Homework #4

Задание 1313.

По определению:

$$L = \{\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \mathbf{a}_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}\}$$

Пусть $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Тогда по сути нам нужно, чтобы следующая система уравнений имела решения для $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & x_4 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & x_5 \end{array}\right)$$

Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & x_4 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & x_5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_j - a_{j,1}R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & x_4 + x_1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_5 \times \frac{1}{2}]{R_2 \times \frac{1}{2}, R_3 \times (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{x_2 + x_1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & x_1 - x_3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & x_1 + x_4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{x_5 - x_1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_j - R_2, j=3,4,5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_5 - x_1}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} \end{array}\right)$$

Чтобы система имела решения, нужно, чтобы ранг расширенной матрицы и ранг начальной матрицы были одинаковыми. Это значит, что:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \\ x_1 + x_4 - \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \\ \frac{x_5 - x_1}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \end{cases}$$

Преобразовав это выражение, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Задание 1434.

Рассмотрим базисы $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. После поворота на угол θ координаты этих векторов станут $\hat{x}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ и $\hat{y}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, поэтому матрица перехода будет иметь вид $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (такую же матрицу можно получить, рассмотрев любую пару взаимноперпендикулярных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$). Таким образом, наш оператор:

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathcal{R}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

Покажем, что он действительно является линейным. По определению:

$$\mathcal{R}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{R}(\mathbf{y})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Итак, пусть $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Таким образом:

$$\mathcal{R}\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{R}\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta(\lambda x_1 + \mu y_1) - \sin\theta(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ \sin\theta(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cos\theta(\lambda x_2 + \mu y_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \lambda(x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta) + \mu(y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta) \\ \lambda(x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) + \mu(y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta) \end{pmatrix} =$$
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta \\ y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$\lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{R}(\mathbf{y})$$

Как видим, действительно $\mathcal{R}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{R}(\mathbf{y})$.

Задание 1448.

Имеем линейное преобразвание:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}$$

Ну, во-первых, это действительно функция $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, т.к. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, а поэтому справедливо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Теперь покажем, что это линейный оператор. Для этого нам нужно показать, что:

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Поэтому имеем:

$$\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = (\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mu \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle)\mathbf{a} =$$
$$(\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle)\mathbf{a} = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mu \mathcal{A}(\mathbf{y})$$

Действительно $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Найдём матрицу этого оператора в базисе $\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{A}(\hat{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{A}(\hat{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathcal{A}(\hat{x}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Поэтому наша матрица имеет вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Теперь найдём эту матрицу в базисе $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Для этого запишем сначала матрицу перехода из координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ к $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$:

$$T_{\mathbf{e}\to\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём обратную матрицу:

$$T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{b}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица линейного преобразования в базисе $\mathbf{b}_i$:

$$A_{\mathbf{b}} = T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{b}} A_{\mathbf{e}} T_{\mathbf{e}\to\mathbf{b}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 & -5/3 & 5 \\ -16/3 & 4/3 & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 1452.

Пункт А. Запишем матрицу перехода из начального базиса в данный нам:

$$T_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица $T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = T_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}}$. Поэтому матрица оператора в базисе $\mathbf{u}$:

$$A_{\mathbf{u}} = T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} A_{\mathbf{e}} T_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пункт Б. Снова-таки запишем матрицу перехода:

$$T_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица:

$$T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица оператора в базисе $\mathbf{u}$:

$$A_{\mathbf{u}} = T^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} A_{\mathbf{e}} T_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$