Homework #14

Завдання 1532.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix}$$

Знайдемо характеристичний поліном: $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$. Отже, маємо власне число $\lambda_1 = 0$ кратності 1 та власне число $\lambda_2 = -1$ кратності 2. З того, що власне число 0 має кратність 1 одразу робимо висновок, що в нашій матриці буде Жорданов блок $\mathbb{J}_1(0)$.

Знаходимо розмірність $V := \operatorname{Null}(\mathbf{A}+\mathbf{E})$:

$$V = \operatorname{Null}(\mathbf{A}+\mathbf{E}) = \operatorname{Null}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{bmatrix} =^{R_3-2R_1}_{R_2+R_1}$$
$$\operatorname{Null}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & -20 & -15 \end{bmatrix} = \operatorname{Null}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Отже маємо, що $\dim V = 1$, звідси випливає, що маємо лише 1 Жордановий блок $\mathbb{J}_2(-1)$, що відповідає $\lambda_2 = -1$. Отже, Жорданова форма:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Тепер знайдемо перетворення $\mathbf{S}$, що зведе нашу матрицю $\mathbf{A}$ до Жорданової форми $\mathbf{J}_A$. Спочатку знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 0$. Для цього просто знаходимо базис $\operatorname{Null}(\mathbf{A})$:

$$\text{Null}(\mathbf{A}) = \text{Null}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix} =_{R_2+2R_1}$$

$$\text{Null}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \text{Null}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Отже нам потрібно знайти перетин $-x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0$. Якщо позначити через $x_3 = t$, отримаємо $x_2 = -t$ і в такому разі $x_1 = 8x_2 + 6x_3 = -8t + 6t = -2t$. Отже:

$$\text{Null}(\mathbf{A}) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Тому в якості власного вектора можемо взяти $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Тепер знайдемо власний вектор, що відповідає V. Для цього потрібно знайти перетин $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, 4x_2 + 3x_3 = 0$. Якщо від першого відняти перше, отримаємо $x_1 - x_2 = 0$, отже нехай $x_1 = x_2 = t$. Тоді це означає, що $3x_3 = -4x_2 = -4t \implies x_3 = -\frac{4t}{3}$. Тобто перетином буде множина $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4/3 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} (t/3)$, тому

$$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

В якості другого власного вектора беремо $\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Нарешті, знайдемо третій власний вектор. Помітимо, що Жордановий ланцюг має вигляд

$$\{\mathbf{u}, (\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{u}\}$$

І при цьому $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, оскільки останній блок відповідає власному вектору $\mathbf{A}$ (це доволі логічно, оскільки при множенні останнього блоку на $(\mathbf{A}+\mathbf{E})$ отримаємо θ, тобто $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{u} \in \mathrm{Null}(\mathbf{A}+\mathbf{E})$). Тому нам достатньо знайти будь-яке $\mathbf{u}$, що відповідає цій умові. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & -14 & -9 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 9 & 6 \\ 0 & -20 & -15 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Тобто нам потрібно знайти перетин $u_1 + 3u_2 + 3u_3 = 3, 4u_2 + 3u_3 = 2$.

Наприклад, нехай $u_3 = 2, u_2 = -1, u_3 = 0$, тобто це відповідає $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Тоді наша лінійна трансформація

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Мінімальний поліном $p(X) = X(X+1)^2$ (варіант $X(X+1)$ не підходить, бо якщо підставити $\mathbf{A}$, то не отримаємо $p(\mathbf{A}) = 0$).

Завдання 1533.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Знайдемо характеристичний поліном. Від дорівнює $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$. Отже, маємо лише одне власно число $\lambda = 3$ кратності 3.

Тепер знайдемо $V := \mathrm{Null}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})$:

$$V := \mathrm{Null}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Отже $\dim V = 2$, а це означає, що в нас буде 2 Жорданових блока. Оскільки їх сумарний розмір 2, то це обов'язково мають бути $\mathbb{J}_2(3), \mathbb{J}_1(3)$, тому Жорданова форма:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю перетворення. Для цього знайдемо власні вектори з V. Помітимо, що $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}$, тому якщо прийняти $x_3 = \gamma, x_2 = \beta$, то отримаємо $x_1 = -2\beta + 5\gamma$ і тому

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} -2\beta + 5\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

З чого робимо висновок, що

$$V = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Тому обираємо $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (в якості $\mathbf{q}_1$ ми взяли суму двох векторів). Залишилось взяти третій вектор. Помітимо, що Жорданова ланка має вид:

$$\{\mathbf{u}, (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{u}\}$$

І останній вектор цього блоку або $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. Тому $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{q}$. Оскільки в матриці $\mathbf{A} - 3\mathbf{E}$ останні 2 рядки однакові, то краще взяти в якості $\mathbf{q}$ значення $\mathbf{q}_1$ (точніш це необхідно). Тому, маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array} \right)$$

Тому можемо взяти $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Остаточне перетворення:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Мінімальний поліном $p(X) = (X - 3)^2$, бо $X - 3$ вочевидь не віходить, а $p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})^2$ дорівнює 0.