Домашня робота з курсу “Теоретична механіка”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

7 грудня 2023 р.

Завдання 12.28

Умова. Нитка, прикріплена одним кінцем до тіла A вагою P (рис. 1), яке рухається з тертям по горизонтальній площині, перекинута через нерухомий блок C, огинає рухомий блок B вагою Q і радіуса r і закріплена другим кінцем O. Визначити швидкість v тіла A як функцію переміщення s центра блока B, якщо момент інерції останнього відносно центра мас дорівнює I, коефіцієнт тертя тіла A об площину дорівнює μ.

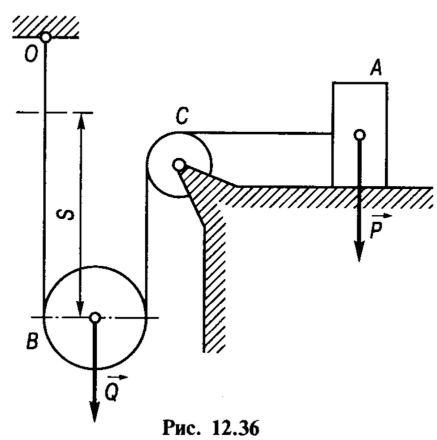

Рис. 1: Умова до завдання 12.28

Розв'язок. Нехай блок змістився на s. Це означає, що груз змістився на $2s$, тобто робота сили тертя дорівнює $A_f = 2\mu Ps$. Окрім цього, потенціальна енергія рухомого блоку змінилася на $\Delta W_p = Qs$.

Оскільки блок проходить вдвічі меньшу відстань, ніж груз, то лінійна швидкість блоку $\frac{v}{2}$. Це означає, що його кутова швидкість $\omega = \frac{v}{2r}$, а тому кінетична енергія обертання $\frac{I\omega^2}{2} = \frac{Iv^2}{8r^2}$. Отже, повна кінетична енергія системи:

$$W_k = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{8} + \frac{Iv^2}{8r^2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \left(\frac{Q + 4P}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \frac{v^2}{8}$$

Вона перейшла у зміну потенціальної мінус сили тертя, тобто:

$$\left(\frac{Q + 4P}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \frac{v^2}{8} = Qs - 2\mu Ps$$

Таким чином:

$$v^2 = \frac{8s(Q - 2\mu P)}{\frac{Q+4P}{g} + \frac{I}{r^2}} = \frac{8gsr^2(Q - 2\mu P)}{(Q + 4P)r^2 + Ig}$$

Остаточно:

$$\boxed{v = 2r\sqrt{\frac{2gs(Q - 2\mu P)}{(Q + 4P)r^2 + Ig}}}$$

Завдання 12.32

Умова. Колесо 1 масою M може котитися без ковзання у вертикальній площині всередині нерухомої шестерні 2; воно приводиться в рух кривошипом AB завздовжки L і масою m. У початковий момент кут α між кривошипом і вертикальною віссю складав $\pi/3$. Кривошип відпустили без початкової швидкості. Визначити його кутову швидкість у момент проходження положення рівноваги. Тертям знехтувати.

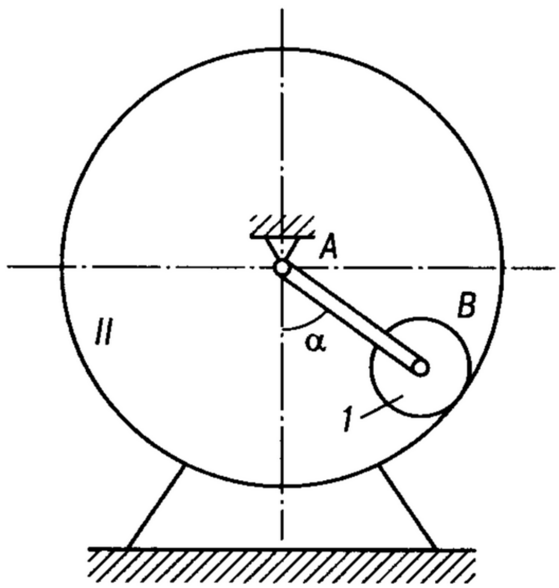

Рис. 2: Умова до завдання 12.32

Розв'язок. Візьмемо точку A за нульовий рівень. Тоді початкова енергія системи дорівнює потенціальній енергії і дорівнює:

$$W_p = -\frac{mgL}{2}\cos\alpha - MgL\cos\alpha = -gL\cos\alpha\left(\frac{m}{2}+M\right)$$

У момент проходження нижньої точки потенціальна енергія стає:

$$W_p' = -gL\left(\frac{m}{2}+M\right)$$

Таким чином, зміна потенціальної енергії:

$$\Delta W_p = W_p' - W_p = -gL\left(\frac{m}{2} + M\right)(1 - \cos\alpha) = -(m + 2M)gL\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Ця потенціальна енергія пішла на зміну кінетичної. Спочатку її не було. В кінці ж швидкість набуває і стрижень, і кривошип. Момент інерції стрижня відносно A дорівнює $\frac{1}{3}mL^2$, а у колеса, якщо вважати, що його радіус R, $I_B = MR^2$. В такому разі кінетична енергія стрижня $\frac{I_{AB}\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2 L^2}{6}$.

Розбираємось з колесом. Лінійна швидкість колеса дорівнює ωL, тому кутова швидкість самого колеса $\omega L = \Omega R$, отже $\Omega = \frac{L}{R}\cdot\omega$. Кінетична енергія в такому разі $\frac{M\omega^2L^2}{2} + \frac{I_B\Omega^2}{2} = \frac{M\omega^2L^2}{2} + \frac{MR^2L^2\omega^2}{2R^2} = M\omega^2L^2$ – як бачимо, від радіуса колеса нічого не залежить. Отже, загальна кінетична енергія:

$$W_k = \frac{m\omega^2L^2}{6} + M\omega^2L^2 = \left(\frac{m}{6} + M\right)\omega^2L^2$$

Прирівнюємо вираз від'ємної зміни потенціальної енергії до прибутку кінетичної:

$$\left(\frac{m}{6} + M\right)\omega^2L^2 = (m + 2M)gL\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Звідси остаточно:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{m + 2M}{m + 6M}\cdot\frac{6g\sin^2\frac{\alpha}{2}}{L}}$$

Замітка. Якщо вважати колесо суцільним, то його момент інерції $\frac{1}{2}MR^2$ і в такому разі загальна кінетична енергія колеса $\frac{3}{2}M\omega^2L^2$. Це приводить до відповіді

$$\omega^2 = \frac{m + 2M}{m + 9M}\cdot\frac{6g\sin^2\frac{\alpha}{2}}{L}$$