Homework #20

Завдання 3186.

Знайти границю

$$L = \lim_{x,y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

Розв'язок. Перейдемо до полярних координат, тобто

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Тому наша границя перетворюється на

$$L = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}$$

Оскільки $\cos^4\theta+\sin^4\theta > 0 \; \forall\theta\in\mathbb{R}$, то можемо винести цей вираз і отримати

$$L = \frac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^2} = 0$$

Завдання 3187.

Знайти

$$L = \lim_{x\to0,y\to a} \frac{\sin xy}{x}$$

Розв'язок. Інтуїтивно розуміємо, що відповідь — це a, бо обидві послідовні границі:

$$L_1 = \lim_{x\to0}\lim_{y\to a}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x} = a$$
$$L_2 = \lim_{y\to a}\lim_{x\to0}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{y\to a} y = a$$

Проте рівність $L_1 = L_2 = a$ не доводить, що і $L = a$. Тому пропонується довести наступний факт за означенням:

$$\lim_{\mathbf{x}\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = a$$

Якщо позначимо $\mathbf{x}_0 = (0, a)$, то нам потрібно довести:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} : 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta) \left\{ \left| \frac{\sin xy}{x} - a \right| < \varepsilon \right\}$$

Візьмемо метричний простір $(\mathbb{R}^2, d)$, де $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1\le j\le m} |x_j - y_j|$. Тоді якщо ми це доведемо для цього простору, то це буде і справедливим за теоремою і до простору $(\mathbb{R}^2, \rho)$.

В такому разі, маємо умову

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y : 0 < |x| < \delta, 0 < |y - a| < \delta) \left\{ \left| \frac{\sin xy}{x} - a \right| < \varepsilon \right\}$$

Помітимо, що:

$$\left| \frac{\sin xy}{x} - a \right| \le \left| \frac{\sin xy}{x} \right| + |a| \le \left| \frac{xy}{x} \right| + |a| = |y| + |a|$$

Оскільки $|y - a| < \delta$ та $|y - a| \ge |y| - |a|$, маємо $|y| - |a| \le |y - a| < \delta$ і тому $|y| < |a| + \delta$. Звідси випливає

$$\left| \frac{\sin xy}{x} - a \right| \le |y| + |a| < (2|a| + \delta =: \varepsilon)$$

Тому якщо ми оберемо $\delta = \max\{\varepsilon - 2|a|, 0\}$, то умова з границею буде виконуватись.

Завдання 3214.

$$u'_x = y + \frac{1}{y},\ u''_x = 0$$
$$u'_y = x - \frac{x}{y^2},\ u''_y = \frac{2x}{y^3},\ u''_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

Завдання 3219.

$$u'_x = \frac{2x}{y\cos^2\frac{x^2}{y}} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$$

$$u''_x = \frac{2y\cos^2\frac{x^2}{y} - 2xy\cdot 2\cos\frac{x^2}{y}(-\sin\frac{x^2}{y})\frac{2x}{y}}{y^2\cos^4\frac{x^2}{y}} = 2\cdot\frac{\cos\frac{x^2}{y} + 4\frac{x^2}{y}\sin\frac{x^2}{y}}{y\cos^3\frac{x^2}{y}}$$

$$u'_y = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$$

$$u''_y = \frac{2x^3}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$$

$$u'_{xy} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$$

Завдання 3220.

$$u'_x = yx^{y-1},\ u''_x = y(y-1)x^{y-2}$$

$$u'_y = x^y\ln x,\ u''_y = x^y\ln^2 x$$

$$u''_{xy} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$$

Завдання 3221.

$$u'_x = \frac{1}{x+y^2},\ u''_x = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$$

$$u'_y = \frac{2y}{x+y^2},\ u''_y = \frac{2(x+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$$

$$u''_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

Завдання 3230.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, x = y = 0 \end{cases}$$

Показати, що $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.

Розв'язок.

$$f''_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_x(0,y))\Big|_{y=0}$$

За означенням

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy(h^2-y^2)}{h(h^2+y^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2y-y^3}{h^2+y^2} = -y$$

Тому $\partial f'_x(0,y)/\partial y = -1$. Тепер знайдемо

$$f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y(x,0))\Big|_x$$

Знову ж таки за означенням

$$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x(x^2-h^2)}{x^2+h^2} = x$$

Тому $\partial f'_y(x,0)/\partial x = 1$. Бачимо, що $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.