Контрольна робота #2 з Теорії Коливань

Захаров Дмитро

7 травня, 2025

1 Задача 1

Умова 1.1. Визначте асимптотично стійке положення рівноваги системи, яка описується заданим диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + 5\dot{x} - 0.5x^2 + 0.5 = 0$$

Розв'язання. Для початку, знайдемо точки рівноваги цієї системи. Для цього введемо нову змінну $y := \dot{x}$. Тоді, маємо:

$$\dot{y} + 5y - 0.5x^2 + 0.5 = 0 \implies \dot{y} = -5y + 0.5x^2 - 0.5$$

Таким чином, маємо наступне рівняння вигляду $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (x, y)^\top$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -5y + 0.5x^2 - 0.5 \end{cases}$$

Знайдемо, коли праві частини обох рівнянь дорівнюють нулю. Маємо $y = 0$, а з другого рівняння $x^2 = 1$. Отже, маємо дві точки рівноваги:

$$\mathbf{z}_1 = (1, 0)^\top, \quad \mathbf{z}_2 = (-1, 0)^\top$$

Треба з'ясувати, яка з них є асимптотично стійкою. Для цього нам потрібно знайти матрицю Якобі $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}$. Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & -5 \end{pmatrix}$$

На цьому етапі підставимо конкретні точки рівноваги $\mathbf{z}_1$ та $\mathbf{z}_2$. Якщо підставити $\mathbf{z}_1$, то отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння $-\lambda(-5-\lambda) - 1 = 0$ або $\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0$. Власні значення $\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25+4} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$. При цьому, одне значення є від'ємним, а інше додатнім. Отже, точка рівноваги $\mathbf{z}_1$ є сідлом, а отже не є асимптотично стійкою.

Аналогічно, підставляючи $\mathbf{z}_2$, отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння $-\lambda(-5-\lambda) + 1 = 0$ або $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$. Власні значення $\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{25-4} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$. При цьому, обидва значення є від'ємними. Отже, точка рівноваги $\mathbf{z}_2$ є асимптотично стійкою.

Відповідь. Асимптотично стійке положення рівноваги системи описується як $x = -1, \dot{x} = 0$.

2 Задача 2

Умова 2.1. Визначте типи точок спокою механічної системи, що описується заданим диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} = -x + \frac{1}{4}x^3 - \dot{x}$$

Розв'язання. Для початку, знайдемо точки рівноваги цієї системи. Для цього введемо нову змінну $y := \dot{x}$. Тоді, маємо:

$$\dot{y} = -x + \frac{1}{4}x^3 - y$$

Таким чином, маємо наступне рівняння вигляду $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (x, y)^\top$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{4}x^3 - y \end{cases}$$

Знайдемо, коли праві частини обох рівнянь дорівнюють нулю. Маємо $y = 0$, а з другого рівняння $-x + \frac{1}{4}x^3 = 0$. Корені цього рівняння є $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Тепер лінеаризуємо праву частину системи біля знайдених точок рівноваги. Для цього нам потрібно знайти матрицю Якобі $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}$. Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{3}{4}x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, підставляючи конкретні точки рівноваги x_1, x_2 та x_3, знайдемо матрицю Якобі для кожної з них.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}_3)$$

Знайдемо власні значення матриці Якобі для кожної з точок рівноваги. Для першої маємо характеристичне рівняння $-\lambda(-1-\lambda) + 1 = 0$ або $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Власні значення $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Таке значення є комплексним з від'ємною дійсною частиною. Отже, точка рівноваги $\mathbf{z}_1$ є стійким фокусом.

Для другої точки рівноваги маємо характеристичне рівняння $-\lambda(-1-\lambda) - 2 = 0$ або $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Одне з значень є додатнім, а інше від'ємним. Отже, точка рівноваги $\mathbf{z}_2$ є сідлом.

Відповідь. Точка рівноваги $(0, 0)$ є стійким фокусом, а точки $(\pm 2, 0)$ є сідлом. Зокрема, це підтверджується фазовими портретом, що ми зобразили на малюнку 1.

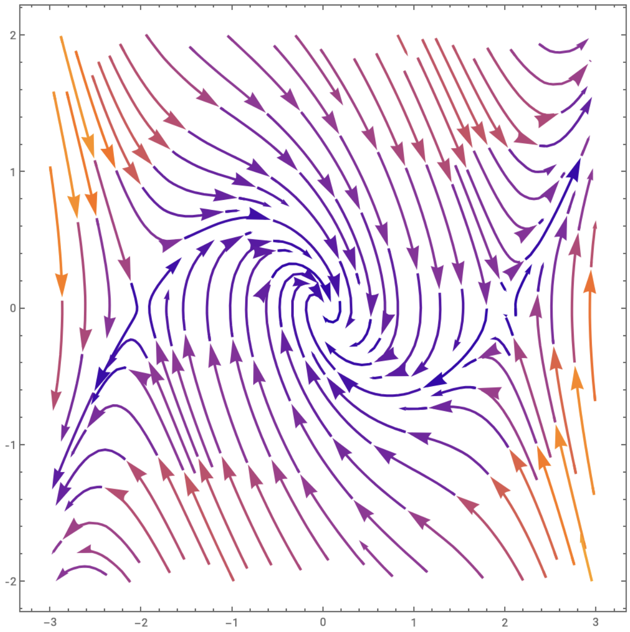


Рис. 1: Фазовий портрет системи з задачі 2

3 Задача 3

Умова 3.1. Побудувати фазові портрети нелінійних систем, використовуючи метод лінеаризації в околі особливих точок:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1 \\ \dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2} \end{cases}$$

Розв'язання. Для початку, знайдемо точки рівноваги цієї системи. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + \sqrt{1 + 2x^2} = 0 \end{cases}$$

Віднімемо від другого перше, тоді матимемо $\sqrt{1 + 2x^2} = 1 + x$. Возведемо обидві частини до квадрату, матимемо $2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$, звідки $x^2 - 2x = 0$, а отже коренями є $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Видно, що обидва корені дійсно підходять. Відповідні точки мають координати $(0, -1)$, $(2, -3)$.

Тепер лінеаризуємо праву частину системи біля знайдених точок рівноваги. Для цього нам потрібно знайти матрицю Якобі $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}$. Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x/\sqrt{1+2x^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, підставляючи конкретні точки рівноваги x_1 та x_2, знайдемо матрицю Якобі для кожної з них.

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x_2,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння для першої матриці $(1-\lambda)^2 = 0$ або $\lambda_1 = 1$ кратності два. Тут доволі складно визначити тип точки, тому проведемо наступний аналіз: по суті, біля цієї точки система є лінійною, причому виду $\dot{x} = x + y$ та $\dot{y} = y$. Розв'язок другого рівняння $y(t) = Ae^t$, підставляючи у перше маємо $\dot{x} = x + Ae^t$, звідки $x(t) = Ate^t + Be^t$. Щоб отримати краще уявлення про криву, помітимо, що $t = \ln \frac{y}{A}$ і підставляючи у друге рівняння, маємо $x = y \ln \frac{y}{A} + \frac{B}{A} y$ або $x = y(\ln ay + b)$. Приблизно це сімейство зображено нижче:

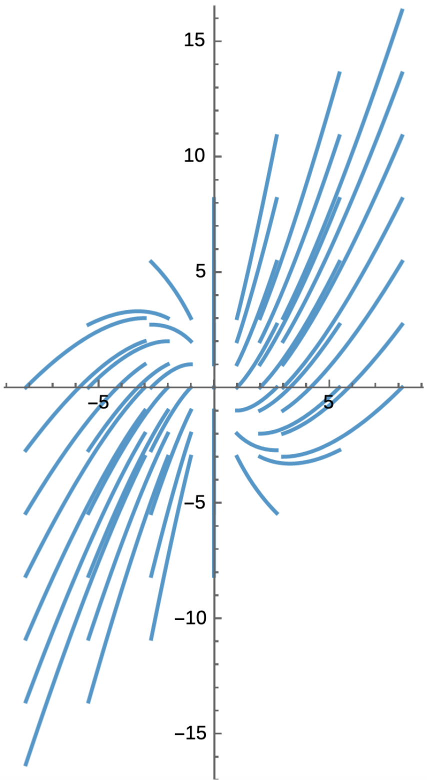


Рис. 2: Приблизний фазовий портрет в околі точки $(0,-1)$

Для другої матриці характеристичне рівняння $(1-\lambda)^2 - \frac{4}{3} = 0$ або $\lambda_1 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\lambda_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$. Оскільки одне значення є додатнім, а інше від'ємним, то точка $(2, -3)$ є сідлом.

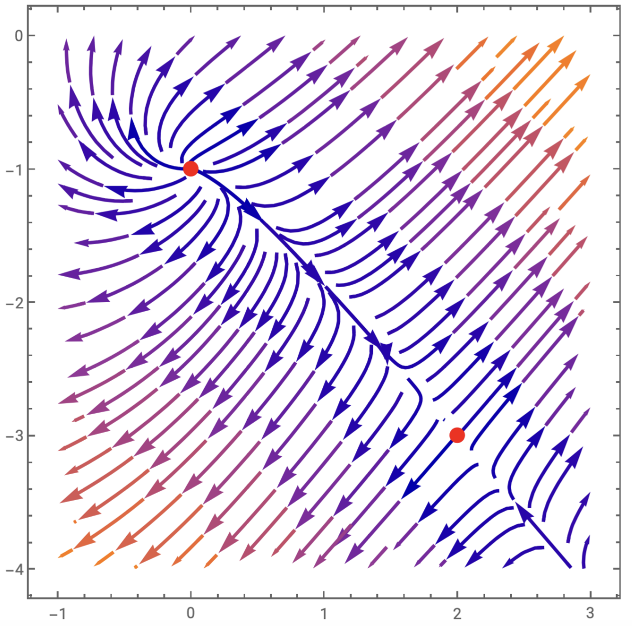


Рис. 3: Фазовий портрет системи з задачі 3

4 Задача 4

Умова 4.1. Побудуйте ескізи усіх можливих типів фазових портретів даної системи з параметром, якщо $\mu \in \mathbb{R}$. Тут r, θ — полярні координати.

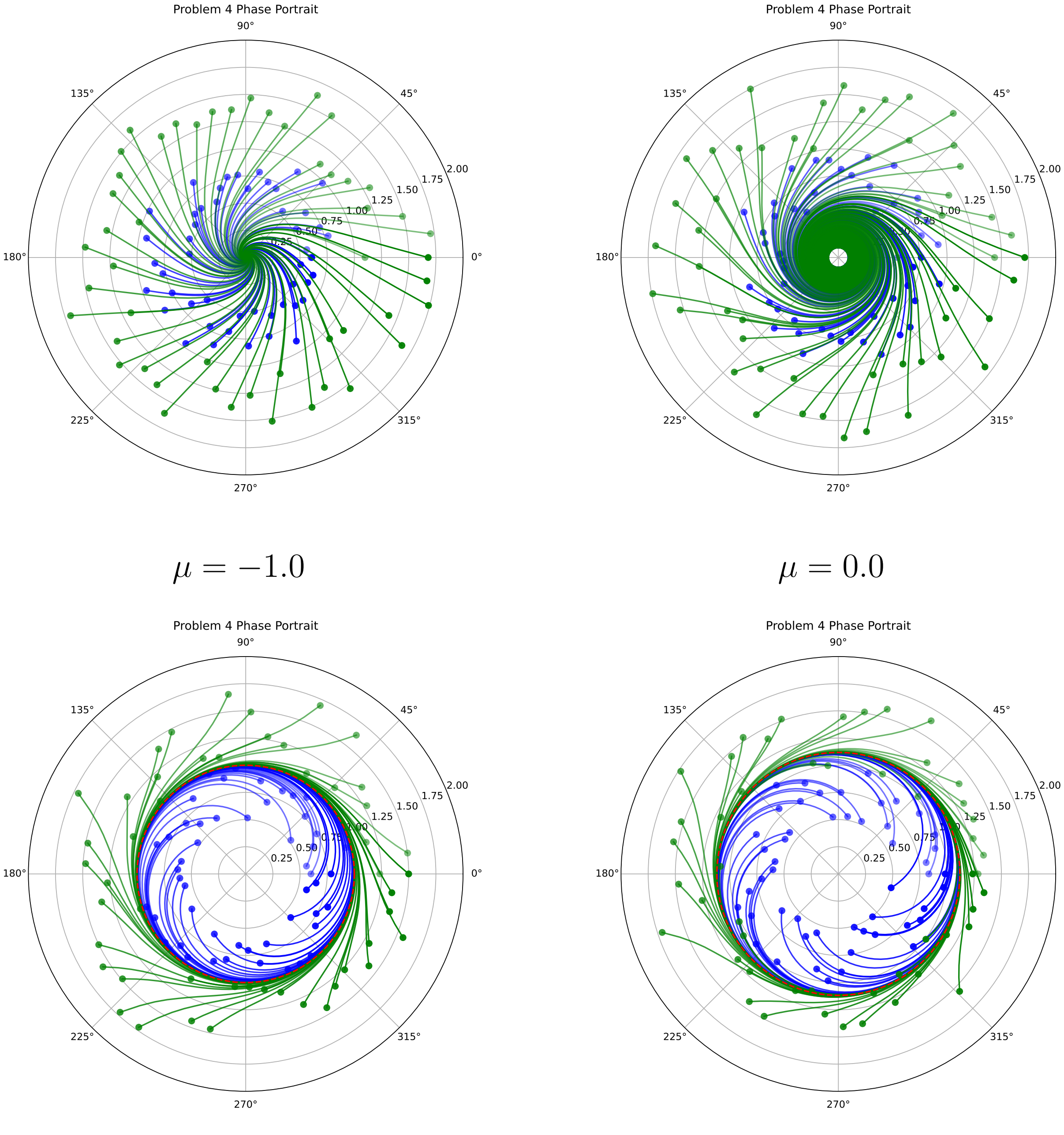
$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$$

Розв'язання. Логічно розглянути два випадки: $\mu > 0$ та $\mu < 0$. При $\mu > 0$ маємо наступний вид рівняння:

$$\dot{r} = r(\sqrt{\mu} - r)(\sqrt{\mu} + r), \quad \dot{\theta} = 1$$

Видно, що при цьому ми маємо лише один граничний цикл $r = \sqrt{\mu}$, а також точку спокою в початку координат. Проаналізуємо їх на стійкість. Якщо взяти точку з $0 < r_0 < \sqrt{\mu}$, то вираз для похідної $\dot{r} > 0$, а отже точка буде наближатись до граничного циклу $r = \sqrt{\mu}$. Якщо при цьому початкова точка буде поза кола радіусу $\sqrt{\mu}$, то $\dot{r} < 0$, а отже точка також буде наближатись до граничного циклу $r = \sqrt{\mu}$. Звичайно, що при цьому точка в початку координат є нестійкою.

При переході через нуль відбувається явище біфуркації. Бачимо, що маємо єдину точку спокою в початку координат, яка є стійкою: дійсно, вираз $\dot{r} = r(\mu - r^2)$ є завжди від'ємним, бо $r > 0$, а $\mu - r^2 < 0$. Таким чином, маємо наступні портрети для $\mu > 0$ та $\mu < 0$, що зображені на малюнку 4.



$\mu = -1.0$ $\mu = 0.0$

$\mu = 1.0$ $\mu = 1.25$

Рис. 4: Фазовий портрет для задачі 4 для різних значень μ.