Зачётное задание по координатной геометрии
Захаров Дмитрий, МП-11, 1 академическая группа
Вариант 8

Задача 1. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2,-3,1)$ и перпендикулярна плоскостям $\pi_1 : x+3y-z+3 = 0$ и $\pi_2 : 2x+y-2z+1=0$

Решение. Пусть уравнение искомой плоскости π имеет вид $x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ (конечно, можно записать и $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, однако домножив это уравнение на $1/\alpha$ мы получим то же самое уравнение).

Для начала запишем условие принадлежания точки плоскости. Для этого подставим координаты точки M в уравнение плоскости π:

$$2-3\beta+\gamma+\delta=0$$

Далее запишем вектора нормали всех наших плоскостей:

$$\pi_1 : \boldsymbol{n}_1 = \{1,3,-1\}, \;\; \pi_2 : \boldsymbol{n}_2 = \{2,1,-2\}$$

$$\pi : \boldsymbol{n} = \{1,\beta,\gamma\}$$

Заметим, что раз наша плоскость π перпендикулярна плоскостям π_1 и π_2, то её вектор нормали $\boldsymbol{n}$ также перпендикулярен векторам нормали заданных плоскостей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Таким образом:

$$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1 \rangle = 0, \; \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_2 \rangle = 0$$

Запишем скалярное произведение и получим следующие 2 уравнения:

$$\begin{cases} 1+3\beta-\gamma=0 \\ 2+\beta-2\gamma=0 \end{cases}.$$

Решив это уравнение, получаем, что $\beta=0, \;\gamma=1$. Подставив эти числа в самое первое уравнение, получим $\delta=-3$. Таким образом искомое уравнение:

$$x+z-3=0$$

Задача 2. Найдите уравнение сферы, которая лежит в остром угле, образованным плоскостями $\pi_1 : 2x - 4y - 3z + 21 = 0$, $\pi_2 : 5x - 2z = 0$, и касается этих плоскостей, если её центр лежит на оси абсцисс.

Решение. Пусть центр окружности имеет координаты $C(x_0, 0, 0)$ (координаты y и z равны по нулям, т.к. $C \in Ox$ по условию).

Раз окружность касается обоих плоскостей, то и расстояния от C до этих плоскостей одинаковые. Найдём эти расстояния:

$$d(C, \pi_1) = \frac{|2x_0 + 21|}{\sqrt{29}}, \; d(C, \pi_2) = \frac{5|x_0|}{\sqrt{29}}$$

Приравниваем $d(C, \pi_1)$ и $d(C, \pi_2)$:

$$|2x_0 + 21| = 5|x_0| \implies x_0 = -3 \vee x_0 = 7$$

Осталось определить, какая из точек $C_1(-3, 0, 0), C_2(7, 0, 0)$ лежит в остром угле между плоскостями π_1 и π_2. Выпишем вектора нормали:

$$\pi_1 : \boldsymbol{n}_1 = \{2, -4, -3\}, \;\; \pi_2 : \boldsymbol{n}_2 = \{5, 0, -2\}$$

Нетрудно видеть, что $\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle > 0$, т.е. угол между $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ острый. Таким образом, схематически имеем такой рисунок:

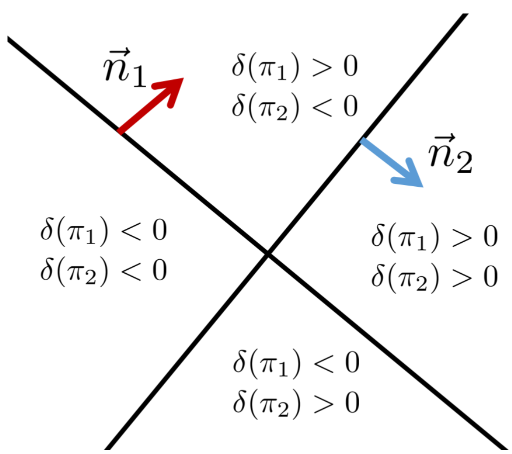

Рис. 1: Взаимное расположение π_1, π_2

Видим, что чтобы точка C лежала в остром угле, нужно, чтобы $\delta(\pi_1) = -\delta(\pi_2)$. Подставляем найденные координаты:

$$C_1 : \delta(C_1, \pi_1) = \frac{15}{\sqrt{29}},\ \delta(C_1, \pi_2) = \frac{-15}{\sqrt{29}}$$

$$C_2 : \delta(C_2, \pi_1) = \frac{35}{\sqrt{29}},\ \delta(C_2, \pi_2) = \frac{35}{\sqrt{29}}$$

Видим, что подходит только $C(-3, 0, 0)$. В таком случае радиус сферы:

$$R = \frac{15}{\sqrt{29}}$$

Таким образом, уравнение сферы:

$$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = \frac{225}{29}$$

Выглядит это всё следующим образом:

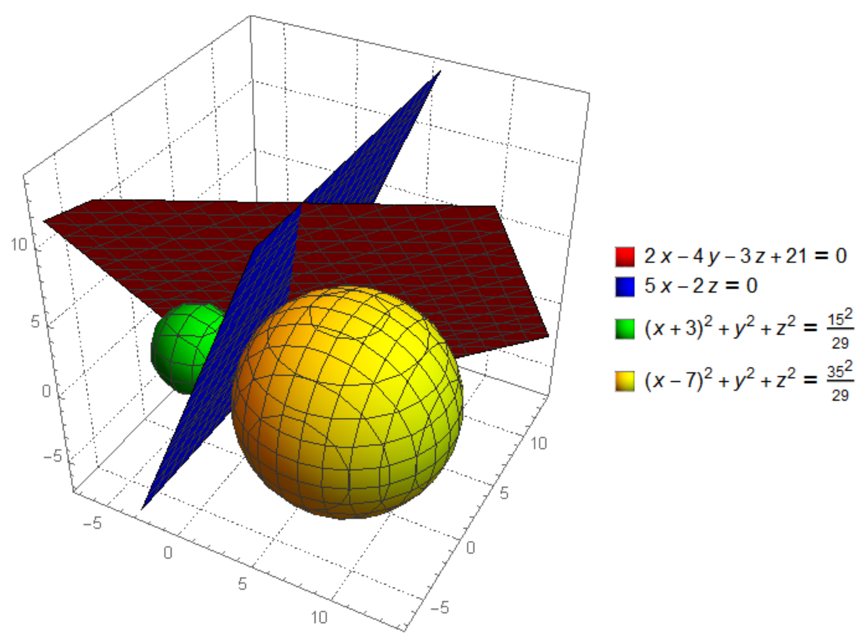

Рис. 2: Визуализация ответа

Задача 3. Докажите, что прямые

$$l_1: \ x - y - 3z = 0, \ x - 2y + z = 0$$

$$l_2: \ x = 3 + 4t, y = -3 + 7t, z = 2 - t$$

пересекаются. Найдите уравнения биссектрис острых и тупых углов между этими прямыми.

Решение. Запишем уравнение для l_1 в параметрическом виде. Пусть $z = t$. Тогда:

$$x - y = 3t, \ x - 2y = -t \implies x = 7t, \ y = 4t, \ z = t$$

Заметим, что при некотором параметре $t = t_1$ для прямой l_1 и $t = t_2$ для прямой l_2 уравнения совпадут, если прямые пересекаются. Тогда нужно проверить, есть ли решения у системы уравнений:

$$\begin{cases} 7t_1 = 3 + 4t_2 \\ 4t_1 = -3 + 7t_2 \\ t_1 = 2 - t_2 \end{cases}.$$

Из первых двух уравнений получаем, что $t_1 = t_2 = 1$. Если подставить это в третье уравнение, то оно будет выполняться. Таким образом, прямые пересекаются в точке $A(7, 4, 1)$.

Чтобы составить уравнения биссектрис, выпишем направляющие вектора:

$$\boldsymbol{l}_1 = \{7, 4, 1\}, \ \boldsymbol{l}_2 = \{4, 7, -1\}$$

Теперь найдём единичные вектора $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$:

$$\hat{l}_1 \equiv \frac{\boldsymbol{l}_1}{\|\boldsymbol{l}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \hat{l}_2 \equiv \frac{\boldsymbol{l}_2}{\|\boldsymbol{l}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти направляющие вектора биссектрис $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, найдём сумму единичных векторов $\hat{l}_1 + \hat{l}_2$ и $\hat{l}_1 - \hat{l}_2$. При этом заметим, что $\langle \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2 \rangle > 0$, а поэтом угол между векторами $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ острый. Это значит, что $\boldsymbol{L}_1 = \hat{l}_1 + \hat{l}_2$

- это направляющий вектор биссектрисы острого угла. Соответственно, $\boldsymbol{L}_2 = \hat{l}_1 - \hat{l}_2$ - биссектриса тупого угла. Находим сумму:

$$\boldsymbol{L}_1 = \hat{l}_1 + \hat{l}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{11}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \hat{l}_1 - \hat{l}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что любой вектор вида $\alpha \boldsymbol{L}_j, \alpha \in \mathbb{R}$ будет направляющим вектором биссектрисы, поэтому можем просто записать, что направляющие вектора равны:

$$\boldsymbol{L}_1 = \{1, 1, 0\},\ \boldsymbol{L}_2 = \{3, -3, 2\}$$

Наконец, учтём, что биссектриса проходит через точку пересечения $A(7, 4, 1)$. Поэтому уравнения биссектрисы острого угла:

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{0}$$

Уравнение биссектрисы тупого угла:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{2}$$

Задача 4. Найдите основу перпендикуляра, опущенного с точки $M(1, 3, 5)$ на прямую, по которой пересекаются плоскости $\pi_1 : 2x + y + z - 1 = 0$ и $\pi_2 : 3x + y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Запишем уравнение для заданной прямой l в параметрическом виде. пусть $z = t$. В таком случае:

$$2x + y = -t + 1,\ 3x + y = 3 - 2t \implies x = 2 - t,\ y = -3 + t$$

Таким образом, наша прямая имеет направляющий вектор $\boldsymbol{l} = \{-1, 1, 1\}$ и проходит через точку $\boldsymbol{r}_A = \{2, -3, 0\}$.

Для того, чтобы понять, как находить основу, изобразим рисунок:

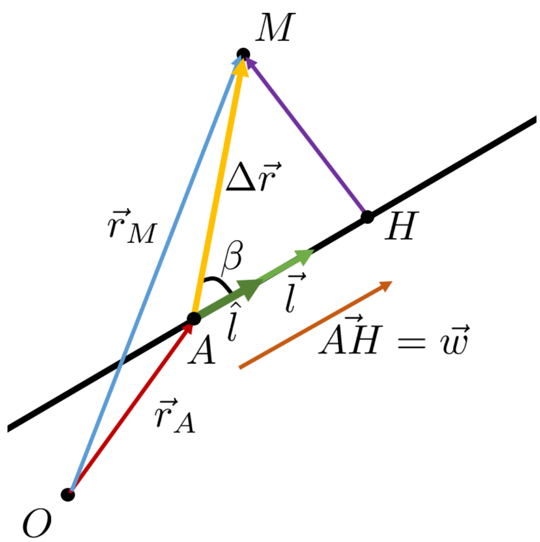

Рис. 3: Схематический рисунок

Для начала найдём вектор от точки на прямой A до заданной точки M:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Далее найдём косинус угла между $\boldsymbol{l}$ и $\Delta \boldsymbol{r}$:

$$\cos \beta = \frac{\langle \boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{r} \rangle}{\|\boldsymbol{l}\| \cdot \|\Delta \boldsymbol{r}\|}$$

Теперь найдём вектор $\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{w}$. Заметим, что модуль этого вектора равен $\|\Delta \boldsymbol{r}\| \cos \beta$ и направлен он вдоль вектора $\boldsymbol{l}$. Поэтому, мы можем записать следующее:

$$\boldsymbol{w} = \|\Delta \boldsymbol{r}\| \cos \beta \cdot \hat{l}$$

Таким образом, можем записать:

$$\boldsymbol{w} = \|\Delta \boldsymbol{r}\| \cdot \frac{\langle \boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{r} \rangle}{\|\boldsymbol{l}\| \cdot \|\Delta \boldsymbol{r}\|} \cdot \frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{l}, \Delta \boldsymbol{r} \rangle}{\|\boldsymbol{l}\|^2} \cdot \boldsymbol{l}$$

Таким образом, наша искомая основа:

$$\boldsymbol{r}_H = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_A + \frac{\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A \rangle}{\|\boldsymbol{l}\|^2} \cdot \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Найдите уравнение сферы, которая касается плоскости $\pi : 3x - 6y - 2z - 2 = 0$ в точке $Q(2, 1, -1)$, если её радиус равен 7.

Решение. Пусть центр сферы имеет координаты $C(x_0, y_0, z_0)$. Также введём вектор $\boldsymbol{CQ} = \boldsymbol{r}$. В таком случае, должно соблюдаться 2 условия: $\|\boldsymbol{r}\| = 7$ и $\boldsymbol{r}$ коллиниарен вектору нормали к плоскости $\boldsymbol{n} = \{3, -6, -2\}$. Последнее условие означает:

$$\hat{r} = \hat{n} \vee \hat{r} = -\hat{n}$$

Разберём случай $\hat{r} = \hat{n}$. Заметим, что:

$$\hat{r} \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 - x_0 \\ 1 - y_0 \\ -1 - z_0 \end{pmatrix}, \ \hat{n} \equiv \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} 2 - x_0 = 3 \\ 1 - y_0 = -6 \\ -1 - z_0 = -2 \end{cases} \implies \boldsymbol{r}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В случае $\hat{r} = -\hat{n}$ нужно поменять знаки:

$$\begin{cases} 2 - x_0 = -3 \\ 1 - y_0 = 6 \\ -1 - z_0 = 2 \end{cases} \implies \boldsymbol{r}_C = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, имеем 2 сферы:

$$\omega_1 : (x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z + 3)^2 = 49$$

$$\omega_2 : (x + 1)^2 + (y - 7)^2 + (z - 1)^2 = 49$$

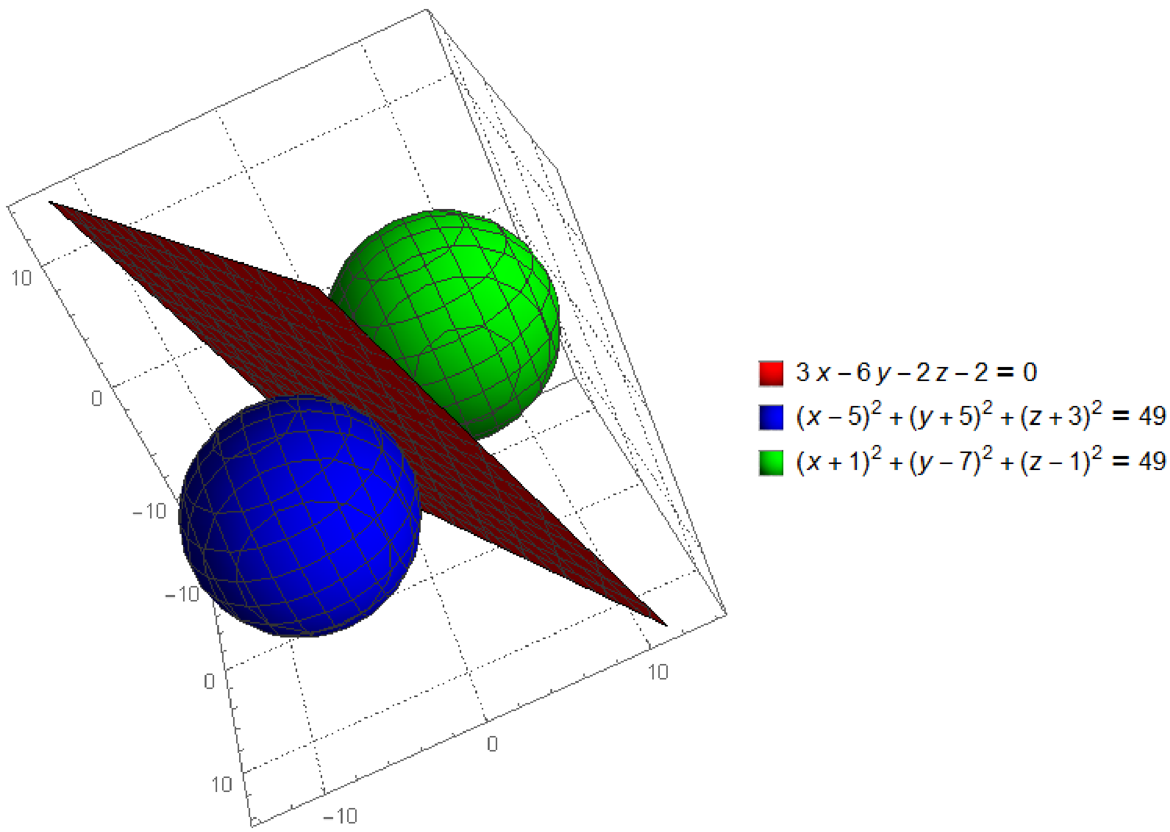

Рис. 4: Визуализация ответа