Домашня робота з курсу "Теоретична механіка"

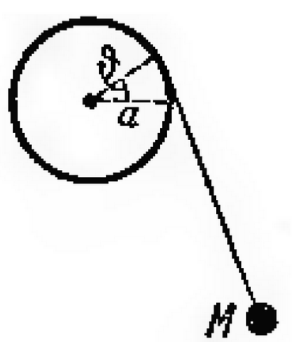
Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

7 грудня 2023 р.

Завдання 48.13

Умова. Див. рис. 1.

(48.13) Скласти диференціальне рівняння руху маятника, показаного на рисунку. Маятник складається з точкового вантажу, який прикріплений до нитки, що обмотана навколо нерухомого кругового циліндру з радіусом ***a*** . Довжина частини нитки, яка звисає вертикально у положенні рівноваги, дорівнює ***l*** .



$$(l + a\vartheta)\ddot{\vartheta} + a\dot{\vartheta}^2 + g\sin\vartheta = 0,$$

Рис. 1: Умова до завдання

Розв'язок. Запишемо Лагранжиан нашої системи, вважаючи кут θ від вертикалі праворуч головною координатою.

Швидкість кульки дорівнює $(\ell - \theta a)\dot{\theta}$ (оскільки довжина частини, що висить, дорівнює $\ell - \theta a$, котру ми далі множиму на кутову швидкість $\dot{\theta}$).

Тепер розберемося з потенціальною енергією. За нульовий рівень обираємо положення рівноваги. Коли ми відвели шарик на кут θ, то довжина частини, що залишилась, стала $\ell - \theta a$. Також ця величина множиться на $\cos\theta$, щоб знайти саме проекцію на висоту. Плюс до цього, точка відвіса зрушилася на $a\theta$ по колу, а в проекції на $a\sin\theta$ Таким чином, потенціальна енергія:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= mg(a\sin\theta + (\ell - \theta a)\cos\theta) - mg\ell \\ &= mg\left[a(\sin\theta - \theta\cos\theta) + \ell(\cos\theta - 1)\right] \end{aligned}$$

Отже, маємо наступний Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{m(\ell - \theta a)^2\dot{\theta}^2}{2} - mg\left[(\ell - \theta a)\cos\theta + a\sin\theta - \ell\right]$$

Запишемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Отже, знаходимо похідні:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell - \theta a)^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(\ell - \theta a)^2\ddot{\theta} - 2ma\dot{\theta}^2(\ell - \theta a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -ma\dot{\theta}^2(\ell - \theta a) - mga\cos\theta + mg\sin\theta(\ell - \theta a) + mga\cos\theta$$

Якщо спростити:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(\ell - \theta a)\left[(\ell - \theta a)\ddot{\theta} - 2a\dot{\theta}^2\right], \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m(\ell - \theta a)(g\sin\theta - a\dot{\theta}^2)$$

Оскільки $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$, то отримуємо

$$(\ell - \theta a)\ddot{\theta} - 2a\dot{\theta}^2 = g\sin\theta - a\dot{\theta}^2 \implies \boxed{(\ell - \theta a)\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2 - g\sin\theta = 0}$$

Завдання 18.6

Розв'язок. Праву частину рівняння ми з вами вивели. Виведемо ліву.

Нехай φ – це кут, на який повернувся коток 1. Тоді його кінетичну енергію можна записати як $T_1 = \frac{I_1\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_1R_1^2\dot{\varphi}^2}{4}$. Потенціальна енергія з часом не змінюється, тому вираз для неї записувати не будемо.

Лінійна швидкість руху мотузки в точці дотику з першим катком $R_1\dot{\varphi}$. Вона така сама для другого катка, тому кутова швидкість другого катка $\dot{\psi} = \frac{R_1\dot{\varphi}}{2R_2}$. У нього вже як кінетична, так і потенціальна енергії змінюються.

Кінетична енергія, на відміну від першого катку, складається з обертальної та поступальної компонент, тобто

$$T_2 = \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I_2\dot{\psi}^2}{2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{R_1\dot{\varphi}}{2}\right)^2 + \frac{m_2R_2^2}{4}\cdot\left(\frac{R_1\dot{\varphi}}{2R_2}\right)^2 = \frac{3m_2R_1^2\dot{\varphi}^2}{16}$$

Потенціальна ж енергія змінилася на $m_2g\Delta h$. Для зміни висоти помітимо, що каток пройшов відстань ψR_2, а отже зміна висоти $\Delta h = \psi R_2\sin\alpha = \frac{R_1\varphi}{2R_2}\cdot R_2\sin\alpha = \frac{R_1\varphi\sin\alpha}{2}$. Отже, загальний Лагранжиан системи:

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi}) = T_1 + T_2 - V_2 = \frac{m_1R_1^2\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{3m_2R_2^2\dot{\varphi}^2}{16} - \frac{m_2gR_1\varphi\sin\alpha}{2}$$

Записуємо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = M$$

Знаходимо похідні:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m_1R_1^2\dot{\varphi}}{2} + \frac{3m_2R_1^2\dot{\varphi}}{8} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{m_1R_1^2\ddot{\varphi}}{2} + \frac{3m_2R_1^2\ddot{\varphi}}{8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -\frac{m_2gR_1\sin\alpha}{2}$$

Таким чином:

$$\frac{m_1R_1^2\ddot{\varphi}}{2} + \frac{3m_2R_1^2\ddot{\varphi}}{8} + \frac{m_2gR_1\sin\alpha}{2} = M$$