# Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #4

Захаров Дмитро

26 квітня, 2025

## Зміст

**1 Домашня Робота** **2**
1.1 Вправа 16.3 . . . 2
1.2 Вправа 16.7 . . . 3

# 1 Домашня Робота

## 1.1 Вправа 16.3

**Умова Задачі 1.1.** Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad t > 0$$

Крайові умови $u(x,0) = 1$ та $\dot{u}(x,0) = 1$.

**Розв'язання.** Скористаємося наступним методом розв'язання: для рівняння

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

з крайовими умовами $u(x,0) = \phi(x)$ та $\dot{u}(x,0) = \psi(x)$, розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+at) + \phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta)d\zeta + \frac{a}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\zeta f(\zeta,\tau)$$

В нашому випадку, рівняння можна звести до вигляду:

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{9}\sin x$$

Таким чином, $a = 3$, $\phi(x) = 1$, $\psi(x) = 1$ та $f(x,t) = \frac{1}{9}\sin x$. Тоді, розв'язок матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\int_{x-3t}^{x+3t} d\zeta + \frac{3}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \frac{1}{9}\sin\zeta d\zeta \\
&= 1 + \frac{1}{6}\left((x+3t) - (x-3t)\right) + \frac{1}{6}\int_0^t d\tau \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \sin\zeta d\zeta \\
&= 1 + t + \frac{1}{6}\int_0^t d\tau \left(-\cos(x+3(t-\tau)) + \cos(x-3(t-\tau))\right) \\
&= 1 + t - \frac{1}{6}\int_0^t d\tau \cos(x+3(t-\tau)) + \frac{1}{6}\int_0^t d\tau \cos(x-3(t-\tau))
\end{aligned}$$

Отже, залишилось акуратно обчислити ці два інтеграли з косинусами. В першому інтегралі зробимо заміну $\theta := x + 3t - 3\tau$. В такому разі $d\tau = -\frac{1}{3}d\theta$. Маємо:

$$\frac{1}{6}\int_0^t d\tau \cos(x+3(t-\tau)) = \frac{1}{6}\int_{x+3t}^{x} \cos\theta \cdot \left(-\frac{1}{3}d\theta\right) = \frac{1}{18}\int_x^{x+3t} \cos\theta d\theta = \frac{1}{18}\left(\sin(x+3t) - \sin x\right)$$

Візьмемо другий інтеграл. Знову ж таки, зробимо заміну $\theta := x - 3t + 3\tau$. Тоді $d\tau = \frac{1}{3}d\theta$. Маємо:

$$\frac{1}{6}\int_0^t d\tau \cos(x-3(t-\tau)) = \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x} \cos\theta \cdot \left(\frac{1}{3}d\theta\right) = \frac{1}{18}\int_{x-3t}^{x} \cos\theta d\theta = \frac{1}{18}\left(\sin x - \sin(x-3t)\right)$$

Підставляючи обидва інтеграли в розв'язок, отримаємо:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= 1 + t - \frac{1}{18}\left(\sin(x+3t) - \sin x\right) + \frac{1}{18}\left(\sin x - \sin(x-3t)\right) \\ &= 1 + t + \frac{1}{9}\sin x - \frac{1}{18}\left(\sin(x+3t) + \sin(x-3t)\right)\end{aligned}$$

**Відповідь.** $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}\sin x - \frac{1}{18}\left(\sin(x+3t) + \sin(x-3t)\right)$

## 1.2 Вправа 16.7

**Умова Задачі 1.2.** Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\Delta u + t^2 x, \quad t > 0$$

Крайові умови $u(x,y,z,0) = y$ та $\dot{u}(x,y,z,0) = z$.

**Розв'язання.**

**Спосіб 1.** Оскільки $f(x,y,z) = x$, $\varphi(x,y,z) = y$ та $\psi(x,y,z) = z$ є гармонічними функціями, то розв'язок рівняння

$$u(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z) + t\psi(x,y,z) + f(x,y,z)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad g(t) = t^2$$

Підставимо усі значення:

$$u(x,y,z,t) = y + tz + x\int_0^t (t-\tau)\tau^2 d\tau = y + tz + x\left(\frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4}\right) = y + tz + \frac{1}{12}xt^4$$

Таким чином, $\boxed{u(x,y,z,t) = y + tz + \frac{1}{12}xt^4}$.

**Спосіб 2.** Зведемо рівняння до однорідного вигляду. Для цього, зробимо наступну заміну: $u(x,y,z,t) = w(x,y,z,t) + \frac{1}{12}xt^4$. Видно, що $\Delta u = \Delta w$, проте $\ddot{u} = \ddot{w} + t^2 x$. Підставляємо у початкове рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + t^2 x = 8\Delta w + t^2 x \implies \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 8\Delta w$$

Крайові умови при цьому такі самі, себто $w(x,y,z,0) = y$ та $\dot{w}(x,y,z,0) = z$. Далі, як відомо, таке рівняння можемо розв'язати як:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=at}\phi(y)dS_{\mathbf{y}}\right) + \frac{1}{t}\oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=at}\psi(y)dS_{\mathbf{y}}\right)$$

Введемо позначення $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тоді поверхня

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 8t^2$$

Зробимо заміну $y_3 = x_3 \pm \sqrt{8t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$. В такому разі:

$$\mathcal{I}_\phi = \oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=at}\phi(y)dS_{\mathbf{y}} = \iint_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\le 8t^2}\frac{4\sqrt{2}y_2 t}{\sqrt{8t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}dy_1 dy_2$$

Зробимо заміну $y_1 - x_1 = \rho\cos\theta$, $y_2 - x_2 = \rho\sin\theta$. Тоді:

$$\mathcal{I}_\phi = 4\sqrt{2}t\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}t}\frac{(x_2+\rho\sin\theta)\rho}{\sqrt{8t^2-\rho^2}}d\rho d\theta = 4\sqrt{2}tx_2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{8t^2-\rho^2}}d\theta$$
$$= 8\sqrt{2}\pi t x_2\int_0^{2\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{8t^2-\rho^2}}$$

Зробимо заміну $\xi = 8t^2 - \rho^2$, тоді $d\xi = -2\rho d\rho$, тобто $\rho d\rho = -\frac{1}{2}d\xi$. Отже:

$$\mathcal{I}_\phi = 8\sqrt{2}\pi t x_2\int_{8t^2}^0 -\frac{1}{2}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 4\sqrt{2}\pi t x_2\int_0^{8t^2}\xi^{-1/2}d\xi = 8\sqrt{2}\pi t x_2\cdot 2\sqrt{2}t = 32\pi t^2 x_2$$

Аналогічним чином, можна отримати:

$$\mathcal{I}_\psi = \oiint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=at}\psi(y)dS_{\mathbf{y}} = 32\pi t^2 x_3$$

Таким чином, маємо:

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{32\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\mathcal{I}_\phi\right) + \frac{1}{t}\mathcal{I}_\psi\right) = y + tz$$

Таким чином, остаточно, $u(x,y,z,t) = y + tz + \frac{1}{12}xt^4$.
**Відповідь.** $u(x,y,z,t) = y + tz + \frac{1}{12}xt^4$.