Контрольна робота #2 з курсу
"Комплексний аналіз"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

5 грудня 2023 р.

Варіант 5.

Задача 1.

Умова. Знайти і класифікувати всі особливі точки, з поясненням

$$f(z) = \frac{z+4}{z+3}$$

Розв'язок. По-перше, точка $z = -3$ є полюсом першого порядку, бо це полюс першої кратності знаменника, що не є коренем чисельника (або просто $\lim_{z\to-3} \frac{z+4}{z+3} = \infty$). Окрім цього, перевіряємо $z = \infty$:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z+4}{z+3} = \lim_{z\to\infty} \frac{1+\frac{4}{z}}{1+\frac{3}{z}} = 1$$

Отже, $z = \infty$ є усувною особливістю.

Відповідь.

1. $z = -3$ – полюс першого порядку;
2. $z = \infty$ – усувна особливість.

Задача 2.

Умова. Знайти і класифікувати всі особливі точки, з поясненням

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)}$$

Розв'язок. Запишемо функцію у трошки іншому вигляді:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)}$$

Тут $z = \pm i$ та $z = 1$ – полюси першого порядку (по аналогічним причинам, як і в минулій задачі).

Розглянемо $z = \infty$:

$$f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)} = 0$$

Отже, $z = \infty$ є усувною особливістю.

Відповідь.

1. $z = \pm i, z = 1$ – три полюси першого порядку;
2. $z = \infty$ – усувна особливість.

Задача 3.

Умова. Знайти і класифікувати всі особливі точки, з поясненням

$$f(z) = z^3 \sin\frac{\pi}{z}$$

Розв'язок. По-перше, помітимо, що $z^3 \sin\frac{\pi}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} z^3 \cdot \frac{\pi}{z} = \pi z^2$. Отже, $z = \infty$ є полюсом 2-ого порядку.

Тепер розглянемо $z = 0$. Розкладемо функцію $f(z)$ у ряд Лорана:

$$\sin z = \frac{\pi}{z} - \frac{\pi^3}{3! \cdot z^3} + \frac{\pi^5}{5! \cdot z^5} - \frac{\pi^7}{7! \cdot z^7} + \dots$$

$$f(z) = z^3 \sin z = \underbrace{\pi z^2 - \frac{\pi^3}{3!}}_{\text{правильна частина}} + \underbrace{\frac{\pi^2}{5! \cdot z^2} - \frac{\pi^7}{7! \cdot z^4} + \dots}_{\text{головна частина, безліч доданків}}$$

Бачимо, що оскільки маємо безліч доданків у головній частині ряда Лорана, то $z = 0$ буде істотною особливістю.

Відповідь.

1. $z = \infty$ – полюс другого порядку;
2. $z = 0$ – істотна особливість.

Задача 4.

Умова. Знайти і класифікувати всі особливі точки, з поясненням

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z+2)^3}$$

Розв'язок. По-перше, розглянемо $z \to \infty$. Помітимо, що

$$f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2(z+2)^3}$$

Якщо підставимо $z = x \in \mathbb{R}$, то маємо добуток обмеженної функції $\cos x$ на $\frac{1}{(x+2)^3} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, тому і $\frac{\cos x}{(x+2)^3} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$.

Якщо ж $z = iy, y \in \mathbb{R}$, то маємо

$$f(iy) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2(iy+2)^3} \sim \frac{e^{y}}{iy^3} \xrightarrow[y\to\infty]{} i\infty$$

Отже маємо дві різні границі, що означає те, що $z = \infty$ є неізольованою особливістю.

Далі, находимо корені чисельника і знаменника. У чисельника маємо $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а у знаменника $z = -2$ третього ступеня. Бачимо, що ці корені ніяк не перетинаються, оскільки рівняння $\frac{\pi}{2} + \pi k = -2$ не має розв'язків у цілих числах. Отже, маємо $z = -2$ – полюс третього порядку.

Відповідь.

1. $z = \infty$ – неізольована особливість;
2. $z = -2$ – полюс третього порядку.

Задача 5.

Умова. Знайти і класифікувати всі особливі точки, з поясненням

$$f(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1}$$

Розв'язок. Спочатку знаходимо нулі чисельника та знаменника. У чисельника маємо $z = \pm i\pi$, а у знаменника $z_k = (1 + 2k)\pi i$ – корені першої кратності. Помітимо, що при $k = 0$ та $k = -1$ набір коренів перетинаються.

Розглянемо границі у цих точках:

$$\lim_{z \to -i\pi} \frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1} = \begin{vmatrix} w := z + i\pi \\ z = w - i\pi \\ w \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{w \to 0} \frac{(w - i\pi)^2 + \pi^2}{e^{w - i\pi} + 1} = \lim_{w \to 0} \frac{w^2 - 2i\pi w}{1 - e^w}$$

$$= \lim_{w \to 0} \frac{-2i\pi w + w^2}{-w - \frac{w^2}{2} + \overline{o}(w^2)} = \lim_{w \to 0} \frac{-2i\pi + w}{-1 - w(\frac{1}{2} + \overline{o}(1))} = 2i\pi$$

Аналогічно можна показати, що

$$\lim_{z \to i\pi} \frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1} = -2i\pi$$

Отже, $z = \pm i\pi$ є усувними особливостями. Нарешті, $z = +\infty$ є неізольованою особливістю, бо границя для полюсів $z_k = (1+2k)\pi i \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$.

Відповідь.

1. $z_k = (1 + 2k)\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ є полюсами першого порядку;
2. $z = \pm i\pi$ є усувними особливостями;
3. $z = \infty$ є неізольованою особливістю.

Задача 6.

Умова. Розкласти в ряд Лорана в т. $z_0 = 0$ на $1 < |z| < 4$ функцію

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2-16)}$$

Розв'язок. Спочатку помітимо, що:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)(z+4)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z-4} + \frac{\gamma}{z+4}$$

Знайдемо (α, β, γ). Отже:

$$\alpha(z^2-16) + \beta(z-1)(z+4) + \gamma(z-1)(z-4) \equiv 1$$

Розкладаємо цей вираз:

$$\alpha z^2 - 16\alpha + \beta(z^2+3z-4) + \gamma(z^2-5z+4) \equiv 1$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)z^2 + (3\beta-5\gamma)z + (-16\alpha-4\beta+4\gamma) \equiv 1$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ 3\beta - 5\gamma = 0 \\ -16\alpha - 4\beta + 4\gamma = 1 \end{cases}$$

З другого рівняння $\beta = \frac{5\gamma}{3}$, підставляючи у перше маємо $\alpha = -\frac{8\gamma}{3}$. Нарешті, якщо це підставити у третє:

$$\frac{128\gamma}{3} - \frac{20\gamma}{3} + 4\gamma = 1 \implies \gamma = \frac{1}{40}$$

Звідси $\alpha = -\frac{1}{15}, \beta = \frac{1}{24}$. Тому остаточно:

$$f(z) = -\frac{1}{15(z-1)} + \frac{1}{24(z-4)} + \frac{1}{40(z+4)}$$

Тепер розглядаємо кожен дріб окремо. Оскільки $1 < |z| < 4$, то дріб $\frac{1}{z-1}$ запишемо як

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}.$$

Ми так змогли зробити, оскільки $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ для нашої області.

Аналогічно розглядаємо інші ряди:

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^k}$$

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{z^k}{4^k}$$

Тут ми скористалися тим, що $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$ для нашої області. Таким чином, остаточно:

$$f(z) = -\frac{1}{15}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}} - \frac{1}{96}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^k} + \frac{1}{160}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{z^k}{4^k} =$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{-\frac{1}{15z^{k+1}} + \frac{z^k}{32 \cdot 4^k}\left(-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^k}{5}\right)\right\}}$$

Відповідь. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{-\frac{1}{15z^{k+1}} + \frac{z^k}{32 \cdot 4^k}\left(-\frac{1}{3} + \frac{(-1)^k}{5}\right)\right\}$.