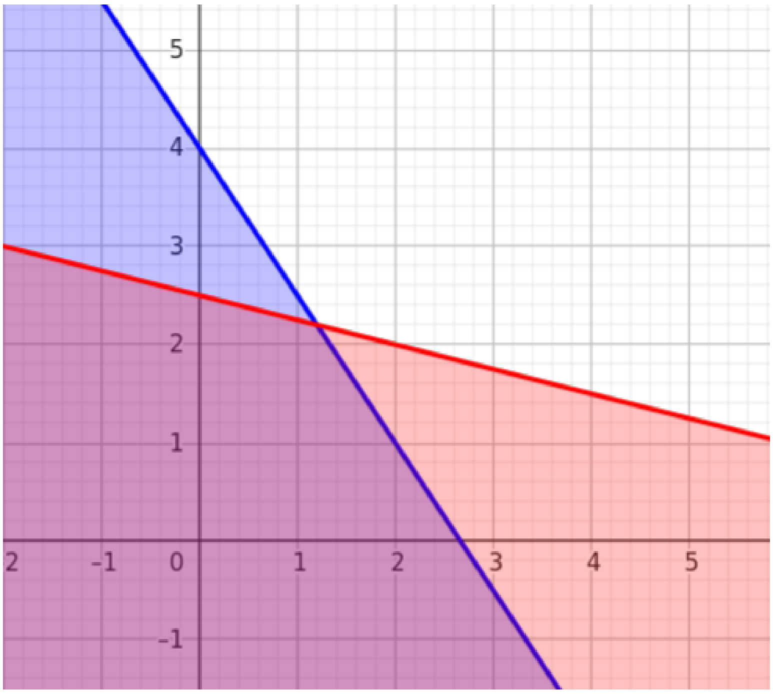
Завдання 6.

Умова. До цієї задачі лінійного програмування скласти двоїсту задачу. Розв'язати цю задачу графічним методом, а двоїсту задачу симплекс-методом.

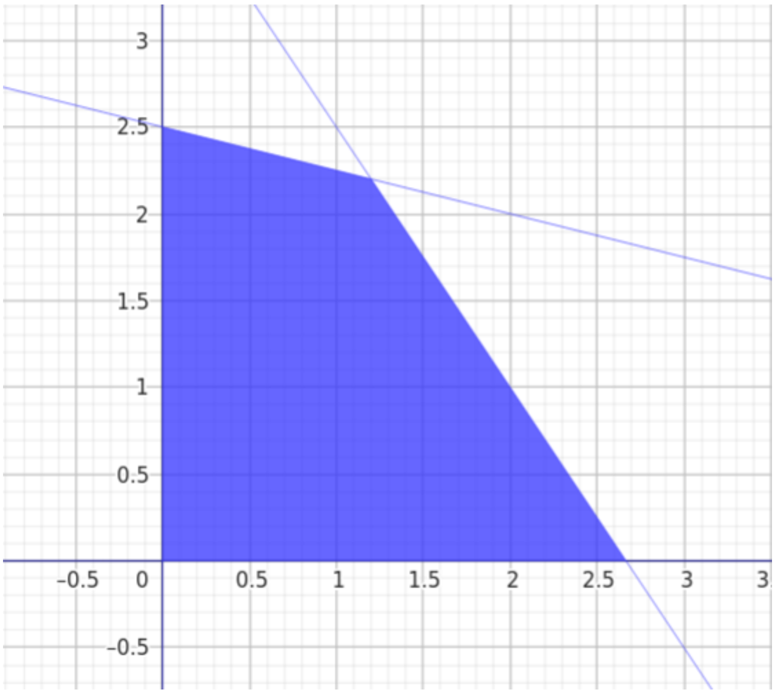
Початкова задача:

$$\mathcal{C}(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

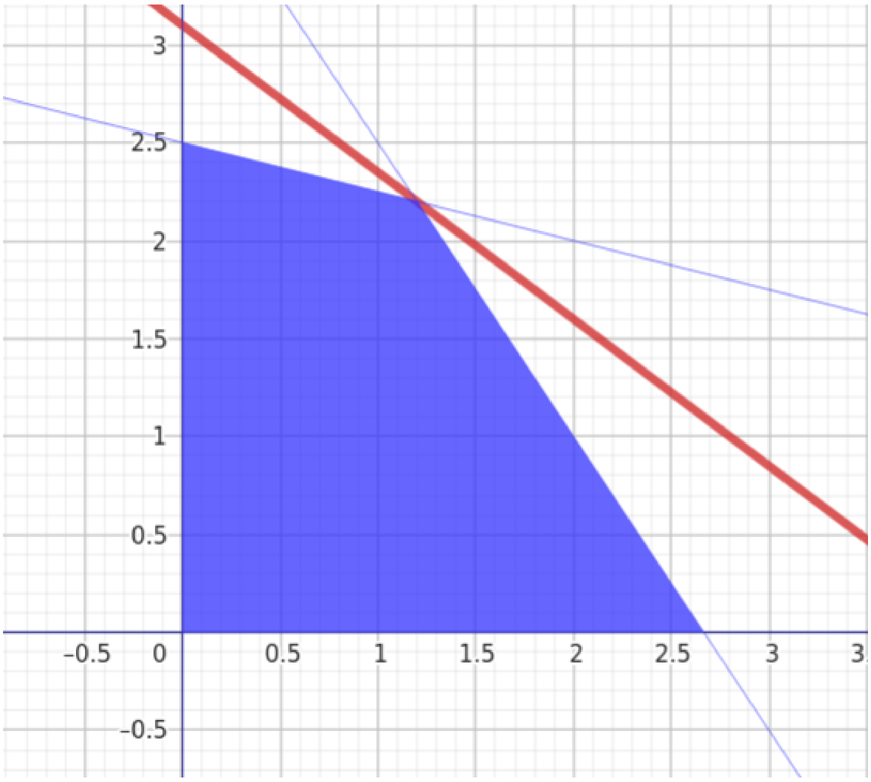
Розв’язок. Спочатку розв’яжемо початкову задачу графічним методом. Побудуємо прямі $3x_1 + 2x_2 = 8, x_1 + 4x_2 = 10$ та оберемо відповідні півплощини:



Також врахуємо $x_1, x_2 \geq 0$ та оберемо чотирикутник, що є перетином усіх отриманих напівплощин:



Будуємо сімейство прямих $3x_1 + 4x_2 = \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$ та збільшуємо γ наскільки зможемо. З малюнку видно, що максимум досягається у точці перетинання прямих $3x_1 + 2x_2 = 8$ та $x_1 + 4x_2 = 10$:



Перетин легко знаходиться: $(x_1, x_2) = (\frac{6}{5}, \frac{11}{5})$, тому максимум досягається при значенні $\mathcal{C}(6/5, 11/5) = \frac{62}{5} = 12.4$.

Тепер побудуємо двоїсту задачу. Маємо 2 змінні (y_1, y_2) і тепер нам потрібно мінімізувати функцію:

$$\mathcal{L}(y_1, y_2) = 8y_1 + 10y_2 \to \min$$

Тепер побудуємо транспоновану матрицю коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \to \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

І тому маємо нові обмеження (поки знаки нерівностей залишимо під запитанням):

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \ (?) \ 3 \\ 2y_1 + 4y_2 \ (?) \ 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y_1 + y_2 \ (?) \ 3 \\ y_1 + 2y_2 \ (?) \ 2 \end{cases}$$

Випишемо обмеження на y_i. Для цього візьмемо знаки нерівностей в “великих” умовах з початкового завдання і “інвертуємо їх”: $y_1, y_2 \geq 0$. Знак для нерівностей просто продублюємо з умов на x_i:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \end{cases}$$

Остаточно двоїста задача виглядає наступним чином:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 8y_1 + 10y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розширемо систему рівнянь з обмеженнями:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Виражаємо y_3, y_4 через y_1, y_2:

$$\begin{cases} y_3 = -3 + 3y_1 + y_2 \\ y_4 = -2 + y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Вільні члени обидва від'ємні. Отже, візьмемо мінімальний з них (в нашому випадку це -3) та тому змінимо y_1, y_3. Тому:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

Підставивши в друге рівняння, отримаємо

$$y_4 = -2 + 1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 + 2y_2 = -1 + \frac{5}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$$

Вільний член -1, тому поміняємо y_4 та y_2:

$$\frac{5}{3}y_2 = 1 - \frac{1}{3}y_3 + y_4 \implies y_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4$$

Підставляємо у перше рівняння:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4\right) + \frac{1}{3}y_3 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{15}y_3 - \frac{1}{5}y_4 + \frac{1}{3}y_3 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}y_3 - \frac{1}{5}y_4$$

Отже, остаточно маємо

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}y_3 - \frac{1}{5}y_4 \\ y_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 \end{cases}$$

Тому допустимий розв’язок $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$. Підставляємо у наш вираз $\mathcal{L}(y_1, y_2)$:

$$\mathcal{L}(y_1, y_2) = 8y_1 + 10y_2 = \frac{32}{5} + \frac{16}{5}y_3 - \frac{8}{5}y_4 + 6 - 2y_3 + 6y_4 = \frac{62}{5} + \left(\frac{6}{5}y_3 + \frac{22}{5}y_4\right)$$

Бачимо, що $\mathcal{L}_{\min} = \frac{62}{5}$, що збігається з відповіддю, коли ви розв’язували графічним методом. Цей мінімум досягається при $y_1 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{3}{5}$.