Контрольна робота з курсу "Чисельні методи лінійної алгебри" #1

Захаров Дмитро, 2 курс, група МП-21

29 квітня 2023 р.

Завдання.

1. Придумати матрицю $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
2. Локалізувати її спектр за допомогою кругів Гершгоріна.
3. Знайти власні значення, застосувавши степеневий метод і його модифікації.

Зауваження. Далі ми будемо завжди вважати, що запис власного числа λ_j матриці $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ визначає його порядок за модулем відповідно до індексу, тобто $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n|$.

Пункт 1. Побудуємо матрицю так, щоб вона мала ті власні значення, які ми хочемо. Наприклад, нехай вона має спектр $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1.0, 2.0, 3.0, 4.0\}$. В такому разі за основу беремо діагональну матрицю $\boldsymbol{\Lambda} := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Проте оскільки ця матриця має надто очевидну форму, змінимо базис цього оператора наступним чином:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}$$

де $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ деяка невироджена матриця, стовпці якої будуть власними векторами матриці $\boldsymbol{A}$. Далі щоб круги Гершгоріна виглядали не надто великими, я вирішив обрати матрицю $\boldsymbol{T}$ так, щоб $\det \boldsymbol{T} = 1$ (чомусь при цьому круги в мене виходили не надто великими, можливо є якась кореляція). Для цього я просто зробив композицію обертань в деяких площинах, наприклад:

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & 0 & -\sin\frac{\pi}{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{12} & 0 & \cos\frac{\pi}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{7} & 0 & 0 & -\sin\frac{\pi}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{7} & 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{7} \end{bmatrix}$$

Тоді:

$$\boldsymbol{T} = \prod_{i=1}^{4} \boldsymbol{R}_i \approx \begin{bmatrix} 0.75 & -0.5 & -0.22 & -0.36 \\ 0.44 & 0.87 & -0.13 & -0.21 \\ -0.14 & 0 & 0.68 & -0.72 \\ 0.47 & 0 & 0.68 & 0.56 \end{bmatrix}$$

А наша матриця:

$$\boldsymbol{A} \approx \begin{bmatrix} 1.75 & -0.15 & 0.47 & -0.91 \\ -0.15 & 1.92 & 0.27 & -0.53 \\ 0.47 & 0.27 & 3.47 & -0.27 \\ -0.91 & -0.53 & -0.27 & 2.87 \end{bmatrix}$$

Пункт 2. Отже, скористаємося теоремою Гершгоріна.

Теорема 1: Теорема о кругах Гершгоріна

Нехай маємо матрицю $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Якщо розглянути круги на комплексній площині

$$C_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{k,k}| < \sum_{i\neq k} |a_{k,i}|\},$$

то $\sigma(\boldsymbol{A}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} C_k$

Тоді в нашому конкретному випадку маємо наступні кола (числа вставлені наближено):

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1.75| < 1.53\},\ K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1.92| < 0.95\}$$

$$K_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3.47| < 1.01\},\ K_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2.87| < 1.71\}$$

На рис. 1 можна побачити малюнок, де червоним кольором відмічені власні числа $\{1, 2, 3, 4\}$.

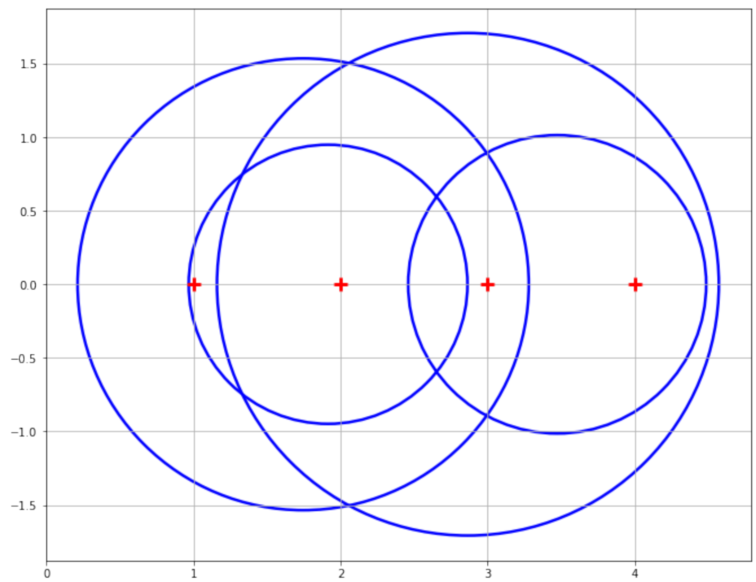

Рис. 1: Круги Гершгоріна для нашої заданної матриці $\boldsymbol{A}$

Пункт 3. Тут просто застосовуємо усі методи, обрахунки представлені у прикріпленому файлі *Jupyter Notebook*. В нашому випадку ми отримали наступні результати:

- **Степеневий метод.** З точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ при початковому векторі $\boldsymbol{x}^{[0]} = \mathbb{1}_4$ за 66 кроків знаходимо найбільше власне число $\lambda_1 = 4.0$.
- **Степеневий метод зі зсувом.** З точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ при початковому векторі $\boldsymbol{x}^{[0]} = \mathbb{1}_4$ та зсувом $\alpha = 2.0$ за 30 кроків знаходимо найбільше власне число $\lambda_1 = 4.0$.

Замітка. Менша кількість кроків обумовлена тим, що метод зі зсувом при $\alpha = 2.0$ збігається відповідно до відношення $\left|\frac{\lambda_2-\alpha}{\lambda_1-\alpha}\right| = \frac{3-2}{4-2} = 0.5$ на відміну від звичайного степеневого метода, який збігається відповідно до $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| = \frac{3}{4} \approx 0.75$.

- **Степеневий зворотній метод.** З тою самою точністю та початковому векторі та зсувом $\alpha = 4.5$ за 18 кроів знаходимо найбільше власне число $\lambda_1 = 4.0$.
- **Метод Релея.** За 4 кроки знаходимо найбільше власне число $\lambda_1 = 4.0$.

Отже бачимо, що, при влучній локалізації, метод Релея працює найшвидше, далі йде степеневий зворотній, а вже далі степеневий зі зсувом та степеневий.

Знаходження всього спектру. В завданні ж просили знайти увесь спектр матриці $\sigma(\boldsymbol{A})$. Хоча наведені методи зверху більше використовуються для знаходження найбільшого/найменшого/2 найбільших/... власних векторів, але його можна використати і для знаходження всього спектру. Запропоную наступний метод.

Нехай функція $f(\boldsymbol{A} \mid \alpha)$ повертає власний вектор зворотнім степеневим вектором (або методом Релея) при зсуві α. Далі обмежимось лише розгляданням дійсних матриць з дійсними власними значеннями. Тоді застосуємо наступний простий алгоритм, який звичайно не найбільш оптимальний і при бажанні його можна значно покращити:

Крок 1. Застосовуючи теорему Гершгоріна, локалізуємо відрізок, на якому знаходяться власні числа. Тобто, знаходимо ліву межу і праву межу:

$$\ell = \min_{k\in\{1,\dots,n\}} \left(a_{k,k} - \sum_{i\neq k} |a_{k,i}|\right), \; r = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} \left(a_{k,k} + \sum_{i\neq k} |a_{k,i}|\right)$$

Крок 2. Дискретизуємо відрізок $[\ell, r]$ на m частин обравши набір точок:

$$\alpha_k = \ell + \frac{r-\ell}{m} \cdot k$$

Крок 3. Знаходимо набір значень:

$$S(\boldsymbol{A}) = \{f\left(\boldsymbol{A} \mid \alpha_k\right) : k \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Крок 4. Оскільки множина $S(\boldsymbol{A})$ буде приблизно виглядати як

$$S(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_n, \lambda_n, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_j, \lambda_j, \lambda_{j-1}, \lambda_{j-1}, \ldots, \lambda_1\},$$

то можемо дістати усі власні значення (проте, потрібно врахувати коментар знизу).

Недоліки та коментарі до метода.

- По-перше, можемо не брати увесь відрізок $[\ell, r]$. Наприклад, якщо маємо кілька груп вкладених кругів, що не перетинаються, то можемо розбити інтервал на багато відрізків $\{[\ell_i, r_i]\}_{i=1}^{n_I}$ і дискретизувати вже ці відрізки.

- По-друге, якщо деякі власні значення дуже близькі один до одного, то дуже важливо оцінити, яке m саме брати. Якщо взяти його надто великим, то можна пропустити деякі з власних значень. Тому нехай $\delta(\boldsymbol{A}) := \min_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ де $\lambda_j \in \sigma(\boldsymbol{A})$. Тому в ідеалі брати значення більше за таке $\widetilde{m}$, що

  $$\frac{r-\ell}{\widetilde{m}} = \delta \to m > \frac{r-\ell}{\delta}$$

  Проте оскільки ми не знаємо власних значень, то потрібно за допомогою локалізації оцінювати δ.

- По-третє, я не уточнив, як саме з набору $S(\boldsymbol{A})$ можна знайти спектр $\sigma(\boldsymbol{A})$, оскільки виникають проблеми з "поганими" точками, тобто для таких α, що $f(\boldsymbol{A} \mid \alpha)$ є погано обумовленою задачею (наприклад, $\alpha = \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}$). Такі точки, до речі, виникали, якщо розглянути *Jupyter* файл, що прикріплений до цього файлу.