模式识别作业2

张蔚桐 2015011493 自55

2017 年 3 月 16 日

1

1.1

根据题目中的提示，我们将误差函数分别对$\mathbf{w}$和w_0求导可以得到

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{n}((\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + w_0 - t_i)\mathbf{x}_i^T) \tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_0} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + w_0 - t_i) \tag{2}$$

整理可得误差函数极小值点的方程

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{w}^T\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T) + w_0\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i^T) - \sum_{i=1}^{n}(t_i\mathbf{x}_i^T) \ = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_0} = \mathbf{w}^T\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i) + nw_0 - \sum_{i=1}^{n}(t_i) = 0 \tag{4}$$

根据题目中的设定$t_1 = \frac{n}{n_1}$以及$t_2 = -\frac{n}{n_2}$可以迅速得到$\sum_{i=1}^{n}(t_i) = 0$

因此化简4式得到

$$w_0 = -\frac{\mathbf{w}^T\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i)}{n} = -\mathbf{w}^T\mathbf{m} \tag{5}$$

由5，此问得证

1.2

将5带入3可以得到如下表述

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T) - \mathbf{w}^T\mathbf{m}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i^T) - \sum_{i=1}^{n}(t_i\mathbf{x}_i^T) = 0 \\ \mathbf{w}^T\sum_{i=1}^{n}((\mathbf{x}_i - \mathbf{m})\mathbf{x}_i^T) = \sum_{i=1}^{n}(t_i\mathbf{x}_i^T) \end{aligned} \tag{6}$$

下面着重研究6式右侧的表述，按照类别可以划分为

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(t_i\mathbf{x}_i^T) &= \frac{n}{n_1}\sum_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_i^T) - \frac{n}{n_2}\sum_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{x}_i^T) \\
&= n(\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2})
\end{aligned} \tag{7}
$$

结合7，对6式取转置可得

$$
\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{m})^T)\mathbf{w} = n(\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2}) \tag{8}
$$

下面处理8式$\mathbf{w}$前系数问题，根据统计学知识，我们可以得到$\mathbf{m} = \frac{n_1\mathbf{m_1}+n_2\mathbf{m_2}}{n}$，由此，将8式左侧系数按照类别展开，得到