Домашня робота з диференціальної геометрії #9

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 квітня 2023 р.

Завдання 2.1.

Умова. Розглянемо поверхню $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично:

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2} \end{cases}, \quad (u^1)^2 + (u^2)^2 < R^2$$

1. Якою є область задання $\mathcal{D}$ поверхні $\mathcal{F}$?
2. Покажіть, що $\mathcal{F}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
3. Доведіть, що $\mathcal{F}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.
4. Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\mathcal{F}$.

Розв'язок.

Пункт 1. Область задання поверхі $\mathcal{F}$ є замальоване коло радіуса R з центром в початку координат.

Пункт 2. Помітимо, що:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2 + R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 = R^2$$

Отже, дійсно маємо, що множина точок $\mathcal{F}$ лежить на сфері радіуса R з центром у початку координат.

Тепер знайдемо яка саме частина. Для цього помічаємо, що по суті ми маємо явно задану функцію $x^3 = f(x^1, x^2) = \sqrt{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$, яка задає висоту над площиною Ox^1x^2. Проекція на площину Ox^1x^2 є, як ми вже сказали, колом радіуса R, а отже в результаті маємо півкулю.

Пункт 3. Знаходимо векторний добуток:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\right] = \left[\frac{u^1}{\sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}}, \frac{u^2}{\sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}}, 1\right]^\top$$

Модуль:

$$\left\|\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}\right]\right\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}}$$

Отже бачимо, що модуль ніколи не дорівнює 0. Єдина проблема може виникнути на точках $(u^1)^2 + (u^2)^2 = R^2$, проте оскільки в нас строга нерівність, то такої проблеми не виникає. Отже, крива є регулярною.

Пункт 4. Нехай $u^2 = C$ є константою, тоді маємо криву:

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^2 = C \\ x^3 = \sqrt{R^2 - C^2 - (u^1)^2} \end{cases}, \ u^1 \in [-R, R]$$

ця крива є півколом радіуса $\sqrt{R^2 - C^2}$, що знаходиться у площині $x^2 = C$ з центром у $(0, C, 0)$.

Якщо ж $u^1 = C$, то маємо:

$$\begin{cases} x^1 = C \\ x^2 = u^2 \\ x^3 = \sqrt{R^2 - C^2 - (u^2)^2} \end{cases}$$

Що теж є півколом, але у площині $x^1 = C$ з центром у $(C, 0, 0)$ радіуса $\sqrt{R^2 - C^2}$

Завдання 2.2.

Умова. Розглянемо поверхню $\widetilde{\mathcal{F}}$ в $\mathbb{R}^3$, задану параметрично:

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \frac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}, \ \widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2 \in (-\infty, +\infty)$$

1. Якою є область задання $\widetilde{\mathcal{D}}$ поверхні $\widetilde{\mathcal{F}}$?
2. Покажіть, що $\widetilde{\mathcal{F}}$ є частиною сфери радіуса R з центром в початку координат в $\mathbb{R}^3$. Яка саме це частина сфери?
3. Доведіть, що $\widetilde{\mathcal{F}}$ є регулярною параметрично заданою поверхнею.
4. Проаналізуйте, які криві утворюють координатну сітку на поверхні $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Розв'язок.

Пункт 1. Областю задання є площина $\mathbb{R}^2$.

Пункт 2. Знову ж таки, знайдемо

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 =$$
$$R^2 \left(\frac{(\widetilde{u}^1)^2}{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2} + \frac{(\widetilde{u}^2)^2}{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2} + \frac{1}{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2} \right) = R^2$$

Отже всі точки множини $\widetilde{\mathcal{F}}$ лежать на сфері радіуса R з центром у початку координат.

Для аналізу якої саме частини сфери ми маємо, розглянемо вираз

$$f(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \frac{\widetilde{u}^1}{\sqrt{1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2}}$$

Розглянемо градієнт:

$$\nabla f(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \left[\frac{1+(\widetilde{u}^2)^2}{(1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2)^{3/2}}, -\frac{\widetilde{u}^1\widetilde{u}^2}{(1+(\widetilde{u}^1)^2+(\widetilde{u}^2)^2)^{3/2}} \right]^\top$$

Звідси бачимо, що у цієї функції немає стаціонарних точок. Далі помітимо, що

$$\lim_{\widetilde{u}^2 \to \pm\infty} f(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = 0, \ \lim_{\widetilde{u}^1 \to \pm\infty} f(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \pm 1$$

Отже бачимо, $f(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \in (-1, +1) \ \forall (\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2$. Таким чином, x^1, x^2 приймає усі значення в $(-R, +R)$ (оскільки для x^2 ситуація майже аналогічна).

В свою чергу, функція

$$\varphi(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2}}$$

Приймає усі значення від $(0, 1)$ (це легко бачити і це можна теж окремо дослідити), а отже $x^3 \in (0, +R)$. Отже, знову маємо півкулю.

Пункт 3. Знаходимо значення виразу:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \widetilde{u}^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \widetilde{u}^2}\right] = \left[\frac{R^2 \widetilde{u}^1}{(1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2)^2}, \frac{R^2 \widetilde{u}^2}{(1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2)^2}, \frac{R^2}{(1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2)^2}\right]^\top$$

Модуль:

$$\left\| \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \widetilde{u}^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \widetilde{u}^2}\right] \right\| = \frac{R^2}{(1 + (\widetilde{u}^1)^2 + (\widetilde{u}^2)^2)^{3/2}}$$

Отже як і минулого разу, цей вираз ніколи не дорівнює 0, а отже поверхня є регулярною.

Пункт 4. Отже нехай $\widetilde{u}^1 = C$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} x^1 = R \cdot \frac{C}{\sqrt{1 + C^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^2 = R \cdot \frac{\widetilde{u}^2}{\sqrt{1 + C^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \\ x^3 = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 + (\widetilde{u}^2)^2}} \end{cases}$$

Це є півколом. По-перше, усі точки лежать на сфері радіуса R. По-друге, якщо порахувати, то можна отримати, що скрут цієї кривої $\kappa \equiv$

0. Єдина крива, що має постійну кривину (в нашому випадку $\frac{1}{R}$) та нульовий скрут це коло.

Щоб зрозуміти, в якій площині лежить півколо, достатньо помітити з початкового рівняння, що:

$$x^1 = Cx^3$$

Тому остаточно маємо перетин площини $x^1 = Cx^3$ та півсфери $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1, x^3 > 0$.

Схожим чином можна розглянути $\widetilde{u}^2 = C$, тут ми теж отримаємо півкола.