Самостійна робота з курсу "Теорія міри"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

25 листопада 2023 р.

Завдання

Умова. Нехай

$$X = \{A, B, C\},\ \mathcal{P} = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}\},$$

$$\lambda : \mathcal{P} \to [0, +\infty),\ \lambda(\emptyset) = 0,\ \lambda(\{A\}) = 1,\ \lambda(\{B\}) = 1.$$

1. Перевірити, що λ є мірою на півкільці $\mathcal{P}$.
2. Побудувати зовнішню міру λ^* на 2^X.
3. Знайти клас $\mathcal{S}$ вимірних за Каратеодорі відносно міри λ^* множин.

Розв'язок.

Пункт 1. Згідно означенню *міри*, функція λ має бути невід'ємною σ-адитивною функцією множин, заданих на півкільці.

Зрозуміло, що $\mathcal{P}$ є півкільцем. λ також є невід'ємною, оскільки за умовою $\lambda(\{A\}) = \lambda(\{B\}) = 1 > 0$ і $\lambda(\emptyset) = 0$.

Залишилося перевірити σ-адитивність. За означенням λ є σ-адитивною, якщо

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P} : \left\{ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ неперетинні} \wedge \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P} \right\}$$
$$\implies \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Оскільки $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$ і всі елементи є неперетинними, то $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ складається з одного або жодного $\{A\}$, $\{B\}$ і нескінченної кількості $\emptyset$, тобто

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{A\}, \emptyset, \dots\} \text{ або} \tag{1}$$
$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{B\}, \emptyset, \dots\} \text{ або} \tag{2}$$
$$A_n \equiv \emptyset \tag{3}$$

Випадок (3) тривільний, тому розглянемо випадок (1), що є аналогічним (2). В такому разі, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{A\}$, тому $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lambda(\{A\})$. З іншого боку, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) = \lambda(\{A\}) + \lambda(\emptyset) + \lambda(\emptyset) + \dots = \lambda(\{A\})$. Отже, рівність виконується.

Пункт 2. Побудуємо зовнішню міру за допомогою продовження λ на 2^X. Маємо для $\forall H \in 2^X$:

$$\lambda^*(H) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) : H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \wedge \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}\right\}, \\ \qquad \text{якщо } \exists \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P} : H \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ +\infty, \text{ в іншому випадку} \end{cases}$$

Отже, почнемо розглядати усі елементи з 2^X. По-перше, $\lambda^*(\emptyset) = 0$ з означення зовнішньої міри.

Далі $\lambda(\{A\}) = \lambda(\{B\}) = 1$. Що стосується $\lambda(\{C\})$, то тут ми не можемо знайти $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ так, щоб $\{C\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, оскільки $\mathcal{P}$ не містить $\{C\}$ або інші елементи, що мають в собі $\{C\}$. Тому $\lambda(\{C\}) = +\infty$.

Аналогічно для усіх множин з 2^X, що містять C. Тому залишилося розглянути $\lambda^*(\{A, B\})$. Беремо мінімально $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{\{A\}, \{B\}, \emptyset, \dots\}$, тоді $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) = \lambda(\{A\}) + \lambda(\{B\}) = 2$.

Отже,

$$\forall H \in 2^X : \lambda^*(H) = \begin{cases} |H|, & C \notin H \\ +\infty, & C \in H \end{cases}$$

Пункт 3. Скориставшись означенням вимірності за Каратеодорі, нам потрібно знайти

$$\mathcal{S} = \{H \subset X : \forall E \subset X \;\; \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap H) + \lambda^*(E \cap \overline{H})\}$$

По-перше, $\emptyset \in \mathcal{S}$, оскільки

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap \emptyset) + \lambda^*(E \cap X) = \lambda^*(\emptyset) + \lambda^*(E) = \lambda^*(E)$$

Розглянемо $H \subset X : C \notin H$. Тоді

$$\forall E \subset X : \lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap H) + \lambda^*(E \cap \overline{H}) \iff \forall E : |E| = |E \cap H| + |E \cap \overline{H}|$$

Беремо $H = \{A\}$. Якщо перебрати усі варіанти, то властивість вище виконується. Так само для $H = \{B\}$ і $H = \{A, B\}$.

Тепер беремо ті множини $H \subset X : C \in H$. Можна переконатись, що тут результат буде такий самий. Отже, $\mathcal{S} = 2^X$.

Відповідь. 1. Див. розв'язок. 2. $\lambda^*(H) = \begin{cases} |H|, & C \notin H \\ +\infty, & C \in H \end{cases}$. 3. $\mathcal{S} = 2^X$.