

Methoden angewandter Algebra 1/2

Alex Ivliev

16. September 2019

Inhaltsverzeichnis

1	allgemeine Definitionen	2
2	Inzidenzstrukturen	4
3	Summation	9
3.1	Summationsstrukturen und Monoide	13
3.2	Summation und Inzidenzstrukturen	17
4	Targoide und vollständige Verbände	20
4.1	vollständige Verbände und Summation	21
5	Summoide	24
5.1	Produktsommen	27
6	Łukasiewicz-Norm und -Monoid	31
7	Summoid-Module	34
7.1	Matrizen und lineare Abbildungen	42
8	Netzwerke und Aktionsnetzwerke	47
8.1	Netzwerke	47
8.2	Aktionsnetzwerke	51
8.3	\mathcal{S} -Algebren	56
8.4	Automaten	59

1 allgemeine Definitionen

Definition 1.1. Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definition 1.2. Es sei $\mathbb{2} = \{0, 1\}$.

Definition 1.3. Für eine natürliche Zahl n ist $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definition 1.4. Die Menge $[0, \infty]$ ist definiert als $[0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.5. Sei M eine Menge. Dann ist $m \subseteq_{\text{fin}} M$, falls $m \subseteq M$ und m endlich ist.

Definition 1.6. Sei M eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{m \mid m \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M .

Definition 1.7. Sei M eine Menge und n eine natürliche Zahl. Dann ist

$$\binom{M}{n} = \{m \subseteq M \mid |m| = n\}.$$

Definition 1.8. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Sei weiterhin $y \in Y$ ein Element aus der Zielmenge. Dann ist

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Ist f eine bijektive Abbildung, so bezeichnet $f^{-1}(y)$ den Funktionswert von y der Umkehrabbildung von f .

Definition 1.9. Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann ist

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A: f(a) = b\}.$$

Definition 1.10. Das Tripel $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$ heißt Monoid, falls M eine beliebige Menge, $*$: $M \times M \rightarrow M$ eine innere zweistellige Verknüpfung und $\varepsilon \in M$ ist und zusätzlich folgende Eigenschaften gelten:

- Assoziativität: $\forall a, b, c \in M: (a * b) * c = a * (b * c)$
- neutrales Element: $\forall m \in M: \varepsilon * m = m = m * \varepsilon$

M wird dabei die Grundmenge des Monoids genannt. Gilt darüber hinaus noch

- Kommutativität: $\forall a, b \in M: a * b = b * a$,

dann ist \mathbb{M} ein kommutatives Monoid.

Definition 1.11. Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt konstant falls

$$\forall a \in A: f(a) = b$$

für ein Element $b \in B$.

Definition 1.12. Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Abbildungen. Dann ist $g \circ f: A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$ die kontravariante Verkettung von (f, g) . Dagegen bezeichnet man $f \bullet g: A \rightarrow C, a \mapsto ((a)f)g$ als die kovariante Verkettung von (f, g) .

Es gilt also $g \circ f = f \bullet g$.

Definition 1.13. Sei P eine Menge und $R \subseteq P \times P$ eine Relation auf dieser Menge. Dann ist das Paar $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat.

Für $(p, q) \in R$ schreibe auch $p R q$.

Definition 1.14. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt Präordnung, falls folgende Eigenschaften gelten:

- Reflexivität: $\forall p \in P: p R p$
- Transitivität: $\forall p, t, q \in P: p R t \wedge t R q \implies p R q$

\mathbb{P} heißt Ordnung (partiell geordnete Menge), falls zusätzlich folgende Eigenschaften gelten:

- Antisymmetrie: $\forall p, q \in P: p R q \wedge q R p \implies p = q$

Beispiel 1.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathbb{P} = (P, R)$ mit $P = \mathcal{P}(\Omega)$ und $R = \{(X, Y) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2 \mid X \subseteq Y\}$ eine Ordnung. Diese Ordnung soll mit $R^\Omega = (\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$ bezeichnet werden.

2 Inzidenzstrukturen

Definition 2.1. Seien P , B und I Mengen, wobei $I \subseteq P \times B$. Das Tripel $\mathcal{I} = (P, B, I)$ heißt Inzidenzstruktur.

Die Menge P wird als Menge von Punkten interpretiert und B als Menge von Blöcken. Für ein $p \in P$ und ein $b \in B$ $(p, b) \in I$, so schreibe $p I b$.

Beispiel 2.1 (Würfel). Bei einem Würfel ist P die Menge der 8 Ecken und B die Menge der 6 Seiten. Es gilt $p I b$ für ein $p \in P$ und ein $b \in B$ genau dann wenn p eine Ecke der Seite b ist.

Definition 2.2. Eine Inzidenzstruktur (P, B, I) heißt endlich falls P und B (und daher I) endlich sind.

Definition 2.3. Für eine Inzidenzstruktur (P, B, I) und ein Element $p \in P$ ist weiterhin $pI = \{b \in B \mid p I b\}$ die Menge aller Blöcke, die mit p inzidieren.

Für ein Element $b \in B$ ist $Ib = \{p \in P \mid p I b\}$ die Menge aller Punkte, die mit b inzidieren.

Definition 2.4. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, B, I)$ heißt taktische Konfiguration mit den Parametern $(v, r, b, k) \in \mathbb{N}^4$ falls folgende Bedingungen gelten:

- $|P| = v$ und $|B| = b$
- $\forall p \in P: |pI| = r$
- $\forall b \in B: |Ib| = k$

Beispiel 2.2 (Würfel). Die Inzidenzstruktur des Würfels aus Beispiel 2.1 ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(8, 3, 6, 4)$.

Satz 2.1 (Doppelte Abzählung). Sei $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine endliche Inzidenzstruktur. Dann gilt

$$\sum_{p \in P} |pI| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

Beweis. Es gilt

$$\bigcup \{\{p\} \times pI \mid p \in P\} = I = \bigcup \{Ib \times \{b\} \mid b \in B\}$$

und daher

$$\sum_{p \in P} |pI| = |I| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

□

Satz 2.2. Ist $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine endliche taktische Konfiguration mit Parametern (v, r, b, k) , dann gilt:

$$v \cdot r = b \cdot k.$$

Beweis. Mithilfe von Satz 2.1 ergibt sich folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} v \cdot r &= \sum_{p \in P} r = \sum_{p \in P} |pI| \\ &= \sum_{b \in B} |Ib| = \sum_{b \in B} k = b \cdot k. \end{aligned}$$

□

Definition 2.5. Sei $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine Inzidenzstruktur. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{I}^{-1} = (B, P, I^{-1})$ mit $I^{-1} = \{(b, p) \in B \times P \mid p I b\}$ ist die zu \mathcal{I} duale Inzidenzstruktur.

Satz 2.3. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, B, I)$ ist genau dann eine taktische Konfiguration, wenn $\mathcal{I}^{-1} = (P^{-1}, B^{-1}, I^{-1})$ auch eine ist, wobei $P^{-1} = B$ und $B^{-1} = P$.

Beweis. Sei \mathcal{I} eine taktische Konfiguration mit Parametern (v, r, b, k) . Laut Definition gilt daher:

- $|P| = v$ und $|B| = b$
- $\forall p \in P: |pI| = r$
- $\forall b \in B: |Ib| = k$

Für \mathcal{I}^{-1} ergeben sich folgende Parameter:

- $|P^{-1}| = |B| = b$ und $|B^{-1}| = |P| = v$
- $\forall p^{-1} \in P^{-1}: |p^{-1}I^{-1}| = k$
- $\forall b^{-1} \in B^{-1}: |I^{-1}b^{-1}| = b$

Also ist \mathcal{I}^{-1} eine taktische Konfiguration mit den Parametern (b, k, v, r) . □

Beispiel 2.3. Der Ikosaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(12, 5, 20, 3)$ und dual zur taktischen Konfiguration mit Parametern $(20, 3, 12, 5)$, was dem Dodekaeder entspricht.

Der Oktaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(6, 4, 8, 3)$ und dual zur taktischen Konfiguration mit Parametern $(8, 3, 6, 4)$, was dem Hexaeder entspricht.

Satz 2.4 (Dualitätsprinzip). *Es gilt für alle taktischen Konfigurationen: Ist eine Aussage für eine dualitätsabgeschlossene Klasse von Inzidenzstrukturen wahr, so ist sie auch für die duale Inzidenzstruktur wahr.*

Definition 2.6. Seien $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien $\varphi: P \rightarrow P'$ und $\psi: B \rightarrow B'$ Abbildungen, für die gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (p I b \implies \varphi(p) I' \psi(b)).$$

Dann heißt das Abbildungspaar (φ, ψ) Homomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}' . Homomorphismen zwischen Inzidenzstrukturen sind inzidenzerhaltend.

Definition 2.7. Ein Homomorphismus (φ, ψ) zwischen den Inzidenzstrukturen $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ ist (inzidenz-)reflektierend, falls gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies p I b).$$

Definition 2.8. Ein reflektierender Homomorphismus (φ, ψ) heißt Isomorphismus, falls φ und ψ bijektiv sind. Zwei Inzidenzstrukturen \mathcal{I} und \mathcal{I}' heißen isomorph zueinander, falls zwischen ihnen ein Isomorphismus existiert. In diesem Fall schreibe $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}'$.

Satz 2.5. Seien $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien $\varphi: P \rightarrow P'$ und $\psi: B \rightarrow B'$ bijektive Abbildungen. Dann gilt: (φ, ψ) ist ein Isomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}' genau dann wenn (φ, ψ) ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}' ist und $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I}' und \mathcal{I} ist.

Beweis. Angenommen (φ, ψ) ist ein Isomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}' . Dann ist (φ, ψ) ein reflektierender Homomorphismus, weshalb gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies p I b)$$

und daher auch

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies \varphi^{-1}(\varphi(p)) I \psi^{-1}(\psi(b))).$$

Zu jedem Punkt $p' \in P'$ und jedem Block $b' \in B'$ lässt sich wegen der Bijektivität von φ und ψ jeweils genau ein Element $p \in P$ und $b \in B$ finden, sodass $\varphi(p) = p'$ bzw. $\psi(b) = b'$. Die obige Aussage kann also wie folgt umgeschrieben werden:

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi^{-1}(p') I \psi^{-1}(b')).$$

Somit ist $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I}' und \mathcal{I} .

Nun sei angenommen, dass (φ, ψ) und $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ Homomorphismen sind. Das heißt es gilt

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi^{-1}(p') I \psi^{-1}(b')).$$

Analog zum ersten Teil des Beweises lässt sich die Aussage wie folgt umschreiben:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies \varphi^{-1}(\varphi(p)) I \psi^{-1}(\psi(b))).$$

Also ist (φ, ψ) reflektierend und somit ein Isomorphismus. \square

Satz 2.6. Seien $\mathcal{I}, \mathcal{I}', \mathcal{I}''$ Inzidenzstrukturen. Sei weiterhin (φ, ψ) ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}' und (φ', ψ') ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I}' und \mathcal{I}'' . Dann ist $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}'' .

Beweis. Laut Definition gelten folgende Aussagen:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (p I b \implies \varphi(p) I' \psi(b)).$$

und

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi'(p') I'' \psi'(b')).$$

Da $\varphi(p) \in P'$ und $\psi(b) \in B'$ folgt aus $p I b$ für alle $p \in P$ und alle $b \in B$:

$$\varphi'(\varphi(p)) I'' \psi'(\psi(b)) = (\varphi' \circ \varphi)(p) I'' (\psi' \circ \psi)(b).$$

Also ist $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ ein Homomorphismus zwischen \mathcal{I} und \mathcal{I}'' . \square

Definition 2.9. Sei \mathcal{I} eine Inzidenzstruktur. \mathcal{I} heißt selbstdual falls $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}^{-1}$.

Definition 2.10. Gegeben seien drei natürliche Zahlen i, j, k mit $i \leq j \leq n$. Dann ist $\mathcal{I}_{i,j}^n = ((\binom{[n]}{i}), (\binom{[n]}{j}), \subseteq)$ die sogenannte kombinatorische taktische Konfiguration mit den Parametern $((\binom{n}{i}), (\binom{n-i}{j-i}), (\binom{n}{j}), (\binom{j}{i}))$.

Satz 2.7. Seien $i, j, k \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j \leq n$. Dann ist $\mathcal{I}_{i,j}^n$ eine taktische Konfiguration mit den Parametern $((\binom{n}{i}), (\binom{n-i}{j-i}), (\binom{n}{j}), (\binom{j}{i}))$

Beweis. Sei $I \in \binom{[n]}{i}$ und $J \in \binom{[n]}{j}$. Dann ist $I \subseteq J$ genau dann wenn J alle Elemente von I enthält und zusätzlich $|J| - |I|$ weitere aus $[n] \setminus I$. Das heißt I steht mit $|\binom{[n] \setminus I}{j-i}| = \binom{n-i}{j-i}$ Mengen in Beziehung.

Umgekehrt steht J genau mit jeder i -elementigen Teilmenge von J in Beziehung. \square

Satz 2.8. Sei $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ mit $i \leq \frac{n}{2}$ eine kombinatorische taktische Konfiguration. Dann ist $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ selbstdual.

Beweis. Sei $\varphi: \binom{[n]}{i} \rightarrow \binom{[n]}{n-i}, X \mapsto [n] \setminus X$ eine bijektive Abbildung. Seien weiterhin $I \in \binom{[n]}{i}$ und $J \in \binom{[n]}{n-i}$ Mengen mit $I \subseteq J$. Das heißt für alle $i \in I$ gilt

$$i \in I \implies i \in J.$$

Der Kontrapositiv lautet

$$i \notin J \implies i \notin I,$$

was äquivalent ist zu

$$i \in [n] \setminus J \implies i \in [n] \setminus I \iff i \in \varphi^{-1}(J) \implies i \in \varphi(I),$$

also $\varphi(I) \supseteq \varphi^{-1}(J)$. Das selbe Argument kann auch verwendet werden, um zu zeigen, dass aus $J \supseteq I$ folgt, dass $\varphi^{-1}(J) \subseteq \varphi(I)$, womit gezeigt ist, dass das Abbildungspaar (φ, φ^{-1}) ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ und $(\mathcal{I}_{i,n-i}^n)^{-1}$ ist. \square

Beispiel 2.4 (Tetraeder). Kombinatorische Beschreibung eines Tetraeders lautet: $\mathcal{I} = ((\binom{[4]}{1}), (\binom{[4]}{3}), \subseteq)$. Die duale Inzidenzstruktur ist: $\mathcal{I}^{-1} = ((\binom{[4]}{3}), (\binom{[4]}{1}), \supseteq)$. Der Isomorphismus (φ, ψ) ist gegeben durch $\varphi: \binom{[4]}{1} \rightarrow \binom{[4]}{3}, x \mapsto \bar{x}$ und weiterhin $\psi: \binom{[4]}{3} \rightarrow \binom{[4]}{1}, x \mapsto \bar{x}$.



Abbildung 1: Desargues-Konfiguration

Beispiel 2.5 (Desargues-Konfiguration). Analog zum Tetraeder, nur das die Inzidenzstruktur durch $\mathcal{I}_{2,3}^5 = ((\begin{smallmatrix} [5] \\ 2 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} [5] \\ 3 \end{smallmatrix}), \subseteq)$ gegeben ist. Die Desargues-Konfiguration ist selbstdual und hat 10 Punkte (Die Punkte A, B, C, a, b, c , das Zentrum der Perspektive und die drei Punkte, die auf der roten Linie liegen) und 10 Blöcke (Die 6 Linien der zwei Dreiecke, die 3 Linien, die sich im Zentrum der Perspektive treffen und die Achse der Perspektive). In der dazu dualen Konfiguration sind Achse und Zentrum der Perspektive getauscht.

3 Summation

Definition 3.1. Ein Paar (S, Σ) heißt [finitäre] Summationsstruktur, falls Σ eine Abbildungsvorschrift (Klassenabbildung) ist, die jeder Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ mit beliebiger [endlicher] Definitionsmenge I genau ein Element $\Sigma(\alpha)$ aus S zuordnet, sodass gilt:

- Fundierungsaxiom: Ist $\alpha: \{i\} \rightarrow S$, so gilt $\Sigma(\alpha) = \alpha(i)$.
- Teilsummenaxiom: Sind $\alpha: I \rightarrow S$ und $\eta: I \rightarrow A$ Abbildungen [A und I endlich], so gilt für die Abbildung $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ stets:

$$\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha).$$

Die Menge S wird Grundmenge genannt.

Definition 3.2. Sei (S, Σ) eine [finitäre] Summationsstruktur und $\alpha: I \rightarrow S$ eine beliebige Abbildung [I endlich]. Dann gelten folgende Schreibweisen:

- $(\alpha(i))_{i \in I} = (\alpha(i) \mid i \in I) = \alpha$
- $\sum_{i \in I} \alpha(i) = \Sigma(\alpha)$

Satz 3.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $(\mathcal{P}(\Omega), \bigcup)$ eine Summationsstruktur, wobei für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ die Summation über α wie folgt definiert ist:

$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I: x \in \alpha(i)\}.$$

Beweis. Sei $\alpha: \{i'\} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ eine Abbildung. Es ist

$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \{i'\}: x \in \alpha(i)\} = \alpha(i').$$

Also gilt das Fundierungsaxiom.

Seien nun $\alpha: I \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ und $\eta: I \rightarrow A$ Abbildungen. Dann gilt für die Abbildung $\beta: A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega), a \mapsto \bigcup \alpha|_{\eta^{-1}(a)}$:

$$\begin{aligned} \beta(a) &= \{x \in \Omega \mid \exists i \in \eta^{-1}(a): x \in \alpha(i)\}. \\ \bigcup \beta &= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A: x \in \beta(a)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A \exists i \in \eta^{-1}(a): x \in \alpha(i)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists i \in I: x \in \alpha(i)\} \\ &= \bigcup \alpha. \end{aligned}$$

Also gilt auch das Teilsummenaxiom. □

Satz 3.2 (Invarianz der Summation gegenüber Umbenennung). Sei (S, Σ) eine [finitäre] Summationsstruktur. Sei außerdem $\alpha: I \rightarrow S$ eine Abbildung und sei $\tau: H \rightarrow I$ eine Bijektion [I endlich]. Dann gilt:

$$\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha).$$

Beweis. Sei $\eta = \tau^{-1}$ eine Abbildung von I nach H . Weiterhin sei eine Abbildung $\beta: H \rightarrow S, h \mapsto \Sigma(\alpha|_{\{\eta^{-1}(h)\}})$ definiert. Aus dem Fundierungsaxiom folgt dann

$$\beta(h) = \Sigma(\alpha|_{\{\tau(h)\}}) = \alpha(\tau(h)) = (\alpha \circ \tau)(h).$$

Also ist $\beta = \alpha \circ \tau$. Weiterhin gilt laut Teilsommenaxiom $\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$ und damit $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$. \square

Definition 3.3. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann definieren wir $0_{\mathbb{S}} = \Sigma(\emptyset \rightarrow S)$.

Satz 3.3. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur und $f: A \rightarrow S, a \mapsto 0_{\mathbb{S}}$ eine konstante Abbildung. Dann gilt

$$\Sigma(f) = 0_{\mathbb{S}}.$$

Beweis. Sei $\alpha = \emptyset \rightarrow S$ eine Abbildung. Seien weiterhin die Abbildungen $\eta: \emptyset \rightarrow A$ und $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ gegeben. Dann gilt laut dem Teilsommenaxiom

$$0_{\mathbb{S}} = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) = \sum_{a \in A} \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(a)}) = \sum_{a \in A} \Sigma(\alpha|_{\emptyset}) = \sum_{a \in A} 0_{\mathbb{S}} = \Sigma(f).$$

\square

Definition 3.4. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann ist für beliebige Abbildungen $\alpha: I \rightarrow S$

$$\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0_{\mathbb{S}}\}$$

der Support von α in \mathbb{S} .

Satz 3.4. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann gilt für alle Abbildungen $\alpha: I \rightarrow S$

$$\Sigma(\alpha) = \Sigma(\alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}).$$

Beweis. Es seien $\eta: \text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) \rightarrow I, i \mapsto i$ sowie $\beta: I \rightarrow S, i \mapsto \Sigma(\alpha'|_{\eta^{-1}(i)})$ Abbildungen, wobei $\alpha' = \alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}$. Dann gilt laut dem Teilsommenaxiom

$$\Sigma(\alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}) = \Sigma(\alpha') = \Sigma(\beta) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j) = \Sigma(\alpha).$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für alle $i \in I$

$$\alpha(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j) = \alpha(i) & i \in \text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) \\ \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j) = \sum_{j \in \emptyset} \alpha(j) = 0_{\mathbb{S}} & i \notin \text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha). \end{cases}$$

\square

Definition 3.5. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur und N eine Menge. Dann ist $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$ die N -fache Potenz von \mathbb{S} , wobei $\bar{\Sigma}$ für jede Abbildungsfamilie $(\alpha_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$ (I [endliche] Menge) wie folgt definiert ist:

$$\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}: N \rightarrow S, n \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i(n).$$

Satz 3.5. Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur und N eine Menge. So ist auch $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur.

Beweis. Sei $\alpha: \{i\} \rightarrow S^N$ eine Abbildung. Da das Fundierungsaxiom in \mathbb{S} gilt, ist $\bar{\Sigma}(\alpha): N \rightarrow S, n \mapsto \alpha_i(n)$ und somit $\bar{\Sigma}(\alpha) = \alpha(i)$. Also gilt das Fundierungsaxiom in \mathbb{S}^N .

Seien nun $\alpha: I \rightarrow S^N$, $\eta: I \rightarrow A$ und $\beta: A \rightarrow S^N, a \mapsto \bar{\Sigma}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Dann gilt für alle $n \in N$:

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}(\beta))(n) &= \sum_{a \in A} (\beta(a))(n) \\ &= \sum_{a \in A} (\bar{\Sigma}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)}))(n) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{i \in \eta^{-1}(a)} (\alpha(i))(n) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha(i))(n) \\ &= (\bar{\Sigma}(\alpha))(n), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Teilsommenaxiom für \mathbb{S} folgt. \square

Definition 3.6. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine finitäre Summationsstruktur und N eine Menge. Dann ist $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$ die N -fache Kopotenz von \mathbb{S} , wobei

$$S^{(N)} = \{s \in S^N \mid \text{supp}_{\mathbb{S}}(s) \text{ endlich}\}$$

und $\bar{\Sigma}$ für jede Abbildungsfamilie $(\alpha_i)_{i \in I} \in (S^{(N)})^I$ (I endliche Menge) wie folgt definiert ist

$$\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}: N \rightarrow S, n \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i(n).$$

Satz 3.6. Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine finitäre Summationsstruktur und N eine Menge. So ist auch $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$ eine finitäre Summationsstruktur.

Beweis. Das Gelten von Fundierungs- und Teilsommenaxiom lassen sich analog zu Satz 3.5 beweisen. An dieser Stelle soll daher lediglich gezeigt werden, dass für alle Abbildungen $\alpha \in (S^{(N)})^I$ mit endlicher Indexmenge I gilt, dass $\text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ endlich ist, d.h. $\bar{\Sigma}(\alpha) \in S^{(N)}$.

Der Support von $\bar{\Sigma}(\alpha)$ ist

$$\text{supp}_{\mathbb{S}}\left(\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}\right) = \{n \in N \mid \sum_{i \in I} \alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}\}.$$

Ist N endlich folgt die Aussage daher sofort. Sei N also eine unendliche Menge. Aus Satz 3.3 folgt, dass für alle $n \in \text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ ein $i \in I$ existieren muss, sodass $\alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$. Für einen Widerspruch sei angenommen $\text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ wäre unendlich. Da I aber eine endliche Menge ist, muss es ein $j \in I$ gegeben, sodass $\alpha_j(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$ für unendlich viele $n \in N$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass $\alpha_j \in S^{(N)}$. \square

Definition 3.7. Seien $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ und $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$ Summationsstrukturen. Dann ist eine Abbildung $\varphi: S \rightarrow S'$ ein Homomorphismus von \mathbb{S} nach \mathbb{S}' falls für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ stets gilt:

$$\varphi(\Sigma(\alpha)) = \Sigma'(\varphi \circ \alpha).$$

Ein bijektiver Homomorphismus wird Isomorphismus genannt.

Satz 3.7. Seien $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$, $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$ und $\mathbb{S}'' = (S'', \Sigma'')$ Summationsstrukturen. Seien weiterhin $\varphi: S \rightarrow S'$ und $\varphi': S' \rightarrow S''$ Homomorphismen in die jeweilige Struktur. Dann ist $\varphi' \circ \varphi: S \rightarrow S''$ ein Homomorphismus von \mathbb{S} nach \mathbb{S}'' .

Beweis. Für eine Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)(\Sigma(\alpha)) &= \varphi'(\varphi(\Sigma(\alpha))) \\ &= \varphi'(\Sigma'(\varphi \circ \alpha)) = \Sigma''((\varphi' \circ \varphi) \circ \alpha). \end{aligned}$$

\square

Definition 3.8. Sei \mathbb{S} eine Summationsstruktur. Ein Homomorphismus von \mathbb{S} nach \mathbb{S} heißt Endomorphismus von \mathbb{S} .

$\text{End}_{\mathbb{S}}$ bezeichnet die Menge aller Endomorphismen auf \mathbb{S} .

Definition 3.9. Eine [finitäre] Summationsstruktur (S, Σ) heißt idempotent, falls für jede konstante Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ [wobei I endlich] gilt:

$$\forall i \in I: \Sigma(\alpha) = \alpha(i).$$

Satz 3.8. Sei (S, Σ) eine Summationsstruktur. Dann ist (S, Σ) genau dann idempotent, wenn für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ und jede surjektive Abbildung $\tau: H \rightarrow I$ gilt: $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$.

Beweis. Zunächst sei angenommen, dass (S, Σ) idempotent ist. Setze $\eta = \tau$. Dann ist $\beta: I \rightarrow S, i \mapsto \Sigma((\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)})$ und es gilt $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta)$ laut dem Teilsommenaxiom. $(\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)}$ ist eine konstante Abbildung, weshalb wegen der Idempotenz von (S, Σ) für alle $h \in \tau^{-1}(i)$ gilt:

$$\Sigma((\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)}) = (\alpha \circ \tau)(h) = \alpha(i).$$

Das heißt $\alpha = \beta$ und somit $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$.

Gilt nun umgekehrt $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$ für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ und jede surjektive Abbildung $\tau: H \rightarrow I$. Sei weiterhin für ein beliebiges $c \in S$

$\gamma: H \rightarrow S, h \mapsto c$ eine konstante Abbildung. Für ein festes $j \in H$ seien außerdem $\tau: H \rightarrow \{j\}, h \mapsto j$ und $\alpha: \{j\} \rightarrow S, j \mapsto c$ Abbildungen. Da $\gamma = \alpha \circ \tau$ und τ eine surjektive Abbildung ist gilt laut Voraussetzung für alle $h \in H$:

$$\Sigma(\gamma) = \Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha) = c = \gamma(h),$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Fundierungsaxiom folgt. \square

3.1 Summationsstrukturen und Monoide

Satz 3.9. *Sei (M, Σ) eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann lässt sich wie folgt das zu (M, Σ) zugehörige kommutative Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ konstruieren: Setze $0 = \Sigma(\emptyset \rightarrow M)$ und $+: M \times M \rightarrow M, (a, b) \mapsto \Sigma(\alpha)$, wobei $\alpha: [2] \rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}$.*

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass \mathbb{M} assoziativ ist. Dazu sei $a, b, c \in M$. Weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\alpha: [3] &\rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c\}, \\ \eta_1: [3] &\rightarrow [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2\}, \\ \eta_2: [3] &\rightarrow [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2\}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}\beta_1: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ \beta_2: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(i)}).\end{aligned}$$

Da β_1 eine Funktion von $[2] \rightarrow M$ ist kann $\Sigma(\beta_1)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\Sigma(\beta_1) = \beta_1(1) + \beta_1(2).$$

$\beta_1(1)$ ergibt sich aus folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned}\beta_1(1) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(1)}) \\ &= \Sigma(\alpha_{[2]}) \\ &= \Sigma_{i \in [2]}(\alpha(i)) \\ &= \alpha(1) + \alpha(2) = a + b.\end{aligned}$$

$\beta_1(2)$ kann dagegen wie folgt berechnet werden:

$$\beta_1(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{\{3\}}) = \alpha(3) = c$$

Insgesamt ist also $\Sigma(\beta_1) = (a + b) + c$.

Analog zu β_1 kann auch $\Sigma(\beta_2)$ wie folgt angegeben werden:

$$\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2).$$

$\beta_2(1)$ ist schlicht:

$$\beta_2(1) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(1)}) = \alpha(1) = a.$$

Für $\beta_2(2)$ ergibt sich:

$$\beta_2(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}}).$$

Da $\alpha_{|\{2,3\}}$ keine Abbildung von $[2] \rightarrow M$ ist bedarf es folgender Umbenennung:

$$\tau: [2] \rightarrow \{2,3\}, \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3\}.$$

Nun kann $\beta_2(2)$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \beta_2(2) &= \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}}) \\ &= \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau) \\ &= (\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau)(1) + (\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(2) + \alpha(3) \\ &= b + c. \end{aligned}$$

Also ist $\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2) = a + (b + c)$.

Nach Teilsommenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Als nächstes soll gezeigt werden, dass 0 tatsächlich das neutrale Element ist. Dazu sei $m \in M$ ein beliebiges Element aus M und weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} \alpha: \{1\} &\rightarrow \{m\}, 1 \mapsto m \\ \eta_1: \{1\} &\rightarrow [2], 1 \mapsto 1 \\ \eta_2: \{1\} &\rightarrow [2], 1 \mapsto 2 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} \beta_1: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ \beta_2: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(i)}). \end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \Sigma(\beta_1) &= \beta_1(1) + \beta_1(2) \text{ und} \\ \Sigma(\beta_2) &= \beta_2(1) + \beta_2(2). \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\beta_1(1) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(1)}) = \Sigma(\alpha_{|\{1\}}) = \alpha(1) = m \text{ und} \\ \beta_1(2) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\emptyset}) = 0.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\beta_2(1) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(1)}) = 0 \text{ und} \\ \beta_2(2) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(2)}) = \alpha(1) = m.\end{aligned}$$

Laut Teilsummenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

Um letztendlich die Kommutativität zu zeigen seien $a, b \in M$ zwei Elemente aus M und folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\alpha: [2] &\rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\} \text{ und} \\ \tau: [2] &\rightarrow [2], \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1\}.\end{aligned}$$

Laut Umbenennungssatz gilt:

$$\begin{aligned}a + b &= \alpha(1) + \alpha(2) \\ &= \Sigma(\alpha) \\ &= \Sigma(\alpha \circ \tau) \\ &= (\alpha \circ \tau)(1) + (\alpha \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(\tau(1)) + \alpha(\tau(2)) = \alpha(2) + \alpha(1) = b + a.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Definition 3.10. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist (M, Σ^{fin}) die zu \mathbb{M} gehörige finitäre Summationsstruktur, wobei für jede endliche Menge $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ und jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow M$

$$\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i_1) + \alpha(i_2) + \dots + \alpha(i_n).$$

Satz 3.10. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist (M, Σ^{fin}) eine finitäre Summationsstruktur.

Beweis. Sei $\alpha: \{i\} \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann ist $\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i)$. Es gilt demnach das Fundierungsaxiom.

Seien weiterhin $\alpha: I \rightarrow M$, $\eta: I \rightarrow A$ und $\beta: A \rightarrow M, a \mapsto \Sigma^{\text{fin}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen, wobei $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ und $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ endliche Mengen sind. Außerdem sei $n_k = |\{i_{k,l} \mid i_{k,l} \in \eta^{-1}(a_k) \subseteq I\}|$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma^{\text{fin}}(\beta) &= \beta(a_1) + \dots + \beta(a_m) \\ &= (\alpha(i_{1,1}) + \dots + \alpha(i_{1,n_1})) + \dots + (\alpha(i_{m,1}) + \dots + \alpha(i_{m,n_m})) \\ &= \alpha(i_1) + \dots + \alpha(i_n) \\ &= \Sigma^{\text{fin}}(\alpha).\end{aligned}$$

Also gilt auch das Teilsommenaxiom. \square

Definition 3.11. Ein kommutatives Monoid $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ heiße natürlich geordnet, falls $\leq_{\mathbb{M}} = \{(x, y) \in M^2 \mid \exists t \in M: x + t = y\}$ eine Ordnungsrelation definiert.

Satz 3.11. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist \mathbb{M} genau dann natürlich geordnet wenn gilt:

$$\forall x, s, t \in M: (x + s) + t = x \implies x + s = x. \quad (*)$$

Beweis. Ist $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid, so ist $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ stets reflexiv und transitiv. Denn für alle x existiert $\varepsilon \in M$ mit $x + \varepsilon = x$ und somit $x \leq_{\mathbb{M}} x$. Gilt außerdem $x \leq_{\mathbb{M}} y$ und $y \leq_{\mathbb{M}} z$, d.h. ist $x + t_1 = y$ und $y + t_2 = z$ für $t_1, t_2 \in M$. Dann ist $x + (t_1 + t_2) = z$, wobei $t_1 + t_2 \in M$, womit $x \leq_{\mathbb{M}} z$ gilt.

Also bleibt zu zeigen, dass $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ genau dann anti-symmetrisch ist wenn $(*)$ gilt. Sei dazu $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ anti-symmetrisch und sei außerdem $(x + s) + t = x$ für beliebige $x, s, t \in M$. Dann ist $x \leq_{\mathbb{M}} x + s$ und $x + s \leq_{\mathbb{M}} x$, also $x = x + s$.

Gilt umgekehrt $(*)$ und seien $x, y \in M$ mit $x \leq_{\mathbb{M}} y$ und $y \leq_{\mathbb{M}} x$. Das heißt es existiert $t_1, t_2 \in M$ mit $x + t_1 = y$ und $y + t_2 = x$. Also ist $(x + t_1) + t_2 = x$, woraus laut Voraussetzung $x + t_1 = x$, also $y = x$, folgt. \square

Beispiel 3.1. Beispiele für ein natürlich geordnetes kommutatives Monoid sind $(\mathbb{N}, +, 0)$ und $(\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0)$, wobei $x + \infty = \infty$.

Ein Gegenbeispiel ist $(\mathbb{Z}, +, 0)$, da $0 \leq 1$ und $1 \leq 0$ gilt.

Definition 3.12. Sei $(M, +, \varepsilon)$ ein Monoid. Ein Element $x \in M$ heißt idempotent, falls

$$x + x = x.$$

Ein Monoid heißt idempotent, falls jedes seiner Elemente idempotent ist.

Satz 3.12. Ein kommutatives Monoid \mathbb{M} ist genau dann idempotent, wenn die zu \mathbb{M} gehörige finitäre Summationsstruktur idempotent ist.

Beweis. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein idempotentes kommutatives Monoid. Sei weiterhin $\alpha: I \rightarrow M$ eine Abbildung mit endlicher Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_n\}$,

sodass $\forall 1 \leq j \leq n: \alpha(i_j) = m \in M$. Dann ist für alle $i \in I$

$$\begin{aligned}\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \alpha(i_j) \\ &= \sum_{j=1}^n m = m = \alpha(i).\end{aligned}$$

Sei umgekehrt (M, Σ^{fin}) eine idempotente Summationsstruktur und $m \in M$ ein Element aus der Grundmenge. Weiterhin sei $\alpha: [2] \rightarrow M, i \mapsto m$ eine konstante Abbildung. Es gilt

$$m + m = \alpha(1) + \alpha(2) = \Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = m.$$

□

3.2 Summation und Inzidenzstrukturen

Definition 3.13. Eine Matrix über einer Menge M (auch M -wertige Matrix) ist definiert als Tripel (P, B, α) bestehend aus den Mengen P , B und einer Abbildung $\alpha: P \times B \rightarrow M$.

Wir sagen auch, dass α eine $(P \times B)$ -Matrix über M ist.

Definition 3.14. Eine M -wertige Matrix $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ wird auch Fuzzy-Inzidenz-struktur genannt. Ist $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur, so nennt man \mathcal{I} auch eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über \mathbb{M} . Sind P und B endlich, so ist \mathcal{I} finitär.

Definition 3.15. Gegeben sei eine M -wertige Matrix $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$. Für jedes $p \in P$ heiße die Abbildung $\alpha(p, \cdot): B \rightarrow M, b \mapsto \alpha(p, b)$ die p -te Zeile von \mathcal{I} bzw. α . $\text{row}_\alpha: P \rightarrow M^B, p \mapsto \alpha(p, \cdot)$ ist die Row-Map für \mathcal{I} bzw. α .

Analog wird für jedes $b \in B$ die Abbildung $\alpha(\cdot, b): P \rightarrow M, p \mapsto \alpha(p, b)$ als die b -te Spalte von \mathcal{I} bzw. α bezeichnet. Weiterhin ist $\text{col}_\alpha: B \rightarrow M^P, b \mapsto \alpha(\cdot, b)$ die Column-Map für \mathcal{I} bzw. α .

Definition 3.16. Sei $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ eine M -wertige Fuzzy-Inzidenzstruktur über $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$. Dann ist die Zeilensumme von \mathcal{I} bzw. α

$$\Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \alpha(p, b).$$

Analog ist die Spaltensumme von \mathcal{I} bzw. α definiert als

$$\Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{p \in P} \alpha(p, b).$$

Definition 3.17. Eine Fuzzy-Inzidenzstruktur \mathcal{I} über \mathbb{M} wird als taktische Fuzzy-Konfiguration über \mathbb{M} bezeichnet, falls $r_{\mathcal{I}}$ und $k_{\mathcal{I}}$ existieren mit

- $\forall p \in P: \Sigma(\alpha(p, \cdot)) = r_{\mathcal{I}}$ und
- $\forall b \in B: \Sigma(\alpha(\cdot, b)) = k_{\mathcal{I}}$.

Satz 3.13 (Satz der doppelten Abzählung). *Sei $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ eine [finitäre] Fuzzy-Inzidenzstruktur über einer [finitären] Summationsstruktur $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$. Dann gilt:*

$$\sum_{p \in P} \sum_{b \in B} \alpha(p, b) = \Sigma(\alpha) = \sum_{b \in B} \sum_{p \in P} \alpha(p, b).$$

Beweis. Es seien $\eta: P \times B \rightarrow P, (p, b) \mapsto p$ und $\beta: P \rightarrow M, p \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(p)})$ Abbildungen. Desweiteren sei eine bijektive Abbildung $\tau_p: B \rightarrow \{p\} \times B, b \mapsto (p, b)$ gegeben. Für ein $p \in P$ ist

$$\begin{aligned} \beta(p) &= \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(p)}) \\ &= \Sigma(\alpha|_{\{p\} \times B}) \\ &= \Sigma(\alpha|_{\{p\} \times B} \circ \tau_p) \\ &= \Sigma(\alpha(p, \cdot)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mithilfe des Teilsommenaxioms:

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} \sum_{b \in B} \alpha(p, b) &= \sum_{p \in P} \Sigma(\alpha(p, \cdot)) \\ &= \sum_{p \in P} \beta(p) \\ &= \Sigma(\alpha). \end{aligned}$$

Analog kann ebenfalls $\sum_{b \in B} \sum_{p \in P} \alpha(p, b) = \Sigma(\alpha)$ gezeigt werden. \square

Definition 3.18. Sei $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine Inzidenzstruktur. Sei weiterhin

$$\alpha_{\mathcal{I}}: P \times B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, (p, b) \mapsto \begin{cases} 1 & p I b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(P, B, \alpha_{\mathcal{I}})$ eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma)$, wobei Σ die erweiterte normale Summation darstellt.

Satz 3.14. *Eine endliche Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, B, I)$ ist genau dann eine taktische Konfiguration mit den Parametern $(|P|, r, |B|, k)$, wenn $\mathcal{I}' = (P, B, \alpha_{\mathcal{I}})$ eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern $(|P|, r_{\mathcal{I}}, |B|, k_{\mathcal{I}})$ über der natürlichen Summationsstruktur $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma)$ ist. Insbesondere ist $r = r_{\mathcal{I}}$ und $k = k_{\mathcal{I}}$.*

Beweis. Sei $p \in P$ ein beliebiges Element in P . Dann gilt

$$r_{\mathcal{I}} = \Sigma(\alpha_{\mathcal{I}}(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \alpha_{\mathcal{I}}(p, b) = \sum_{b \in pI} 1 = |pI| = r.$$

Ein ähnliches Argument kann auch für die Blöcke verwendet werden, wodurch die Behauptung bewiesen ist. \square

Satz 3.15. *Ist $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern $(|P|, r_{\mathcal{I}}, |B|, k_{\mathcal{I}})$ über der Summationsstruktur $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$, so gilt:*

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

Beweis. Mithilfe der doppelten Abzählung ergibt sich:

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{p \in P} \Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

□

4 Targoide und vollständige Verbände

Definition 4.1. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat. Zu einer Teilmenge $X \subseteq P$ heiße $t \in P$ Target von X bzgl. \mathbb{P} falls $\forall x \in X: x R t$.

Analog heißt $s \in X$ Source von X bzgl. \mathbb{P} falls $\forall x \in X: s R x$.

Definition 4.2. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat und $X \subseteq P$. Dann ist t ein essentielles Target von X bzgl. \mathbb{P} , falls es ein Target von X ist und weiterhin gilt:

$$\forall u \in P: ((\forall x \in X: x R u) \implies t R u),$$

d.h. wenn $u \in P$ ebenfalls Target von X ist, dann gilt $t R u$.

Analog dazu ist der Begriff essentielle Source definiert.

Definition 4.3. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt Targoid falls jede Teilmenge $X \subseteq P$ ein essentielles Target besitzt (Targoid-Eigenschaft).

Analog dazu heißt ein binäres Relat Sourcoid falls jede Teilmenge $X \subseteq P$ eine essentielle Source besitzt (Sourcoid-Eigenschaft).

Definition 4.4. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat, so ist $\mathbb{P}^{-1} = (P, R^{-1})$ mit $R^{-1} = \{(q, p) \in R \mid p R q\}$ das dazu duale binäre Relat bzw. sein Opposite.

Satz 4.1. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ ist ein Targoid genau dann wenn \mathbb{P}^{-1} ein Sourcoid ist.

Beweis. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein Targoid und $X \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge. Ist $t \in P$ ein Target von X bzgl. \mathbb{P} , dann gilt $x R t$ für alle $x \in X$ also auch $t R^{-1} x$. Das heißt die Targets von X bzgl. \mathbb{P} sind genau die Sources von X bzgl. \mathbb{P}^{-1} .

Sei nun $t \in P$ ein essentielles Target von X bzgl. \mathbb{P} . Das heißt für alle weiteren Targets $u \in P$ bzgl. \mathbb{P} gilt $t R u$, also $u R^{-1} t$. Da alle Targets von X bzgl. \mathbb{P} Sources von X bzgl. \mathbb{P}^{-1} sind, ist t eine essentielle Source von X bzgl. \mathbb{P}^{-1} . \square

Lemma 4.1. Sei (P, R) ein Targoid mit nichtleerer Grundmenge P . Dann existiert ein Element $p \in P$ für das gilt: $\forall q \in P: p R q$. Das heißt insbesondere, dass p Source von jeder Teilmenge in P ist.

Beweis. Sei $X = \emptyset \subseteq P$. Dann ist die Menge aller Targets von X gleich der Menge $P \neq \emptyset$. Da (P, R) ein Targoid ist, gibt es zu X ein essentielles Target t . Das heißt, es gilt $t R p$ für alle Targets p von X , was aber allen Elementen in P entspricht. \square

Satz 4.2. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ ist ein Targoid genau dann wenn \mathbb{P} ein Sourcoid ist.

Beweis. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein Targoid und $X \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge von P . Sei weiterhin $S_X = \{s \in P \mid s \text{ ist Source von } X\} \subseteq P$. S_X ist wegen Lemma 4.1 nicht leer. Da \mathbb{P} ein Targoid ist, existiert ein essentielles Target t von S_X . Für alle $x \in X$ gilt: x ist Target von S_X . Da t ein essentielles Target ist gilt aber auch $t R x$ für alle $x \in X$. Das heißt, dass t eine Source von X ist. Sei weiterhin



Abbildung 2: Veranschaulichung von Satz 4.2

$s \in P$ eine Source von X . Dann ist auch $s \in S_X$ und da t ein Target von S_X gilt $s R t$. Also ist t eine essentielle Source von X .

Sei umgekehrt \mathbb{P} ein Sourcoid. Dann ist \mathbb{P}^{-1} ein Targoid und deshalb wie soeben gezeigt ein Sourcoid. Also ist $(\mathbb{P}^{-1})^{-1} = \mathbb{P}$ ein Targoid. \square

4.1 vollständige Verbände und Summation

Definition 4.5. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt vollständiger Verband (geordnetes Targoid), falls \mathbb{P} sowohl Ordnung als auch Targoid bzw. Sourcoid ist.

Satz 4.3. Ist (P, R) ein reflexives binäres Relat, dann ist p ein essentielles Target von $\{p\}$.

Beweis. Da $(p, p) \in R$ ist p Target von $\{p\}$. Sei t ein beliebiges Target von $\{p\}$. Dann gilt auch $p R t$, womit bewiesen wäre, dass p ein essentielles Target ist. \square

Satz 4.4. Ist (P, R) anti-symmetrisch, so existiert zu jeder Teilmenge nur höchstens ein essentielles Target.

Beweis. Angenommen für eine Teilmenge von P existieren zwei verschiedene essentielle Targets t_1 und t_2 . Dann gilt aber auch $t_1 R t_2$ und $t_2 R t_1$ und wegen der Anti-Symmetrie auch $t_1 = t_2$. Widerspruch. \square

Definition 4.6. Sei (P, R) ein binäres Relat und sei $\alpha: I \rightarrow P$ eine Abbildung. Dann heiße $t \in P$ [essentielles] Target von α in (P, R) , falls t ein [essentielles] Target von $\alpha(I)$ ist.



Abbildung 3: Veranschaulichung von Lemma 4.2

Lemma 4.2. Sei (P, R) ein transitives binäres Relat. Dann gilt: Sind $\alpha: I \rightarrow P$ und $\eta: I \rightarrow A$ Abbildungen derart, dass für alle $a \in A$ zu $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ stets ein essentielles Target t_a existiert und ein $t \in P$ existiert, welches ein essentielles Target von α ist, so ist t auch essentielles Target von $\beta: A \rightarrow P, a \mapsto t_a$.

Beweis. Da t ein Target von α ist, ist t auch gleichzeitig Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ für alle $a \in A$. Da t_a das essentielle Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ ist, ist auch $t_a R t$. Das bedeutet, dass für alle $a \in A$ gilt: $\beta(a) R t$, womit gezeigt wäre, dass t ein Target von β in (P, R) ist.

Sei $u \in P$ ein weiteres Target von β in (P, R) . Das heißt $\forall a \in A: t_a R u$. Für jedes $a \in A$ ist t_a aber auch Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$, weshalb $\forall i \in \eta^{-1}(a): \alpha(i) R t_a$. Da (P, R) transitiv ist gilt damit $\forall a \in A \forall i \in \eta^{-1}(a): \alpha(i) R u$ und somit $\forall i \in I: \alpha(i) R u$, d.h. u ist Target von α in (P, R) . Da t ein essentielles Target von α in (P, R) ist, gilt $t R u$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Definition 4.7. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein vollständiger Verband. Dann ist $\sup_{\mathbb{P}}$ eine Klassenabbildung, die jeder Abbildung $\alpha: I \rightarrow P$ das essentielle Target von α in \mathbb{P} zuordnet. $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$ wird auch als das Supremum von α bezeichnet.

Analog ist die Klassenabbildung $\inf_{\mathbb{P}}$ definiert, die jeder Abbildung $\alpha: I \rightarrow P$ die essentielle Source von α in \mathbb{P} zuordnet. $\inf_{\mathbb{P}}(\alpha)$ wird auch als das Infimum von α bezeichnet.

Satz 4.5. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ ein vollständiger Verband, so ist $(P, \sup_{\mathbb{P}})$ eine idempotente Summationsstruktur.

Beweis. Sei $\alpha: \{i\} \rightarrow P$ eine Abbildung. Wegen der Reflexivität von (P, R) besitzt α laut Satz 4.4 genau ein essentielles Target, welches laut Satz 4.3 $\alpha(i)$ ist. Also ist $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = \alpha(i)$ und das Fundierungsaxiom gilt.

Seien weiterhin $\alpha: I \rightarrow P$, $\eta: I \rightarrow A$ und $\beta: A \rightarrow P, a \mapsto \sup_{\mathbb{P}}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Aufgrund der Antisymmetrie besitzt α genau ein essentielles Target $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$ in (P, R) (Satz 4.4). Aus dem selben Grund besitzt $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ für alle $a \in A$ ein essentielles Target $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)}) = \beta(a)$. Durch das soeben bewiesenen Lemma 4.2 ergibt sich somit, dass das essentielle Target von β gleich dem

essentiellen Target von α ist. Damit ist $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = \sup_{\mathbb{P}}(\beta)$, womit gezeigt ist, dass auch das Teilsommenaxiom erfüllt ist.

Zu zeigen bleibt also noch die Idempotenz. Dazu sei $\alpha: I \rightarrow P, i \mapsto p$ eine konstante Abbildung. $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$ ist das (eindeutig bestimmte) essentielle Target von $\alpha(I) = \{p\}$. Dies entspricht laut Satz 4.3 p selbst, also gilt für alle $i \in I$: $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = p = \alpha(i)$. □

Satz 4.6. *Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine idempotente finitäre Summationsstruktur und $+$ die durch \mathbb{S} induzierte Addition, so gilt für $\leq_{\mathbb{S}} = \{(x, y) \in S^2 \mid \exists s \in S: x + s = y\}$ stets, dass $(S, \leq_{\mathbb{S}})$ ein vollständiger Verband ist.*

Beweis. Es gilt $x + 0_{\mathbb{S}} = x$ und damit $x \leq_{\mathbb{S}} x$ für alle $x \in X$. Ist außerdem $x \leq_{\mathbb{S}} y$ und $y \leq_{\mathbb{S}} z$ für $x, y, z \in S$, so gibt es $s_1, s_2 \in S$ mit $y = x + s_1$ und $z = y + s_2$ und damit auch $z = x + (s_1 + s_2)$, also $x \leq_{\mathbb{S}} z$. Weiterhin ist $(S, +, 0)$ laut Satz 3.12 idempotent, da \mathbb{S} idempotent ist. Seien $x, y \in S$ und gelte $x \leq_{\mathbb{S}} y$ und $y \leq_{\mathbb{S}} x$, d.h. es existieren $s_1, s_2 \in S$ mit $x + s_1 = y$ und $y + s_2 = x$. Dann gilt:

$$y = x + s_1 = x + (x + s_1) = x + y = y + x = y + (y + s_2) = y + s_2 = x.$$

Zu zeigen bleibt also noch, dass jede Teilmenge von S ein essentielles Target besitzt. Sei also $X \subseteq S$ eine Teilmenge von S und $t = \max(X)$. Dann ist t das essentielle Target von X und die Aussage ist bewiesen. □

5 Summoide

Definition 5.1. Ein Summoid ist definiert als Quadrupel $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$, bestehend aus einer Summationsstruktur $\mathcal{S}_{\text{Sum}} = (S, \Sigma)$ und einem Monoid $\mathcal{S}_{\text{Mult}} = (S, *, \varepsilon)$, sodass für ein Element $s \in S$ und eine Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ folgende Distributivgesetze gelten:

$$\begin{aligned} s * \Sigma(\alpha) &= \Sigma(s * \alpha) \text{ mit } s * \alpha: I \rightarrow S, i \mapsto s * \alpha(i) \\ \Sigma(\alpha) * s &= \Sigma(\alpha * s) \text{ mit } \alpha * s: I \rightarrow S, i \mapsto \alpha(i) * s \end{aligned}$$

Ein Summoid \mathcal{S} heißt *finitär* wenn \mathcal{S}_{Sum} eine finitäre Summationsstruktur ist.

Beispiel 5.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathcal{S}_{\Omega} = (\mathcal{P}(\Omega), \bigcup, \cap, \Omega)$ das sogenannte Potenzmengensummoid.

Beispiel 5.2. Das Quadrupel $\mathcal{S}_{\text{Real}} = ([0, \infty], \Sigma, *, 1)$ ist das reelle Summoid, wobei $\Sigma(\alpha) = \sup_{J \subseteq_{\text{fin}} I} (\Sigma(\alpha|_J))$ für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$ bzgl. der Ordnung \leq mit $x \leq y \iff \exists t \in [0, \infty]: x + t = y$ und \cdot die übliche Multiplikation darstellt mit $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$.

Beispiel 5.3. Das Quadrupel $\mathcal{S}_{\text{trop}} = ([0, \infty], \Sigma_{\text{trop}}, \cdot_{\text{trop}}, 1_{\text{trop}})$ ist das reelle tropische Summoid, wobei für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$

$$\Sigma_{\text{trop}}(\alpha) = \inf_{([0, \infty], \leq)} \alpha$$

und für $x, y \in [0, \infty]$

$$x \cdot_{\text{trop}} y = \begin{cases} x + y & \text{falls } \infty \notin \{x, y\} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $1_{\text{trop}} = 0$.

Achtung: $0_{\text{trop}} = \Sigma_{\text{trop}}(\emptyset \rightarrow [0, \infty]) = \infty$.

Beispiel 5.4. Sei P eine Menge. Dann ist $\text{Rel}_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$ mit $R * S = \{(p, q) \in P \times P \mid \exists t \in P: p R t \wedge t S q\}$ sowie $\Delta_P = \{(p, p) \mid p \in P\}$ (die diagonale Gleichheitsrelation) ein Summoid, welches das Relationensummoid zu P genannt wird.

Satz 5.1. Das Relationensummoid $\text{Rel}_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$ aus Beispiel 5.4 ist ein Summoid.

Beweis. An dieser Stelle soll nur die Linksdistributivität gezeigt werden. Seien dazu $R \in \mathcal{P}(P \times P)$ und $S: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}(P \times P)$ eine Abbildung für eine beliebige Indexmenge Λ . Für alle $(p, q) \in P \times P$ gilt:

$$\begin{aligned} (p, q) \in R * \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} &\iff \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge (t, q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \\ &\iff \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge \exists \lambda \in \Lambda: (t, q) \in S_{\lambda} \\ &\iff \exists \lambda \in \Lambda \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge (t, q) \in S_{\lambda} \\ &\iff (p, q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R * S_{\lambda}. \end{aligned}$$

□

Definition 5.2. Wir setzen $0_S = 0_{S_{\text{Sum}}}$.

Satz 5.2. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann gilt für alle $s \in S$

$$s * 0_S = 0_S = 0_S * s.$$

Beweis. Für $\alpha: \emptyset \rightarrow S$ und $s \in S$ ist

$$s * 0_S = s * \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) = \sum_{i \in \emptyset} s * \alpha(i) = 0_S = \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) * s = 0_S * s.$$

□

Definition 5.3. Ein Summoid \mathcal{S} heißt kommutativ falls $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ kommutativ ist.

Definition 5.4. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann wird $\text{End}(\mathbb{S}) = (\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$ als [finitäres] Endomorphismen-Summoid bezeichnet, wobei $\bar{\Sigma}(\varphi)$ für eine Abbildung $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$ definiert ist als

$$\bar{\Sigma}(\varphi): S \rightarrow S, s \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(s).$$

Ist \mathcal{S} ein Summoid, so ist $\text{End}_{\mathcal{S}} = \text{End}(\mathcal{S}_{\text{Sum}})$.

Satz 5.3. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann ist das Endomorphismen-Summoid $\text{End}(\mathbb{S}) = (\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$ ein Summoid.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass $(\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur ist. Laut Satz 3.5 ist bewiesen, dass $(S^S, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur darstellt, wodurch noch zu zeigen bleibt, dass für jede beliebige Abbildung $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$ gilt: $\bar{\Sigma}(\varphi) \in \text{End}_{\mathbb{S}}$. Sei dazu $\alpha: I \rightarrow S$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}(\varphi))(\Sigma(\alpha)) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(\Sigma(\alpha)) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \Sigma(\varphi_{\lambda} \circ \alpha) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \varphi_{\lambda}(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i \in I} (\bar{\Sigma}(\varphi))(\alpha(i)) \\ &= \Sigma((\bar{\Sigma}(\varphi)) \circ \alpha). \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht ist $(\text{End}_{\mathbb{S}}, \circ, \text{id}_S)$ ein Monoid, sodass nur noch die Distributivgesetze gezeigt werden müssen. Seien dazu $\psi \in \text{End}_{\mathbb{S}}$, $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$. Dann gilt für alle $s \in S$

$$\psi((\bar{\Sigma}(\varphi))(s)) = \psi\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(s)\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi \circ \varphi_{\lambda})(s) = (\bar{\Sigma}(\psi \circ \varphi))(s)$$

und

$$(\bar{\Sigma}(\varphi))(\psi(s)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\psi(s)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda \circ \psi)(s) = (\bar{\Sigma}(\varphi \circ \psi))(s).$$

□

Definition 5.5. Seien $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ und $\mathcal{S}' = (S', \Sigma', *', \varepsilon')$ Summoide. Dann heißt eine Abbildung φ Homomorphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{S}' , falls φ ein Homomorphismus von \mathcal{S}_{Sum} nach $\mathcal{S}'_{\text{Sum}}$ und ein Homomorphismus von $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ nach $\mathcal{S}'_{\text{Mult}}$ ist.

Ist φ zudem bijektiv, so heißt φ Isomorphismus.

Satz 5.4. $\mathcal{S} = ([0, 1], \inf, \cdot, 1)$ und $\mathcal{S}' = ([0, \infty], \sup, +, 0)$ sind isomorph.

Beweis. Sei $\varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, 1], x \mapsto 2^{-x}$, wobei $2^{-\infty} = 0$. φ ist bijektiv und es gilt für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$:

$$\varphi(\sup(\alpha)) = \inf(\varphi \circ \alpha).$$

Außerdem gilt für alle $a, b \in [0, \infty]$:

$$\varphi(a + b) = 2^{-(a+b)} = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

□

Satz 5.5. Ist $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein [finitäres] Summoid, so ist die Abbildung $\lambda: S \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}, s \mapsto \lambda_s$ mit $\lambda_s: S \rightarrow S, x \mapsto s * x$ ein injektiver Homomorphismus von \mathcal{S} nach $\text{End}_{\mathcal{S}} = (\text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$.

Beweis. Zunächst muss gezeigt werden, dass λ wohldefiniert ist, d.h. dass für alle $s \in S$ gilt: $\lambda_s \in \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$. Sei dazu $\alpha: I \rightarrow S$ eine Abbildung und $s \in S$. Dann ist

$$\lambda_s(\Sigma(\alpha)) = s * \Sigma(\alpha) = \Sigma(s * \alpha) = \Sigma(\lambda_s \circ \alpha).$$

Sei nun $\alpha: I \rightarrow S$ eine Abbildung mit [endlicher] Indexmenge I und $s \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\lambda(\Sigma(\alpha)))(s) &= \lambda_{\Sigma(\alpha)}(s) \\ &= \Sigma(\alpha) * s \\ &= \Sigma(\alpha * s) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha * s)(i) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha(i) * s) \\ &= \sum_{i \in I} ((\lambda \circ \alpha)(i))(s) = (\bar{\Sigma}(\lambda \circ \alpha))(s). \end{aligned}$$

Seien nun $s_1, s_2, s \in S$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\lambda(s_1 * s_2))(s) &= (s_1 * s_2) * s \\ &= s_1 * (s_2 * s) \\ &= s_1 * \lambda_{s_2}(s) \\ &= \lambda_{s_1}(\lambda_{s_2}(s)) = (\lambda(s_1) \circ \lambda(s_2))(s). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass λ ein Homomorphismus von \mathcal{S} nach $\text{End}_{\mathcal{S}}$ ist.

Um noch schließlich die Injektivität zu zeigen seien $s, t \in S$ und $\lambda(s) = \lambda(t)$. Dann gilt

$$s = s * \varepsilon = \lambda_s(\varepsilon) = \lambda_t(\varepsilon) = t * \varepsilon = t.$$

□

Beispiel 5.5. Sei $\text{Nat} = (\mathbb{N}, \Sigma, \cdot, 1)$ das natürliche Summoid. Dann ist $\text{End}(\text{Nat}_{\text{Sum}}) = (\text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_{\mathbb{N}})$ das zur natürlichen Summationsstruktur gehörige Endomorphismen-Summoid.

Sei $\mathbb{1}^{[n]}: [n] \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $\varphi \in \text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}$:

$$\varphi(n) = \varphi(\Sigma(\mathbb{1}^{[n]})) = \Sigma(\varphi \circ \mathbb{1}^{[n]}) = \sum_{i \in [n]} \varphi(1) = (\varphi(1)) \cdot n.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\lambda_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto k \cdot n$ stets ein Endomorphismus von Nat . Denn für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow \mathbb{N}$ gilt stets:

$$\lambda_k(\Sigma(\alpha)) = k \cdot \sum_{i \in I} \alpha(i) = \sum_{i \in I} k \cdot \alpha(i) = \sum \lambda_k(\alpha).$$

Damit ist $\text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}, k \mapsto \lambda_k$ ein Isomorphismus von Nat nach $\text{End}(\text{Nat}_{\text{Sum}})$.

5.1 Produktsummen

Definition 5.6. Ein Summoid \mathcal{S} heißt Join-Summoid falls \mathcal{S}_{Sum} idempotent ist. Für eine beliebige Abbildung wird die Summe der Abbildung auch als der Join der Abbildung in \mathcal{S} bezeichnet.

Definition 5.7. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid und (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow S$ ist die Produktsumme von α definiert als

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \Pi(\alpha|_J),$$

Definition 5.8. Sei $(I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$ eine Mengenfamilie für eine endliche Menge H und eine beliebige Menge I . Dann ist

$$\bigtimes_{h \in H} I_h = \{\gamma: H \rightarrow \bigcup_{h \in H} I_h \mid \forall h \in H: \gamma(h) \in I_h\}.$$

Beispiel 5.6. Seien $H = \{1, 2\}$ und $I = \{a, b, c, d\}$ Mengen und $F \in \mathcal{P}(I)^H$ mit $F = (\{a\}, \{b, c\})$ eine Familie. Dann ist

$$\begin{aligned} \bigtimes_{h \in H} F &= \{\gamma_1: H \rightarrow \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}, \\ &\quad \gamma_2: H \rightarrow \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto c\}\}. \end{aligned}$$

Satz 5.6. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid. Dann gilt für jede endliche Menge H und jede beliebige Menge I sowie für jede beliebige Mengenfamilie $I_h = (I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$ und jede Familie $(\alpha_h)_{h \in H}$ von Abbildungen $\alpha_h: I_h \rightarrow S$ stets:

$$\prod_{h \in H} \sum_{i_h \in I_h} \alpha_h(i_h) = \sum_{(i_h)_{h \in H} \in \times_{h \in H} I_h} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h),$$

wobei (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

Beweis. Sei $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{h \in H} \sum_{i_h \in I_h} \alpha_h(i_h) &= \sum_{i_1 \in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2 \in I_2} \alpha_2(i_2) * \dots * \sum_{i_n \in I_n} \alpha_n(i_n) \\ &= \sum_{i_n \in I_n} \left(\dots \left(\sum_{i_2 \in I_2} \left(\sum_{i_1 \in I_1} \alpha_1(i_1) \right) * \alpha_2(i_2) \right) \dots * \alpha_n(i_n) \right) \\ &= \sum_{i_n \in I_n} \dots \sum_{i_2 \in I_2} \sum_{i_1 \in I_1} \left(\alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) * \dots * \alpha_n(i_n) \right) \\ &= \sum_{(i_n, \dots, i_1) \in I_n \times \dots \times I_1} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h) \\ &= \sum_{(i_h)_{h \in H} \in \times_{h \in H} I_h} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h). \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.7.

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2 \in I_2} \alpha_2(i_2) = \sum_{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2} \left(\alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) \right)$$

Lemma 5.1. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid und sei (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Weiterhin seien $\alpha: I \rightarrow S$, $\eta: I \rightarrow A$ und $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Dann gilt:

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J).$$

Beweis. Laut Definition von SOP gilt zunächst

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \Pi(\beta|_B).$$

Für $B \subseteq_{\text{fin}} A$ gilt

$$\begin{aligned}
\Pi(\beta|_B) &= \prod_{b \in B} \beta(b) \\
&= \prod_{b \in B} \text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha|_{\eta^{-1}(b)}) \\
&= \prod_{b \in B} \sum_{J_b \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(b)} \Pi(\alpha|_{J_b}) \\
&= \sum_{(J_b)_{b \in B} \in \times_{b \in B} \mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \prod_{b \in B} \Pi(\alpha|_{J_b}),
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichung aus Satz 5.6 ergibt. Für alle $a, c \in B$ mit $a \neq c$ ist $J_a \cap J_c = \emptyset$, da $\eta^{-1}(a) \cap \eta^{-1}(c) = \emptyset$, weshalb laut dem Teilsommenaxiom für (S, Π) gilt

$$\prod_{b \in B} \prod_{j_b \in J_b} \alpha(j_b) = \prod_{i \in \bigcup_{b \in B} J_b} \alpha(i).$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\Pi(\beta|_B) = \sum_{(J_b)_{b \in B} \in \times_{b \in B} \mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \Pi(\alpha|_{\bigcup_{b \in B} J_b}) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J).$$

□

Satz 5.7. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Join-Summoid, (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ gehörige finitäre Summationsstruktur und $(S, +, \varepsilon)$ das zu \mathcal{S}_{Sum} gehörige kommutative Monoid, sodass $0_{\mathcal{S}} = \varepsilon$. Dann ist $(S, \text{SOP}_{\mathcal{S}})$ eine Summationsstruktur.

Beweis. Sei $\alpha: \{i\} \rightarrow S$ eine Abbildung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) &= \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \{i\}} \Pi(\alpha|_J) \\
&= \Pi(\alpha|_{\{i\}}) + \Pi(\alpha|_{\emptyset}) \\
&= \alpha(i) + \varepsilon \\
&= \alpha(i) + 0_{\mathcal{S}} \\
&= \alpha(i).
\end{aligned}$$

Damit ist das Fundierungsaxiom gezeigt.

Seien nun $\alpha: I \rightarrow S$, $\eta: I \rightarrow A$ sowie $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Ferner sei $H = \{(B, J) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A) \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(I) \mid J \subseteq \eta^{-1}(B)\}$ eine Menge. Es gilt laut Lemma 5.1

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J) = \sum_{(B, J) \in H} \Pi(\alpha|_J).$$

Seien weiterhin $\varphi: \mathcal{P}_{\text{fin}}(I) \rightarrow S, J \mapsto \Pi(\alpha|_J)$ und $\tau: H \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(I), (J, B) \mapsto J$ Abbildungen, wobei τ surjektiv ist. Es gilt

$$\Sigma(\varphi) = \sum_{J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I)} \varphi(J) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \Pi(\alpha|_J) = \text{SOP}_S(\alpha)$$

und außerdem

$$\Sigma(\varphi \circ \tau) = \sum_{(B, J) \in H} \varphi(\tau(B, J)) = \sum_{(B, J) \in H} \varphi(J) = \sum_{(B, J) \in H} \Pi_{\alpha|_J} = \text{SOP}_S(\beta).$$

Da \mathcal{S}_{Sum} idempotent ist gilt laut Satz 3.8 $\Sigma(\varphi) = \Sigma(\varphi \circ \tau)$ und damit schließlich $\text{SOP}_S(\alpha) = \text{SOP}_S(\beta)$, womit auch das Teilsummenaxiom bewiesen wäre. \square

Beispiel 5.8. Es ist $([0, \infty], \sup, +, 0)$ ein Summoid. Nach dem soeben bewiesenen Satz, ist also auch $([0, \infty], \Sigma, \cdot, 1)$ ein Summoid, wobei für $\alpha: I \rightarrow S$

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) = \sup_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \left(\sum_{i \in J}^{\text{fin}} \alpha(i) \right),$$

wobei (S, Σ^{fin}) die zu $([0, \infty], +, 0)$ gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

6 Łukasiewicz-Norm und -Monoid

Definition 6.1. Die Łukasiewicz-Norm ist eine innere zweistellige Verknüpfung $*$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $(x, y) \mapsto \max(x + y - 1, 0)$.

Das Łukasiewicz-Monoid ist definiert als $\mathbb{L} = ([0, 1], *, 1)$.

Satz 6.1. Sei $*$ die Łukasiewicz-Norm. Dann gilt für beliebige Tupel $(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1}$:

$$x_0 * x_1 * \dots * x_n = \max((x_0 + x_1 + \dots + x_n) - n, 0).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt aus der Definition der Łukasiewicz-Norm. Sei also die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bereits gezeigt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x_0 * \dots * x_n) * x_{n+1} &= \max((x_0 + x_1 + \dots + x_n) - n, 0) * x_{n+1} \\ &= \max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n, 0) + x_{n+1} - 1, 0) \\ &= \max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\ &= \max((x_0 + \dots + x_n + x_{n+1}) - (n + 1), 0) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus folgender Überlegung: Gilt $(x_0 + \dots + x_n) - n \geq 0$, so folgt die Behauptung sofort.

Ist dagegen $(x_0 + \dots + x_n) - n < 0$ so gilt

$$\begin{aligned} &\max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\ &= \max(x_{n+1} - 1, 0) = 0 \\ &= \max((x_0 + \dots + x_n + x_{n+1}) - (n + 1), 0), \end{aligned}$$

da $x_{n+1} \in [0, 1]$ und somit $x_{n+1} - 1 \leq 0$. □

Satz 6.2. Das Łukasiewicz-Monoid ist ein Monoid.

Beweis. Als erstes soll die Assoziativität gezeigt werden. Für $x, y, z \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \max((x + y) + z - 2, 0) \\ &= \max((x + (y + z)) - 2, 0) = x * (y * z). \end{aligned}$$

1 ist das neutrale Element, da für alle $x \in [0, 1]$

$$1 * x = \max(1 + x - 1, 0) = \max(x, 0) = x = \max(x + 1 - 1, 0) = x * 1 \quad \square$$

Definition 6.2. Seien $a, b \in [0, 1]$. Es gelten folgende Schreibweisen:

- $\bar{a} = 1 - a$
- $a \vee b = \max(a, b)$
- $a \wedge b = \min(a, b)$

Der Operator $\bar{\cdot}$ heißt Fuzzy-Negation und ist involutorisch (selbstinvers).

Satz 6.3. Sei $*$ die Lukasiewicz-Norm und $a, b \in [0, 1]$.

Dann gilt $a * b = \overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0$.

Beweis.

$$\overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0 = (1 - (1 - a) - (1 - b)) \vee 0 = ((a + b) - 1) \vee 0 = a * b.$$

□

Satz 6.4. Sei $a, b \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = a \wedge b.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \geq b$. Dann ist

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = 1 - ((1 - a) \vee (1 - b)) = 1 - (1 - b) = b = a \wedge b.$$

□

Satz 6.5. Die Fuzzy-Negation ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den Ordnungen $([0, 1], \leq)$ und $([0, 1], \geq)$. Die Fuzzy-Negation ist deshalb ein Antiautomorphismus.

Beweis. Sei $a, b \in [0, 1]$ mit $a \leq b$. Dann gilt

$$a \leq b \iff -a \geq -b \iff 1 - a \geq 1 - b \iff \bar{a} \geq \bar{b}.$$

□

Satz 6.6. Sei $\mathbb{L} = ([0, 1], *, 1)$ das Lukasiewicz-Monoid, $([0, 1], \Pi)$ die zu \mathbb{L} gehörige finitäre Summationsstruktur und $([0, 1], \Sigma)$ die zu $([0, 1], +, 0)$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Dann gilt für jede Abbildung $\alpha: I \rightarrow [0, 1]$ mit endlicher Indexmenge

$$\Pi(\alpha) = \overline{\left(\sum_{i \in I} \overline{\alpha(i)}\right)} \vee 0$$

Beweis. Es gilt für $I = \{i_1, \dots, i_n\}$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\sum_{i \in I} \overline{\alpha(i)}\right)} \vee 0 &= (1 - ((1 - \alpha(1)) + \dots + (1 - \alpha(n)))) \vee 0 \\ &= (1 - (n - (\alpha(1) + \dots + \alpha(n)))) \vee 0 \\ &= ((\alpha(1) + \dots + \alpha(n)) - (n - 1)) \vee 0 \\ &= \alpha(1) * \dots * \alpha(n) \\ &= \Pi(\alpha) \end{aligned}$$

□

Definition 6.3. Seien $a, c \in [0, 1]$. Das größte $b \in [0, 1]$, für das $a \wedge b \leq c$ gilt wird mit $a \overset{\wedge}{\rightarrow} c$ bezeichnet.

$a \overset{\wedge}{\rightarrow} c$ ist also definiert als

$$a \overset{\wedge}{\rightarrow} c = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \leq c \\ c & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 6.4. Sei $*$ die Łukasiewicz-Norm und $a, c \in [0, 1]$. Das größte $b \in [0, 1]$ mit $a * b \leq c$ wird mit $a \overset{*}{\rightarrow} c$ bezeichnet.

Satz 6.7. $a \overset{*}{\rightarrow} c = (\bar{a} + c) \wedge 1$.

Beweis. Für $x = a \overset{*}{\rightarrow} c$ muss folgende Ungleichung gelten:

$$a + x - 1 \leq a * x \leq c.$$

Also gilt

$$x \leq (1 - a) + c = \bar{a} + c.$$

Ist $\bar{a} + c \geq 1$, so muss $a \overset{*}{\rightarrow} c = 1$ sein und ansonsten $\bar{a} + c$. \square

Definition 6.5. Sei Ω eine Menge und seien $A, C \subseteq \Omega$. Die größte Menge $B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B \subseteq C$ wird bezeichnet als $A \overset{\cap}{\rightarrow} C$.

Satz 6.8.

$$A \overset{\cap}{\rightarrow} C = \begin{cases} \Omega & \text{wenn } A \subseteq C \\ \bar{A} \cup C & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $A \subseteq C$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Ist dagegen $A \not\subseteq C$, so gilt

$$A \cap (\bar{A} \cup C) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) = A \cap C \subseteq C.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{A} \cup C$ die größte Menge mit dieser Eigenschaft ist. Dazu sei angenommen es existiere eine weitere Menge Y mit $(\bar{A} \cup C) \subsetneq Y$ und $A \cap Y \subseteq C$. Sei $y \in Y \setminus (\bar{A} \cup C) = (Y \setminus \bar{A}) \cap (Y \setminus C)$. Das bedeutet, dass $y \in A$ und $y \notin C$. Aus $y \in A$ folgt aber auch laut Voraussetzung $y \in C$. \square

7 Summoid-Module

Definition 7.1. Sei $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ eine Summationsstruktur, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und $\text{scal}: S \rightarrow \text{End}_{\mathbb{M}}$ ein Homomorphismus von \mathcal{S} nach $\text{End}(\mathbb{M})$ mit $\text{End}(\mathbb{M}) = (\text{End}_{\mathbb{M}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_M)$. Dann ist $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein (linksseitiges) Summoid-Modul.

Definition 7.2. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Dann heißt eine Abbildung

$$\cdot: S \times M \rightarrow M, (s, m) \mapsto s \cdot m = (\text{scal}(s))(m)$$

(linksseitiges) Scaling bzgl. $(\mathbb{M}, \mathcal{S})$.

Anmerkung 7.1. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul wie oben. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt für alle $(s_i)_{i \in I} \in S^I$

$$\text{scal}\left(\sum_{i \in I} s_i\right) = \overline{\sum_{i \in I} \text{scal}(s_i)},$$

d.h. für alle $m \in M$ ist

$$\left(\sum_{i \in I} s_i\right) \cdot m = \sum_{i \in I} (s_i \cdot m),$$

2. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt für $s, t \in S$ stets

$$\text{scal}(s * t) = \text{scal}(s) \circ \text{scal}(t),$$

d.h. für alle $m \in M$ ist

$$(s * t) \cdot m = s \cdot (t \cdot m).$$

3. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt

$$\text{scal}(\varepsilon) = \text{id}_M,$$

d.h. für alle $m \in M$ ist

$$\varepsilon \cdot m = m.$$

4. Für $s \in S$ ist stets $\text{scal}(s) \in \text{End}_{\mathbb{M}}$, also gilt für alle $(m_i)_{i \in I} \in M^I$

$$(\text{scal}(s))\left(\sum_{i \in I} m_i\right) = \sum_{i \in I} (\text{scal}(s))(m_i),$$

bzw.

$$s \cdot \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} s \cdot m_i.$$

Definition 7.3. Sei P eine Menge, $\mathbb{W} = (W, *, \varepsilon)$ ein Monoid und φ ein Homomorphismus zwischen \mathbb{W} und $(P^P, \circ, \text{id}_P)$. Dann wird $\mathcal{W} = (P, \mathbb{W}, \varphi)$ (linksseitige) Monoid-Wirkung genannt.

Die Abbildung $\cdot: W \times P \rightarrow P, (w, p) \mapsto (\varphi(w))(p)$ wird dann die zu \mathcal{W} gehörige Wirkung von \mathbb{W} auf P genannt.

Anmerkung 7.2. Für eine Monoid-Wirkung gilt:

- $\forall u, w \in W: \varphi(u) \circ \varphi(w) = \varphi(u * w).$
- $\varphi(\varepsilon) = \text{id}_P$, d.h. $\forall p \in P: \varepsilon \cdot p = p.$

Anmerkung 7.3. Für ein Summoid-Modul $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ ist daher $(M, \mathcal{S}_{\text{Mult}}, \text{scal})$ eine Monoid-Wirkung mit zugehöriger Wirkung von $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ auf M , welche der skalaren Multiplikation entspricht.

Definition 7.4. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann ist $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$ das N -freie Summoid-Modul über \mathcal{S} , wobei $\text{scal}: S \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N}$ eine Abbildung mit

$$\text{scal}(s): S^N \rightarrow S^N, v \mapsto (s * v(n))_{n \in N}$$

für alle $s \in S$ ist.

Satz 7.1. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann ist $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$ ein Summoid-Modul.

Beweis. Zunächst muss gezeigt werden, dass $\text{scal}(s) \in \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N}$. Dazu sei $(v_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$ und $s \in S$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\text{scal}(s) \left(\sum_{i \in I} v_i \right) \right) (n) &= s * \left(\sum_{i \in I} v_i \right) (n) \\ &= s * \sum_{i \in I} v_i(n) \\ &= \sum_{i \in I} s * v_i(n) \\ &= \sum_{i \in I} ((\text{scal}(s))(v_i))(n) \\ &= \left(\sum_{i \in I} (\text{scal}(s))(v_i) \right) (n). \end{aligned}$$

Weiterhin ist zu zeigen, dass scal ein Homomorphismus zwischen \mathcal{S} und dem Endomorphismen-Summoid $\text{End}(\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N) = (\text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_{S^N})$ ist.

Es sei $v \in S^N$ und $n \in N$ sowie $(s_i)_{i \in I} \in S^I$ für eine Menge I . Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\left(\text{scal} \left(\sum_{i \in I} s_i \right) \right) (v) \right) (n) &= \left(\sum_{i \in I} s_i \right) * v(n) \\
&= \sum_{i \in I} (s_i * v(n)) \\
&= \sum_{i \in I} ((\text{scal}(s_i))(v))(n) \\
&= \left(\sum_{i \in I} (\text{scal}(s_i))(v) \right) (n) \\
&= \left(\left(\sum_{i \in I} \text{scal}(s_i) \right) (v) \right) (n).
\end{aligned}$$

Außerdem ist für $s, t \in S$

$$\begin{aligned}
((\text{scal}(s * t))(v))(n) &= (s * t) * v(n) \\
&= s * (t * v(n)) \\
&= s * (\text{scal}(t)(v))(n) \\
&= (\text{scal}(s)(\text{scal}(t)(v)))(n) \\
&= (\text{scal}(s) \circ \text{scal}(t))(n).
\end{aligned}$$

□

Definition 7.5. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann heiße die Abbildung $\delta^N: N \rightarrow S^N, n \mapsto \delta_n^N$ mit

$$\delta_n^N: N \rightarrow S, n' \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } n' = n \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

die Standardbasis von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$.

Definition 7.6. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{X})$ ein Summoid-Modul und N eine Menge. Eine Abbildung $\gamma: N \rightarrow M$ heißt N -fache Vektorenfamilie von \mathfrak{M} .

Definition 7.7. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid-Modul und N eine Menge. Eine Abbildung $u: N \rightarrow S$ heißt N -fache Familie von Skalaren von \mathfrak{M} .

Definition 7.8. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{X})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Weiterhin seien N eine Menge und $u \in S^N$ und $\gamma \in M^N$ Abbildungen. Dann ist die Linearkombination von u und γ gegeben durch

$$u \odot \gamma = \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n).$$

Definition 7.9. Sei \mathfrak{M} ein Summoid-Modul, N eine Menge und $\gamma \in M^N$ eine N -fache Vektorenfamilie von \mathfrak{M} . Dann ist f_γ definiert als

$$f_\gamma: S^N \rightarrow M, u \mapsto u \odot \gamma$$

die lineare Fortsetzung von γ .

Definition 7.10. Seien $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ sowie $\mathfrak{M}' = (\mathbb{M}', \mathcal{S}, \text{scal}')$ mit $\mathbb{M}' = (M', \mathbb{E}')$ Summoid-Module. Dann heißt eine Abbildung $f: M \rightarrow M'$ \mathcal{S} -lineare Abbildung von \mathfrak{M} nach \mathfrak{M}' , falls f ein Homomorphismus von \mathbb{M} nach \mathbb{M}' ist und außerdem

$$s \cdot' f(m) = f(s \cdot m)$$

für alle $s \in S$ und $m \in M$ gilt.

Satz 7.2. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Sei weiterhin $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$ das N -freie Summoid-Modul über \mathcal{S} sowie $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E}')$ ein Summoid-Modul. Ist außerdem $\gamma \in M^N$ eine N -fache Vektorenfamilie von \mathfrak{M} . Dann ist f_γ eine \mathcal{S} -lineare Abbildung von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ nach \mathfrak{M} .

Beweis. Sei I eine Menge und $(u_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$ eine I -fache Vektorenfamilie über $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_\gamma \left(\sum_{i \in I} u_i \right) &= \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \odot \gamma \\ &= \sum_{n \in N}' \left(\sum_{i \in I} u_i \right)(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N}' \left(\sum_{i \in I} u_i(n) \right) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N}' \sum_{i \in I}' u_i(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{i \in I}' \sum_{n \in N}' u_i(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{i \in I}' f_\gamma(u_i). \end{aligned}$$

Also ist f_γ ein Homomorphismus von $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N$ nach \mathbb{M} .

Sei nun $v \in S^N$ und $s \in S$. Dann ist

$$\begin{aligned}
s \cdot' f_\gamma(v) &= s \cdot' \sum_{n \in N}' v(n) \cdot' \gamma(n) \\
&= \sum_{n \in N}' s \cdot' (v(n) \cdot' \gamma(n)) \\
&= \sum_{n \in N}' (s * v(n)) \cdot' \gamma(n) \\
&= \sum_{n \in N}' (s \cdot v)(n) \cdot' \gamma(n) \\
&= f_\gamma(s \cdot v).
\end{aligned}$$

□

Satz 7.3. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, N eine Menge und δ^N die Standardbasis von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann gilt:

$$f_{\delta^N} = \text{id}_{S^N}.$$

Beweis. Sei $u \in S^N$. Dann ist

$$f_{\delta^N}(u) = u \odot \delta^N = \sum_{n \in N} u(n) \cdot \delta_n^N = u.$$

□

Satz 7.4. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ ein Summoid-Modul, N eine Menge, δ^N die Standardbasis von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$, $\gamma \in M^N$ eine Vektorenfamilie und f_γ die lineare Fortsetzung von γ . Dann gilt $f_\gamma \circ \delta^N = \gamma$.

Beweis. Sei $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(f_\gamma \circ \delta^N)(n) &= f_\gamma(\delta^N(n)) \\
&= f_\gamma(\delta_n^N) \\
&= \delta_n^N \odot \gamma \\
&= \sum_{n' \in N} \delta_n^N(n') \cdot \gamma(n') \\
&= \varepsilon \cdot \gamma(n) \\
&= \gamma(n).
\end{aligned}$$

□

Definition 7.11. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ ein Summoid-Modul, N eine Menge und $\gamma: N \rightarrow M$ eine Vektorenfamilie.

- γ heißt erzeugend in \mathfrak{M} falls f_γ surjektiv ist.

- γ heißt (linear) unabhängig in \mathfrak{M} falls f_γ injektiv ist.
- γ heißt Basis von \mathfrak{M} falls f_γ bijektiv ist.

Satz 7.5. *Sei \mathcal{S} ein Summoid und N eine Menge. Desweiteren sei $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ das N -freie Summoid-Modul über \mathcal{S} sowie δ^N die Standardbasis zu $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann ist δ^N eine Basis von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 7.3. \square

Lemma 7.1. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid-Modul und N' , N mit $N' \subseteq N$ Mengen. Sei zudem $\gamma \in M^N$ eine linear unabhängige Vektorenfamilie. Dann ist $\gamma|_{N'}$ linear unabhängig.*

Beweis. Seien $u', w' \in S^{N'}$ Familien von Skalaren. Sei weiterhin eine Abbildung

$$u: N \rightarrow S, n \mapsto \begin{cases} u'(n) & \text{falls } n \in N' \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $u|_{N'} = u'$ sowie analog dazu eine Abbildung $w: N \rightarrow S$ definiert. Dann gilt

$$u' \odot \gamma|_{N'} = w' \odot \gamma|_{N'} \iff u \odot \gamma = w \odot \gamma,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit von γ demnach $u = w$ und damit $u' = w'$ folgt. \square

Satz 7.6. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ und $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ ein Summoid-Modul. Seien weiterhin K, N Mengen sowie $\kappa: K \rightarrow N$ eine Abbildung und $\gamma \in M^N$ eine Vektorenfamilie. Dann gilt*

1. *Ist κ surjektiv und γ erzeugend, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ erzeugend in \mathfrak{M} .*
2. *Ist κ injektiv und γ unabhängig, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ unabhängig in \mathfrak{M} .*
3. *Ist κ bijektiv und γ eine Basis, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ eine Basis in \mathfrak{M} .*

Beweis. Sei $m \in M$. Da γ erzeugend ist existiert ein $u \in S^N$ mit $u \odot \gamma = m$. Da κ surjektiv ist existiert eine Abbildung $\eta: N \rightarrow K$ mit $\kappa \circ \eta = \text{id}_N$. Sei

$$w: K \rightarrow S, k \mapsto \begin{cases} u(\kappa(k)) & \text{falls } k \in \eta(N) \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \odot (\gamma \circ \kappa) &= \sum_{k \in K} w(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{k \in \eta(N)} u(\kappa(k)) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n) \\ &= u \odot \gamma = m. \end{aligned}$$

Damit wäre die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Aussage sei $w, w' \in S^K$. Da κ injektiv ist, existiert eine bijektive Abbildung $\eta: \kappa(K) \rightarrow K$ mit $\kappa \circ \eta = \text{id}_N$. Dann folgt aus

$$\sum_{k \in K} w(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k) = \sum_{k \in K} w'(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k)$$

mithilfe des Umbenennungssatzes

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) \\ \iff \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot \gamma(n) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot \gamma(n) \\ \iff (w \circ \eta) \odot \gamma|_{\kappa(K)} &= (w' \circ \eta) \odot \gamma|_{\kappa(K)}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 7.1 folgt damit $w \circ \eta = w' \circ \eta$ und daraus schließlich $w = w'$.

Die dritte Aussage ergibt sich aus den ersten beiden. \square

Definition 7.12. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen und die Abbildung $\kappa: K \rightarrow N$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\varphi_\kappa: S^N \rightarrow S^K, u \mapsto u \circ \kappa.$$

Definition 7.13. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N und J Mengen. Dann ist die charakteristische Abbildung zu J in N bzgl. \mathcal{S} definiert als

$$\chi_J^N: N \rightarrow S, n \mapsto \begin{cases} \varepsilon & n \in J \\ 0_S & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 7.7. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen, δ^N die Standardbasis von $\text{Mod}(S, N)$ und eine Abbildung $\kappa: K \rightarrow N$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in K$:

$$\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N) = \chi_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}^K.$$

Beweis. Sei $k' \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N))(k') &= \delta_{\kappa(k)}^N(\kappa(k')) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } \kappa(k) = \kappa(k') \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \chi_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}^K(k'). \end{aligned}$$

\square

Korollar 7.1. Ist κ zudem injektiv, so gilt:

$$\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N) = \delta_k^K.$$

Definition 7.14. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen und die Abbildung $\kappa: K \rightarrow N$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\psi_\kappa: S^K \rightarrow S^N, v \mapsto \left(\sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \right)_{n \in N}.$$

Satz 7.8. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K und N Mengen und δ^N und δ^K die Standardbasen von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ bzw. $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$ sowie $\kappa: K \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\psi_\kappa \circ \delta^K = \delta^N \circ \kappa.$$

Beweis. Sei $k \in K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\psi_\kappa(\delta^K(k)))(n) &= \sum_{k' \in \kappa^{-1}(n)} \delta_k^K(k') \\ &= \begin{cases} \varepsilon & \kappa(k) = n \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases} \\ &= (\delta_\kappa^N(k))(n). \end{aligned}$$

□

Satz 7.9. Seien $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$, K und N Mengen, $\gamma \in M^N$ und $\lambda \in M^K$ Vektorenfamilien von \mathfrak{M} sowie eine Abbildung $\kappa: K \rightarrow N$ gegeben, sodass $\lambda = \gamma \circ \kappa$. Dann gilt

$$f_\lambda = f_\gamma \circ \psi_\kappa.$$

Beweis. Sei $v \in S^K$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_\lambda(v) &= v \odot (\gamma \circ \kappa) \\ &= \sum_{k \in K} v(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{n \in N} \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} (v(k) \cdot \gamma(\kappa(k))) \\ &= \sum_{n \in N} \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} (v(k) \cdot \gamma(n)) \\ &= \sum_{n \in N} \left(\sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \right) \cdot \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N} (\psi_\kappa(v))(n) \cdot \gamma(n) \\ &= \psi_\kappa(v) \odot \gamma \\ &= f_\gamma(\psi_\kappa(v)). \end{aligned}$$

□

Satz 7.10. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K und N Mengen, $\kappa: K \rightarrow N$ eine Abbildung und δ^N die Standardbasis von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann gilt:

$$\psi_\kappa = f_{\delta^N \circ \kappa}.$$

Beweis. Sei $v \in S^K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f_{\delta^N \circ \kappa}(v))(n) &= (v \odot (\delta^N \circ \kappa))(n) \\ &= \left(\sum_{k \in K} v(k) \cdot \delta_{\kappa(k)}^N \right)(n) \\ &= \sum_{k \in K} v(k) * \delta_{\kappa(k)}^N(n) \\ &= \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \\ &= (\psi_\kappa(v))(n). \end{aligned}$$

□

Satz 7.11. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Sei weiterhin $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$ das N -freie Summoid-Modul über \mathcal{S} sowie $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal}')$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E}')$ ein Summoid-Modul. Seien zudem f und g \mathcal{S} -lineare Abbildungen von $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ nach \mathfrak{M} . Dann gilt

$$f \circ \delta^N = g \circ \delta^N \implies f = g.$$

Beweis. Sei $v \in S^N$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v \odot \delta^N) \\ &= f\left(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N\right) \\ &= \sum'_{n \in N} v(n) \cdot' f(\delta_n^N) \\ &= \sum'_{n \in N} v(n) \cdot' g(\delta_n^N) \\ &= g\left(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N\right) \\ &= g(v \odot \delta^N) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

□

7.1 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition 7.15. Seien K , N und S Mengen und $\rho \in (S^N)^K$ eine Abbildung. Dann ist $(K, N, \text{mat}(\rho))$ mit $\text{mat}(\rho): K \times N \rightarrow S, (k, n) \mapsto (\rho(k))(n)$ die zu ρ gehörige $(K \times N)$ -Matrix über S .

Definition 7.16. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und K und N Mengen. Sei desweiteren $f: S^K \rightarrow S^N$ eine \mathcal{S} -lineare Abbildung von $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$ nach $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann ist $\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K)$ die zu (f, δ^K, δ^N) gehörige Matrix.

Satz 7.12. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und eine Abbildung $\kappa: K \rightarrow N$ gegeben. Sei weiterhin α_κ die zu $(f_{\delta^N \circ \kappa}, \delta^K, \delta^N)$ gehörige Matrix. Dann gilt für beliebige $k \in K$:

$$\alpha_\kappa(k, \cdot) = \delta_{\kappa(k)}^N.$$

Beweis. Sei $k \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa(k, \cdot) &= (f_{\delta^N \circ \kappa} \circ \delta^K)(k) \\ &= f_{\delta^N \circ \kappa}(\delta_k^K) \\ &= \sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot (\delta^N \circ \kappa)(k') \\ &= (\delta^N \circ \kappa)(k) \\ &= \delta_{\kappa(k)}^N. \end{aligned}$$

□

Anmerkung 7.4. Das heißt, dass α_κ in jeder Zeile k genau an der Stelle $\kappa(k)$ den Eintrag ε und ansonsten 0_S hat.

Ist κ eine Permutation, so steht in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein ε . In diesem Fall ist α_κ also eine Permutationsmatrix.

Definition 7.17. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und $\alpha: K \times N \rightarrow S$ eine Abbildung. Dann ist $f_{\text{row}(\alpha)}$ die zu α gehörige \mathcal{S} -lineare Abbildung.

Satz 7.13. Seien $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und K und N Mengen. Dann gilt

1. Ist f eine \mathcal{S} -lineare Abbildung von $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$ nach $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ und α die zu (f, δ^K, δ^N) gehörige Matrix. Dann ist die zu α gehörige lineare Abbildung gleich f .
2. Ist umgekehrt eine $(K \times N)$ -Matrix (K, N, α) gegeben, so entspricht die zu $(f_{\text{row}(\alpha)}, \delta^K, \delta^N)$ gehörige Matrix genau α .

Beweis. Die zu f gehörige Matrix α ist gegeben durch

$$\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K): K \times N \rightarrow S, (k, n) \mapsto ((f \circ \delta^K)(k))(n).$$

Also ist $\text{row}(\alpha) = f \circ \delta^K$. Somit gilt für alle $u \in S^K$

$$f_{\text{row}(\alpha)}(u) = f_{f \circ \delta^K}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot f(\delta_k^K) = f\left(\sum_{k \in K} u(k) \cdot \delta_k^K\right) = f(u),$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Seien nun $k \in K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{mat}(f_{\text{row}(\alpha)} \circ \delta^K)(k, n) &= (f_{\text{row}(\alpha)}(\delta_k^K))(n) \\ &= \left(\sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot \text{row}_\alpha(k') \right)(n) \\ &= (\text{row}_\alpha(k))(n) \\ &= (\alpha(k, \cdot))(n) \\ &= \alpha(k, n) \end{aligned}$$

und somit der zweite Teil des Satzes bewiesen. \square

Definition 7.18. Seien $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ und $\mathfrak{M}' = (\mathbb{M}, \mathcal{S}', \text{scal}')$ Summoid-Module. Sei weiterhin λ eine K -Basis von \mathfrak{M} und γ eine N -Basis von \mathfrak{M}' sowie eine \mathcal{S} -lineare Abbildung g von \mathfrak{M} nach \mathfrak{M}' gegeben. Dann ist die zu $(g; \lambda, \gamma)$ gehörige Matrix definiert als die zu f gehörige Matrix, wobei $f = f_\gamma^{-1} \circ g \circ f_\lambda$.

Satz 7.14. Die zu $(g; \lambda, \gamma)$ gehörige Matrix ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K)$ die zu f gehörige Matrix. Laut Voraussetzung ist weiterhin

$$f_\gamma \circ f = g \circ f_\lambda.$$

Für $f_\gamma \circ f$ und $k \in K$ gilt:

$$(f_\gamma \circ f)(\delta_k^K) = f_\gamma((f \circ \delta^K)(k)) = f_\gamma(\alpha(k, \cdot)) = \sum_{n \in N} \alpha(k, n) \cdot \gamma(n).$$

Für $g \circ f_\lambda$ und $k \in K$ gilt dagegen:

$$(g \circ f_\lambda)(\delta_k^K) = g\left(\sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot \lambda(k')\right) = g(\lambda(k)).$$

Zusammengefasst gilt also

$$g(\lambda(k)) = \sum_{n \in N} \alpha(k, n) \cdot \gamma(n) = f_\gamma(\alpha(k, \cdot)).$$

Da f_γ bijektiv ist, gibt es für jedes $k \in K$ genau ein $\alpha(k, \cdot)$, welches diese Gleichung erfüllt. \square

Definition 7.19. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und $\alpha: K \times N \rightarrow S$ eine Abbildung. Sei nun $u \in S^K$. Dann ist

$$u \otimes \alpha = f_{\text{row}(\alpha)}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot \text{row}_\alpha(k)$$

das Vektor-Matrix-Produkt von u mit α .

Definition 7.20. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, J , K und N Mengen und $\alpha: J \times K \rightarrow S$ und $\beta: K \rightarrow N$ Abbildungen. Dann ist

$$\alpha \otimes \beta = \left(\sum_{k \in K} \alpha(j, k) * \beta(k, n) \right)_{j, n \in J \times N}$$

das Matrix-Matrix-Produkt von α und β .

Satz 7.15. Sei $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ sowie K eine Menge. Eine Abbildung $\varphi: S^K \rightarrow M$ ist genau dann \mathcal{S} -linear von $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$ nach \mathfrak{M} wenn eine Vektorenfamilie $\gamma \in M^K$ existiert mit $f_\gamma = \varphi$.

Beweis. Angenommen φ ist \mathcal{S} -linear. Dann ist $\varphi = f_{\varphi \circ \delta^K}$, also $\gamma = \varphi \circ \delta^K$, denn für $u \in S^K$ ist

$$f_{\varphi \circ \delta^K}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot \varphi(\delta_k^K) = \varphi \left(\sum_{k \in K} u(k) \cdot \delta_k^K \right) = \varphi(u).$$

Angenommen es existiert eine Abbildung $\gamma \in M^K$ für die gilt $\varphi = f_\gamma$. Dann ist φ laut Satz 7.2 \mathcal{S} -linear. \square

Satz 7.16. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid sowie K und N Mengen. Dann ist $\varphi: S^K \rightarrow S^N$ eine \mathcal{S} -lineare Abbildung von $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$ nach $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ genau dann wenn eine $(K \times N)$ -Matrix über \mathcal{S} existiert mit $\varphi = f_{\text{row}(\alpha)}$.

Beweis. Angenommen φ ist \mathcal{S} -linear. Dann gilt, wie in Satz 7.15 gezeigt,

$$\varphi = f_{\varphi \circ \delta^K}$$

und damit auch

$$\varphi = f_{\text{row}(\text{mat}(\varphi \circ \delta^K))}.$$

Das heißt, dass $\alpha = \text{mat}(\varphi \circ \delta^K)$.

Die andere Richtung folgt wieder sofort. \square

Satz 7.17. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid sowie J , K und N Mengen. Dann gilt für die Abbildungen $\alpha \in S^{J \times K}$ und $\beta \in S^{K \times N}$

$$f_{\text{row}(\alpha)} \bullet f_{\text{row}(\beta)} = f_{\text{row}(\alpha \otimes \beta)}.$$

Beweis. Sei $u \in S^K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
((u \otimes \alpha) \otimes \beta)(n) &= \sum_{k \in K} (u \otimes \alpha)(k) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} u(j) * \alpha(j, k) \right) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} u(j) * (\alpha(j, k) * \beta(k, n)) \\
&= \sum_{j \in J} u(j) \sum_{k \in K} \alpha(j, k) * \beta(k, n) \\
&= (u \otimes (\alpha \otimes \beta))(n).
\end{aligned}$$

□

8 Netzwerke und Aktionsnetzwerke

8.1 Netzwerke

Definition 8.1. Ein Tupel $G = (V, E, \varrho)$ heißt Netzwerk (bzw. gerichteter Multigraph), wobei V und E Mengen sind und $\varrho: E \rightarrow V \times V$ eine Abbildung ist.

V wird dabei als die Knotenmenge von G bezeichnet. E ist die Menge der Kanten. ϱ wird auch die Graphenabbildung genannt und induziert die Abbildungen $\sigma = \Pi_1 \circ \varrho$ und $\tau = \Pi_2 \circ \varrho$, wobei Π_n die Projektion auf die n -te Komponente ist. σ wird auch als die Source-Map und τ als die Target-Map bezeichnet.

Für eine Kante $e \in E$ ist $\sigma(e)$ der Anfangsknoten und $\tau(e)$ der Zielknoten.

Definition 8.2. Ein Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ heiße dünn, falls ϱ injektiv ist.

Definition 8.3. Ein Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ heiße n -knotig, falls $|V| = n$.

Beispiel 8.1. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat. Dann ist $G(\mathbb{P}) = (P, R, \varrho)$ mit $\varrho: R \rightarrow P \times P, (p, q) \mapsto (p, q)$ ein dünnes Netzwerk, welches wir das relationelle Netzwerk zu \mathbb{P} nennen. Wir sagen auch $G(\mathbb{P})$ ist \mathbb{P} als Netzwerk.

Beispiel 8.2. Sei P Menge. Dann ist $G_P = (P, P \times P, \text{id}_{P \times P})$ das zu P gehörige logistische Netzwerk.

Beispiel 8.3. Sei M eine Menge und \perp ein Symbol. Dann ist das Netzwerk $G(M, \perp) = (\{\perp\}, M, \varrho)$ mit $\varrho: M \rightarrow \{\perp\} \times \{\perp\}, m \mapsto (\perp, \perp)$ ein einknotiges Netzwerk, welches wir das Kleeblattnetzwerk zu (M, \perp) nennen.

Definition 8.4. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten $v \in V$ die Mengen

$$\text{In}_G(v) = \{e \in E \mid \tau(e) = v\}$$

sowie

$$\text{Out}_G(v) = \{e \in E \mid \sigma(e) = v\}$$

definiert.

Definition 8.5. Seien $G = (V, E, \varrho)$ und $G' = (V', E', \varrho')$ Netzwerke. Das Paar (φ, ψ) bestehend aus den bijektiven Abbildungen $\varphi: V \rightarrow V'$ und $\psi: E \rightarrow E'$ ist ein Homomorphismus zwischen G und G' , falls für jedes $e \in E$

$$\varphi(\varrho(e)) = \varrho'(\psi(e)).$$

Definition 8.6. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Eine Abbildung $n: V \rightarrow S$ heißt Knotenbewertung bzgl. (G, \mathcal{S}) . Eine Abbildung $u: E \rightarrow S$ heißt Kantenbewertung bzgl. (G, \mathcal{S}) .

Definition 8.7. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen. Dann ist

$$m \odot n = \sum_{v \in V} m(v) * n(v).$$

Definition 8.8. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $n \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann ist

$$\begin{aligned} n \curlyvee u: V &\rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{In}_G(v)} n(\sigma(e)) * u(e) \\ u \curlywedge n: V &\rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} u(e) * n(\tau(e)). \end{aligned}$$

Satz 8.1. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann gilt:

$$(m \curlyvee u) \odot n = m \odot (u \curlywedge n).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (m \curlyvee u) \odot n &= \sum_{v \in V} (m \curlyvee u)(v) * n(v) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \text{In}_G(v)} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(v) \\ &= \sum_{e \in E} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(\tau(e)) \\ &= \sum_{e \in E} m(\sigma(e)) * (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} m(v) * (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} m(v) * \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} m(v) * (u \curlywedge n)(v) \\ &= m \odot (u \curlywedge n). \end{aligned}$$

□

Satz 8.2. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen und $u, w \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann gilt:

$$((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n = m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).$$

Beweis. Sei $m' = m \curlyvee u$ und $n' = w \curlywedge n$. Dann erhält man durch mehrfaches

Einsetzen und Anwenden von Satz 8.1

$$\begin{aligned}
((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n &= (m' \curlyvee w) \odot n \\
&= m' \odot (w \curlywedge n) \\
&= (m \curlyvee u) \odot n' \\
&= m \odot (u \curlywedge n') \\
&= m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).
\end{aligned}$$

□

Definition 8.9. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist für eine Kantenbewertung $u \in S^E$

$$\text{in}_u: V \rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{In}_G(v)} u(e)$$

die Inflow-Map von u auf G über \mathcal{S} und

$$\text{out}_u: V \rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} u(e)$$

die Outflow-Map von u auf G über \mathcal{S} .

Definition 8.10. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann ist u eine Flow-Map auf $V_0 \subseteq V$ über \mathcal{S} , falls für alle $v \in V_0$

$$\text{in}_u(v) = \text{out}_u(v).$$

Die Kantenbewertung u ist eine Flow-Map auf G über \mathcal{S} falls u eine Flow-Map auf V ist.

Definition 8.11. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist

$$E^{(n)} = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid \forall i \in [n-1]: \tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})\}$$

die Menge der Pfade der Länge n in G .

Außerdem ist

$$E^{(+)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} E^{(n)}$$

die Menge aller Pfade beliebiger Länge in G .

Definition 8.12. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten $v \in V$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Mengen

$$\text{In}_G^{(n)}(v) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid \tau(e_n) = v\}$$

sowie

$$\text{Out}_G^{(n)}(v) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid \sigma(e_1) = v\}$$

definiert.

Satz 8.3. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u, w \in S^E$ Kantenbewertungen. Dann gilt für alle $v \in V$

$$((m \curlywedge u) \curlywedge w)(v) = \sum_{(e_1, e_2) \in \text{In}_G^{(2)}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2).$$

Beweis. Es sei $m' = m \curlywedge u$ und $v \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned} (m' \curlywedge w)(v) &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} m'(\sigma(e_2)) * w(e_2) \\ &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} \left(\sum_{e_1 \in \text{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) \right) * w(e_2) \\ &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} \sum_{e_1 \in \text{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2) \\ &= \sum_{(e_1, e_2) \in \text{In}_G^{(2)}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2). \end{aligned}$$

□

Satz 8.4. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u_1, \dots, u_k \in S^E$ mit $k \geq 2$ Kantenbewertungen. Dann gilt für alle $v \in V$

$$((\dots(m \curlywedge u_1) \dots) \curlywedge u_k)(v) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in \text{In}_G^{(k)}(v)} m(\sigma(e_1)) \prod_{i=1}^k u_i(e_i),$$

wobei

$$\prod_{i=1}^k u_i(e_i) = u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über k . Der Induktionsanfang wurde in Satz 8.3 bereits gezeigt. Sei nun angenommen, dass die Aussage für ein $k \geq 2$ gilt. Dann ist für $m' = ((\dots(m \curlywedge u_1) \dots) \curlywedge u_k)$

$$\begin{aligned} (m' \curlywedge u_{k+1})(v) &= \sum_{e_{k+1} \in \text{In}_G(v)} m'(\sigma(e_{k+1})) * u_{k+1}(e_{k+1}) \\ &= \sum_{e_{k+1} \in \text{In}_G(v)} \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in \text{In}_G^{(k)}(\sigma(e_{k+1}))} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i) \\ &= \sum_{(e_1, \dots, e_{k+1}) \in \text{In}_G^{(k+1)}(v)} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i). \end{aligned}$$

□

8.2 Aktionsnetzwerke

Definition 8.13. Ein Aktionsnetzwerk ist ein Tupel $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ bestehend aus einem Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ sowie den Abbildungen $\star: E^{(2)} \rightarrow E$ und $\text{id}: V \rightarrow E$, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{(2)}: \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- $\forall (e_1, e_2, e_3) \in E^{(3)}: (e_1 \star e_2) \star e_3 = e_1 \star (e_2 \star e_3)$
- $\forall v \in V: \varrho(\text{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E: \text{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \text{id}(\tau(e))$

E wird als die Menge von Aktionen (Handlungen) interpretiert, wobei V eine Menge von Zuständen darstellt. $e_1 \star e_2$ ist die Verknüpfung von Aktionen e_1 und e_2 , was nur möglich ist, wenn (e_1, e_2) verkettbar sind, d.h. falls $\tau(e_1) = \sigma(e_2)$. Das entspricht der Aussage, dass e_2 erst anfangen kann, wenn e_1 aufhört.

Definition 8.14. Ein partielles Aktionsnetzwerk ist ein Tripel $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ bestehend aus einem Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ sowie den Abbildungen $\text{id}: V \rightarrow E$ und $\star: R \rightarrow E$, wobei $R \subseteq E^{(2)}$, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in R: \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- Existieren $e_1 \star (e_2 \star e_3)$ und $(e_1 \star e_2) \star e_3$ so gilt $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- Es gilt $(e_1, e_2) \in R$ mit $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$ genau dann wenn $(e_2, e_3) \in R$ mit $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$
- Aus $(e_1, e_2) \in R$ mit $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$ und $(e_2, e_3) \in R$ mit $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$ folgt stets: $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- $\forall v \in V: \varrho(\text{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E: (\text{id}(\sigma(e)), e) \in R \wedge (e, \text{id}(\tau(e))) \in R$
- $\forall e \in E: \text{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \text{id}(\tau(e))$

Beispiel 8.4. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ eine Präordnung. Dann ist $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (G(\mathbb{P}), \star, \text{id})$ mit $\star: R^{(2)} \rightarrow R, ((p, t), (t, q)) \mapsto (p, q)$ sowie $\text{id}: P \rightarrow R, p \mapsto (p, p)$ das Aktionsnetzwerk zu \mathbb{P} .

Beispiel 8.5. Sei P eine Menge. Dann ist $\mathbb{G}_P = \mathbb{G}((P, P \times P))$ das sogenannte logistische Aktionsnetzwerk zu P .

Beachte: $(P, P \times P)$ ist eine Präordnung.

Beispiel 8.6. Sei $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$ ein Monoid und \perp ein Symbol. Dann nennen wir $\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp) = (G(M, \perp), *, \text{id})$ mit $\text{id}: \{\perp\} \rightarrow M, \perp \mapsto \varepsilon$ das zu (\mathbb{M}, \perp) gehörige Aktionsnetzwerk.

Beispiel 8.7. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk, W eine Menge und $w: V \rightarrow W$ mit $W \cap E^{(+)} = \emptyset$ eine Bijektion.

Wir definieren zuerst $E^{(*)} = W \cup E^{(+)}$. Weiterhin sei $P(G, w) = (V, E^{(*)}, \varrho^*)$, wobei $\varrho^*: E^{(*)} \rightarrow V \times V$ eine Abbildung ist mit $\varrho^*((e_1, \dots, e_n)) = (\sigma(e_1), \tau(e_n))$ für $(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sowie $\varrho^*(w(v)) = (v, v)$.

Dann ist das $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \text{id})$ das Pfadaktionsnetzwerk zu (G, w) , wobei

- $(a_1, \dots, a_m) \star (b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$ für $(a_1, \dots, a_m) \in E^{(m)}$ und $(b_1, \dots, b_n) \in E^{(n)}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\tau(a_m) = \sigma(b_1)$
- $w(\sigma(a_1)) \star (a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_m) \star w(\tau(a_m))$ für $(a_1, \dots, a_m) \in E^{(m)}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $w(v) \star w(v) = w(v)$

und $\text{id}: V \rightarrow E^{(*)}, v \mapsto w(v)$.

Definition 8.15. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Eine Teilmenge $D \subseteq E$ der Kantenmenge bildet eine Unterstruktur von \mathbb{G} falls gilt

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{(2)}: e_1, e_2 \in D \implies e_1 \star e_2 \in D$
- $\text{id}(V) \subseteq D$

In diesem Fall ist $\mathbb{G}|_D = (G|_D, \star^D, \text{id}^D)$ bestehend aus $G|_D = (V, D, \varrho|_D)$, $\star^D: D^{(2)}, (d_1, d_2) \mapsto d_1 \star d_2$ und $\text{id}^D: V \rightarrow D, v \mapsto \text{id}(v)$ die Einschränkung von \mathbb{G} auf D .

Satz 8.5. Ist P eine Menge und $R \subseteq P \times P$. Dann bildet R genau dann eine Unterstruktur von $\mathbb{G}_P = (G_P, \star, \text{id})$ mit $G_P = (P, P \times P, \text{id}_{P \times P})$ wenn (P, R) eine Präordnung ist.

Beweis. Es gilt: $(p, t), (t, q) \in R$ genau dann wenn $(p, q) = (p, t) \star (t, q) \in R$. Weiterhin ist R genau dann reflexiv wenn $\text{id}(P) = \{(p, p) \mid p \in P\} \subseteq R$. \square

Anmerkung 8.1. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ eine Präordnung, so ist $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (\mathbb{G}_P)|_R$.

Definition 8.16. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist

$$\mathbb{M}: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), (A, B) \mapsto \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times B\}$$

das Minkowski-Produkt in \mathbb{G} .

Definition 8.17. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist $\text{Minsk}(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, \mathbb{M}, \text{id}(V))$ ein Join-Summoid, welches wir das Minkowski-Summoid zu \mathbb{G} nennen.

Satz 8.6. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist das Minkowski-Summoid $\text{Minsk}(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, \mathbb{M}, \text{id}(V))$ ein Join-Summoid.

Beweis. $(\mathcal{P}(E), \cup)$ ist eine idempotente Summationsstruktur.

\mathbb{M} ist assoziativ, da \star assoziativ ist und es gilt

$$A \mathbb{M} \text{id}(V) = \{a \star e \mid (a, e) \in E^{(2)} \cap A \times \text{id}(V)\} = A = \text{id}(V) \mathbb{M} A.$$

Also ist $\text{Minsk}(\mathbb{G})_{\text{Mult}}$ ein Monoid.

Und schließlich ist für $A \in \mathcal{P}(E)$ und $\beta: I \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A \mathbb{M} \bigcup_{i \in I} \beta(i) &= \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times \bigcup_{i \in I} \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} A \mathbb{M} \beta(i). \end{aligned}$$

Das Argument kann auch analog für die Rechtsdistributivität verwendet werden. \square

Beispiel 8.8. Sei $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ ein kommutatives Monoid und \perp ein Symbol. In $\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)$ ist das Minkowski-Produkt gerade die Minkowski-Summe, d.h.

$$A \mathbb{M} B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Definition 8.18. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Für jede Kantenmenge $A \subseteq E$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A^{(n)}$ rekursiv wie folgt definiert:

- $A^{(0)} = \text{id}(V)$
- $A^{(1)} = A$
- $A^{(n+1)} = A^{(n)} \mathbb{M} A$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Der Kleenestern von A bzgl. \mathbb{G} ist dann definiert als

$$A^{(*)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}.$$

Satz 8.7. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und $A \subseteq E$. Dann ist $A^{(*)}$ die kleinste Unterstruktur von \mathbb{G} , die A enthält.

Beweis. Es gilt $\text{id}(V) = A^{(0)} \subseteq A^{(*)}$ und $A = A^{(1)} \subseteq A^{(*)}$. Seien $(e_1, e_2) \in E^{(2)}$ mit $e_1, e_2 \in A^{(*)}$, d.h. es existieren $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $e_1 \in A^{(m)}$ und $e_2 \in A^{(n)}$. Dann ist

$$e_1 \star e_2 \in A^{(m)} \mathbb{M} A^{(n)} \subseteq A^{(*)}.$$

Also ist $A^{(*)}$ eine Unterstruktur von \mathbb{G} , die A enthält.

Sei nun $D \subseteq E$ eine Unterstruktur von \mathbb{G} mit $A \subseteq D$. Wir zeigen, dass $A^{(n)} \subseteq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion über n . Es gilt $A^{(0)} \subseteq D$ und $A^{(1)} \subseteq D$. Sei also die Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bereits erfüllt und sei $a \in A^{(n+1)}$. Das heißt $a \in A^{(n)} \mathbb{M} A$, also $a = e_1 \star e_2$ mit $(e_1, e_2) \in E^{(2)}$ sowie $e_1 \in A^{(n)}$ und $e_2 \in A$. Da laut Voraussetzung sowohl $A \subseteq D$ also auch $A^{(n)} \subseteq D$, ist $a = e_1 \star e_2 \in D$, da D eine Unterstruktur ist. \square

Beispiel 8.9. Sei $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}})$ und $A = \{2, 5\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \{0\} \\ A^{(1)} &= A = \{2, 5\} \\ A^{(2)} &= A \mathbin{\textcircled{M}} A = \{2 + 2, 5 + 2, 2 + 5, 5 + 5\} = \{4, 7, 10\} \\ A^{(3)} &= A^{(2)} \mathbin{\textcircled{M}} A = \{4 + 2, 4 + 5, 7 + 2, 7 + 5, 10 + 2, 10 + 5\} = \{6, 9, 12, 15\} \\ &\dots \\ A^{(*)} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}. \end{aligned}$$

Beispiel 8.10. Sei P eine Menge und $A, B \subseteq P$. Dann entspricht das Minkowski-Produkt von A und B gerade dem Relationenprodukt von A und B .

Definition 8.19. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ ein Aktionsnetzwerk mit $G = (V, E, \varrho)$ Für $e \in E$ ist der Split von e definiert als

$$\text{Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(c, d) \in E^{(2)} \mid c \star d = e\}.$$

Allgemein ist der n -Split von e für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ definiert als

$$n\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid e_1 \star \dots \star e_n = e\}.$$

Definition 8.20. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ ein Aktionsnetzwerk mit $G = (V, E, \varrho)$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Für die Kantenbewertungen $u, w \in S^E$ ist dann die Faltung bzgl. $(\mathbb{G}, \mathcal{S})$ definiert als

$$u \otimes w: E \rightarrow S, e \mapsto \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * w(d).$$

Satz 8.8. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Für die Kantenbewertungen $u_1, \dots, u_k \in S^E$ mit $k \geq 2$ und $e \in E$ gilt

$$((\dots (u_1 \otimes u_2) \otimes \dots) \otimes u_k)(e) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über k . Für $k = 2$ folgt die Gleichung sofort aus der Definition. Gelte sie nun für ein beliebiges $k \geq 2$. Sei nun $u = (\dots (u_1 \otimes u_2) \otimes \dots) \otimes u_k$. Dann ist für $e \in E$

$$\begin{aligned} (u \otimes u_{k+1})(e) &= \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * u_{k+1}(d) \\ &= \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(c)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k) * u_{k+1}(d) \\ &= \sum_{(e_1, \dots, e_{k+1}) \in (k+1)\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_{k+1}(e_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Anmerkung 8.2. Analog gilt auch

$$(u_1 \circledast (u_2 \circledast (\dots (u_{k-1} \circledast u_k) \dots))) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Damit ist gleichzeitig gezeigt, dass \circledast assoziativ ist.

Definition 8.21. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$ mit

$$\overline{\sum_{i \in I} u_i}: E \rightarrow S, e \mapsto \sum_{i \in I} u_i(e)$$

für beliebige $(u_i)_{i \in I} \in (S^E)^I$ und

$$I_{\mathbb{G}}: E \rightarrow S, e \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } e \in \text{id}(V) \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

das Faltungssumoid zu \mathbb{G} über \mathcal{S} .

Satz 8.9. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$ ebenfalls ein Summoid.

Beweis. $(S^E, \bar{\Sigma})$ ist eine Summationsstruktur nach Satz 3.5.

Weiterhin wissen wir bereits, dass \circledast assoziativ ist. Sei also $u \in S^E$. Dann ist für $e \in E$

$$(u \circledast I_{\mathbb{G}})(e) = \sum_{c \star d = e} u(c) * I_{\mathbb{G}}(d) = u(e) = \sum_{c \star d = e} I_{\mathbb{G}}(c) * u(d) = (I_{\mathbb{G}} \circledast u)(e),$$

da $c \star d = e$ für $d \in \text{id}(V)$ nur gilt, wenn $c = e$.

Sei nun $(u_i)_{i \in I} \in (S^E)^I$ sowie $w \in S^E$ und $e \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(w \circledast \overline{\sum_{i \in I} u_i} \right)(e) &= \sum_{c \star d = e} w(c) * \left(\overline{\sum_{i \in I} u_i} \right)(d) \\ &= \sum_{c \star d = e} w(c) * \sum_{i \in I} u_i(d) \\ &= \sum_{c \star d = e} \sum_{i \in I} w(c) * u_i(d) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{c \star d = e} w(c) * u_i(d) \\ &= \left(\overline{\sum_{i \in I} w \circledast u_i} \right)(e) \end{aligned}$$

und analog für die Rechtsdistributivität. □

Definition 8.22. Sei P eine Menge und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann nennen wir $\text{Mat}_P(\mathcal{S}) = \mathcal{S}[\mathbb{G}_P]$ das Summoid der $(P \times P)$ -Matrix über \mathcal{S} .

Anmerkung 8.3. Die Faltung von $\text{Mat}_P(\mathcal{S})$ von $u, w \in S^{P \times P}$ ist

$$u \otimes w: P \times P \rightarrow S, (p, q) \mapsto \sum_{t \in P} u(p, t) * w(t, q).$$

und entspricht damit der Matrizenmultiplikation. Außerdem ist

$$I_{\mathbb{G}_P}: P \times P \rightarrow S, (p, q) \mapsto \begin{cases} \varepsilon & p = q \\ 0_S & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Einheitsmatrix und $\bar{\Sigma}$ die punktweise Summation von \mathcal{S} -Matrizen.

Beispiel 8.11. Sei $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ ein Monoid, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und \perp ein Symbol sowie $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)$ das Aktionsnetzwerk zu (\mathbb{M}, \perp) . Dann ist $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^M, \bar{\Sigma}, \otimes, I_{\mathbb{G}})$ ein Summoid, wobei für $u, w \in S^M$

$$u \otimes w: M \rightarrow S, m \mapsto \sum_{c+d=m} u(c) * w(d)$$

und $I_{\mathbb{G}}: \{\perp\} \rightarrow M, \perp \mapsto \varepsilon$.

8.3 \mathcal{S} -Algebren

Definition 8.23. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid. Eine \mathcal{S} -Algebra ist definiert als das Tupel $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$ bestehend aus einem Summoid $\mathcal{A} = (A, \mathbb{E}, \mathbb{A}, a)$, sodass $(\mathcal{A}_{\text{Sum}}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul bildet, wobei für alle $s \in S$ und $x, y \in A$

$$s \cdot (x \mathbb{A} y) = (s \cdot x) \mathbb{A} y = x \mathbb{A} (s \cdot y).$$

Satz 8.10. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid. Dann bildet $(\mathcal{S}[\mathbb{G}], \mathcal{S}, \text{scal})$ bestehend aus $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \otimes, I_{\mathbb{G}})$ und der Skalarmultiplikation aus $\text{Mod}(\mathcal{S}, E)$ eine \mathcal{S} -Algebra.

Beweis. $\mathcal{S}[\mathbb{G}]$ ist ein Summoid und daher $(\mathcal{S}[\mathbb{G}]_{\text{Sum}}, \mathcal{S}, \text{scal})$ ein Summoid-Modul.

Sei nun $s \in S$, $u, w \in S^E$ sowie $e \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned} (s \cdot (u \otimes w))(e) &= s * (u \otimes w)(e) \\ &= s * \sum_{c \star d = e} (u(c) * w(d)) \\ &= \sum_{c \star d = e} (s * u(c)) * w(d) = ((s \cdot u) \otimes w)(e) \\ &= \sum_{c \star d = e} u(c) * (s * w(d)) = (u \otimes (s \cdot w))(e). \end{aligned}$$

□

Satz 8.11. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid, $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ ein Monoid und $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$ mit $\mathcal{A} = (A, \mathbb{E}, \mathbb{A}, a)$ eine \mathcal{S} -Algebra. Dann induziert jeder Homomorphismus κ von \mathbb{M} auf $\mathcal{A}_{\text{Mult}}$ durch f_κ einen Homomorphismus von $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)]$ nach \mathcal{A} .

Beweis. Sei $(v_i)_{i \in I} \in (S^M)^I$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\sum_{i \in I} u_i} \right) \odot \kappa &= \sum_{m \in M} \left(\overline{\sum_{i \in I} v_i} \right)(m) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{m \in M} \left(\sum_{i \in I} v_i(m) \right) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} v_i(m) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} v_i(m) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{i \in I} v_i \odot \kappa.
\end{aligned}$$

Seien nun $u, w \in S^M$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(u \otimes w) \odot \kappa &= \sum_{m \in M} \left(\sum_{c+d=m} u(c) * w(d) \right) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot \kappa(c+d) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} \kappa(d)) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} u(c) \cdot (w(d) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} \kappa(d))) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} u(c) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} w(d) \cdot \kappa(d)) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) \cdot \kappa(c)) \mathbb{A} (w(d) \cdot \kappa(d)) \\
&= \sum_{(c,d) \in M \times M} (u(c) \cdot \kappa(c)) \mathbb{A} (w(d) \cdot \kappa(d)) \\
&= \sum_{c \in M} u(c) \cdot \kappa(c) \mathbb{A} \sum_{d \in M} w(d) \cdot \kappa(d) \\
&= (u \odot \kappa) \mathbb{A} (w \odot \kappa).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.12. Sei $\mathbb{M} = \mathbb{N}_{\text{add}} = (\mathbb{N}, +, 0)$, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid und $\mathfrak{A} = (\mathcal{S}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}})$ eine \mathcal{S} -Algebra (\mathcal{S} als \mathcal{S} -Algebra). Darüber hinaus sei $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N}) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}^{\mathbb{N}}})$ mit $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}} = (S^{\mathbb{N}}, \mathbb{E})$ gegeben. Damit ist $\text{scal}_{\mathcal{S}}: S \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$ mit $\text{scal}(s): S \rightarrow S, s' \mapsto s * s'$, wodurch die Operation $\cdot_{\mathcal{S}}: S^2 \rightarrow S, (s, x) \mapsto s * x$ definiert ist.

Für jedes $r \in S$ ist $\kappa_r: \mathbb{N} \rightarrow S, n \mapsto r^n$ ein Monoid-Homomorphismus von \mathbb{M} nach $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$.

Wir definieren weiterhin $x := \delta_1^{\mathbb{N}}$ und $x^n := \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{n\text{-fach}}$, wobei \otimes die Faltung

aus $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}}, \perp)]$ ist. Also ist $x^n = \delta_n^{\mathbb{N}}$ und

$$f_{\kappa_r}: S^{\mathbb{N}} \rightarrow S, u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{\mathcal{S}} \kappa_r(n)$$

ein Summoid-Homomorphismus von $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}}, \perp)]$ nach \mathcal{S} . Das heißt folgendes: Für $u \in S^{\mathbb{N}}$, welches als Polynom

$$u[x] := u = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{S^{\mathbb{N}}} \delta_n^{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{S^{\mathbb{N}}} x^n$$

aufgefasst wird, wobei $\cdot_{S^{\mathbb{N}}}$ die Skalarmultiplikation aus $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N})$ sei, ist

$$f_{\kappa_r}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{\mathcal{S}} r^n.$$

Die Abbildung f_{κ_r} heißt deshalb Einsetzungs-Homomorphismus von r für jede formale Potenzreihe $u[x]$.

Beispiel 8.13. Sei Ω eine endliche Menge und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Weiterhin sei $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}$ ein kommutatives Monoid. Beachte: Hier werden $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N}^{\Omega}) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}^{\Omega}}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}^{\mathbb{N}^{\Omega}}})$ mit $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}^{\Omega}} = (S^{\mathbb{N}^{\Omega}}, \mathbb{E})$ und außerdem die Faltung \otimes aus $\mathcal{S}[\mathbb{G}((\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}, \perp)]$ betrachtet.

Für $r \in S^{\Omega}$ ist

$$\kappa_r: \mathbb{N}^{\Omega} \rightarrow S, \alpha \mapsto \prod_{i \in \Omega}^* r_i^{\alpha_i}$$

ein Monoid-Homomorphismus zwischen $(\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}$ und $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$. Für $i \in \Omega$ setze $x_i = \delta_{\delta_i^{\mathbb{N}^{\Omega}}}$ und für $\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}$ sei $x^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mathbb{N}^{\Omega}}$. Dann ist

$$x^{\alpha} = \prod_{i \in \Omega}^{\otimes} x_i^{\alpha(i)}.$$

Interpretiere $u \in S^{\mathbb{N}^{\Omega}}$ wie folgt:

$$u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} \delta_{\alpha}^{\mathbb{N}^{\Omega}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} x^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} \prod_{i \in \Omega}^{\otimes} x_i^{\alpha(i)}$$

Dann ist f_{κ_r} ein Summoid-Homomorphismus von $\mathcal{S}[\mathbb{G}((\mathbb{N}_{\text{add}})^\Omega, \perp)]$ nach \mathcal{S} und für $u \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}^\Omega}$ ist

$$f_{\kappa_r}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot_{\mathcal{S}} \kappa_r(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot_{\mathcal{S}} \prod_{i \in \Omega}^* r_i^{\alpha(i)}$$

das Einsetzen von r in jede multivariable formale Potenzreihe.

8.4 Automaten

Definition 8.24. Sei $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \vee, \wedge, 1)$ ein Summoid, wobei für $\alpha: I \rightarrow \mathbb{2}$

$$\bigvee_{i \in I} \alpha(i) = \begin{cases} 1 & \exists i \in I: \alpha(i) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $s \wedge t = \min(s, t)$ für $s, t \in \mathbb{2}$. Sei weiterhin P eine Menge von Zuständen und $\mathbb{M} = (M, \circ, \varepsilon)$ ein Monoid sowie $\text{Mat}_P(\mathcal{B})$ das Summoid der $(P \times P)$ -Matrix über \mathcal{B} . Dann wird ein Homomorphismus κ von \mathbb{M} nach $(\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}}$ Präautomat genannt.

Der Homomorphismus κ ordnet jedem Wort ein Element aus $\mathbb{2}^{P \times P}$ zu und kann deshalb als Übergangsmatrix aufgefasst werden.

Anmerkung 8.4. Ist $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \vee, \wedge, 1)$ wie in Definition 8.24 gegeben. Dann ist $(\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}} = (\mathbb{2}^{P \times P}, \otimes, I)$ ein Monoid mit

$$I: P \times P \rightarrow \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $u, w \in \mathbb{2}^{P \times P}$

$$u \otimes w: P \times P \rightarrow \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \bigvee_{c \star d = (p, q)} u(c) \wedge w(d).$$

Das heißt es gilt

$$(u \otimes w)(p, q) = 1 \iff \exists t \in P: u(p, t) = 1 \wedge w(t, q) = 1.$$

Definition 8.25. Sei B ein Alphabet und $G = G(B, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$ das Kleeblattnetzwerk zu (B, \perp) . Sei weiterhin $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \text{id})$ das Pfadaktionsnetzwerk zu (G, w) mit $w: \{\perp\} \rightarrow \{\varepsilon\}, \perp \mapsto \varepsilon$ und $P(G, w) = (\{\perp\}, B^{(*)}, \varrho^*)$. Dann ist $\mathbb{B}^{(*)} = (B^{(*)}, \star, \varepsilon)$ das Wortmonoid zu (B, ε) .

Anmerkung 8.5. Ist B ein Alphabet und $G = (G, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$ das Kleeblattnetzwerk zu (B, \perp) . Dann ist

$$B^{(+)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} B^n.$$

Für $w: \{\perp\} \rightarrow \{\varepsilon\}$ ist also $B^{(*)} = \{\varepsilon\} \cup B^{(+)}$.

Dann ist für $(w_1, \dots, w_m) \in B^m$ und $(v_1, \dots, v_n) \in B^n$

- $(w_1, \dots, w_m) \star (v_1, \dots, v_m) = (w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_m)$
- $\varepsilon \star (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) \star \varepsilon$ und
- $\varepsilon \star \varepsilon = \varepsilon$.

Das heißt, dass \star als Konkatenation von Wörtern über dem Alphabet B aufgefasst werden kann.

Anmerkung 8.6. Ist $\kappa: B^{(*)} \rightarrow 2^{P \times P}$ ein Präautomat zum Wortmonoid $\mathbb{B}^{(*)}$, dann ordnet κ jedem Wort eine Übergangsmatrix zu, wobei $(\kappa(w))(p, q)$ angibt, ob ein Wort w erkannt wird, wenn man von Zustand p in Zustand q geht. Da κ ein Homomorphismus ist, gilt für $w_1, w_2 \in B^{(*)}$

$$\kappa(w_1 \star w_2) = \kappa(w_1) \otimes \kappa(w_2).$$

Das heißt, dass die Konkatenation von w_1 und w_2 beim Übergang von p nach q erkannt werden kann genau dann wenn ein Zustand $t \in P$ existiert, sodass w_1 beim Übergang von p nach t und w_2 beim Übergang von t nach q erkannt werden kann.

Satz 8.12. Sei B ein Alphabet, P eine Menge von Zuständen und $\lambda: B \rightarrow 2^{P \times P}$ eine Abbildung. Dann ist durch λ ein Präautomat κ_λ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei zunächst $\kappa_\lambda(b) = \lambda(b)$ für alle $b \in B$. Da κ ein Homomorphismus ist, muss für $b_1, \dots, b_n \in B$ gelten

$$\begin{aligned} \kappa_\lambda((b_1, \dots, b_m)) &= \kappa_\lambda(b_1 \star \dots \star b_m) \\ &= \kappa_\lambda(b_1) \otimes \dots \otimes \kappa_\lambda(b_m) \\ &= \lambda(b_1) \otimes \dots \otimes \lambda(b_m). \end{aligned}$$

□

Definition 8.26. Sei $\mathcal{B} = (2, \vee, \wedge, 1)$ ein Summoid wie in Definition 8.24, \mathbb{M} ein Monoid sowie κ ein Präautomat. Sei weiterhin P eine Menge von Zuständen und $p, q \in P$. Dann ist das Tupel $\mathbb{D} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}}, \kappa, \delta_p^P, \delta_q^P)$ ein klassischer Automat, wobei p den Startzustand und q den Endzustand darstellen.

Ein Wort $w \in B^{(*)}$ wird durch \mathbb{D} erkannt, falls $\delta_p^P \otimes \kappa(w) = \delta_q^P$???, d.h. $(\kappa(w))(p, q) = 1$.

Definition 8.27. Sei \mathbb{M} ein Monoid, P eine Menge von Zuständen und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Dann heiße $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa)$ ein \mathcal{S} -Präautomat bzgl. $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa)$, falls κ ein Homomorphismus von \mathbb{M} nach $(\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}$ ist.

Seien zusätzlich $\alpha, \omega \in S^P$, so ist $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$ ein \mathcal{S} -Automat bzgl. $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$.

Anmerkung 8.7. Präautomaten können also als \mathcal{B} -Präautomaten aufgefasst werden.

Definition 8.28. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und \mathbb{M} ein Monoid sowie κ ein Homomorphismus von \mathbb{M} nach $(\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}$. Dann ist $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}, \kappa)$ ein verallgemeinerter Präautomat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa)$.

Seien zusätzlich $\alpha, \omega \in S^V$, so ist $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$ ein verallgemeinerter Automat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$.

Definition 8.29. Sei \mathbb{M} ein Monoid, \mathcal{S} ein kommutatives Summoid und weiterhin $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$ eine \mathcal{S} -Algebra. Ist κ ein Homomorphismus von \mathbb{M} nach $\mathcal{A}_{\text{Mult}}$, so heißt $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\text{Mult}}, \kappa)$ verallgemeinerter \mathcal{S} -Präautomat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\text{Mult}}, \kappa)$.