Домашня робота з курсу "Теорія Ймовірності"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

6 листопада 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Дано таблицю розподілу двовимірного випадкового вектору $(\xi, \eta)^\top$.

$-$	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
$\xi = 0$	0.0	0.1	0.2
$\xi = 1$	0.1	0.2	0.1
$\xi = 2$	0.2	0.1	0.0

Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин $\text{cov}[\xi, \eta]$. Чи є незалежними випадкові величини ξ та η?

Розв'язок. За означенням,

$$\text{cov}[\xi, \eta] \triangleq \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[\eta]$$

Отже, знаходимо математичні сподівання. Знайдемо $\mathbb{E}[\xi]$:

$$\mathbb{E}[\xi] \triangleq \sum_{k=0}^{2} p(\xi = k)k = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 = 1.0$$

$$\mathbb{E}[\eta] \triangleq \sum_{k=0}^{2} p(\eta = k)k = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 = 1.0$$

Залишилось знайти $\mathbb{E}[\xi\eta]$:

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{i,j=0}^{2} p(\xi = i)p(\eta = j)ij = 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 2 = 0.6$$

Отже:

$$\mathrm{cov}[\xi, \eta] = 0.6 - 1.0 \cdot 1.0 = -0.4$$

Оскільки $\mathrm{cov}[\xi, \eta] \neq 0$, то ξ та η є залежними.

Відповідь. $\mathrm{cov}[\xi, \eta] = -0.4$.

Завдання 2.

Умова. Кидають 2 гральні кубики. Нехай X – число очок, які випали на першому кубику, Y – є більшим з двох очок, що випали. Знайдіть таблицю сумісного розподілення випадкових величин X та Y, а також їх середнє, дисперсії та коефіцієнт кореляції.

Розв'язок. Нехай $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{U}[1, 6]$ є випадкові величини, що випали на першому та другому кубіках, відповідно. Тоді $X = \xi_1, Y = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, відповідно до умови. Розглянемо значення (X, Y) відповідно до значень ξ_1, ξ_2 у вигляді таблиці

–	$\xi_2 = 1$	$\xi_2 = 2$	$\xi_2 = 3$	$\xi_2 = 4$	$\xi_2 = 5$	$\xi_2 = 6$
$\xi_1 = 1$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(1, 5)$	$(1, 6)$
$\xi_1 = 2$	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	$(2, 6)$
$\xi_1 = 3$	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 4)$	$(3, 5)$	$(3, 6)$
$\xi_1 = 4$	$(4, 4)$	$(4, 4)$	$(4, 4)$	$(4, 4)$	$(4, 5)$	$(4, 6)$
$\xi_1 = 5$	$(5, 5)$	$(5, 5)$	$(5, 5)$	$(5, 5)$	$(5, 5)$	$(5, 6)$
$\xi_1 = 6$	$(6, 6)$	$(6, 6)$	$(6, 6)$	$(6, 6)$	$(6, 6)$	$(6, 6)$

По цій таблиці побудуємо розподіл p_{XY}:

–	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$	$Y=6$
$X=1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$X=2$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$X=3$	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$X=4$	0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$X=5$	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
$X=6$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$

Формально, можемо записати:

$$p(X=x, Y=y) = \begin{cases} 0, & X > Y \\ \frac{X}{36}, & X = Y \\ \frac{1}{36}, & X < Y \end{cases}, \ (X,Y) \in \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}$$

Знайдемо математичні сподівання:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} p(X=k)k = \frac{\sum_{k=1}^{6} k}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=1}^{6} p(Y=k)k = \sum_{k=1}^{6} \frac{k(2k-1)}{36} = \frac{161}{36}$$

Щоб знайти дисперсії, треба знайте математичне сподівання квадратів:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{6} p(X=k)k^2 = \frac{91}{6}$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{k=1}^{6} p(Y=k)k^2 = \frac{791}{36}$$

Таким чином, дисперсії:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{35}{12}, \ \sigma_Y^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{2555}{1296}$$

Для коефіцієнта кореляції треба знайти коваріацію, а для коваріації – математичне сподівання $\mathbb{E}[XY]$, отже:

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y=1}^{6} p(X = x, Y = y)xy = \frac{154}{9}$$

Таким чином:

$$\text{cov}[X, Y] \triangleq \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{154}{9} - \frac{7}{2} \times \frac{161}{36} = \frac{35}{24}$$

Отже коефіцієнт кореляції:

$$r[X, Y] \triangleq \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{35}{24}}{\sqrt{\frac{35}{12} \times \frac{2555}{1296}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{73}} \approx 0.608$$

Завдання 3.

Умова. Випадкові величини ξ та η мають математичне сподівання $\mathbb{E}[\xi] = \mu_\xi, \mathbb{E}[\eta] = \mu_\eta$, дисперсії $\text{Var}[\xi] = \sigma_\xi^2, \text{Var}[\eta] = \sigma_\eta^2$ та коефіцієнти кореляції r. Знайти математичне сподівання μ_ζ та дисперсію σ_ζ^2 величини $\zeta = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma$ де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Розв'язок. Користуючись лінійністю математичного сподівання,

$$\mu_\zeta = \alpha\mu_\xi + \beta\mu_\eta + \gamma$$

З дисперсією ситуація трошки складніша. Використаємо наступне твердження:

Твердження: Про суму випадкових величин

Нехай маємо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ та дійсні числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Тоді:

$$\text{var}\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \text{cov}[\xi_i, \xi_j]$$

Отже, скориставшись цим твердженням, маємо:

$$\operatorname{var}[\alpha\xi + \beta\eta + \gamma] = \operatorname{var}[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha^2\sigma_\xi^2 + \beta^2\sigma_\eta^2 + 2\alpha\beta\operatorname{cov}[\xi, \eta]$$

Залишилось визначити $\operatorname{cov}[\xi, \eta]$. Скориставшись означенням коефіцієнта кореляції,

$$r \triangleq \frac{\operatorname{cov}[\xi, \eta]}{\sigma_\xi\sigma_\eta} \implies \operatorname{cov}[\xi, \eta] = r\sigma_\xi\sigma_\eta$$

Тому остаточно:

$$\sigma_\zeta^2 = \alpha^2\sigma_\xi^2 + \beta^2\sigma_\eta^2 + 2r\alpha\beta\sigma_\xi\sigma_\eta$$

Відповідь. $\mu_\zeta = \alpha\mu_\xi + \beta\mu_\eta + \gamma, \sigma_\zeta^2 = \alpha^2\sigma_\xi^2 + \beta^2\sigma_\eta^2 + 2r\alpha\beta\sigma_\xi\sigma_\eta$.

Завдання 4.

Умова. Випадкова величина X є сумою трьох випадкових величин: $X = \xi + \eta + \zeta$. $\mathbb{E}[\xi] = 1, \mathbb{E}[\eta] = 2, \mathbb{E}[\zeta] = 0$, $\operatorname{var}[\xi] = 0.01, \operatorname{var}[\eta] = 4, \operatorname{var}[\zeta] = 0.36, r[\xi, \eta] = 0.2, r[\xi, \zeta] = 0.3, r[\eta, \zeta] = 0.1$. Знайти $\mathbb{E}[X], \operatorname{var}[X]$.

Розв'язок. З математичним сподіванням ситуація найлегша:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta] + \zeta = 3$$

Щодо дисперсії, використовуємо твердження з минулої задачі:

$$\operatorname{var}[X] = \operatorname{var}[\xi] + \operatorname{var}[\eta] + \operatorname{var}[\zeta] + 2\operatorname{cov}[\xi, \eta] + 2\operatorname{cov}[\xi, \zeta] + 2\operatorname{cov}[\eta, \zeta]$$

Знаходимо коваріації:

$$\operatorname{cov}[\xi, \eta] = r[\xi, \eta]\sqrt{\operatorname{var}[\xi] \times \operatorname{var}[\eta]} = 0.2 \times 0.1 \times 2 = 0.04$$

$$\operatorname{cov}[\xi, \zeta] = r[\xi, \zeta]\sqrt{\operatorname{var}[\xi] \times \operatorname{var}[\zeta]} = 0.3 \times 0.1 \times 0.6 = 0.018$$

$$\operatorname{cov}[\eta, \zeta] = r[\eta, \zeta]\sqrt{\operatorname{var}[\eta] \times \operatorname{var}[\zeta]} = 0.1 \times 2 \times 0.6 = 0.12$$

Отже,

$$\operatorname{var}[X] = 0.01 + 4 + 0.36 + 0.08 + 0.036 + 0.24 = 4.726$$

Відповідь. $\mathbb{E}[X] = 3, \operatorname{var}[X] = 4.726$.