Екзаменаційна робота з навчальної дисципліни "Чисельний аналіз"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

22 грудня 2023 р.

Білет #3

Питання 1.

Умова. Квадратурна формула трапецій та її залишковий член.

Відповідь. Нехай наша ціль – чисельно обрахувати інтеграл

$$\mathcal{I} := \int_{[\alpha,\beta]} \rho(x) f(x) dx, \tag{1}$$

де $f(x)$ – задана функція, а $\rho(x) > 0$ – деяка вагова функція. Також будемо вважати, що $f, \rho f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, тобто функція f та добуток ρf є інтегрованими за Ріманом на нашому відрізку.

Одразу постає питання – а чому нам взагалі треба розглядати задачу чисельного (наближеного) знаходження інтегралу? Наведемо декілька прикладів.

Приклад: Приклад з теорії ймовірності

Маємо розподілену випадкову величину за нормальним розподілом $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ і треба знайти $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta)$. Все зводиться до інтегралу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{[\alpha,\beta]} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ цей інтеграл не знаходиться явно. Тому, його рахують наближено.

Приклад: Приклад з датчиком

Маємо показання акселерометра, що дає набір прискорень по деякій вісі $\{a_i\}_{i=1}^n$ через один й той самий проміжок часу Δt. Ціль – знайти функцію швидкості (або координати) від часу. Функцію прискорення $a(t)$ від часу неможливо відновити по набіру $\{a_i\}_{i=1}^n$, тому у явному вигляді інтеграл знайти неможливо.

Отже, наведемо алгоритм чисельного інтегрування за допомогою квадратурних формул.

Нехай маємо розбиття нашого відрізку $\pi_n[\alpha, \beta] = \{x_i\}_{i=0}^n$ з вибраними точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Також позначимо $|\pi_n| \triangleq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \Delta x_i$. Якщо скористатися означенням інтегралу по Ріману, то маємо:

$$\mathcal{I} \triangleq \lim_{|\pi_n| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i) f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{2}$$

причому ця границя існує з того, що $\rho f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$.

Позначимо через $\mathcal{I}_n$ приблизне значення інтегралу, котре ми вже можемо чисельно знайти. Тоді, спробуємо знаходити приблизне значення за допомогою формули

$$\mathcal{I}_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} \theta_k f(x_k), \tag{3}$$

де x_k – вузли квадратурної формули, а θ_k – ваги. Наша ціль – знайти набір ваг $\Theta := \{\theta_k\}_{k=0}^n$ таким чином, щоб абсолютна похибка Δ_n була найменьша:

$$\hat{\Theta} = \arg\min_{\Theta} \Delta_n,\ \Delta_n := |\mathcal{I}_n - \mathcal{I}|. \tag{4}$$

Звичайно можна використовувати і іншу метрику похибки, проте поки зупинимось на цій.

Отже, наведемо інтерполяційний спосіб побудови квадратурної формули. Для цього задамо функцію $f(x)$ таким чином, щоб вона була інтерполяційним поліномом Лагранжа на деяких вузлах $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, тобто $f \approx L_n$. Тоді, розписавши L_n і підставивши у вираз 1:

$$\mathcal{I}_n := \mathcal{I}\Big|_{f=L_n} = \int_{[\alpha,\beta]} \rho(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} dx, \tag{5}$$

де ми позначили $\omega_{n+1} := \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$. Таким, якщо далі розпишемо рівняння 5, то отримаємо:

$$\mathcal{I}_n = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_{[\alpha,\beta]} \frac{\rho(x)\omega_{n+1}(x)dx}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}}_{\theta_k}. \tag{6}$$

Отже бачимо, що коефіцієнти мають вигляд:

$$\theta_k = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{\rho(x)\omega_{n+1}(x)dx}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \tag{7}$$

При довільному $\rho(x)$, знайти θ_k не завжди можна у достатньо простому вигляді. Проте, при $\rho \equiv 1$ бачимо, що θ_k знаходиться точно, оскільки $\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$ є поліномом, що легко інтегрується. Додатково, якщо $\pi[\alpha, \beta]$ є рівномірним розбиттям, то такий вибір квадратури називають **формулами Ньютона-Котеса**.

Виділимо усі попередні факти у одне означення.

Означення: Формули Ньютона-Котеса

Нехай $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, $\pi_n[\alpha, \beta] = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ – рівномірне розбиття. Тоді наближення інтегралу $\int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx$ формулами Ньютона-Котеса називають вираз

$$\mathcal{I}_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k f(x_k),\ \theta_k = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{\omega_{n+1}(x)dx}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

Формулу з означення використовувати не завжди практично. Тому доведемо наступне твердження:

Твердження: Формула Ньютона-Котеса

Коефіцієнти у означенні можна переписати у вигляді:

$$\theta_k = \frac{(\beta - \alpha) \cdot (-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \int_{[0,n]} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (\eta - j) \right) d\eta$$

Доведення. Зробимо заміну $x = x_0 + \eta h$, де $h := \frac{\beta - \alpha}{n}$. Тоді $\eta = \frac{x-\alpha}{h}$ і межа інтегрування стає $[0, n]$. Окрім цього, $dx = hd\eta$. Нарешті, підставляємо заміну:

$$\theta_k = h \int_{[0,n]} \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x_0 + \eta h - x_i}{x_k - x_i} \right) d\eta \tag{8}$$

Далі використовуємо той факт, що $x_i = x_0 + ih$ (оскільки $\pi[\alpha, \beta]$ рівномірне розбиття). Тому

$$\theta_k = h \int_{[0,n]} \left(\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{\eta - i}{k - i} \right) d\eta \tag{9}$$

Помітимо, що добуток $\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k - i)$ не залежить від η, тому ми можемо винести цей вираз за інтеграл. Причому,

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n}(k-i) = \underbrace{k\cdot(k-1)\dots 1}_{k!}\cdot\underbrace{(-1)\dots(k-n)}_{(-1)^{n-k}(n-k)!} = (-1)^{n-k}k!(n-k)! \tag{10}$$

Тому

$$\theta_k = \frac{h}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k-i)}\int_{[0,n]}\left(\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(\eta-i)\right)d\eta. \tag{11}$$

Або остаточно

$$\theta_k = \frac{(-1)^{n-k}(\beta-\alpha)}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_{[0,n]}\left(\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(\eta-i)\right)d\eta \;\blacksquare \tag{12}$$

Нарешті, перейдемо до безпосередньо **квадратурної формули трапеції**.

Означення: Квадратурна формула трапеції

Квадратурною формулою трапеції називають формулу Ньютона-Котеса для $n = 1$.

Отже, обчислимо вигляд коефіцієнтів:

$$\theta_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)dt}{t} = -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}, \tag{13}$$

$$\theta_1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)dt}{t-1} = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Таким чином,

$$\boxed{\mathcal{I}_1 = \frac{(\beta-\alpha)(f(\alpha)+f(\beta))}{2}} \tag{15}$$

Зауваження. На практиці застосування наближення $\mathcal{I}_1$ на всьому відрізку $[\alpha, \beta]$ дає дуже неточні результати. Дійсно, нехай ми візьмемо інтеграл $\int_{[0,10]} e^{-x^2} dx$. Застосувавши формулу, маємо $\mathcal{I}_1 = 5(e^{-100} + e^0)$, що майже точно дорівнює 5. Дійсне значення цього інтегралу приблизно 0.886, тобто похибка дуже велика.

Тому зазвичай на практиці відрізок $[\alpha, \beta]$ ділять рівномірно на систему відрізків $\pi_N[\alpha, \beta] = \{z_i\}_{i=0}^N$ і користуються адитивністю інтеграла Рімана:

$$\mathcal{I} = \int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{[z_{i-1},z_i]} f(x)dx, \tag{16}$$

де інтеграл $\int_{[z_{i-1},z_i]} f(x)dx$ рахується за допомогою формули 15 для розбиття $\pi_n[z_{i-1}, z_i]$.

Оцінка. Для оцінки доведемо наступне твердження:

Твердження: Оцінка квадратурної формули трапеції

Абсолютну похибку з формули 4 можна обмежити:

$$\Delta_n \le \frac{h^{n+2}\mu_{n+1}}{(n+1)!} \int_{[0,n]} \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right| dt,$$

де $\mu_n \triangleq \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Доведення. З виразу для похибки інтерполяційного многочлену у формі Лагранжа,

$$\Delta_n = \left| \int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx - \int_{[\alpha,\beta]} L_n(x)dx \right| \tag{17}$$

$$= \left| \int_{[\alpha,\beta]} (f(x) - L_n(x))dx \right| \tag{18}$$

$$\le \int_{[\alpha,\beta]} \frac{\mu_{n+1}|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}|dx = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)!} \int_{[\alpha,\beta]} |\omega_{n+1}(x)|dx. \tag{19}$$

Якщо врахувати, що $\pi_n[\alpha, \beta]$ рівномірне, то замінивши $x = x_0 + th$, маємо

$$\Delta_n \leq \frac{h^{n+2}\mu_{n+1}}{(n+1)!} \int_{[0,n]} \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right| dt \ \blacksquare \tag{20}$$

Для випадку з трапецією, маємо $n = 1$ і тоді:

$$\Delta_1 \leq \frac{h^3\mu_2}{2!} \int_0^1 |t(t-1)|dt = \frac{h^3\mu_2}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{h^3\mu_2}{12}$$

Геометрична інтерпретація

Розглянемо рисунок 1. Нехай маємо деяку функцію $y = f(x)$ і потрібно знайти $\int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx$.

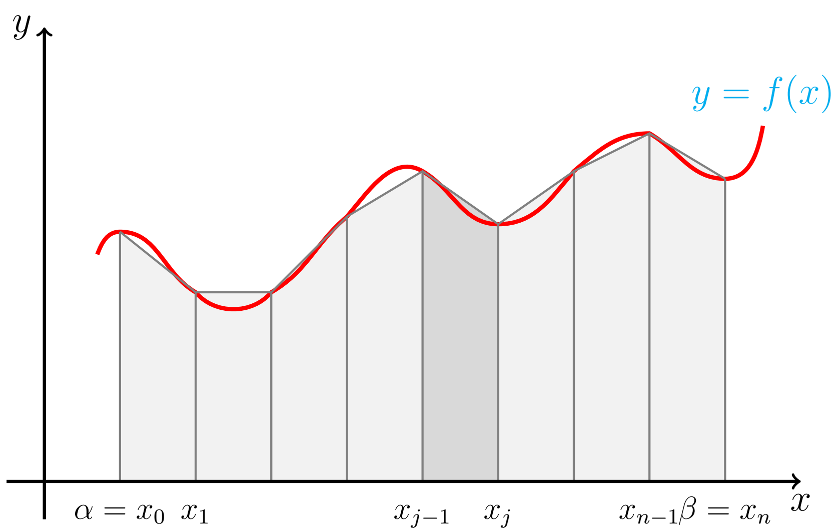

Рис. 1: Візуалізація формули трапеції

Якщо маємо рівномірне розбиття $\pi_n[\alpha, \beta] = \{x_k\}_{k=0}^{n}$, то складена квадратурна формула трапеції дасть нам:

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)),$$

що є сумою площ трапецій, що зображені на рис. 1.

Питання 2.

Умова. Побудова полінома Лагранжа у формі визначника.

Відповідь. Нехай маємо функцію $f(x)$, що визначена на відрізку $[\alpha, \beta]$. Також задамо розбиття $\pi_n[\alpha, \beta] = \{x_i\}_{i=0}^n$. У кожному вузлі, ми можемо знайти значення функції. Позначимо $y_i := f(x_i)$.

Визначимо, що таке поліном Лагранжа.

Означення: Поліном Лагранжа

Поліномом Лагранжа називають поліном виду $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \gamma_k x^k$ такий, що $L_n(x_k) = y_k \ \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Отже, якщо підставити умову $L_n(x_k) = y_k$ для всіх k, то отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \gamma_k x_0^k = y_0 \\ \sum_{k=0}^n \gamma_k x_1^k = y_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^n \gamma_k x_n^k = y_n \end{cases}$$

Це рівняння можна записати матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Оскільки матриця рівняння є матрицею Вандермонда, то розв'язок завжди існує (оскільки x_i всі попарно різні).

Будувати поліном Лагранжа можна кількома способами. Найбільш поширений і класичний – це явно за допомогою формули

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Проте, також, його можна знаходити із наступного рівняння:

Теорема: Подання полінома Лагранжа у формі визначника

Поліном Лагранжа можна знайти з формули:

$$\det\begin{bmatrix} L_n(x) & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x^2 & x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = 0$$

Доведення. Розкриємо визначник по першій строчці. Отримаємо:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} L_n(x) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} f(x_j) \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & \dots & x_{j-1}^n & x_{j+1}^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = 0$$

Бачимо, що множник перед $L_n(x)$ є визначником Вандермонда, тобто він відмінний від 0, що означає, що $L_n(x)$ дійсно виражається через $\{x^k\}_{k=0}^n$ і є поліномом ступеня n.

Тепер покажемо, що дійсно $L_n(x_k) = y_k, k \in \{0, \dots, n\}$. Для цього підставимо $x = x_k$ у наш початковий визначник. Отримуємо:

$$\det\begin{bmatrix} L_n(x_k) & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_k & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_k^2 & x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^n & x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Якщо знову скористатися нашим розкладанням, то маємо

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} L_n(x_k) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} f(x_j) \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^n & \dots & x_{j-1}^n & x_{j+1}^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = 0$$

Помітимо, що

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^n & \dots & x_{j-1}^n & x_{j+1}^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = 0 \ \forall j \neq k,$$

оскільки при $j \neq k$ будемо мати два однакових стопвчика. Тому

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} L_n(x_k) + (-1)^{k+1} f(x_k) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^n & \dots & x_{k-1}^n & x_{k+1}^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = 0$$

Коефіцієнт перед $L_n(x_k)$ є в точності коефіцієнтом перед $f(x_k)$ зі знаком мінус. Щоб це побачити, треба здвинути перший рядок правого детермінанта на k позицій праворуч, тоді отримаємо, що коефіцієнт перед $f(x_k)$ дорівнює визначник Вандермонда, множений на $(-1)^{2k+1} = -1$. Звідси одразу $L_n(x_k) = f(x_k)$. ■

Загальний випадок для системи Чебишева. В загальному випадку, якщо ми записуємо поліном Лагранжа у вигляді $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)$, де $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ – система Чебишева, то інтерполяційний поліном можемо знайти з рівняння

$$\det \begin{bmatrix} L_n(x) & f(x_0) & f(x_1) & \dots & f(x_n) \\ \varphi_0(x) & \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} = 0$$

Тут ми скористались терміном **система Чебишева**:

Означення: Система Чебишева

Система функції $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ називається системою Чебишева порядку n на відрізку $[\alpha, \beta]$, якщо будь-який узагальнений многочлен $\sum_{k=0}^{n} \beta_k \varphi_k(x)$ при $\sum_{k=0}^{n} \beta_k^2 \neq 0$, має на відрізку не більше n різних коренів.

Усі попередні теореми та твердження мають аналогічне доведення для загального випадку. Єдине, варто довести наступне твердження:

Твердження: Детермінант з системою Чебишева

Якщо $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ є системою Чебишева, то

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0$$

Доведення. Нехай від супротивного, детермінант нульовий. Тоді стовпці є лінійно залежними, тобто знайдеться $\{\beta_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \beta_k^2 \neq 0$ такі, що

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} \varphi_k(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_n) \end{bmatrix} \beta_k = 0$$

Або, можна записати

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x_j)\beta_k = 0 \; \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

Тобто ми знайшли $n+1$ різних коренів на заданому відрізку, що суперечить тому факту, що $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ є системою Чебишева. ■