1️⃣

Homework #1 (14/14)

Завдання 1.

Дискретизуємо область значень. Маємо вузли $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4, x_4 = 1$. Оскільки ми знаємо $\varphi(0), \varphi(1)$, то нам потрібно лише знайти $\varphi(1/4), \varphi(1/2), \varphi(3/4)$.

Використаємо апроксимацію другої похідної, тобто

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\Big|_t \approx \frac{\varphi^{[t+1]} - 2\varphi^{[t]} + \varphi^{[t-1]}}{(\Delta x)^2},\ t = 1,2,3$$

Відставив у рівняння, маємо

$$\varphi^{[t+1]} + ((\Delta x)^2 - 2)\varphi^{[t]} + \varphi^{[t-1]} = 0$$

Залишається підставити $t = 1,2,3$:

$$t = 1:\ 16\varphi^{[2]} - 31\varphi^{[1]} + 16\varphi^{[0]} = 0$$

$$t = 2:\ 16\varphi^{[3]} - 31\varphi^{[2]} + 16\varphi^{[1]} = 0$$

$$t = 3:\ 16\varphi^{[4]} - 31\varphi^{[3]} + 16\varphi^{[2]} = 0$$

Підставимо умову $\varphi^{[0]} = 1, \varphi^{[4]} = 0$:

$$\begin{cases} 16\varphi^{[2]} - 31\varphi^{[1]} = -16 \\ 16\varphi^{[3]} - 31\varphi^{[2]} + 16\varphi^{[1]} = 0 \\ -31\varphi^{[3]} + 16\varphi^{[2]} = 0 \end{cases}$$

В матричному виді рівняння виглядає як:

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{[1]} \\ \varphi^{[2]} \\ \varphi^{[3]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отже, розв'язком є

$$\begin{bmatrix} \varphi^{[1]} \\ \varphi^{[2]} \\ \varphi^{[3]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.816 \\ 0.576 \\ 0.288 \end{bmatrix}$$

Розв'яжемо рівняння аналітично. Шукатимо розв'язок у вигляді $\varphi = Ce^{\lambda x}$. Тоді

$$\lambda^2 Ce^{\lambda x} + Ce^{\lambda x} = 0 \to \lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \pm i$$

Отже маємо розв'язок у вигляді $\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Підставимо з умови

$$\varphi(0) = c_1 = 1,\ \varphi(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 = 0 \to c_2 \approx -0.64$$

Отже розв'язок $\varphi(x) = \cos x - 0.64 \sin x$. Знайдемо $\varphi^{[t]}, t = 1, 2, 3$:

$$\varphi^{[1]} = \varphi(1/4) = \cos \frac{1}{4} - 0.64 \sin \frac{1}{4} \approx 0.81$$

Як бачимо, це доволі схоже на значення, отримане вище. Така сама ситуація і для $\varphi^{[2]}$ та $\varphi^{[3]}$

Завдання 2.

Розв'язок схожий до завдання 1, але є додатково наступний момент: нам невідоме $\varphi^{[4]}$. Тому спочатку запишемо умову

$$\frac{\varphi^{[t+1]} - 2\varphi^{[t]} + \varphi^{[t-1]}}{(\Delta x)^2} + \varphi^{[t]} = x^{[t]},\ t \in \overline{1,3}$$

Оскільки $x^{[t]} = t\Delta x$, то отримуємо

$$\varphi^{[t-1]} + \varphi^{[t]}((\Delta x)^2 - 2) + \varphi^{[t+1]} = t(\Delta x)^3$$

Підставивши $\Delta x = 1/4$, отримаємо

$$16\varphi^{[t-1]} - 31\varphi^{[t]} + 16\varphi^{[t+1]} = \frac{t}{4}$$

Що відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} 16\varphi^{[2]} - 31\varphi^{[1]} = -\frac{63}{4} \\ 16\varphi^{[3]} - 31\varphi^{[2]} + 16\varphi^{[1]} = \frac{1}{2} \\ 16\varphi^{[4]} - 31\varphi^{[3]} + 16\varphi^{[2]} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Маємо 4 невідомі, отже нам потрібне ще одне рівняння. Використаємо умову

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=1} + \varphi(1) = 0$$

Бачимо, що $\varphi(1) = \varphi^{[4]}$. Окрім цього скористаємося лівою апроксимацією першої похідної:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{t=4} \approx \frac{\varphi^{[4]} - \varphi^{[3]}}{\Delta x} = 4\varphi^{[4]} - 4\varphi^{[3]}$$

Отже, умова запишеться як

$$5\varphi^{[4]} - 4\varphi^{[3]} = 0$$

Тому система рівнянь має вид:

$$\begin{cases} 16\varphi^{[2]} - 31\varphi^{[1]} = -63/4 \\ 16\varphi^{[3]} - 31\varphi^{[2]} + 16\varphi^{[1]} = 1/2 \\ 16\varphi^{[4]} - 31\varphi^{[3]} + 16\varphi^{[2]} = 3/4 \\ -4\varphi^{[3]} + 5\varphi^{[4]} = 0 \end{cases}$$

В матричному виді маємо

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 & 0 \\ 16 & -31 & 16 & 0 \\ 0 & 16 & -31 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{[1]} \\ \varphi^{[2]} \\ \varphi^{[3]} \\ \varphi^{[4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Завдання 3.

Нехай ми виконали дискретизацію нашої області. Розглянемо деякий вузол сітки t, в якому бажаємо знайти вираз для 4 похідної. Значення функції в ній позначимо як f_0, а похідні відповідно $f_0', f_0'', \ldots$ Через f_1, f_2 позначимо значення функції у вузлах $t+1, t+2$, а через f_{-1}, f_{-2} у вузлах $t-1, t-2$. Розкладемо у ряд Тейлора f_{-2}, f_{-1}, f_1, f_2, врахувавши перші 5 додатків:

$$f_2 \approx f_0 + 2\Delta x f_0' + 2(\Delta x)^2 f_0'' + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f_0''' + \frac{2}{3}(\Delta x)^4 f_0''''$$

$$f_1 \approx f_0 + \Delta x f_0' + \frac{(\Delta x)^2}{2} f_0'' + \frac{(\Delta x)^3}{6} f_0''' + \frac{(\Delta x)^4}{24} f_0''''$$

$$f_{-1} \approx f_0 - \Delta x f_0' + \frac{(\Delta x)^2}{2} f_0'' - \frac{(\Delta x)^3}{6} f_0''' + \frac{(\Delta x)^4}{24} f_0''''$$

$$f_{-2} \approx f_0 - 2\Delta x f_0' + 2(\Delta x)^2 f_0'' - \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f_0''' + \frac{2}{3}(\Delta x)^4 f_0''''$$

Отже маємо рівняння відносно $f_0', f_0'', f_0''', f_0''''$, тобто

$$\begin{bmatrix} 2\Delta x & 2(\Delta x)^2 & \frac{4}{3}(\Delta x)^3 & \frac{2}{3}(\Delta x)^4 \\ \Delta x & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & \frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{1}{4}(\Delta x)^4 \\ -\Delta x & \frac{1}{2}(\Delta x)^2 & -\frac{1}{6}(\Delta x)^3 & \frac{1}{4}(\Delta x)^4 \\ -2\Delta x & 2(\Delta x)^2 & -\frac{4}{3}(\Delta x)^3 & \frac{2}{3}(\Delta x)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0' \\ f_0'' \\ f_0''' \\ f_0'''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 - f_0 \\ f_1 - f_0 \\ f_{-1} - f_0 \\ f_{-2} - f_0 \end{bmatrix}$$

Оскільки нам потрібно лише f_0'''', то можемо уникнути повного розв'язку цього рівняння. Для цього знайдемо суму усіх 4 рівнянь та 2ого з 3им:

$$f_{-2} + f_{-1} + f_1 + f_2 = 4f_0 + 5(\Delta x)^2 f_0'' + \frac{17(\Delta x)^4}{12} f_0''''$$

$$f_1 + f_{-1} = 2f_0 + (\Delta x)^2 f_0'' + \frac{1}{12}(\Delta x)^4 f_0''''$$

З другого рівняння

$$(\Delta x)^2 f_0'' = f_1 + f_{-1} - 2f_0 - \frac{1}{12}(\Delta x)^4 f_0''''$$

Підставимо у перше:

$$f_{-2} + f_{-1} + f_1 + f_2 = 4f_0 + 5f_1 + 5f_{-1} - 10f_0 - (\Delta x)^4 f_0''''$$

Тому

$$f_0'''' = \frac{f_{-2} - 4f_{-1} + 6f_0 - 4f_1 + f_2}{(\Delta x)^4}$$

При такому розв'язку виходить похибка $\mathcal{O}(\Delta x)$. Проте можна отримати похибку $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Для цього потрібно ще врахувати 1 додаток, що містить $d^5 f/dx^5$, тому розкладання у ряд Тейлора буде з точністю $\mathcal{O}((\Delta x)^6)$. При сумуванні додаток з 5 похідною скоротиться і тоді при діленні на $(\Delta x)^4$ отримаємо $\mathcal{O}(\Delta x)^6/(\Delta x)^4 = \mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Зверху наведено розв'язок з 5 додатками, бо з 6 запис стає дуже об'ємним.