Домашня робота з диференційних рівнянь #2

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра Олеговича

25 лютого 2023 р.

1 Завдання 103.

Умова. Розв'язати рівняння

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$$

Розв'язок. Зробимо заміну $y = tx$, тоді $\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$, а отже:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2} \to x\frac{dt}{dx} + t = \frac{2tx^2 - t^2x^2}{x^2}$$

Отже, маємо:

$$x\frac{dt}{dx} + t = 2t - t^2 \to x\frac{dt}{dx} = t - t^2 \to \frac{dt}{t - t^2} = \frac{dx}{x}$$

Далі інтегруємо обидві частини. Праворуч, вочевидь, маємо $\ln|x| + C$. Зліва:

$$\int \frac{dt}{t - t^2} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \ln\left|\frac{t}{1-t}\right| + C$$

Отже, маємо:

$$\ln\left|\frac{t}{1-t}\right| = \ln(C|x|) \to \left|\frac{t}{1-t}\right| = C|x|$$

Підставляємо $t = y/x$ і отримуємо:

$$\left|\frac{y}{x-y}\right| = C|x|$$

Якщо розкрити модулі з плюсом:

$$x(x-y) = \alpha y$$

Відповідь. $x(x-y) = \alpha y$

2 Завдання 107.

Умова. Розв'язати рівняння

$$x\frac{dy}{dx} - y = x\tan\frac{y}{x}$$

Розв'язок. Зробимо підстановку $y = zx$. Тоді $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Отже:

$$x^2\frac{dz}{dx} + zx - zx = x\tan z \to \frac{dz}{\tan z} = \frac{dx}{x}$$

Права частина після інтегрування дає $\ln|x| + C$. Що стосується лівої частини, то маємо:

$$\int\frac{dz}{\tan z} = \int\frac{\cos z dz}{\sin z} = \int\frac{d(\sin z)}{\sin z} = \ln|\sin z| + C$$

Отже, остаточно:

$$\ln|x| = \ln(c|\sin z|) \to |x| = c|\sin z|$$

Остаточно:

$$|x| = c\left|\sin\frac{y}{x}\right|$$

Якщо розкрити модуль з плюсом, то отримаємо:

$$y = x\arcsin\frac{x}{c} = x\arcsin(\gamma x)$$

Відповідь. $y = x\arcsin(\gamma x)$.

3 Завдання 115.

Умова. Розв'язати рівняння

$$x - y - 1 + (y - x + 2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Розв'язок. Прямі $x - y - 1$ та $y - x + 2$ є паралельними, а отже нам потрібно зробити заміну, наприклад, $z = y - x + 2$. Тоді:

$$z\left(\frac{dz}{dx} + 1\right) = z - 1$$

Отже:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{z} - 1 = \frac{z - 1 - z}{z} = -\frac{1}{z}$$

Звідси:

$$zdz = -dx \to \frac{z^2}{2} + x = C$$

Підставляємо $z = y - x + 2$:

$$(y - x + 2)^2 + 2x = C$$

4 Завдання 118.

Умова. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

Розв'язок. Знайдемо перетин прямих $y+2 = 0$ та $x+y-1 = 0$. Отже $x + y - 1 = y + 2 \to x = 3$, а значить $y = 1 - x = -2$. Робимо заміну $\hat{x} = x - 3$ та $\hat{y} = y + 2$. Отримаємо:

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = 2\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}+\hat{y}}\right)^2$$

Робимо заміну $\eta = \frac{\hat{y}}{\hat{x}}$, звідки $\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \hat{x}\frac{d\eta}{d\hat{x}} + \eta$ і тому

$$\hat{x}\frac{d\eta}{d\hat{x}} + \eta = 2\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^2 \to \hat{x}\frac{d\eta}{d\hat{x}} = \frac{2\eta^2}{\eta^2+2\eta+1} - \eta$$

Праву частину можна трохи спростити:

$$\frac{2\eta^2}{\eta^2+2\eta+1} - \eta = \frac{2\eta^2 - \eta^3 - 2\eta^2 - \eta}{(\eta+1)^2} = -\frac{\eta(1+\eta^2)}{(1+\eta)^2}$$

Отже, остаточно:

$$\frac{(1+\eta)^2 d\eta}{\eta(1+\eta^2)} = -\frac{d\hat{x}}{\hat{x}}$$

Інтегруємо обидві частини. Права частина дає $-\ln|\hat{x}| + C$. Дріб у правій частині запишемо як:

$$\frac{(1+\eta)^2}{\eta(1+\eta^2)} = \frac{1}{\eta} + \frac{2}{1+\eta^2}$$

Отже інтеграл:

$$\int \frac{(1+\eta)^2}{\eta(1+\eta^2)} d\eta = \ln|\eta| + 2\arctan\eta + C$$

Тому маємо:

$$\ln|\hat{x}\eta| + 2\arctan\eta = C$$

Помітимо, що $\hat{x}\eta = \hat{y}$ і тому:

$$\ln|\hat{y}| + 2\arctan\frac{\hat{y}}{\hat{x}} = C$$

Підставляємо $\hat{x} = x-3, \hat{y} = y+2$:

$$\ln|y+2| + 2\arctan\frac{y+2}{x-3} = C$$

5 Завдання 123.

Умова. Розв'язати рівняння

$$2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$$

Розв'язок. Підставимо $x = \kappa^\alpha \hat{x}, y = \kappa^\beta \hat{y}$:

$$2\kappa^{\alpha+\beta} d\hat{y} + (\kappa^{2\alpha+4\beta}\hat{x}^2\hat{y}^4 + 1)\kappa^{\alpha+\beta}\hat{y}d\hat{x} = 0$$

Бачимо, що $\kappa^{\alpha+\beta}$ скорочується, а тому $2\alpha + 4\beta = 0 \to \alpha = -2\beta$. Отже покладемо $\alpha = 2, \beta = -1$. Звідси отримуємо заміну:

$$z = xy^2 \to y = \sqrt{\frac{z}{x}} \to y = \frac{\frac{z'x-z}{x^2}}{2\sqrt{z/x}} = \frac{z'x - z}{2x^2\sqrt{\frac{z}{x}}}$$

Підставляємо у рівняння:

$$2x \cdot \frac{z'x - z}{2x^2\sqrt{z/x}} + (z^2 + 1)\sqrt{z/x} = 0$$

Спрощуємо:

$$(z^2 + 1)\sqrt{z/x} = \frac{z - z'x}{x\sqrt{z/x}} \to (z^2 + 1)\frac{z}{x} = \frac{z - z'x}{x}$$

Продовжуємо:

$$z(z^2 + 1) = z - z'x \to z^3 = -z'x \to z^3 = -x\frac{dz}{dx}$$

Нарешті маємо диференційне рівняння:

$$\frac{dz}{z^3} = -\frac{dx}{x} \to \frac{z^{-2}}{-2} = -\ln|x| + c \to \frac{1}{z^2} = \ln(cx^2)$$

Якщо взяти експоненту:

$$x^2 = Ae^{1/z^2} \to x^2 = Ae^{x^{-2}y^{-4}}$$

6 Завдання 125.

Умова. Розв'язати рівняння

$$2\frac{dy}{dx} + x = 4\sqrt{y}$$

Розв'язок. Підставимо $z = \sqrt{y}$, тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = 2z\frac{dz}{dx}$$

Отже:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{x}{4z}$$

Зробимо заміну $\eta = \frac{z}{x} \to z' = x\eta' + \eta$ і тому

$$x\frac{d\eta}{dx} + \eta = 1 - \frac{1}{4\eta} \to x\frac{d\eta}{dx} = 1 - \eta - \frac{1}{4\eta}$$

Розділяємо змінні:

$$\frac{d\eta}{1 - \eta - \frac{1}{4\eta}} = \frac{dx}{x}$$

Проінтегруємо ліву частину:

$$\int \frac{d\eta}{1 - \eta - \frac{1}{4\eta}} = -2\int \frac{2\eta d\eta}{(2\eta - 1)^2} = -2\int \left(\frac{2\eta - 1}{(2\eta - 1)^2} + \frac{d\eta}{(2\eta - 1)^2}\right) d\eta$$

Далі окремо дроби інтегруються легко і ми отримуємо:

$$\frac{1}{2\eta - 1} - \ln(1 - 2\eta) = \ln(cx) \to \ln(cx(1 - 2\eta))(2\eta - 1) = 1$$

Підставляємо $\eta = \frac{\sqrt{y}}{x}$:

$$\ln\left(cx\left(1 - \frac{2\sqrt{y}}{x}\right)\right)\left(\frac{2\sqrt{y}}{x} - 1\right) = 1$$

Або:

$$(2\sqrt{y} - x)\ln\left(\alpha(x - 2\sqrt{y})\right) = x$$