🧮

Homework #3

Задание 1.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, то в таком случае $AB = BA = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 = -12.$ На самом деле если обозначить $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, то перед нами операция нахождения скалярного произведения векторов (т.е. $\vec{v}\vec{u}^T = \vec{u}^T\vec{v}$).

Задание 790.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3+2 & 5-6+6 & 6-15+4 \\ 6-4+1 & 15-8+3 & 18-20+2 \\ 4-5+3 & 10-10+9 & 12-25+6 \end{pmatrix}$$

Окончательно имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Задание 803.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Для начала найдём A^2. Заметим, что если $A^2 = \{b_{i,j}\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$, то:

$$b_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} a_{i,k}a_{k,j}$$

Заметим, что $\forall i, j,\ i \neq j : a_{i,j} = 0$, поэтому все элементы суммы равны нулю, если не попадётся член $a_{i,i}a_{j,j} = \lambda_i\lambda_j$. Однако он может попасться только в случае $i = j$. Таким образом $\forall i, j,\ i \neq j : b_{i,j} = 0$, а если $i = j = k$, то $b_{k,k} = \lambda_k^2$. Таким образом:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Повторив эту операцию k раз, получим:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Задание 836.

Первый способ — использовать тот факт, что:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Поэтому:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Второй способ — метод Гаусса. Запишем следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2-3A_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_1+A_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{A_2\cdot(-1/2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Таким образом получили обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Задание 840.

Первый способ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Посчитав все определители, получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$