3️⃣

Homework #3

Зауваження. Оскільки в цьому домашньому завданні усі номера на інтегрування частинами, то під формулюванням “через v оберемо X, а через du оберемо вираз Y” мається на увазі зведення інтегралу до виразу $\int vdu$ для подальшого застосування формули інтегрування по частинах $\int vdu = vu - \int udv$.

Завдання 20(2)

Знайти

$$I = \int \arccos(5x-2)dx$$

Розв’язок. Зробимо заміну $t = 5x - 2 \to dt = 5dx \to dx = dt/5$.
Отримаємо:

$$I = \int \arccos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \arccos t dt$$

Інтегруємо по частинах, тобто скористаємося відношенням $\int vdu = vu - \int udv$. В якості v візьмемо $\arccos t$, тоді $dv = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, а в якості $du = dt$, тоді $u = t$. Отже

$$I = \frac{1}{5}\left(t\arccos t + \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{5x-2}{5}\arccos(5x-2) + \frac{1}{5}\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Отже залишилось лише знайти значення $\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$. Зробимо заміну $\xi = 1 - t^2 \to d\xi = -2tdt \to tdt = -\frac{d\xi}{2}$, тому

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{\xi} + C = -\sqrt{1-t^2} + C$$

Підставивши $t = 5x - 2$, отримаємо остаточну відповідь

$$I = \frac{5x-2}{5}\arccos(5x-2) - \frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-2)^2} + C$$

Завдання 21(3)

Знайти значення інтегралу

$$I = \int x^2 \sin 2x dx$$

Розв'язок. Інтегруємо по частинах. Візьмемо в якості $v = x^2 \to dv = 2xdx$ і відповідно $du = \sin 2xdx \to u = -\frac{1}{2}\cos 2x$ (тут ми вже в умі робимо заміну для $2x$, виносимо $1/2$ за інтеграл та інтегруємо сінус, тому я опущу пояснення щодо цього). Отже

$$I = -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) 2xdx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x \cos 2xdx$$

Як бачимо, ми звели інтеграл до $\int x \cos 2xdx$, що дуже подібний до начального інтегралу, але з меншим ступенем x. Отже, ми робимо все правильно і нам залишилось зробити таку ж саму процедуру ще раз. Отже, нехай $v = x \to dv = dx$ та $du = \cos 2xdx \to u = \frac{1}{2}\sin 2x$. В такому разі

$$\int x \cos 2xdx = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Отже, остаточно наш інтеграл:

$$I = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Завдання 23(3)

Знайти значення

$$I = \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $r = \ln x, x = e^r \to dr = \frac{dx}{x}$, тому

$$I = \int \frac{\ln^3 x}{x^2}\frac{dx}{x} = \int \frac{r^3}{e^{2r}}dr = \int r^3 e^{-2r}dr$$

Тепер інтегруємо по частинах. Нехай $v = r^3 \to dv = 3r^2 dr, du = e^{-2r}dr \to u = -\frac{1}{2}e^{-2r}$. Отримуємо

$$I = -\frac{1}{2}r^3e^{-2r} + \frac{3}{2}\int r^2e^{-2r}dr$$

Бачимо, що ми понизили ступінь над r у інтегралі. Отже, зробимо так ще кілька разів. Нехай $v = r^2 \to dv = 2rdr, du = e^{-2r}dr \to u = -\frac{1}{2}e^{-2r}$. Тому

$$I = -\frac{r^3e^{-2r}}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{r^2e^{-2r}}{2} + \int re^{-2r}dr\right)$$

Тепер нарешті знайдемо $\int re^{-2r}dr$. Нехай $v = r \to dv = dr, du = e^{-2r}dr \to u = -\frac{1}{2}e^{-2r}$

$$\int re^{-2r}dr = -\frac{re^{-2r}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2r}dr = -\frac{re^{-2r}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2r} + C$$

Отже

$$I = -\frac{r^3e^{-2r}}{2} - \frac{3r^2e^{-2r}}{4} - \frac{3re^{-2r}}{4} - \frac{3e^{-2r}}{8} + C$$

Або зручніше буде записати як

$$I = -\frac{4r^3 + 6r^2 + 6r + 3}{8}e^{-2r} + C$$

Замінюємо $r = \ln x$ і остаточно маємо:

$$I = -\frac{4\ln^3 x + 6\ln^2 x + 6\ln x + 3}{8x^2} + C$$

Завдання 24(3)

Знайти значення

$$I = \int e^{ax}\sin bx dx$$

Розв’язок 1. Є один доволі цікавий метод розв’язку, але думаю, що їм поки не можна користуватись, оскільки ми не вводили означень та теорем, що дозволяють працювати з комплексними числами. Але метод дуже красивий, хочу його просто тут залишити…

Далі користуємось тим фактом, що $\sin bx = \Im(e^{ibx})$, де $\Im$ — уявна частина, і тепер увесь інтеграл можемо розв'язати доволі просто:

$$I = \Im\left(\int e^{ax}e^{ibx}dx\right) = \Im\left(\int e^{(a+ib)x}dx\right) = \Im\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) + C$$

Тобто все зводиться просто до знаходження комплексної частини виразу $\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$. Застосуємо той факт, що $e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$, тому

$$I = e^{ax}\Im\left(\frac{\cos bx + i\sin bx}{a+ib}\right) + C$$

Помножуємо чисельник і знаменник на $a - ib$:

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Im\left((\cos bx + i\sin bx)(a-ib)\right) + C$$

Виділив уявну частину, нарешті отримуємо

$$I = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

Розв'язок 2. Як було сказано, поки метод не дуже чесний, тому "візьмемо" інтеграл "по-нормальному". Отже, нехай $v = e^{ax} \to dv = ae^{ax}dx$ і $du = \sin bxdx \to u = -\frac{1}{b}\cos bx$, тому

$$I = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx$$

Як бачимо, ми звели все до обчислення $\int e^{ax}\cos bxdx$, що по суті є нашим начальним інтегралом, але сінус змінився на косінус. Тому можливо, якщо ми проведемо ті ж самі маніпуляції, ми зможемо змінити косінус на сінус і таким чином повернутися до нашого начального інтегралу. Так і зробимо. Нехай $v = e^{ax} \to dv = ae^{ax}dx, du = \cos bxdx \to u = \frac{1}{b}\sin bx$, отже

$$I = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right)$$

Вираз $\int e^{ax}\sin bx$ є нашим начальним інтегралом I, тому маємо (константу ми поки опустимо і додамо її після знайдення виразу для I):

$$I = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{ae^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I$$

Отже $I(1+\frac{a^2}{b^2}) = \frac{e^{ax}}{b}(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx)$, тому

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}I = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) \to I = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$$

Завдання 26(5)

Знайти інтеграл

$$I = \int \cos^5 x dx$$

Розв'язок. Розглянемо більш загальний інтеграл:

$$J_n = \int \cos^n x dx$$

В такому разі наш інтеграл $I = J_5$. Інтегруємо по частинах. Нехай $v = \cos^{n-1} x, du = \cos x dx$, в такому разі $dv = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx, u = \sin x$, отже

$$J_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

Скористаємося тим, що $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ і отримаємо

$$\int \cos^{n-2} \sin^2 x dx = \int \cos^{n-2}(1-\cos^2 x)dx = \int \cos^{n-2} dx - \int \cos^n dx$$

Помітимо, що ми отримали ніщо інше як $J_{n-2} - J_n$, тобто:

$$J_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)(J_{n-2} - J_n)$$

Далі залишилось лише спростити вираз:

$$nJ_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)J_{n-2}$$

Звідки остаточно маємо

$$J_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) J_{n-2}$$

Отже, нам потрібно знайти J_5. Для цього спочатку знайдемо J_3 за формулою вище, а вже після цього одразу і J_5. J_1 знайти зовсім легко: $J_1 = \int \cos x dx = \sin x + C$. Далі

$$J_3 = \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C$$

І нарешті

$$I = J_5 = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{\sin x \cos^2 x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C \right)$$

Після спрощень

$$I = \frac{3 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 8}{15} \sin x + C$$

Завдання 27(1)

Знайти інтеграл

$$I = \int x^3 e^{-x^2} dx$$

Розв'язок. Спочатку зробимо заміну $\xi = -x^2, d\xi = -2xdx, xdx = -\frac{d\xi}{2}$. Тоді

$$I = \int x^2 e^{-x^2} (xdx) = \int (-\xi) e^{\xi} \left(-\frac{d\xi}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \xi e^{\xi} d\xi$$

Інтегруємо по частинах. Нехай $v = \xi \to dv = d\xi, du = e^{\xi} d\xi \to u = e^{\xi}$, тому

$$I = \frac{1}{2} \int \xi e^{\xi} d\xi = \frac{1}{2} \left(\xi e^{\xi} - \int e^{\xi} d\xi \right) = \frac{\xi - 1}{2} e^{\xi} + C$$

Підставляємо $\xi = -x^2$ і отримуємо

$$I = -\frac{1 + x^2}{2} e^{-x^2} + C$$

Завдання 27(4)

Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{\ln \ln x}{x} dx$$

Розв'язок. Зробимо заміну $t = \ln x \to dt = \frac{dx}{x}$. Отримаємо

$$I = \int \ln t dt$$

А далі просто інтегруємо по частинах. $v = \ln t \to dv = \frac{dt}{t}, du = dt \to u = t$, тому

$$I = t \ln t - \int dt = t(\ln t - 1) + C$$

Відставляємо $t = \ln x$ і отримуємо

$$I = \ln x(\ln \ln x - 1) + C$$