3️⃣

Homework #3 (14/14)

Завдання 1.

Нехай координати вузлів мають вид $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$. Тоді, за умовою, нам потрібно зайти такі функції N_j^e, N_k^e, які будуть задовольняти наступним умовам:

$$\begin{gathered} N_j^e(x_i, y_i) = N_j^e(x_k, y_k) = 0 \land N_j^e(x_j, y_j) = 1 \\ N_k^e(x_i, y_i) = N_k^e(x_j, y_j) = 0 \land N_k^e(x_k, y_k) = 1 \end{gathered}$$

Спочатку знайдемо N_j^e. Маємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_j^e + \beta_j^e x_i + \gamma_j^e y_i = 0 \\ \alpha_j^e + \beta_j^e x_j + \gamma_j^e y_j = 1 \\ \alpha_j^e + \beta_j^e x_k + \gamma_j^e y_k = 0 \end{cases}$$

Або, якщо записати в матричному виді:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j^e \\ \beta_j^e \\ \gamma_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Застосуємо метод Крамера, як і було зроблено на лекції. Маємо розв’язок:

$$\alpha_j^e = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 0 & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{\Delta}, \; \beta_j^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_i \\ 1 & 1 & y_j \\ 1 & 0 & y_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{y_k - y_i}{\Delta},$$

$$\gamma_j^e = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & 0 \\ 1 & x_j & 1 \\ 1 & x_k & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x_i - x_k}{\Delta}$$

Можна також позначити $\Delta := 2S^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ — подвоєнна площа трикутника. В такому разі:

$$\alpha_j^e = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{2S^e},\ \beta_j^e = \frac{y_k - y_i}{2S^e},\ \gamma_j^e = \frac{x_i - x_k}{2S^e}$$

Аналогічним чином для N_k^e маємо наступне рівняння:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k^e \\ \beta_k^e \\ \gamma_k^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Його розв'язок:

$$\alpha_k^e = \frac{x_i y_j - x_j y_i}{2S^e},\ \beta_k^e = \frac{y_i - y_j}{2S^e},\ \gamma_k^e = \frac{x_j - x_i}{2S^e}$$

Завдання 2.

Отже, випишемо координати:

$$(x_i, y_i) = (0,0),\ (x_j, y_j) = (h,0),\ (x_k, y_k) = (h,h)$$

Окрім цього, подвійна площа трикутника дорівнює: $2S^e = h^2$. Тоді наші коефіцієнти мають вигляд:

$$\alpha_i^e = \frac{h^2}{h^2} = 1,\ \beta_i^e = -\frac{1}{h},\ \gamma_i^e = 0$$
$$\alpha_j^e = 0,\ \beta_j^e = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h},\ \gamma_j^e = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h}$$
$$\alpha_k^e = 0,\ \beta_k^e = 0,\ \gamma_k^e = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$$

Таким чином, остаточно:

$$N_i^e = 1 - \frac{x}{h},\ N_j^e = \frac{x-y}{h},\ N_k^e = \frac{y}{h}$$

Завдання 3.

Не зовсім зрозуміло, що саме мається на увазі в завданні, оскільки в параграфі наведений повний розв'язок для вузла 1 і враховані усі 6 елементів як для трикутного, так і для прямокутного розбиття. Тому в якості продовження наведу частковий розрахунок для вузла 2, аби продемонструвати головну ідею розв'язку.

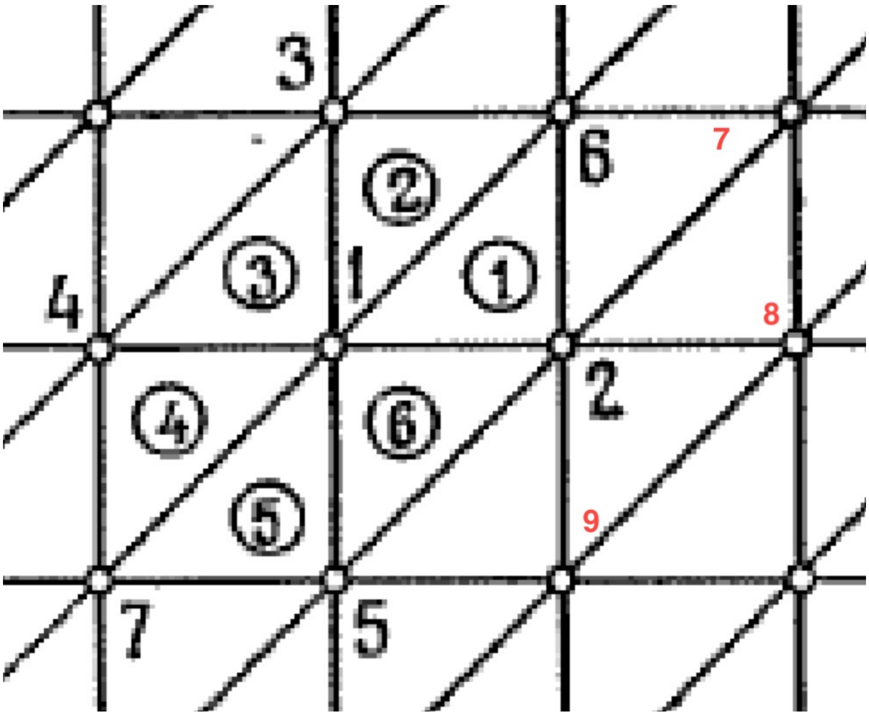
Нагадаємо формулу внеску для трикутного випадку:

$$k^e \varphi^e = \kappa^e \Delta^e \begin{bmatrix} [(\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2] & [\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e] & [\beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e] \\ [\beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e] & [(\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2] & [\beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e] \\ [\beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e] & [\beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e] & [(\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

Позначимо ось цю велику матрицю як $\mathbf{B}$, тому $k^e \varphi^e = \kappa^e \Delta^e \mathbf{B} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$.

Внесок до правої частини: $\mathbf{f}^e = \frac{1}{3} Q^e \Delta^e \mathbf{e}$.

Отже, додатково розглянемо ще 3 вузли, що прилягають до вузла 2:



Оскільки для елементів 1 та 6 розрахунок буде майже ідентичний до того, що був (лише нумерація буде $(2, 6, 1)$ замість $(1, 2, 6)$ для елементу 1, наприклад), то розглянемо елемент e_1, що відповідає трикутнику $(2, 8, 7) = (i, j, k)$. Маємо координати:

$$(x_2, y_2) = (h, 0),\ (x_8, y_8) = (2h, 0),\ (x_7, y_7) = (2h, h)$$

Тепер знайдемо коефіцієнти. Маємо

$$\alpha_i^{e_1} = \frac{x_j y_k - x_k y_i}{h^2},\ \beta_i^{e_1} = \frac{y_j - y_k}{h^2},\ \gamma_i^{e_1} = \frac{x_k - x_j}{h^2}$$

Або

$$\alpha_2^{e_1} = \frac{x_8 y_7 - x_7 y_8}{h^2} = 2,\ \beta_2^{e_1} = \frac{y_8 - y_7}{h^2} = -\frac{1}{h},\ \gamma_2^{e_1} = \frac{x_7 - x_8}{h^2} = 0$$

Далі для $\alpha_8^{e_1}, \beta_8^{e_1}, \gamma_8^{e_1}$:

$$\alpha_8^{e_1} = \frac{x_7 y_2 - x_2 y_7}{h^2} = -1,\ \beta_8^{e_1} = \frac{y_7 - y_2}{h^2} = \frac{1}{h},\ \gamma_8^{e_1} = -\frac{1}{h}$$

Нарешті для $\alpha_7^{e_1}, \beta_7^{e_1}, \gamma_7^{e_1}$:

$$\alpha_7^{e_1} = \frac{x_2 y_8 - x_8 y_2}{h^2} = 0,\ \beta_7^{e_1} = \frac{y_2 - y_8}{h^2} = 0,\ \gamma_7^{e_1} = \frac{2}{h}$$

Отже ми готові порахувати внесок. Для цього порахуємо:

$$(\beta_2^{e_1})^2 + (\gamma_2^{e_1})^2 = \frac{1}{h^2},\ (\beta_8^{e_1})^2 + (\gamma_8^{e_1})^2 = \frac{2}{h^2},\ (\beta_7^{e_1})^2 + (\gamma_7^{e_1})^2 = \frac{4}{h^2}$$

Ці елементи стоятимуть на діагоналі. Далі порахуємо усі $\beta_n^{e_1}\beta_m^{e_1} + \gamma_n^{e_1}\gamma_m^{e_1}, n \neq m$:

$$\beta_2^{e_1}\beta_8^{e_1} + \gamma_2^{e_1}\gamma_8^{e_1} = -\frac{1}{h^2},\ \beta_2^{e_1}\beta_7^{e_1} + \gamma_2^{e_1}\gamma_7^{e_1} = 0,\ \beta_8^{e_1}\beta_7^{e_1} + \gamma_8^{e_1}\gamma_7^{e_1} = -\frac{2}{h^2}$$

Отже наша матриця $\mathbf{B}$ має вид:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Отже наш внесок можна записати як:

$$k^{e_1}\varphi^{e_1} = \kappa^{e_1}\Delta^{e_1}\mathbf{B}\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_8 \\ \varphi_7 \end{bmatrix} = \frac{\kappa}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_8 \\ \varphi_7 \end{bmatrix}$$

Розмір матриці все ще 7×7, оскільки невідомими є $\varphi_2, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_5, \varphi_1$. Тому до ансамблювання маємо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_5 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

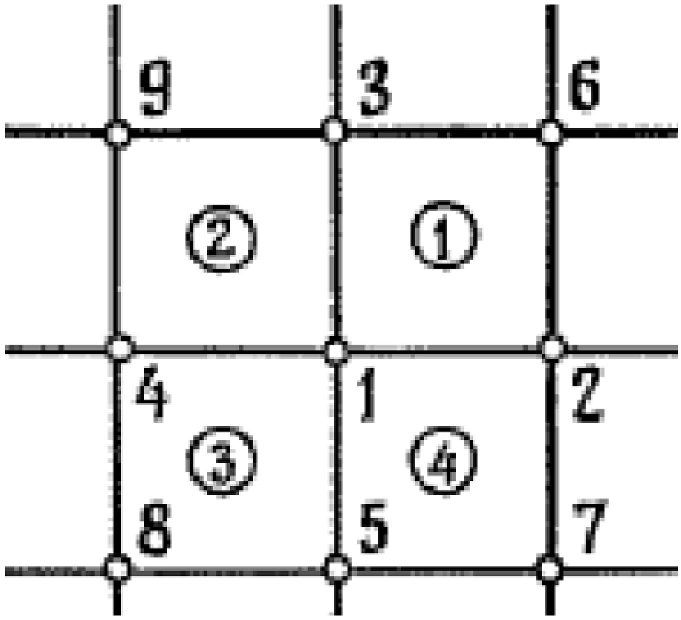
Тепер додамо те, що ми тільки що отримали:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{4} & -\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0 & -\mathbf{2} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_5 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \frac{h^2}{3\kappa} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{\mathbf{e_1}} \\ 0 \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{e_1}} \\ \mathbf{Q}^{\mathbf{e_1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Далі залишається зробити це для інших елементів (нехай це елементи $e_2, e_3, \ldots, e_6$). Також нехай розширений до матриці $\mathbb{R}^{7\times 7}$ вираз $\mathbf{B} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$ позначимо $\mathbf{B}^{\langle e \rangle}$, а розширений до вектора $\mathbb{R}^7$ вклад у правий додаток $\mathbf{f}^{\langle e \rangle}$. В такому разі після обрахунку по всім елементам отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbf{B}^{\langle e_k \rangle} = \frac{h^2}{3\kappa} \sum_{k=1}^{6} \mathbf{f}^{\langle e_k \rangle}$$

Тепер наведемо розрахунок для прямокутної сітки.



Випишемо, наприклад, внесок елемента 2.

Для вузла i (що розташований на початку координат) та трьох інших з того самого елементу $j-(h_x^e,0), k-(h_x^e,h_y^e), l-(0,h_y^e)$ маємо наступний внесок:

$$\frac{\kappa^e}{3h_x^e h_y^e}\begin{bmatrix} (h_x^e)^2+(h_y^e)^2 & \frac{(h_x^e)^2}{2}-(h_y^e)^2 & -\frac{(h_x^e)^2}{2}-\frac{(h_y^e)^2}{2} & \frac{(h_y^e)^2}{2}-(h_x^e)^2 \\ \frac{(h_x^e)^2}{2}-(h_y^e)^2 & (h_x^e)^2+(h_y^e)^2 & \frac{(h_x^e)^2}{2}-(h_y^e)^2 & -\frac{(h_x^e)^2}{2}-\frac{(h_y^e)^2}{2} \\ -\frac{(h_x^e)^2}{2}-\frac{(h_y^e)^2}{2} & \frac{(h_y^e)^2}{2}-(h_x^e)^2 & (h_x^e)^2+(h_y^e)^2 & \frac{(h_x^e)^2}{2}-(h_y^e)^2 \\ \frac{(h_y^e)^2}{2}-(h_x^e)^2 & -\frac{(h_x^e)^2}{2}-\frac{(h_y^e)^2}{2} & \frac{(h_x^e)^2}{2}-(h_y^e)^2 & (h_x^e)^2+(h_y^e)^2 \end{bmatrix}$$

В нашому конкретному випадку $h_x = h_y = h$, тому

$$k^e\varphi^e = \frac{\kappa^e}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

При цьому внесок у праву частину $\mathbf{f}^e = \frac{1}{4}Q^e h^2\mathbf{e}$. У випадку другого елементу $(1,3,9,4)$, маємо внесок

$$
\begin{bmatrix}
2 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/2 & 0 & 2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
= \frac{3h^2}{4\kappa}
\begin{bmatrix}
Q^2 \\ 0 \\ Q^2 \\ Q^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q^2
\end{bmatrix}
$$