Домашня робота з математичного аналізу #19

Студента 2 курсу групи МП-21 Захарова Дмитра

23 квітня 2023 р.

Завдання 4.4.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли першого родку:

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

де Γ це відрізок прямої $2y - x + 4 = 0$ від точки $A(0, -2)$ до $B(4, 0)$.

Розв'язок. Параметризуємо $y = t$, тоді $x = 2t + 4$. Тоді маємо радіус-вектор кривої:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 2t + 4 \\ t \end{bmatrix}$$

Тоді точці $A(0, -2)$ відповідає параметр $t = -2$, а точці $B(4, 0)$ відповідає $t = 0$. Отже маємо інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^{0} f(\boldsymbol{r}(t)) \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4(t + 2)^2}} \cdot \sqrt{5} dt$$

Далі починаємо спрощувати вираз:

$$\mathcal{I} = \sqrt{5}\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{5t^2+16t+16}} = \sqrt{5}\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{5}t+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{64}{5}+16}} =$$

$$\sqrt{5}\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{5}t+\frac{8}{\sqrt{5}})^2+\frac{16}{5}}} = \sqrt{5}\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\left(\frac{5}{4}t+2\right)^2}} =$$

$$\frac{5}{4}\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1+(\frac{5t}{4}+2)^2}}$$

Робимо заміну $z=\frac{5t}{4}+2$, тоді $dz=\frac{5}{4}dt \to dt=\frac{4dz}{5}$. Тому:

$$\mathcal{I} = \int_{-1/2}^{2}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = -\ln(\sqrt{1+z^2}-z)\Big|_{z=-1/2}^{z=2} = \ln\frac{\sqrt{5}/2+1/2}{\sqrt{5}-2} = \ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

Відповідь. $\ln\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$

Завдання 4.7.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли першого родку:

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma} xydl$$

де Γ це контур прямокутника, обмеженого прямими $x\pm y=1, x\pm y=-1$.

Розв'язок. Розіб'ємо наш контур на 4 сторони (позначимо їх як Γ_i). Тоді

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_i} xydl$$

Маємо наступну параметризацію для кожної сторони для $t\in[0,1]$:

$$\boldsymbol{r}_1(t)=\begin{bmatrix} t \\ 1-t\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_2(t)=\begin{bmatrix} 1-t \\ -t\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_3(t)=\begin{bmatrix} -t \\ -1+t\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_4(t)=\begin{bmatrix} -1+t \\ t\end{bmatrix}$$

Отже:

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} xydl = \sum_{i=1}^{4} \int_0^1 x_i(t)y_i(t)\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}dt =$$

$$\sqrt{2}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right) dt = \sqrt{2}\int_0^1 (t(1-t) - t(1-t) - t(t-1) + t(t-1))dt = 0$$

Відповідь. 0.

Завдання 4.26.

Умова. Обчисилити дані криволінійні інтеграли першого родку:

$$\mathcal{I} = \int_\Gamma x^2 dl$$

де Γ це коло:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Розв'язок. Візьмемо коло $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$, з вектором нормалі $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Нам потрібно повернути його так, щоб вектор нормалі цього кола збігався з вектором нормалі площини, тобто $\boldsymbol{n}_\pi = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Для цього достатньо найти сферичні координати вектора нормалі площини: це кут $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ від вісі Oz та кут $\frac{\pi}{4}$ в площині Oxy (модуль, очевидно, 1). Отже, достатньо застосувати композицію поворотів:

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

І тоді ми отримаємо:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{6}} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ \frac{\cos t}{\sqrt{6}} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t \end{bmatrix}$$

Отже, маємо інтеграл:

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} r^1(t)^2 \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{6}} - \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 dt = \frac{2\pi}{3}$$

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

Завдання 5.1.

Умова. Обчислити довжину дуги кривої

$$ay^2 = x^3, \ 0 \leq x \leq 5a$$

Відповідь. Довжина кривої знаходиться за допомогою формули

$$L = \int_\Gamma \|\boldsymbol{r}'(t)\| dt$$

В нашому випадку нехай $x = t$, тоді $y = \sqrt{t^3/a}$ (оскільки $x > 0$ за умовою, можемо брати корень з плюсом). Отже маємо радіус-вектор:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot t^{3/2} \end{bmatrix}$$

Вектор похідної:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{t} \end{bmatrix}$$

Отже, норма вектору:

$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9t}{4a}}$$

І тому нам потрібно проінтегрувати:

$$L = \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9t}{4a}} dt = \frac{4a}{9} \int_0^{5a} \sqrt{1 + \frac{9t}{4a}} d\left(1 + \frac{9t}{4a}\right) =$$
$$\frac{4a}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9t}{4a}\right)^{3/2} \Big|_{t=0}^{t=5a} = \frac{335a}{27}$$

Відповідь. $\frac{335a}{27}$.

Завдання 5.2.

Обчислити довжину дуги кривої

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ 0 \leq x \leq x_0$$

Розв'язок. Маємо доволі просту параметризацію:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{a}{2}\left(e^{t/a} + e^{-t/a}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ a \cosh \frac{t}{a} \end{bmatrix}, t \in [0, x_0]$$

Похідна:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sinh \frac{t}{a} \end{bmatrix}$$

А отже довжина $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t/a} = \cosh t/a$. Тому наш інтеграл:

$$L = \int_0^{x_0} \cosh \frac{t}{a} dt = a \sinh \frac{x_0}{a}$$

Відповідь. $a \sinh \frac{x_0}{a}$.