Контрольна Робота з Еволюційних Систем #2

Захаров Дмитро

15 листопада, 2024

Варіант 5

Зміст

1 Завдання

Умова Задачі 1.1. Дано диференціально-алгебраїчне рівняння

$$\boldsymbol{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \boldsymbol{B}\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$$

де $\boldsymbol{f}(t) = e^t \cdot \mathbf{1}_3$. Потрібно:

(А) Показати, що характеристичний жмуток матриць $\lambda\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ є регулярним і знайти його індекс.

(Б) Обчислити спектральні проектори $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ жмутка матриць $\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ та побудувати характеристичну матрицю $\boldsymbol{G}$, знайти матриці $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}$ та матрицю $e^{\boldsymbol{S}t}$.

(В) Описати множину припустимих початкових даних $\mathbf{x}_0$, за яких початкова задача $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ для диференціально-алгебраїчного рівняння має єдиний розв'язок. Навести конкретний приклад такого $\mathbf{x}_0$.

Матриці $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ наступні:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.1 Пункт (А)

Для перевірки регулярності, обчислимо $\det(\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B})$. Маємо:

$$\det(\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B}) = \begin{bmatrix} 2-2\mu & 1-2\mu & -\mu \\ 1+\mu & -\mu & 1 \\ 1 & 1-\mu & -1+2\mu \end{bmatrix} = 9\mu^2(-1+\mu)$$

Отже, жмуток є регулярним та має єдине власне значення $\lambda_0 = 1$. Далі знаходимо

$$\boldsymbol{R}_0(\mu) = (\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{9\mu^2(\mu-1)} \begin{bmatrix} -1+2\mu-2\mu^2 & 1-5\mu+5\mu^2 & 1-2\mu-\mu^2 \\ 2-\mu-2\mu^2 & -2+7\mu-4\mu^2 & -2+\mu-\mu^2 \\ 1+\mu-\mu^2 & -1+2\mu-2\mu^2 & -1-\mu+4\mu^2 \end{bmatrix}$$

Індекс $\operatorname{ind}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ жмутка матриць $\lambda\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ це порядок полюса за $\mu = 0$ матричної функції $\boldsymbol{R}_0(\mu)$. Отже, потрібно подивитися на кожен елемент $\boldsymbol{R}_0(\mu)$ та знайти його індекс. Бачимо, що для знаменника $\mu = 0$ є коренем другого порядку, а отже максимальний можливий індекс — це 2. Отже, достатньо знайти будь-який елемент матриці $\boldsymbol{R}_0(\mu)$, де відповідний чисельник не дорівнює нулю. Наприклад, перший елемент підходить:

$$\operatorname{ind}\left(\frac{-1+2\mu-2\mu^2}{9\mu^2(\mu-1)}\right) = 2$$

Таким чином, жмуток є регулярним і має індекс 2.

1.2 Пункт (Б)

Спектральні проектори $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ та характеристична матриця $\boldsymbol{G}$ жмутка матриць $\lambda\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ обчислюються як:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_2 &= \operatorname{Res}_{\mu=0}\boldsymbol{R}_0(\mu)\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{P}_1 &= \boldsymbol{E}_{3\times3} - \boldsymbol{P}_2 \\
\boldsymbol{Q}_2 &= \operatorname{Res}_{\mu=0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_0(\mu) \\
\boldsymbol{Q}_1 &= \boldsymbol{E}_{3\times3} - \boldsymbol{Q}_2 \\
\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2
\end{aligned}$$

Отже, починаємо обраховувати поступово:

$$\boldsymbol{R}_0(\mu)\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1-3\mu+3\mu^2}{3\mu^2(\mu-1)} & \frac{1}{3\mu(\mu-1)} & \frac{1-2\mu}{3\mu^2(\mu-1)} \\ \frac{-2+3\mu}{3\mu^2(\mu-1)} & \frac{2-3\mu}{3\mu(1-\mu)} & \frac{-2+\mu}{3\mu^2(\mu-1)} \\ \frac{1}{3\mu^2(1-\mu)} & \frac{1}{3\mu(1-\mu)} & \frac{1+\mu-3\mu^2}{3\mu^2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

Тепер обраховуємо лишки:

$$\boldsymbol{P}_2 = \operatorname{Res}_{\mu=0}\boldsymbol{R}_0(\mu)\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Не будемо детально розписувати, як обраховується лишок у кожного елемента, але покажемо це на прикладі елемента на позиції $(1, 1)$. Отже, маємо обрахувати

$$\operatorname{Res}_{\mu=0}\frac{1-3\mu+3\mu^2}{3\mu^2(\mu-1)} = \lim_{\mu\to0}\frac{d}{d\mu}\left(\mu^2\cdot\frac{1-3\mu+3\mu^2}{3\mu^2(\mu-1)}\right) = \lim_{\mu\to0}\frac{2-6\mu+3\mu^2}{3(\mu-1)^2} = \frac{2}{3}$$

Далі, рахуємо матрицю $\boldsymbol{P}_1$:

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E}_{3\times3} - \boldsymbol{P}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Наступним кроком рахуємо $\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_0(\mu)$:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_0(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{1+\mu-3\mu^2}{3\mu^2(1-\mu)} & \frac{1-2\mu}{3\mu^2(\mu-1)} & \frac{1+\mu}{3\mu^2(\mu-1)} \\ \frac{1}{3\mu^2} & \frac{-1+3\mu}{3\mu^2} & -\frac{1}{3\mu^2} \\ \frac{1}{3\mu(\mu-1)} & \frac{1}{3\mu(1-\mu)} & \frac{1-3\mu}{3\mu(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

Тепер обраховуємо лишки і матриці $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$:

$$\boldsymbol{Q}_2 = \operatorname{Res}_{\mu=0}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_0(\mu) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{E}_{3\times3} - \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Нарешті, характеристична матриця:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Згідно умові, знайдемо матриці $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Нарешті, залишається лише знайти $e^{\boldsymbol{S}t}$. Для цього знайдемо власні числа матриці $\boldsymbol{S}$, знайшовши характеристичний поліном:

$$\chi_S(\lambda) = \det(\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{E}_{3\times3}) = \lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(1-\lambda)$$

Отже, маємо власне число $\lambda_{1,2} = 0$ кратності 2 та $\lambda_3 = 1$ кратності 1. Отже, далі знаходимо відповідні власні вектори з рівняння $\boldsymbol{S}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ маємо $v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Це відповідає множині векторів:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\beta$$

Тому, оберемо наступні власні вектори:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тепер те саме, але для власного значення $\lambda_3 = 1$:

$$(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}_{3\times3})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Відповідна система рівнянь:

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}$$

Якщо вибрати $v_1 := \gamma$, то отримаємо $v_2 = \gamma$, $v_3 = -\gamma$. Тому, в якості третього власного вектора обираємо:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Таким чином, матриця $\boldsymbol{S}$ є діагоналізованою, а саме:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{0,0,1\}.$$

Таким чином, експоненту можна знайти наступним чином:

$$e^{\boldsymbol{S}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{S}^k t}{k!} = \boldsymbol{U}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right)\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2+e^t) & \frac{1}{3}(-1+e^t) & \frac{1}{3}(1-e^t) \\ \frac{1}{3}(-1+e^t) & \frac{1}{3}(2+e^t) & \frac{1}{3}(1-e^t) \\ \frac{1}{3}(1-e^t) & \frac{1}{3}(1-e^t) & \frac{1}{3}(2+e^t) \end{bmatrix}$$

1.3 Пункт (B)

Бачимо, що $\boldsymbol{F}^2 = \boldsymbol{O}_{3\times 3}$, а тому її індекс нільпотентності дорівнює $r = 2$. Згідно теоремі з лекції, умова узгодження на початковий вектор $\mathbf{x}_0$ має вигляд:

$$\boldsymbol{P}_2\mathbf{x}_0 = \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}(\boldsymbol{F}^j\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2 f(t))\Big|_{t=0}$$

В нашому конкретному випадку, вона запишеться як:

$$\boldsymbol{P}_2\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2 f(0) - \frac{d}{dt}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2 f(t))\Big|_{t=0}$$

Тому обчислюємо усі вирази:

$$\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2 f(0) = \begin{bmatrix} 4/9 \\ -5/9 \\ -1/9 \end{bmatrix}$$
$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{Q}_2 f(t))\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -2/9 \\ -1/9 \end{bmatrix}$$

Таким чином,

$$\boldsymbol{P}_2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Нехай $\mathbf{x}_0 = (v, u, w)$. Тоді, умова на $\mathbf{x}_0$ має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v - u + w = 1 \\ -v + 2u + w = -1 \\ v + u + 2w = 0 \end{cases}$$

Звідси отримуємо: $u = -\frac{2}{3} + v$, $w = \frac{1}{3} - v$. Отже, якщо ввести параметр α, то множину $\mathbf{x}_0$ можна описати як:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\alpha$$

Прикладом може слугувати вектор $\mathbf{x}_0 = (0, -2/3, 1/3)$. Більш конкретно, розв'язком задачі буде:

$$x(t) = \frac{1}{9}e^t(2t + 9\alpha), \quad y(t) = \frac{1}{9}e^t(-6 + 2t + 9\alpha), \quad z(t) = -\frac{1}{9}e^t(-3 + 2t + 9\alpha).$$