3️⃣

Homework #3

Задача про количество подмножеств

Обозначим число подмножеств, не содержащих двух последовательных чисел, множества $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ как $P(\{1, 2, \dots .n\})$. Докажем, что $P(\{1, 2, \dots, n\}) = F_{n+2}$. Как и предлагается в условии, сделаем это при помощи мат индукции.

База индукции. Для $n = 1$ имеем $\{1\}$ и $\emptyset$, т.е. 2. Заметим, что $F_3 = 2$. Верно.

Для $n = 2$ имеем $\{1\}, \{2\}, \emptyset$, т.е. 3. Заметим, что $F_4 = 3$. Верно.

Ну и для уверенности проверим для $n = 3$. Имеем $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \emptyset$, т.е. 5. Снова заметим, что $F_5 = 5$. Опять верно (неожиданно, не правда ли?).

Переход. Пусть $P(\{1, 2, \dots, n\}) = F_{n+2}$ и $P(\{1, 2, \dots, n+1\}) = F_{n+3}$. Докажем, что $P(\{1, 2, \dots, n+2\}) = F_{n+4}$. Заметим, что мы можем разбить $P(\{1, 2, \dots, n+2\})$ на 2 слагаемых: в первом мы считаем все подмножества, не содержащие двух последовательных чисел, не содержащих 1 и все подмножества её содержащих. Если подмножества содержат единицу, то они автоматически не содержут двойки по условию, а значит нужное нам число равняется $P(\{3, 4, \dots, n+2\})$. Однако это число в точности равно $P(\{1, 2, \dots, n\})$.

Если же подмножества не содержат единицу, то тогда число таких подмножеств равняется $P(\{2, 3, \dots .n+2\}) = P(\{1, 2, \dots, n+1\})$. Таким образом имеем:

$$P(\{1, 2, \dots .n+2\}) = P(\{1, 2, \dots, n\}) + P(\{1, 2, \dots, n+1\})$$

Из предположения индукции:

$$P(\{1, 2, \dots .n+2\}) = F_{n+2} + F_{n+3} = F_{n+4}$$

Что и требовалось доказать.

Задача 8 (б, в, г, д, ж)

Тут во всех пунктах $\gamma_i \in \mathbb{C}$ — константы.

Пункт Б. Тут имеем характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10$. Его корни — это числа $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -5$. Поэтому общее решение: $a_n = \gamma_1 \cdot 2^n + \gamma_2 \cdot (-5)^n$.

Пункт В. Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$. Имеет 2 корня, оба комплексные: $\lambda_1 = 2 + 3i, \lambda_2 = 2 - 3i$. Таким образом решение:

$$a_n = \gamma_1(2+3i)^n + \gamma_2(2-3i)^n$$

Пункт Г. Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 + 9$. Имеет 2 корня: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Таким образом, решение:

$$a_n = 3^n i^n \left(\gamma_1 + \gamma_2(-1)^n\right)$$

Пункт Д. Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$. Единственный корень — это $\lambda_1 = -2$. Поэтому общее решение: $a_n = (-2)^n(\gamma_1 + \gamma_2 n)$.

Пункт Ж. Характеристичесий полином $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$. Единственный корень — это $\lambda_1 = -1$. Поэтому общее решение: $a_n = (-1)^n \left(\gamma_1 + \gamma_2 n + \gamma_3 n^2\right)$.

Задача 9(б,в)

Пункт Б. Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$. Как видим, у этого уравнения один корень — $\lambda_1 = 2$. Поэтому уравнение имеет вид $a_n = \gamma_1 \cdot 2^n + \gamma_2 n \cdot 2^n$. Найдём γ_1, γ_2 из начальных условий. Имеем:

$$2 = 2\gamma_1 + 2\gamma_2,\ 4 = 4\gamma_1 + 8\gamma_2$$

Или же $\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \gamma_1 + 2\gamma_2 = 1$. Отсюда видим, что $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$. Поэтому наше решение имеет вид $a_n = 2^n$.

Пункт В. Характеристический полином $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Заметим, что данное решение имеет два решения — $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. По другому эти 2 решения можно записать как $e^{2\pi i/3}$ и $e^{4\pi i/3}$. Пусть $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$, тогда второй корень имеет вид ε^2. В таком случае, решение в общем виде нашего уравнения: $a_n = \gamma_1\varepsilon^n + \gamma_2\varepsilon^{2n}$. Теперь предлагаю рассмотреть подпоследовательности $a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$. Имеем:

$$a_{3k} = \gamma_1\varepsilon^{3k} + \gamma_2\varepsilon^{6k} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$a_{3k+1} = \gamma_1 \varepsilon^{3k+1} + \gamma_2 \varepsilon^{6k+2} = \gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \varepsilon^2$$

$$a_{3k+2} = \gamma_1 \varepsilon^{3k+2} + \gamma_2 \varepsilon^{6k+4} = \gamma_1 \varepsilon^2 + \gamma_2 \varepsilon$$

Как видим, последовательность состоит из 3 элементов: $\{\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2, \gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon\}$. Найдём коэффициенты γ_1 и γ_2 из начальных условий:

$$\begin{cases} \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 = -\frac{1}{4} \\ \gamma_1\varepsilon^2 + \gamma_2\varepsilon = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Отсюда:

$$\gamma_1 = \frac{2\varepsilon - 1}{4(\varepsilon - 1)},\ \gamma_2 = \frac{\varepsilon - 2}{4(\varepsilon - 1)}$$

Отсюда имеем: $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{3(\varepsilon-1)}{4(\varepsilon-1)} = \frac{3}{4}$. Поэтому окончательно: $a_n = \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots\}$

Задача 15.5.

Характеристический полином имеет вид $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$. Воспользуемся тем, что $\alpha + \beta = 1$. Получим, что $\alpha = 1 - \beta$, а значит $P(\lambda) = \lambda^2 - (1-\beta)\lambda - \beta = 0$. Его дискриминант равен $D = (1-\beta)^2 + 4\beta = \beta^2 + 2\beta + 1 = (\beta+1)^2$. Таким образом корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \beta \pm (1 + \beta)}{2}$$

Первый корень — это $\lambda_1 = -\beta$, а второй — $\lambda_2 = 1$. Поэтому решение для $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_n = \gamma_1(-\beta)^n + \gamma_2 \cdot 1^n = \gamma_1(-\beta)^n + \gamma_2$$

Найдём коэффициенты γ_1, γ_2 из начальных условий:

$$\begin{cases} a_0 = \gamma_1 + \gamma_2 \\ a_1 = -\gamma_1\beta + \gamma_2 \end{cases}$$

Вычев из первого уравнения второе, получим $a_0 - a_1 = \gamma_1(1+\beta) \to \gamma_1 = \frac{a_0 - a_1}{1+\beta}$. Второй коэффициент: $\gamma_2 = a_0 - \gamma_1 = a_0 - \frac{a_0 - a_1}{1+\beta} = \frac{a_1 + \beta a_0}{1+\beta}$. Поэтому имеем:

$$a_n = \frac{a_0 - a_1}{1+\beta}(-\beta)^n + \frac{a_1 + \beta a_0}{1+\beta}$$

Найдём $\lim_{n\to\infty} a_n$. Заметим, что по условию $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$. Видим, что $|\beta| < 1$. Отсюда $\lim_{n\to\infty}(-\beta)^n = 0$, а поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1 + \beta a_0}{1+\beta}$$