Метод Левер'є-Фадеєва

Домашня робота з курсу "Чисельні методи лінійної алгебри"

23 квітня 2023 р.

Завдання.

1. Придумайте матрицю 3×3.
2. Методом Левер'є-Фадеєва знайдіть її власні значення, власні вектори і обернену матрицю.
3. Перевірте отриману відповідь.

Розв'язок.

Пункт 1. Завдання нескладне, нехай:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Пункт 2. Отже, рахуємо:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ p_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1) = 9$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}_1 - 9\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -18 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & 3 \\ 0 & 3 & -17 \end{bmatrix},\ p_2 = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_2)}{2} = -26$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}_2 + 26\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix},\ p_3 = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_3)}{3} = 24$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}_3 - 24\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$$

Отже маємо характеристичний поліном:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3 = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24$$

Можна помітити, що:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

Отже, маємо 3 власних значення: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Знаходимо власні вектори:

$$\boldsymbol{Q}_1 = \lambda_1^2\boldsymbol{E} + \lambda_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 = \lambda_2^2\boldsymbol{E} + \lambda_2\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \lambda_3^2\boldsymbol{E} + \lambda_3\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Отже маємо 3 власних вектори:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Обернена матриця:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{B}_{n-1}}{p_n} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Пункт 3. Якщо ми правильно знайшли власні числа λ_i і власні вектора $\boldsymbol{v}_i$, до достатньо підставити у рівняння

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

А обернену матрицю можна порахувати руками. В мене відповідь зійшлася з тими, що видає комп'ютер :)