Залікова робота
з Фінансового Аналізу

Захаров Дмитро, Варіант 3

26 травня, 2025

Зміст

1 Задача 1

Умова 1.1. Диверсифікація ризику.

Відповідь. Нехай маємо n ймовірнісних фінансових операцій $\xi_1, \dots, \xi_n$. Дуже часто, $\{\xi_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ є випадковими некорельованими доходами, тобто $r[\xi_i, \xi_j] = \delta_{ij}$.

Зокрема, розглянемо випадок, коли випадкові величини є однаковими незалежними і нехай математичне сподівання кожної з них дорівнює μ та дисперсія кожної з них дорівнює σ^2. Введемо величину $\xi := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ — середній арифметичний дохід. В такому разі цікаво глянути на ефективність та ризик цієї операції в залежності від кількості активу n. Ефективність дорівнює:

$$\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi_i] = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu.$$

Отже, при зміні кількості активів, ефективність не змінюється. Проте, цікава ситуація з ризиком:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Отже, при збільшенні кількості активів n, ризик зменшується за такої самої ефективності.

Цей приклад демонструє суть диверсифікації ринку. Її сенс полягає в зниженні ризику фінансової операції шляхом вкладання в частки різних некорельованих активів з такою самою ефективністю та ризиком. Узагальнемо попередній приклад наступним чином: нехай ми вкладаємось в n незалежних фінансових операцій $\xi_1, \dots, \xi_n$ з різними вагами $w_1, \dots, w_n$ ($\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$). Розглянемо дохідність $\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i$. Тоді її ефективність:

$$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}[\xi_i] = \mu \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

У свою чергу для ризику маємо:

$$\sigma_\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2 < \sigma^2.$$

Отже, так само отримали зниження ризику при такій самій ефективності. Причому, мінімум ризику досягається при рівномірному розподілі ваг, тобто

$w_i = \frac{1}{n}$ для всіх i. Дійсно, якщо розглянути функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^\top \mathbf{w} + \lambda(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} - 1)$$

То тоді з умови $\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) = 2\mathbf{w} + \lambda \mathbf{1}_n = 0$ маємо $w_i = -\frac{\lambda}{2}$ – однакові, а отже з умови на суму маємо $w_i = \frac{1}{n}$. Чому це мінімум можна побачити з матриці Гессе: $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}^2} = 2E_{n\times n} \succ 0$, де $E_{n\times n}$ – одинична матриця розміру n.

2 Задача 2

Умова 2.1. Дано таблиці розподілу двох незалежних ймовірністних фінансових операцій ξ, η.

$$\begin{aligned} \Pr[\xi = -1] = 0.2, \quad \Pr[\xi = 2] = 0.8, \\ \Pr[\eta = -1] = 0.4, \quad \Pr[\eta = 1] = 0.6. \end{aligned}$$

Визначити ефективність та ризик суми операцій $\xi + \eta$.

Розв'язання. Маємо операцію $\zeta := \xi + \eta$. Ефективністю операції називають її математичне сподівання, тобто $\mathbb{E}[\zeta]$. В силу лінійності математичного сподівання, маємо:

$$\mathbb{E}[\zeta] = \mathbb{E}[\xi] + \mathbb{E}[\eta].$$

Знайдемо математичне сподівання кожної з операцій окремо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi] = \sum_i \Pr[\xi = x_i]x_i = (-1) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8 = 1.4, \\ \mathbb{E}[\eta] = \sum_i \Pr[\eta = y_i]y_i = (-1) \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.2. \end{aligned}$$

Таким чином, ефективність суми операцій ζ дорівнює $\mathbb{E}[\zeta] = 1.6$. Розглянемо ризик суми операцій ζ. Ризиком операції називають корінь з дисперсії, тобто $\sigma_\zeta = \sqrt{\mathrm{Var}[\zeta]}$. Знайдемо дисперсію:

$$\mathrm{Var}[\zeta] = \mathrm{Var}[\xi + \eta] = \mathrm{Var}[\xi] + \mathrm{Var}[\eta] + 2\mathrm{cov}[\xi, \eta].$$

Оскільки операції ξ та η незалежні, то їхня коваріація дорівнює нулю і тому $\mathrm{Var}[\zeta] = \mathrm{Var}[\xi] + \mathrm{Var}[\eta]$. Знайдемо квадрати математичних сподівань:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi^2] = \sum_i \Pr[\xi = x_i]x_i^2 = (-1)^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.8 = 3.4, \\ \mathbb{E}[\eta^2] = \sum_i \Pr[\eta = y_i]y_i^2 = (-1)^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.6 = 1.0 \end{aligned}$$

Отже, можемо знайти дисперсії:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 = 3.4 - 1.4^2 = 1.44, \\ \mathrm{Var}[\eta] = \mathbb{E}[\eta^2] - \mathbb{E}[\eta]^2 = 1.0 - 0.2^2 = 0.96. \end{aligned}$$

Таким чином, ризик суми дорівнює $\sigma_\zeta = \sqrt{\mathrm{Var}[\xi] + \mathrm{Var}[\eta]} = \sqrt{2.4} \approx 1.55$.
Відповідь. Ефективність суми операцій ζ дорівнює 1.6, ризик — 1.55.

3 Задача 3

Умова 3.1. Побудувати оптимальний портфель Марковіца максимальної ефективності та одиничного ризику ($\sigma_R := 1$) з двох цінних паперів з ефективностями та ризиками $\mu_1 = 4$, $\sigma_1 = 1$, $\mu_2 = 6$, $\sigma_2 = 2$. Коефіцієнт кореляції дохідностей цінних паперів дорівнює $\rho = 0.5$.

Розв'язання. Маємо вектор ефективності $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 6\end{bmatrix}$. Побудуємо коваріаційну матрицю Σ. За означенням, якщо цінні папери позначити випадковими величинами ξ_1, ξ_2, то:

$$\Sigma \triangleq \begin{bmatrix}\mathrm{Var}[\xi_1] & \mathrm{cov}[\xi_1,\xi_2]\\ \mathrm{cov}[\xi_1,\xi_2] & \mathrm{Var}[\xi_2]\end{bmatrix}$$

Знаючи, що $\mathrm{Var}[\xi_1] = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}[\xi_2] = \sigma_2^2$ та $\mathrm{cov}[\xi_1,\xi_2] = \rho\sigma_1\sigma_2$, маємо:

$$\Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1^2 & 0.5\cdot 1\cdot 2\\ 0.5\cdot 1\cdot 2 & 2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Нехай оптимальний портфель Марковіца є $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$. Тоді, задача оптимізації виглядає наступним чином:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{x} \to \max,\\ \mathbf{x}^\top\Sigma\mathbf{x} = \sigma_R^2,\\ \mathbf{1}_n^\top\mathbf{x} = 1,\end{cases}$$

Перша умова вимагає максимальності ефективності $\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{x}$, друга — те, що ризик $\mathbf{x}^\top\Sigma\mathbf{x}$ є одиничним ($\sigma_R = 1$), а третя умова те, що сума ваг портфеля дорівнює одиниці. Запишемо задачу конкретно для нашого випадку (поки в загальному вигляді, не підставляючи конкретні значення):

$$\begin{cases}\mu_1x_1 + \mu_2x_2 \to \max,\\ \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2 = 1,\\ x_1 + x_2 = 1.\end{cases}$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2) &= -\boldsymbol{\mu}^\top\mathbf{x} + \lambda_1(\mathbf{x}^\top\Sigma\mathbf{x} - \sigma_R^2) + \lambda_2(\mathbf{1}_n^\top\mathbf{x} - 1)\\ &= -\mu_1x_1 - \mu_2x_2 + \lambda_1(\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2 - \sigma_R^2) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 1)\end{aligned}$$

Знайдемо часткові похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= -\mu_1 + 2\lambda_1\sigma_1^2 x_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= -\mu_2 + 2\lambda_1\sigma_2^2 x_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 - \sigma_R^2 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= x_1 + x_2 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Підставимо конкретні значення. Маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases}
2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 4,\\
8\lambda_1 x_2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 6,\\
x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 = 1,\\
x_1 + x_2 = 1.
\end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо перші два рівняння і останнє відносно (x_1, x_2, λ_2), а далі підставимо у третє. Отже, з перших рівнянь отримуємо:

$$x_1 = \frac{3\lambda_1 - 1}{3\lambda_1}, \quad x_2 = \frac{1}{3\lambda_1}, \quad \lambda_2 = 4 - 2\lambda_1.$$

Підставляємо у третє:

$$\frac{(3\lambda_1 - 1)^2}{9\lambda_1^2} + \frac{4}{9\lambda_1^2} + \frac{2(3\lambda_1 - 1)}{9\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3\lambda_1^2} = 0.$$

Як бачимо, розв'язку рівняння не існує. В такому разі постає питання, який саме портфель Марковіца треба побудувати. Для цього помітимо наступне: для заданої задачі, існує єдиний портфель Марковіца з ризиком $\sigma_R = 1$. Дійсно, нехай $x_1 = \omega$, тоді $x_2 = 1 - \omega$. Підставимо це у умову ризику:

$$\omega^2 + 4(1-\omega)^2 + 2\omega(1-\omega) = 1$$

Це спрощується до $3\omega^2 - 6\omega + 4 = 1$ або $\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$, звідки $\omega = 1$. Таким чином, єдиним можливим портфелем Марковіца з ризиком $\sigma_R = 1$ є портфель з $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

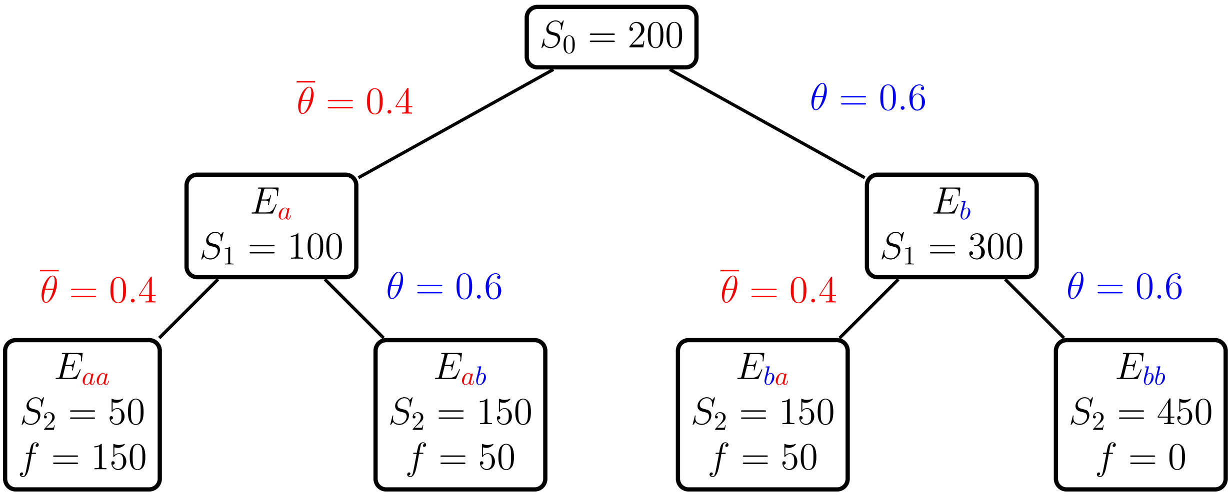
Відповідь. Оптимальний портфель Марковіца з ризиком $\sigma_R = 1$ має ваги $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (весь капітал в першому цінному папері).

4 Задача 4

Умова 4.1. В моделі Кокса-Роса-Рубінштейна відповідні початкові вартості безризикового і ризикового активу наступні $B_0 = 1$, $S_0 = 200$, відсоткова ставка $r = 0.1$. Розподіл дохідностей ризикового активу наступний: $\Pr[\rho_n = -0.5] = \Pr[\rho_n = 0.5] = 0.5$ (позначимо $a := -0.5$, $b := 0.5$). Знайти справедливу вартість $\widehat{f}$ опціону $f = (S_0 - S_2)^+$.

Розв'язання. Модель Кокса-Роса-Рубінштейна складається з двох фінансових активів: $B_n = B_0(1+r)^n$ — безризиковий актив та $S_n = S_0 \prod_{i=1}^n (1+\rho_i)$ — ризиковий актив, де ρ_i — дохідність ризикового активу на i-му кроці. В нашому конкретному випадку $n = 2$. Як було показано в теорії, за умови $r \in (a, b)$, фінансовий ринок є безарбітражним. Знаходимо мартингальну ймовірність $\theta = p^*(\rho_n = b) = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0.1+0.5}{0.5+0.5} = 0.6$, відповідно також позначимо $\overline{\theta} := 1 - \theta = 0.4$. Побудуємо біноміальне дерево цін:

Біноміальне дерево для S_t та $f = (200 - S_2)^+$



Згадаємо, що справедлива вартість опціону дорівнює очікуванню його виплати в момент часу $n = 2$ зваженого за мартингальною ймовірністю:

$$\widehat{f} = \mathbb{E}_{p^*}\left[\frac{f}{(1+r)^2}\right] = \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}_{p^*}[f]$$

Знайдемо очікування виплати опціону f:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p^*}[f] &= \theta^2 f(S_0(1+b)^2) + 2\theta\overline{\theta} f(S_0(1+a)(1+b)) + \overline{\theta}^2 f(S_0(1+a)^2) \\ &= 0.6^2 \cdot 0 + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 50 + 0.4^2 \cdot 150 = 24 + 24 = 48.\end{aligned}$$

Таким чином, справедлива вартість опціону дорівнює $\widehat{f} = \frac{48}{1.1^2} \approx 39.67$.
Відповідь. Справедлива вартість опціону дорівнює приблизно 39.67.