✏️

Homework #9 (0.5/1)

Завдання 789(Ф-С)

$$x^4 - x^3 - 1 = 0$$

Нехай $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4$ — корені цього рівняння. В такому разі від нас потребують знайти значення $s_8(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4)$.
Нехай $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — симметричні многочлени, а $\widetilde{\sigma}_j := \sigma(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4), \tilde{s}_j := s_j(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4)$.

З теореми Вієтта

$$\widetilde{\sigma}_1 = 1, \widetilde{\sigma}_2 = 0, \widetilde{\sigma}_3 = 0, \widetilde{\sigma}_4 = -1$$

Користуємось формулою Ньютона. $\tilde{s}_1 = \widetilde{\sigma}_1 = 1$. Далі

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \to \tilde{s}_2 = \widetilde{\sigma}_1^2 = 1$$

$$s_3 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 \to \tilde{s}_3 = 1$$

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 \to \tilde{s}_4 = 1 + 4 = 5$$

$$s_5 - s_4\sigma_1 + s_3\sigma_2 - s_2\sigma_3 + s_1\sigma_4 = 0 \to \tilde{s}_5 = \tilde{s}_4\widetilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_1\widetilde{\sigma}_4 = 6$$

$$s_6 - s_5\sigma_1 + s_4\sigma_2 - s_3\sigma_3 + s_2\sigma_4 = 0 \to \tilde{s}_6 = \tilde{s}_5\widetilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_2\widetilde{\sigma}_4 = 7$$

Насправді можна помітити, що $\tilde{s}_k = \tilde{s}_{k-1}\widetilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_{k-4}\widetilde{\sigma}_4 = \tilde{s}_{k-1} + \tilde{s}_{k-4}$. Тому маємо

$$\tilde{s}_7 = \tilde{s}_6 + \tilde{s}_3 = 1 + 7 = 8,\ \tilde{s}_8 = \tilde{s}_7 + \tilde{s}_4 = 5 + 8 = 13$$

Отже, маємо $\widetilde{x}_1^8 + \widetilde{x}_2^8 + \widetilde{x}_3^8 + \widetilde{x}_4^8 = 13$.

Завдання 1175(П)

Будемо перетворювати наш вираз

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = (x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2) - (2x_2 + x_3)^2 +$$

Нехай $\widetilde{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$ і продовжуємо далі

$$P(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{x}_1^2 - (3x_2^2 + 2x_2x_3) + 2x_3^2 = \widetilde{x}_1^2 - (3x_2^2 + 2x_2x_3 + \frac{x_3^2}{3}) + \frac{x_3^2}{3} + 2x_3^2 = \widetilde{x}_1^2 - (\sqrt{3}x_2 + x_3/\sqrt{3})^2 +$$

Отже нехай $\widetilde{x}_2 = \sqrt{3}x_2 + x_3/\sqrt{3},\ \widetilde{x}_3 = \sqrt{7/3}x_3$, будемо мати

$$P(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{x}_1^2 - \widetilde{x}_2^2 + \widetilde{x}_3^2$$