Зачётное задание по векторной алгебре
Захаров Дмитрий, МП-11, 1 академическая группа
Вариант 8

Задача 1. Дано параллелограмм $ABCD$. Точка E делит сторону BC в отношении $4:1$, а точка F делит сторону CD в отношении $2:3$. Найти координаты точек A, B, C, D, E, F:

- В системе координат $\{A, \vec{AB}, \vec{AD}\}$.
- В системе координат $\{A, \vec{AE}, \vec{AF}\}$.

Решение. Изобразим рисунок:

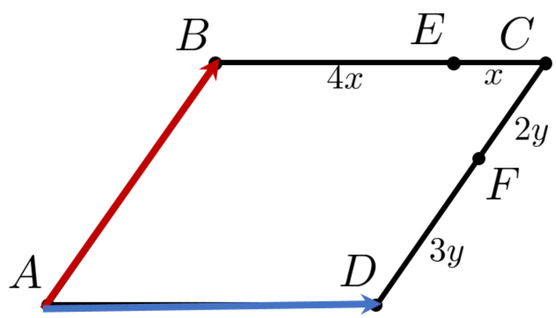

Рис. 1: Визуализация задачи

В такой системе координат достаточно легко найти координаты всех точек из рисунка. Имеем:

$$\vec{r}_A = 0 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD} \implies A(0,0)$$

$$\vec{r}_B = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD} \implies B(1,0)$$

$$\vec{r}_C = 1 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AD} \implies C(1,1)$$

$$\vec{r}_D = 0 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AD} \implies D(0,1)$$

$$\vec{r}_E = 1 \cdot \vec{AB} + \frac{4}{5} \cdot \vec{AD} \implies E(1,4/5)$$

$$\vec{r}_F = \frac{3}{5} \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AD} \implies F(3/5, 1)$$

Перейдём ко второму пункту. В этом случае воспользуемся формулой преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Заметим, что при переходе к системе координат $\{A, \vec{AE}, \vec{AF}\}$ у нас не смещается начало координат, а поэтому вектор смещенения начала координат равен $\vec{0}$. Таким образом, чтобы найти новые координаты воспользуемся формулой:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Координаты базисов в старой системе координат мы уже нашли: $\vec{AE} = (1, 4/5), \vec{AF} = (3/5, 1)$. Таким образом имеем, что $c_{11} = 1, c_{21} = 4/5, c_{12} = 3/5, c_{22} = 1$. Осталось найти обратную матрицу M:

$$M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3/5 \\ 4/5 & 1 \end{vmatrix}} = \begin{pmatrix} 25/13 & -15/13 \\ -20/13 & 25/13 \end{pmatrix}$$

Таким образом, подставим все координаты:

$$\vec{r}_A = M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies A(0, 0)$$

$$\vec{r}_B = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/13 \\ -20/13 \end{pmatrix} \implies B(25/13, -20/13)$$

$$\vec{r}_C = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/13 \\ 5/13 \end{pmatrix} \implies C(10/13, 5/13)$$

$$\vec{r}_D = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/13 \\ 25/13 \end{pmatrix} \implies D(-15/13, 25/13)$$

$$E(1, 0), \ F(0, 1)$$

Задача 2. Базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ образуют угол $\pi/4$ и имеют длины $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_2\| = 2$. Найти угол β между векторами $\vec{p} = \{3, 1\}$, $\vec{q} = \{-1, 2\}$.

Решение. Для начала найдём метричные коэффициенты:

$$g_{11} = \|\vec{e}_1\|^2 = 2, \; g_{22} = \|\vec{e}_2\|^2 = 4$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \|\vec{e}_1\| \|\vec{e}_2\| \cos\theta = 2$$

Далее найдём длины векторов:

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} = \sqrt{9g_{11} + 6g_{12} + g_{22}} = \sqrt{34}$$

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{\langle \vec{q}, \vec{q} \rangle} = \sqrt{g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22}} = \sqrt{10}$$

Найдём скалярное произведение $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} = 12$$

Таким образом, косинус угла между векторами:

$$\cos\beta = \frac{\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle}{\|\vec{p}\| \|\vec{q}\|} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

Ответ: $\beta = \arccos \frac{6}{\sqrt{85}}$

Задача 3. Даны вершины треугольника $A(1, 2, -3)$, $B(5, 1, 5)$, $C(1, -2, 0)$. Найти внешний угол θ при вершине A.

Решение. Для начала найдём угол A. Для этого найдём угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Эти векторы имеют координаты:

$$\vec{AB} = \{4, -1, 8\}$$

$$\vec{AC} = \{0, -4, 3\}$$

Длины этих векторов $\|\vec{AC}\| = 5$, $\|\vec{AB}\| = 9$, а скалярное произведение равняется $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 28$. Таким образом:

$$\cos A = \frac{28}{45}$$

Заметим, что нужный нам внешний угол θ равен $\pi - A$. Таким образом, $A = \pi - \theta$. Имеем:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{28}{45} \implies \cos\theta = -\frac{28}{45}$$

Ответ: $\theta = \arccos(-28/45)$.

Задача 4. Даны вершины пирамиды $A(1,-1,2)$, $B(2,1,1)$, $C(-1,3,-3)$, $D(-2,2,4)$. Найти длину высоты h, опущенной из вершины B на грань ACD.

Решение. Заментим следующее: если бы мы знали объём пирамиды V, а также площадь грани $S(ACD)$, то ответом бы было:

$$V = \frac{1}{3}S(ACD)h \implies h = \frac{3V}{S(ACD)}$$

Для начала найдём объём пирамиды. Для этого введём вектора $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$. Найдём их координаты:

$$\vec{AB} = \{1,2,-1\},\ \vec{AC} = \{-2,4,-5\},\ \vec{AD} = \{-3,3,2\}$$

Найдём смешанное произведение:

$$(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 55$$

Заметим, что объём:

$$V = \frac{1}{6}\cdot(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}) = 55/6$$

Теперь найдём площадь грани ACD. Для этого воспользуемся тем фактом, что:

$$S(ACD) = \frac{1}{2}\|\vec{AD}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{926}}{2}$$

Таким образом, можем найти высоту:

$$h = \frac{3V}{S(ACD)} = \frac{55}{\sqrt{926}}$$

Ответ: $h = \frac{55}{\sqrt{926}}$.

Задача 5. Дан вектор $\vec{q} = [(3\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}) \times (\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})]$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - взаимно перпендикулярные отрицательно ориентированные векторы единичной длины. Найти длину вектора $\vec{q}$.

Решение. Для начала заметим, что:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{b} \times \vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{c}\| = 1$$

Этот факт следует из того, что все векторы единичной длины а также они взаимно перпендикулярные, поэтому геометрический смысл их попарного векторного произведения - это площадь квадрата с длиной стороны 1, что очевидно равняется 1. Далее воспользуемся дистрибутивностью векторного произведения и раскроем скобки:

$$[(3\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}) \times (\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})] = 10[\vec{a} \times \vec{b}] + 7[\vec{a} \times \vec{c}] - 12[\vec{b} \times \vec{c}]$$

Для этого результата мы воспользовались несколькими фактами. Во-первых, $[\vec{b} \times \vec{a}] = -[\vec{a} \times \vec{b}]$, а, во-вторых, $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$.

Итак, на данном этапе заметим следующее: наш вектор $\vec{q}$ является линейной комбинацией 3 векторов: $[\vec{a} \times \vec{b}]$, $[\vec{a} \times \vec{c}]$ и $[\vec{b} \times \vec{c}]$. Заметим, что эти 3 вектора взаимно перпендикулярные (это следует из определения векторного произведения), а также все имеют единичную длину (это мы доказали в первой формуле). Таким образом, мы можем находить длину вектора $\vec{q}$ по классической формуле $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ т.к. перед нами линейная комбинация ортогональных базисов (если перейти в соответствующую систему отсчёта). В таком случае нас даже не волнует ориентация этих векторов, т.к. важен лишь модуль вектора. Таким образом:

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{10^2 + 12^2 + 7^2} = \sqrt{293}$$

Ответ: $\|\vec{q}\| = \sqrt{293}$.