Домашня робота з курсу "Теоретична механіка"

Студента 3 курсу групи МП-31 Захарова Дмитра

30 жовтня 2023 р.

Завдання 1. Нехай $v_x = 20\,\text{м/с}$, $\omega = 20\,\text{рад/с}$, $R = 1\,\text{м}$. Тоді

$$x(t) = v_x t - R\sin\omega t, y(t) = R(1-\cos\omega t)$$

Швидкості окремо по вісям:

$$\dot{x}(t) = v_x - \omega R\cos\omega t,\ \dot{y}(t) = \omega R\sin\omega t$$

Враховуючи, що $\omega = v_x/R$, тобто колесо рухається без ковзання, можемо дещо спростити:

$$\dot{x}(t) = v_x(1-\cos\omega t), \dot{y}(t) = v_x\sin\omega t$$

Вектор швидкості $\boldsymbol{v} = [\dot{x}, \dot{y}]^\top = v_x[1-\cos\omega t, \sin\omega t]^\top$, а модуль:

$$v(t) = v_x\sqrt{\sin^2\omega t + (1-\cos\omega t)^2} = v_x\sqrt{2-2\cos\omega t} = 2v_x\sin\frac{\omega t}{2}$$

Або чисельно $v(t) = 40\sin 10t$. Прискорення має вигляд:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \omega^2 R[\sin\omega t, \cos\omega t]^\top$$

Чисельно $\boldsymbol{a}(t) = 400[\sin 20t, \cos 20t]^\top, a(t) \equiv 400$.

Доведемо, що радіус кривини ρ дорівнює $2MA$. Знаходимо тангенсальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \omega v_x\cos\frac{\omega t}{2} = \omega^2 R\cos\frac{\omega t}{2}$$

Тоді нормальне прискорення $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\omega t}{2}}\omega^2 R = \omega^2 R\sin\frac{\omega t}{2}$.

Тому радіус кривини дорівнює:

$$\rho(t) = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4v_x^2\sin^2\omega t/2}{\omega^2 R\sin\frac{\omega t}{2}} = 4\sin\frac{\omega t}{2}R$$

Знайдемо довжину відрізка MA. A має координату $\boldsymbol{r}_A(t) = [v_x t, 0]^\top$, а радіус-вектор M вже заданий за умовою. Отже:

$$MA = \|\boldsymbol{r}_A(t) - \boldsymbol{r}_M(t)\| = \sqrt{\sin^2 \omega t + (1 - \cos \omega t)^2} R = 2R \sin \frac{\omega t}{2}$$

Нескладно бачити, що $\rho \equiv 2MA$

Завдання 2. Позначимо кутову швидкість $\omega = 4\pi \, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, довжину шарнирів $l = 60\,\text{см}$ та довжину $MB = \mu l, \mu = 1/3$.

Оскільки перед нами рівнобічний трикутник, то координату точки M можна знайти як:

$$x(t) = 2l \cos \varphi - \mu l \cos \varphi = l \cos \varphi (2 - \mu)$$
$$y(t) = \mu l \sin \varphi$$

Тобто радіус-вектор траєкторії:

$$\boldsymbol{r}(t) = l[(2 - \mu) \cos \omega t, \mu \sin \omega t]^\top$$

Це еліпс з півосями $(2 - \mu)l$ та μl. При $\mu = 1$ отримуємо коло, що цілком логічно, оскільки в такому разі $M = A$. При $\mu = 1/3$, тобто за умовою, півосі будуть дорівнювати $5l/3, l/3$.

Функція швидкості:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \omega l[(\mu - 2) \sin \omega t, \mu \cos \omega t]^\top$$

Отже $\boldsymbol{v}(0) = \omega l[0, \mu]^\top$. Тому модуль $v(0) = \mu \omega l$. Якщо підставимо, отримуємо $80\pi \, \frac{\text{см}}{\text{с}}$, тобто приблизно $2.5\,\text{м/с}$.

Прискорення:

$$\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2 l[(2 - \mu) \cos \omega t, \mu \sin \omega t]^\top$$

В нулі отримуємо $\boldsymbol{a}(0) = (\mu - 2)\omega^2 l \hat{x}$. Для $\mu = 1$ цілком логічно отримуємо $\boldsymbol{a}(0) = -\omega^2 l \hat{x}$ – доцентрове прискорення при русі по колу. Для нашого конкретного випадку маємо $a(0) = 5\omega^2 l/3 \approx 157.9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Знайдемо радіус кривини. Дотичне прискорення $a_\tau = \frac{dv}{dt}$. Модуль швидкості:

$$v(t) = \omega l \sqrt{\mu^2 \cos^2 \omega t + (2 - \mu)^2 \sin^2 \omega t}$$

Похідна:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2 l^2}{2v}\left(2\mu^2 \cos\omega t(-\omega)\sin\omega t + 2(2-\mu)^2 \sin\omega t\cdot\omega\cos\omega t\right) = \frac{\sin 2\omega t((2-\mu)^2-\mu^2)}{2\sqrt{\mu^2\cos^2\omega t + (2-\mu)^2\sin^2\omega t}}\cdot\omega^2 l = \frac{2(1-\mu)\sin 2\omega t}{\sqrt{\mu^2\cos^2\omega t + (2-\mu)^2\sin^2\omega t}}\cdot\omega^2 l$$

Для $t = 0$ отримуємо $a_\tau(0) = 0$. Отже $a_n(0) = a(0) = (2-\mu)\omega^2 l$. Тоді радіус кривини:

$$\rho(0) = \frac{v^2}{a_n}\bigg|_{t=0} = \frac{\mu^2\omega^2 l^2}{(2-\mu)\omega^2 l} = \frac{\mu^2}{2-\mu}l$$

Для $\mu = 1/3$ маємо $\rho(0) = \frac{1/9}{5/3}l = l/15 = 4\,\text{см}$.