Домашня робота з диференціальної геометрії #11

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

14 травня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Знайдіть першу фундаментальну форму явно заданої поверхні

$$x^3 = \varphi(x^1, x^2)$$

Розв'язок. Запишемо нашу поверхню у наступному вигляді:

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \varphi(u^1, u^2) \end{bmatrix}$$

Знаходимо часткові похідні:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial\varphi/\partial u^1 \end{bmatrix}, \; \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial\varphi/\partial u^2 \end{bmatrix}$$

Знаходимо коефіцієнти $g_{i,j}$:

$$g_{i,i} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \right\rangle = 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}\right)^2$$

$$g_{1,2} = g_{2,1} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}$$

Таким чином, перша фундаментальна форма:

$$g = \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\right)^2\right)(du^1)^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} du^1 du^2 + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}\right)^2\right)(du^2)^2$$

У матричній формі:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 + (\partial \varphi / \partial u^1)^2 & (\partial \varphi / \partial u^1)(\partial \varphi / \partial u^2) \\ (\partial \varphi / \partial u^1)(\partial \varphi / \partial u^2) & 1 + (\partial \varphi / \partial u^2)^2 \end{bmatrix}$$

Завдання 2.

Умова. Користуючись задачею 1, запишіть першу фундаментальну форму гіперболічного параболоїда

$$x^3 = x^1 x^2$$

Розв'язок. Відповідно до задачі 1, маємо $\varphi(u^1, u^2) = u^1 u^2$. Тоді маємо першу фундаментальну форму:

$$g = (1 + (u^2)^2)(du^1)^2 + 2u^1 u^2 du^1 du^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2$$

Або у матричній формі:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 + (u^2)^2 & u^1 u^2 \\ u^1 u^2 & 1 + (u^1)^2 \end{bmatrix}$$

Завдання 4.

Умова. На поверхні з першою фундаментальною формою

$$g = \frac{1}{(u^1)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2}(du^2)^2$$

знайдіть довжину наступних кривих:

$$\gamma_1 : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = u_0^2 \end{cases} \quad , \ t \in (a, b)$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} u^1 = \alpha t \\ u^2 = \beta t \end{cases} \quad , \ t \in (c, d) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} u^1 = R \cos t \\ u^2 = R + R \sin t \end{cases} \quad , \ t \in (a, b) \subset (-\pi/2, 3\pi/2)$$

Розв'язок. Довжина розраховується за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{1,1}(d\xi^1)^2 + 2g_{1,2}d\xi^1 d\xi^2 + g_{2,2}(d\xi^2)^2}$$

Для першої кривої маємо $d\xi^1 = dt, d\xi^2 = 0$, в такому разі:

$$L(\gamma_1) = \int_a^b \sqrt{g_{1,1}(d\xi^1)^2} = \int_a^b \sqrt{g_{1,1}} d\xi^1 = \int_a^b \frac{d\xi^1}{\xi^1} = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln \left| \frac{b}{a} \right|$$

Для другої кривої $d\xi^1 = \alpha dt, d\xi^2 = \beta dt$, тоді

$$L(\gamma_2) = \int_c^d \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 t^2} \cdot \alpha^2 + \frac{1}{\beta^2 t^2} \cdot \beta^2 dt} = \sqrt{2} \int_c^d \frac{dt}{t} = \sqrt{2} \ln \frac{d}{c}$$

Для третьої кривої $d\xi^1 = -R \sin t dt, d\xi^2 = R \cos t dt$, в такому разі:

$$L(\gamma_3) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{R^2 \cos^2 t} \cdot R^2 \sin^2 t + \frac{1}{R^2 (1 + \sin t)^2} \cdot R^2 \cos^2 t dt}$$

Або:

$$L(\gamma_3) = \int_a^b \sqrt{\tan^2 t + \frac{\cos^2 t}{(1 + \sin t)^2}} dt$$

Такий інтеграл має явний вигляд для первісної, але він доволі громоздкий, тому не буду його наводити.