Домашня робота #2 (перша частина) з курсу "Комплексний аналіз"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Записати за допомогою нерівностей область $\mathcal{D}$, якщо її границя $\partial\mathcal{D}$ визначається кривою, що задана параметрично:

1. $z = t + it^2,\ t \in (-\infty, +\infty)$;
2. $z = \begin{cases} e^{i\pi t}, & t \in [0, 1) \\ t - 2, & t \in [1, 3] \end{cases}$
3. $z = i\cos t,\ t \in [0, 2\pi]$

Пункт 1.

Спочатку, зобразимо $\partial\mathcal{D}$. На комплексній площині маємо параметрично задану криву $\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\}(t) = \{t, t^2\}$ для $t \in (\infty, +\infty)$. Це, очевидно, є параболою $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$.

Отже, границя $\partial\mathcal{D}$ зображена на рис. 1

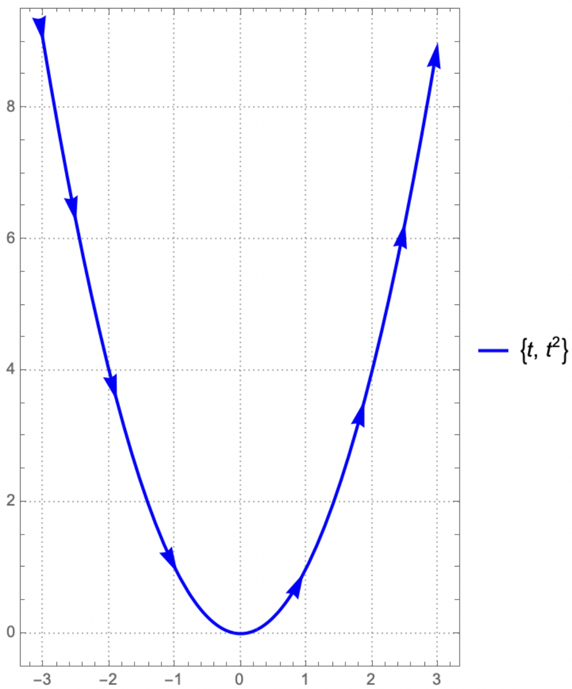

Рис. 1: Синім відмічена границя $\partial\mathcal{D}$

Перевірити, що орієнтація кривої така, як на рис. 1, можна наступним чином: будемо збільшувати t від 0 до $+\infty$. Тоді, на кривій $\{t, t^2\}$ абсциса та ордината буде збільшуватись, таким чином отримуємо праву гілку, починаючи з $(0, 0)$. Якщо будемо навпаки, зменшувати t, то будемо рухатись по зменшенню абсциси, але збільшенню ординати, тобто від $(0, 0)$ по лівій гілці параболи.

Сама область $\mathcal{D}$ буде знаходитись над цим графіком, оскільки в такому разі крива $\partial\mathcal{D}$ буде пробігати навколо $\mathcal{D}$ проти годинникової стрілки. Таким чином, відповідь зображена на рис. 2.

Нерівність ж буде записуватись як:

$$\operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2$$

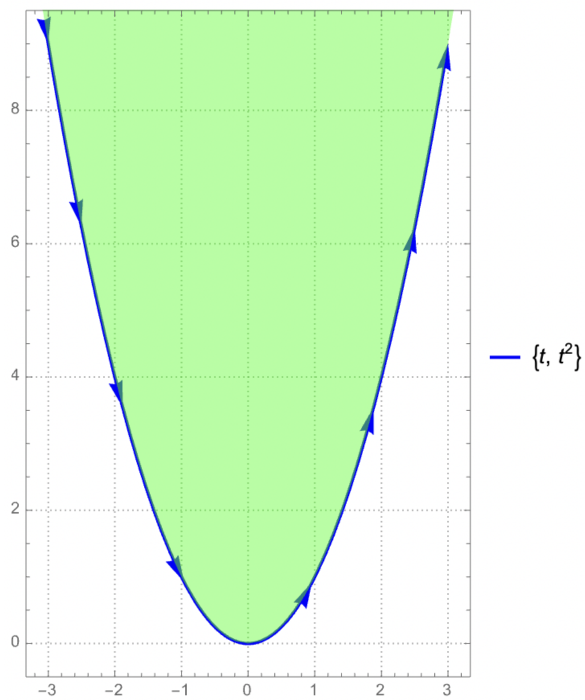

Рис. 2: Синім відмічена границя $\partial\mathcal{D}$, зеленим – область $\mathcal{D}$

Пункт 2.

Крива $z_1(t) = e^{i\pi t}, t \in [0,1)$ є дугою одиничного кола з центром в $(0,0)$ (оскільки $z_1(t) = \cos\pi t + i\sin\pi t$, тобто в декартових координатах $\{\cos\pi t, \sin\pi t\}$). Для $t = 0$ маємо $z_1(0) = 1$, а для $t = 1$ отримуємо $z_1(1) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

Таким чином, маємо рух по півколу $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{-1\}$ проти годинникової стрілки (без точки -1 оскільки $t = 1$ не включено).

Крива $z_2(t) = t - 2, t \in [1,3]$ є відрізком на $\operatorname{Im} z = 0$ від $z_2(1) = -1$ до $z_2(3) = 1$. Рух йде “праворуч”. Ітоговий результат зображено на рис. 3.

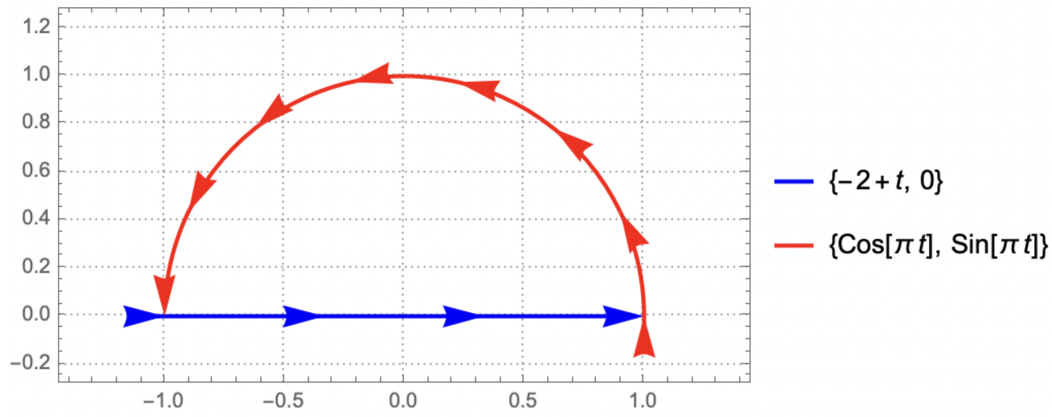

Рис. 3: Червоним відмічено криву $z_1(t) = e^{i\pi t}$, синім – криву $z_2(t) = t-2$ для відповідних границь. Для червоної кривої ми не виключали -1 щоб не склалось враження, що $\partial\mathcal{D}$ не містить точку $z_0 = -1$.

Помітимо, шо $\partial\mathcal{D}$ оббігає півкруг, що міститься "всередині", проти годинникової стрілки. Отже, цей півкруг і є областю $\mathcal{D}$. Таким чином, відповідь зображена на рис. 4, а нерівностями записується таким чином:

$$|z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0$$

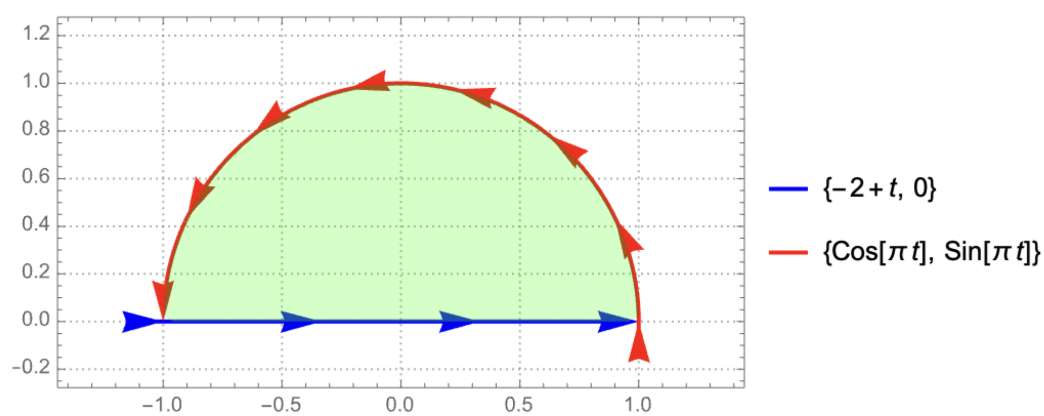

Рис. 4: Червоним відмічено криву $z_1(t) = e^{i\pi t}$, синім – криву $z_2(t) = t-2$ для відповідних границь; зеленим – область $\mathcal{D}$

Пункт 3.

$z(t) = i\cos t,\ t \in [0, 2\pi]$ є відрізком на $\operatorname{Re} z = 0$ (оскільки $\cos t$ – неперервна функція). Мінімальне значення $\cos t$ на $[0, 2\pi]$ це -1, а максимальне 1, тому це відрізок від $-i$ до $+i$. Цю множину можна записати як:

$$\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0 \wedge |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$$

Область $\mathcal{D} = \overline{\partial\mathcal{D}}$. Запишемо:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{z \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Re} z = 0 \wedge |\operatorname{Im} z| \leq 1}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0 \vee |\operatorname{Im} z| > 1\}\end{aligned}$$

Таким чином маємо нерівність $\operatorname{Re} z \neq 0 \vee |\operatorname{Im} z| > 1$.

Відповідь.

Пункт 1. $\operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2$.

Пункт 2. $|z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0$.

Пункт 3. $\operatorname{Re} z \neq 0 \vee |\operatorname{Im} z| > 1$.

Завдання 2.

Умова. Нехай $\operatorname{Re} f = u$. Відновити аналітичну функцію $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$:

1. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$;
2. $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,\ f(0) = 0$.

Розв'язок. За означенням, функція є аналітичною тоді, коли вона є $\mathbb{C}$-диференційованою. Отже, мають виконуватися умови Коші-Рімана. Інакшими словами:

$$u'_x = v'_y \wedge u'_y = -v'_x$$

Далі потрібно розв'язати цю систему диференціальних рівнянь відносно $v(x, y)$. Для цього спочатку інтегруємо перше рівняння:

$$v'_y = u'_x \implies v = \int u'_x(x, y)dy$$

і підставляємо результат у друге.

Пункт 1.

Розписавши, маємо:

$$\begin{cases} v'_y = 2x + y \\ v'_x = 2y - x \end{cases}$$

З першого рівняння $v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$. Підставляючи у друге, маємо:

$$2y + \varphi'(x) = 2y - x \implies \varphi'(x) = -x \implies \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + C$$

Отже, остаточно отримуємо

$$v(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + C$$

Пункт 2.

Знову підставляємо умову Коші-Рімана:

$$\begin{cases} v'_y = 3x^2 + 12xy - 3y^2 \\ v'_x = 6y^2 + 6xy - 6x^2 \end{cases}$$

Інтегруємо:

$$v = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + \varphi(x)$$

Підставляємо у друге:

$$6xy + 6y^2 + \varphi'(x) = 6y^2 + 6xy - 6x^2 \implies \varphi'(x) = -6x^2 \implies \varphi(x) = -2x^3 + C$$

Отже:

$$v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + C$$

Також використаємо умову, що $f(0) = 0$. Ця умова еквівалентна $u(0,0) = v(0,0) = 0$. Одразу видно, що $u(0,0) = 0$, а $v(0,0) = C$. Отже, $C = 0$. Тому остаточно

$$v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2$$

Відповідь.

1. $v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + C$. 2. $v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2$