Test #3

Задание 1

$$L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_1 - 8x_2 = 0, x_2 + x_4 = 0 \}$$

Возьмём два вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in L$. Если L — линейное подпространство $\mathbb{R}^4$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$. Проверим это: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$.

Действительно, сумма принадлежит множеству L. Во-первых, $x_3 + y_3 = 0 + 0 = 0$. Во-вторых:

$$(x_1 + y_1) - 8(x_2 + y_2) = (x_1 - 8x_2) + (y_1 - 8y_2) = 0 + 0 = 0$$

И, наконец:

$$(x_2 + y_2) + (x_4 + y_4) = (x_2 + x_4) + (y_2 + y_4) = 0 + 0 = 0$$

Теперь проверим, верно ли то, что $\lambda \mathbf{x} \in L$. Заметим, что $\lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix}$.

Действительно, $\lambda x_3 = 0, \lambda x_1 - 8\lambda x_2 = \lambda(x_1 - 8x_2) = 0, \lambda x_2 + \lambda x_4 = \lambda(x_2 + x_4) = 0$. Остальные аксиомы проверяются очевидным образом.

Отметим лишь, что обратный элемент к $\mathbf{x} \in L$ имеет вид $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$ (то, что $-\mathbf{x} \in L$ очевидно, ведь это частный случай умножения на скаляр при $\lambda = -1$). Нулевой элемент $\theta \in L$ также удовлетворяет всем свойствам L.

Найдём базис L. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = t \in \mathbb{R}$. Тогда $x_2 = -x_4 = -t$. Значит, $x_1 = 8x_2 = -8t$. Поэтому:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8t \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому в качестве базисного вектора достаточно взять $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда любой вектор из L можно записать в виде $t\mathbf{e}_1, t \in \mathbb{R}$. Поэтому $\dim L = 1$.

Задание 2

Сумма подпространств:

$$L_1 + L_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in L_1, \mathbf{x} \in L_2\}$$

Для того, чтобы найти базис суммы, нам нужно найти максимальное количество линейно независимых векторов из множества $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Для этого построим следующую матрицу и сведём её к ступенчатой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_j - a_{j,1}R_1, j=\overline{2,6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Как видим, в качестве базисов можем взять вектора:

$$\mathbf{e}_1^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и поэтому $\dim(L_1 + L_2) = 3$.

Теперь найдём базисы $L_1 \cap L_2$. По определению:

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \beta_3\mathbf{b}_3\}$$

Рассмотрим матрицу системы $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 - \beta_1\mathbf{b}_1 - \beta_2\mathbf{b}_2 - \beta_3\mathbf{b}_3 = \theta$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_j - a_{j,1}R_1, j=\overline{2,4}}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица теперь соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 - 3\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Если откинуть β_3 из системы уравнений, то всё сведётся к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Пусть $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ — независимые параметры, а α_1, α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 3\beta_1 + \beta_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

Найдём, как выглядит произвольный вектор $\mathbf{x} \in L_1 \cap L_2$:

$$\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

На всякий случай можно проверить подстановкой через $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 8\beta_1 + 6\beta_2 \\ -3\beta_1 - \beta_2 \\ 4\beta_1 + 2\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в качестве базисов выберем 2 вектора:

$$\mathbf{e}_1^{\cap} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2^{\cap} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$. Проверим формулу Грассмана:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

Действительно, $\dim(L_1 + L_2) = 3, \dim L_1 = 2, \dim L_2 = 3, \dim(L_1 \cap L_2) = 2$, а поэтому $3 = 2 + 3 - 2$. ($\dim L_1 = 2$ т.к. ранг матрицы $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ равен 2).

Задание 3

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. По условию наш линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ должен “выдавать” вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, который будет являтся проекцией вектора $\mathbf{x}$ на плоскость Ox_1x_2. Тут отображение весьма простое:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Покажем, что это действительно линейный оператор. По определению:

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y}) \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(можно конечно и проверять по двум отдельно свойствам: $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$ *и* $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x})$*, но полагаю, что данные утверждения идентичны).*

Действительно,

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \mathcal{A}\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) = \mathcal{A}\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu y_1\\\mu y_2\\\mu y_3\end{pmatrix}\right) = \mathcal{A}\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\\\lambda x_3+\mu y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\\0\end{pmatrix}$$

С другой стороны:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}, \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\0\end{pmatrix} \to \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\\0\end{pmatrix}$$

Как видим, оба выражение совпадают, а значит перед нами линейный оператор.

Теперь найдём ядро ($\mathrm{Null}(\mathcal{A})$ — null space) и образ оператора $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Начнём с первого:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \theta\} = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

Имеем, что наше множество — это $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_2 = 0, x_3\in\mathbb{R}\}$, т.е. иначе мы можем записать, что это множество векторов вида $\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}$. Поэтому в качестве базиса удобно взять базис вдоль оси Ox_3: $\mathbf{e}_\theta = \hat{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Рассмотрим образ оператора:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \exists\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3 : \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\}$$

Запишем это иным способом:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid \exists\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\}$$

Видим, что если некоторый $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$, то x_3 должен быть равен 0. В остальном же, какое бы мы не взяли x_1, x_2, то мы всегда можем выбрать $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ такой, что $y_1 = x_1, y_2 = x_2$. Поэтому, по своей сути, $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ — это плоскость Ox_1x_2, поэтому в качестве базисных векторов можем взять $\mathbf{e}^1_{\mathrm{im}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}^2_{\mathrm{im}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что:

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) + \dim \mathrm{Null}(\mathcal{A}) = 1 + 2$$

Теперь найдём матрицу для линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе ортов осей координат. Для этого применим линейный оператор на 3 базиса $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ (вдоль осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно):

$$\mathcal{A}\hat{x}_1 = \hat{x}_1,\ \mathcal{A}\hat{x}_2 = \hat{x}_2,\ \mathcal{A}\hat{x}_3 = \theta$$

Поэтому матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Действительно, пусть $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\mathbf{x}$.

Задание 4

Имеем матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Для начала найдём ядро и образ линейного оператора. Итак, ядро:

$$\mathrm{Null}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \theta\}$$

Таким образом, нам нужно решить $A\mathbf{x} = \theta$. Заметим, что $\det A = 4 \neq 0$. В таком случае $\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (в прочем, можно найти и явный вид обратной матрицы, но мы этого делать не будем). Тогда $\mathbf{x} = A^{-1}\theta = \theta$ — т.е. $\mathrm{Null}(A) = \{\theta\} \implies \dim \mathrm{Null}(\mathcal{A}) = 0$.

Теперь образ:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{y} = \mathbf{x}\}$$

Опять же, имеем уравнение $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Умножим обе части слева на A^{-1}. Получим, что

$$\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}$$

Отметим, что это выражение определено для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Поэтому $\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. Поэтому:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Null}(\mathcal{A}) + \dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = 0 + 3 = 3$$

Найдём собственные числа и собственные вектора. Характеристический полином:

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}_1(A)\lambda^2 + \mathrm{tr}_2(A)\lambda - \det A = 0$$

Заметим, что $\mathrm{tr}_1(A) = -1 + 5 + 1 = 5$, а $\mathrm{tr}_2(A)$:

$$\mathrm{tr}_2(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 8 - 4 + 4 = 8$$

Рассчёт $\det A$ пропущу, он равен 4. Таким образом:

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Таким образом, $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 1$. Пусть $H_{1,2} := A - \lambda_{1,2}E$ и $H_3 := A - \lambda_3 E$. В таком случае, собственные вектора — это множества $\mathrm{Null}(H_{1,2})$ и $\mathrm{Null}(H_3)$. Работаем:

$$\mathrm{Null}(H_{1,2}) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

Иными словами, $\mathrm{Null}(H_{1,2})$ — это множество векторов $\mathbf{x}$, координаты которых лежат на плоскости $3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. Вектор нормали этой плоскости $\mathbf{n} = (3, -3, 1)$. Выберем 2 вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ таким образом, чтобы тройка $(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ была тройкой взаимноперпендикулярны векторов. Иначе говоря:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{n} \rangle = 0$$

Пусть $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathrm{Null}(H_{1,2}) = \mathrm{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ или же, иначе говоря:

$$\mathrm{Null}(H_{1,2}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2\}$$

Поэтому возьмём 2 собственных вектора: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2$.

Теперь найдём $\mathrm{Null}(H_3)$:

$$\mathrm{Null}(H_3) = \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - (3/2)R_1]{R_3 - (3/2)R_1} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times 2} \mathrm{Null}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\mathrm{Null}(H_3)$ — это прямая, являющаяся пересечением плоскостей $-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ и $-x_2 + x_3 = 0$. Иными словами:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Параметризуем прямую. Пусть $x_3 = t$. Тогда $x_2 = t$. Поэтому $-2x_1 = x_3 - 3x_2 = -2t$, а значит и $x_1 = t$. Поэтому $\mathrm{Null}(H_3) = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Поэтому в качестве третьего собственного вектора возьмём $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Как видим, оператор $\mathcal{A}$ действительно является диагонализированным, т.к. мы нашли тройку линейно независимых собственных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Тогда матрица перехода:

$$T_{e \to u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная ей матрица:

$$T_{e\to u}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь пусть $A_u = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Проверим, что $A_u = T_{e\to u}^{-1} A_e T_{e\to u}$.

Действительно:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$