Homework #7

Задача 996.

Т.к. параболоид находится в первом октанте, то вершина параболы $V(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет условию $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$. Более того, раз плоскость Oxy пересекает параболоид, причём ещё и по окружности, из этого можно сделать ещё целых два вывода: ось вращения парабоида параллельна оси Oz и направлена она противоположно вектору $\hat{z} = \{0, 0, 1\}$. Таким образом, уравнение параболоида можно записать в виде:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -2p(z - z_0)$$

Пересечём параболоид по плоскости $z = 0$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2pz_0$$

Действительно получили окружность в центре $N(x_0, y_0)$ радиуса $\sqrt{2pz_0}$. По условию эта окружность касается Ox, Oy, то нетрудно понять, что центр окружности имеет координаты $N(3, 3)$. Кроме этого, $\sqrt{2pz_0} = 3$ или же $\sqrt{12z_0} = 3$. Отсюда $z_0 = \frac{3}{4}$. Таким образом, имеем уравнение:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = -12\left(z - \frac{3}{4}\right)$$

Или же:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 12z = 0$$

Задача 1003.

Подставим $x = 9$. Получим:

$$\frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = -8$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

Таким образом, наша плоскость обрезает гиперболоид по гиперболе, у которой действительная полуось равна 4, а мнимая — 8.

Задача 1009.

Вектор нормали данной нам плоскости: $\vec{n} = \{2, 3, 0\}$. Выберем 2 вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, которые будут перпендикулярны $\vec{n}$ (и для удобности между собой). Например, пусть:

$$\vec{p} = \{0, 0, 1\}, \ \vec{q} = \{-3, 2, 0\}$$

Кроме этого видим, что плоскость проходит через точку $\widetilde{O}(0, 2, 0)$. Таким образом, сделаем переход в аффинную систему координат $(\widetilde{O}, \vec{p}, \vec{q})$, используя уравнение плоскости $\vec{r} = \vec{r}_{\widetilde{O}} + v\vec{p} + u\vec{q}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Или же:

$$\begin{cases} x = -3u \\ y = 2 + 2u \\ z = v \end{cases}$$

Подставим это в уравнение гиперболического параболоида. После некоторых манипуляций, получим:

$$2u + 2v + 1 = 0$$

Что является уравнением прямой. Перейдём обратно к уравнению в координатах (x, y, z). Заметим, что $u = \frac{1}{2} - v$, а поэтому:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 3v \\ y = 3 - 2v \\ z = v \end{cases}$$

Задача 1014.

Запишем уравнение эллипитического параболоида в следующем виде:

$$\frac{(x-2)^2}{\alpha} + \frac{(y-3)^2}{\beta} = -(z-6)$$

Знак минус в правой части выражения был выбран по соображениям, уже ранее описанным в задаче 996.

Пересечём параболоид плоскостью $z = 0$. Получим:

$$\frac{(x-2)^2}{\alpha} + \frac{(y-3)^2}{\beta} = 6$$

Поделим обе части на 6 и получим эллипс:

$$\frac{(x-2)^2}{6\alpha} + \frac{(y-3)^2}{6\beta} = 1$$

Раз эллипс касается осей Ox, Oy, то можем найти и полуоси:

$$\sqrt{6\alpha} = 2 \to \alpha = \frac{2}{3},\ \sqrt{6\beta} = 3 \to \beta = \frac{3}{2}$$

Таким образом, уравнение параболоида:

$$\frac{(x-2)^2}{2/3} + \frac{(y-3)^2}{3/2} = 6 - z$$