Homework #8

Задача 1077.

Запишем уравнение гиперболического уравнение в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 2z$$

Пусть плоскость, которую мы должны построить, имеет вид:

$$\pi : Ax + By + Cz + \lambda = 0$$

В таком случае если она является касательной к кривой $\Phi(x, y, z)$ в точке $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, то вектор нормали плоскости:

$$\vec{n}(\vec{r}_0) = \nabla\Phi(\vec{r}_0) = \{\frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial z}\}$$

В данном конкретном случае:

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \{\frac{2x_0}{9}, -\frac{y_0}{2}, -2\}$$

Таким образом, наше уравнение плоскости имеет вид:

$$\pi : \frac{2x_0}{9}x - \frac{y_0}{2}y - 2z + \lambda = 0$$

Теперь нам нужно найти величины x_0, y_0, λ, а также попутно придётся найти и z_0. Для этого воспользуемся следующими условиями:

1. Точка (x_0, y_0, z_0) лежит на $\Phi(x, y, z)$.
2. Точка (x_0, y_0, z_0) лежит на искомой плоскости π.
3. Направляющий вектор прямой $\vec{l} = \{0, 2, -1\}$ перпендикулярен $\vec{n}$.
4. Точка прямой $(15, 0, 11)$ лежит на искомой плоскости π.

Начнём с третьего условия. Его можно переписать как $\langle\vec{l}, \vec{n}\rangle = 0$. Поэтому:

$$\langle\{2x_0/9, -y_0/2, -2\}, \{0, 2, -1\}\rangle = -y_0 + 2 = 0 \to y_0 = 2$$

Остальные 3 условия (первое, второе и четвёртое) запишем в виде системы уравнений (преобразования пропущу):

$$\begin{cases} x_0^2 = 9(1+2z_0) & (1) \\ \frac{2x_0^2}{9} - 2 - 2z_0 + \lambda = 0 & (2) \\ 10x_0 - 66 + 3\lambda = 0 & (4) \end{cases}$$

Имеем 3 уравнения с 3 неизвестными (x_0, z_0, λ). Находим решения: $(9, 4, -8), (21, 24, -48)$. Таким образом имеем 2 плоскости:

$$2x - y - 2z - 8 = 0,\ 14x - 3y - 6z - 144 = 0$$

Задача 1078.

Как и в задаче 1077, вектор нормали можно найти по формуле:

$$\vec{n}(\vec{r}_0) = \nabla\Phi(\vec{r}_0) = \{\frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi(\vec{r}_0)}{\partial z}\}$$

В нашем конкретно случае:

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) = \{4x_0 - 2y_0 - 4, 10y_0 - 2x_0 + 6z_0 - 1, 48 + 6y_0 - 2\}$$

Поэтому уравнение плоскости имеет вид:

$$\pi : (4x_0 - 2y_0 - 4)x + (10y_0 - 2x_0 + 6z_0 - 1)y + (48 + 6y_0 - 2)z + D = 0$$

Теперь запишем уравнение прямой в векторном виде:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Её напрямляющий вектор $\vec{l} = \{5, 4, 0\}$. Таким образом, $\langle \vec{n}(x_0, y_0, z_0), \vec{l} \rangle = 0$. Имеем:

$$2x_0 + 5y_0 + 4z_0 - 4 = 0,\ (1)$$

Далее запишем условие того, что точка $(0, 0, 1)$ на прямой принадлежит плоскости:

$$4z_0 + 6y_0 - 2 + D = 0,\ (2)$$

Теперь условие того, что $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$:

$$2x_0^2 + 5y_0^2 + 2z_0^2 - 2x_0y_0 + 6y_0z_0 - 4x_0 - y_0 - 2z_0 = 0,\ (3)$$

И наконец тот факт, что $(x_0, y_0, z_0) \in \pi$:

$$(4x_0 - 2y_0 - 4)x_0 + (10y_0 - 2x_0 + 6z_0 - 1)y_0 + (48 + 6y_0 - 2)z_0 + D = 0, \ (4)$$

Далее имеем 4 уравнения (1), (2), (3) и (4), а также 4 неизвестных относительно них: (x_0, y_0, z_0, D). Решив их, получим $(-11/3, -22/3, 12, -2)$ и $(1/3, 2/3, 0, -2)$. Оба ответа дают одно уравнение:

$$4x - 5y - 2z + 2 = 0$$

Задача 1086.

Горловой эллипс (а точнее, огружность) гиперболоида задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$, поэтому удобно параметризовать образующую через точку на гиперболоиде как $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 0$. Пусть направляющий вектор образующей $\vec{v} = \{v_x, v_y, \lambda\}$. В таком случае наша прямая задаётся уравнением:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Зададим теперь условие, что все точки на прямой принадлежат гиперболоиду $\Phi(\vec{r})$, т.е. $\Phi(\vec{r}) \equiv 0$. Имеем:

$$(\cos\theta + v_x t)^2 + (\sin\theta + v_y t)^2 - \frac{\lambda^2 t^2}{4} - 1 \equiv 0$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$t^2 \left(v_x^2 + v_y^2 - \frac{\lambda^2}{4} \right) + 2t(v_x \cos\theta + v_y \sin\theta) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Зададим $\lambda = 2$ и заметим, что коэффициенты перед t и t^2 должны быть одновременно 0, чтобы равенство выполнялось для любых t. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = 1 \\ v_x \cos\theta + v_y \sin\theta = 0 \end{cases}$$

Решив её относительно (v_x, v_y), получим 2 решения: $(-\sin\theta, \cos\theta)$ и $(\sin\theta, -\cos\theta)$. Таким образом имеем 2 варианта уравнения образующей:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Подставим условие, что точка $M(1,4,8) \in \vec{r}_1, \vec{r}_2$, откуда найдётся параметр θ для обоих прямых. Получим 2 прямые (опять же, рассчёты пропущу):

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -15/17 \\ 8/17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8/17 \\ 15/17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, нам нужно найти угол δ между направляющими векторами $\vec{l}_1 = \{0,1,2\}$ и $\vec{l}_2 = \{8/17, 15/17, 2\}$. Имеем:

$$\delta = \arccos \frac{\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle}{\|\vec{l}_1\| \|\vec{l}_2\|} = \arccos \frac{83}{85}$$

Задача 1090.

Сначала запишем уравнение плоскости. Пусть оно имеет вид:

$$x + By + Cz + D = 0$$

Направляющий вектор прямой $\vec{l} = \{4,3,0\}$ и он должен быть перпендикулярен вектору нормали плоскости $\vec{n} = \{1, B, C\}$, т.е. $\langle \vec{l}, \vec{n} \rangle = 0$. Отсюда получим $B = -4/3$. С другой стороны точка $(1,1,1)$ принадлежит плоскости, а поэтому $C + D = 1/3$. Ну и наконец точка на прямой $(0,0,0)$ также принадлежит плоскости, а поэтому $D = 0$. Отсюда имеем уравнение плоскости:

$$3x - 4y + z = 0$$

Её вектор нормали — $\vec{n} = \{3, -4, 1\}$. Найдём 2 других вектора $\vec{p}$, $\vec{q}$, перпендикулярных $\vec{n}$ и для удобности перпендикулярных между собой. Пусть $\vec{p} = \{4,3,0\}$, $\vec{q} = \{-3,4,25\}$. Таким образом, сделаем преобразование к координатам в аффинной системе координат $(O, \vec{p}, \vec{q})$, где $O(0,0,0)$ — точка на прямой и плоскости. Имеем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

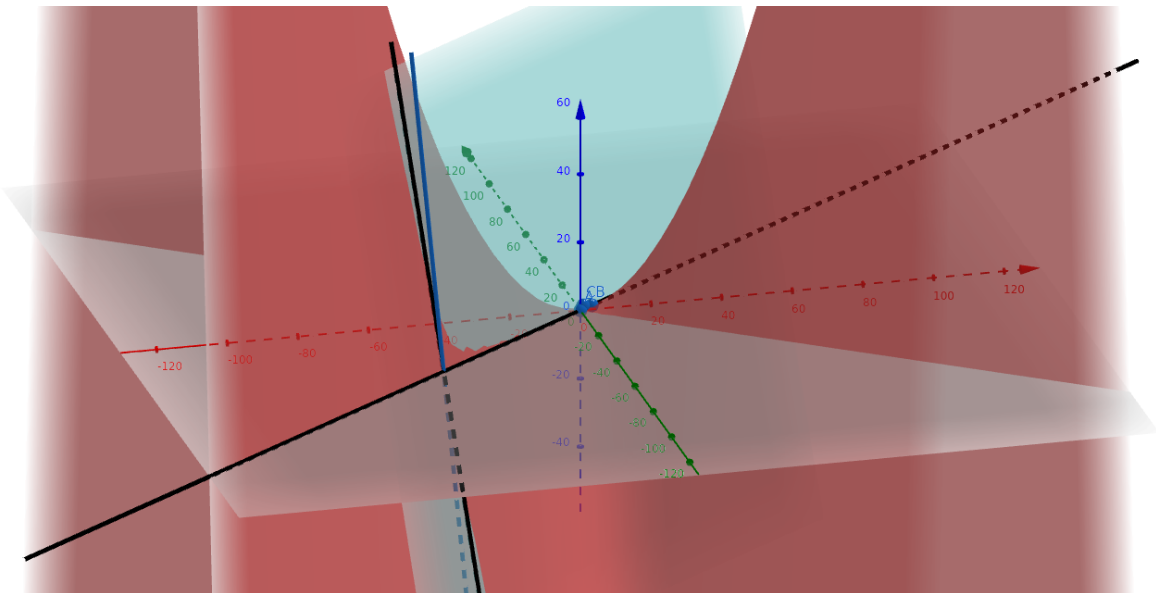
Или же $x = 4u - 3v, y = 3u + 4v, z = 25v$. Подставив это в уравнение параболоида и упростив выражение, получим:

$$v(12 + u) = 0$$

По своей сути это описывает пару прямых в базисе $(O, \vec{p}, \vec{q})$: $v = 0, u = -12$. Можно убедиться, что подстановка $v = 0$ даст нам уравнение уже заданной прямой. Поэтому рассмотрим прямую $u = -12$. Подставив $u = -12$ и сделав замену $v = t$, получим:

$$\begin{cases} x = -48 - 3t \\ y = -36 + 4t \\ z = 25t \end{cases}$$

Заметка 1: В ответе указана слегка другая прямая, однако я не до конца уверен, что он правилен. Я решил построить данную задачу в *GeoGebra* и мой ответ задаёт чёрную прямую, а ответ даёт синюю. И синяя слегка хуже налазит на кривую... Хотя возможно и я где-то допустил ошибку...



Заметка 2: похоже, что условие того, что прямая в условии является образующей, избыточное, однако не исключаю, что использование этого факта возможно упрощает решение. Есть ли решение проще?