Домашня Робота з Рівнянь Математичної Фізики #1

Захаров Дмитро

15 вересня, 2024

Зміст

1 Домашня Робота **2**
1.1 Вправа 1. Файл практики, номер 1.4. 2
1.1.1 Визначення типу рівняння 2
1.1.2 Знаходження загальних інтегралів 2
1.1.3 Знаходження часткових похідних 3
1.2 Вправа 2. Файл практики, номер 2.4. 5
1.2.1 Визначення типу рівняння 5
1.2.2 Знаходження загальних інтегралів 5
1.2.3 Знаходження часткових похідних 6

1 Домашня Робота

1.1 Вправа 1. Файл практики, номер 1.4.

Умова Задачі 1.1. Звести диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома змінними до канонічного вигляду:

$$\sin^2 x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1.1.1 Визначення типу рівняння

Для початку, запишемо характеристичне рівняння:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} A(x,y) - \lambda & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) - \lambda \end{bmatrix},$$

де в нашому випадку маємо $A(x,y) = \sin^2 x$, $C(x,y) = y^2$, $B(x,y) = -y \sin x$. Отже:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \sin^2 x - \lambda & -y \sin x \\ -y \sin x & y^2 - \lambda \end{bmatrix} = (\sin^2 x - \lambda)(y^2 - \lambda) - y^2 \sin^2 x = \lambda^2 - \lambda(\sin^2 x + y^2).$$

Таким чином, маємо два наступних кореня:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = y^2 + \sin^2 x.$$

Отже, перед нами **параболічний тип** рівняння, оскільки один з коренів дорівнює нулю (також, легко бачити, що $A(x)C(y) - B(x,y)^2 = 0$).

1.1.2 Знаходження загальних інтегралів

Тепер, знайдемо загальний інтеграл наступного рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y) \pm \sqrt{B(x,y)^2 - A(x)C(y)}}{A(x)} = \frac{B(x,y)}{A(x)} = -\frac{y \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{y}{\sin x}$$

Перед нами відносно просте диференціальне рівняння з розділеними змінними:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\sin x}$$

Лівий інтеграл знаходиться легко (це просто $\log|y| + \text{const}$)[1], а ось правий розберемо більш детально. Достатньо скористатись універсальною тригонометричною підстановкою $\theta = \tan \frac{x}{2}$. Тоді:

$$\sin x = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \quad dx = \frac{2d\theta}{1+\theta^2},$$

і тому наш інтеграл знаходиться наступним чином:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2d\theta}{(1+\theta^2) \cdot \frac{2\theta}{1+\theta^2}} = \int \frac{d\theta}{\theta} = \log|\theta| + \text{const}$$

[1] Запис $\log x$ надалі розуміємо як натуральний логарифм від x.

Якщо згадати, що $\theta = \tan\frac{x}{2}$, отримаємо остаточно $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \mathrm{const}$. Повернемось до нашого диференціального рівняння. Маємо:

$$\log|y| = -\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \mathrm{const} \quad \text{або} \quad \log\left|y\tan\frac{x}{2}\right| = \mathrm{const}$$

Нарешті, звідси наш **загальний інтеграл**:

$$\boxed{\xi(x,y) = y\tan\frac{x}{2} = \mathrm{const}}$$

Візьмемо $\eta(x,y) \in \mathcal{C}^2$, незалежну від $\xi(x,y)$. Наприклад, $\eta(y) := y$ (можна додатково для себе переконатись, що Якобіан $\det\begin{bmatrix}\xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y\end{bmatrix} = \frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2} \neq 0$). Згідно матеріалу лекції, ця підстановка зведе наше початкове рівняння до канонічного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0,$$

де $\widetilde{\Phi}(\star)$ — деяка функція. Отже, переконаємось в цьому і знайдемо $\widetilde{\Phi}$.

1.1.3 Знаходження часткових похідних

Знаходимо похідні $u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$. Але для цього, скористаємось допоміжною лемою.

Lemma 1.2. Нехай $\xi(x,y) = y\tan\frac{x}{2}, \eta(y) = y$. Тоді справедливо наступне:

(а) $\partial\xi/\partial x = \frac{1}{2}\eta\left(1 + \xi^2/\eta^2\right)$.

(б) $\partial\xi/\partial y = \xi/\eta$.

(в) $\partial\eta/\partial x = 0, \partial\eta/\partial y = 1$.

Доведення. Твердження (в) достатньо очевидно випливає з того, що $\eta(x,y) = y$. Отже, доводимо друге. Маємо:

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \tan\frac{x}{2}$$

Оскільки $\xi = y\tan\frac{x}{2}$, то $\tan\frac{x}{2} = \frac{\xi}{y} = \frac{\xi}{\eta}$, звідки і випливає твердження (б). Для твердження (а), знаходимо похідну:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{2}y\sec^2\frac{x}{2}$$

Тепер, ми хочемо виразити $y\sec^2\frac{x}{2}$ через ξ та η. Для цього помітимо, що:

$$\tan^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \left(1 - \frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}\right)\sec^2\frac{x}{2} = \sec^2\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \sec^2\frac{x}{2} = \tan^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{\xi^2}{\eta^2} + 1$$

Тоді звідси остаточно

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{y}_{=\eta}\cdot\underbrace{\sec^2\frac{x}{2}}_{=1+\xi^2/\eta^2} = \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right),$$

що і завершує доведення леми. ■

Отже, почнемо з перших похідних. Починаємо з u'_x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)}$$

Тепер знаходимо u'_y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\xi}{\eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}}$$

Діло дійшло до других похідних. Почнемо з u''_{xx}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\right) \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) = \boxed{\frac{\eta^2}{4}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}}$$

Вийшло неприємно, але ми не зупиняємося. Знаходимо u''_{xy}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) \cdot \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}}$$

Ще гірше, але ми сильні. Знаходимо u''_{yy}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=1} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\xi}{\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\xi}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) \cdot \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \boxed{\frac{\xi^2}{\eta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2\xi}{\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}$$

Впорались. Тепер треба виразити $\sin x$ через ξ, η і ми будемо готові підставляти. З універсальної тригонометричної підстановки маємо:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\xi/\eta}{1 + \xi^2/\eta^2} = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

Отже, наше рівняння зводиться до:

$$\frac{4\xi^2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{4\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \eta^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Після доволі довгих розрахунків, результат виходить несподівано гарним:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0, \quad \text{де} \quad \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = -\frac{2\xi}{\eta^2 + \xi^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}}$$

1.2 Вправа 2. Файл практики, номер 2.4.

Умова Задачі 1.3. Звести диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома змінними до канонічного вигляду:

$$y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1.2.1 Визначення типу рівняння

Як і в попередньому випадку, знайдемо характеристичне рівняння:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} A(x,y) - \lambda & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) - \lambda \end{bmatrix},$$

де в нашому випадку маємо $A(x,y) = y^2$, $C(x,y) = x^2$, $B(x,y) = 0$. Отже:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} y^2 - \lambda & 0 \\ 0 & x^2 - \lambda \end{bmatrix} = (y^2 - \lambda)(x^2 - \lambda)$$

Таким чином, маємо два наступних кореня:

$$\lambda_1 = y^2, \quad \lambda_2 = x^2.$$

Тут маємо три випадки:

(а) $x = y = 0$: вироджений випадок, рівняння не має сенсу (формально, будь-яка функція u є розв'язком).

(б) $x = 0$ або $y = 0$: один з коренів дорівнює нулю, а отже маємо **параболічний тип**. Оскільки рівняння в такому випадку зведеться до або $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ або $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, то рівняння вже знаходиться в канонічному вигляді (достатньо скоротити або на x^2, або на y^2, відповідно, бо вони ненульові).

(в) $x \neq 0$ та $y \neq 0$: маємо **еліптичний тип** рівняння, оскільки $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Звичайно, що нас цікавить саме третій випадок, адже він є нетривіальним. За теоремою з лекції, він зводиться до канонічного вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

Отже, перевіримо це і знайдемо $\widetilde{\Phi}(\star)$.

1.2.2 Знаходження загальних інтегралів

Тепер, знайдемо загальний інтеграл наступного рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{-x^2 y^2}}{y^2} = \pm \frac{ixy}{y^2} = \pm \frac{ix}{y} \Rightarrow \int y dy = \pm i \int x dx$$

Отже, звідси:

$$y^2 \pm i x^2 = \text{const}$$

Тому робимо заміну $\xi = y^2$, $\eta = x^2$.

1.2.3 Знаходження часткових похідних

Знаходимо похідні $u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}$ (тут вираз u''_{xy} нам не потрібен):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = \boxed{2\sqrt{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=0} = 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = \boxed{2\sqrt{\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}}.$$

Тепер переходимо до других похідних:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(2\sqrt{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\sqrt{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= 2\sqrt{\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\sqrt{\eta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = \boxed{4\eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(2\sqrt{\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\sqrt{\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=0}$$

$$= 2\sqrt{\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\sqrt{\xi} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = \boxed{4\xi \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}}$$

Підставляємо все це діло у початкове рівняння:

$$\xi \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Отже, маємо:

$$\xi \cdot \left(4\eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \eta \cdot \left(4\xi \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$$

Або, це може бути спрощено до:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \quad \text{де} \quad \widetilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{2\xi\eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}$$