

Варіаційний Аналіз

Дмитро Захаров

21 червня 2024 р.

Вміст

1	Класичні задачі.	3
1.1	Задача Діодони.	3
1.2	Задача про брахістохрону.	3
2	Слабкий та сильний екстремум.	4
2.1	Формальні означення.	4
2.2	Приклади	4
3	Перша варіація.	6
4	Ключові леми.	7
4.1	Формулювання	7
4.2	Доведення	7
5	Рівняння Ейлера.	9
5.1	Формулювання задачі.	9
5.2	Необхідна умова екстремума.	10
6	Перші інтеграли Ейлера	11
7	Регулярні функціонали.	12
8	Природні крайові умови.	14
9	Задача з рухомим кінцем.	15
9.1	Загальна варіація.	15
9.2	Задачі з вільними кінцями.	15
10	Кінці на кривих.	17
11	Ламані екстремалі	18
12	Фіксована задача Больца.	19
13	Нефіксована задача Больца.	21

14 Ізопараметрична задача.	23
15 Векторна задача	25
16 Старші похідні	26
17 Умови другого порядку	28
17.1 Загальні відомості	28
17.2 Формула для інтегралу	29
18 Умови Лежандра та Якобі	31
19 Умова Вейерштраса	33
20 Достатня умова	35
20.1 Достатня умова	35
20.2 Векторна задача	36
21 Інтеграл Гільберта	38
21.1 Поле екстремалей	38
21.2 Інтеграл Гільберта	38
22 Керованість лінійних систем	40
23 Задача швидкодії	42
24 Принцип максимуму Понтрягіна 1	44
25 Принцип максимуму Понтрягіна 2	45
26 Зупинка візка на рейках	46
27 Кількість перемикачів	47
28 Принцип максимуму Понтрягіна 3	48

1 Класичні задачі.

Умова. Постановка найпростішої задачі варіаційного числення. Приклади (задача про брахістохрону, задача Діодони).

Відповідь. Якщо в звичайному аналізі зазвичай ми розглядали деяку функцію $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ і шукали максимум чи мінімум цієї функції, то варіаційний аналіз розглядає функціонали, тобто функції від функцій. При цьому, доволі багато речей буде подібними, але тим не менш це досить новий погляд на задачі оптимізації.

Розглянемо кілька класичних прикладів варіаційного числення.

1.1 Задача Діодони.

Серед усіх кривих заданої довжини ℓ знайти ту, що обмежує найбільшу площу. Вважаємо, що кінці закріплені вздовж вісі Ox . Тоді, задачу можемо сформулювати наступним чином:

$$\begin{cases} J[f] = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \rightarrow \max \\ \ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ f(x_0) = f(x_1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Тут, як бачимо, на відміну від класичного аналізу, ми шукаємо функцію $f(x)$, яка максимізує функціонал $J[f]$. Тепер, розглянемо інший важливий приклад.

1.2 Задача про брахістохрону.

Історично дуже важлива задача, оскільки по своїй суті саме вона вважається істочком варіаційного аналізу, як математичної дисципліни. Її формулювання наступне:

Нехай є дві точки A та B , що не лежать на одній горизонтальній прямій. Також, нехай горизонтальна відстань між ними ℓ , а вертикальна h . В точку A поставили вантаж. Якою має бути форма кривої, щоб під дією лише сили тяжіння без урахування тертя точка за найкоротший час перейшла з точки A в точку B ?

Запишемо цю задачу більш детально. З закону збереження енергії, функція швидкості від висоти $v(y) = \sqrt{2gy}$. Тоді оскільки $v = \frac{ds}{dt}$ де $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, маємо

$$\sqrt{2gy} dt = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (2)$$

Звідси легко знайти загальний час, проінтегрувавши вираз:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(x)}} dx \rightarrow \inf \quad (3)$$

Таким чином, формально задача варіаційного числення:

$$\begin{cases} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(x)}} dx \rightarrow \inf \\ f(0) = 0, f(\ell) = h \end{cases} \quad (4)$$

2 Слабкий та сильний екстремум.

Умова. Слабкий та сильний екстремум. Приклади.

Відповідь. Почнемо з означень.

2.1 Формальні означення.

Через \mathcal{F} позначимо множину функцій виду $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.1. $\mathcal{C}^1[a, b]$ – простір неперервно-диференційованих функцій на $[a, b]$ з нормою $\|f\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Definition 2.2. $\mathcal{C}^k[a, b]$ – простір k разів неперервно-диференційованих функцій на $[a, b]$ з нормою $\|f\|_k = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)|$.

Definition 2.3. Сильним ε -околом $\mathcal{U}_\varepsilon^+$ кривої $\tilde{f} \in \mathcal{KC}^1[a, b]$ є

$$\mathcal{U}_\varepsilon^+(\tilde{f}) = \{f \in \mathcal{F} : |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]\} \quad (5)$$

Definition 2.4. Слабим ε -околом $\mathcal{U}_\varepsilon^-$ кривої $\tilde{f} \in \mathcal{KC}^1[a, b]$ називають

$$\mathcal{U}_\varepsilon^-(\tilde{f}) = \{f \in \mathcal{F} : |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon \wedge |f'(x) - \tilde{f}'(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]\} \quad (6)$$

Definition 2.5. Нехай маємо функціонал J і розглянемо множину функцій, що задовольняють умові $\mathcal{U} = \{f \in \mathcal{F} : f \in \mathcal{KC}_1[a, b], f(a) = A, f(b) = B\}$. Будемо казати, що досягається **сильний(слабкий) локальний мінімум** на кривій $\tilde{f} \in \mathcal{U}$ якщо:

$$\exists \varepsilon > 0 : J[\tilde{f}] \leq J[f] \forall f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_\varepsilon^\pm \quad (7)$$

Важливе зауваження. З того, що \tilde{f} досягає сильний локальний екстремум випливає, що \tilde{f} досягає і сильного локального мінімуму.

2.2 Приклади

Розглянемо приклад, коли досягається слабкий локальний мінімум, але немає сильного локального мінімуму. Нехай маємо

$$J[f] = \int_0^\pi f(x)^2 (1 - f'(x)^2) dx \rightarrow \inf, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0 \quad (8)$$

Покажемо, що на $\tilde{f} \equiv 0$ досягається слабкий локальний мінімум. Дійсно, покладемо $\varepsilon := \frac{1}{2}$ і покажемо, що

$$\forall f \in \mathcal{U}_\varepsilon^- : J[\tilde{f}] \leq J[f] \quad (9)$$

Оскільки f належить околу, то $|f| < \frac{1}{2}$, $|f'| < \frac{1}{2}$. Оцінимо інтеграл:

$$J[f] = \int_0^\pi f(x)^2 \underbrace{(1 - f'(x)^2)}_{\geq \frac{3}{4}} dx \geq \frac{3}{4} \int_0^\pi f(x)^2 dx \geq 0 = J[\tilde{f}] \quad (10)$$

Тепер покажемо, що ми не маємо сильного локального максимуму. Нехай від противного: локальний сильний мінімум це $\tilde{f} \equiv 0$. Тоді має виконуватись

$$J[\tilde{f}] = 0 \leq J[f] \quad \forall f \in \mathcal{U}_\varepsilon^+(\tilde{f}) \quad (11)$$

Оскільки f належить околу, то $|f| < \varepsilon$. Тепер розглянемо таку послідовність функцій: $f_n := \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Легко бачити, що $|f_n| = \left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, тому для скіль завгодно маленького ε можна обрати $n_\varepsilon := \lceil \varepsilon^{-2} \rceil + 1$, щоб $f_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{f})$. Тепер оцінимо $J[f_n]$:

$$J[f_n] = \int_0^\pi \frac{\sin^2 nx}{n} \left(1 - \frac{n^2 \cos^2 nx}{n} \right) dx \quad (12)$$

Можна показати, що цей інтеграл дорівнює:

$$J[f_n] = \frac{\pi(4 - n)}{8n} \quad (13)$$

Видно, що для $n > 4$ маємо $J[f_n] < 0 = J[\tilde{f}]$ – протиріччя.

3 Перша варіація.

Умова. Перша варіація. Її застосування та обчислення.

Відповідь. Отже, спочатку сформулюємо, що ми взагалі вважаємо за лінійний функціонал.

Нехай ми маємо нормований лінійний простір V і задамо деяку функцію, що кожен елемент з цього простору $\eta \in V$ відображає на поле F (в рамках варіаційного аналізу нас цікавить поле $F = \mathbb{R}$) – це по суті і є наш функціонал. Тепер, означення.

Definition 3.1. Нехай маємо функціонал $J : V \rightarrow \mathbb{R}$. Він називається **лінійним**, якщо

1. $J[\alpha\eta] = \alpha J[\eta] \quad \forall \eta \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $J[\eta_1 + \eta_2] = J[\eta_1] + J[\eta_2] \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in V$.

Example. Нехай $J[f] = \int_a^b f(x)dx$. Тоді цей функціонал лінійний.

Example. Нехай $J[f] = \int_a^b \beta(x)f(x)dx$, де $\beta \in \mathcal{C}[a, b]$ – фіксована функція. Цей функціонал також є лінійним.

Тепер розглянемо поняття першої варіації.

Definition 3.2. Варіація функціоналу. Нехай $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ функціонал на лінійному нормованому просторі V . Розглянемо приріст

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] \quad (14)$$

Нехай $\Delta J[\eta] = L[\eta] + \bar{o}(\|\eta\|)$, де $L[\cdot]$ – лінійний функціонал. Тоді кажуть, що $J[\eta]$ – диференційований функціонал, а $L[\eta]$ – варіацією та позначають $\delta J[h]$.

Theorem 3.3. Диференціал диференційованого функціоналу єдиний.

Theorem 3.4. Нехай функціонал $J[f]$ досягає екстремуму у \tilde{f} . Тоді варіація цього функціоналу за $f = \tilde{f}$ нульова, тобто $\delta J[\eta] = 0$ у \tilde{f} .

Доведення. Без обмеження загальності, нехай перед нами мінімум. Тоді,

$$\Delta J[\eta] = \delta J[\eta] + \bar{o}(\|\eta\|) \quad (15)$$

Очевидно, що при малому $\|\eta\|$ знак $\Delta J[\eta]$ буде таким самим, як і у $\delta J[\eta]$. Нехай $\delta J[\eta_0] \neq 0$ для деякого η_0 . Для скіль завгодно малого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\delta J[-\varepsilon\eta_0] = -\delta J[\varepsilon\eta_0] \quad (16)$$

Тоді, $\Delta J[h]$ можна зробити як додатним, та і від'ємним, але для мінімуму

$$\Delta J[\eta] = J[\tilde{f} + \eta] - J[\tilde{f}] \geq 0 \quad (17)$$

для усіх достатньо малих $\|\eta\|$. Протиріччя, а отже $\delta J[\eta] = 0$.

4 Ключові леми.

Умова. Лема Лагранжа, лема Дюбуа-Реймона.

Відповідь. Цю відповідь розділимо на дві частини: спочатку, сформулюємо теорему, а далі доведемо її.

4.1 Формулювання

Лемма 4.1. Лагранжа. Нехай $\alpha \in \mathcal{C}[a, b]$. Тоді, якщо для будь-якого $\eta \in \mathcal{C}[a, b]$ такого, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$, виконується $\int_a^b \alpha(x)\eta(x)dx = 0$, то $\alpha \equiv 0$.

Лемма 4.2. Дюбуа-Реймона. Нехай $\alpha \in \mathcal{C}[a, b]$. Тоді, якщо для будь-якого $\eta \in \mathcal{C}[a, b]$ такого, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$, виконується $\int_a^b \alpha(x)\eta'(x)dx = 0$, то $\alpha \equiv \text{const}$.

Лемма 4.3. Нехай $\alpha, \beta \in \mathcal{C}[a, b]$. Тоді, якщо для будь-якого $\eta \in \mathcal{C}^1[a, b]$ такого, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$, виконується

$$\int_a^b (\alpha(x)\eta(x) + \beta(x)\eta'(x))dx = 0, \quad (18)$$

то $\beta' \equiv \alpha$ на $[a, b]$.

4.2 Доведення

Доведення леми Лагранжа. Припустимо від протилежного. Нехай $\exists x_0 \in [a, b]$ для якого $\alpha(x_0) \neq 0$. Позначимо $\varepsilon := \alpha(x_0)$. Без обмеження загальності, нехай $\varepsilon > 0$ (це нам буде зручно). Тоді, оскільки за умовою $\alpha \in \mathcal{C}[a, b]$, то існують $x_1, x_2 : x_1 < x_2$ та $\alpha(x) > 0$ для усіх $x \in [x_1, x_2]$. Тоді, у якості η можемо взяти

$$\eta(x) = (x - x_1)(x_2 - x) \cdot \mathbb{1}_{[x_1, x_2]}(x) \quad (19)$$

Тоді, значення інтегралу:

$$\int_a^b \alpha(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)(x - x_1)(x_2 - x)dx > 0, \quad (20)$$

що суперечить умові. Отже, $\alpha \equiv 0$.

Доведення леми Дюбуа-Реймона. Покладемо

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(x)dx \implies \int_a^b cdx = \int_a^b \alpha(x)dx \implies \int_a^b [\alpha(x) - c] = 0 \quad (21)$$

Оберемо $\eta(x) = \int_a^x [\alpha(x) - c]dx$. Тоді дійсно $\eta(a) = \eta(b) = 0$ та $\eta \in \mathcal{C}^1[a, b]$. Тоді

$$\int_a^b [\alpha(x) - c]\eta'(x)dx = \int_a^b \alpha(x)\eta'(x)dx - c \int_a^b \eta'(x)dx = 0 \quad (22)$$

Але, з іншого боку, $\eta'(x) = \alpha(x) - c$ і

$$\int_a^b [\alpha(x) - c]\eta'(x)dx = \int_a^b (\alpha(x) - c)^2 dx = 0 \implies \alpha \equiv c \quad (23)$$

Доведення третьої леми. Розглянемо $A(x) := \int_a^x \alpha(x)dx$, Тоді

$$\int_a^b \alpha(x)\eta(x)dx = \int_a^b \eta(x)dA(x) = A(x)\eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b A(x)\eta'(x)dx \quad (24)$$

Підстановка $\eta(a) = \eta(b) = 0$ дає, що $A(x)\eta(x)\Big|_a^b = 0$, а отже

$$\int_a^b \alpha(x)\eta(x)dx = - \int_a^b A(x)\eta'(x)dx \quad (25)$$

З іншого боку, з умови

$$\int_a^b [-A(x) + \beta(x)]\eta'(x)dx = 0, \quad (26)$$

а тому з леми Дюбуа-Реймона $\beta(x) - A'(x) \equiv c$, звідки $\beta'(x) \equiv \alpha(x)$.

5 Рівняння Ейлера.

Умова. Необхідні умови екстремуму. Рівняння Ейлера в інтегральній формі та диференціальній формах.

5.1 Формулювання задачі.

Нехай маємо задачу з фіксованими відрізками

$$\begin{cases} J[f] = \int_a^b L(x, f, f') dx \rightarrow \inf \\ f(a) = A, f(b) = B \end{cases} \quad (27)$$

Спробуємо її розв'язати. Логічно подивитися на приріст функціоналу $\Delta J[\eta]$:

$$\Delta J[h] = J[f + \eta] - J[f] = \int_a^b [L(x, f + \eta, f' + \eta') - L(x, f, f')] dx \quad (28)$$

Якщо розкласти перший доданок у ряд Тейлора, то отримаємо:

$$\Delta J[h] = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, f, f')\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f, f')\eta' \right] dx + \bar{o}(\|\eta\|^2, \|\eta'\|^2), \quad (29)$$

отже, поведінка приросту в основному визначається першим додатком у правій частині. Отже, логічно покласти наступне позначення:

Definition 5.1. Першою варіацією J назвемо

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, f, f')\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f, f')\eta' \right] dx \quad (30)$$

Definition 5.2. Зауваження. Далі, буде зручно у якості першої варіації застосовувати наступний вираз: нехай $\phi(\varepsilon) = J[f + \varepsilon\eta]$, тоді

$$\delta J[f, \eta] := \left. \frac{d}{d\varepsilon} J[f + \varepsilon\eta] \right|_{\varepsilon=0} = \phi'(0) \quad (31)$$

Далі, рівняння Ейлера буде частково базуватися на наступній лемі.

Lemma 5.3. Нехай $\Phi(x, \varepsilon)$ та $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)$ неперервні на $[a, b]$ при $|\varepsilon| < \alpha_0$. Тоді якщо

$$\phi(\varepsilon) = \int_a^b \Phi(x, \varepsilon) dx, \quad (32)$$

то справедливо

$$\phi'(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\partial \Phi(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} dx \quad (33)$$

Оскільки вона була доведена у курсі математичного аналізу, ми її не будемо доводити. Отже, з неї випливає наступна теорема.

Theorem 5.4. Нехай $L, \frac{\partial L}{\partial f}, \frac{\partial L}{\partial f'}$ неперервні по сукупності аргументів, тоді перша варіація поставленої задачі існує.

5.2 Необхідна умова екстремума.

Нехай на кривій \tilde{f} досягається слабкий мінімум. Тоді,

$$\delta J[\tilde{f}, \eta] = 0 \quad \forall \eta : \eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (34)$$

Розглянемо $f(x) = \tilde{f}(x) + \varepsilon \eta(x)$ для усіх $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Легко помітити, що це сімейство кривих є допустимим. Окрім того, для малих ε , $f \in \mathcal{U}_\varepsilon^-(\tilde{f})$. Тоді,

$$J[\tilde{f}] \leq J[\tilde{f} + \varepsilon \eta(x)] = \phi(\varepsilon) \quad (35)$$

Отже, маємо умову $\phi'(\tilde{f}, \varepsilon) = 0$. Тому, маємо

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (36)$$

Проінтегруємо частинами другий вираз. Нехай $dv = \eta'(x)$, тоді $v = \eta(x)$. Тоді

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \eta'(x) dx = \eta(x) \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \eta(x) dx \quad (37)$$

Проте з крайових умов $\eta(a) = \eta(b) = 0$, тому перший доданок зникає. Отже, маємо

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \eta(x) - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') \right] \eta(x) dx = 0 \quad (38)$$

А тому з леми Лагранжа маємо **рівняння Ейлера в диференційній формі**.

Definition 5.5. Рівнянням Ейлера в диференційній формі називають рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial f}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') = 0 \quad (39)$$

Також, якщо ми проінтегруємо це рівняння по dx від a до x , то отримаємо інтегральне рівняння Ейлера.

Definition 5.6. Рівнянням Ейлера в інтегральній формі називають рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') - \int_a^x \frac{\partial L}{\partial f}(\xi, \tilde{f}(\xi), \tilde{f}'(\xi)) d\xi \equiv \text{const} \quad (40)$$

Відповідно, обидва рівняння ми можемо розв'язати. Розв'язок цього рівняння має спеціальну назву.

Definition 5.7. Екстремаллю вважаємо функцію $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1[a, b]$, що є розв'язком рівняння Ейлера.

6 Перші інтеграли Ейлера

Умова. Перші інтеграли рівняння Ейлера.

Відповідь. Розглянемо деякі випадки рівняння Ейлера.

Випадок 1. $L = L(x, f')$, тобто L не залежить від f . Тоді рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0, \quad (41)$$

тобто $\frac{\partial L}{\partial f'} = c = \text{const}$ – перший інтеграл.

Випадок 2. $L = L(f, f')$, тобто L не залежить від x . Тоді рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\partial L}{\partial f} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial f' \partial f} f' + \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} f'' \right) = 0 \quad (42)$$

Домножимо обидві частини на f' , отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial f} f' - \frac{\partial^2 L}{\partial f' \partial f} (f')^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} f' f'' = \frac{d}{dx} \left(L - \frac{\partial L}{\partial f'} f' \right) = 0 \quad (43)$$

Отже, перший інтеграл має вигляд

$$L - \frac{\partial L}{\partial f'} f' \equiv c = \text{const} \quad (44)$$

Випадок 3. $L = L(x, f)$, тобто L не залежить від f' . Тоді рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{\partial L(x, f)}{\partial f} = 0 \quad (45)$$

Тобто, маємо рівняння Ейлера. Це не є диференціальним рівнянням, а просто рівняння на функцію $f = f(x)$.

7 Регулярні функціонали.

Умова. Регулярні функціонали. Гладкість екстремалей, теорема Гільберта. Лема про заокруглення кутів.

Відповідь. Почнемо з поняття регулярного функціоналу.

Definition 7.1. Нехай $L \in \mathcal{C}^2$ та $\frac{\partial L(x, f, f')}{\partial (f')^2} \neq 0 \ \forall f, f'$. Тоді такий функціонал ми будемо називати **регулярним**.

У регулярного функціоналу немає ломаних екстремалей. Розглянемо теорему Гільберта.

Theorem 7.2. Гільберта. Нехай $L \in \mathcal{C}^2$ та \tilde{f} – неперервно-диференційована в деякому околі точки $a < c < b$ та $\frac{\partial^2 L(c, \tilde{f}(c), \tilde{f}'(c))}{\partial (f')^2} \neq 0$. Тоді \tilde{f} – двічі неперервно-диференційована в деякому околі точки c .

Доведення. Випишемо рівняння Ейлера в інтегральній формі:

$$\frac{\partial L(x, \tilde{f}(x), \tilde{f}'(x))}{\partial f'} - \int_a^x \frac{\partial L}{\partial f}(\xi, \tilde{f}(\xi), \tilde{f}'(\xi)) d\xi \equiv \text{const} =: \hat{c} \quad (46)$$

Розглянемо наступну функцію:

$$\Phi(x, z) = \frac{\partial L(x, \tilde{f}(x), z)}{\partial f'} - \int_a^x \frac{\partial L}{\partial f}(\xi, \tilde{f}(\xi), \tilde{f}'(\xi)) d\xi - \hat{c} \quad (47)$$

Розглянемо рівняння $\Phi(x, z(x)) = 0$. Помітимо, що $z(x) = \tilde{f}'(x)$ є розв'язком.

Розглянемо точку $(x_0, z_0) = (c, \tilde{f}'(c))$. Скористаємось теоремою про неявну функцію.

Theorem 7.3. Про неявну функцію. Нехай $\Phi(x, z)$ – неперервно диференційована в околі (x_0, z_0) та нехай $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$. Тоді в деякому околі точки x_0 існує єдина функція $z(x) : \Psi(x, z(z)) \equiv 0$, причому $z(x) \in \mathcal{C}^1$.

Перевіримо умову цієї теореми. Маємо точку $(x_0, z_0) = (c, \tilde{f}'(c))$. Вона очевидно неперервна по x, z . Часткова похідна:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 L(x, \tilde{f}(x), t)}{\partial (f')^2} \neq 0, \quad (48)$$

оскільки за умовою маємо регулярний функціонал. Отже маємо єдиний розв'язок $z = z(x)$ такий, що $\Phi(x, z(z)) \equiv 0$. Значить, $z = \tilde{f}'(x) \in \mathcal{C}^1 \implies \tilde{f}(x) \in \mathcal{C}^2$.

Нарешті, розглянемо лему про скруглення кутів:

Lemma 7.4. Про скруглення кутів. Якщо $L(x, f, f')$ неперервна по сукупності аргументів, то

- $\inf_{f \in \mathcal{KC}^1[a, b]} J[f] = \inf_{f \in \mathcal{C}^1[a, b]} J[f]$, де $f(a) = A, f(b) = B$.

- Твердження 1 зберігається, якщо брати тільки $f \in \mathcal{KC}^1[a, b]$, що задовольняють

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon \quad (49)$$

для заданих $\varepsilon > 0$ та \tilde{f} .

- Твердження 1 та 2 справедливі для \sup також.

Доведення. Оскільки $\mathcal{C}^1[a, b] \subset \mathcal{KC}^1[a, b]$, то $\inf_{f \in \mathcal{KC}^1[a, b]} J[f] \leq \inf_{f \in \mathcal{C}^1[a, b]} J[f]$. Доведемо справедливості оберненого твердження від супротивного.

Нехай $\inf_{\mathcal{KC}^1} J[f] < \inf_{\mathcal{C}^1} J[f]$. Тоді існує $\tilde{f} \in \mathcal{KC}^1[a, b]$ та $\varepsilon > 0$ такі, що

$$J[\tilde{f}] < \inf_{\mathcal{C}^1} J[f] - \varepsilon \quad (50)$$

Нехай $\{\tau_i\}_{i=1}^m$ – точки розриву похідної функції \tilde{f}' та $\Delta_i := \tilde{f}'(\tau_i^+)$. Розглянемо замкнену обмежену множину:

$$K := \{(x, f, f') : x \in [a, b], |f - \tilde{f}| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{|\Delta_i \delta_0|}{4} \right\}, |f' - \tilde{f}'| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{|\Delta_i|}{2} \right\}\}, \quad (51)$$

на якому неперервна функція L обмежена: $|L(x, f, f')| \leq \mu$. Тоді розглянемо неперервну функцію $\alpha(x) := \frac{(1-|x|)^2}{4} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$, у якій скачок величини -1 при $x = 0$.

Тоді функції $\delta\alpha\left(\frac{x-\tau_i}{\delta}\right)$ – неперервна та її похідна усюди неперервна окрім τ_i . Легко бачити, що

$$f_\delta(x) = \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^m \Delta_i \delta\alpha\left(\frac{x - \tau_i}{\delta}\right) \quad (52)$$

є неперервно-диференційованою на $[a, b]$ та $f_\delta(x) \equiv \tilde{f}$ за відрізками $[\tau_i - \delta, \tau_i + \delta]$. При достатньо малому δ ці відрізки не пересікаються. Воно також задовольняє крайовим умовам.

Окрім цього,

$$|f_\delta(x) - \tilde{f}(x)| \leq \max |\Delta_i| \frac{\delta}{4}, \quad |f'_\delta(x) - \tilde{f}'| \leq \max \frac{|\Delta_i|}{2} \quad (53)$$

тому що з визначення функції α : $|\alpha| \leq \frac{1}{4}$, $|\alpha'| \leq \frac{1}{2}$. Тоді за $\delta < \delta_0$ маємо:

$$J[f_\delta] - J[\tilde{f}] = \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i - \delta}^{\tau_i + \delta} [L(x, f_\delta(x), f'_\delta(x)) - L(x, \tilde{f}, \tilde{f}'(x))] dx \quad (54)$$

Звідки отримуємо:

$$J[f_\delta] \leq J[\tilde{f}] + 4m\delta\mu \leq \inf_{\mathcal{C}^1} J[f] - \varepsilon + 4m\delta\mu < \inf_{\mathcal{C}^1} J[f] \quad (55)$$

Оскільки $f_\delta \in \mathcal{C}^1[a, b]$, то отримали протиріччя.

8 Природні крайові умови.

Умова. Задача з кінцями на горизонтальних прямих. Природні крайові умови

Відповідь. Розглянемо наступну задачу варіаційного аналізу:

$$J[f] = \int_a^b L(x, f, f') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (56)$$

де $a, b \in \mathbb{R}$. Тобто, ми не фіксуємо значення на кінцях, а дозволяємо $f(a)$ та $f(b)$ набувати довільні значення. Знову розглядаємо приріст функціоналу:

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] = \int_a^b [L(x, f + \eta, f' + \eta') - L(x, f, f')] dx \quad (57)$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta' \right] dx + \bar{o}(\|\eta\|^2, \|\eta'\|^2) \quad (58)$$

Тоді, знову перша варіація набуває вигляду

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta' \right] dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f} \eta(x) dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'} d\eta(x) \quad (59)$$

Далі інтегруємо по частинам

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \right] \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (60)$$

Отже, маємо перший доданок, що збігається з задачею з фіксованими кінцями, а також додатково з'явився вираз $\frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=b} \eta(b) - \frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=a} \eta(a)$. Помітимо, що тут не обов'язково мають обнулятися $\eta(a)$ та $\eta(b)$.

Оберемо такий η , що зануляється на кінцях, тобто $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Тоді, з леми Лагранжа маємо рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \quad (61)$$

Звідки видно, що для кривої $f(x)$ розв'язок задачі про вільні кінці має бути екстремаллю. Тоді умова $\delta J = 0$ приймає вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=b} \eta(b) - \frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=a} \eta(a) = 0 \quad (62)$$

Оскільки η довільна, то маємо умову

$$\frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=b} = \frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x=a} = 0 \quad (63)$$

Це і є **природні крайові умови**.

9 Задача з рухомим кінцем.

Умова. Задачі з вільними кінцями. Загальна формула для обчислення варіації.

9.1 Загальна варіація.

Знову розглядаємо задачу

$$J[f] = \int_a^b L(x, f, f') dx \rightarrow \text{extr}, \quad (64)$$

але тут ми не фіксуємо a та b .

Для подальшої дискусії, введемо поняття відстані між кривими.

Definition 9.1. Відстанню між кривими $y = f(x)$ та $y = g(x)$ будемо вважати вираз

$$\rho(f, g) = \max |f - g| + \max |f' - g'| + \rho(F_0, G_0) + \rho(F_1, G_1), \quad (65)$$

де F_0, F_1 – лівий та правий кінець кривої $f(x)$, а G_0, G_1 – кривої $g(x)$, де відстань між точками розуміємо у метриці Евкліда.

Розглянемо дві близькі у сенсі відстані криві $f(x)$ та $\tilde{f}(x)$ та покладемо $\eta(x) := \tilde{f}(x) - f(x)$. Покладемо $F_0 = (x_0, y_0)$ та $F_1 = (x_1, y_1)$ – початкові та кінцеві точки $y = f(x)$. Початкову та кінцеву точки кривої $\tilde{f}(x) = f(x) + \eta(x)$ позначимо як $F_0^* = (x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ та $F_1^* = (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

Definition 9.2. Загальною варіацією функціонала $J[f]$ будемо називати лінійну варіацію відносно $\eta, \eta', \delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$ та відрізняючомуся від прирісту

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] \quad (66)$$

на величину порядку вище першого відносно відстані $\rho(f, f + \eta)$.

9.2 Задачі з вільними кінцями.

Задача з рухомим кінцем. Знову ж таки, нехай f не є фіксованим на $x = a$ та $x = b$ і потрібно знайти $\inf_f J[f]$, де як завжди $J[f] = \int_a^b L(x, f, f') dx$.

Знаходимо приріст:

$$\Delta J = J[f + \eta] - J[f] = \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} L(x, f + \eta, f' + \eta') dx - \int_{x_0}^{x_1} L(x, f, f') dx \quad (67)$$

Далі маємо розбиття на наступні інтеграли:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{x_0}^{x_1} [L(x, f + \eta, f' + \eta') - L(x, f, f')] dx \\ &+ \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} L(x, f + \eta, f' + \eta') dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} L(x, f + \eta, f' + \eta') dx \end{aligned} \quad (68)$$

Далі розкладаємо у ряд Тейлора. Перший доданок буде як при виведенні формули

Ейлера, а другий набуде наступного вигляду:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta'(x) \right] dx + L(x, f, f') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - L(x, f, f') \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \bar{o}(\rho(f, f + \eta)) \quad (69)$$

Далі після інтегрування частинами знову маємо:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \right] \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta(x) \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + L(x, f, f') \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - L(x, f, f') \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \bar{o}(\rho(f, f + \eta)) \quad (70)$$

За нашою побудовою (ми продовжували дотичною) маємо $\eta(x_0) = \delta y_0 - (f'(x_0) - \eta'(x_0))\delta x_0$, тому наближено:

$$\eta(x_0) \approx \delta y_0 - f'(x_0)\delta x_0, \quad \eta(x_1) \approx \delta y_1 - f'(x_1)\delta x_1 \quad (71)$$

і відкидаючи малий доданок $\bar{o}(\rho)$ маємо **формулу загальної варіації**.

Definition 9.3. Формулою загальної варіації називають формулу

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \right] \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \delta y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \quad (72)$$

Для кращого розуміння, що ми називаємо варіаціями $\delta x_i, \delta y_i$, розглянемо вже відомі нам задачі:

| Example. Якщо кінці лежать на прямих $x_0 = a, x_1 = b$, то $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$.

| Example. Якщо кінці фіксовані, то $\delta x_0 = \delta x_1 = \delta y_0 = \delta y_1 = 0$.

Зауваження. Якщо \tilde{f} є екстремумом функціоналу, то вона є екстремаллю, а також виконується

$$\frac{\partial L}{\partial f'} \delta y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial f'} f' \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} = 0 \quad (73)$$

для $f(x) = \tilde{f}(x)$.

10 Кінці на кривих.

Умова. Задачі з кінцями на кривих, умови трансверсальності.

Відповідь. Нехай $y(x_0) = \psi_0(x_0)$, $y(x_1) = \psi_1(x_1)$, де треба мінімізувати функціонал $J[f] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, f, f')dx$, де знову $f \in \mathcal{KC}^1[x_0, x_1]$.

Нагадаємо, що загальною варіацією називаємо вираз виду

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \right] \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \delta y \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \delta x \Big|_{x=x_0}^{x=x_1}, \quad (74)$$

тому нас тут цікавить знайти вирази для δy_i відносно δx_i . Дійсно,

$$\delta y_i = \psi_i(x_i + \delta x_i) - \psi_i(x_i) = [\psi'_i(x_i) + \bar{o}(1)] \delta x_i. \quad (75)$$

Тоді умова $\delta J = 0$ прийме вигляд

$$\delta J = \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \psi'_1 + L - \frac{\partial L}{\partial f'} f' \right) \Big|_{x=x_1} \delta x_1 - \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \psi'_0 + L - \frac{\partial L}{\partial f'} f' \right) \Big|_{x=x_0} \delta x_0 = 0. \quad (76)$$

Оскільки δx_i є незалежними і довільні, то отримуємо так звану умову трансверсальності.

Definition 10.1. Умовами трансверсальності називають рівняння

$$\left(L + (\psi_i - f') \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \Big|_{x=x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (77)$$

11 Ламані екстремалі

Умова. Ламані екстремалі. Лема про заокруглення кутів. Умови Вейєрштраса-Ердмана.

Відповідь. До цього, клас розглядаємих функцій був клас неперервних функцій. Розширимо його до класу $\mathcal{C}^1([a, b] \setminus \{\tau\})$, тобто неперервно-диференційованих усюди, окрім, можливо, точки $\tau \in [a, b]$.

Дослідимо на слабкий екстремум функціонал $J[f] = \int_a^b L(x, f, f')dx$, де a, b – фіксовані. Очевидно з минулого аналізу, що для усіх точок $x \in [a, b] \setminus \{\tau\}$ має виконуватись рівняння Ейлера

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \quad (78)$$

Запишемо наш функціонал як суму

$$J[\eta] = \int_a^b L(x, f, f')dx = \int_a^\tau L(x, f, f')dx + \int_\tau^b L(x, f, f')dx, \quad (79)$$

де лівий доданок назвемо $J^-[\eta]$, а правий $J^+[\eta]$. Знайдемо перші варіації цих функціоналів. Нехай $y = f(x)$ є розв'язком задачі. Тоді з формули загальної варіації маємо:

$$\delta J^- = \frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x \rightarrow \tau^-} \delta y_1 + \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \Big|_{x \rightarrow \tau^-} \delta x_1 \quad (80)$$

$$\delta J^+ = -\frac{\partial L}{\partial f'} \Big|_{x \rightarrow \tau^+} \delta y_1 - \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \Big|_{x \rightarrow \tau^+} \delta x_1 \quad (81)$$

Умова неперервності $f(x)$ означає, що в точці τ у виразах δJ^- та δJ^+ однакові $\delta x_1, \delta y_1$. Отже для екстремума:

$$\delta J = \delta J^- + \delta J^+ = 0, \quad (82)$$

звідки в силу довільності $\delta x_1, \delta y_1$ маємо умови Вейєрштраса-Ердмана.

Definition 11.1. Умовами Вейєрштраса-Ердмана називають наступні умови:

$$\lim_{x \rightarrow \tau^-} \frac{\partial L}{\partial f'} = \lim_{x \rightarrow \tau^+} \frac{\partial L}{\partial f'} \quad (83)$$

$$\lim_{x \rightarrow \tau^-} \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) = \lim_{x \rightarrow \tau^+} \left(L - f' \frac{\partial L}{\partial f'} \right) \quad (84)$$

Зауваження. Якщо приймати $f \in \mathcal{C}^1([a, b] \setminus \cup_{i=1}^n \{\tau_i\})$, то тоді виконується рівняння Ейлера на усіх проміжках гладкості, а також виконуються умови Вейєрштраса-Ердмана для усіх $x \rightarrow \tau_i$.

12 Фіксована задача Больца.

Умова. Задача Больца. Необхідна умова екстремуму в задачі Больца.

Відповідь. Розглянемо задачу Больца:

$$\begin{cases} J[f] = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx + \psi(f(a), f(b)) \rightarrow \text{extr} \\ f \in \mathcal{KC}^1[a, b] \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (85)$$

Нехай на \tilde{f} досягається локальний екстремум, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : J[\tilde{f}] < J[f] \quad \forall f \in \mathcal{U}_\varepsilon^- \quad (86)$$

Розглянемо наступну задачу на екстремум:

$$J^*[f] = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx \rightarrow \text{extr} \text{ при } f(a) = \tilde{f}(a), f(b) = \tilde{f}(b) \quad (87)$$

Тоді допустимі криві в цій задачі мають такі самі кінці, як і \tilde{f} . Покажемо, що дійсно \tilde{f} є екстремаллю задачі на екстремум J^* .

Нехай від супротивного для локального мінімуму. Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлась така допустима крива \hat{f} , що $J^*[\hat{f}] < J^*[\tilde{f}]$. Оскільки вона допустима, то також

$$\hat{f}(a) = \tilde{f}(a), \hat{f}(b) = \tilde{f}(b) \quad (88)$$

В такому разі:

$$J^*[\hat{f}] + \psi(\hat{f}(a), \hat{f}(b)) < J^*[\tilde{f}] + \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \quad (89)$$

Проте, $\psi(\hat{f}(a), \hat{f}(b)) = \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))$. Отже $J[\hat{f}] < J[\tilde{f}]$ – протиріччя.

Звідки робимо висновок, що \tilde{f} задовольняє рівнянню Ейлера:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0 \quad (90)$$

всюду, окрім точок заламу, де виконується умови Вейєрштраса-Ердмана.

Тепер отримаємо умови трансверсальності. Розглянемо $f = \tilde{f} + \varepsilon \eta$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, що для всіх $f \in \mathcal{U}_\varepsilon^-(\tilde{f})$ виконується $J[\tilde{f}] \leq J[f]$. Це також можна записати як те, що при малому $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ маємо

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \varepsilon \wedge \|f'(x) - \tilde{f}'(x)\| < \varepsilon \quad (91)$$

Покладемо

$$\Psi(\varepsilon) = J[f] = J[\tilde{f} + \varepsilon \eta], \quad \Psi(0) = J[\tilde{f}] \quad (92)$$

Маємо $\Psi(0) \leq \Psi(\varepsilon)$ при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, а отже у $\Psi(\varepsilon)$ в $\varepsilon = 0$ локальний мінімум. Тоді, якщо похідна існує, то вона нульова і нулі: $\Psi'(0) = 0$. Отже,

$$\Psi(\varepsilon) = \int_a^b L(x, \tilde{f} + \varepsilon \eta, \tilde{f}' + \varepsilon \eta')dx + \psi(\tilde{f}(a) + \varepsilon \eta(a), \tilde{f}(b) + \varepsilon \eta(b)) \quad (93)$$

Тоді

$$\Psi'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, \tilde{f}, \tilde{f}')\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}')\eta'(x) \right] dx + \quad (94)$$

$$\frac{\partial \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))}{\partial f_0}\eta(a) + \frac{\partial \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))}{\partial f_1}\eta(b) = 0, \quad (95)$$

де $f_0 = \eta(a)$, $f_1 = \eta(b)$. Далі інтегруємо за частинами:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \right] \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (96)$$

$$+ \frac{\partial \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))}{\partial f_0}\eta(a) + \frac{\partial \psi(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b))}{\partial f_1}\eta(b) = 0, \quad (97)$$

звідки (скорочено):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{\partial \psi}{\partial f_1} \right) \eta(b) - \left(\frac{\partial L}{\partial f'} + \frac{\partial \psi}{\partial f_0} \right) \eta(a) = 0 \quad (98)$$

Вирази у дужках позначимо як K_b та K_a відповідно, тоді $K_b\eta(b) - K_a\eta(a) = 0$.
Покладемо:

$$\eta(x) := \frac{x-a}{b-a}K_b \implies \eta(a) = 0, \eta(b) = K_b \quad (99)$$

Тоді отримаємо $K_b = 0$. Аналогічно можна показати, що $K_a = 0$. Отже, маємо умови трансверсальності:

$$\frac{\partial L}{\partial f'}(b, \tilde{f}(b), \tilde{f}'(b)) = -\frac{\partial \psi}{\partial f_1}(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \quad (100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f'}(a, \tilde{f}(a), \tilde{f}'(a)) = -\frac{\partial \psi}{\partial f_0}(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \quad (101)$$

13 Нефіксована задача Больца.

Умова. Задача Больца з нефіксованими кінцями.

Відповідь. Розглянемо задачу Больца на відрізку нефіксованої довжини:

$$J[f] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, f(x), f'(x)) dx + \psi(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)) \rightarrow \text{extr} \quad (102)$$

Введемо означення:

Definition 13.1. Будемо казати, що елемент $\tilde{\xi} = (\tilde{f}(x), \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ досягає слабкий локальний мінімум(максимум) функціоналу в заданій задачі, якщо $\exists \varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого іншого допустимого $\xi = (f(x), x_0, x_1) \in \mathcal{C}^1(\Delta) \times \mathbb{R}^2$, задовольняючі умовам

$$|x_0 - \tilde{x}_0| < \varepsilon \wedge |x_1 - \tilde{x}_1| < \varepsilon \wedge \|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in \Delta \quad (103)$$

виконується нерівність

$$J[\tilde{f}(x), \tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \leq J[f(x), x_0, x_1] \quad (\text{або } \geq \text{ для максимуму}) \quad (104)$$

Отже, розглядаємо першу варіацію функціоналу. Вводимо функцію:

$$\Psi(\varepsilon) = J[\tilde{f} + \varepsilon\eta, \tilde{x}_0 + \varepsilon\hat{x}_0, \tilde{x}_1 + \varepsilon\hat{x}_1], \quad (105)$$

де $\eta(x), \hat{x}_0, \hat{x}_1$ – варіації функції і точок, відповідно. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) = & \int_{\tilde{x}_0 + \varepsilon\hat{x}_0}^{\tilde{x}_1 + \varepsilon\hat{x}_1} L(x, \tilde{f}(x) + \varepsilon\eta(x), \tilde{f}'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx \\ & + \psi(\tilde{x}_0 + \varepsilon\hat{x}_0, \tilde{f}(\tilde{x}_0 + \varepsilon\hat{x}_0) + \varepsilon\eta(\tilde{x}_0 + \varepsilon\hat{x}_0), \tilde{x}_1 + \varepsilon\hat{x}_1, \tilde{f}(\tilde{x}_1 + \varepsilon\hat{x}_1) + \varepsilon\eta(\tilde{x}_1 + \varepsilon\hat{x}_1)) \end{aligned} \quad (106)$$

Оскільки варіація $\delta J = \Psi'(0)$, то отримуємо:

$$\begin{aligned} \Psi'(0) = & \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \eta'(x) \right] dx \\ & + \tilde{L}(\tilde{x}_1) \hat{x}_1 - \tilde{L}(\tilde{x}_0) \hat{x}_0 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_0} \hat{x}_0 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} \hat{x}_1 \\ & + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial f_0} (\eta(\tilde{x}_0) + \tilde{f}(\tilde{x}_0) \hat{x}_0) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial f_1} (\eta(\tilde{x}_1) + \tilde{f}(\tilde{x}_1) \hat{x}_1) \end{aligned} \quad (107)$$

Якщо елемент $\tilde{\xi} = (\tilde{f}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ з варіацією $\delta\xi = (\eta(x), \hat{x}_0, \hat{x}_1)$ дає екстремум, то

$$\delta J[\xi, \delta\xi] = 0 \quad \forall \delta\xi - \text{допустимо маленьких} \quad (108)$$

Отже, спочатку розглянемо $\delta\xi := (\eta(x_1), 0, 0)$, де $\eta \in \mathcal{C}^1(\Delta)$ і $\eta(\tilde{x}_0) = \eta(\tilde{x}_1) = 0$, Тоді

$$\int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}_1} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f}(x) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \eta'(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta(x) \in \mathcal{C}^1[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] : \eta(\tilde{x}_0) = \eta(\tilde{x}_1) = 0 \quad (109)$$

Звідси, за лемою Дюбуа-Реймона випливає рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} = 0 \quad (110)$$

Далі проінтегрувавши наш вираз для варіації за частинами, маємо

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial f_0} - \frac{\partial \tilde{L}(\tilde{x}_0)}{\partial f'} \right] \eta(\tilde{x}_0) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial f_1} + \frac{\partial \tilde{L}(\tilde{x}_1)}{\partial f'} \right] \eta(\tilde{x}_1) \quad (111)$$

$$+ \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_0} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial f_0} \tilde{f}'(\tilde{x}_0) - \tilde{L}(\tilde{x}_0) \right] \hat{x}_0 + \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial f_1} \tilde{f}'(\tilde{x}_1) + \tilde{L}(\tilde{x}_1) \right] \hat{x}_1 = 0 \quad (112)$$

Оскільки $\eta(\tilde{x}_0), \eta(\tilde{x}_1), \hat{x}_0, \hat{x}_1$ довільні, то отримуємо умови трансверсальності по x та по y :

$$\tilde{L}(\tilde{x}_i) - \frac{\partial \psi}{\partial f_i} \tilde{f}'(\tilde{x}_i) = (-1)^i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad i \in \{0, 1\} \quad (113)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'}(\tilde{x}_i) = (-1)^i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial f_i}, \quad i \in \{0, 1\} \quad (114)$$

14 Ізопараметрична задача.

Умова. Ізопараметрична задача, метод множників Лагранжа.

Відповідь. Нехай маємо задачу

$$\begin{cases} J_0(f) = \int_a^b L_0(x, f, f') dx \rightarrow \text{extr} \\ J_k(f) = \int_a^b L_k(x, f, f') dx = \ell_k, \quad k \in \{1, \dots, m\} \\ f(a) = A, \quad f(b) = B \end{cases}, \quad (115)$$

де $L_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, k \in \{0, \dots, m\}$ – задані функції, а $\ell_k, a, b, A, B \in \mathbb{R}$ – задані числа. Сформулюємо основний принцип розв’язку ізопараметричної задачі.

Theorem 14.1. Метод множників Лагранжа. Нехай $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ – відкрита множина, $F_k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервні разом функції. Тоді, якщо \tilde{f} досягає слабого локального мінімуму в заданій ізопараметричній задачі, то знайдуться множники $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \neq \mathbf{0}$ такі, що для $\mathcal{L} := \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{L} \rangle$ виконується рівняння Ейлера

$$-\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}(x, \tilde{f}, \tilde{f}') = 0. \quad (116)$$

Якщо виконана умова регулярності: якщо

$$-\frac{d}{dx} \frac{\partial L_i}{\partial f'} + \frac{\partial L_i}{\partial f}, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad (117)$$

лінійно незалежні, то $\lambda_0 \neq 0$.

Доведення. Згадаємо, що

$$\delta J[\tilde{f}, \eta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [J[\tilde{f} + \varepsilon \eta] - J[\tilde{f}]] \right) \quad (118)$$

Ця варіація була вже знайдена раніше, тому

$$\delta J_i[\tilde{f}, \eta] = \int_a^b \left[\frac{\partial L_i}{\partial f} \eta(x) + \frac{\partial L_i}{\partial f'} \eta'(x) \right] dx, \quad i \in \{0, \dots, m\} \quad (119)$$

Розглянемо наступне перетворення

$$\mathcal{A} : \{f \in \mathcal{C}^1[a, b] : f(a) = f(b) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \quad (120)$$

що має наступний вигляд:

$$\mathcal{A}\eta = (\delta J_0(\tilde{f}, \eta), \dots, \delta J_m(\tilde{f}, \eta)) \quad (121)$$

Маємо два випадки: або $\text{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^{m+1}$ (регулярний випадок), або $\text{Im}(\mathcal{A}) = D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ (вироджений випадок).

Доведення для виродженого випадку. Оскільки варіації є лінійним функціоналом, то наш оператор є лінійним.

Образ лінійного підпростору при лінійному відображенні – це підпростір. Отже, у виродженому випадку $\text{Im}(\mathcal{A})$ є власним підпростором в \mathbb{R}^{m+1} . В скінченному підпросторі справедлива наступна лема.

Lemma 14.2. Якщо V є власний підпростір в \mathbb{R}^n , то існують числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ такі, що не рівні 0 одночасно, а також

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V \quad (122)$$

Застосувавши лему, маємо такий набір $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, що

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i z_i = 0 \quad \forall \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_m) \in \text{Im}(\mathcal{A}) \quad (123)$$

Отже, з визначення оператора \mathcal{A} і варіації, отримуємо

$$\int_a^b \sum_{i=0}^m \lambda_i \left(\frac{\partial L_i}{\partial f} \eta + \frac{\partial L_i}{\partial f'} \eta' \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}^1[a, b] \quad (124)$$

За лемою Дюбуа-Реймона маємо, що

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i L \in \mathcal{C}^1[a, b] \quad (125)$$

$$-\frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial L}{\partial f'} \right) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad (126)$$

Отже регулярний випадок доведено. Доведемо, що регулярного випадку бути не може. Оберемо $\eta_j \in \mathcal{C}_0^1[a, b]$ таким чином, щоб $\mathcal{A}\eta_j = \mathbf{e}_j$. Маємо відображення Φ з околу нуля \mathbb{R}^{m+1} в \mathbb{R}^{m+1} :

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) = (\varphi_0(\boldsymbol{\beta}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{\beta})) \quad (127)$$

$$\varphi_i(\beta_0, \dots, \beta_m) = J_i \left(\tilde{f}(x) + \sum_{j=0}^m \beta_j \eta_j(x) \right) \quad (128)$$

Функції φ_i неперервно-диференційовані і окрім того:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} = \delta_{ij}, \quad (129)$$

а також $\Phi(0) = (\ell_0, \dots, \ell_m) = \hat{\mathbf{z}}$, $\ell_0 := J_0$. За теоремою про обернену функцію, існує гладке обернене відображення Φ^{-1} і константа $\kappa > 0$ такі, що

$$\|\Phi^{-1}(\mathbf{z})\| \leq \kappa \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\| \quad (130)$$

для малих $\|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|$.

Доведення не закінчено, але його можна дописати.

15 Векторна задача

Умова. Векторна найпростіша задача варіаційного числення.

Відповідь.

Векторна задача варіаційного числення. Нехай маємо задачу виду

$$J[f_1, \dots, f_n] = \int_a^b L(x, f_1(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), \dots, f'_n(x)) dx \rightarrow \text{extr} \quad (131)$$

Введемо позначення $\mathbf{f}' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$. Тоді, коротко її сформулюємо як

$$J[\mathbf{f}] = \int_a^b L(x, \mathbf{f}, \mathbf{f}') dx \rightarrow \text{extr} \quad (132)$$

$$f_i(a) = A, f_i(b) = B, i \in \{1, \dots, n\} \quad (133)$$

Як і раніше, знайдемо лінійну по $\eta_i, \eta'_i, i \in \{1, \dots, n\}$ частину приросту $\Delta J[\boldsymbol{\eta}] = J[\tilde{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\eta}] - J[\tilde{\mathbf{f}}]$. Також аналогічно попереднім задачам $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$. Таким чином, приріст:

$$\Delta J[\boldsymbol{\eta}] = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial f_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial f'_i} \eta'_i \right] dx + \bar{o}(\|\boldsymbol{\eta}\|, \|\boldsymbol{\eta}'\|) \quad (134)$$

Отже, перша варіація має вигляд:

$$\delta J = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial f_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial f'_i} \eta'_i \right] dx \quad (135)$$

Запишемо її векторно. Нехай $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}} = (\frac{\partial L}{\partial f_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial f_n})$, а також $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}'} = (\frac{\partial L}{\partial f'_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial f'_n})$, тоді

$$\delta J = \int_a^b \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}'}, \boldsymbol{\eta}' \right\rangle \right] dx \quad (136)$$

Якщо $\tilde{\mathbf{f}}$ є екстремумом, то η_1, \dots, η_n не залежить один від одного. Отже, можемо покласти будь-яке значення. Покладемо $\boldsymbol{\eta} := \eta_i \odot \mathbf{e}_i$. Тоді будемо мати (якщо це повторити для кожного i):

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial f'_i} \eta'_i \right] dx = 0, i \in \{1, \dots, n\} \quad (137)$$

Звідси отримуємо рівняння Ейлера у векторній формі:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}'} = 0 \quad (138)$$

16 Старші похідні

Умова. Задача варіаційного числення зі старшими похідними. Рівняння Ейлера-Пуассона.

Відповідь.

Задача 1. Нехай умова виглядає як

$$J[f] = \int_a^b L(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) dx \rightarrow \text{extr} \quad (139)$$

з умовами

$$f(a) = a_0, f'(a) = a_1, \dots, f^{(n-1)}(a) = a_{n-1} \quad (140)$$

$$f(b) = b_0, f'(b) = b_1, \dots, f^{(n-1)}(b) = b_{n-1} \quad (141)$$

Введемо означення.

Definition 16.1. ε -околом порядку k ($0 \leq k < n$) $\mathcal{U}_\varepsilon^{(k)}$ кривої $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(a, b)$ будемо називати множину кривих $f(x) \in \mathcal{C}^n(a, b)$ таких, що

$$\max_{0 \leq i \leq k} \{ \max_{x \in [a, b]} |\tilde{f}^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)| \} < \varepsilon \quad (142)$$

Зауваження 1. $\mathcal{U}_\varepsilon^{(0)}$ називається сильним околом.

Зауваження 2. $\mathcal{U}_\varepsilon^{(n)}$ називається сильним околом.

Розглянемо мале збурення $\eta(x)$ з наступними умовами:

$$\eta^{(i)}(a) = \eta^{(i)}(b) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (143)$$

Тоді розглянемо $f(x) = \tilde{f}(x) + \eta(x)$ – воно задовольняє крайовим умовам. Далі, введемо ще одне означення.

Definition 16.2. Першою варіацією нашої задачі назвемо лінійну відносно $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ частину розкладу прирісту $\Delta J[\eta] := J[\tilde{f} + \eta] - J[\tilde{f}]$.

Отже, розглянемо цей приріст:

$$J[\tilde{f} + \eta] - J[\tilde{f}] = \int_a^b \left[L(x, \tilde{f} + \eta, \dots, \tilde{f}^{(n)} + \eta^{(n)}) - L(x, \tilde{f}, \dots, \tilde{f}^{(n)}) \right] dx \quad (144)$$

Розкладаємо у ряд Тейлора:

$$\Delta J[\eta] = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f^{(i)}} \eta^{(i)} \right] dx + \bar{o}(\|\eta\|, \dots, \|\eta^{(k)}\|) \quad (145)$$

Далі потрібно проінтегрувати за частинами. Заносимо $\eta', \dots, \eta^{(n)}$ під диференціал:

$$\begin{aligned} \delta J[\eta] = \int_a^b & \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \eta - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f''} \eta' - \dots - \frac{d}{dx} \eta^{(n-1)} \right) dx \\ & + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta \Big|_{x=a}^{x=b} + \frac{\partial L}{\partial f''} \eta' \Big|_{x=a}^{x=b} + \dots + \frac{\partial L}{\partial f^{(n)}} \eta^{(n-1)} \Big|_{x=a}^{x=b} \end{aligned} \quad (146)$$

Умови зануляються, оскільки ми обмежили η . Далі робимо це ще раз:

$$\begin{aligned} \delta J[\eta] = & \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} \eta - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \eta + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial f''} \eta' + \dots + \frac{d^2}{dx^2} \eta^{(n-2)} \right) dx \\ & - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} \eta \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f''} \eta' \Big|_{x=a}^{x=b} - \dots - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f^{(n)}} \eta^{(n-2)} \Big|_{x=a}^{x=b} \end{aligned} \quad (147)$$

Знову умови зануляються. Нескладно побачити, що таким чином:

$$\Delta J[\eta] = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial L}{\partial f^{(k)}} \right] \eta(x) dx + \bar{o}(\|\eta\|, \dots, \|\eta^{(n)}\|) \quad (148)$$

Отже, за теоремою Лагранжа, отримуємо так зване рівняння Ейлера-Пуассона.

Theorem 16.3. Рівняння Ейлера-Пуассона. Нехай $L \in \mathcal{C}^{n+1}$ і нехай на \tilde{f} досягається екстремум. Тоді, справедливо:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial f^{(k)}}(x, f, \dots, f^{(n)}) = 0 \quad (149)$$

17 Умови другого порядку

Умова. Необхідні умови екстремуму другого порядку. Друга варіація функціоналу, її обчислення та застосування

17.1 Загальні відомості

Відповідь. Нехай $J[f]$ – функціонал, визначений на нормованому лінійному просторі V .

Definition 17.1. Функціонал $J[f]$ називають **двічі диференційованим**, якщо приріст має вигляд

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] = L_1[\eta] + L_2[\eta] + \bar{o}(\|\eta\|^2), \quad (150)$$

де L_1 – лінійний функціонал, L_2 – квадратичний функціонал.

Definition 17.2. Функціонал $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ називають **білінійним**, якщо $B[f, g]$ є лінійним за f за будь-яким фіксованим g і навпаки. Інакше кажучи,

1. $B[f + g, h] = B[f, h] + B[g, h]$.
2. $B[\alpha f, g] = \alpha B[f, g]$.
3. $B[f, g + h] = B[f, g] + B[f, h]$.
4. $B[f, \alpha g] = \alpha B[f, g]$.

Definition 17.3. Функціонал виду $B[f, f]$ називають **квадратичним**.

Example. $B[x, y] = \int_a^b x(t)y(t)dt$ є білінійним. Функціонал $B[x, x] = \int_a^b x^2(t)dt$ є квадратичним.

Definition 17.4. Квадратичний функціонал $L_2[\eta]$ називають другою варіацією функціоналу $J[f]$. Будемо його позначати як $\delta^2 J[f]$ або $\delta^2 J[f, \eta]$.

Theorem 17.5. Нехай функціонал $J[f]$ має мінімум за $f = \tilde{f}$. Тоді $\delta^2 J[\tilde{f}] \geq 0$.

Доведення. Розглядаємо приріст функціоналу:

$$\Delta J[\tilde{f}, \eta] = \delta J[\tilde{f}, \eta] + \delta^2 J[\tilde{f}, \eta] + \bar{o}(\|\eta\|^2) \quad (151)$$

Ми вже доводили, що в точці екстремума перша варіація нульова, а тому

$$\Delta J[\tilde{f}, \eta] = \delta^2 J[\tilde{f}, \eta] + \bar{o}(\|\eta\|^2) \quad (152)$$

Нехай $\delta^2 J[\tilde{f}, \eta_0] < 0$ при деякому допустимому η_0 . Тоді:

$$\forall \alpha \neq 0 : \delta^2 J[\tilde{f}, \alpha \eta_0] = \alpha^2 \delta^2 J[\tilde{f}, \eta_0] < 0, \quad (153)$$

а також:

$$\Delta J[\tilde{f}, \alpha \eta_0] = \alpha^2 \delta^2 J[\tilde{f}, \eta_0] + \alpha^2 \bar{o}(\|\eta_0\|^2) = \alpha^2 \left[\delta^2 J[\tilde{f}, \eta_0] + \bar{o}(\|\eta_0\|^2) \right] \quad (154)$$

Тоді $\Delta J[\star, \alpha\eta_0] < 0$ при досить малому α , що суперечить умові мінімуму. Проти-річчя.

Theorem 17.6. Нехай $\delta J[\tilde{f}, \eta] = 0$ і друга варіація $\delta^2 J[\tilde{f}, \eta]$ сильно додатно ви-значена. Тоді за $f = \tilde{f}$ досягається мінімум функціоналу $J[\eta]$.

Розглядаємо приріст:

$$\Delta J[\eta] = \delta^2 J[\tilde{f}, \eta] + \bar{o}(\|\eta\|^2), \quad (155)$$

де $\delta^2 J[\tilde{f}, \eta] \geq \kappa \|\eta\|^2$, $\kappa > 0$. Оскільки $\frac{\bar{o}(\|\eta\|^2)}{\|\eta\|^2} \xrightarrow{\|\eta\| \rightarrow 0} 0$, то при достатньо малому ε_1 :

$$|\bar{o}(\|\eta\|^2)| \leq \frac{1}{2} \kappa \|\eta\|^2 \text{ при } \|\eta\| < \varepsilon_1 \quad (156)$$

Тоді

$$\Delta J[\eta] = \delta^2 J[\tilde{f}, \eta] + \bar{o}(\|\eta\|^2) \geq \frac{\kappa}{2} \|\eta\|^2 > 0 \text{ для } \|\eta\| < \varepsilon_1, \quad (157)$$

тобто маємо мінімум за $f = \tilde{f}$.

17.2 Формула для інтегралу

Нехай маємо задачу з фіксованими кінцями на $[a, b]$, де треба мінімізувати або максимізувати функціонал

$$J[f] = \int_a^b L(x, f, f') dx \quad (158)$$

Розглянемо приріст за $\eta(a) = \eta(b) = 0$ і розкладемо у ряд Тейлора:

$$\Delta J[\eta] = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta' \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} (\eta')^2 \right] dx + \dots \quad (159)$$

Звідси природньо впливає означення.

Definition 17.7. Другою варіацією називаємо вираз

$$\delta^2 J[f, \eta] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} (\eta')^2 \right] dx \quad (160)$$

Theorem 17.8. Нехай $L \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Тоді для будь-яких $f, \eta \in \mathcal{KC}^1[a, b]$ перша і другі варіації існують і розраховуються за формулами:

$$\delta J[f, \eta] = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} \eta + \frac{\partial L}{\partial f'} \eta' \right] dx \quad (161)$$

$$\delta^2 J[f, \eta] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} \eta \eta' + \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} (\eta')^2 \right] dx \quad (162)$$

Запишемо другу варіацію у дещо іншому вигляді. Проінтегруємо $\frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} \eta \eta' dx$ за частинами. Тоді,

$$\delta^2 J[f, \eta] = \int_a^b [P(x) \eta'(x)^2 + Q(x) \eta(x)^2] dx, \quad (163)$$

де було позначено:

$$P(x) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2}, \quad Q(x) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial f^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'} \right) \quad (164)$$

Theorem 17.9. Нехай функціонал $\delta^2 J[f, \eta] = \int_a^b (P(\eta')^2 + Q\eta^2) dx$ визначений на функціях $\eta \in C^1[a, b]$ таких, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$, і при цьому є невід'ємним, тобто $\delta^2 J[f, \eta] \geq 0$. Тоді $P(x) \geq 0$.

Доведення. Від супротивного. Нехай існує $x_0 \in [a, b]$ така, що $P(x_0) = -2\beta < 0$ за $\beta > 0$. Тоді неперервність $P(x)$ означає, що $\exists \alpha > 0 : P(x_0) < -\beta$ за $a \leq x_0 - \alpha < x \leq x_0 + \alpha \leq b$. Оберемо

$$\eta(x) := \sin^2 \frac{\pi(x - x_0)}{\alpha} \cdot \mathbb{1}_{[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]}(x) \quad (165)$$

Тоді:

$$\delta^2 J[f, \eta] = \int_{x_0 - \alpha}^{x_0 + \alpha} P(x) \frac{\pi}{\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi(x - x_0)}{\alpha} dx + \int_{x_0 - \alpha}^{x_0 + \alpha} Q(x) \sin^2 \frac{\pi(x - x_0)}{\alpha} dx \quad (166)$$

Проте, тоді справедливо

$$\delta^2 J[f, \eta] \leq -\frac{\pi^2 \beta^2}{\alpha} + 2\mu\alpha, \quad \mu = \max_{a \leq x \leq b} |Q(x)| \quad (167)$$

При достатньо малих α маємо $\delta^2 J[f, \eta] < 0$ – протиріччя. Отже, $P(x) \geq 0$.

18 Умови Лежандра та Якобі

Умова. Необхідні умови Лежандра та Якобі.

Відповідь.

Theorem 18.1. Необхідна умова Лежандра слабкого мінімуму. Нехай функціонал $J[f] = \int_a^b L(x, f, f')dx$ з фіксованими кінцями має мінімум на кривій \tilde{f} . Тоді для будь-якої точки на криві виконано

$$\frac{\partial L}{\partial (f')^2} \geq 0 \quad (168)$$

Для формулювання умови Якобі, сформулюємо спряжену задачу варіаційного числення.

Definition 18.2. Вторичною (або спряженою) задачею до початкової назвемо задачу виду

$$\int_a^b (P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta^2(x))dx \rightarrow \inf \quad (169)$$

за умови $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Далі, як і з будь-якою задачею варіаційного числення, ми маємо право записати рівняння Ейлера. В такому виді рівняння називається **рівнянням Якобі**.

Definition 18.3. Рівнянням Якобі називають рівняння Ейлера до спряженої задачі варіаційного числення:

$$-\frac{d}{dx}(P(x)\eta') + Q(x)\eta(x) = 0, \quad \eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (170)$$

Окрім тривіального розв'язку $\eta \equiv 0$, є ще один, що задовольняє умовам. Введемо ще одне поняття.

Definition 18.4. Нехай $\eta(x)$ – розв'язок рівняння Якобі, що задовольняє умовам $\eta(a) = 0, \eta'(a) = 1$. Тоді найближчий до точки a праворуч корінь рівняння $\eta(x) = 0$ будемо називати **спряженою** з a точкою і позначатимемо $a^*(a^* > a)$.

Це означення має велике значення, оскільки можемо розглянути ключову теорему.

Theorem 18.5. Якщо $P(x) > 0$ для усіх $x \in [a, b]$ і відрізок $[a, b]$ не містить точок, спряжених з a , то квадратичний функціонал $\int_a^b [P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2]dx$ додатньо визначений для усіх η таких, що $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Доведення. Помітимо, що $\int_a^b (\eta^2 \omega' + 2\eta \eta' \omega) dx = \int_a^b d(\eta^2 \omega) = 0$. Додамо цей інтеграл до початкового, значення не зміниться. Отримаємо:

$$\int_a^b [(Q(x) + \omega'(x))\eta^2 + 2\eta \eta' \omega + P(x)\eta'(x)^2] dx \quad (171)$$

Нехай $P(Q + \omega') = \omega^2$ при деякому ω (ми доведемо існування пізніше), тоді

$$\int_a^b (P\eta'(x)^2 + Q\eta(x)^2)dx = \int_a^b P \left(\frac{\omega\eta}{P} + \eta' \right)^2 dx > 0 \quad (172)$$

за $\frac{\omega\eta}{P} + \eta' \neq 0$. Якщо ж $\frac{\omega\eta}{P} + \eta' \equiv 0$, то $\eta(x)$ – екстремаль функціоналу $\int_a^b (P\eta'(x)^2 + Q\eta(x)^2)dx$ і, значить, задовольняє рівнянню Ейлера. Сама умова дає при $\eta(a) = 0$, що $\eta'(a) = 0$. Тоді в силу теореми про єдиність розв'язку диференціального рівняння, $\eta(x) \equiv 0$. Це означає, що функціонал додатно визначений.

Отже, залишилося довести наступну лему.

Lemma 18.6. Рівняння $P(x)(Q(x) + \omega'(x)) = \omega(x)^2$ має розв'язок відносно $\omega(x)$ на усьому відрізку $[a, b]$ за умови, що немає спряжених точок на $[a, b]$.

Доведення. Покладемо заміну $\omega(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}P(x)$, де $u(x)$ – нова невідома функція. Тоді:

$$Q(x)u(x) - \frac{d}{dx}(u'(x)P(x)) = 0 \quad (173)$$

є рівнянням Ейлера для функціоналу $\int_a^b (P(x)u'(x)^2 + Q(x)u(x)^2)dx$. Оскільки спряжених точок немає, тоді $u \neq 0$ – розв'язок рівняння Ейлера. Тоді на всьому відрізку існує розв'язок $\omega = -\frac{u'(x)}{u(x)}P(x)$.

Theorem 18.7. Нехай $P(x) > 0$ для усіх $x \in [a, b]$. Якщо квадратичний функціонал

$$\int_a^b [P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2]dx \quad (174)$$

додатно визначений для усіх $\eta(x) : \eta(a) = \eta(b) = 0$, то відрізок $[a, b]$ не має спряжених точок з a .

Тоді, справедлива наступна теорема

Theorem 18.8. Функціонал $\int_a^b (P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2)dx$ додатно визначений за $P(x) > 0, x \in [a, b]$ та $\eta(a) = \eta(b) = 0$ тоді і тільки тоді, коли відрізок $[a, b]$ не містить точок, спряжених з a .

Отже, нарешті, формулюємо необхідну умову Якобі.

Theorem 18.9. Необхідна умова Якобі. Щоб екстремаль $f(x)$ давала мінімум $\int_a^b L(x, f, f')dx$ необхідно, щоб інтервал (a, b) не містив точок, спряжених з a .

19 Умова Вейєрштраса

Умова. Необхідна умова Вейєрштраса сильного екстремуму

Відповідь. Нехай маємо оптимізувати функціонал $J[f] = \int_a^b L(x, f, f')dx$ з умовою на фіксовані кінці $[a, b]$. Нехай після розв'язку рівняння Ейлера маємо підозру на \tilde{f} .

Розглянемо спеціальний клас варіацій, котрі розглядаються в задачі на сильний екстремум (так звані “ігольчаті варіації”). Розглядаємо збурення вигляду

$$\eta_\lambda(x) := \begin{cases} \xi\lambda + (x - \tau)\xi, & x \in [\tau - \lambda, \tau] \\ \xi\lambda - (x - \tau)\sqrt{\lambda}\xi, & x \in [\tau, \tau + \sqrt{\lambda}] \\ 0, & x \notin [\tau - \lambda, \tau + \sqrt{\lambda}] \end{cases} \quad (175)$$

Скористаємося методом варіації. Розглянемо

$$\varphi(\lambda) = J[\tilde{f}(x) + \eta_\lambda(x)], \quad \tau \in [a, b], \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (176)$$

Позначимо $f_\lambda(x) := \tilde{f}(x) + \eta_\lambda(x)$. Якщо $f_\lambda \in \mathcal{U}_\varepsilon^+(\tilde{f})$, то $|f_\lambda - \tilde{f}| < \varepsilon$ для усіх $x \in [a, b]$. Це еквівалентно $|\eta_\lambda(x)| \leq |\xi\lambda| = \lambda|\xi| < \varepsilon$ за $0 \leq \lambda < \lambda_1 := \frac{\varepsilon}{|\xi|}$.

Також легко бачити, що f_λ є допустимою функцією при достатньо малих $0 \leq \lambda < \lambda_0$.

Нехай далі $0 \leq \lambda < \lambda_2 := \max\{\lambda_0, \lambda_1\}$. Функція $\varphi(\lambda)$ визначена для додатних λ . Покажемо, що вона дійсно є диференційованою праворуч. Помітимо, що:

1. $\|\eta_\lambda(x)\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |\eta_\lambda(x)| = \bar{o}(\lambda)$ оскільки $|\eta_\lambda(x)| \leq |\lambda||\xi| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$.
2. $|\eta'_\lambda(x)| = \frac{\xi\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \xi\sqrt{\lambda} = \bar{o}(\sqrt{\lambda}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ за $x \in (\tau, \tau + \sqrt{\lambda})$.

Таким чином:

$$\varphi(\lambda) - \lambda(0) = J[\tilde{f} + \eta_\lambda] - J[\tilde{f}] = \int_a^b L(x, \tilde{f} + \eta_\lambda(x), \tilde{f} + \eta'_\lambda)dx - \int_a^b L(x, \tilde{f}, \tilde{f}')dx \quad (177)$$

Далі розкладаємо на інтервали:

$$\varphi(\lambda) - \lambda(0) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau} [L(x, f_\lambda, f'_\lambda) - L(x, \tilde{f}, \tilde{f}')]dx + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} [L(x, f_\lambda, f'_\lambda) - L(x, \tilde{f}, \tilde{f}')]dx \quad (178)$$

Позначимо лівий та правий інтеграл як \mathcal{I}_- та \mathcal{I}_+ відповідно. Скористаємось теоремою про середнє та умовою 1¹:

$$\mathcal{I}_- = \lambda[L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau) + \xi) - L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau))] + \bar{o}(\lambda) \quad (179)$$

Розглянемо правий інтеграл. За формулою Тейлора і твердженням 2:

$$\mathcal{I}_+ = \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} \eta_\lambda + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \eta'_\lambda \right] dx + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \bar{o}(\sqrt{\lambda})dx \quad (180)$$

¹це твердження потребує більш акуратного доведення

Далі інтегруємо за частинами:

$$\mathcal{I}_+ = \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \right] \eta_{\lambda}(x) dx + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \eta_{\lambda}(x) \Big|_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} + \bar{o}(\lambda) \quad (181)$$

Або, після спрощення:

$$\mathcal{I}_+ = \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} \right] \eta_{\lambda}(x) dx - \xi \lambda \frac{\partial L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau))}{\partial f'} + \bar{o}(\lambda) \quad (182)$$

Оскільки виконується рівняння Ейлера

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial f'} = 0, \quad \eta_{\lambda}(\tau) = \xi \lambda, \quad \eta_{\lambda}(\tau + \sqrt{\lambda}) = 0, \quad (183)$$

то інтеграл зануляється. Таким чином, права похідна $\varphi(\lambda)$ в нулі:

$$\varphi'(0^+) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{I}_1(\lambda) + \mathcal{I}_2(\lambda)}{\lambda} \quad (184)$$

Розписавши, матимемо:

$$\varphi'(0^+) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau) + \xi) - L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau)) - \xi \frac{\partial L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau))}{\partial f'} + \frac{\bar{o}(\lambda)}{\lambda} \right] \quad (185)$$

Помітимо, що якщо \tilde{f} досягає сильного локального максимуму, то $J[f_{\lambda}] \geq J[\tilde{f}]$, звідки $\varphi'(0^+) \geq 0$. Звідки, ми отримуємо умову Веєрштраса.

Definition 19.1. Умовою Веєрштраса називають умову

$$L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau) + \xi) - L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau)) - \xi \frac{\partial L(\tau, \tilde{f}(\tau), \tilde{f}'(\tau))}{\partial f'} \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (186)$$

Definition 19.2. Функцією Веєрштраса називають вираз

$$E(x, f, P, Q) = L(x, f, Q) - L(x, f, P) - (Q - P) \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f, P) \quad (187)$$

Отже, ключова теорема наступна.

Theorem 19.3. Нехай $L, \frac{\partial L}{\partial f}, \frac{\partial L}{\partial f'}$ – неперервні за сукупністю аргументів та на \tilde{f} досягається сильний локальний мінімум. Тоді:

$$E(x, \tilde{f}, \tilde{f}', \tilde{f}'(x) + \xi) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (188)$$

20 Достатня умова

Умова. Достатня умова слабкого екстремуму. Достатня умова слабкого екстремуму для векторної задачі

Відповідь. Розглянемо наступну теорему.

20.1 Достатня умова

Theorem 20.1. Достатня умова слабкого екстремуму. Якщо допустима крива $y = f(x)$ для функціоналу

$$\int_a^b L(x, f, f') dx \quad f(a) = A, \quad f(b) = B \quad (189)$$

задовольняє наступним умовам:

1. $f = f(x)$ є екстремаллю, тобто задовольняє рівняння Ейлера $\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0$.
2. Вздовж цієї кривої $P \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial (f')^2} > 0$, тобто виконується посилена умова Лежандра.
3. Відрізок $[a, b]$ не містить точок спряжених з a (посилена умова Якобі), то на цій кривій реалізується слабкий мінімум.

Доведення. Якщо відрізок $[a, b]$ не містить точок, спряжених з точкою a і на ньому $P(x) > 0$, то в силу неперервності розв'язків рівняння Якобі і функції $P(x)$ знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що відрізок $[a, b + \varepsilon]$ також не містить точок спряжених з a і $P(x) > 0$ на $[a, b + \varepsilon]$. Розглянемо квадратичний функціонал:

$$V[\eta] := \int_a^b (P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2) dx - \alpha^2 \int_a^b \eta'(x)^2 dx \quad (190)$$

Відповідне рівняння Ейлера має вигляд:

$$-\frac{d}{dx} ((P(x) - \alpha^2)\eta'(x)) + Q(x)\eta(x) = 0 \quad \eta(a) = 0, \quad \eta'(a) = 1 \quad (191)$$

Оскільки $P(x) > 0$ неперервна при $[a, b + \varepsilon]$ і розв'язок рівняння Ейлера неперервно залежить від параметру α , то при достатньо малих значеннях α маємо:

1. $P(x) - \alpha^2 > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.
2. Розв'язок рівняння Ейлера з умовами $\eta(a) = 0, \eta'(a) = 1$ не обертається в нуль на $[a, b]$.

Отже звідси випливає, що цей квадратичний функціонал додатно визначений при достатньо малому α . Отже, існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\int_a^b (P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2) dx > \gamma \int_a^b \eta'(x)^2 dx \quad (192)$$

звідки легко випливає, що $y = f(x)$ – мінімум. Дійсно, розглянемо приріст фун-

кціоналу для малих $\eta(x)$:

$$\Delta J[\eta] = J[f + \eta] - J[f] = \int_a^b (P(x)\eta'(x)^2 + Q(x)\eta(x)^2)dx + \int_a^b [\bar{o}_1(\eta^2) + \bar{o}_2((\eta')^2)]dx \quad (193)$$

Скористаємося рівнянням Коші-Буняковського:

$$\eta^2(x) = \left(\int_a^x \eta'(x)dx \right)^2 \leq \left[\left(\int_a^x 1^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^x \eta'(x)^2 dx \right)^{1/2} \right]^2 \quad (194)$$

А отже:

$$\eta^2(x) \leq (x - a) \int_a^x \eta'(x)^2 dx \leq (x - a) \int_a^b \eta'(x)^2 dx \quad (195)$$

Звідси випливає

$$\int_a^b \eta^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \eta'(x)^2 dx \quad (196)$$

Отже для $|\bar{o}_1(1)| < \varepsilon$ та $|\bar{o}_2(1)| < \varepsilon$ маємо:

$$\left| \int_a^b (\bar{o}_1(\eta(x)^2) + \bar{o}_2(\eta'(x)^2))dx \right| \leq \varepsilon \left[\frac{(b-a)^2}{2} + 1 \right] \int_a^b \eta'(x)^2 dx \quad (197)$$

Оскільки ε можна зробити як завгодно малим, то:

$$\Delta J[\eta] > \left[\gamma - \varepsilon \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) \right] \int_a^b \eta'(x)^2 dx > 0 \quad (198)$$

20.2 Векторна задача

Нехай $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Знову розглядаємо збурення $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ з умовами на те, що $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$. Отже, застосувавши формулу Тейлора на приріст $\Delta J[\boldsymbol{\eta}]$, отримуємо:

$$\delta^2 J[\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^{i+j} L}{\partial f_i \partial f_j} \eta_i \eta_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^{i+j} L}{\partial f_i \partial (f_j)'} \eta_i \eta_j' + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^{i+j} L}{\partial (f_i)' \partial (f_j)'} \eta_i' \eta_j' \right] dx \quad (199)$$

Або у матричному вигляді:

$$\delta^2 J[\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{f}^2} \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{f} \mathbf{f}'} \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}' \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial (\mathbf{f}')^2} \boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\eta}' \right\rangle \right] dx \quad (200)$$

Або, якщо ввести матриці $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial (\mathbf{f}')^2}$ та $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{f}^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{f} \mathbf{f}'} \right)$, то

$$\delta^2 J[\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}] = \int_a^b [\langle \mathbf{P}(x) \boldsymbol{\eta}'(x), \boldsymbol{\eta}'(x) \rangle + \langle \mathbf{Q}(x) \boldsymbol{\eta}(x), \boldsymbol{\eta}(x) \rangle] dx \quad (201)$$

Отже тепер умова Лежандра має вид $\frac{\partial^2 L}{\partial (\mathbf{f}')^2} > 0$. Система Якобі набуде вигляд:

$$\mathbf{Q}(x) \boldsymbol{\eta}(x) - \frac{d}{dx} (\mathbf{P}(x) \boldsymbol{\eta}'(x)) = 0 \quad (202)$$

А поняття спряженої точки тепер набувають дещо іншого вигляду.

Definition 20.2. Нехай $\boldsymbol{\eta}^1, \dots, \boldsymbol{\eta}^n$ – розв’язки системи Якобі, що задовольняють умовам $\boldsymbol{\eta}^i(a) = \mathbf{0}$, а також $\boldsymbol{\eta}'(a)^i = \mathbf{e}_i$.

Тоді точка \tilde{a} є спряженою до точки a , якщо наступний визначник нульовий:

$$\det\{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^n \Big|_{x=\tilde{a}} = 0 \quad (203)$$

Інші поняття залишаються аналогічними.

21 Інтеграл Гільберта

Умова. Поле екстремалей. Інтеграл Гільберта. Достатня умова сильного екстремуму

Відповідь.

21.1 Поле екстремалей

Спочатку, наведемо буквально трошки теорії поля.

Definition 21.1. Розглянемо сімейство екстремалей $f(x | \theta)$, де θ – параметр. Якщо через кожну точку області $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ проходить одна і тільки одна крива сімейства $f(x | \theta)$, то кажуть, що це сімейство кривих утворюють **власне поле**. Кутовий коефіцієнт $k(x, y)$ дотичної до кривої сімейства $f(x | \theta)$, що проходить через точку (x, y) називають **нахилом поля** в (x, y) .

Definition 21.2. Якщо криві сімейства $f(x | \theta)$ проходять через точку (x_0, y_0) , то вони утворюють **пучок**. Якщо ці криві покривають усю область і ніде не перетинаються окрім центру пучка, то кажуть, що сімейство $f(x | \theta)$ утворює **центральне поле**.

Definition 21.3. Власне або центральне поле, утворене сімейством екстремалей називають **полем екстремалей**.

Definition 21.4. Якщо знайдено сімейство $f = f(x | \theta)$, що утворює поле, що містить при деякому $\theta = \theta_0$ екстремаль $y = f(x)$ і ця екстремаль не лежить на границі області, то кажуть, що екстремаль $f(x)$ включена у поле $f(x | \theta)$.

Definition 21.5. Якщо пучок екстремалей, що проходять через $A(x_0, y_0)$ в околі екстремалі $y = f(x)$, що проходить через ту саму точку, утворює поле, то екстремаль $y = f(x)$ включена в центральне поле екстремалей.

21.2 Інтеграл Гільберта

Ми готові визначити інтеграл Гільберта!

Definition 21.6. Нехай Ω – область, що покривається $f(x | \theta)$ з нахилом $k(x, y)$. Тоді для кривої $\ell \subset \Omega$ **інтегралом Гільберта** називають

$$T_\ell := \int_\ell \left[L(x, y, k(x, y)) - \langle k(x, y), \frac{\partial L}{\partial f'}(x, y, k(x, y)) \rangle \right] dx + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, y, k(x, y)) dy \quad (204)$$

Розглянемо деякі його властивості.

Властивість 1. Нехай $\tilde{\ell} = \{(x, y) : y = f(x) = f(x | \theta^*) : x \in [a, b]\}$ – екстремаль.

Тоді $f'(x) = k(x, f(x))$, звідки

$$T_{\tilde{\ell}} = \int_a^b [L(x, f(x), k(x, f(x))) - \langle k(x, y), L_{f'}(x, f(x), k(x, y)) \rangle] \quad (205)$$

$$+(L_{f'}, f') = \int_a^b L(x, f(x), f'(x)) dx \quad (206)$$

Отже, значення інтегралу Гільберта вздовж куска екстремалі дорівнює значенню початкового функціоналу.

Властивість 2. Якщо Ω – однозв'язна область, то інтеграл Гільберта не залежить від шляху інтегрування в Ω . Доведемо для $n = 1$, тобто потрібно довести, що $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Отже,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[L(x, y, k(x, y)) - k(x, y) \frac{\partial L}{\partial f'}(x, y, k(x, y)) \right] \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L(x, y, k(x, y))}{\partial f'} \quad (207)$$

Можна показати, що це справді так.

Розглянемо ключову теорему.

Theorem 21.7. Достатня умова сильного мінімуму. Нехай $y = \tilde{f}(x), x \in [a, b]$ – допустима екстремаль, котру можна оточити центральним полем і нехай в деякій області Ω , покритою полем і що містить цю екстремаль (окрім, можливо, її кінців) виконана умова:

$$E(x, y, k(x, y), Q) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad \forall Q \in \mathbb{R}, \quad (208)$$

тоді на \tilde{f} досягається сильний локальний мінімум.

22 Керованість лінійних систем

Умова. Керованість лінійних систем без обмежень на керування.

Відповідь. Розглядаємо систему $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, де

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (209)$$

Definition 22.1. Функція $\mathbf{u}(t)$ називається управлінням.

Будемо розглядати кусково-неперервні $u(t) \in \mathcal{KC}[t_0, t_1]$. Такі управління будемо називати допустимими.

Definition 22.2. Якщо $u : [t_0, t_1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$, то Ω називають обмежуючою множиною. Якщо $\Omega = \mathbb{R}^r$, то таку задачу називають без обмежень на керування.

Definition 22.3. Нехай $\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1\} \subset \mathbb{R}^n$ – пара точок простору. Якщо для цих двох точок існує допустиме керування $u : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$ таке, що під дією системи $\mathbf{x}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}_1$, то будемо казати, що \mathbf{u} переводить $\hat{\mathbf{x}}_0$ в $\hat{\mathbf{x}}_1$ за час $T := t_1 - t_0$. Позначаємо як $\hat{\mathbf{x}}_0 \xrightarrow[(t_0, t_1)]{\mathbf{u}(t)} \hat{\mathbf{x}}_1$.

Definition 22.4. Якщо $\forall \{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1\} \subset \mathbb{R}^n$ існує допустиме керування $u : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$ таке, що під дією системи $\mathbf{x}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}_1$, то будемо казати, що система є повністю керованою на $[t_0, t_1]$.

Theorem 22.5. Критерій Калмана. Система є ПК тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rang}(\mathbf{K}) = n, \mathbf{K} = (\mathbf{B} \parallel \mathbf{AB} \parallel \dots \parallel \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad (210)$$

Доведення. \rightarrow . Нехай система ПК. Оберемо відповідне $u(t)$. Згідно формули Коші:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (211)$$

Тоді при $t = t_1$ маємо:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (212)$$

Або:

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (213)$$

Помітимо, що $e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\mathbf{A}\tau)^s}{s!}$. За теоремою Гамільтона-Келі всяка квадратна матриця задовольняє своєму характеристичному поліному $\chi(\lambda)$. Нехай

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^n c_k \lambda^{n-k} \quad (214)$$

Тоді $\mathbf{A}^n = -c_1 \mathbf{A}^{n-1} - \dots - c_{n-1} \mathbf{A} - c_n \mathbf{E}_{n \times n}$. Це означає, що \mathbf{A}^n залежить від $\mathbf{A}^{n-1}, \dots, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}, \mathbf{E}_{n \times n}$. Звідси випливає, що $\mathbf{A}^m, m \geq n$ є лінійною комбінацією $\mathbf{E}_{n \times n}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$, тобто

$$\exists \varepsilon_{ki} : \mathbf{A}^k = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{ki} \mathbf{A}^i, \quad k \geq n \quad (215)$$

Далі доведення зрозуміле, але тут не закінчене.

Theorem 22.6. Також можна довести, що якщо система ПК, то

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_{n \times n} \mathbf{B}) = n$.
2. $\int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top e^{(t_1-\tau)\mathbf{A}^\top} d\tau \gg 0$.
3. $\text{rang}(\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$.

23 Задача швидкодії

Умова. Задача швидкодії для лінійних систем. Множина досяжності (керованості) за час T , властивості множини досяжності (опуклість, властивість внутрішніх точок).

Відповідь. Розглянемо задачу виду: $t_1 - t_0 \rightarrow \inf$ під дією

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & t \in [t_0, t_1] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, u(t) \in \Omega \end{cases} \quad (216)$$

Будемо вважати Ω – замкнена, обмежена і випукла множина, $0 \in \Omega$.

Definition 23.1. Множина Ω називається випуклою, якщо разом з будь-якими своїми точками \mathbf{x}, \mathbf{y} , воно тримає і весь відрізок, що їх з'єднує. Формально:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \Omega \quad (217)$$

Для зручності далі нехай $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Definition 23.2. Множиною досяжності для системи $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ за час T будемо називати множину точок \mathbf{x}_0 з яких можна потрапити в $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ за час T під дією деякого допустимого управління.

Нехай V_T – множина досяжності для нашої системи.

Lemma 23.3. V_T – випукла множина.

Доведення. Перевіримо, що $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in V_T \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_0 \in V_T$. За означенням,

$$\mathbf{x}_0 \in V_T \implies \exists u_X(t) \in \Omega : \mathbf{x}_0 \xrightarrow[(0,T)]{u_X(t)} \mathbf{0} \quad (218)$$

$$\mathbf{y}_0 \in V_T \implies \exists u_Y(t) \in \Omega : \mathbf{y}_0 \xrightarrow[(0,T)]{u_Y(t)} \mathbf{0} \quad (219)$$

Покладемо:

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \lambda u_X(t) + (1 - \lambda) u_Y(t) \implies \tilde{\mathbf{u}} \in \Omega \quad (220)$$

Тоді це переведе $\lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_0$ у $\mathbf{0}$.

Lemma 23.4. Якщо \mathbf{x}_0 – внутрішня точка V_T , то з \mathbf{x}_0 можна потрапити в $\mathbf{0}$ за час, строго менший за T .

Доведення. Отже, $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(V_T)$. Тоді існує куля $B(\mathbf{x}_0, r) \subset V_T$, а отже і куб C з центром в \mathbf{x}_0 .

Нехай $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$ – вершини куба, $\mathbf{y}_i \in V_T$. Тоді,

$$\exists u_i(t) \in \Omega : \mathbf{y}_i \xrightarrow[(0,T)]{u_i(t)} \mathbf{0}, \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (221)$$

Для достатньо малого $\delta > 0$ розглянемо точки $\mathbf{y}_1(t_0 + \delta), \dots, \mathbf{y}_N(t_0 + \delta)$. Маємо:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{A}\mathbf{y}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), & t_0 + \delta \leq t \leq t_1 \\ \mathbf{y}_i(\tilde{t}_0) = \mathbf{y}_i(t_0 + \delta) \\ \mathbf{y}_i(t_1) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_i \in \Omega, & t_0 + \delta \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (222)$$

При достатньо малих $\delta > 0$ випукла оболонка з точок $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta)$ буде мало відрізнятися від куба C . Тоді при достатньо малих $\delta > 0$ ця випукла оболонка буде містити \mathbf{x}_0 . З точок $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta)$ можна потрапити за час $T - \delta$. Тоді $\mathbf{y}_i(t_0 + \delta) \in V_{T-\delta}$, звідки в силу випуклості множини випливає, що множині $V_{T-\delta}$ належить і весь багатогранник. Це означає, що і з $\mathbf{x}_0 \in V_{T-\delta}$, тобто з точки \mathbf{x}_0 можна потрапити за час $T - \delta < T$.

Definition 23.5. Нехай A_0, \dots, A_n не лежать в одній $(k-1)$ -мірній площині, тоді випукла оболонка цих точок називають **симплексом**.

Lemma 23.6. Допоміжна. Нехай $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{KC}[t_0, t_1]$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{KC}^1[t_0, t_1]$ – траєкторія. Нехай $\boldsymbol{\psi}(t)$ – довільний розв’язок рівняння $\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{A}^*\boldsymbol{\psi}(t)$. Тоді

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t_1), \mathbf{x}(t_1) \rangle - \langle \boldsymbol{\psi}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \rangle dt \quad (223)$$

Доведення. В точках неперервності $\mathbf{u}(t)$ маємо $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Тоді:

$$\frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \rangle = -\langle \mathbf{A}^*\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{A}^*\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \rangle \quad (224)$$

$$= \langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \rangle \quad (225)$$

$\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)$ – неперервні всюду та мають похідну всюду окрім скінченного числа точок. Тоді проінтегрувавши від t_0 до t_1 отримаємо потрібне рівняння.

24 Принцип максимуму Понтрягіна 1

Умова. Принцип максимуму Понтрягіна, як необхідна умова оптимальності в лінійній задачі швидкодії.

Відповідь.

25 Принцип максимуму Понтрягіна 2

Умова. Принцип максимуму Понтрягіна, як достатня умова оптимальності в лінійній задачі швидкодії.

Відповідь.

26 Зупинка візка на рейках

Умова. Задача про найшвидшу зупинку візка на рейках. Знаходження керування. Фазовий портрет оптимального синтезу.

Відповідь.

27 Кількість перемикань

Умова. Теореми про кількість перемикань.

Відповідь.

28 Принцип максимуму Понтрягіна 3

Умова. Принцип максимуму Понтрягіна для задач Больца, Лагранжа з фіксованими кінцями та з кінцями на многовидах.

Відповідь.