Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #3

Захаров Дмитро

19 квітня, 2025

Зміст

1 Домашня Робота

1.1 Вправа 1 (Таблиця 1, Клітинка 8)

Умова Задачі 1.1. За власних функцій отримати ці функції і власні значення. Довести, що вони ортогональні, обчислити норми. Крайові умови $u'(\ell,t)=0$, $u'(0,t)-\gamma u(0,t)=0$.

$$\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{\ell}\right)^2, \quad \mu_n\tan\mu_n=\gamma\ell, \quad n\in\mathbb{N}$$
$$e_n=\left(\mu_n\cos\frac{\mu_n x}{\ell}+\gamma\ell\sin\frac{\mu_n x}{\ell}\right)\sqrt{\frac{2}{\ell}\cdot\frac{1}{\mu_n^2+(\gamma\ell)^2+\gamma\ell}}$$

Розв'язання. Маємо рівняння $Y_n''+\lambda_nY_n=0$ з наступними початковими умовами, згідно умові: $Y_n'(\ell)=0$ та $Y_n'(0)-\gamma Y_n(0)=0$.

Випадок $\lambda_n=0$. В такому разі маємо $Y_n''=0$, звідки $Y_n(x)=A_nx+B_n$. Підставлямо умови: $Y_n'(\ell)=A_n=0$, а друга умова має вигляд $A_n-\gamma B_n=0$, звідки $B_n=0$ (оскільки вважаємо $\gamma\neq 0$). Отже, таким чином $A_n=B_n=0$ і тому $Y_n(x)\equiv 0$.

Випадок $\lambda_n<0$. В такому разі, розв'язки рівняння можна записати як:

$$Y_n(x)=A_ne^{\sqrt{-\lambda_n}x}+B_ne^{-\sqrt{-\lambda_n}x}$$

Отже, маємо наступну систему рівнянь для знаходження A_n, B_n:

$$\begin{cases}A_n\sqrt{-\lambda_n}e^{\sqrt{-\lambda_n}\ell}-B_n\sqrt{-\lambda_n}e^{-\sqrt{-\lambda_n}\ell}=0\\ A_n\sqrt{-\lambda_n}-B_n\sqrt{-\lambda_n}-\gamma(A_n+B_n)=0\end{cases}$$

З першого рівняння $B_n=A_ne^{2\sqrt{-\lambda_n}\ell}$. Підставляючи у друге, маємо $A_n\sqrt{-\lambda_n}(1-e^{2\sqrt{-\lambda_n}\ell})-\gamma A_n(1+e^{2\sqrt{-\lambda_n}\ell})=0$ або $\left(\sqrt{-\lambda_n}(1-e^{2\sqrt{-\lambda_n}\ell})-\gamma(1+e^{2\sqrt{-\lambda_n}\ell})\right)A_n=0$. Зрозуміло, що звідси випливає $A_n=0$, а отже і $B_n=0$. Таким чином, $Y(x)\equiv 0$.

Випадок $\lambda>0$. Цей випадок найцікавіший. Розв'язок рівняння:

$$Y_n(x)=A_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+B_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right).$$

Підставляючи крайові умови, маємо:

$$\begin{aligned}-A_n\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ell\right)+B_n\sqrt{\lambda_n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ell\right)&=0\\ B_n\sqrt{\lambda_n}-\gamma A_n&=0\end{aligned}$$

Обидва рівняння за умови $\lambda_n\neq 0$ (інакше дивись випадок 1) можна записати як:

$$\frac{B_n}{A_n}=\tan\left(\sqrt{\lambda_n}\ell\right)=\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Позначимо $\lambda_n:=(\mu_n/\ell)^2$. З другої рівності в такому разі маємо:

$$\tan\mu_n=\frac{\gamma\ell}{\mu_n}\implies\mu_n\tan\mu_n=\gamma\ell.$$

Таким чином, наш розв'язок має вигляд:

$$Y_n(x) = A_n \left(\cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \frac{\gamma \ell}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n x}{\ell} \right) = A_n \left(\cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \tan \mu_n \sin \frac{\mu_n x}{\ell} \right).$$

Спростимо цей вираз, залишивши тільки косинус. Для цього помітимо, що:

$$\cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \tan \mu_n \sin \frac{\mu_n x}{\ell} = \sqrt{1 + \tan^2 \mu_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \mu_n}} \cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \frac{\tan \mu_n}{\sqrt{1 + \tan^2 \mu_n}} \sin \frac{\mu_n x}{\ell} \right).$$

Позначимо через $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \mu_n}}$, $\sin \varphi = \frac{\tan \mu_n}{\sqrt{1+\tan^2 \mu_n}}$, тоді:

$$\cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \tan \mu_n \sin \frac{\mu_n x}{\ell} = \frac{1}{\sin \mu_n} \left(\cos \varphi \cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \sin \varphi \sin \frac{\mu_n x}{\ell} \right) = \frac{1}{\sin \mu_n} \cos \left(\frac{\mu_n x}{\ell} - \varphi \right).$$

Тепер помітимо, що $\tan \varphi = \tan \mu_n$, тому $\varphi = \mu_n$, звідки

$$Y_n(x) = A_n \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \ell^2}{\mu_n^2}} \cos \left(\frac{\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right)$$

Щоб знайти A_n, потрібно скористатися умовою $\|Y_n\|^2 = 1$. Обраховуємо:

$$\|Y_n\|^2 = \langle Y_n, Y_n \rangle = \int_0^\ell Y_n^2(x) dx = A_n^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 \ell^2}{\mu_n^2} \right) \int_0^\ell \cos^2 \left(\frac{\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right) dx$$

Знаходимо інтеграл $\mathcal{I}_n := \int_0^\ell \cos^2 \left(\frac{\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right) dx$. Згадаємо, що $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, тому:

$$\mathcal{I}_n = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(1 + \cos \left(\frac{2\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right) \right) dx = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\ell \cos \left(\frac{2\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right) dx$$

Зробимо заміну $\theta := \frac{2\mu_n}{\ell}(x - \ell)$. Тоді, оскільки $dx = \frac{\ell}{2\mu_n} d\theta$, маємо:

$$\int_0^\ell \cos \left(\frac{2\mu_n}{\ell} (x - \ell) \right) dx = \int_{-2\mu_n}^0 \cos \theta \cdot \frac{\ell}{2\mu_n} d\theta = \frac{\ell}{2\mu_n} \sin \theta \Big|_{\theta = -2\mu_n}^{\theta = 0} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\sin 2\mu_n}{\mu_n}$$

Таким чином, $\mathcal{I}_n = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} \cdot \frac{\sin 2\mu_n}{\mu_n} = \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) \frac{\ell}{2}$ і тоді:

$$\frac{1}{2} \ell A_n^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 \ell^2}{\mu_n^2} \right) \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right) = 1$$

Отже, всього-навсього залишилось виразити $\sin 2\mu_n$ через μ_n:

$$\sin 2\mu_n = \frac{2 \tan \mu_n}{1 + \tan^2 \mu_n} = \frac{2\gamma \ell / \mu_n}{1 + \frac{\gamma^2 \ell^2}{\mu_n^2}}$$

Таким чином,

$$A_n^2 = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma^2 \ell^2}{\mu_n^2} \right) \left(1 + \frac{\gamma \ell}{\mu_n^2 + \gamma^2 \ell^2} \right)} = \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + \gamma^2 \ell^2 + \gamma \ell}$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$A_n = \mu_n \sqrt{\frac{2}{\ell} \cdot \frac{1}{\mu_n^2 + \gamma^2\ell^2 + \gamma\ell}} \implies e_n(x) = \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{\ell} + \gamma\ell \sin \frac{\mu_n x}{\ell}\right) \sqrt{\frac{2}{\ell} \cdot \frac{1}{\mu_n^2 + (\gamma\ell)^2 + \gamma\ell}}$$

Перевірка ортогональності. Умову $\|e_n\| = 1$ ми вже перевірили, знайшовши A_n. Перевіримо, що $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$. Дійсно,

$$\lambda_n \langle Y_n, Y_m \rangle = \langle \lambda_n Y_n, Y_m \rangle = \langle -Y_n'', Y_m \rangle = \int_0^\ell -Y_n''(x) Y_m(x) dx$$

Зробимо інтегрування по частинам:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell -Y_n''(x) Y_m(x) dx &= -Y_n'(x) Y_m(x)\Big|_0^\ell + \int_0^\ell Y_n'(x) Y_m'(x) dx \\ &= -Y_n'(\ell) Y_m(\ell) + Y_n'(0) Y_m(0) + \int_0^\ell Y_n'(x) Y_m'(x) dx \\ &= Y_n'(0) Y_m(0) + \int_0^\ell Y_n'(x) Y_m'(x) dx \end{aligned}$$

Зробимо інтегрування частинами ще раз:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell Y_n'(x) Y_m'(x) dx &= Y_n(x) Y_m'(x)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell Y_n(x) Y_m''(x) dx \\ &= Y_n(\ell) Y_m'(\ell) - Y_n(0) Y_m'(0) - \int_0^\ell Y_n(x) Y_m''(x) dx \\ &= -Y_n(0) Y_m'(0) + \lambda_m \langle Y_n, Y_m \rangle \end{aligned}$$

Компануємо усі частини разом:

$$\begin{aligned} \lambda_n \langle Y_n, Y_m \rangle &= Y_n'(0) Y_m(0) - Y_n(0) Y_m'(0) + \lambda_m \langle Y_n, Y_m \rangle \\ &= \gamma Y_n(0) Y_m(0) - Y_n(0) \gamma Y_m(0) + \lambda_m \langle Y_n, Y_m \rangle \\ &= \lambda_m \langle Y_n, Y_m \rangle \end{aligned}$$

Таким чином, оскільки $\lambda_n \neq \lambda_m$ ($n \neq m$), маємо $\langle Y_n, Y_m \rangle = 0$, звідки $\langle e_n, e_m \rangle = 0$.

1.2 Вправа 2 (Таблиця 2, Клітинка 7)

Умова Задачі 1.2. Для крайових умов $u'(0,t) - \gamma u(0,t) = \mu_1(t)$ та $u(\ell, t) = \mu_2(t)$, показати, що перехід до однорідних граничних умов має вигляд:

$$v(x,t) = \frac{\gamma\mu_2(t) + \mu_1(t)}{1 + \gamma\ell} x + \frac{\mu_2(t) - \ell\mu_1(t)}{1 + \gamma\ell}$$

Розв'язання. Підставимо $v(x,t) := A(t)x + B(t)$, себто $v'(x,t) = A(t)$. Звідси маємо $A(t) - \gamma B(t) = \mu_1(t)$ та $A(t)\ell + B(t) = \mu_2(t)$. Звідси:

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \ell & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\gamma\ell} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\gamma\ell} \begin{pmatrix} \mu_1(t) + \gamma\mu_2(t) \\ -\ell\mu_1(t) + \mu_2(t) \end{pmatrix}$$

Підставивши $A(t)$ та $B(t)$ у формулу для $v(x,t)$, отримаємо відповідь:

$$v(x,t) = \frac{\gamma\mu_2(t) + \mu_1(t)}{1 + \gamma\ell} x + \frac{\mu_2(t) - \ell\mu_1(t)}{1 + \gamma\ell}$$

1.3 Вправа 15.3

Умова Задачі 1.3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x,y), \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

Крайові умови $u(0,x) = 3$, $u(t,0) = u(t,1) = 2$.

Розв'язання. Для початку треба зробити граничні умови однорідними. Маємо умову виду $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(\ell,t) = \mu_2(t)$, для якої перехід до однорідних граничних умов має вигляд:

$$u(x,t) := v(x,t) + w(x,t), \quad v(x,t) := \frac{x}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \mu_1(t)$$

Оскільки в нашому випадку $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 2$, то достатньо лише зробити здвиг $u(x,t) := 2 + w(x,t)$. Таким чином, отримаємо рівняння[1]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w(x,t) + 2, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

Крайові умови при цьому $w(x,0) = 1$ та $w(0,t) = w(1,t) = 0$. Шукатимемо розв'язок у вигляді $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin(n\pi x)$. Підставимо у диференціальне рівняння:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\pi^2 n^2)w_n(t)\sin(n\pi x) + 2$$

Розкладемо 2 у ряд Фур'є. Скористаємося тим, що $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1, n \text{ непарне}}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$, тому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\pi^2 n^2)w_n(t)\sin(n\pi x) + \sum_{n=1, n \text{ непарне}}^{\infty} \frac{8}{n\pi}\sin n\pi x$$

Таким чином, маємо наступні диференціальні рівняння для визначення w_n:

$$\dot{w}_n = (1-\pi^2 n^2)w_n + \frac{8}{n\pi}, \quad n \text{ непарне},$$
$$\dot{w}_n = (1-\pi^2 n^2)w_n, \quad n \text{ парне}$$

При цьому, маємо умову Коші $w(x,0) = 1$, що означає, що

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0)\sin(n\pi x) = 1 \implies w_n(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ парне} \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ непарне} \end{cases}$$

Отже, розглядаємо два випадки.

Випадок 1. n парне. Маємо $w_n = A_n e^{(1-\pi^2 n^2)t}$. Оскільки $w_n(0) = 0$, то $A_n = 0$.

[1] Тут можна і далі спростити заміною $q(x,t) := w(x,t)e^t$, щоб позбутися $w(x,t)$ в правій частині, але в даному випадку це не є обов'язковим.

Випадок 2. n непарне. Маємо $w_n = A_n e^{(1-\pi^2 n^2)t} + f_n(t)$, де $f_n(t)$ — частковий розв'язок. Можна показати, що наприклад $f_n(t) = \frac{8}{n\pi(1-\pi^2n^2)}(1 - e^{(1-\pi^2n^2)t})$ підходить. Залишається підставити $w_n(0) = \frac{4}{\pi n}$ аби знайти A_n. Маємо $A_n = \frac{4}{\pi n}$ і тому:

$$w_n(t) = \frac{4}{\pi n} e^{(1-\pi^2n^2)t} + \frac{8}{n\pi(1-\pi^2n^2)}(1 - e^{(1-\pi^2n^2)t})$$

Отже, остаточно:

$$u(x,t) = 2 + \sum_{n=1, n \text{ непарне}}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n} e^{(1-\pi^2n^2)t} + \frac{8}{n\pi(1-\pi^2n^2)}(1 - e^{(1-\pi^2n^2)t}) \right) \sin(n\pi x)$$

1.4 Вправа 15.5

Умова Задачі 1.4. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x,t) - x + 2\sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0$$

Крайові умови $u(x,0) = x$, $u(0,t) = 0$, $u'(\frac{\pi}{2}, t) = 1$.

Розв'язання. Зробимо граничні умови однорідними. Маємо умову виду $u(0,t) = \mu_1(t)$ та $u'(\ell, t) = \mu_2(t)$. Підстановка має вигляд:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad v(x,t) = \mu_2(t)x + \mu_1(t).$$

Зважаючи на те, що $\mu_1(t) = 0$, то достатньо зробити просту заміну $u(x,t) = w(x,t) + x$. Таким чином, отримаємо:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w(x,t) + 2\sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$$

з крайовими умовами $w(x,0) = 0$, $w(0,t) = 0$, $w'(\frac{\pi}{2}, t) = 0$.
Зробимо заміну $w(x,t) := q(x,t)e^t$, щоб позбавитися від $w(x,t)$ у правій частині. Тоді:

$$q(x,t)e^t + \frac{\partial q}{\partial t} e^t = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} e^t + q(x,t)e^t + 2\sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$$

Або, якщо спростити:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\sin 2x \cos x e^{-t}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$$

з крайовими умовами $q(x,0) = 0$, $q(0,t) = 0$, $q'(\frac{\pi}{2}, t) = 0$. В такому випадку, нам потрібно обрати базис $e_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2\ell}$, де в нашому випадку $\ell = \frac{\pi}{2}$. Тому, нехай:

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(2n-1)x$$

Підставимо умову $q(x,0)=0$. Маємо:

$$q(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(0)\sin(2n-1)x = 0 \implies q_n(0)=0$$

Нарешті, підставимо у рівняння:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t)\sin(2n-1)x = -\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^2 q_n(t)\sin(2n-1)x + 2\sin 2x\cos x e^{-t}$$

Отже, залишилося розкласти праву частину у ряд Фур'є. Для цього, помітимо

$$2\sin 2x\cos x = \sin(2x+x)+\sin(2x-x) = \sin 3x + \sin x$$

Таким чином, рівняння треба розглянути окремо для $n=1$, $n=2$ та $n>2$.
Випадок 1. $n=1$**.** Маємо:

$$\dot{q}_1 = -q_1 + e^{-t}, \quad q_1(0)=0$$

Розв'язком цього рівняння є $q_1(t)=te^{-t}$.
Випадок 2. $n=2$**.** Маємо:

$$\dot{q}_2 = -9q_2 + e^{-t}, \quad q_2(0)=0$$

Розв'язком цього рівняння є $q_2(t)=\frac{1}{8}e^{-9t}(-1+e^{8t})$.
Випадок 3. $n>2$**.** Маємо:

$$\dot{q}_n = -(2n-1)^2 q_n, \quad q_n(0)=0$$

Загальним розв'язком цього рівняння є $q_n(t)=A_n e^{-(2n-1)^2 t}$. Проте, враховуючи початкову умову $q_n(0)=0$, маємо $A_n=0$. Отже, $q_n(t)=0$.
Остаточно, отримуємо:

$$q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin(2n-1)x = te^{-t}\sin x + \frac{1}{8}e^{-9t}(-1+e^{8t})\sin 3x$$

Повернемось до $u(x,t)$. Маємо

$$w(x,t)=q(x,t)e^{t} = t\sin x + \frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x$$

Остаточна відповідь у свою чергу:

$$u(x,t)=w(x,t)+x = t\sin x + \frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x + x$$

Відповідь. $u(x,t)=t\sin x + \frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x + x$.