Керованість і Стабілізація

Весняний семестр 2024

МП-31 *Захаров Дмитро* *Викладач: Сморцова Т.І.* Домашня Робота 1

§ Варіант 3 §

Задача 1: Постійна матриця

Умова. Знайти керування, яке переводить точку $(0,0)$ в точку $\widetilde{\mathbf{x}} := (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$[1] в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

за час $[0,1]$. Виписати задачу Коші для знаходження траєкторії системи, за якою відбувається цей перехід.

Розв'язання. Позначимо $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, тоді наша система може бути записана у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}u, \tag{1.2}$$

де ми ввели $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = (1,0)$.

Перевіримо, чи є система повністю керованою за допомогою критерію Калмана. Для цього складаємо матрицю Калмана:

$$\boldsymbol{K} \triangleq [\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Оскільки $\det \boldsymbol{K} = 1$, то $\operatorname{rang} \boldsymbol{K} = 2$, отже система є повністю керованою. Це означає, що керування

$$u(t) := \boldsymbol{\beta}^\top e^{-\boldsymbol{A}^\top t} \boldsymbol{N}^{-1}(0,1) e^{-\boldsymbol{A}} \widetilde{\mathbf{x}} \tag{1.4}$$

є шуканим, де $\boldsymbol{N}(0,1)$ є інтегральною матрицею керованості:

$$\boldsymbol{N}(0,1) \triangleq \int_0^1 \mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)^\top dt, \ \mathbf{w}(t) = \exp(-\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\beta} \tag{1.5}$$

[1] Тут і далі форма $(x_1, \ldots, x_n)$ позначає вектор $[x_1, \ldots, x_n]^\top$.

Далі рахуємо матричну експоненту:

$$\exp(-\boldsymbol{A}t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}(1-t) & e^{-2t}t \\ -e^{-2t}t & e^{-2t}(1+t) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Отже, якщо помножимо на вектор $\boldsymbol{\beta}$:

$$\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}(1-t) & e^{-2t}t \\ -e^{-2t}t & e^{-2t}(1+t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(1-t) \\ -e^{-2t}t \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Нарешті, це дозволяє нам порахувати інтегральну матрицю керованості:

$$\boldsymbol{N}(0,1) = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-4t}(1-t)^2 & -e^{-4t}(1-t)t \\ -e^{-4t}(1-t)t & e^{-4t}t^2 \end{bmatrix} dt \tag{1.8}$$

Далі достатньо муторне інтегрування частинами по-елементно. В результаті маємо:

$$\boldsymbol{N}(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{32}\left(5 - \frac{1}{e^4}\right) & -\frac{3+e^4}{32e^4} \\ -\frac{3+e^4}{32e^4} & \frac{1}{32}\left(1 - \frac{13}{e^4}\right) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Далі беремо обернену матрицю:

$$\boldsymbol{N}(0,1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8e^4(-13+e^4)}{1-18e^4+e^8} & \frac{8e^4(3+e^4)}{1-18e^4+e^8} \\ \frac{8e^4(3+e^4)}{1-18e^4+e^8} & \frac{8e^4(-1+5e^4)}{1-18e^4+e^8} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Нарешті, підставляємо у вираз $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathbf{w}(t)^\top \boldsymbol{N}^{-1}(0,1)\exp(-\boldsymbol{A})\widetilde{\mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t}(1-t) & e^{-2t}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8e^4(-13+e^4)}{1-18e^4+e^8} & \frac{8e^4(3+e^4)}{1-18e^4+e^8} \\ \frac{8e^4(3+e^4)}{1-18e^4+e^8} & \frac{8e^4(-1+5e^4)}{1-18e^4+e^8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^{-2} \\ -e^{-2} & 2e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.11}$$

По-італогу, результат має вигляд:

$$u(t) = \langle \boldsymbol{\ell}(t), \widetilde{\mathbf{x}} \rangle, \tag{1.12}$$

де

$$\boldsymbol{\ell}(t) = \begin{bmatrix} -3+2t+(-1+6t)e^4 \\ -7+6t+(3-14t)e^4 \end{bmatrix} \frac{8e^{2(1-t)}}{1-18e^4+e^8} \tag{1.13}$$

Отже, задача Коші виписується наступним чином:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \langle \boldsymbol{\ell}(t), \widetilde{\mathbf{x}} \rangle \boldsymbol{\beta},\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\theta},\ \mathbf{x}(1) = \widetilde{\mathbf{x}} \tag{1.14}$$

Для перевірки, напишемо розв'язок цього рівняння у середовищі *Wolfram Mathematica*. Код для цього має вигляд:

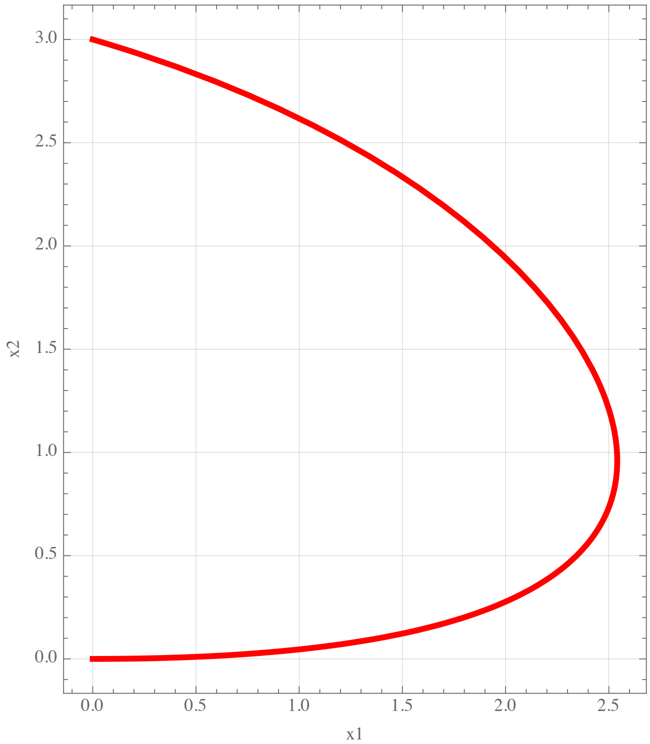

Рис. 1: Графік траєкторії $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ при $\widetilde{x}_1 = 0, \widetilde{x}_2 = 3$.

```
X1 = 0; Y1 = 3;
r1 = {X1, Y1};
k = 8*Exp[2-2t]/(1-18*Exp[4]+Exp[8]);
v[t_] = {-3+2t+Exp[4]*(-1+6t), -7+6t+Exp[4]*(3-14t)};
u[t_] = k*v[t].r1;
sol = DSolve[x'[t]==3*x[t]-y[t]+u[t] && y'[t]==x[t]+y[t] && x[0]==0 && y[0]==0, {x[t],y[t]}, t];
r[t_] = {sol[[1]][[1]][[2]], sol[[1]][[2]][[2]]};
ParametricPlot[r[t], {t, 0, 1}, PlotTheme -> "Scientific",
 GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Thickness[0.01], Red},
 FrameLabel -> {"x1", "x2"}]
```

Тут у змінних `X1` та `Y1` ми кладемо $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ відповідно і таким чином можемо отримати графік траєкторії на виході.

Графік на виході зображений на рисунку 1. Можемо дійсно бачити, що починаємо ми в $(0, 0)$ і через час $t = 1$ опиняємось у $(3, 0)$ за допомогою системи з умови.

Відповідь. $u(t) = \langle \boldsymbol{\ell}(t), \widetilde{\boldsymbol{x}} \rangle$, вектор $\boldsymbol{\ell}(t)$ дивись в розв'язанні.

Коментар. Можна було дещо спростити життя, якщо б ми розглядали сімейство

$$\boldsymbol{N}_f(0,1) \triangleq \int_0^1 f(t) e^{\boldsymbol{A}(1-t)} \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^\top e^{\boldsymbol{A}^\top(1-t)} dt, \tag{1.15}$$

проте вирішив обрати найбільш механічний шлях :)

Задача 2: Змінна матриця

Умова. Знайти керування, яке переводить точку $(9,3)$ в точку $(0,0)$ в силу системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + (t^2+5t)u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{t+2}x_2 + (t+2)u \end{cases} \tag{2.1}$$

за час $[0,3]$. Виписати задачу Коші для знаходження траєкторії системи, за якою відбувається цей перехід.

Розв'язання. Якщо позначити $\mathbf{x}(t) := (x_1(t), x_2(t))$, то наша система може бути записана у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}(t)u, \tag{2.2}$$

де ми позначили

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{t+2} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{\beta}(t) = \begin{bmatrix} t(t+5) \\ t+2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Спочатку знайдемо фундаментальну матрицю $\boldsymbol{\Phi}(t)$, для цього потрібно розв'язати систему $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}$ або:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{t+2}x_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

Спочатку розв'яжемо друге рівняння. Маємо:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t+2} \implies \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t+2} \implies \ln|x_2| = \ln(t+2) + C_1 \tag{2.5}$$

Звідси $x_2(t) = C_1(t+2)$. Підставляючи у друге, маємо:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2C_1(t+2) \implies dx_1 = 2C_1(t+2)dt \implies x_1 = C_1t^2 + 4C_1t + C_2 \tag{2.6}$$

Отже, ми отримали, що

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1t^2 + 4C_1t + C_2 \\ C_1(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2+4t & 1 \\ t+2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

звідки шукана фундаментальна матриця і обернена їй:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} t^2+4t & 1 \\ t+2 & 0 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t+2} \\ 1 & -\frac{t^2+4t}{2+t} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Далі, знаходимо інтегральну матрицю керованості:

$$\boldsymbol{N}(0,3) = \int_0^3 \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\beta}(t)\boldsymbol{\beta}(t)^\top \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)^\top dt \tag{2.9}$$

Для цього спочатку знайдемо наступний вектор:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t+2} \\ 1 & -\frac{t^2+4t}{2+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(t+5) \\ t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Отримали несподівано простий вигляд. Отже,

$$\boldsymbol{N}(0,3) = \int_0^3 \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 3 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 9 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{N}^{-1}(0,3) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Нарешті, керування можна записати у вигляді:

$$u(t) = \mathbf{w}(t)^\top \boldsymbol{N}^{-1}(0,3)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(3)\mathbf{x}_1 - \mathbf{\Phi}^{-1}(0)\mathbf{x}_0\right) \tag{2.12}$$

Оскільки $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\theta}$, то вираз дещо спрощується:

$$u(t) = -\mathbf{w}(t)^\top \boldsymbol{N}^{-1}(0,3)\mathbf{\Phi}^{-1}(0)\mathbf{x}_0 \tag{2.13}$$

Оскільки $\mathbf{\Phi}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, то остаточно

$$\begin{aligned} u(t) &= -\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{-3t+4} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Отже, задача Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + (t^2+5t)(-3t+4) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{t+2}x_2 + (t+2)(-3t+4) \end{cases}, \; x_1(0) = 9, \; x_2(0) = 3 \tag{2.15}$$

Знову перевіримо, що це дійсно розв'язок. Код у *Wolfram Mathematica*:

```
u[t_] = 4-3t;
sol = DSolve[x'[t]==2y[t]+(t^2+5t)u[t] &&
↪ y'[t]==y[t]/(t+2)+(t+2)u[t] && x[0]==9 && y[0]==3, {x[t],
↪ y[t]}, t];
r[t_] = {sol[[1]][[1]][[2]], sol[[1]][[2]][[2]]};
ParametricPlot[r[t], {t, 0, 3}, PlotTheme -> "Scientific",
 GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Thickness[0.005], Red},
 FrameLabel -> {"x1", "x2"}]
```

На виході маємо рис. 2, що дійсно переводить точку $(9,3)$ у $(0,0)$.
Відповідь. $u(t) = -3t+4$.

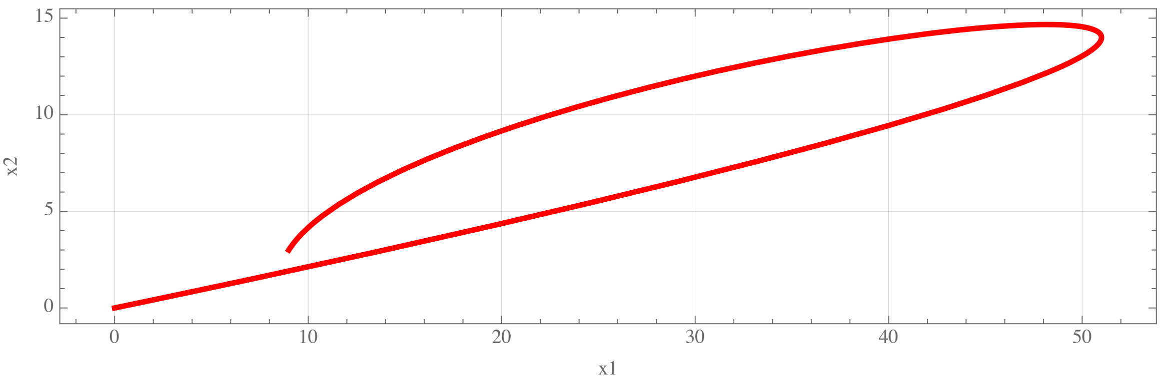

Рис. 2: Графік траєкторії $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ для $t \in [0, 3]$.