§ Диференціальні рівняння як моделі процесів §

Задача 1: Використання популяційної моделі.

Умова. Кількість населення Землі зараз складає приблизно $N_0 = 8$ млрд людей, а щоденний ($\Delta t = 1$ день) приріст дорівнює приблизно $\Delta N = 200$ тисяч людей. Припустимо, що швидкість, з якою збільшується населення, пропорційна кількості людей, і коефіцієнт пропорційності не змінюється.

1. Якою буде кількість людей у 2050 році?
2. Коли кількість людей досягне $N = 50$ млрд?
3. З'ясуйте, чи сильно зміниться результат підрахунків, якщо врахувати або не врахувати високосні роки.
4. З'ясуйте, наскільки відрізняються результати, отримані з міркувань диференціального рівняння і з міркувань різнецевого рівняння.

Розв'язок.

Пункт 1. Нехай $n(t)$ – залежність кількості населення у млрд від часу t у роках, що відкладений від 2024 року. За умовою, рівняння динаміки зміни кількості населення:

$$\dot{n} = \kappa n \implies n(t) = n(0)\exp(\kappa t) \tag{1.1}$$

За умовою $n(0) = N_0$, тому $n(t) = N_0 \exp(\kappa t)$. Залишилось знайти κ, що ми зробимо через умову на щоденний приріст. Помітимо, що величина $\dot{n}(t)$ показує миттєвий приріст населення у момент часу t. За умовою ми знаємо, що зараз (тобто у момент часу $t = 0$) приріст дорівнює $\Delta N/\Delta t$, тому:

$$\dot{n}(0) = \frac{\Delta N}{\Delta t} \implies \kappa N_0 = \frac{\Delta N}{\Delta t} \implies \kappa = \frac{\Delta N}{N_0 \Delta t} \tag{1.2}$$

Тому остаточно рівняння кількості населення від часу:

$$n(t) = N_0 \exp\left(\frac{\Delta N \cdot t}{N_0 \cdot \Delta t}\right) \tag{1.3}$$

Підставимо числа кількісно. Маємо $N_0 = 8$, $\Delta N = \frac{2\cdot 10^5}{10^9} = 2\cdot 10^{-4}$ і нарешті час $\Delta t = \frac{1}{365}$, тому

$$n(t) \approx 8\exp(0.009125 \cdot t) \tag{1.4}$$

2050 рік відповідає моменту часу $t = 26$, тому шукана відповідь:

$$n(26) \approx 8\exp(0.009125 \cdot 26) \approx \boxed{10.14 \text{ млрд}} \tag{1.5}$$

Пункт 2. У цьому пункті потрібно розв'язати рівняння $n(\tau) = N$ відносно τ. Оскільки залежність $n(t)$ явно задана, то зробити це просто:

$$N_0 \exp\left(\frac{\Delta N \cdot \tau}{N_0 \cdot \Delta t}\right) = N \implies \tau = \frac{N_0 \cdot \Delta t}{\Delta N} \log\frac{N}{N_0}, \tag{1.6}$$

де через log позначено логарифм за основою e. Залишається підставити числа:

$$\tau = \frac{8}{365 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \log\frac{50}{8} \approx 200 \tag{1.7}$$

Отже, така кількість населення буде приблизно у $\boxed{2224}$ році.

Пункт 3. Навіть не проводячі конкретні підрахунки, питання важливості враховування або не враховування високосних років не дуже змістовне. Якщо навіть припустити, що це викликає похибку, є дуже багато факторів окрім цього, що впливають на порядок більше:

- Чи дійсно населення складає саме 8 млрд і на скільки можна довіряти демографічним данним? В деяких країнах порахувати кількість взагалі дуже складно, тому точність наврядше можна сказати більше ніж в десятках тисячах. В багатьох випадках, ці числа взагалі лише є оцінками (як, наприклад, взяті нами 8 млрд).

- Коли ми беремо, що приріст є приблизно 200 тисяч людей на день – це інша оцінка, що скоріше за все була попередньо усереднена по іншим джерелам. Звичайно, що щоденний приріст кожного дня є різним і оцінити таку величину теж не можна абсолютно точно.

- Напевно, головна проблема – це обрана модель. Чи дійсно ми маємо чисту експоненту? Хоч це і достатньо непогане наближення, проте насправді модель росту популяції значно складніша і наш обраний коефіцієнт κ не є постійним.

Проте, нехай ми розглядаємо нашу ідеалізовану задачу і вирішили врахувати високосний рік. Основне місце, де ми його враховували – це коли знаходили значення Δt у роках. Нехай ми вирішили взяти $\Delta\widetilde{t} = \frac{1}{365.25}$ і підставити у залежність $n(t)$:

$$\widetilde{n}(t) \approx N_0 \exp\left(\frac{\Delta N \cdot t}{N_0 \cdot \Delta\widetilde{t}}\right) \approx 8\exp(0.00913125t) \tag{1.8}$$

Знайдемо відносну різницю:

$$\epsilon = \frac{\widetilde{n} - n}{n} = \frac{\widetilde{n}}{n} - 1 = \exp(6.25 \cdot 10^{-6} \cdot t) - 1 \tag{1.9}$$

Отже, якщо взяти навіть $t = 100$, то відносна різниця $\epsilon \approx 0.063\%$ – нехтовна величина.

Пункт 4. Розглянемо різнецеве рівняння, де $n[d]$ позначає населення у день d (щоб відрізняти неперервну залежність $n(\cdot)$ від дискретної $n[\cdot]$, ми пишемо різні дужки). Тоді, динаміка зміни кількості населення:

$$n[d+1] = (1+\beta) \cdot n[d], \tag{1.10}$$

де $1+\beta$ – коефіцієнт росту населення. За умовою, $n[1] = n[0] + \Delta N$ та $n[0] = N_0$, звідки отримуємо:

$$n[1] = (1+\beta)N_0 = N_0 + \Delta N \implies \beta = \frac{\Delta N}{N_0} \tag{1.11}$$

Також, добре видно, що

$$n[d] = (1+\beta)^d \cdot n[0] \tag{1.12}$$

Тому остаточно:

$$n[d] = N_0 \left(1 + \frac{\Delta N}{N_0}\right)^d \tag{1.13}$$

Тепер спробуємо порахувати перший пункт з урахуванням такої залежності. 2050 рік буде через 26 років, а отже приблизно $26 \cdot 365 = 9490$ днів, тому

$$n[9490] = 8 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{8}\right)^{9490} \approx 10.14 \text{ млрд}, \tag{1.14}$$

що майже не відрізняється від попередньо отриманого результату.

Чому так трапилось? Позначимо $\frac{\Delta N}{N_0 \Delta t}$ через $\zeta \approx 0.009 \ll 1$. Тоді, неперервна величина має вигляд:

$$n(t) = N_0 \exp(\zeta t) = N_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k t^k}{k!} \tag{1.15}$$

Тепер подивимось на $n[d]$. Якщо нам потрібно отримати кількість через t років, то нам треба знаходити $n[d_t]$, де $d_t = t/\Delta t$ (якщо вважаємо $\Delta t = 1/365$, то $d_t \in \mathbb{N}$) тобто

$$n[d_t] = N_0 \left(1 + \zeta\Delta t\right)^{t/\Delta t} = N_0 \sum_{k=0}^{d_t} C_{d_t}^k (\zeta\Delta t)^k \tag{1.16}$$

Далі помітимо, що ζ^2 – нехтовна величина, тому ми можемо записати:

$$n(t) \approx N_0(1 + \zeta t),\ n[d_t] \approx N_0(1 + d_t\zeta\Delta t) = N_0(1 + \zeta t) \tag{1.17}$$

Отже, дійсно отримали, що $n(t) \approx n[d_t]$, якщо вважати ζ^2 малою величиною (що дійсно є так). Якщо нехтувати ζ^3, то відмінність вже буде:

$$\frac{n(t)}{N_0} \approx 1 + \zeta t + \frac{\zeta^2 t^2}{2} \tag{1.18}$$

$$\frac{n[d_t]}{N_0} \approx 1 + \zeta t + \frac{d_t(d_t - 1)\zeta^2\Delta t^2}{2} \tag{1.19}$$

Отже,

$$\frac{n(t)}{N_0} - \frac{n[d_t]}{N_0} \approx \frac{\zeta^2 t\Delta t}{2} \approx 1.1 \cdot 10^{-7} \cdot t, \tag{1.20}$$

що є дуже малим відхиленням.

Задача 2: Альтернативна популяційна модель.

Умова. Диференціальне рівняння $\dot{x} = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ теж може використовуватися у популяційній динаміці. Нарисуйте ескіз графіків розв'язків цього рівняння, не розв'язуючи його. В чому відмінність цих розв'язків від розв'язків логістичного рівняння $\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right)$?

Розв'язок. Нехай ми задаємо значення $x_0 = x(0)$ – початкову популяцію. Одразу видно, що якщо $x_0 = K$, то $\dot{x}(0) = 0$ і тому графік буде просто горизональною прямою $x(t) \equiv K$. В цьому схожість заданого сімейства розв'язків з сімейством розв'язків $\dot{x} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, де ситуація при $x(0) = K$ аналогічна.

Отже, нехай $x_0 < K$. Тоді $\dot{x}(0) > 0$, тому кількість популяції почне зростати, причому буде зростати асимптотично до прямої $x \equiv K$. Дійсно, для усіх $x \in [0, K)$ похідна додатня, тому функція $x(t)$ монотонно зростає, але $\lim_{x\to K^-} \dot{x} = 0$, тому крива вийде на пряму (окрім того, $x(t)$ не буде перетинати цю пряму, міркуючи аналогічно, як це було зроблено на лекції).

Для $x_0 > K$ ситуація симетрична – $x(t)$ буде зменшуватись асимптотично до $x \equiv K$.

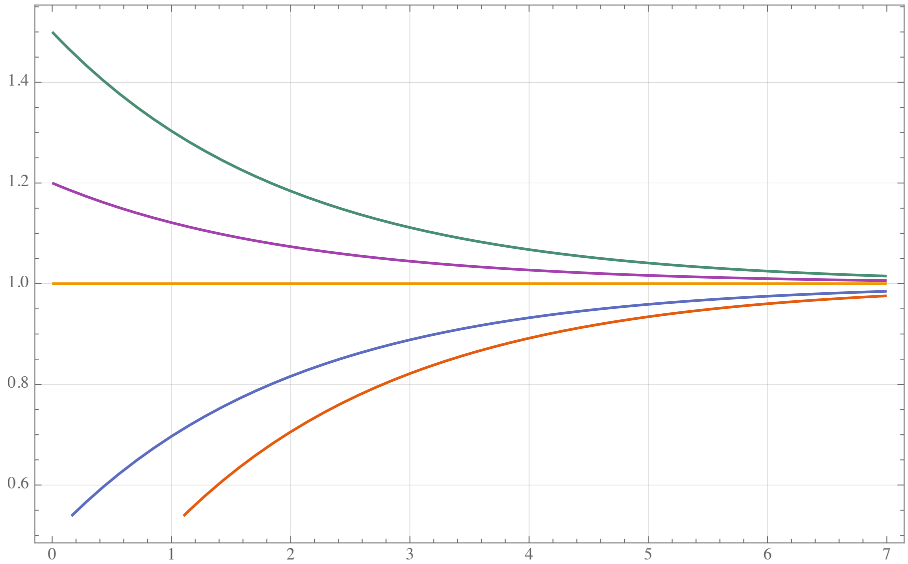

Рис. 1: Ескіз розв'язків рівняння $\dot{x} = a(1 - \frac{x}{K})$ при $K = 1$. Жовта лінія відповідає початковій умові $x_0 = K = 1$, синя та червона – $x_0 < K$, зелена та фіолетова – $x_0 > K$.

Ескізи графіків для $K = 1$ зображені на рис. 1.

Також, для самоперевірки, можемо отримати конкретні розв'язки:

$$x(t) = K + (x_0 - K)\exp\left(-\frac{at}{K}\right) \tag{2.1}$$

Як бачимо, дійсно $\lim_{t\to\infty} x(t) = K$, причому знак $\dot{x} = a(1 - \frac{x_0}{K})e^{-at/K}$ визначається виключно знаком виразу $1 - \frac{x_0}{K}$.

Головна відмінність від розв'язків $\dot{x} = ax(1 - \frac{x}{K})$ – відсутність точки перегину. Дійсно, навіть користуючись початковим рівнянням без розв'язків:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(a\left(1 - \frac{x}{K}\right)\right) = -\frac{1}{K}\cdot\dot{x}. \tag{2.2}$$

Оскільки $\dot{x} = 0$ лише коли $x_0 = K$, то $\ddot{x} \neq 0$ і тому точки перегину немає. В свою чергу, $\dot{x} = ax(1 - \frac{x}{K})$ може мати точки перегину, як добре видно по ескізам з лекції.