✏️

Homework #12

Завдання 1226.

Одразу видно, що форма g є додатньо орієнтовною:

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 + (2x_2)^2 + x_3^2$$

Звісно цей вираз $g(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \ \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Нехай дві форми записані у вигляді

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{F}\mathbf{x}, \ g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x}$$

Нам потрібно знайти таке перетворення $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ (тобто $\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T$) щоб

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P})\mathbf{y}$$

було подано у нормальному вигляді, а

$$f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{P}^T\mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{F}\mathbf{P})\mathbf{y}$$

у канонічному.

Для цього спочатку знайдемо деяке перетворення $\mathbf{A}$, яке буде зводити форму g до нормального виду (наприклад, ми можемо знайти його методом Лагранжа). Якщо взяти $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, то отримаємо форми

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{P})\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$$
$$f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A})\mathbf{y}$$

Але таке перетворення не зведе $f(\mathbf{y})$ до канонічного виду, тому знайдемо перетворення $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{z}$ таке, що це зведе $f(\mathbf{y})$ до канонічного виду. Для цього візьмемо $\mathbf{B}$ як матрицю перетворення, складену з нормалізованих власних векторів матриці $\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}$. Це зведе наші форми до вигляду:

$$g(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{z}$$
$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{E}_\lambda\mathbf{z}$$

Таким чином при цьому форма g залишиться нормальною, а f стане канонічною. В такому разі будемо мати 2 перетворення підряд: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{z}$ і шукане перетворення $\mathbf{A}\mathbf{B}$.

Спочатку знайдемо $\mathbf{A}$. Це зробити легко, бо ми це по суті вже зробили:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = 2x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \implies \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знаходимо транспоновану їй:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким чином:

$$\mathbf{M} := \mathbf{A}^T\mathbf{F}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 4 & -14 & 8 \\ -1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Тобто після перетворення ми отримали $f = 8y_1^2 - 7y_2^2 + 8y_3^2 + 8y_1y_2 - 2y_1y_3 + 8y_2y_3$.

Знаходимо власні числа $\mathbf{M}$: $\lambda_1 = -9, \lambda_{2,3} = 9$. Отже, канонічна форма f:

$$f(z_1, z_2, z_3) = 9(-z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

Знаходимо власні вектори: $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Таким чином, матриця $\mathbf{B}$ має вид:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Нарешті, “сумарне” перетворення:

$$\mathbf{P} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{17}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Завдання 1511.

Маємо матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Спочатку знайдемо власні числа. Для цього робимо все як завжди: будуємо характеристичний поліном $\chi_A(\lambda)$, знаходимо його нулі. Після того, як ми це зробили, отримали $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$. Тобто маємо єдине власне число $\lambda = -1$ кратності 3.

Кореневі підпростjри:

$$V^1_{\lambda=-1} = \text{Null}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) = \text{Null} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \text{Null} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Таким чином $V^1_{\lambda=-1} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \right\}$. Якщо позначити $x_2 = \beta, x_3 = \gamma$, то отримаємо $x_1 = 5\gamma - 2\beta$ і тому маємо множину векторів

$$\begin{bmatrix} -2\beta + 5\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Таким чином $V^1_{\lambda=-1} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, отже $\dim V^1_{\lambda=-1} = 2$.

Другий кореневий підпростір:

$$V^2_{\lambda=-1} = \text{Null}(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2$$

Легко переконатись, що $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^2 = \theta$ і тому $V^2_{\lambda=-1} = \mathbb{R}^3$.