Test #2

Задание 1 (обратная матрица).

Начнём с метода Гаусса. Достроим матрицу до расширенной:

$$(M \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Проделываем допустимые операции с данной матрицей для того, чтобы привести матрицу к виду $(E_3 \mid M^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\cdot\frac{3}{4}]{R_3\cdot 3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{9}{4} & \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-R_1]{R_3-R_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\cdot 8]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_2]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 2 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Ну и на этом этапе можно сказать, что обратной матрицы тут нет, ведь определитель матрицы M равен 0, т.к. видим, что в ходе простейших преобразований (умножение строк на число и прибавление к одной строке другую, умноженную на действительное число) мы получили нулевую строку (т.е. строки у нас линейно зависимы).

Поэтому использовать формулу обратной матрицы бессмысленно.

Ответ: матрица не имеет обратной.

Задание 701.

Итак, запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Отнимем от 2ой строки 1ую, умноженную на 3, от 3ей строки 1ую, а от 4ой 1ую, умноженную на 2. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Видим, что вторая и третья строка отличаются лишь знаком, значит можем выкинуть любую из этих строк. Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Добавим к третьей строчке вторую:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Видим, что строчки в этой матрице линейно независимые, т.е. ранг матрицы равен 3. Значит, найдётся ненулевой минор. Например, возьмём $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Приведём его к виду единичной матрицы E_3. В таком случае получим:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{-2} & 1 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{4} & \boxed{-2} & 0 & 7 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{-2} & 1 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -2 & -3 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & \boxed{0} & -1 & -6 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -2 & -3 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-(3/4)R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & \boxed{0} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{4} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{4} & \boxed{0} & -2 & -3 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\cdot(-1)]{R_2\cdot(1/4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & \boxed{0} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{4} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & -1/2 & -3/4 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & -1 & -5 \end{array}\right)$$

Теперь вернёмся к изначальной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_5 = -\frac{15}{4} \\ x_3 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{3}{4} \\ x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

Выразим x_1, x_3, x_4 через x_2, x_5:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{15}{4} \\ x_3 = \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{4} \\ x_4 = x_5 - 5 \end{cases}$$

Запишем решение $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ в векторном виде:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Если ввести вектора $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -15/4 \\ 0 \\ -3/4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также задать $x_2 = \alpha, x_5 = \beta$, то окончательно ответ:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$

Задание 735.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим расширенную матрицу:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Для простоты в дальнейшем самый правый столбец мы записывать не будем, т.к. в результате допустимых действий над матрицей он никоим образом не будет меняться. Итак, преобразовываем матрицу:

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2-\frac{3}{2}R_1]{R_3-2R_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7/2 & -1 \\ 0 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \cdot 2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

Теперь выберем ненулевой минор. Например, $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Сделаем преобразования, чтобы привести его к форме $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc} 2 & -13 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2(-1/2)]{R_1\cdot(1/2)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Таким образом, получаем следующую расширенную матрицу:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -13/2 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Это соответствует следующей системе уравнений (которая аналогична начальной):

$$x_1 - \frac{13}{2}x_2 = 0,\ -\frac{7}{2}x_2 + x_3 = 0 \to x_1 = \frac{13}{2}x_2,\ x_3 = \frac{7}{2}x_2$$

Таким образом, решение системы уравнений $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 13x_2/2 \\ x_2 \\ 7x_2/2 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{2}\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Таким образом если положить $x_2/2 = t$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, то решение нашей системы уравнений:

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v}$$

Задание 562.

$$\begin{gathered} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{gathered}$$

Рассмотрим определитель системы:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Теперь найдём $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \det \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} = 168 \neq 0$$

$$\Delta_y = \det \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 84 \neq 0$$

$$\Delta_z = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} = -84 \neq 0$$

Учитывая, что $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0, \Delta = 0$, то решений у данной системы уравнений нет согласно правилу Крамера.

Ответ: нет решений.