# Домашня робота з диференціальної геометрії #1

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

18 лютого 2023 р.

## Завдання 1.1.

### Пункт 1.

Маємо неявно задану функцію $\Psi(x, y) = 0$ де

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 5$$

Знаходимо градієнт функції:

$$\nabla\Psi(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 4 \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x - 2 \\ y \end{bmatrix}$$

Бачимо, що $\nabla\Psi = 0$ в точці $(2, 0)$, проте ця точка не належить нашій криві, а отже крива є регулярною.

### Пункт 2.

Насправді можемо знайти явний вид функції: $y = \sin x$, тому крива є регулярною.

Доведення доволі просте: нехай у загальному випадку крива задана у вигляді $y = f(x)$. В такому разі в неявному вигляді будемо мати рівняння $\Psi(x, y) = y - f(x) = 0$ і тому градієнт:

$$\nabla \Psi(x, y) = \begin{bmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

І він ніколи не дорівнює нульовому вектору, оскільки друга компонента завжди ненульова.

## Пункт 3.1.

Крива $x^2 + y^2 = 0$ по суті є лише точкою $(0, 0)$. Помітимо, що градієнт $\nabla\Psi = [2x, 2y]^T$ дорівнює $\mathbf{0}$ у точці $(0, 0)$, отже точка є сингулярною, тому крива є нерегулярною.

## Пункт 3.2.

Якщо $\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - C$, то при $C < 0$ не будемо мати жодної точки на кривій (тобто перед нами буде взагалі не крива). При $C = 0$ маємо випадок з пункту , тобто нерегулярну криву, що складається лише з точки $(0, 0)$. У випадку $C > 0$ маємо рівняння кола з центром у $(0, 0)$ радіуса $\sqrt{C}$ і як ми знаємо, коло є регулярною кривою.

## Пункт 4.1.

Маємо $\Psi(x, y) = x^2 - y^2$. Це є пара перпендикулярних прямих $x = y$ та $x = -y$, що перетинаються у початку координат, яка якраз і є єдиною нерегулярною точкою. Проте, покажемо це аналітично. Градієнт $\nabla\Psi = [2x, -2y]^T$ дорівнює 0 у точці $(0, 0)$, яка належить кривій. Отже, крива нерегулярна.

## Пункт 4.2.

Маємо $\Psi(x, y) = x^2 - y^2 - C$. Градієнт має той самий вираз, що і в пункті , тобто $[2x, -2y]^T$ і підозріла точка на нерегулярність це $(0, 0)$. Проте, вона належить кривій лише якщо $C = 0$ (цей випадок вже розібраний вище). Отже, крива є регулярною (і є гіперболою).

## Пункт 5.1.

Крива $xy = 0$ є парою прямих $x = 0$ та $y = 0$, які перетинаються у початку координат, отже крива не є регулярною. Покажемо це аналітично. Маємо, що градієнт $\nabla\Psi = [y, x]^T$, дорівнює 0 у точці $(0, 0)$, що належить кривій. Отже, крива є нерегулярною.

## Пункт 5.2.

Як і в попередньому пункті, підозріла точка має координату $(0, 0)$ (бо вираз градієнта не змінився після додавання константи). Вона вже не належить графіку, а отже крива є регулярною.

## Пункт 6.

Зроблений на лекції.

## Пункт 7.

Маємо $\Psi(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2 + y^4 = 0$. Спробуємо проаналізувати рівняння без диференціювання. Перепишемо рівняння у вигляді $\Psi(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = (x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x)$. Прирівняємо кожну дужку до 0:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \to (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \to (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

Що відповідає колу з центром у $(1, 0)$ радіуса 1. Друга дужка:

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \to (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

Що відповідає колу з центром у $(-1, 0)$ радіуса 1. Ці два кола дотикаються у точці $(0, 0)$, тому крива скоріше за все у ній є нерегулярною.

Знайдемо градієнт:

$$\nabla\Psi(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 4xy^2 - 8x \\ 4x^2y + 4y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

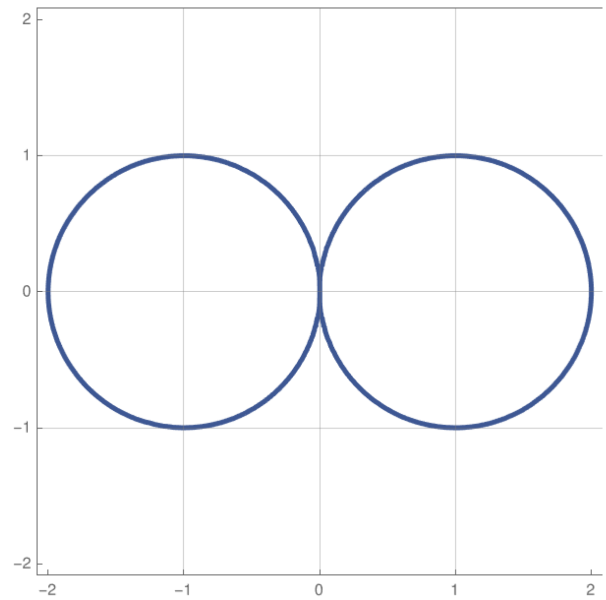

Рис. 1: Зображення кривої у пункті 7

З другого рівняння маємо $4y(x^2 + y^2) = 0$. Отже, або $x = y = 0$, і ця точка підходить як до першого рівняння, так і належить кривій, тобто є сингулярною. Якщо ж просто покласти $y = 0$, то перше рівняння має вид:

$$4x(x^2 - 2) = 0 \to x = \pm\sqrt{2}$$

Але точки $(\pm\sqrt{2}, 0)$ не належать кривій. Отже єдиною сингулярною точкою є $(0, 0)$.

## Пункт 8.

Маємо $\Psi(x, y) = x^2y - y^3 = 0$. Запишемо криву як $\Psi(x, y) = y(x^2 - y^2) = y(x - y)(x + y)$. Отже, маємо прямі $y = 0, x = y, x = -y$. Всі вони дотикаються у точці $(0, 0)$, отже це є точкою сингулярності. Перевіримо це аналітично. Маємо градієнт $\nabla\Psi(x, y) = [2xy, x^2 - 3y^2]^T$, який ми прирівнюємо до $\boldsymbol{\theta}$. Перша компонента дорівнює 0 коли або $x = 0$ або $y = 0$, але обидві варіанти дають одну точку $(0, 0)$, яка належить кривій. Отже, це і є точка сингулярності.

# Завдання 2.1.

Ідейно нам потрібно знайти всі значення $t$, при яких похідна $\dot{\boldsymbol{f}}(t) = 0$.

## Пункти 1-5.

Пункти $1-5$ є подібними, давайте їх узагальнемо. Отже, нехай ми маємо криву

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t^n \\ t^m \end{bmatrix}, n, m \in \mathbb{N}$$

Тоді похідна

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} nt^{n-1} \\ mt^{m-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}$$

Якщо $n = 1$ або $m = 1$, то цей вектор ніколи не є нулем (тобто крива при цьому є регулярною). Це відповідає пунктам 1-2.

Якщо ж ні, то маємо єдиний розв'язок при $t = 0$, що є сингулярною точкою з координатами $(0, 0)$.

Малюнок кривої у пункті 5 можна побачити на Рис. 2.

## Пункт 6.

Маємо рівняння:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a + A\cos t \\ b + B\sin t \end{bmatrix}$$

Це є рівняння еліпса, тобто крива є регулярною, але давайте це перевіримо. Похідна:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -A\sin t \\ B\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Це означає, що $\sin t = \cos t = 0$, що неможливо.

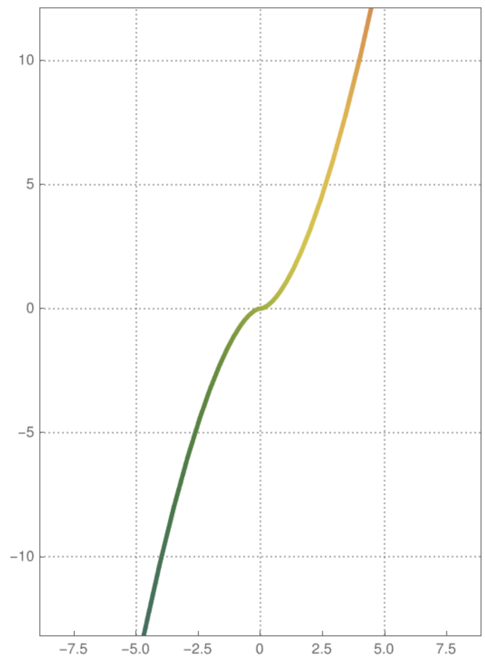


Рис. 2: Графік $\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t^n \\ t^m \end{bmatrix}$ для $n = 3, m = 5$

## Пункт 7.

Маємо рівняння:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} A\cosh t \\ A\sinh t \end{bmatrix}$$

Це є гілкою гіперболи, а отже крива є сингулярною. Доволі схожим до минулого пункту чином отримуємо рівняння $\cosh t = \sinh t = 0$, що звісно неможливо.

## Пункт 8.

Маємо рівняння (насправді рівняння фігур Ліссажу):

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos Mt \\ \sin Nt \end{bmatrix}$$

Знаходимо похідну:

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -M\sin Mt \\ N\cos Nt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Або, якщо прибрати $N, M \neq 0$:

$$\begin{cases} \sin Mt = 0 \\ \cos Nt = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Mt = \pi k, m \in \mathbb{Z} \\ Nt = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Остаточно маємо систему:

$$\begin{cases} t = \frac{\pi m}{M},\ m \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi n}{N},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Прирівняємо праві частини:

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2N} + \frac{n}{N} \to 2Nm - 2nM = M$$

Отже, перед нами Діофантове рівняння, яке треба розв'язати відносно $(n, m)$, що звісно зробити у загальному вигляді немає можливості. На малюнку 3 можна побачити як виглядає графік.

## Пункт 9.

Маємо вектор-функцію:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 1/\cosh t \\ t - \tanh t \end{bmatrix}$$

Запишемо похідну і прирівняємо до 0:

$$f(t) = \begin{bmatrix} -\sinh t/\cosh^2 t \\ 1 - 1/\cosh^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ця система має єдиний розв'язок $t = 0$, що відповідає радіус-вектору на кривій $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Якщо зобразити цю криву (що є трактрисою), то ця точка буде її 'вістрем'. Див рис. 4

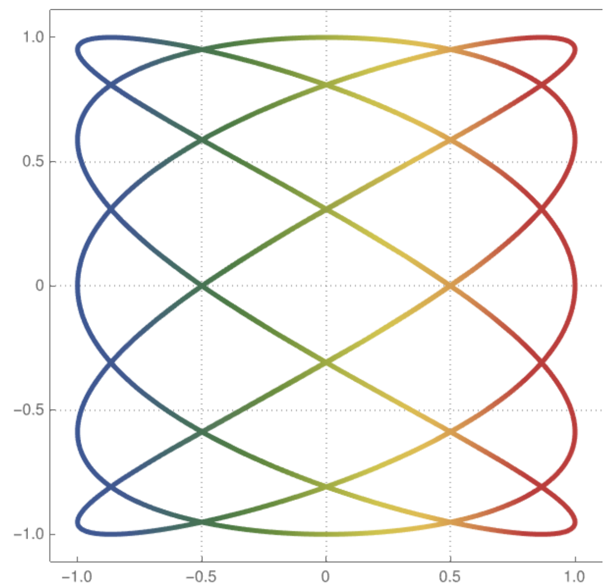


Рис. 3: Фігури Ліссажу для $M = 5, N = 3$

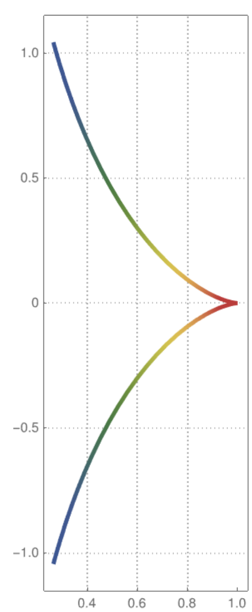


Рис. 4: Графік кривої з пункту 9

### Пункт 10.

Маємо

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}$$

Знайдемо похідну і прирівняємо до $\boldsymbol{\theta}$:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}$$

З другого рівняння $\sin t = 0$, а з першого $\cos t = 1$, отже $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ відповідають точкам сінгулярності. Точки мають координати:

$$\boldsymbol{f}(2\pi k) = \begin{bmatrix} 2\pi k \\ 0 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

## Завдання 3.1.

Перший пункт був доведений на лекції, отже почнемо з другого.

### Пункт 2.

**Доведення.** Розписуємо все покомпонентно:

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\boldsymbol{f}(t)) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \lambda(t)f^1(t) \\ \lambda(t)f^2(t) \\ \vdots \\ \lambda(t)f^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}f^1 + \lambda \cdot \dot{f}^1 \\ \dot{\lambda}f^2 + \lambda \cdot \dot{f}^2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}f^n + \lambda \cdot \dot{f}^n \end{bmatrix} =$$

$$\dot{\lambda}\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \dot{f}^1 \\ \dot{f}^2 \\ \vdots \\ \dot{f}^n \end{bmatrix} = \dot{\lambda}\boldsymbol{f} + \lambda\dot{\boldsymbol{f}}$$

### Пункт 3.

**Умова**. Довести, що

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \theta \iff \boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{c}$$

**Доведення**. У бік $\Leftarrow$ теорема доводиться одразу. У бік $\Rightarrow$ помітимо, що умова $\dot{\boldsymbol{f}} = \theta$ еквівалентна

$$\dot{f}^j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

З курсу математичного аналізу маємо, що $f^j \equiv c^j \in \mathbb{R}$, тому

$$\boldsymbol{f} \equiv \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} = \text{const}$$

Що і потрібно було довести.

## Пункт 4.1.

**Умова**. Довести, що

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{h} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{h}} \rangle$$

**Доведення**. Розпишемо скалярний добуток:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} f_j(t)h_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}(f_j(t)h_j(t)) = \sum_{j=1}^{n}(\dot{f}_j h_j + f_j \dot{h}_j) =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\dot{f}_j h_j + \sum_{j=1}^{n} f_j \dot{h}_j = \langle \dot{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{h} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{h}} \rangle$$

## Пункт 4.2.

**Умова**. Довести, що

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{h}] = [\dot{\boldsymbol{f}} \times \boldsymbol{h}] + [\boldsymbol{f} \times \dot{\boldsymbol{h}}]$$

**Доведення.** Запишемо похідну за означенням:

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{h}] = \lim_{\delta t \to 0} \frac{[\boldsymbol{f}(t+\delta t) \times \boldsymbol{h}(t+\delta t)] - [\boldsymbol{f}(t) \times \boldsymbol{h}(t)]}{\delta t}$$

Додамо і віднімемо в чисельнику $[\boldsymbol{f}(t+\delta t) \times \boldsymbol{h}(t)]$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{h}] = \lim_{\delta t\to 0}\left[\boldsymbol{f}(t+\delta t) \times \frac{\boldsymbol{h}(t+\delta t)-\boldsymbol{h}(t)}{\delta t}\right] + \lim_{\delta t\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{f}(t+\delta t)-\boldsymbol{f}(t)}{\delta t} \times \boldsymbol{h}(t)\right]$$

Користуємось означенням похідної і отримаємо

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{h}] = [\boldsymbol{f}\times\dot{\boldsymbol{h}}] + [\dot{\boldsymbol{f}}\times\boldsymbol{h}]$$

# Завдання 4.1.

## Пункт 1.

**Умова.** Обчислити $\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}(t)\|_2$.

**Розв'язок**. Випишемо покоординатно цей вираз:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}(f^j(t))^2\right)^{1/2}$$

Беремо похідну:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{2\sum_{j=1}^{n} f^j \dot{f}^j}{2\left(\sum_{j=1}^{n}(f^j(t))^2\right)^{1/2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} f^j \dot{f}^j}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

Чисельник можемо записати як $\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}\rangle$, отже:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}(t)\|_2 = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}\rangle}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

**Приклад 1.** Нехай $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} A\cos\omega t \\ A\sin\omega t\end{bmatrix}$, тоді $\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -\omega A\sin\omega t \\ \omega A\cos\omega t\end{bmatrix}$. Очевидно, що $\|\boldsymbol{f}\|_2 = A$, тому похідна дорівнює 0. Підставимо це у формулу:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{-\omega A^2\cos\omega t\sin\omega t + \omega A^2 \sin\omega t\cos\omega t}{A} = 0$$

**Приклад 2.** Візьмемо трошки складніший приклад, як наприклад $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix}$. Тоді $\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$. З одного боку:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{d}{dt}\sqrt{t^4+t^2} = \frac{4t^3+2t}{2\sqrt{t^4+t^2}} = \frac{2t^3+t}{\sqrt{t^2+t^4}}$$

Якщо підставити у формулу, маємо

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{2t^3+t}{\sqrt{t^4+t^2}}$$

Дійсно працює.

## Пункт 2.

**Умова.** Обчислити $\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{f}}$, де $\hat{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$

**Розв'язок.** Позначимо $\zeta(t) = \frac{1}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$. Тоді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\|\boldsymbol{f}\|_2}\right) = \frac{d}{dt}(\zeta(t)\boldsymbol{f}(t)) = \dot{\zeta}\cdot\boldsymbol{f} + \frac{\dot{\boldsymbol{f}}}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

Отже залишається лише знайти $\dot{\zeta}$. Помітимо, що:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{f}\|_2}\right) = -\frac{1}{\|\boldsymbol{f}\|_2^2}\cdot\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2$$

Похідну $\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2$ ми вже рахували, отже

$$\dot{\zeta} = -\frac{\langle\dot{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{f}\rangle}{\|\boldsymbol{f}\|_2^3}$$

Отже, остаточно:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{f}}) = -\frac{\langle\dot{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{f}\rangle}{\|\boldsymbol{f}\|_2^3}\cdot\boldsymbol{f} + \frac{\dot{\boldsymbol{f}}}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

**Приклад**. Нехай знову $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ для $t \in \mathbb{R}^+$. Тоді маємо:

$$\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{f}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{t}{\sqrt{t^2+t^4}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{t^2+t^4}} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

Далі перевіримо нашу формулу зверху. Маємо $\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$, тому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{f}}) = -\frac{t+2t^3}{(t^2+t^4)^{3/2}}\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{t^2+t^4}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} = \\ -\frac{1+2t^2}{t(1+t^2)^{3/2}}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} -\frac{1+2t^2}{t(1+t^2)^{3/2}} + \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \\ -\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Пункт 3.

**Умова.** Спростувати або довести, що

$$\|\boldsymbol{f}\|_2 \equiv \alpha \iff \langle \dot{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{f} \rangle \equiv 0$$

**Аналіз.** Доведемо теорему в правий бік, тобто $\Rightarrow$. З пункту  маємо:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

Оскільки $\|\boldsymbol{f}\|_2 \equiv \alpha$, то маємо

$$0 = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}} \rangle}{\alpha} \implies \langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}} \rangle = 0$$

Тут ми скористались, що $\alpha \neq 0$, інакше вектор $\boldsymbol{f} \equiv \theta$ і терема також виконується. Отже в правий бік це працює.

$\Leftarrow$. Знову беремо результат з пункту . Маємо:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}\rangle}{\|\boldsymbol{f}\|_2}$$

За умовою $\langle \boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}\rangle \equiv 0$, а отже:

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{f}\|_2 = 0$$

Це дійсно виконується коли $\|\boldsymbol{f}\|_2 \equiv \alpha \in \mathbb{R}$.

## Пункт 4.

**Умова.** Довести або спростувати, що

$$[\boldsymbol{f} \times \dot{\boldsymbol{f}}] \equiv \boldsymbol{\theta} \iff \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{f}(t) = \lambda(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

**Доведення.** Легше почати у бік $\Leftarrow$. Отже, дійсно нехай $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{\alpha}\lambda(t)$. В такому разі вираз для похідної має вид $\dot{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\alpha}\dot{\lambda}$. Отже маємо наступний вираз для векторного добутку:

$$[(\boldsymbol{\alpha}\lambda) \times (\boldsymbol{\alpha}\dot{\lambda})] = \lambda\dot{\lambda}[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\theta}$$

Розглянемо в інший бік $\Rightarrow$. За означенням:

$$\|\boldsymbol{f}\|_2\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}) \sin[\phi(\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}})] \equiv \boldsymbol{\theta}$$

Де $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}})$ це одиничний вектор, що перпендикулярний $\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}}$, а $\phi(\boldsymbol{f}, \dot{\boldsymbol{f}})$ це кут між цими векторами.

Проаналізуємо, коли ліва частина стає нульовим вектором. Якщо $\|\boldsymbol{f}\|_2 \equiv 0$, це означає, що $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{\theta}$ і тоді покладемо $\boldsymbol{\alpha} := \boldsymbol{\theta}$ і теорему виконано.

Якщо $\|\dot{\boldsymbol{f}}\| \equiv 0$, то це означає, що $\dot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{\theta}$. З пункту  випливає, що $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$. Це суперечить умові теореми, бо ми не зможемо знайти константу, що $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\lambda(t)$, тобто наприклад вектор $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ є контрприкладом.

### Пункт 5.

**Умова.** Довести або спростити

$$[\dot{\boldsymbol{f}} \times \ddot{\boldsymbol{f}}] \equiv \boldsymbol{\theta} \iff \exists \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{\alpha}\lambda(t) + \boldsymbol{\beta}$$

**Доведення**. Доведемо у бік $\Leftarrow$. Маємо $\dot{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\alpha}\dot{\lambda}$, $\ddot{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\alpha}\ddot{\lambda}$. Отже:

$$[(\boldsymbol{\alpha}\dot{\lambda}) \times (\boldsymbol{\alpha}\ddot{\lambda})] = \dot{\lambda}\ddot{\lambda}[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{\theta}$$

Перевіряємо у інший бік $\Rightarrow$. Аналогічно до минулого пункту, маємо

$$\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 \|\ddot{\boldsymbol{f}}\|_2 \cdot \boldsymbol{n}(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}}) \sin[\phi(\dot{\boldsymbol{f}}, \ddot{\boldsymbol{f}})] \equiv \boldsymbol{\theta}$$

Якщо $\|\dot{\boldsymbol{f}}\|_2 \equiv 0$, то $\dot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{\theta}$, звідки $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Звідси візьмемо $\boldsymbol{\alpha} := \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{v}$ і твердження виконується.

Якщо $\|\ddot{\boldsymbol{f}}\|_2 \equiv 0$, то $\ddot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{\theta}$. В такому разі $\dot{\boldsymbol{f}} \equiv \boldsymbol{v}$. Звідси $\boldsymbol{f} \equiv t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$, звідки ми не можемо знайти таке $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, що $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}\lambda(t) + \boldsymbol{\beta}$. Тому в якості контрприклада візьмемо $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -t \\ t+1 \end{bmatrix}$. Дійсно векторний добуток дорівнює 0, бо $\ddot{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\theta}$, але ми не можемо записати цей вектор через довільну функцію $\lambda(t)$.

## Завдання 4.1.

Маємо векторну функцію

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ a\sin\omega t \\ ht \end{bmatrix}$$

Перевіримо регулярність. Знайдемо, де похідна дорівнює $\boldsymbol{\theta}$:

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t) = \begin{bmatrix} -\omega a\sin\omega t \\ \omega a\cos\omega t \\ h \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}$$

Бачимо, що вона не може дорівнювати нулю, бо компонента $x^3$ ненульова константа $h$.

Проекція кривої на площину $x^1x^2$ дасть коло радіуса $a$ у початку координат.

$h$ регулює наскільки наша крива близька до прямої. При $h \to \infty$ наближається до прямої $[0, 0, t]^T$, а при $h = 0$ маємо коло.

## Завдання 4.2.

Матриці повороту $\mathbf{R}_{1,2}$ в площині $x^1x^2$ і $\mathbf{R}_{3,4}$ в площині $x^3x^4$ описуються наступним чином:

$$\mathbf{R}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_{3,4}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}$$

Композиція цих матриць дає нашу результуючу матрицю:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_{1,2}(t)\mathbf{R}_{3,4}(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}$$

Отже, шукана крива:

$$\boldsymbol{f}(t) = \mathbf{R}(t) \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0 \\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\alpha t \\ a\sin\alpha t \\ b\cos\beta t \\ b\sin\beta t \end{bmatrix}$$

Перевіримо регулярність. Для цього знайдемо похідну і прирівняємо до $\boldsymbol{\theta}$:

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} -\alpha a \sin \alpha t \\ \alpha a \cos \alpha t \\ -\beta b \sin \beta t \\ \beta b \cos \beta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Не має точок, що задовольняють цьому рівнянню, бо з нього випливає $\sin \alpha t = \cos \alpha t = \sin \beta t = \cos \beta t = 0$. Отже крива є регулярною.

Проекції на площинах $x^1 x^2$ та $x^3 x^4$ є колами радіуса $a$ та $b$ відповідно, де наша точка рухається зі швидкістю $\alpha, \beta$ відповідно.

Проаналізуємо періодичність функції. Для цього подивимось на ці 2 кола, які ми спроєктували на $x^1 x^2$ та $x^3 x^4$ і уявимо собі 2 точки на ціх колах. Період $T$ є мінімальним часом, через який ми отримаємо таку саму конфігурацію на цих колах. Для цього зафіксуємо одну з точок, тоді інша буде рухатись відносно неї з кутовою швидкістю $|\alpha - \beta|$. Їй потрібно пройти кут $2\pi$. Отже, період дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{|\alpha - \beta|}$$