§ Граничні цикли 2 §

Задача 1: Задача з грузиком.

Умова. На конвеєрі, що рухається з постійною швидкістю u, стоїть вантаж масою m. Вантаж утримується на конвеєрі за допомогою пружини жорсткістю k. Нехай $x(t)$ позначає координату вантажу вздовж горизонтальної прямої (початок координат відповідає положенню вантажу, при якому пружина не стиснута і не розтягнута). На вантаж з боку конвеєра діє сила сухого тертя, яка визначається за формулою:

$$F = F(\dot{x}) = \begin{cases} F_0, & \text{якщо } \dot{x} < u \\ -F_0, & \text{якщо } \dot{x} > u \end{cases}, \tag{1.1}$$

тобто конвеєр "тягне за собою" вантаж з силою, що не залежить від швидкості. При $\dot{x} = u$ вважаємо, що сила тертя не визначена. Зауважимо, що ця сила розривна.

Запишіть систему диференціальних рівнянь, побудуйте фазовий портрет та опишіть характер руху вантажу.

Розв'язок. Для простоти позначень, введемо коефіцієнт тертя $\mu = \frac{F_0}{mg}$. Достатньо природньо вважати $\mu \in [0,1]$ (сила тертя не може стати більше за силу тяжіння). Також, позначимо циклічну частоту $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g \cdot \theta(\dot{x}),\ \theta(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} < u \\ -1, & \dot{x} > u \end{cases} \tag{1.2}$$

Спочатку цікаво дослідити поведінку цієї системи, якщо в нас було б $\theta(\dot{x}) = 1$ завжди (це відповідає, наприклад, дуже великому значенню u). Тоді система набуває вигляду $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu g$. Це рівняння можемо розв'язати явно. Зробимо заміну $z = \mu g - \omega^2 x$, тоді наше рівняння можна переписати у вигляді: $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$. Розв'язком є $z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, тоді наша функція $x(t)$:

$$x(t) = \frac{\mu g - z(t)}{\omega^2} = \frac{\mu g}{\omega^2} + A'\cos\omega t + B'\sin\omega t \tag{1.3}$$

По суті, цей розв'язок можна дещо спростити:

$$x(t) = \frac{\mu g}{\omega^2} + x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{1.4}$$

де ϕ – фазовий зсув. Отже, маємо звичайні гармонічні коливання, але вже навколо ненульового положення рівноваги $x_+ = \frac{\mu g}{\omega^2}$. Далі будемо позначати це положення через $\ell := \frac{\mu g}{\omega^2}$.

А що станеться, якщо $\theta(\dot{x}) = -1$? Наприклад, якщо конвеєр рухається з дуже великою швидкістю ліворуч? Тоді рівняння має вигляд $\ddot{x} + \omega^2 x = -\mu g$. Можна переконатись, що розв'язок цього рівняння майже аналогічний:

$$x(t) = -\ell + x_m \cos(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

Таким чином, знову маємо гармонічні коливання, але ненульове положення рівноваги вже $x_- = -\ell$. Таким чином, в залежності від напрямку руху конвеєра, в нас буде або положення рівноваги $-\ell$, або $+\ell$. Цей висновок буде далі корисним, проте аж ніяк не вичерпно дає відповідь на задачу, оскільки вираз $\dot{x}$ під час руху постійно то додатний, то від'ємний.

Повернемось до початкової системи. Отже, нехай $v = \dot{x}$, тоді

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x + \mu g \cdot \theta(v) \end{cases} \tag{1.6}$$

Знайдемо точки спокою $(\widetilde{x}, \widetilde{v})$. З першого рівняння $\widetilde{v} = 0$, а з $\widetilde{x}$ ситуація така сама, як в попередньому аналізі: якщо $u > 0$, то $\theta(0) = 1$ і тому $\widetilde{x} = \ell$. Проте, якщо $u < 0$, то $\theta(0) = -1$ і тоді $\widetilde{x} = -\ell$. В будь-якому разі, точка спокою одна і визначається лише знаком u.

Сказати тип точки дуже важко, бо ми не можемо лінеаризувати доданок $\theta(v)$. Проте далі виявиться, що перед нами центр.

Побудуємо цю систему. Цікаві два випадки: мале тертя та велике тертя. Також поки фіксуємо $u > 0$, оскільки знак не принциповий для аналізу характеру руху. Результаті показані на Рисунках 1 та 2.

Бачимо, що рух складається з двох етапів:

- Спочатку рух виглядає як затухаючі коливання.
- Далі рух зупиняється, якщо тертя велике – починає рухатись з певною постійною швидкістю (далі обговоримо, з якою саме), а далі виходить на менші коливання.

Найцікавіше, що без зміни знаку тертя, не дивлячись на те, що в системі є тертя, система все одно може нескінченно рухатись (тобто наша система еквівалентна випадку без тертя, лише зі зсувом у точці рівноваги). Проте,

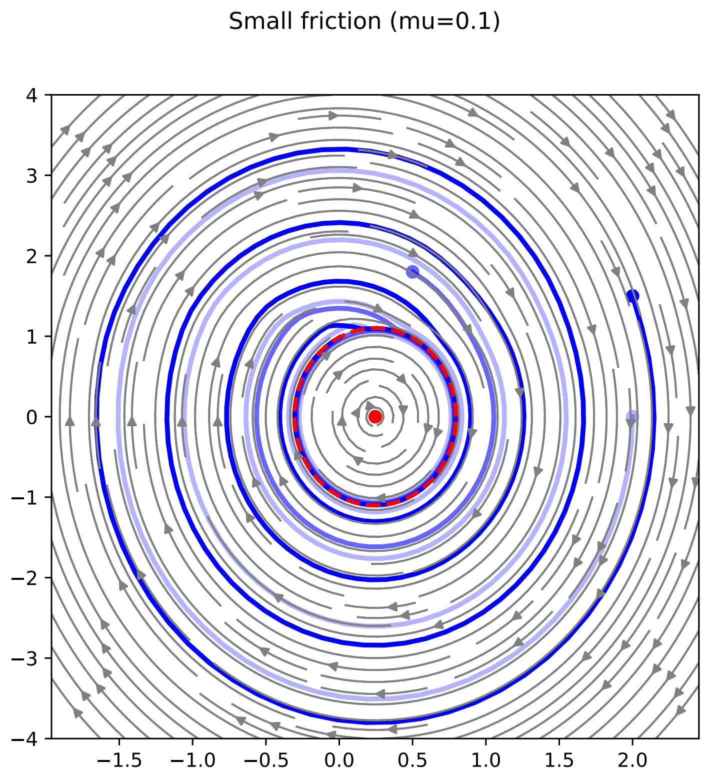

Рис. 1: Фазовий портрет для системи для тертя $\mu = 0.1$. Інші параметри: $\omega = 2$ рад/с, $g = 9.81$ м/с^2, $u = 1.0$ м/с.

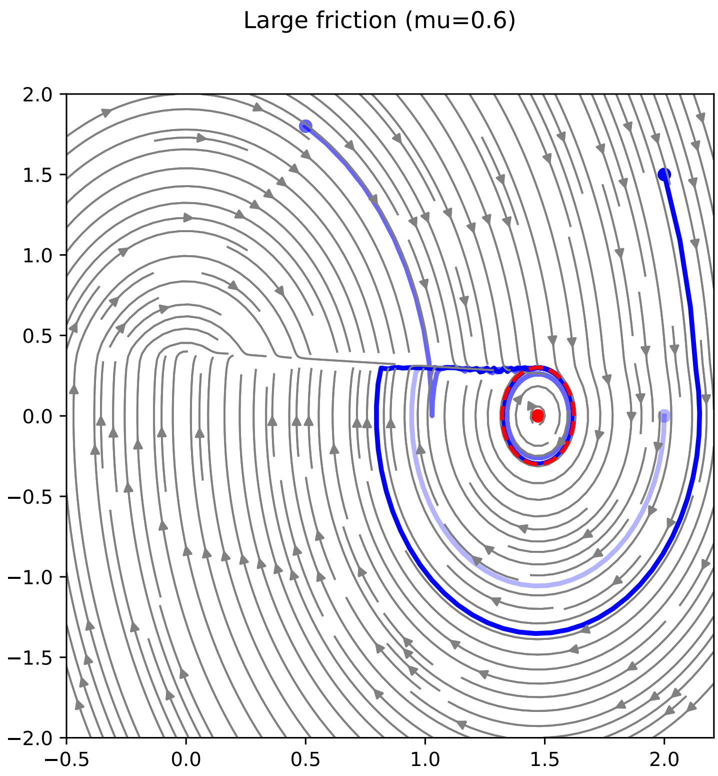

Рис. 2: Фазовий портрет для системи для тертя $\mu = 0.7$. Інші параметри: $\omega = 2$ рад/с, $g = 9.81$ м/с^2, $u = 0.3$ м/с.

чому тоді в нас грузик тормозить, коли є зміна знаку тертя? Річ у тому, що на фазовому портреті, коли грузик переходить пряму $v = u$, то він виходить на коло меньшого радіусу. Таким чином, після кожного перетину цієї прямої, радіус стає все меньшим і меньшим, поки швидкість не стане достатньо малою.

Цікаво також наступне – а на яку саме швидкість виходе груз? Достатньо логічно вважати, що на швидкість конвеєра u. Дійсно, уявімо просту ситуацію: нехай ми відпускаємо грузик на початковій відстані $x_0 > 0$ з нульовою швидкістю. Звичайно, що при цьому сила тертя буде направлена праворуч, а сила пружини буде тягнути грузик ліворуч. Грузик почне рухатись лише якщо сила пружини буде більше за силу тертя: $kx_0 > \mu mg \implies x_0 > \frac{\mu mg}{k} = \ell$. В будь-якому іншому випадку, грузик не зрушиться, а отже буде просто рухатись зі швидкістю конвеєра.

Тепер нехай грузик ще і має початкову швидкість. З плином часу, швидкість коливається в певних межах від від'ємного до додатного значення, а амплітуда коливань також зменьшується. В деякий момент, швидкість стає нульовою, а координата опиняється в межах $(0, \ell)$ – тоді грузик зупиняється і починає рухатись по прямій.

Що відбувається далі? Оскільки грузик рухається праворуч зі швидкістю u, то з часом координата стає достатньо великою і грузик знову починає коливатись.

Більш того, ми можемо дуже конкретно вказати на який цикл виходить наш грузик. А саме, ми знаємо, що координата грузика при малих швидкостях описується як $x(t) = \ell + x_m \cos(\omega t + \phi)$. Оскільки грузик починає "відриватись" на координаті ℓ зі швидкістю u, то ця залежність набуває вигляду $x(t) = \ell + \frac{u}{\omega} \sin \omega t$. На фазову портреті, це відповідає еліпсу з півосями u/ω та u з центром у $(\ell, 0)$. Він позначений червоним пунктирами на Рисунках 1 та 2.