Test #1

Задание 1.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. От третьей колонки отнимем вторую:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по третьей колонке. Получим:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Далее считаем ручками (перед этим добавив в новом определителе к 1 столбцу 3ий, а затем вычев из 1 столбца — 2ой):

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \left(- \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = -129$$

Ответ: -129

Задание 2.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение. К 4ому ряду добавим 3ий, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по последнему ряду. Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\delta$$

где δ — новый определитель 3×3. А этот определитель уже можно посчитать и ручками:

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 8$$

Таким образом начальный определитель равен: $2 \cdot 8 = 16$.

Ответ: 16

Задание 3.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Перед нами определитель Якоби, где:

$$a_j = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ 7, & j \in \overline{2,n} \end{cases}; \quad b_j = 1, j \in \overline{1,n}; \quad c_j = 6, j \in \overline{1,(n-1)}.$$

Таким образом, если обозначить начальный определитель как J_n, то мы имеем следующую рекуррентную формулу:

$$J_n = 7J_{n-1} - 6J_{n-2}, \ J_1 = 2, \ J_2 = 8$$

Теперь решим уравнение $x^2 = 7x - 6$. Получим 2 корня: $x_1 = 6, x_2 = 1$. Таким образом, наш определитель имеет вид:

$$J_n = \gamma_1 \cdot 6^n + \gamma_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$$

Коэффициенты γ_1, γ_2 найдём из уравнения:

$$\begin{cases} 6\gamma_1 + \gamma_2 = 2 \\ 36\gamma_1 + \gamma_2 = 8 \end{cases}$$

Получим $\gamma_1 = 1/5, \gamma_2 = 4/5$. Таким образом, окончательно имеем:

$$J_n = \frac{6^n + 4}{5}$$

Ответ: $J_n = \frac{6^n+4}{5}$

Задание 4.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 343 & 27 & 64 & 125 \\ 49 & 9 & 16 & 25 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Для начала запишем матрицу в немного другом виде:

$$\begin{vmatrix} 7^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 7^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 7^1 & 3^1 & 4^1 & 5^1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Имеем матрицу, у которой определитель чем-то напоминает определитель Вандермода, однако нужно ещё проделать некоторую работу. Для начала транспонируем нашу матрицу воспользовавшись тем фактом, что $\det A = \det A^T$:

$$\begin{vmatrix} 7^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 7^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 7^1 & 3^1 & 4^1 & 5^1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7^3 & 7^2 & 7^1 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 \\ 5^3 & 5^2 & 5^1 & 1 \end{vmatrix}$$

Теперь поменяем 1ый и 4ый столбец, а также 2ой и 3ий. Это приведёт к тому, что определитель поменяет свой знак 2 раза, т.е. в итоге не поменяет вообще. Получим:

$$\begin{vmatrix} 7^3 & 7^2 & 7^1 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 \\ 5^3 & 5^2 & 5^1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7^1 & 7^2 & 7^3 \\ 1 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5^1 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix}$$

Собственно теперь уже перед нами определитель Вандермода, где $x_1 = 7, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$. Вспомним формулу определителя Вандермода:

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j)$$

Подставим числа:

$$W(7, 3, 4, 5) = (5-4)(5-3)(5-7)(4-3)(4-7)(3-7) = -48$$

Ответ: -48

Задание 5.

Найти определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_1 + y_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 + y_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n + y_n \end{vmatrix}$$

Решение: Рассмотрим значение определителя как функцию от $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, т.е. пусть он равен $G = G(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Докажем, что данная функция не зависит от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для этого отнимем от первого столбца второй, от второго третий и т.д. (в общем, от kого отнимем $(k+1)$ый, $k < n$). Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_1 + y_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 + y_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n + y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -y_1 & y_1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & -y_2 & y_2 & \dots & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -y_3 & \dots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-1} & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n + y_n \end{vmatrix}$$

Теперь заметим, что если использовать теорему Лапласа, “проходясь” по последнему столбцу сверху-вниз, мы получим, что всего-лишь один минор является ненулевым (в остальных случаях в минорах попадается строка из нулей), т.е.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_1 + y_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 + y_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n + y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & y_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n \end{vmatrix}$$

Как видим, матрица слева никаким образом не зависит от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому заметим, что в таком случае $G(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = G(0, 0, \dots, 0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, т.е. мы имеем полное право подставить любой набор $x_1, x_2, \dots, x_n$ и для любых таких наборов мы получим одинаковый детерминант. В этом случае удобно подставить нули. Имеем:

$$G(0, \dots, 0, y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

Такой определитель равен произведению элементов на главной диагонали, а поэтому:

$$G = \prod_{j=1}^{n} y_j$$

Ответ: $y_1 y_2 \dots y_n$