Теорія Ймовірності

МП-31 Захаров Дмитро *Викладач: Півень О.Л.*

Весняний семестр 2024

Домашня робота 11

§ Характеристична функція §

Задача 1: Файл

Умова. За характеристичною функцією $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{4}(3+\cos t)$ відновити закон розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Будемо вважати, що випадкова величина ξ дискретна, тобто розподіл має вигляд:

$$\Pr[\xi = x_i] = p_i,\ i \in \{1, \dots, n\} \tag{1.1}$$

Скористаємось означенням характеристичної функції:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{itx_i} p_i \tag{1.2}$$

Далі помітимо наступний факт:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{3}{4} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{8} = \frac{3}{4} + \frac{e^{it}}{8} + \frac{e^{-it}}{8} \tag{1.3}$$

Отже бачимо, що наступна випадкова величина ξ задовольняє 1.2:

$$\Pr[\xi = 0] = \frac{3}{4},\ \Pr[\xi = 1] = \Pr[\xi = -1] = \frac{1}{8} \tag{1.4}$$

Задача 2: Турчін 13.7

Умова. Обчислити характеристичну функцію величини $\xi \sim \text{Bin}(n, \theta)$:

$$\Pr[\xi = k] = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k \in \{0, \dots, n\} \tag{2.1}$$

Розв'язання. Виписуємо за означенням:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \text{Pr}[\xi = k] \tag{2.2}$$

Отже, потрібно спростити наступну суму:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} \tag{2.3}$$

Помітимо, що $e^{itk}\theta^k = (e^{it}\theta)^k$, тому

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}\theta)^k (1-\theta)^{n-k} = \boxed{(e^{it}\theta + (1-\theta))^n} \tag{2.4}$$

Задача 3: Турчін 13.8

Умова. Обчислити характеристичну функцію величини $\xi \sim \text{Geom}(\theta)$:

$$\text{Pr}[\xi = k] = \theta(1-\theta)^k,\ k \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Розв'язання. Виписуємо за означенням:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \text{Pr}[\xi = k] \tag{3.2}$$

Отже, треба спростити наступну формулу:

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} \theta (1-\theta)^k \tag{3.3}$$

Отже, починаємо перетворювати:

$$\varphi_\xi(t) = \theta \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{it}(1-\theta)\right)^k \tag{3.4}$$

Помітимо, що $|e^{it}(1-\theta)| = |e^{it}| \cdot |1-\theta| = |1-\theta| < 1$, тому ряд збігається. Отже,

$$\boxed{\varphi_\xi(t) = \frac{\theta}{1 - e^{it}(1-\theta)}} \tag{3.5}$$

Задача 4: Турчін 13.12

Умова. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини зі щільністю $f_\xi(x) = e^{-|x|}/2$.

Розв'язання. За означенням:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-|x|}dx \tag{4.1}$$

Розбиваємо інтеграл на дві частини:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{itx}e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{itx}e^{-x}dx \tag{4.2}$$

У першому інтегралу зробимо заміну $x \mapsto -x$, тоді отримаємо $\int_{+\infty}^{0} e^{-itx}e^{-x}(-dx) = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+it)}dx$. Отже,

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{x(-1+it)} + e^{-x(1+it)}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}(e^{itx} + e^{-itx})dx \tag{4.3}$$

Помітимо, що $\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2} = \cos tx$, тому

$$\varphi_\xi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx dx \tag{4.4}$$

Далі будемо двічі інтегрувати частинами. Спочатку нехай $dv = e^{-x}dx \implies v = -e^{-x}$, а також $u = \cos tx, du = -t\sin tx dx$. Тоді:

$$\varphi_\xi(t) = -e^{-x}\cos tx\Big|_{x\to 0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})(-t\sin tx dx) \tag{4.5}$$

Отже, звідси $\varphi_\xi(t) = 1 - t\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin tx dx$. Далі знову замінюємо $dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x}, u = \sin tx, du = t\cos tx dx$, а тому

$$\varphi_\xi(t) = 1 - t\left(-e^{-x}\sin tx\Big|_{x\to 0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})(t\cos tx dx)\right) \tag{4.6}$$

Або, якщо далі спростити:

$$\varphi_\xi(t) = 1 - t^2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos tx dx = 1 - t^2\varphi_\xi(t) \tag{4.7}$$

Отже, ми можемо розв'язати рівняння відносно $\varphi_\xi(t)$. Дійсно:

$$\boxed{\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}} \tag{4.8}$$

Задача 5: Турчін 13.13

Умова. Обчислити характеристичну функцію показникового розподілу $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Розв'язання. За означенням щільність $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$. Характеристичну функцію можна знайти за означенням:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{itx}e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x}dx \tag{5.1}$$

Первісна дорівнює $\frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}$ з точністю до константи, тому

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\Bigg|_{x\to 0}^{x\to+\infty} = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda - it}} \tag{5.2}$$

Задача 6: Турчін 13.6

Умова. Довести, що $\varphi(z) = \cos^n z$ є характеристичною функцією для усіх натуральних $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Звичайно можна перевірити усі чотири властивості характеристичної функції, але ми підемо конструктивним шляхом. Помітимо, що оскільки $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, то

$$\varphi(z) = \cos^n z = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{kiz}e^{-(n-k)iz} \tag{6.1}$$

Спростимо трошки далі:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} e^{(2k-n)iz} \cdot \frac{C_n^k}{2^n} \tag{6.2}$$

Отже, якщо ми введемо наступну випадкову величину:

$$\Pr[\xi = 2k-n] = \frac{C_n^k}{2^n},\ k \in \{0,\dots,n\}, \tag{6.3}$$

то її характеристичною функцією буде $\varphi(z)$. Наведені мірування справедливі для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, а отже твердження доведено.

P.S. На лекції ми розглядали $\varphi(z) = \cos^2 z$ і отримали випадкову величину $\Pr[\xi = \pm 2] = \frac{1}{4},\ \Pr[\xi = 1] = \frac{1}{2}$. Можна впевнитись, що наша формула 6.3 працює для цього випадку.

Задача 7: Турчін 13.16

Умова. Обчислити характеристичну функцію розподілу Коші з параметром a. Щільність розподілу Коші:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \ x \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

Розв'язання. Виписуємо характеристичну функцію за означенням:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dx}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi} \cdot \mathcal{I} \tag{7.2}$$

Отже нам залишилось обрахувати нетривіальний інтеграл $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}dx}{a^2+x^2}$.

Для обчислення цього інтегралу пропоную обрати контур Коші γ_R: півколо C_R великого радіусу R з прямою $[-R, R]$ за годинниковою стрілкою. Позначимо $f(z) := \frac{e^{itz}}{a^2+z^2}$. В такому разі розглянемо наступний інтеграл:

$$\mathcal{I}_R := \oint_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{+R} f(x)dx \tag{7.3}$$

Нам потрібно тепер розв'язати дві підзадачі: по-перше, знайти $\mathcal{I}_R$, а, по-друге, довести, що $\lim_{R\to\infty} \mathcal{I}_R = \mathcal{I}$. Почнемо з першої. В контурі знаходиться одна особлива точка: $z = ia$ – полюс першого порядку. Тоді, за теоремою про лишки, можемо обрахувати інтеграл наступним чином:

$$\mathcal{I}_R = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ia} (z - ia) f(z) = 2\pi i \cdot \lim_{z\to ia} \frac{e^{itz}}{z + ia} \tag{7.4}$$

Границя обчислюється просто: $\lim_{z\to ia} \frac{e^{itz}}{z+ia} = \frac{e^{-at}}{2ia}$, тому

$$\mathcal{I}_R = 2\pi i \cdot \frac{e^{-at}}{2ia} = \frac{\pi e^{-at}}{a} \tag{7.5}$$

Залишилось довести, що $\lim_{R\to+\infty} \mathcal{I}_R = \mathcal{I}$. Дійсно, для цього достатньо показати, що $\int_{C_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. Проте, це одразу випливає з леми Жордана, оскільки

$$\left|\frac{1}{a^2 + z^2}\right| \Big|_{z\in C_R} = \frac{1}{|a^2 + z^2|}\Big|_{z\in C_R} = \frac{1}{|z - ia||z + ia|}\Big|_{z\in C_R} \tag{7.6}$$

$$\leq \frac{1}{||z| - |ia|| \cdot ||z| - |ia||}\Big|_{z\in C_R} = \frac{1}{|R - a|^2} \sim \frac{1}{R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \tag{7.7}$$

Отже, $\mathcal{I} = \frac{\pi e^{-at}}{a}$, а тому остаточно:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{a} e^{-at} = \boxed{e^{-at}} \tag{7.8}$$