Домашня робота #3 з курсу "Комплексний аналіз" (частина перша)

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

5 грудня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{(z+4)^n}$$

Розв'язок. Маємо геометричну прогресію зі знаменником $q = \frac{i}{z+4}$. Геометрична прогресія буде збігатися тоді, коли $|q| < 1$, тобто $\left|\frac{i}{z+4}\right| = \frac{1}{|z+4|} < 1$. Отже $|z+4| > 1$.

Завдання 2.

Умова. Вказати число доданків у головній частині ряду Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^{n-2}}$$

Розв'язок. Головна частина ряда Лорана складається з елементів виду $\gamma_{-n}(z-z_0)^{-n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Перепишемо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^{n-2}} = \sum_{n=1}^{2} \frac{n}{(z-i)^{n-2}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^{n-2}}$$
$$= \underbrace{2+(z-i)}_{\text{Голоморфна частина}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(z-i)^{-n}}_{\text{Головна частина}}$$

Як бачимо, головна частина складається з нескінченної кількості елементів.

Завдання 3.

Умова. Вказати число доданків у голоморфній частині ряду Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n-3}}{n!},$$

вважаючи, що ряд розглянуто в околі нескінченності.

Розв'язок. Робимо заміну $w = \frac{1}{z}$. Тоді розглядання ряда аналогічно розглядання наступного ряду в околі нуля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot w^{n+3}$$

Тут весь ряд є голоморфним, отже число доданків у голоморфній частині безліч.

Завдання 6.

Умова. Розкласти в ряд Лорана в області $|z| > 3$ функцію

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

Розв'язок. Розкладемо $f(z)$ на прості дроби:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{z-2} + \frac{\beta}{z-3}$$

З останньої рівності $(\alpha + \beta)z - (3\alpha + 2\beta) \equiv 1$. Отже:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \implies (\alpha, \beta) = (-1, 1)$$

Таким чином:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Розглянемо розкладання у ряд Лорана наступної функції:

$$g(z;\theta) = \frac{1}{z-\theta}$$

Для цього перепишемо її у вигляді

$$g(z;\theta) = \frac{1}{z(1-\frac{\theta}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\theta}{z}\right)^n, \ |z| > |\theta|$$

Отже:

$$f(z) = g(z;3) - g(z;2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{3}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{3^n}{z^{n+1}} - \frac{2^n}{z^{n+1}}\right\} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}, \ |z| > 3}$$

Завдання 9.

Умова. Вказати область, у якій ряд Лорана функції $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$ буде збігатися з рядом Тейлора.

Розв'язок. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. $|z| > 2$. Тоді:

$$f(z) = \frac{e^z}{z-2} = \frac{e^z}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{e^z}{z} = \frac{e^z}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$$

Ми не можемо знайти явний вид у формі $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n z^n$, проте можемо сказати, чи буде ряд Лорана збігатися з рядом Тейлора. Ряд Лорана є рядом Тейлора тоді і тільки тоді, коли $\gamma_{-n} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

У такому добутку існує безліч елементів виду $\gamma_{-n} z^{-n}$ для $n \in \mathbb{N}, \gamma_{-n} \neq 0$. Дійсно, візьмемо коефіцієнт при z^{-1}. В такому разі:

$$\gamma_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 \neq 0$$

Випадок 2. $|z| < 2$. Тоді:

$$f(z) = -\frac{e^z}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{e^z}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}\right)$$

Як бачимо, у такого добутку немає доданків виду $\gamma_{-n} z^{-n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Отже, цей ряд повністю збігається з рядом Тейлора.

Остаточна відповідь – $\boxed{|z| < 2}$