



# Симплекс метод №2

## Завдання 1.

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ -2x_1 - 8x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Доповнимо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 2 \\ -2x_1 - 8x_2 + 3x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_6 = -1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Складемо симплекс таблицю:

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$B$
$x_4$	-1	-1	1	1	0	0	-8
$x_5$	-1	1	-2	0	1	0	-2
$x_6$	2	8	-3	0	0	1	-1
$L$	2	1	-2	0	0	0	0

Вільний член  $-8$  мінімальний від'ємний, отже змінюємо  $x_1, x_4$ . Маємо

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$B$
$x_4$	1	1	-1	-1	0	0	8
$x_5$	-1	1	-2	0	1	0	-2
$x_6$	2	8	-3	0	0	1	-1
$L$	2	1	-2	0	0	0	0

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$B$
$x_1$	1	1	-1	-1	0	0	8
$x_5$	0	2	-3	-1	1	0	6
$x_6$	0	6	-1	2	0	1	-17
$L$	0	-1	0	2	0	0	-16

Далі мінімальний невід'ємний вільний член  $-17$ , тому змінюємо  $x_2, x_6$ :

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$B$
$x_1$	1	1	-1	-1	0	0	8
$x_5$	0	2	-3	-1	1	0	6
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{17}{6}$
$L$	0	-1	0	2	0	0	-16

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$B$
$x_1$	1	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{65}{6}$
$x_5$	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{35}{3}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{17}{6}$
$L$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{113}{6}$

Функція необмежена, оскільки нам потрібно замінити  $x_3$ , але усі значення в колонці від'ємні.

## Завдання 2.

$$L(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 \leq 1 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Доповнимо нашу систему обмежень:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 8x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -3 \\ x_i > 0 \end{cases}$$

Далі коротко наведу розрахунки. Після побудови симплекс таблиці та зробивши кілька ітерацій, отримаємо

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$B$
$x_3$	$-5/2$	0	1	$1/2$	0	$3/2$
$x_5$	$1/2$	0	0	$1/2$	1	$1/2$
$x_2$	$-5/2$	1	0	$-3/2$	0	$-13/2$
$L$	$19/2$	0	0	$-3/2$	0	$-13/2$

Після проведення наступної ітерації (заміни  $x_5, x_1$ ), отримаємо:

—	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$B$
$x_3$	0	0	1	3	5	4
$x_1$	1	0	0	1	2	1
$x_2$	0	1	0	2	5	3
$L$	0	0	0	-11	-19	-16

Таким чином  $L_{\max} = 16$  при  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$ .

### Завдання 3.

Для простоти буду розглядати  $x_1 + x_2 \rightarrow \max$  замість  $3x_1 + 3x_2$ .

$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Отже доповнимо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Виражаємо  $x_3, x_4, x_5$ :

$$\begin{aligned}x_3 &= 8 - x_1 - x_2 \\x_4 &= -1 + 2x_1 - x_2 \\x_5 &= 2 - x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

Маємо від'ємний вільний член, тому змінюємо  $x_4, x_1$ :

$$2x_1 = 1 + x_2 + x_4 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

Підставляємо у інші рівняння:

$$\begin{aligned}x_3 &= 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - x_2 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\x_5 &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + 2x_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4\end{aligned}$$

Маємо розв'язок  $(1/2, 0, 15/2, 0, 3/2)$ . Функція:

$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

Потрібно змінити  $x_2$  на  $x_3$ :

$$x_2 = 5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

Підставляємо у інші вирази:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{2}x_4 = 3 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\x_5 &= \frac{3}{2} + \frac{15}{2} - x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_4 = 9 - x_3 - x_4\end{aligned}$$

А тепер знову у цільову функцію:

$$L = x_1 + x_2 = 3 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 8 - x_3$$

Отже  $L_{\max} = 8$ .

#### Завдання 4.

Для простоти будемо розв'язувати  $L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$ . Отже, маємо

$$L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Доповнимо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Виражаємо  $x_3, x_4, x_5$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= -4 + x_1 + x_2 \\ x_4 &= -1 + 2x_1 - x_2 \\ x_5 &= 1 - x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Мінімальний від'ємний вільний член це  $-4$ , тому змінюємо  $x_1, x_3$ :

$$x_1 = 4 - x_2 + x_3$$

Тому

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 + 8 - 2x_2 + 2x_3 - x_2 = 7 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_5 &= 1 - 4 + x_2 - x_3 + 3x_2 = -3 + 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Маємо від'ємний вільний член  $-3$ , тому змінюємо  $x_2, x_5$ :

$$4x_2 = 3 + x_3 + x_5 \rightarrow x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5$$

Тому

$$x_1 = 4 + x_3 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5 = \frac{13}{4} + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5$$

$$x_4 = 7 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_5 + 2x_3 = \frac{19}{4} + \frac{5}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_5$$

Підставляємо у цільову функцію:

$$L = 2x_1 - 3x_2 = \frac{13}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_5 =$$

$$\frac{17}{4} + \frac{3}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_5$$

Нам потрібно замінити  $x_5$ . Змінимо його та  $x_4$ , оскільки  $\min\{13, 19/3\} = 19/3$ . Тому

$$\frac{3}{4}x_5 = \frac{19}{4} + \frac{5}{4}x_3 - x_4 \rightarrow x_5 = \frac{19}{3} + \frac{5}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4$$

Підставляємо у інші вирази

$$x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_3 + \frac{19}{12} + \frac{5}{12}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{12}x_4$$

$$x_1 = \frac{13}{4} + \frac{3}{4}x_3 - \frac{19}{12} - \frac{5}{12}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 5 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

Отже

$$L = 2x_1 - 3x_2 = 10 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - 7 - 2x_3 + x_4 = 3 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4$$

Змінити  $x_3$  ми не можемо. Отже,  $L$  необмежено зростає.