Двоїста задача

Пункт А.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Спочатку запишемо нову цільову функцію:

$$\hat{f}(y_1, y_2, y_3) = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max$$

Складаємо матрицю коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \to \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Знаки для обмежень беремо з умов на x_i. Оскільки в завданні нічого не сказано про x_3, то будемо вважати, що мається на увазі, що x_3 — довільне число. Тому маємо

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 \geq 2 \\ 3y_1 + 4y_2 - 5y_3 = -1 \end{cases}$$

Умови на y_i візьмемо інвертуванням умов на обмеження в початковій задачі. Тобто маємо

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \in \mathbb{R}$$

Пункт Б.

Нова цільова функція:

$$\hat{f}(y_1, y_2, y_3) = -3y_1 + 5y_2 - 10y_3 \rightarrow \max$$

Нова матриця коефіцієнтів:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Отже система умов:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 6y_3 \geq 11 \\ -2y_1 + 7y_3 = -12 \\ 4y_2 - 8y_3 \leq -32 \end{cases}$$

Нові обмеження на y_i:

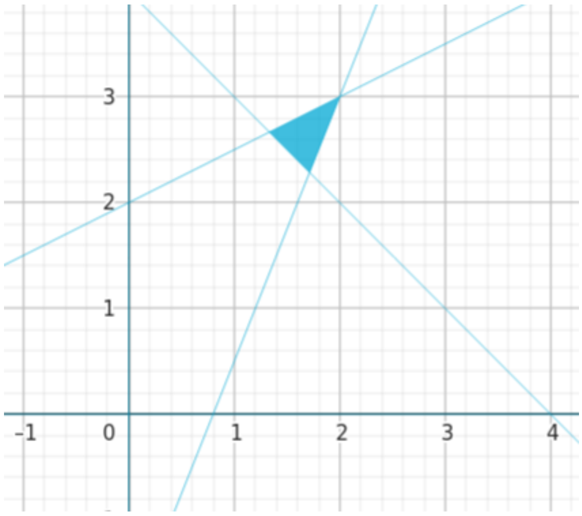
$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$$

Пункт В.

Маємо початкову задачу, яку і будемо розв’язувати:

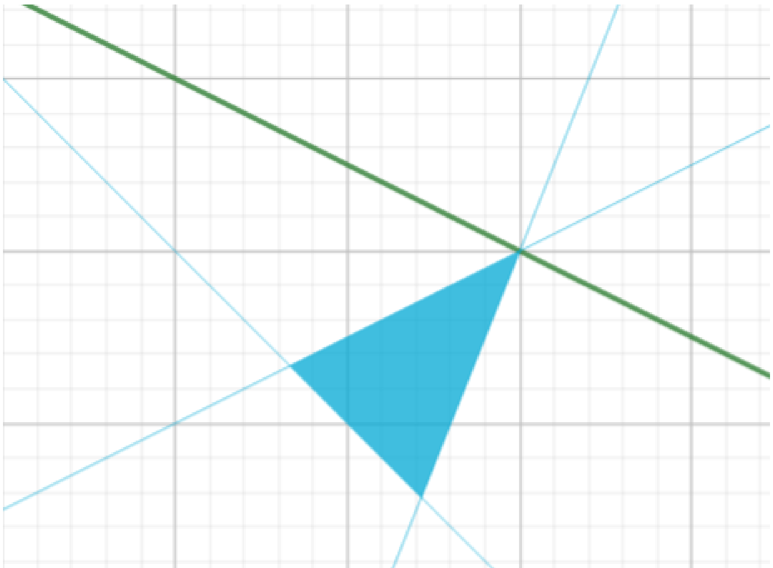
$$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв’яжемо графічним методом. Система обмежень дасть нам багатокутник:



~~P.S. Який маленький :)~~

Малюємо сімейство прямих $-x_1 - 2x_2 = \lambda$ та шукаємо мінімум:



Можна побачити, що мінімум досягається у точці $A(2, 3)$ і тому цільова функція приймає значення $F(2, 3) = -8$.

Двоїста задача має вид:

$$F'(y_1, y_2, y_3) = -4y_1 - 4y_2 + 4y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 - y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 2 \end{cases}$$

Розв'яжемо сімплекс методом. Маємо

$$\begin{cases}5y_1 - y_2 - y_3 - y_4 = 1\\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_5 = 2\end{cases}$$

Переносим:

$$\begin{cases}y_4 = -1 + 5y_1 - y_2 - y_3\\ y_5 = -2 - 2y_1 + 2y_2 - y_3\end{cases}$$

Вільні члени від'ємні, отже змінюємо y_5 та y_1:

$$2y_1 = -2 + 2y_2 - y_3 - y_5$$
$$y_1 = -1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_5$$

Відставляємо у вираз y_4: $y_4 = -1 - 5 + 5y_2 - \frac{5}{2}y_3 - \frac{5}{2}y_5 - y_2 - y_3 = -6 + 4y_2 - \frac{7}{2}y_3 - \frac{5}{2}y_5$. Отже

$$\begin{cases}y_1 = -1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_5\\ y_4 = -6 + 4y_2 - \frac{7}{2}y_3 - \frac{5}{2}y_5\end{cases}$$

Тепер змінюємо y_4, y_2. Маємо $4y_2 = 6 + \frac{7}{2}y_3 + y_4 + \frac{5}{2}y_5 \to y_2 = \frac{3}{2} + \frac{7}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{5}{8}y_5$. Відставляємо у вираз для y_1:

$$y_1 = -1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{5}{8}y_5 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_5 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{1}{8}y_5$$

Отже

$$\begin{cases}y_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{1}{8}y_5\\ y_2 = \frac{3}{2} + \frac{7}{8}y_3 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{5}{8}y_5\end{cases}$$

Отже маємо розв'язок $(1/2, 3/2, 0, 0, 0)$. Підставляємо у F':

$$F'(y_1, y_2) = -4y_1 - 4y_2 + 4y_3 = -2 - \frac{3}{2}y_3 - y_4 - \frac{1}{2}y_5 - 6 - \frac{7}{2}y_3$$
$$-y_4 - \frac{5}{2}y_5 + 4y_3 = -8 - (y_3 + 2y_4 + 3y_5)$$

Отже $F'_{\max} = -8 = F_{\min}$.