Самостійна робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1

Умова. Знайти верхню і нижню границі послідовності $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, якщо:

$$A_n = \begin{cases} [1, n^3 + 3), & n = 2k, \\ \left(1 - \frac{1}{n}, \ln^2 n\right], & n = 2k+1 \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

Коментар. Тут і далі позначатимемо $\mathbb{Z}^+ \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Розв'язок. Як було доведено на практиці,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Отже, акуратно застосуємо ці формули. Розіб'ємо розв'язок на дві частини: обрахунок верхньої та нижньої границі послідовності.

Знаходження верхньої границі. Для початку, знайдемо $W_n \triangleq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Помітимо, що

$$W_n \triangleq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \underbrace{\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+2k}\right)}_{U_n} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+2k+1}\right)}_{V_n}$$

Таким чином, ми розбили одне ціле об'єднання на два окремих, для яких індекси мають однакову парність. Нехай для конкретності $n = 2m$. В такому разі маємо парну суму, позначену U_{2m} та непарну, позначену V_{2m}.

В такому разі:

$$U_{2m} \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{2m+2k} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [1, 8(m+k)^3 + 3)$$

Маємо об'єднання відрізків виду $[1, x_k)$ де $x_k \triangleq 8(m+k)^3+3$. Ця послідовність необмежена зверху, бо $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Окрім цього, монотонно зростає, починаючи з $x_0 = 8m^3+3$. Отже, якщо взяти об'єднання усіх таких відрізків, то отримаємо

$$U_{2m} = [1, +\infty).$$

Що стосується другого доданку,

$$V_{2m} \triangleq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{2m+2k+1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2m+2k+1}, \ln^2(2m+2k+1)\right].$$

Тут проаналізуємо акуратніше. Позначимо $\ell_k \triangleq 1 - \frac{1}{2m+2k+1}$ та $r_k \triangleq \ln^2(2m+2k+1)$.

Ліва межа відрізка починається з $\ell_0 = 1 - \frac{1}{2m+1}$ та монотонно збільшується, наближаючись до 1 ($\lim_{k\to\infty} \ell_k = 1$). Права ж межа починається з $r_0 = \ln^2(2m+1)$ та монотонно необмежено збільшується ($\lim_{k\to\infty} r_k = +\infty$).

Отже, об'єднання зліва буде починатися з $1 - \frac{1}{2m+1}$ не включно, оскільки це "найлішіва" точка, а праворуч буде $+\infty$. Таким чином:

$$V_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2m+1}, +\infty\right)$$

Якщо $n = 2m+1$, то вирази не змінюються. Дійсно, в такому разі $U_{2m+1} = V_{2m} = \left(1 - \frac{1}{2m+1}, +\infty\right)$, а $V_{2m+1} = U_{2m+2} = [1, +\infty)$.

Отже, узагальнити об'єднання можна таким чином:

$$U_n \cup V_n = [1, +\infty) \cup \left(1 - \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}, +\infty\right) = \left(1 - \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}, +\infty\right)$$

Таким чином, $W_n = \left(1 - \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}, +\infty\right)$. Тому

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}, +\infty\right) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k+1}, +\infty\right)$$

Для обрахунку, потрібно знайти $\sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$. Послідовність монотонно зростає від 0 і наближається до 1, тобто $\sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = 1$. Супремум варто включити, оскільки 1 належить будь-якому відрізку виду $(1 - \frac{1}{2k+1}, +\infty)$, а отже і перетину усіх таких відрізків. Остаточно:

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [1, +\infty)$$

Знаходження нижньої границі. Спочатку знаходимо $W_n \triangleq \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$:

$$W_n \triangleq \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underbrace{\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+2k}\right)}_{U_n} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+2k+1}\right)}_{V_n}$$

Нехай знову для конкретики $n = 2m$. Тоді:

$$U_{2m} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{2m+2k} = \bigcap_{k=0}^{\infty} [1, 8(m+k)^3 + 3) = [1, 8m^3 + 3)$$

Це випливає з того, що перший відрізок $[1, 8m^3 + 3] \subset [1, 8(m+k)^3 + 3]$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}^+$, тому перетин усіх відрізків дасть лише перший.

Друга границя:

$$V_{2m} = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{2m+2k+1} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2m+2k+1}, \ln^2(2m+2k+1)\right]$$

Тут знову проаналізуємо акуратніше. Нам, по суті, потрібно знайти супремум лівої границі та інфінум правої. Позначимо наші відрізки $\{(\ell_k, r_k]\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$. Ліва границя відрізка, як ми казали раніше, починається з $1 - \frac{1}{2m+1}$ і монотонно зростає до 1 не включно. Права границя необмеженно зростає від $\ln^2(2m+1)$ до $+\infty$.

Отже, супремум лівої частини дорівнює 1, а інфінум лівої $\ln^2(2m+1)$. Таким чином:

$$V_{2m} = [1, \ln^2(2m+1)]$$

Якщо $n = 2m+1$, то перший доданок $U_{2m+1} = V_{2m} = [1, \ln^2(2m+1)]$, а другий $V_{2m+1} = U_{2m+2} = [1, 8(m+1)^3 + 3)$.

Таким чином, можемо узагальнити перетин:

$$U_n \cap V_n = \left[1, \ln^2\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right)\right] \cap \left[1, 8\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^3 + 3\right)$$

Проте, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : 8\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^3 + 3 > \ln^2\left(2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right)$, тому

$$W_n = U_n \cap V_n = \left[1, \ln^2\left(2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\right]$$

Отже,

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[1, \ln^2\left(2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\right] = \bigcup_{k=0}^{\infty} [1, \ln^2(2k+1)]$$

Оскільки права границя відрізків прямує на $+\infty$, аналогічно першій границі, отримуємо $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = [1, +\infty)$.

Відповідь. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} = \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = [1, +\infty)$.