Test #1

Задача 1

Разобъём эту задачу на 4 подзадачи:

1. Выбрать 1 крестовую карты, 1 пиковую, 1 крестовую даму и любые 2 трефовые/бубновые карты, которые не дамы.
2. Выбрать 2 крестовые карты без дамы, 1 пиковую даму и любые 2 трефовые/бубновые карты, которые не дамы.
3. Выбрать 2 крестовые карты без дамы, 1 пиковую без дамы, 1 трефовую даму и любую трефовую/бубновую карту, которая не дама.
4. Выбрать 2 крестовые карты без дамы, 1 пиковую без дамы,1 бубновую даму и любую трефовую/бубновую карту, которая не дама.

Легче всего разобраться с 4, а следовательно и с 3 пунктом. Выберем 1 бубновую даму, а дальше нужно выбрать 2 крестовые карты и 1 пиковую. Выбрать 2 крестовые карты — C_8^2 (даму мы выбрать не можем), а 1 пиковую — 8 (опять же, без дамы). Далее всего трефовых и бубновых карт 18. Из них мы не можем выбрать 2 дамы. Поэтому имеем 16 вариантов. Таким образом, количество способов для 3 и 4 пункта — $8 \cdot 16C_8^2$ (суммарно, соответвенно, $16 \cdot 16C_8^2$),

Разберём теперь 1 пункт. Сначала решим подзадачу “выбрать 1 крестовую даму и 1 крестовую карту”. Сначала выбираем 1 крестовую даму. Нам остаётся выбрать 1 крестовую карты из 8 оставшихся, т.е. у нас для этого 8 вариантов. Выбрать к этому ещё 1 пиковую карту — $8 \cdot 8 = 64$. Также выбираем 2 трефовые или бубновые карты, способов их выбрать C_{16}^2 (без 2 дам). Поэтому общее количество — $64C_{16}^2$.

Второй пункт ещё легче — просто выбираем 2 крестовые карты: C_8^2, а далее накидываем C_{16}^2 вариантов: $C_{16}^2 C_8^2$.

Общее чисто выбрать 2 крестовые карты + 1 пиковую карту + 1 даму:

$$16^2 C_8^2 + 64C_{16}^2 + C_{16}^2 C_8^2$$

Задача 2

В слове “легитимность” 2 повтора буквы “и” и 2 повтора буквы “т”. Таким образом, общее количество способов составить слова из “легитимность” $\frac{12!}{2!2!} = \frac{12!}{4}$.

Вычтем из этого числа количество способов составить слово с буквосочетанием “гимн”. Поставим “гимн” в начале слова. Нам остаётся поставить на оставшиеся 8 позиций буквы из слова “летиость”. Тут 2 повтора буквы “т”, поэтому количество таких вариантов $\frac{8!}{2!}$. Слово “гимн” мы можем поставить на 12 позиций девятью способами. Поэтому общее количество слов с буквосочетанием “гимн” $9 \cdot \frac{8!}{2!} = \frac{9!}{2}$.

Для буквосочетания “тост” ситуация та же, только тут повторяются буквы “и”. Таким образом, общее количество слов без “тост” и “гимн”:

$$\frac{12!}{4} - 2 \cdot \frac{9!}{2} = \frac{12!}{4} - 9!$$

Однако мы не учли, что мы дважды посчитали варианты, где есть и слово “тост”, и слово “гимн”. Без этих 2 слов у нас 4 позиции (я вам сейчас покажу на карте... И если бы мы не нанесли превентивное учитывание формулы “включений-исключений”... Так ладно, о чём это я), таким образом $4!$ вариантов (повторов нет). Это число вариантов умножим на количество вариантов расставить тост и гимн на 12 позиций. Их можно посчитать и вручную: всего их 30. Поэтому к нашему ответу мы должны добавить $30 \cdot 4! = 6!$. Т.е. наш ответ:

$$\frac{12!}{4} - 9! + 6!$$

Задача 3

Пусть в 4ых комнатах сидят $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ человек. По условию $x_i \geq 1$, а также:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

Введём замену $z_i = x_i + 1,\ i = \overline{1, 4}$. В таком случае нам нужно найти количество решений в неотрицательных целых числах относительно z_1, z_2, z_3, z_4 уравнение:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 5,\ z_j \in \mathbb{Z}^+$$

Ну а дальше имеем задачу на количество сочетаний с повторением. Расставляем 3 перегородки на 8 позиций ($5+3$). Поэтому имеем C_8^3.

Задача 4

Введём обозначение $x_1 = z_1, x_2 = z_2 + 2, x_3 = z_3, x_4 = z_4$. Получим уравнение:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 10 \\ z_2 \leq 3 \\ z_3 \leq 7 \end{cases}$$

Сначала решим данное уравнение для любых z_i целых неотрицательных. Таких вариантов C_{13}^3. Далее решим эту задачу для $z_2 \geq 4, z_3 \geq 0$. Таким вариантов C_9^3. А также для $z_2 \geq 0, z_3 \geq 8$. Таких вариантов C_5^3 (см. предыдущую задачу).

Общее количество решений изначального уравнения — это количество решения для всех z_i целых неотрицательных без тех вариантов, где $z_2 > 3$ и $z_3 > 7$ (конечно ещё нужно учесть случаи где одновременно $z_2 > 3, z_3 > 7$, однако таких случаев не может быть, т.к. иначе $z_1 + z_4 < 0$, что быть не может для $z_1, z_4 \in \mathbb{Z}^+$). Поэтому общее количество решений:

$$C_{13}^3 - C_5^3 - C_9^3$$

Задача 5

Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Его корни — $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Таким образом, решение: $x_n = \gamma_1 \cdot 3^n + \gamma_2$. Коэффициенты γ_1, γ_2 определим из начальных условий: $x_0 = \gamma_1 + \gamma_2 = 5,\ x_1 = 3\gamma_1 + \gamma_2 = 8$. Отсюда $\gamma_1 = 3/2, \gamma_2 = 7/2$. Таким образом:

$$x_n = \frac{3^{n+1} + 7}{2}$$