Самостійна робота з курсу “Теорія міри”

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

26 листопада 2023 р.

Завдання

Умова. Обчислити інтеграл

$$\mathcal{I} = \int_{[0,100)} \frac{d\lambda_1(x)}{[5x+2][5x+4]}$$

Розв'язок. Помітимо, що $[0,100) = \bigcup_{k=0}^{499} \left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)$. В такому разі скористаємося теоремою про σ-адитивність інтеграла Лебега:

$$\mathcal{I} = \sum_{k=0}^{499} \int_{\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)} \frac{d\lambda_1(x)}{[5x+2][5x+4]}$$

Помітимо, що на інтервалі $\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)$ значення $5x+2$ лежать між $k+2$ до $k+3$ не включно, тому $[5x+2]\Big|_{x\in\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)} = k+2$. Аналогічно отримуємо $[5x+4]\Big|_{x\in\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)} = k+4$. Таким чином:

$$\mathcal{I} = \sum_{k=0}^{499} \int_{\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)} \frac{d\lambda_1(x)}{(k+2)(k+4)} = \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{(k+2)(k+4)} \cdot \int_{\left[\frac{k}{5}, \frac{k+1}{5}\right)} d\lambda_1(x)$$

Користуючись тим фактом, що $\int_{[\alpha,\beta)} d\lambda_1(x) = \beta - \alpha$, отримуємо:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{(k+2)(k+4)}$$

Далі розкладаємо $\frac{1}{(k+2)(k+4)}$ на прості дроби:

$$\frac{1}{(k+2)(k+4)} = \frac{\alpha}{k+2} + \frac{\beta}{k+4} \implies (\alpha+\beta)k + (4\alpha + 2\beta) \equiv 1$$

Звідси $\beta = -\alpha$, тоді $\alpha = \frac{1}{2}$, а отже $\beta = -\frac{1}{2}$. Остаточно:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=0}^{499} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right)$$

Якщо розписати суму

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{499} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4} \right) &= \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{499} \frac{1}{k+4} = \sum_{k=2}^{501} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{503} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{502} - \frac{1}{503} = \frac{314125}{378759} \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\boxed{\mathcal{I} = \frac{62825}{757518}}$$

Відповідь. $\frac{62825}{757518} \approx 0.083$.