Домашня робота з математичного моделювання #4

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 березня 2023 р.

Завдання 1.

Умова. Визначити нерухомий ймовірнісний вектор $\boldsymbol{t}$ для кожної з наступних перехідних матриць:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Розв'язок. Нерухомий вектор визначається з рівняння:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\mathbf{P}$$

Перше рівняння дає:

$$\begin{cases} 0.75t_1 + 0.5t_2 = t_1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Його розв'язком є $t_1 = 2/3, t_2 = 1/3$. Для другого рівняння маємо систему:

$$\begin{cases} 0.9t_1 + 0.1t_2 = t_1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язком є $t_1 = t_2 = 0.5$.

Нарешті, для третьої матриці:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_3 = t_1 \\ \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{2}t_3 = t_3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

Її розв'язком є $t_1 = t_3 = \frac{2}{7}, t_2 = \frac{3}{7}$.

Завдання 2.

Умова. На колі відзначено шість точок. Процес потрапляє з будь-якої даної точки до одної з сусідніх з ймовірністю 1/2. Знайти перехідну матрицю даного марківського ланцюга та скласти діаграму переходу. Чи буде цей ланцюг маркова ергодичним? Регулярним?

Розв'язком. У попередньому домашньому завданні ми знаходили цю матрицю:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що ланцюг є ергодичним, бо всі стани є досяжними. Також він є регулярним, оскільки матриця

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.375 & 0.0625 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.0625 & 0.375 & 0.0625 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.375 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.25 & 0.25 & 0.0625 & 0.375 \end{bmatrix}$$

не має від'ємних елементів.

Завдання 3.

Умова. У будь-який день людина здорова чи хвора. Якщо людина здорова сьогодні, то ймовірність того, що вона буде здоровою й завтра оцінюється в 98%. Якщо людина сьогодні хвора, то завтра вона буде здоровою лише в 30% випадків. Побудувати матрицю переходів і діаграму марківського ланцюга. Чи є цей ланцюг регулярним? Якщо так, то знайти граничні ймовірності стану здоров'я людини.

Розв'язком. У попередньому домашньому завданні ми знаходили цю матрицю:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.02 & 0.98 \end{bmatrix}$$

Він є регулярним, оскільки всі елементи є ненульовими. Знайдемо граничні ймовірності стану. Для цього знайдемо нерухомий вектор $\boldsymbol{t}$ з умови:

$$\boldsymbol{t}\mathbf{P} = \boldsymbol{t}$$

Звідки отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0.7t_1 + 0.02t_2 = t_1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Розв'язком є $t_1 = 0.0625, t_2 = 0.9375$.

Завдання 4.

Умова. Нехай професор намагається не дуже часто запізнюватись на лекції. Якщо він одного разу запізнився, то у 90% випадків у наступний раз він приходить вчасно. Якщо він прийшов вчасно, то наступного разу у 30% випадків він запізнюється. Яка гранична ймовірність запізнення на лекції?

Розв'язок. Нехай e_1 це стан, коли професор приходить вчасно, а e_2 коли запізнюється. Матриця виглядає наступним чином:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо статичний вектор за допомогою рівняння $\boldsymbol{t}\mathbf{P} = \boldsymbol{t}$ або

$$\begin{cases} 0.7t_1 + 0.9t_2 = t_1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Звідки $t_1 = 0.75, t_2 = 0.25$. Звідки робимо висновок, що гранична ймовірність запізнення дорівнює 0.25.

Завдання 5.

Умова. Припустимо, що Конгрес об'явив про можливе скорочення податків, і це повідомлення розповсюджується від людини до людини. Якщо скорочення податків відбудеться, то ймовірність того, що повідомлення буде передано наступній людині правильно, складає 0.6. Якщо скорочення податків не буде, то ймовірність правильності передачі інформації складає 0.7. Що ймовірніше в далекому майбутньому: буде скорочення податків, чи ні?

Розв'язок. Скорочення податків не залежить від розповсюдження від людини до людини, тому відповіді дати не можна :)

Якщо ж мається на увазі, яке є найймовірніший переданий меседж, то для цього спочатку знаходимо матрицю ланцюга Маркова (де стан e_1 позначає інформацію про скорочення податків), він має вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Знаходимо статичний вектор з умови $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\mathbf{P}$:

$$\begin{cases} 0.6t_1 + 0.3t_2 = t_1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$$

Звідки $t_1 \approx 0.43, t_2 \approx 0.57$. Отже, ймовірніше буде новина про відсутність скорочення податків.

Завдання 6.

Умова. Аптека продає препарати від печії трьох торговельних марок – A, B, C. Покупці змінюють марки препарату відповідно матриці переходу:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Яка марка найбільш за все буде популярною в далекому майбутньому?

Розв'язок. Знаходимо статичний вектор з умови $\boldsymbol{t}\mathbf{P} = \boldsymbol{t}$:

$$\begin{cases} 0.7t_1 + 0.2t_2 + 0.1t_3 = t_1 \\ 0.2t_1 + 0.6t_2 + 0.1t_3 = t_2 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases}$$

Звідси маємо $t_1 \approx 0.316, t_2 \approx 0.263, t_3 \approx 0.421$. Отже найбільш популярною маркою є марка C.

Завдання 7.

Умова. Припустимо, що деякий комівояжер їздить завжди з міста A до міста B та з міста B до міста C. Але з міста C він їздить з ймовірністю $1/2$ у місто A та з ймовірністю $1/2$ у місто C. Подайте поїздки комівояжера за допомогою марківського ланцюга. Чи буде регулярною перехідна матриця? Якщо так, то знайдіть нерухомий вектор.

Розв'язок. Виписуємо матрицю:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ця матриця є регулярною, оскільки матриця

$$\mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 & 0.625 \\ 0.3125 & 0.125 & 0.5625 \end{bmatrix}$$

не містить нульових елементів. Отже, нерухомий вектор визначається з умови $\boldsymbol{t}\mathbf{P} = \boldsymbol{t}$, тому

$$\begin{cases} t_3/2 = t_1 \\ t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \end{cases}$$

Звідки $t_1 = t_2 = 1/4, t_3 = 1/2$

Завдання 8.

Умова. Жаба стрибає за сходами, які мають три ступені. При стрибку з підніжжя сходів (нульовий ступінь) вона з ймовірністю $1/2$ залишається на місці та с цією ж ймовірністю стрибає на перший ступінь. Аналогічно, знаходячись на вершині сходів (3-й ступінь), вона з ймовірністю $1/2$ залишається на місці та з тією ж ймовірністю опускається на ступінь нижче. Знаходячись на першому або другому ступені, жаба залишається на тій же ступені з ймовірністю $1/3$, з тією ж ймовірністю опускається на ступінь нижче, та із тією ж ймовірністю підіймається на ступінь вище. Чи є марківський ланцюг регулярним? Якщо так, знайти граничну ймовірність перебування жаби на вершині сходів.

Розв'язок. Виписуємо матрицю:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ланцюг є регулярним, оскільки матриця

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 25/72 & 29/72 & 7/36 & 1/18 \\ 29/108 & 37/108 & 7/27 & 7/54 \\ 7/54 & 7/27 & 37/108 & 29/108 \\ 1/18 & 7/36 & 29/72 & 25/72 \end{bmatrix}$$

не містить нульових елементів. Знайдемо статичний вектор за допомогою рівняння $\boldsymbol{t}\mathbf{P} = \mathbf{P}$:

$$\begin{cases} t_1/2 + t_2/3 = t_1 \\ t_1/2 + t_2/3 + t_3/3 = t_2 \\ t_2/3 + t_3/3 + t_4/2 = t_3 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1 \end{cases}$$

Звідси $t_1 = 1/5, t_2 = t_3 = 3/10, t_4 = 1/5$. Отже гранична ймовірність перебування на вершині сходів це $1/5$.