§ Залікова Робота. Варіант 2 §

Задача 1: Критерії керованості #1

Умова. Чи є керованою система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = x_2 + u \end{cases} \tag{1.1}$$

на підпростори $\mathcal{G}_1 = \text{span}\{\mathbf{e}_1\}$ та $\mathcal{G}_2 = \text{span}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ за наперед заданий час? Перевірити умови критеріїв керованості на підпростір Калмана та Коробова.

Розв'язання. Помітимо, що наша система записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \tag{1.2}$$

Скористаємось спочатку *критерієм Коробова*, а потім *Калмана*.

Критерій Коробова. Знаходимо підпростір $\mathcal{L} = \text{span}\{\mathbf{b}, \boldsymbol{A}\mathbf{b}, \boldsymbol{A}^2\mathbf{b}\}$, для цього додатково рахуємо $\boldsymbol{A}\mathbf{b}$, а також $\boldsymbol{A}^2\mathbf{b}$:

$$\boldsymbol{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1, \; \boldsymbol{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 \tag{1.3}$$

Отже, $\mathcal{L} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$. Проте, в такому вигляді працювати буде не дуже зручно, тому помітимо, що $\mathcal{L} = \text{span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\} = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$.

Тепер подивимось на суму відпросторів $\mathcal{L} \oplus \mathcal{G}_1$ та $\mathcal{L} \oplus \mathcal{G}_2$:

$$\mathcal{L} \oplus \mathcal{G}_1 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\} \oplus \text{span}\{\mathbf{e}_1\} = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\} \neq \mathbb{R}^3 \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L} \oplus \mathcal{G}_2 = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\} \oplus \text{span}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

Отже, система 1.1 є повністю керованою на $\mathcal{G}_2$ за наперед заданий час, але не є повністю керованою на $\mathcal{G}_1$ за наперед заданий час.

Критерій Калмана. Для цього потрібно знайти такі матриці $\boldsymbol{H}_1$ та $\boldsymbol{H}_2$, що $\mathcal{G}_1 = \ker(\boldsymbol{H}_1)$, $\mathcal{G}_2 = \ker(\boldsymbol{H}_2)$. Дійсно, нехай

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Перевіримо. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Якщо $\boldsymbol{H}_1\mathbf{x}^* = 0$, то $\boldsymbol{H}_1\mathbf{x}^* = (x_2^*, x_3^*) = (0,0)$, а отже $\mathbf{x}^* = (x_1^*, 0, 0) \in \operatorname{span}\{\mathbf{e}_1\} = \mathcal{G}_1$. Аналогічно нехай $\boldsymbol{H}_2\mathbf{x}^* = 0$, тоді $\boldsymbol{H}_2\mathbf{x}^* = x_1^* = 0$, отже $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, x_3^*) \in \operatorname{span}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \mathcal{G}_2$.

Для $\mathcal{G}_1$ маємо $\operatorname{rang}(\boldsymbol{H}_1) = 2$. Тепер нам треба переконатись, що дійсно $\operatorname{rang}(\boldsymbol{H}_1) \neq \operatorname{rang}(\boldsymbol{Q}_1)$, де

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1\mathbf{b} & \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\mathbf{b} & \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}^2\mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Отже рахуємо:

$$\boldsymbol{H}_1\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Тоді $\operatorname{rang}(\boldsymbol{Q}_1) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < \operatorname{rang}(\boldsymbol{H}_1) = 2$, отже система не є повністю керованою за наперед заданий час.

Аналогічно розглядаємо $\mathcal{G}_2$. Маємо $\operatorname{rang}(\boldsymbol{H}_2) = 1$. У свою чергу

$$\boldsymbol{H}_2\mathbf{b} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}\mathbf{b} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Тому $\operatorname{rang}(\boldsymbol{Q}_2) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{H}_2) = 1$, а отже система є повністю керованою за наперед заданий час.

Відповідь. На $\mathcal{G}_1$ система не є повністю керованою за наперед заданий час, а на $\mathcal{G}_2$ вже є.

Задача 2: Критерії керованості #2

Умова. Чи є досяжним підпростір $\mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

за довільний час? Перевірити умови 1, 2 та будь-яку іншу відповідного критерію.

Розв'язання. Наша динамічна система описується наступним рівнянням:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}, \ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Знайдемо власні числа цієї матриці. Характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda \tag{2.3}$$

Один з коренів $\lambda_1 = 0$ кратності 1, а два інших знаходяться з рівняння:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \tag{2.4}$$

Легко вгадати один з коренів: $\lambda_2 = 1$, а далі можна поділити два полінома в стовпчик і отримати $\frac{\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1}{\lambda-1} = \lambda^2 + 1$. Отже остаточно:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \tag{2.5}$$

Отже маємо 4 різні власних значення: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_{3,4} = \pm i$. Тепер, нам треба знайти власні вектори, що відповідають λ_1, λ_2, оскільки $\lambda_{3,4}$ є комплексними. Нехай $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, тоді:

$$\boldsymbol{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \implies (-v_2 - v_3 + v_4, v_1 - v_3, v_3, 0) = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Звідси одразу $v_1 = v_3 = 0$, а далі накладається умова $v_4 - v_2 = 0$. Тоді нехай $v_2 = v_4 = t$, звідси $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 1)t$.

Для $\lambda_2 = 1$ аналогічно маємо:

$$\boldsymbol{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \implies \begin{cases} -v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ -v_4 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Звідси $v_4 = 0$, далі з двох перших рівнянь (можна їх, наприклад, відняти) маємо $v_1 = 0$, а отже залишається лише умова $v_2 + v_3 = 0$, звідки нехай $v_2 = t, v_3 = -t$. Тоді $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 0)t$.

Отже, маємо два власних вектори $\mathbf{v}_1 := (0, 1, 0, 1)$ та $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 0)$. Тепер перевіряємо перші дві умови відповідного критерію.

Умова 1. Кореневий підпростір $\mathcal{K}$ має міститись в $\mathcal{G}$. Отже, треба перевірити, чи виконується умова:

$$\mathcal{K} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\} \subset^{?} \mathcal{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \tag{2.8}$$

Отже, візьмемо довільний вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathcal{K}$ і перевіримо, чи буде він лежати на гіперплощині $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Маємо, що довільний елемент множини $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \gamma_1(0,1,0,1) + \gamma_2(0,1,-1,0) = (0, \gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_2, \gamma_1) \tag{2.9}$$

Чи належить цей елемент гіперплощині? Підставимо:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) + (-\gamma_2) - (\gamma_1) = 0 \tag{2.10}$$

Так, належить! Отже, підпростір $\mathcal{G}$ є досяжним в силу заданої системи.

Умова 2. Побудуємо найбільший інваріантний підпростір $\mathcal{M}$ відносно лінійного оператора $\boldsymbol{A}$, що міститься в $\mathcal{G}$. За доведеною лемою,

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \boldsymbol{H}\mathbf{x} = (\boldsymbol{H}\boldsymbol{A})\mathbf{x} = (\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^2)\mathbf{x} = (\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^3)\mathbf{x} = \mathbf{0}\},\ \mathcal{G} = \ker(\boldsymbol{H}) \tag{2.11}$$

Спочатку знайдемо $\boldsymbol{H}$. По суті, оскільки $\mathcal{G}$ є гіперплощиною з вектором нормалі $(0,1,1,-1)$, то в якості $\boldsymbol{H}$ візьмемо транспонований вектор нормалі, тобто $\boldsymbol{H} = [0,1,1,-1]$. В такому разі:

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix}0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^3 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Оскільки $\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^2 = -\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^3 = -\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}$, то маємо:

$$\mathcal{M} = \{(x_1, \dots, x_4) : x_2 + x_3 - x_4 = 0 \wedge x_1 = 0\} \tag{2.14}$$

Таким чином, якщо позначити $x_4 = u, x_3 = v$, то $x_2 = u - v$ і тоді:

$$\mathcal{M} = \{(0, u-v, v, u) : u, v \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \tag{2.15}$$

Цікаво, що в нас вийшло $\mathcal{M} = \mathcal{K}$, тобто найбільшим інваріантним підпростором виявився кореневий підпростір з власних векторів, що відповідають дійсним власним значенням лінійного оператора $\boldsymbol{A}$.

Доведемо, що ми не зможемо взяти власний вектор матриці $\boldsymbol{A}^\top$, котрий буде перпендикулярний підпростору $\mathcal{M}$. Дійсно, спектр матриці залишився тим самим, проте власні вектори вже не факт, що ті самі. Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 0$:

$$\boldsymbol{A}^\top \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \begin{cases} v_2 = 0 \\ -v_1 = 0 \\ -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Звідси $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, а компонента v_4 довільна, тому один з власних векторів це просто $\mathbf{e}_4$. Для $\lambda_2 = 1$ маємо:

$$\boldsymbol{A}^\top \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \implies \begin{cases} v_2 = v_1 \\ -v_1 = v_2 \\ -v_1 - v_2 + v_3 = v_3 \\ v_1 = v_4 \end{cases} \tag{2.17}$$

З перших двох рівнянь $v_1 = v_2 = 0$, а отже з четвертого $v_4 = 0$. Тому v_3 довільний, а отже другим власним вектором є $\mathbf{e}_3$.

Дуже зручно виходить! В нас два власних вектора мають вид $\mathbf{e}_3$ та $\mathbf{e}_4$. Перевіримо, чи

$$\mathbf{e}_3 \text{ або } \mathbf{e}_4 \perp^? \operatorname{span}\{(0,1,0,1),(0,-1,1,0)\} = \mathcal{M} \tag{2.18}$$

Довільний елемент з $\mathcal{M}$ має вигляд $\mathbf{m} = (0, \gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_2, \gamma_1)$, знайдемо його скалярний добуток з $\mathbf{e}_3$ та $\mathbf{e}_4$, відповідно:

$$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{m} \rangle = -\gamma_2, \; \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{m} \rangle = \gamma_1 \tag{2.19}$$

Отже, ані $\mathbf{e}_3$, ані $\mathbf{e}_4$ не є перпендикулярними $\mathcal{M}$, а отже будь-які інші власні вектори виду $\mathbf{e}_3 v, \mathbf{e}_4 u$ для $u, v \in \mathbb{R}$ також не будуть перпендикулярними. Отже, висновок той самий.

Умова 3. Треба перевірити, що $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}_{4\times 4}, \widetilde{\boldsymbol{M}}) = 4$ для всіх λ, де $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ – базис в $\mathcal{M}$. Матриця $\widetilde{\boldsymbol{M}} = [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]$, а тому

$$[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}_{4\times 4}, \widetilde{\boldsymbol{M}}] = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Перевіряємо для $\lambda = 0$:

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{M}}) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Дуже добре видно, що 2 та 4 стовпчики лінійно залежні, а стовпці 1, 4, 5 та 6 задають вектори $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$, що є лінійно незалежними. Тому, $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}, \widetilde{\boldsymbol{M}})$ дійсно є 4. Перевіряємо $\lambda = 1$:

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_{4\times 4}, \widetilde{\boldsymbol{M}}) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Видно, що 2 і 3 стовпчики однакові, а стовпці 1 та 2 є лінійно незалежними, оскільки розв'язок рівняння $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ лише $x_1 = x_2 = 0$. Отже, ці два вектори утворюють підпростір $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, а тоді якщо до них додати два останні стовпці, то отримаємо увесь простір $\mathbb{R}^4$, тому рангом знову є 4. Отже, висновок такий самий.

Відповідь. Підпростір $\mathcal{G}$ є досяженим в силу заданої системи за довільний час.

Задача 3: Теоретичне питання

Умова. Керованість трикутних систем.

Відповідь. Для початку введемо поняття трикутних систем.
Означення. ***Трикутною системою*** *називають систему виду*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_n & = f_n(x_1, \ldots, x_n, u) \end{cases} \tag{3.1}$$

Наша ціль дізнатися, чи можна перевести (і знайти відповідне керування $u(t)$) задану початкову точку $\mathbf{x}(0) := \mathbf{x}_0$ у точку $\mathbf{x}(T) := \mathbf{x}_T$ за час T. Також надалі позначатимемо $u := x_{n+1}$ для консистенції запису.

Отже, розглянемо першу допоміжну теорему, котра допоможе нам відповісти на це питання.

Теорема Коробова *(про керованість трикутних систем). Нехай функції $f_k, k \in \{1, \dots, n\}$ мають неперервні часткові похідні до $(n-k+1)$ порядку включно. Нехай ми знайшли таку постійну $\mu > 0$ (що не залежить від координат і керування $x_1, \dots, x_{n+1}$), що виконується*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} \right| \geq \mu, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.2}$$

Тоді трикутна система 3.1 є повністю керованою на $[0, T]$.

Доведення. Схема доведення є конструктивним, причому в ході доведення ми по суті опишемо алгоритм розв'язання задач про керованість трикутних систем. Зробимо наступну заміну змінних:

$$z_1 := x_1 \equiv F_1(x_1), \; z_2 = f_1(x_1, x_2) \equiv F_2(x_1, x_2), \tag{3.3}$$

а далі, рекурентно, якщо $z_m = F_m(x_1, \dots, x_m)$, то

$$z_{m+1} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_j} \cdot f_j(x_1, \dots, x_{j+1}) \equiv F_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) \tag{3.4}$$

Твердження 1. *Справедливе наступне співвідношення:*

$$F_{m+2}(x_1(t), \dots, x_{m+2}(t)) = \frac{d^m}{dt^m} f_1(x_1(t), x_2(t)), \; m \in \{0, \dots, n-1\} \tag{3.5}$$

Доведення. Доведемо її за індукцією.
База індукції. Почнемо з простого: нехай $m = 0$, тоді:

$$F_2(x_1(t), x_2(t)) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{3.6}$$

База індукції виконується. Далі спробуємо продиференціювати цей вираз за часом:

$$\dot{F}_2(\dots) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 = F_3(\dots) \tag{3.7}$$

Отже, і для $m = 1$ це виконується. Так само будемо робити при індуктивному переході.

Індуктивний перехід. Нехай твердження доведено для F_m, тобто:

$$F_m(x_1(t), \dots, x_m(t)) = \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{3.8}$$

Тоді для F_{m+1} маємо:

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} f_1(x_1(t), x_2(t)) = \frac{d}{dt}\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{3.9}$$

$$= \frac{d}{dt} F_m(x_1(t), \ldots, x_m(t)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j \tag{3.10}$$

Далі помічаємо, що $\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_{j+1})$, а тому

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \cdot f_j(x_1, \ldots, x_{j+1}) = F_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) \tag{3.11}$$

Отже твердження доведено. $\square$

Тепер, враховуючи нашу замінну z_j, маємо наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n+1} \end{cases}, \tag{3.12}$$

де z_{n+1} є керуванням. Як відомо, ця система є повністю керованою для будь-якого часу T. Тепер, оскільки ми знаємо лише $\mathbf{x}_0$ та $\mathbf{x}_T$, нам потрібно знайти відповідні $\mathbf{z}_0$ та $\mathbf{z}_T$ (де через $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ ми маємо на увазі вектор без керування). Знайти їх легко, бо ми просто робили заміну:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}_0^1) \\ F_2(\mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_0^2) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_0^1, \ldots, \mathbf{x}_0^n) \end{bmatrix}, \ \mathbf{z}_T = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}_T^1) \\ F_2(\mathbf{x}_T^1, \mathbf{x}_T^2) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_T^1, \ldots, \mathbf{x}_T^n) \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

де верхній індекс у виразах $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T$ позначає номер компоненти вектора. Оскільки система є ПК, то ми можемо знайти $z_{n+1}(t) = z_{n+1}^*(t)$ таке, що переведе $\mathbf{z}_0$ у $\mathbf{z}_T$ за час T, нехай при цьому траєкторія $\mathbf{z}^*(t) = (z_1^*(t), \ldots, z_n^*(t))$.

Тут постачає логічне питання: а чи можемо ми відновити траєкторію до заміни, тобто отримати функцію $\mathbf{x}^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$, маючи $\mathbf{z}^*(t)$? Виявляється що так! Для цього доведемо наступне твердження.

Твердження 2. *Можна однозначно оновити $\mathbf{x}^*(t)$ з $\mathbf{z}^*(t)$.*

Доведення. Почнемо з першого рівняння: $z_1 = x_1$, отже x_1 координату відновили. Нехай далі $G_1(z_1) := z_1$. Далі друге рівняння дає $z_2 = F_2(x_1, x_2)$. Або, аналогічно, $z_2 = F_2(G_1(z_1), x_2)$, отже це рівняння відносно x_2. Проте, чи однозначне це рівняння, тобто чи не може виникнути у нас рівняння накшталт $x_2^2 + z_1 = z_2$? Ні, не може. Дійсно, оскільки за умовою теореми (нарешті вона нам знадобилася!) в нас

$$\left|\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right| \geq \mu > 0, \tag{3.14}$$

то $F_2(x_1, x_2)$ є строго монотонною за змінною x_2. Отже, рівняння можна однозначно розв'язати відносно x_2. Таким чином, нехай $x_2(t) = G_2(z_1(t), z_2(t))$.

Продовжуючи так робити далі, на кожному кроці m ми будемо отримувати рівняння виду

$$z_m(t) = F_m(G_1(z_1(t)), \ldots, G_{m-1}(z_1(t), \ldots, z_{m-1}(t)), x_m(t)) \tag{3.15}$$

Можна аналогічно довести, що F_m буде строго монотонною за змінною x_m, а отже x_m можна буде явно виразити через $z_1, \ldots, z_m$. Отже, розглядаємо часткову похідну:

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{m-1}}(x_1, \ldots, x_{m-1}) f_{m-1}(x_1, \ldots, x_m)\right) \tag{3.16}$$

Оскільки $\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{m-1}}$ не залежить від x_m, то це можна записати як:

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{m-1}}(x_1, \ldots, x_{m-1}) \cdot \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \tag{3.17}$$

З цієї формули легко бачити наступне співвідношення:

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_m} = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_{j+1}} \tag{3.18}$$

Використовуючи умову теореми, маємо:

$$\left|\frac{\partial F_m}{\partial x_m}\right| = \prod_{j=1}^{m-1} \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_{j+1}}\right| \geq \mu^{m-1} > 0 \tag{3.19}$$

Отже знову маємо строгу монотонність відносно x_m, а отже ми можемо знайти $x_m = G_m(z_1, \ldots, x_m)$. Отже, твердження доведено. $\square$

Тепер перевіримо, що наша знайдена траєкторія дійсно задовольняє початковій задачі 3.1. Доводимо останнє твердження.

Твердження 3. *Обрана в такий спосіб траєкторія $x_i(t)$ задовольняє систему 3.1.*

Доведення. Це знову ж таки робимо за індукцією.

База індукції. Перевіримо перше рівняння системи:

$$\dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_2(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{3.20}$$

Виконується. Робимо індуктивний перехід.
Індуктивний перехід. Нехай доведено

$$\dot{x}_j = f_j(x_1(t), \ldots, x_{j+1}(t)),\ j = 1, \ldots, m,\ m < n \tag{3.21}$$

Покажемо, що це твердження справедливе і для $m \mapsto m + 1$. З одного боку, в силу заміни:

$$\dot{z}_{m+1} = \dot{F}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j \tag{3.22}$$

Врахувавши, що $\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_{j+1}), j \leq m$, оскільки це вже доведено за індукцією, то

$$\dot{z}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_j} \cdot f_j(x_1, \ldots, x_{j+1}) + \frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \dot{x}_{m+1} \tag{3.23}$$

З іншого боку, ми знаємо, що $\dot{z}_{m+1} = z_{m+2} = F_{m+2}$. Але,

$$F_{m+2} = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_j} \cdot f_j(x_1(t), \ldots, x_{j+1}(t)) = \dot{z}_{m+1} \tag{3.24}$$

Отже, має виконуватись $\frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_{m+1}} f_{m+1}(x_1(t), \ldots, x_{m+2}(t)) = \frac{\partial F_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \dot{x}_{m+1}(t)$. Можемо скоротити на $\partial F_{m+1}/\partial x_{m+1} \neq 0$ і отримаємо те, що треба було довести. $\square$

Власне, ми довели центральну теорему. $\square$