

# Methoden angewandter Algebra 1/2

Alex Ivliev

21. September 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>allgemeine Definitionen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Inzidenzstrukturen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Summation</b>	<b>9</b>
3.1	Summationsstrukturen und Monoide . . . . .	13
3.2	Fuzzy-Inzidenzstrukturen und Matrizen . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Targoide und vollständige Verbände</b>	<b>19</b>
4.1	vollständige Verbände und Summation . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Summoide</b>	<b>23</b>
5.1	Produktsommen . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Łukasiewicz-Norm und -Monoid</b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b>Summoid-Module</b>	<b>33</b>
7.1	Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Netzwerke und Aktionsnetzwerke</b>	<b>46</b>
8.1	Netzwerke . . . . .	46
8.2	Aktionsnetzwerke . . . . .	50
8.3	$\mathcal{S}$ -Algebren . . . . .	55
8.4	Automaten . . . . .	58

# 1 allgemeine Definitionen

**Definition 1.1.** Die Menge der natürlichen Zahlen ist  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Definition 1.2.** Es sei  $\mathbb{2} = \{0, 1\}$ .

**Definition 1.3.** Für eine natürliche Zahl  $n$  ist  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definition 1.4.** Die Menge  $[0, \infty]$  ist definiert als  $[0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ .

**Definition 1.5.** Sei  $M$  eine Menge. Dann ist  $m \subseteq_{\text{fin}} M$ , falls  $m \subseteq M$  und  $m$  endlich ist.

**Definition 1.6.** Sei  $M$  eine Menge. Dann ist  $\mathcal{P}(M) = \{m \mid m \subseteq M\}$  die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

**Definition 1.7.** Sei  $M$  eine Menge und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann ist

$$\binom{M}{n} = \{m \subseteq M \mid |m| = n\}.$$

**Definition 1.8.** Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$ . Sei weiterhin  $b \in B$  ein Element aus der Zielmenge. Dann ist

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

**Definition 1.9.** Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$ . Dann bezeichnet  $f^{(-1)}$  die Umkehrabbildung von  $f$ .

**Definition 1.10.** Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung. Dann ist

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A: f(a) = b\}.$$

**Definition 1.11.** Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt konstant, falls

$$\forall a \in A: f(a) = b$$

für ein Element  $b \in B$ .

**Definition 1.12.** Das Tripel  $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$  heißt Monoid, falls  $M$  eine beliebige Menge,  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  eine innere zweistellige Verknüpfung und  $\varepsilon \in M$  ist und zusätzlich folgende Eigenschaften gelten:

- Assoziativität:  $\forall a, b, c \in M: (a * b) * c = a * (b * c)$
- neutrales Element:  $\forall m \in M: \varepsilon * m = m = m * \varepsilon$

$M$  wird dabei die Grundmenge des Monoids genannt. Gilt darüber hinaus noch

- Kommutativität:  $\forall a, b \in M: a * b = b * a$ ,

dann ist  $\mathbb{M}$  ein kommutatives Monoid.

**Definition 1.13.** Seien  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  Abbildungen. Dann ist  $g \circ f: A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$  die kontravariante Verkettung von  $(f, g)$ . Dagegen bezeichnet man  $f \bullet g: A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$  als die kovariante Verkettung von  $(f, g)$ .

Es gilt also  $g \circ f = f \bullet g$ .

**Definition 1.14.** Ist  $\alpha: I \rightarrow S$  eine Funktion zwischen zwei Mengen  $I$  und  $S$ , so ist

$$\alpha_i = \alpha(i).$$

**Definition 1.15.** Sei  $P$  eine Menge und  $R \subseteq P \times P$  eine Relation auf dieser Menge. Dann ist das Paar  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein binäres Relat.

Für  $(p, q) \in R$  schreibe auch  $p R q$ .

**Definition 1.16.** Ein binäres Relat  $\mathbb{P} = (P, R)$  heißt Präordnung, falls folgende Eigenschaften gelten:

- Reflexivität:  $\forall p \in P: p R p$
- Transitivität:  $\forall p, t, q \in P: p R t \wedge t R q \implies p R q$

$\mathbb{P}$  heißt Ordnung (partiell geordnete Menge), falls zusätzlich folgende Eigenschaft gilt:

- Antisymmetrie:  $\forall p, q \in P: p R q \wedge q R p \implies p = q$

*Beispiel 1.1.* Sei  $\Omega$  eine Menge. Dann ist  $\mathbb{P} = (P, R)$  mit  $P = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $R = \{(X, Y) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2 \mid X \subseteq Y\}$  eine Ordnung. Diese Ordnung soll mit  $R^\Omega = (\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$  bezeichnet werden.

**Definition 1.17.** Es sei  $M$  eine Menge von disjunkten Mengen. Dann ist

$$\dot{\bigcup} M = \bigcup M.$$

## 2 Inzidenzstrukturen

**Definition 2.1.** Es seien  $P$ ,  $B$  und  $I$  Mengen, wobei  $I \subseteq P \times B$ . Das Tripel  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  heißt Inzidenzstruktur.

Die Menge  $P$  wird als Menge von Punkten interpretiert und  $B$  als Menge von Blöcken. Gilt  $(p, b) \in I$  für ein  $p \in P$  und ein  $b \in B$ , so schreibe  $p I b$ .

*Beispiel 2.1* (Würfel). Bei einem Würfel ist  $P$  die Menge der 8 Ecken und  $B$  die Menge der 6 Seiten. Es gilt  $p I b$  für ein  $p \in P$  und ein  $b \in B$  genau dann wenn  $p$  eine Ecke der Seite  $b$  ist.

**Definition 2.2.** Eine Inzidenzstruktur  $(P, B, I)$  heißt endlich falls  $P$  und  $B$  (und daher  $I$ ) endlich sind.

**Definition 2.3.** Für eine Inzidenzstruktur  $(P, B, I)$  und ein Element  $p \in P$  ist weiterhin  $pI = \{b \in B \mid p I b\}$  die Menge aller Blöcke, die mit  $p$  inzidieren.

Für ein Element  $b \in B$  ist  $Ib = \{p \in P \mid p I b\}$  die Menge aller Punkte, die mit  $b$  inzidieren.

**Definition 2.4.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  heißt taktische Konfiguration mit den Parametern  $(v, r, b, k) \in \mathbb{N}^4$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- $|P| = v$  und  $|B| = b$
- $\forall p \in P: |pI| = r$
- $\forall b \in B: |Ib| = k$

*Beispiel 2.2* (Würfel). Die Inzidenzstruktur des Würfels aus Beispiel 2.1 ist eine taktische Konfiguration mit Parametern  $(8, 3, 6, 4)$ .

**Satz 2.1** (Doppelte Abzählung). Sei  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  eine endliche Inzidenzstruktur. Dann gilt

$$\sum_{p \in P} |pI| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\bigcup \{\{p\} \times pI \mid p \in P\} = I = \bigcup \{Ib \times \{b\} \mid b \in B\}$$

und daher

$$\sum_{p \in P} |pI| = |I| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

□

**Satz 2.2.** Ist  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  eine endliche taktische Konfiguration mit Parametern  $(v, r, b, k)$ , dann gilt:

$$v \cdot r = b \cdot k.$$

*Beweis.* Mithilfe von Satz 2.1 ergibt sich folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} v \cdot r &= \sum_{p \in P} r = \sum_{p \in P} |pI| \\ &= \sum_{b \in B} |Ib| = \sum_{b \in B} k = b \cdot k. \end{aligned}$$

□

**Definition 2.5.** Sei  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  eine Inzidenzstruktur. Die Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}^{-1} = (B, P, I^{-1})$  mit  $I^{-1} = \{(b, p) \in B \times P \mid p I b\}$  ist die zu  $\mathcal{I}$  duale Inzidenzstruktur.

**Satz 2.3.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  ist genau dann eine taktische Konfiguration, wenn  $\mathcal{I}^{-1} = (P^{-1}, B^{-1}, I^{-1})$  auch eine ist, wobei  $P^{-1} = B$  und  $B^{-1} = P$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{I}$  eine taktische Konfiguration mit Parametern  $(v, r, b, k)$ . Laut Definition gilt daher:

- $|P| = v$  und  $|B| = b$
- $\forall p \in P: |pI| = r$
- $\forall b \in B: |Ib| = k$

Für  $\mathcal{I}^{-1}$  ergeben sich folgende Parameter:

- $|P^{-1}| = |B| = b$  und  $|B^{-1}| = |P| = v$
- $\forall p^{-1} \in P^{-1}: |p^{-1}I^{-1}| = |Ib| = k$
- $\forall b^{-1} \in B^{-1}: |I^{-1}b^{-1}| = |pI| = r$

Also ist  $\mathcal{I}^{-1}$  eine taktische Konfiguration mit den Parametern  $(b, k, v, r)$ . □

*Beispiel 2.3.* Der Ikosaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern  $(12, 5, 20, 3)$  und dual zur taktischen Konfiguration mit Parametern  $(20, 3, 12, 5)$ , was dem Dodekaeder entspricht.

Der Oktaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern  $(6, 4, 8, 3)$  und dual zur taktischen Konfiguration mit Parametern  $(8, 3, 6, 4)$ , was dem Hexaeder entspricht.

**Satz 2.4** (Dualitätsprinzip). *Es gilt für alle taktischen Konfigurationen: Ist eine Aussage für eine dualitätsabgeschlossene Klasse von Inzidenzstrukturen wahr, so ist sie auch für die duale Inzidenzstruktur wahr.*

**Definition 2.6.** Seien  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  und  $\mathcal{I}' = (P', B', I')$  Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien  $\varphi: P \rightarrow P'$  und  $\psi: B \rightarrow B'$  Abbildungen, für die gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (p I b \implies \varphi(p) I' \psi(b)).$$

Dann heißt das Abbildungspaar  $(\varphi, \psi)$  Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$ . Homomorphismen zwischen Inzidenzstrukturen sind inzidenzerhaltend.

**Definition 2.7.** Ein Homomorphismus  $(\varphi, \psi)$  zwischen den Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  und  $\mathcal{I}' = (P', B', I')$  ist (inzidenz-)reflektierend, falls gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies p I b).$$

**Definition 2.8.** Ein reflektierender Homomorphismus  $(\varphi, \psi)$  heißt Isomorphismus, falls  $\varphi$  und  $\psi$  bijektiv sind. Zwei Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  heißen isomorph zueinander, falls zwischen ihnen ein Isomorphismus existiert. In diesem Fall schreibe  $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}'$ .

**Satz 2.5.** Seien  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  und  $\mathcal{I}' = (P', B', I')$  Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien  $\varphi: P \rightarrow P'$  und  $\psi: B \rightarrow B'$  bijektive Abbildungen. Dann gilt:  $(\varphi, \psi)$  ist ein Isomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  genau dann wenn  $(\varphi, \psi)$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  ist und  $(\varphi^{(-1)}, \psi^{(-1)})$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}'$  und  $\mathcal{I}$  ist.

*Beweis.* Angenommen  $(\varphi, \psi)$  ist ein Isomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$ . Dann ist  $(\varphi, \psi)$  ein reflektierender Homomorphismus, weshalb gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies p I b)$$

und daher auch

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies \varphi^{(-1)}(\varphi(p)) I \psi^{(-1)}(\psi(b))).$$

Zu jedem Punkt  $p' \in P'$  und jedem Block  $b' \in B'$  lässt sich wegen der Bijektivität von  $\varphi$  und  $\psi$  jeweils genau ein Element  $p \in P$  und  $b \in B$  finden, sodass  $\varphi(p) = p'$  bzw.  $\psi(b) = b'$ . Die obige Aussage kann also wie folgt umgeschrieben werden:

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi^{(-1)}(p') I \psi^{(-1)}(b')).$$

Somit ist  $(\varphi^{(-1)}, \psi^{(-1)})$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}'$  und  $\mathcal{I}$ .

Nun sei angenommen, dass  $(\varphi, \psi)$  und  $(\varphi^{(-1)}, \psi^{(-1)})$  Homomorphismen sind. Das heißt es gilt

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi^{(-1)}(p') I \psi^{(-1)}(b')).$$

Analog zum ersten Teil des Beweises lässt sich die Aussage wie folgt umschreiben:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (\varphi(p) I' \psi(b) \implies \varphi^{(-1)}(\varphi(p)) I \psi^{(-1)}(\psi(b))).$$

Also ist  $(\varphi, \psi)$  reflektierend und somit ein Isomorphismus.  $\square$

**Satz 2.6.** Seien  $\mathcal{I}, \mathcal{I}', \mathcal{I}''$  Inzidenzstrukturen. Sei weiterhin  $(\varphi, \psi)$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}'$  und  $(\varphi', \psi')$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}'$  und  $\mathcal{I}''$ . Dann ist  $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}''$ .

*Beweis.* Laut Definition gelten folgende Aussagen:

$$\forall p \in P \forall b \in B: (p I b \implies \varphi(p) I' \psi(b)).$$

und

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B': (p' I' b' \implies \varphi'(p') I'' \psi'(b')).$$

Da  $\varphi(p) \in P'$  und  $\psi(b) \in B'$  folgt aus  $p I b$  für alle  $p \in P$  und alle  $b \in B$ :

$$\varphi'(\varphi(p)) I'' \psi'(\psi(b)) = (\varphi' \circ \varphi)(p) I'' (\psi' \circ \psi)(b).$$

Also ist  $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}''$ .  $\square$

**Definition 2.9.** Sei  $\mathcal{I}$  eine Inzidenzstruktur.  $\mathcal{I}$  heißt selbstdual, falls  $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}^{-1}$ .

**Definition 2.10.** Gegeben seien drei natürliche Zahlen  $i, j, k$  mit  $i \leq j \leq n$ . Dann ist  $\mathcal{I}_{i,j}^n = ((\binom{[n]}{i}), (\binom{[n]}{j}), \subseteq)$  die sogenannte kombinatorische taktische Konfiguration mit den Parametern  $((\binom{n}{i}), (\binom{n-i}{j-i}), (\binom{n}{j}), (\binom{j}{i}))$ .

**Satz 2.7.** Seien  $i, j, k \in \mathbb{N}$  mit  $i \leq j \leq n$ . Dann ist  $\mathcal{I}_{i,j}^n$  eine taktische Konfiguration mit den Parametern  $((\binom{n}{i}), (\binom{n-i}{j-i}), (\binom{n}{j}), (\binom{j}{i}))$

*Beweis.* Sei  $I \in \binom{[n]}{i}$  und  $J \in \binom{[n]}{j}$ . Dann ist  $I \subseteq J$  genau dann wenn  $J$  alle Elemente von  $I$  enthält und zusätzlich  $|J| - |I|$  weitere aus  $[n] \setminus I$ . Das heißt  $I$  ist Teilmenge von  $|\binom{[n] \setminus I}{j-i}| = \binom{n-i}{j-i}$  Mengen.

Umgekehrt ist  $J$  Obermenge von allen  $i$ -elementigen Teilmengen von  $J$ , von denen es  $|\binom{J}{i}| = \binom{j}{i}$  viele gibt.  $\square$

**Satz 2.8.** Sei  $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$  mit  $i \leq \frac{n}{2}$  eine kombinatorische taktische Konfiguration. Dann ist  $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$  selbstdual.

*Beweis.* Sei  $\varphi: \binom{[n]}{i} \rightarrow \binom{[n]}{n-i}, X \mapsto [n] \setminus X$  eine bijektive Abbildung. Seien weiterhin  $I \in \binom{[n]}{i}$  und  $J \in \binom{[n]}{n-i}$  Mengen mit  $I \subseteq J$ . Das heißt für alle  $i \in I$  gilt

$$i \in I \implies i \in J.$$

Die Kontraposition lautet

$$i \notin J \implies i \notin I,$$

was äquivalent ist zu

$$i \in [n] \setminus J \implies i \in [n] \setminus I \iff i \in \varphi^{(-1)}(J) \implies i \in \varphi(I),$$

also  $\varphi(I) \supseteq \varphi^{(-1)}(J)$ . Das selbe Argument kann auch verwendet werden, um zu zeigen, dass aus  $J \supseteq I$  folgt, dass  $\varphi^{(-1)}(J) \subseteq \varphi(I)$ , womit gezeigt ist, dass das Abbildungspaar  $(\varphi, \varphi^{(-1)})$  ein Isomorphismus zwischen  $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$  und  $(\mathcal{I}_{i,n-i}^n)^{-1}$  ist.  $\square$

**Beispiel 2.4** (Tetraeder). Kombinatorische Beschreibung eines Tetraeders lautet:  $\mathcal{I}_{1,3}^4 = ((\binom{[4]}{1}), (\binom{[4]}{3}), \subseteq)$ . Die duale Inzidenzstruktur ist:  $((\binom{[4]}{3}), (\binom{[4]}{1}), \supseteq)$ . Der Isomorphismus  $(\varphi, \psi)$  ist gegeben durch  $\varphi: \binom{[4]}{1} \rightarrow \binom{[4]}{3}, x \mapsto \bar{x}$  und weiterhin  $\psi: \binom{[4]}{3} \rightarrow \binom{[4]}{1}, x \mapsto \bar{x}$ .



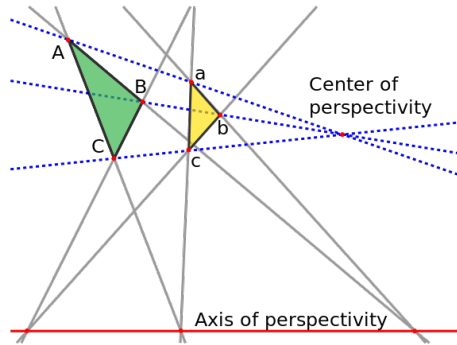


Abbildung 1: Desargues-Konfiguration

*Beispiel 2.5* (Desargues-Konfiguration). Die Inzidenzstruktur ist gegeben durch  $\mathcal{I}_{2,3}^5 = ((\begin{smallmatrix} [5] \\ 2 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} [5] \\ 3 \end{smallmatrix}), \subseteq)$ . Die Desargues-Konfiguration ist selbstdual und hat 10 Punkte (Die Punkte  $A, B, C, a, b, c$ , das Zentrum der Perspektive und die drei Punkte, die auf der roten Linie liegen) und 10 Blöcke (Die 6 Linien der zwei Dreiecke, die 3 Linien, die sich im Zentrum der Perspektive treffen und die Achse der Perspektive). In der dazu dualen Konfiguration sind Achse und Zentrum der Perspektive getauscht.

### 3 Summation

**Definition 3.1.** Das Paar  $(S, \Sigma)$  heißt [finitäre] Summationsstruktur, falls  $\Sigma$  eine Abbildungsvorschrift (Klassenabbildung) ist, die jeder Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  mit beliebiger [endlicher] Definitionsmenge  $I$  genau ein Element  $\Sigma(\alpha)$  aus  $S$  zuordnet, sodass gilt:

- Fundierungsaxiom: Ist  $\alpha: \{i\} \rightarrow S$ , so gilt  $\Sigma(\alpha) = \alpha(i)$ .
- Teilsummenaxiom: Sind  $\alpha: I \rightarrow S$  und  $\eta: I \rightarrow A$  Abbildungen [ $A$  und  $I$  endlich], so gilt für die Abbildung  $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  stets:

$$\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha).$$

Die Menge  $S$  wird Grundmenge der Summationsstruktur genannt.

**Definition 3.2.** Sei  $(S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur und  $\alpha: I \rightarrow S$  eine beliebige Abbildung [ $I$  endlich]. So ist folgende Schreibweise definiert

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) = \Sigma(\alpha).$$

**Satz 3.1.** Sei  $\Omega$  eine Menge. Dann ist  $(\mathcal{P}(\Omega), \bigcup)$  eine Summationsstruktur, wobei für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  die Summation über  $\alpha$  wie folgt definiert ist:

$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I: x \in \alpha(i)\}.$$

*Beweis.* Sei  $\alpha: \{i'\} \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  eine Abbildung. Es ist

$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \{i'\}: x \in \alpha(i)\} = \alpha(i').$$

Also gilt das Fundierungsaxiom.

Seien nun  $\alpha: I \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$  und  $\eta: I \rightarrow A$  Abbildungen. Dann gilt für die Abbildung  $\beta: A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega), a \mapsto \bigcup \alpha|_{\eta^{-1}(a)}$ :

$$\begin{aligned} \beta(a) &= \{x \in \Omega \mid \exists i \in \eta^{-1}(a): x \in \alpha(i)\}. \\ \bigcup \beta &= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A: x \in \beta(a)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A \exists i \in \eta^{-1}(a): x \in \alpha(i)\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists i \in I: x \in \alpha(i)\} \\ &= \bigcup \alpha. \end{aligned}$$

Also gilt auch das Teilsummenaxiom. □

**Satz 3.2** (Invarianz der Summation gegenüber Umbenennung). Sei  $(S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur. Sei außerdem  $\alpha: I \rightarrow S$  eine Abbildung und sei  $\tau: H \rightarrow I$  eine Bijektion [ $I$  endlich]. Dann gilt:

$$\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha).$$

*Beweis.* Sei  $\eta = \tau^{-1}$  eine Abbildung von  $I$  nach  $H$ . Weiterhin sei eine Abbildung  $\beta: H \rightarrow S, h \mapsto \Sigma(\alpha|_{\{\eta^{-1}(h)\}})$  definiert. Aus dem Fundierungsaxiom folgt dann

$$\beta(h) = \Sigma(\alpha|_{\{\tau(h)\}}) = \alpha(\tau(h)) = (\alpha \circ \tau)(h).$$

Also ist  $\beta = \alpha \circ \tau$ . Weiterhin gilt laut Teilsommenaxiom  $\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$  und damit  $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$ .  $\square$

**Definition 3.3.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur. Dann ist

$$0_{\mathbb{S}} = \Sigma(\emptyset \rightarrow S).$$

**Definition 3.4.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur. Dann ist für beliebige Abbildungen  $\alpha: I \rightarrow S$

$$\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0_{\mathbb{S}}\}$$

der Support von  $\alpha$  in  $\mathbb{S}$ .

**Satz 3.3.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur. Dann gilt für alle Abbildungen  $\alpha: I \rightarrow S$

$$\Sigma(\alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}) = \Sigma(\alpha).$$

*Beweis.* Es seien die Abbildungen  $\alpha' = \alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}$ ,  $\eta: \text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) \rightarrow I, i \mapsto i$  sowie  $\beta: I \rightarrow S, i \mapsto \Sigma(\alpha'|_{\eta^{-1}(i)})$  gegeben. Dann ist für ein  $i \in I$

$$\begin{aligned} \beta(i) &= \begin{cases} \alpha'(i) = \alpha(i) & \text{falls } i \in \text{supp}(\alpha) \\ 0_{\mathbb{S}} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \alpha(i). \end{aligned}$$

Aus dem Teilsommenaxiom folgt nun

$$\Sigma(\alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}) = \Sigma(\alpha') = \Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha).$$

$\square$

**Korollar 3.1.** Ist  $\alpha: I \rightarrow S, i \mapsto 0_{\mathbb{S}}$  eine konstante Funktion. So gilt

$$\Sigma(\alpha) = 0_{\mathbb{S}}.$$

*Beweis.* Wie soeben gezeigt gilt

$$\Sigma(\alpha) = \Sigma(\alpha|_{\text{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}) = \Sigma(\alpha|_{\emptyset}) = 0_{\mathbb{S}}.$$

$\square$

**Definition 3.5.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur und  $N$  eine Menge. Dann ist  $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$  die  $N$ -fache Potenz von  $\mathbb{S}$ , wobei  $\bar{\Sigma}$  für jede Abbildungsfamilie  $(\alpha_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$  ( $I$  [endliche] Menge) wie folgt definiert ist:

$$\bar{\Sigma} \alpha_i: N \rightarrow S, n \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i(n).$$

**Satz 3.4.** Ist  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur und  $N$  eine Menge. So ist auch  $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$  eine Summationsstruktur.

*Beweis.* Sei  $\alpha: \{i\} \rightarrow S^N$  eine Abbildung. Da das Fundierungsaxiom in  $\mathbb{S}$  gilt, ist  $\bar{\Sigma}(\alpha): N \rightarrow S, n \mapsto \alpha_i(n)$  und somit  $\bar{\Sigma}(\alpha) = \alpha(i)$ . Also gilt das Fundierungsaxiom in  $\mathbb{S}^N$ .

Seien nun  $\alpha: I \rightarrow S^N$ ,  $\eta: I \rightarrow A$  und  $\beta: A \rightarrow S^N, a \mapsto \bar{\Sigma}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  Abbildungen. Dann gilt für alle  $n \in N$ :

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}(\beta))(n) &= \sum_{a \in A} (\beta(a))(n) \\ &= \sum_{a \in A} (\bar{\Sigma}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)}))(n) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{i \in \eta^{-1}(a)} (\alpha(i))(n) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha(i))(n) \\ &= (\bar{\Sigma}(\alpha))(n), \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Teilsommenaxiom für  $\mathbb{S}$  folgt.  $\square$

**Definition 3.6.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine finitäre Summationsstruktur und  $N$  eine Menge. Dann ist  $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$  die  $N$ -fache Kopotenz von  $\mathbb{S}$ , wobei

$$S^{(N)} = \{s \in S^N \mid \text{supp}_{\mathbb{S}}(s) \text{ endlich}\}$$

und  $\bar{\Sigma}$  für jede Abbildungsfamilie  $(\alpha_i)_{i \in I} \in (S^{(N)})^I$  ( $I$  endliche Menge) wie folgt definiert ist

$$\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}: N \rightarrow S, n \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i(n).$$

**Satz 3.5.** Ist  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur und  $N$  eine Menge. So ist  $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$  eine finitäre Summationsstruktur.

*Beweis.* Das Gelten von Fundierungs- und Teilsommenaxiom lassen sich analog zu Satz 3.4 beweisen. An dieser Stelle soll daher lediglich gezeigt werden, dass für alle Abbildungen  $\alpha \in (S^{(N)})^I$  mit endlicher Indexmenge  $I$  gilt, dass  $\text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$  endlich ist, d.h.  $\bar{\Sigma}(\alpha) \in S^{(N)}$ .

Der Support von  $\bar{\Sigma}(\alpha)$  ist

$$\text{supp}_{\mathbb{S}}\left(\overline{\sum_{i \in I} \alpha_i}\right) = \{n \in N \mid \sum_{i \in I} \alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}\}.$$

Ist  $N$  endlich folgt die Aussage daher sofort. Sei  $N$  also eine unendliche Menge. Aus Korollar 3.1 folgt, dass für alle  $n \in \text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$  ein  $i \in I$  existieren muss, sodass  $\alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$ . Für einen Widerspruch sei angenommen  $\text{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$  wäre unendlich. Da  $I$  aber eine endliche Menge ist, muss es ein  $j \in I$  geben, sodass  $\alpha_j(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$  für unendlich viele  $n \in N$ . Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $\alpha_j \in S^{(N)}$ .  $\square$

**Definition 3.7.** Seien  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  und  $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$  Summationsstrukturen. Dann heißt eine Abbildung  $\varphi: S \rightarrow S'$  Homomorphismus von  $\mathbb{S}$  nach  $\mathbb{S}'$ , falls für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  stets gilt:

$$\varphi(\Sigma(\alpha)) = \Sigma'(\varphi \circ \alpha).$$

Ein bijektiver Homomorphismus wird Isomorphismus genannt.

**Satz 3.6.** Seien  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ ,  $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$  und  $\mathbb{S}'' = (S'', \Sigma'')$  Summationsstrukturen. Seien weiterhin  $\varphi: S \rightarrow S'$  und  $\varphi': S' \rightarrow S''$  Homomorphismen. Dann ist  $\varphi' \circ \varphi: S \rightarrow S''$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{S}$  nach  $\mathbb{S}''$ .

*Beweis.* Für eine Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)(\Sigma(\alpha)) &= \varphi'(\varphi(\Sigma(\alpha))) \\ &= \varphi'(\Sigma'(\varphi \circ \alpha)) = \Sigma''((\varphi' \circ \varphi) \circ \alpha). \end{aligned}$$

□

**Definition 3.8.** Sei  $\mathbb{S}$  eine Summationsstruktur. Ein Homomorphismus von  $\mathbb{S}$  nach  $\mathbb{S}$  heißt Endomorphismus von  $\mathbb{S}$ .

$\text{End}_{\mathbb{S}}$  bezeichnet die Menge aller Endomorphismen auf  $\mathbb{S}$ .

**Definition 3.9.** Eine [finitäre] Summationsstruktur  $(S, \Sigma)$  heißt idempotent, falls für jede konstante Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  [wobei  $I$  endlich] gilt:

$$\forall i \in I: \Sigma(\alpha) = \alpha(i).$$

**Satz 3.7.** Sei  $(S, \Sigma)$  eine Summationsstruktur. Dann ist  $(S, \Sigma)$  genau dann idempotent, wenn für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  und jede surjektive Abbildung  $\tau: H \rightarrow I$  gilt:  $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$ .

*Beweis.* Zunächst sei angenommen, dass  $(S, \Sigma)$  idempotent ist. Setze  $\eta = \tau$ . Dann ist  $\beta: I \rightarrow S, i \mapsto \Sigma((\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)})$  und es gilt  $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta)$  laut dem Teilsummenaxiom. Die Abbildung  $(\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)}$  ist konstant, weshalb wegen der Idempotenz von  $(S, \Sigma)$  für alle  $i \in I$  und  $h \in \tau^{-1}(i)$  gilt:

$$\beta(i) = \Sigma((\alpha \circ \tau)|_{\tau^{-1}(i)}) = (\alpha \circ \tau)(h) = \alpha(i).$$

Das heißt  $\alpha = \beta$  und somit  $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$ .

Gilt nun umgekehrt  $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$  für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  und jede surjektive Abbildung  $\tau: H \rightarrow I$ . Sei weiterhin für ein beliebiges  $c \in S$  eine konstante Abbildung  $\gamma: H \rightarrow S, h \mapsto c$  definiert. Für ein festes  $j \in H$  seien außerdem  $\tau: H \rightarrow \{j\}, h \mapsto j$  und  $\alpha: \{j\} \rightarrow S, j \mapsto c$  Abbildungen. Da  $\gamma = \alpha \circ \tau$  und  $\tau$  eine surjektive Abbildung ist gilt laut Voraussetzung für alle  $h \in H$ :

$$\Sigma(\gamma) = \Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha) = c = \gamma(h),$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Fundierungsaxiom folgt.

□

### 3.1 Summationsstrukturen und Monoide

**Definition 3.10.** Es sei  $\mathbb{S} = (M, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann ist  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  mit  $0 = 0_{\mathbb{S}}$  und  $+: M \times M \rightarrow M, (a, b) \mapsto \Sigma(\alpha)$ , wobei  $\alpha: [2] \rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}$  das zu  $\mathbb{S}$  gehörige kommutative Monoid.

**Satz 3.8.** Sei  $(M, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann ist dazu gehörige kommutative Monoid  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein kommutatives Monoid.

*Beweis.* Zunächst soll gezeigt werden, dass  $\mathbb{M}$  assoziativ ist. Dazu sei  $a, b, c \in M$ . Weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\alpha &: [3] \rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c\}, \\ \eta_1 &: [3] \rightarrow [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2\}, \\ \eta_2 &: [3] \rightarrow [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2\}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}\beta_1 &: [2] \rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ \beta_2 &: [2] \rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(i)}).\end{aligned}$$

Da  $\beta_1$  eine Funktion von  $[2] \rightarrow M$  ist kann  $\Sigma(\beta_1)$  wie folgt dargestellt werden:

$$\Sigma(\beta_1) = \beta_1(1) + \beta_1(2).$$

$\beta_1(1)$  ergibt sich aus folgender Gleichungskette

$$\begin{aligned}\beta_1(1) &= \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(1)}) \\ &= \Sigma(\alpha_{|\{1,2\}}) \\ &= \alpha(1) + \alpha(2) = a + b.\end{aligned}$$

$\beta_1(2)$  kann dagegen wie folgt berechnet werden

$$\beta_1(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\{3\}}) = \alpha(3) = c$$

Insgesamt ist also  $\Sigma(\beta_1) = (a + b) + c$ .

Analog zu  $\beta_1$  kann auch  $\Sigma(\beta_2)$  wie folgt angegeben werden

$$\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2).$$

$\beta_2(1)$  ist

$$\beta_2(1) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(1)}) = \alpha(1) = a.$$

Für  $\beta_2(2)$  ergibt sich

$$\beta_2(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}}).$$

Da  $\alpha|_{\{2,3\}}$  keine Abbildung von  $[2] \rightarrow M$  ist bedarf es folgender Umbenennung:

$$\tau: [2] \rightarrow \{2,3\}, \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3\}.$$

Nun kann  $\beta_2(2)$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\beta_2(2) &= \Sigma(\alpha|_{\{2,3\}}) \\ &= \Sigma(\alpha|_{\{2,3\}} \circ \tau) \\ &= (\alpha|_{\{2,3\}} \circ \tau)(1) + (\alpha|_{\{2,3\}} \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(2) + \alpha(3) \\ &= b + c.\end{aligned}$$

Also ist  $\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2) = a + (b + c)$ .

Nach Teilsommenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Als nächstes soll gezeigt werden, dass 0 tatsächlich das neutrale Element ist. Dazu sei  $m \in M$  ein beliebiges Element aus  $M$  und weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\alpha: \{1\} &\rightarrow \{m\}, 1 \mapsto m \\ \eta_1: \{1\} &\rightarrow [2], 1 \mapsto 1 \\ \eta_2: \{1\} &\rightarrow [2], 1 \mapsto 2\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}\beta_1: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ \beta_2: [2] &\rightarrow M, i \mapsto \Sigma(\alpha|_{\eta_2^{-1}(i)}).\end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned}\Sigma(\beta_1) &= \beta_1(1) + \beta_1(2) \text{ und} \\ \Sigma(\beta_2) &= \beta_2(1) + \beta_2(2).\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\beta_1(1) &= \Sigma(\alpha|_{\eta_1^{-1}(1)}) = \Sigma(\alpha|_{\{1\}}) = \alpha(1) = m \text{ und} \\ \beta_1(2) &= \Sigma(\alpha|_{\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha|_{\emptyset}) = 0.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\beta_2(1) &= \Sigma(\alpha|_{\eta_2^{-1}(1)}) = \Sigma(\alpha|_{\emptyset}) = 0 \text{ und} \\ \beta_2(2) &= \Sigma(\alpha|_{\eta_2^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha|_{\{1\}}) = \alpha(1) = m.\end{aligned}$$

Laut Teilsummenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

Um letztendlich die Kommutativität zu zeigen seien  $a, b \in M$  zwei Elemente aus  $M$  und folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} \alpha: [2] &\rightarrow M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\} \text{ und} \\ \tau: [2] &\rightarrow [2], \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1\}. \end{aligned}$$

Laut Umbenennungssatz gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= \alpha(1) + \alpha(2) \\ &= \Sigma(\alpha) \\ &= \Sigma(\alpha \circ \tau) \\ &= (\alpha \circ \tau)(1) + (\alpha \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(\tau(1)) + \alpha(\tau(2)) = \alpha(2) + \alpha(1) = b + a. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Definition 3.11.** Gegeben sei ein kommutatives Monoid  $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ . Dann ist  $(M, \Sigma^{\text{fin}})$  die zu  $\mathbb{M}$  gehörige finitäre Summationsstruktur, wobei für jede endliche Menge  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  und jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow M$

$$\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i_1) + \alpha(i_2) + \dots + \alpha(i_n).$$

**Satz 3.9.** Sei  $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$  ein kommutatives Monoid. Dann ist  $(M, \Sigma^{\text{fin}})$  eine finitäre Summationsstruktur.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit folgt aus der Kommutativität von  $\mathbb{M}$ .

Sei  $\alpha: \{i\} \rightarrow M$  eine Abbildung. Dann ist  $\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i)$ . Es gilt demnach das Fundierungsaxiom.

Seien weiterhin  $\alpha: I \rightarrow M$ ,  $\eta: I \rightarrow A$  und  $\beta: A \rightarrow M$ ,  $a \mapsto \Sigma^{\text{fin}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  Abbildungen, wobei  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  und  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  endliche Mengen sind. Da

$$\bigcup_{a \in A} \eta^{-1}(a) = I$$

ist wegen der Assoziativität und Kommutativität von  $\mathbb{M}$

$$\Sigma^{\text{fin}}(\beta) = \beta(a_1) + \dots + \beta(a_m) = \alpha(i_1) + \dots + \alpha(i_n) = \Sigma^{\text{fin}}(\alpha).$$

Also gilt auch das Teilsummenaxiom.  $\square$



**Definition 3.12.** Ein kommutatives Monoid  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  heiße natürlich geordnet, falls  $\leq_{\mathbb{M}} = \{(x, y) \in M^2 \mid \exists t \in M: x + t = y\}$  eine Ordnungsrelation definiert.

**Satz 3.10.** Sei  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein kommutatives Monoid. Dann ist  $\mathbb{M}$  genau dann natürlich geordnet wenn gilt:

$$\forall x, s, t \in M: (x + s) + t = x \implies x + s = x. \quad (*)$$

*Beweis.* Ist  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein kommutatives Monoid, so ist  $(M, \leq_{\mathbb{M}})$  stets reflexiv und transitiv. Denn für alle  $x$  existiert  $0 \in M$  mit  $x + 0 = x$  und somit  $x \leq_{\mathbb{M}} x$ . Gilt außerdem  $x \leq_{\mathbb{M}} y$  und  $y \leq_{\mathbb{M}} z$ , d.h. ist  $x + t_1 = y$  und  $y + t_2 = z$  für  $t_1, t_2 \in M$ . Dann ist  $x + (t_1 + t_2) = z$ , wobei  $t_1 + t_2 \in M$ , womit  $x \leq_{\mathbb{M}} z$  gilt.

Also bleibt zu zeigen, dass  $(M, \leq_{\mathbb{M}})$  genau dann anti-symmetrisch ist wenn  $(*)$  gilt. Sei dazu  $(M, \leq_{\mathbb{M}})$  anti-symmetrisch und sei außerdem  $(x + s) + t = x$  für beliebige  $x, s, t \in M$ . Dann ist  $x \leq_{\mathbb{M}} x + s$  und  $x + s \leq_{\mathbb{M}} x$ , also  $x = x + s$ .

Gilt umgekehrt  $(*)$  und seien  $x, y \in M$  mit  $x \leq_{\mathbb{M}} y$  und  $y \leq_{\mathbb{M}} x$ . Das heißt es existiert  $t_1, t_2 \in M$  mit  $x + t_1 = y$  und  $y + t_2 = x$ . Also ist  $(x + t_1) + t_2 = x$ , woraus laut Voraussetzung  $x + t_1 = x$ , also  $y = x$ , folgt.  $\square$

*Beispiel 3.1.* Beispiele für ein natürlich geordnetes kommutatives Monoid sind  $(\mathbb{N}, +, 0)$  und  $([0, \infty], +, 0)$ , wobei  $x + \infty = \infty$ .

Ein Gegenbeispiel ist  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ , da  $0 \leq 1$  und  $1 \leq 0$  gilt.

**Definition 3.13.** Sei  $(M, +, 0)$  ein Monoid. Ein Element  $x \in M$  heißt idempotent, falls

$$x + x = x.$$

Ein Monoid heißt idempotent, falls jedes seiner Elemente idempotent ist.

**Satz 3.11.** Ein kommutatives Monoid  $\mathbb{M}$  ist genau dann idempotent, wenn die zu  $\mathbb{M}$  gehörige finitäre Summationsstruktur idempotent ist.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein idempotentes kommutatives Monoid. Sei weiterhin  $\alpha: I \rightarrow M$  eine Abbildung mit endlicher Indexmenge  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ , sodass  $\forall i \in I: \alpha(i) = m$  für ein  $m \in M$ . Dann ist für alle  $i \in I$

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{fin}}(\alpha) &= \alpha(i_1) + \dots + \alpha(i_n) \\ &= m + \dots + m &= m = \alpha(i). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $(M, \Sigma^{\text{fin}})$  eine idempotente Summationsstruktur und  $m \in M$  ein Element aus der Grundmenge. Weiterhin sei  $\alpha: [2] \rightarrow M, i \mapsto m$  eine konstante Abbildung. Es gilt

$$m + m = \alpha(1) + \alpha(2) = \Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = m.$$

$\square$

### 3.2 Fuzzy-Inzidenzstrukturen und Matrizen

**Definition 3.14.** Eine Matrix über einer Menge  $S$  (auch  $S$ -wertige Matrix) ist definiert als Tripel  $(P, B, \alpha)$  bestehend aus den Mengen  $P$ ,  $B$  und einer Abbildung  $\alpha: P \times B \rightarrow S$ .

Wir sagen auch, dass  $\alpha$  eine  $(P \times B)$ -Matrix über  $S$  ist.

**Definition 3.15.** Eine  $S$ -wertige Matrix  $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$  wird auch Fuzzy-Inzidenzstruktur genannt. Ist  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur, so nennt man  $\mathcal{I}$  auch eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über  $\mathbb{S}$ . Sind  $P$  und  $B$  endlich, so ist  $\mathcal{I}$  finitär.

**Definition 3.16.** Gegeben sei eine  $S$ -wertige Matrix  $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ . Für jedes  $p \in P$  heiße die Abbildung  $\alpha(p, \cdot): B \rightarrow S, b \mapsto \alpha(p, b)$  die  $p$ -te Zeile von  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$ . Die Abbildung  $\text{row}_\alpha: P \rightarrow S^B, p \mapsto \alpha(p, \cdot)$  ist die Row-Map für  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$ .

Analog wird für jedes  $b \in B$  die Abbildung  $\alpha(\cdot, b): P \rightarrow S, p \mapsto \alpha(p, b)$  als die  $b$ -te Spalte von  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$  bezeichnet. Weiterhin ist  $\text{col}_\alpha: B \rightarrow S^P, b \mapsto \alpha(\cdot, b)$  die Column-Map für  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$ .

**Definition 3.17.** Sei  $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$  eine  $S$ -wertige Fuzzy-Inzidenzstruktur über  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ . Dann ist die Zeilensumme von  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$

$$\Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \alpha(p, b).$$

Analog ist die Spaltensumme von  $\mathcal{I}$  bzw.  $\alpha$  definiert als

$$\Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{p \in P} \alpha(p, b).$$

**Definition 3.18.** Eine Fuzzy-Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$  über  $\mathbb{S}$  wird als taktische Fuzzy-Konfiguration über  $\mathbb{S}$  bezeichnet, falls  $r_{\mathcal{I}}$  und  $k_{\mathcal{I}}$  existieren mit

- $\forall p \in P: \Sigma(\alpha(p, \cdot)) = r_{\mathcal{I}}$  und
- $\forall b \in B: \Sigma(\alpha(\cdot, b)) = k_{\mathcal{I}}$ .

**Satz 3.12** (Satz der doppelten Abzählung). *Sei  $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$  eine [finitäre] Fuzzy-Inzidenzstruktur über einer [finitären] Summationsstruktur  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ . Dann gilt:*

$$\sum_{p \in P} \sum_{b \in B} \alpha(p, b) = \Sigma(\alpha) = \sum_{b \in B} \sum_{p \in P} \alpha(p, b).$$

*Beweis.* Es seien  $\eta: P \times B \rightarrow P, (p, b) \mapsto p$  und  $\beta: P \rightarrow S, p \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(p)})$  Abbildungen. Desweiteren sei eine bijektive Abbildung  $\tau_p: B \rightarrow \{p\} \times B, b \mapsto (p, b)$  gegeben. Für ein  $p \in P$  ist

$$\begin{aligned} \beta(p) &= \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(p)}) \\ &= \Sigma(\alpha_{|\{p\} \times B}) \\ &= \Sigma(\alpha_{|\{p\} \times B} \circ \tau_p) \\ &= \Sigma(\alpha(p, \cdot)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mithilfe des Teilsommenaxioms:

$$\begin{aligned}\sum_{p \in P} \sum_{b \in B} \alpha(p, b) &= \sum_{p \in P} \Sigma(\alpha(p, \cdot)) \\ &= \sum_{p \in P} \beta(p) \\ &= \Sigma(\alpha).\end{aligned}$$

Analog kann ebenfalls  $\sum_{b \in B} \sum_{p \in P} \alpha(p, b) = \Sigma(\alpha)$  gezeigt werden.  $\square$

**Definition 3.19.** Sei  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  eine endliche Inzidenzstruktur. Sei weiterhin

$$\alpha_{\mathcal{I}}: P \times B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, (p, b) \mapsto \begin{cases} 1 & p I b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $(P, B, \alpha_{\mathcal{I}})$  eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über der finitären Summationsstruktur  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma)$ , wobei  $\Sigma$  die erweiterte normale Summation darstellt.

**Satz 3.13.** Eine endliche Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, B, I)$  ist genau dann eine taktische Konfiguration mit den Parametern  $(|P|, r, |B|, k)$ , wenn  $\mathcal{I}' = (P, B, \alpha_{\mathcal{I}})$  eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern  $(|P|, r_{\mathcal{I}}, |B|, k_{\mathcal{I}})$  über der natürlichen Summationsstruktur  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma)$  ist. Insbesondere ist  $r = r_{\mathcal{I}}$  und  $k = k_{\mathcal{I}}$ .

*Beweis.* Sei  $p \in P$  ein beliebiges Element in  $P$ . Dann gilt

$$\Sigma(\alpha_{\mathcal{I}}(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \alpha_{\mathcal{I}}(p, b) = \sum_{b \in pI} 1 = |pI|.$$

Ein ähnliches Argument kann auch für die Blöcke verwendet werden, wodurch die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

**Satz 3.14.** Ist  $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$  eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern  $(|P|, r_{\mathcal{I}}, |B|, k_{\mathcal{I}})$  über der Summationsstruktur  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ , so gilt:

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

*Beweis.* Mithilfe der doppelten Abzählung ergibt sich:

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{p \in P} \Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

$\square$

## 4 Targoide und vollständige Verbände

**Definition 4.1.** Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein binäres Relat. Zu einer Teilmenge  $X \subseteq P$  heiße  $t \in P$  Target von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$  falls  $\forall x \in X: x R t$ .

Analog heißt  $s \in X$  Source von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$  falls  $\forall x \in X: s R x$ .

**Definition 4.2.** Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein binäres Relat und  $X \subseteq P$ . Dann ist  $t$  ein essentielles Target von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$ , falls es ein Target von  $X$  ist und weiterhin gilt:

$$\forall u \in P: ((\forall x \in X: x R u) \implies t R u),$$

d.h. wenn für alle Targets  $u \in P$  von  $X$  gilt  $t R u$ .

Eine Source  $s \in P$  von  $X$  ist essentiell, falls für alle Sources  $u \in P$  von  $X$  gilt  $u R s$ .

**Definition 4.3.** Ein binäres Relat  $\mathbb{P} = (P, R)$  heißt Targoid falls jede Teilmenge  $X \subseteq P$  ein essentielles Target besitzt (Targoid-Eigenschaft).

Analog dazu heißt ein binäres Relat Sourcoid falls jede Teilmenge  $X \subseteq P$  eine essentielle Source besitzt (Sourcoid-Eigenschaft).

**Definition 4.4.** Ist  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein binäres Relat, so ist  $\mathbb{P}^{-1} = (P, R^{-1})$  mit  $R^{-1} = \{(q, p) \in R \mid p R q\}$  das dazu duale binäre Relat bzw. sein Opposite.

**Satz 4.1.** Ein binäres Relat  $\mathbb{P} = (P, R)$  ist ein Targoid genau dann wenn  $\mathbb{P}^{-1}$  ein Sourcoid ist.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein Targoid und  $X \subseteq P$  eine beliebige Teilmenge. Ist  $t \in P$  ein Target von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$ , dann gilt  $x R t$  für alle  $x \in X$ , also auch  $t R^{-1} x$ . Das heißt die Targets von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$  entsprechen genau den Sources von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}^{-1}$ .

Sei nun  $t \in P$  ein essentielles Target von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$ . Das heißt für alle Targets  $u \in P$  bzgl.  $\mathbb{P}$  gilt  $t R u$ , also  $u R^{-1} t$ . Da alle Targets von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}$  Sources von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}^{-1}$  sind, ist  $t$  eine essentielle Source von  $X$  bzgl.  $\mathbb{P}^{-1}$ .  $\square$

**Lemma 4.1.** Sei  $(P, R)$  ein Targoid mit nichtleerer Grundmenge  $P$ . Dann existiert ein Element  $s \in P$  für das gilt:  $\forall p \in P: s R p$ . Das heißt insbesondere, dass  $s$  Source von jeder Teilmenge von  $P$  ist.

*Beweis.* Sei  $X = \emptyset \subseteq P$ . Dann ist die Menge aller Targets von  $X$  gleich der Menge  $P \neq \emptyset$ . Da  $(P, R)$  ein Targoid ist, gibt es zu  $X$  ein essentielles Target  $t$ . Das heißt, es gilt  $t R p$  für alle Targets  $p$  von  $X$ , was aber allen Elementen in  $P$  entspricht.  $\square$

**Satz 4.2.** Ein binäres Relat  $\mathbb{P} = (P, R)$  ist ein Targoid genau dann wenn  $\mathbb{P}$  ein Sourcoid ist.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein Targoid und  $X \subseteq P$  eine beliebige Teilmenge von  $P$ . Sei weiterhin  $S_X = \{s \in P \mid s \text{ ist Source von } X\} \subseteq P$ .  $S_X$  ist wegen Lemma 4.1 nicht leer. Da  $\mathbb{P}$  ein Targoid ist, existiert ein essentielles Target  $t$  von  $S_X$ . Für alle  $x \in X$  gilt:  $x$  ist Target von  $S_X$ . Da  $t$  ein essentielles Target ist gilt

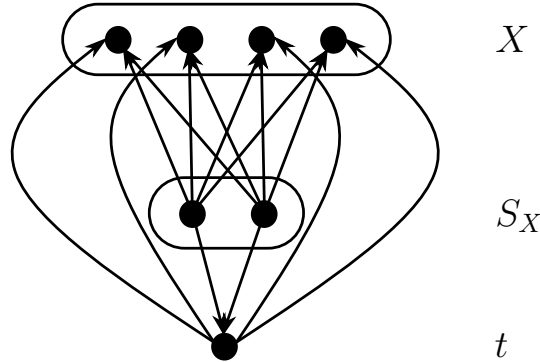


Abbildung 2: Veranschaulichung von Satz 4.2

aber auch  $t R x$  für alle  $x \in X$ . Das heißt, dass  $t$  eine Source von  $X$  ist. Sei weiterhin  $s \in P$  eine Source von  $X$ . Dann ist  $s \in S_X$  und da  $t$  ein Target von  $S_X$  gilt  $s R t$ . Also ist  $t$  eine essentielle Source von  $X$ .

Sei umgekehrt  $\mathbb{P}$  ein Sourcoid. Dann ist  $\mathbb{P}^{-1}$  ein Targoid und deshalb wie soeben gezeigt ein Sourcoid. Also ist  $(\mathbb{P}^{-1})^{-1} = \mathbb{P}$  ein Targoid.  $\square$

#### 4.1 vollständige Verbände und Summation

**Definition 4.5.** Ein binäres Relat  $\mathbb{P} = (P, R)$  heißt vollständiger Verband (geordnetes Targoid), falls  $\mathbb{P}$  sowohl Ordnung als auch Targoid bzw. Sourcoid ist.



Abbildung 3: Antiordnungstargoid

Abbildung 4: Fast-Targoid

*Anmerkung 4.1.* Abbildung 3 zeigt ein Targoid, welches nicht reflexiv, nicht antisymmetrisch und nicht transitiv ist.

Abbildung 4 zeigt eine Ordnung, sodass jede Teilmenge ein Target besitzt, aber kein Targoid ist.

**Satz 4.3.** Ist  $(P, R)$  ein reflexives binäres Relat, dann ist  $p$  ein essentielles Target von  $\{p\}$ .

*Beweis.* Da  $(p, p) \in R$  ist  $p$  Target von  $\{p\}$ . Sei  $t$  ein beliebiges Target von  $\{p\}$ . Dann gilt auch  $p R t$ , womit bewiesen wäre, dass  $p$  ein essentielles Target ist.  $\square$

**Satz 4.4.** Ist  $(P, R)$  anti-symmetrisch, so existiert zu jeder Teilmenge höchstens ein essentielles Target.

*Beweis.* Angenommen für eine Teilmenge von  $P$  existieren zwei verschiedene essentielle Targets  $t_1$  und  $t_2$ . Dann gilt aber auch  $t_1 R t_2$  und  $t_2 R t_1$  und wegen der Anti-Symmetrie auch  $t_1 = t_2$ . Widerspruch.  $\square$

**Definition 4.6.** Sei  $(P, R)$  ein binäres Relat und sei  $\alpha: I \rightarrow P$  eine Abbildung. Dann heiße  $t \in P$  [essentielles] Target von  $\alpha$  in  $(P, R)$ , falls  $t$  ein [essentielles] Target von  $\alpha(I)$  ist.

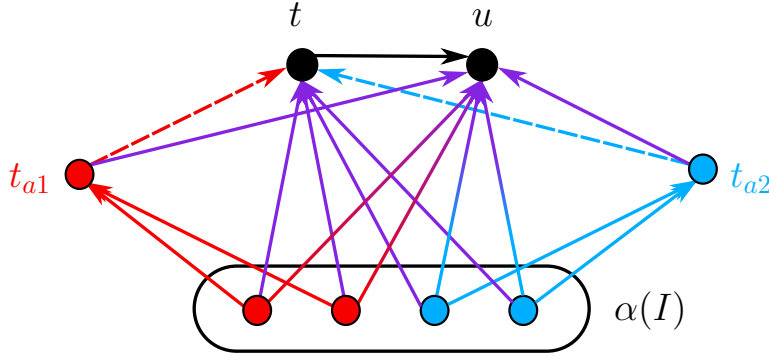


Abbildung 5: Veranschaulichung von Lemma 4.2

**Lemma 4.2.** Sei  $(P, R)$  ein transitives binäres Relat. Dann gilt: Sind  $\alpha: I \rightarrow P$  und  $\eta: I \rightarrow A$  Abbildungen derart, dass für alle  $a \in A$  zu  $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$  stets ein essentielles Target  $t_a$  existiert und ein  $t \in P$  existiert, welches ein essentielles Target von  $\alpha$  ist, so ist  $t$  auch essentielles Target von  $\beta: A \rightarrow P, a \mapsto t_a$ .

*Beweis.* Da  $t$  ein Target von  $\alpha$  ist, ist  $t$  auch gleichzeitig Target von  $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$  für alle  $a \in A$ . Da  $t_a$  das essentielle Target von  $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$  ist, ist auch  $t_a R t$ . Das bedeutet, dass für alle  $a \in A$  gilt:  $\beta(a) R t$ , womit gezeigt wäre, dass  $t$  ein Target von  $\beta$  in  $(P, R)$  ist.

Sei  $u \in P$  ein weiteres Target von  $\beta$  in  $(P, R)$ . Das heißt  $\forall a \in A: t_a R u$ . Für jedes  $a \in A$  ist  $t_a$  aber auch Target von  $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ , weshalb  $\forall i \in \eta^{-1}(a): \alpha(i) R t_a$ . Da  $(P, R)$  transitiv ist gilt damit  $\forall a \in A \forall i \in \eta^{-1}(a): \alpha(i) R u$  und somit  $\forall i \in I: \alpha(i) R u$ , d.h.  $u$  ist Target von  $\alpha$  in  $(P, R)$ . Da  $t$  ein essentielles Target von  $\alpha$  in  $(P, R)$  ist, gilt  $t R u$ .

Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Definition 4.7.** Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein vollständiger Verband. Dann ist  $\sup_{\mathbb{P}}$  eine Klassenabbildung, die jeder Abbildung  $\alpha: I \rightarrow P$  das essentielle Target von  $\alpha$  in  $\mathbb{P}$  zuordnet.  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$  wird auch als das Supremum von  $\alpha$  bezeichnet.

Analog ist die Klassenabbildung  $\inf_{\mathbb{P}}$  definiert, die jeder Abbildung  $\alpha: I \rightarrow P$  die essentielle Source von  $\alpha$  in  $\mathbb{P}$  zuordnet.  $\inf_{\mathbb{P}}(\alpha)$  wird auch als das Infimum von  $\alpha$  bezeichnet.

**Satz 4.5.** Ist  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein vollständiger Verband, so ist  $(P, \sup_{\mathbb{P}})$  eine idempotente Summationsstruktur.

*Beweis.* Sei  $\alpha: \{i\} \rightarrow P$  eine Abbildung. Wegen der Antisymmetrie von  $(P, R)$  besitzt  $\alpha$  laut Satz 4.4 genau ein essentielles Target, welches laut Satz 4.3  $\alpha(i)$  ist, da  $(P, R)$  reflexiv ist. Also ist  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = \alpha(i)$  und das Fundierungsaxiom gilt.

Seien weiterhin  $\alpha: I \rightarrow P$ ,  $\eta: I \rightarrow A$  und  $\beta: A \rightarrow P, a \mapsto \sup_{\mathbb{P}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  Abbildungen. Aufgrund der Antisymmetrie besitzt  $\alpha$  genau ein essentielles Target  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$  in  $(P, R)$  (Satz 4.4). Aus dem selben Grund besitzt  $\alpha|_{\eta^{-1}(a)}$  für alle  $a \in A$  genau ein essentielles Target  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)}) = \beta(a)$ . Durch das soeben bewiesenen Lemma 4.2 ergibt sich somit, dass das essentielle Target von  $\beta$  gleich dem essentiellen Target von  $\alpha$  ist. Damit ist  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = \sup_{\mathbb{P}}(\beta)$ , womit gezeigt ist, dass auch das Teilsummenaxiom erfüllt ist.

Zu zeigen bleibt also noch die Idempotenz. Dazu sei  $\alpha: I \rightarrow P, i \mapsto p$  eine konstante Abbildung.  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$  ist das (eindeutig bestimmte) essentielle Target von  $\alpha(I) = \{p\}$ . Dies entspricht laut Satz 4.3  $p$  selbst, also gilt für alle  $i \in I$ :  $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = p = \alpha(i)$ . □

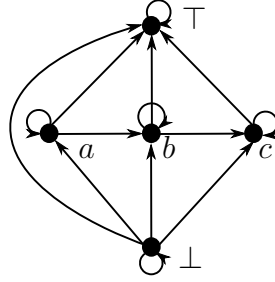


Abbildung 6: Transitivität ist notwendig für das Teilsummenaxiom

**Satz 4.6.** Ist  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine idempotente finitäre Summationsstruktur und  $+$  die durch  $\mathbb{S}$  induzierte Addition, so gilt für  $\leq_{\mathbb{S}} = \{(x, y) \in S^2 \mid \exists s \in S: x + s = y\}$  stets, dass  $(S, \leq_{\mathbb{S}})$  ein vollständiger Verband ist.

*Beweis.* Es gilt  $x + 0_{\mathbb{S}} = x$  und damit  $x \leq_{\mathbb{S}} x$  für alle  $x \in X$ . Ist außerdem  $x \leq_{\mathbb{S}} y$  und  $y \leq_{\mathbb{S}} z$  für  $x, y, z \in S$ , so gibt es  $s_1, s_2 \in S$  mit  $y = x + s_1$  und  $z = y + s_2$  und damit auch  $z = x + (s_1 + s_2)$ , also  $x \leq_{\mathbb{S}} z$ . Weiterhin ist  $(S, +, 0)$  laut Satz 3.11 idempotent, da  $\mathbb{S}$  idempotent ist. Seien  $x, y \in S$  und gelte  $x \leq_{\mathbb{S}} y$  und  $y \leq_{\mathbb{S}} x$ , d.h. es existieren  $s_1, s_2 \in S$  mit  $x + s_1 = y$  und  $y + s_2 = x$ . Dann gilt:

$$y = x + s_1 = x + (x + s_1) = x + y = y + x = y + (y + s_2) = y + s_2 = x.$$

Zu zeigen bleibt also noch, dass jede Teilmenge von  $S$  ein essentielles Target besitzt. Sei also  $X \subseteq S$  eine Teilmenge von  $S$  und  $t = \max(X)$ . Dann ist  $t$  das essentielle Target von  $X$  und die Aussage ist bewiesen. □

## 5 Summoide

**Definition 5.1.** Ein Summoid ist definiert als Quadrupel  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ , bestehend aus einer Summationsstruktur  $\mathcal{S}_{\text{Sum}} = (S, \Sigma)$  und einem Monoid  $\mathcal{S}_{\text{Mult}} = (S, *, \varepsilon)$ , sodass für ein beliebiges Element  $s \in S$  und eine beliebige Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  folgende Distributivgesetze gelten:

$$\begin{aligned} s * \Sigma(\alpha) &= \Sigma(s * \alpha) \text{ mit } s * \alpha: I \rightarrow S, i \mapsto s * \alpha(i) \\ \Sigma(\alpha) * s &= \Sigma(\alpha * s) \text{ mit } \alpha * s: I \rightarrow S, i \mapsto \alpha(i) * s \end{aligned}$$

Ein Summoid  $\mathcal{S}$  heißt *finitär* wenn  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$  eine finitäre Summationsstruktur ist.

*Beispiel 5.1.* Sei  $\Omega$  eine Menge. Dann ist  $\mathcal{S}_{\Omega} = (\mathcal{P}(\Omega), \bigcup, \cap, \Omega)$  das sogenannte Potenzmengensummoid.

*Beispiel 5.2.* Das Quadrupel  $\mathcal{S}_{\text{Real}} = ([0, \infty], \Sigma, *, 1)$  ist das reelle Summoid, wobei  $\Sigma(\alpha) = \sup_{J \subseteq_{\text{fin}} I} (\Sigma(\alpha|_J))$  für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$  bzgl. der Ordnung  $\leq$  mit  $x \leq y \iff \exists t \in [0, \infty]: x + t = y$  und  $\cdot$  die übliche Multiplikation darstellt mit  $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ .

*Beispiel 5.3.* Das Quadrupel  $\mathcal{S}_{\text{trop}} = ([0, \infty], \Sigma_{\text{trop}}, \cdot_{\text{trop}}, 1_{\text{trop}})$  ist das reelle tropische Summoid, wobei für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$

$$\Sigma_{\text{trop}}(\alpha) = \inf_{([0, \infty], \leq)} \alpha$$

und für  $x, y \in [0, \infty]$

$$x \cdot_{\text{trop}} y = \begin{cases} x + y & \text{falls } \infty \notin \{x, y\} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie  $1_{\text{trop}} = 0$ .

Achtung:  $0_{\text{trop}} = \Sigma_{\text{trop}}(\emptyset \rightarrow [0, \infty]) = \infty$ .

*Beispiel 5.4.* Sei  $P$  eine Menge. Dann ist  $\text{Rel}_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$  mit  $R * S = \{(p, q) \in P \times P \mid \exists t \in P: p R t \wedge t S q\}$  sowie  $\Delta_P = \{(p, p) \mid p \in P\}$  (die diagonale Gleichheitsrelation) ein Summoid, welches das Relationensummoid zu  $P$  genannt wird.

**Satz 5.1.** Das Relationensummoid  $\text{Rel}_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$  aus Beispiel 5.4 ist ein Summoid.

*Beweis.* An dieser Stelle soll nur die Linksdistributivität gezeigt werden. Seien dazu  $R \in \mathcal{P}(P \times P)$  und  $S: \Lambda \rightarrow \mathcal{P}(P \times P)$  eine Abbildung für eine beliebige Indexmenge  $\Lambda$ . Für alle  $(p, q) \in P \times P$  gilt:

$$\begin{aligned} (p, q) \in R * \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} &\iff \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge (t, q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \\ &\iff \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge \exists \lambda \in \Lambda: (t, q) \in S_{\lambda} \\ &\iff \exists \lambda \in \Lambda \exists t \in P: (p, t) \in R \wedge (t, q) \in S_{\lambda} \\ &\iff (p, q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R * S_{\lambda}. \end{aligned}$$

□



**Definition 5.2.** Wir setzen  $0_S = 0_{S_{\text{Sum}}}$ .

**Satz 5.2.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Dann gilt für alle  $s \in S$

$$s * 0_S = 0_S = 0_S * s.$$

*Beweis.* Für  $\alpha: \emptyset \rightarrow S$  und  $s \in S$  ist

$$s * 0_S = s * \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) = \sum_{i \in \emptyset} s * \alpha(i) = 0_S = \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) * s = 0_S * s.$$

□

**Definition 5.3.** Ein Summoid  $\mathcal{S}$  heißt kommutativ falls  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  kommutativ ist.

**Definition 5.4.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann wird  $\text{End}(\mathbb{S}) = (\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$  als [finitäres] Endomorphismen-Summoid bezeichnet, wobei  $\bar{\Sigma}(\varphi)$  für eine Abbildung  $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$  definiert ist als

$$\bar{\Sigma}(\varphi): S \rightarrow S, s \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(s).$$

Ist  $\mathcal{S}$  ein Summoid, so ist  $\text{End}_{\mathcal{S}} = \text{End}(\mathcal{S}_{\text{Sum}})$ .

**Satz 5.3.** Sei  $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$  eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann ist das Endomorphismen-Summoid  $\text{End}(\mathbb{S}) = (\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$  ein Summoid.

*Beweis.* Zunächst soll gezeigt werden, dass  $(\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma})$  eine Summationsstruktur ist. Laut Satz 3.4 ist bewiesen, dass  $(S^S, \bar{\Sigma})$  eine Summationsstruktur darstellt, wodurch noch zu zeigen bleibt, dass für jede beliebige Abbildung  $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$  gilt:  $\bar{\Sigma}(\varphi) \in \text{End}_{\mathbb{S}}$ . Sei dazu  $\alpha: I \rightarrow S$  eine Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} (\bar{\Sigma}(\varphi))(\Sigma(\alpha)) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(\Sigma(\alpha)) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \Sigma(\varphi_{\lambda} \circ \alpha) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \varphi_{\lambda}(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i \in I} (\bar{\Sigma}(\varphi))(\alpha(i)) \\ &= \Sigma((\bar{\Sigma}(\varphi)) \circ \alpha). \end{aligned}$$

$(\text{End}_{\mathbb{S}}, \circ, \text{id}_S)$  ist ein Monoid, sodass nur noch die Distributivgesetze gezeigt werden müssen. Seien dazu  $\psi \in \text{End}_{\mathbb{S}}$ ,  $\varphi: \Lambda \rightarrow \text{End}_{\mathbb{S}}$ . Dann gilt für alle  $s \in S$

$$\psi((\bar{\Sigma}(\varphi))(s)) = \psi\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_{\lambda}(s)\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi \circ \varphi_{\lambda})(s) = (\bar{\Sigma}(\psi \circ \varphi))(s)$$

und

$$(\bar{\Sigma}(\varphi))(\psi(s)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\psi(s)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda \circ \psi)(s) = (\bar{\Sigma}(\varphi \circ \psi))(s).$$

□

**Definition 5.5.** Seien  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  und  $\mathcal{S}' = (S', \Sigma', *', \varepsilon')$  Summoide. Dann heißt eine Abbildung  $\varphi$  Homomorphismus von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{S}'$ , falls  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$  nach  $\mathcal{S}'_{\text{Sum}}$  und ein Homomorphismus von  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  nach  $\mathcal{S}'_{\text{Mult}}$  ist.

Ist  $\varphi$  zudem bijektiv, so heißt  $\varphi$  Isomorphismus.

**Satz 5.4.**  $\mathcal{S} = ([0, 1], \inf, \cdot, 1)$  und  $\mathcal{S}' = ([0, \infty], \sup, +, 0)$  sind isomorph.

*Beweis.* Sei  $\varphi: [0, \infty] \rightarrow [0, 1], x \mapsto 2^{-x}$ , wobei  $2^{-\infty} = 0$ .  $\varphi$  ist bijektiv und es gilt für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow [0, \infty]$ :

$$\varphi(\sup(\alpha)) = \inf(\varphi \circ \alpha).$$

Außerdem gilt für alle  $a, b \in [0, \infty]$

$$\varphi(a + b) = 2^{-(a+b)} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

sowie

$$\varphi(0) = 2^0 = 1.$$

□

**Satz 5.5.** Ist  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein [finitäres] Summoid, so ist die Abbildung  $\lambda: S \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}, s \mapsto \lambda_s$  mit  $\lambda_s: S \rightarrow S, x \mapsto s * x$  ein injektiver Homomorphismus von  $\mathcal{S}$  nach  $\text{End}_{\mathcal{S}} = (\text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_{\mathcal{S}})$ .

*Beweis.* Zunächst muss gezeigt werden, dass  $\lambda$  wohldefiniert ist, d.h. dass für alle  $s \in S$  gilt:  $\lambda_s \in \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$ . Sei dazu  $\alpha: I \rightarrow S$  eine Abbildung und  $s \in S$ . Dann ist

$$\lambda_s(\Sigma(\alpha)) = s * \Sigma(\alpha) = \Sigma(s * \alpha) = \Sigma(\lambda_s \circ \alpha).$$

Sei nun  $\alpha: I \rightarrow S$  eine Abbildung mit [endlicher] Indexmenge  $I$  und  $s \in S$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\lambda(\Sigma(\alpha)))(s) &= \lambda_{\Sigma(\alpha)}(s) \\ &= \Sigma(\alpha) * s \\ &= \Sigma(\alpha * s) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha * s)(i) \\ &= \sum_{i \in I} (\alpha(i) * s) \\ &= \sum_{i \in I} ((\lambda \circ \alpha)(i))(s) = (\bar{\Sigma}(\lambda \circ \alpha))(s). \end{aligned}$$

Seien nun  $s_1, s_2, s \in S$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\lambda(s_1 * s_2))(s) &= (s_1 * s_2) * s \\ &= s_1 * (s_2 * s) \\ &= s_1 * \lambda_{s_2}(s) \\ &= \lambda_{s_1}(\lambda_{s_2}(s)) = (\lambda(s_1) \circ \lambda(s_2))(s). \end{aligned}$$

Außerdem ist für ein beliebiges  $s \in S$

$$\lambda_\varepsilon(s) = \varepsilon * s = s = \text{id}_S(s).$$

Damit ist gezeigt, dass  $\lambda$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{S}$  nach  $\text{End}_S$  ist.

Um noch schließlich die Injektivität zu zeigen seien  $s, t \in S$  und  $\lambda(s) = \lambda(t)$ . Dann gilt

$$s = s * \varepsilon = \lambda_s(\varepsilon) = \lambda_t(\varepsilon) = t * \varepsilon = t.$$

□

*Beispiel 5.5.* Sei  $\text{Nat} = (\mathbb{N}, \Sigma, \cdot, 1)$  das natürliche Summoid. Dann ist  $\text{End}(\text{Nat}_{\text{Sum}}) = (\text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_{\mathbb{N}})$  das zur natürlichen Summationsstruktur gehörige Endomorphismen-Summoid.

Sei  $\mathbb{1}^{[n]}: [n] \rightarrow \mathbb{N}, i \mapsto 1$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für jedes  $\varphi \in \text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}$ :

$$\varphi(n) = \varphi(\Sigma(\mathbb{1}^{[n]})) = \Sigma(\varphi \circ \mathbb{1}^{[n]}) = \sum_{i \in [n]} \varphi(1) = (\varphi(1)) \cdot n.$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\lambda_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto k \cdot n$  stets ein Endomorphismus von  $\text{Nat}$ . Denn für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{N}$  gilt

$$\lambda_k(\Sigma(\alpha)) = k \cdot \sum_{i \in I} \alpha(i) = \sum_{i \in I} k \cdot \alpha(i) = \sum_{i \in I} \lambda_k(\alpha(i)).$$

Damit ist  $\text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  und  $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \text{End}_{\text{Nat}_{\text{Sum}}}, k \mapsto \lambda_k$  ein Isomorphismus von  $\text{Nat}$  nach  $\text{End}(\text{Nat}_{\text{Sum}})$ .

## 5.1 Produktsummen

**Definition 5.6.** Ein Summoid  $\mathcal{S}$  heißt Join-Summoid falls  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$  idempotent ist. Für eine beliebige Abbildung wird die Summe der Abbildung auch als der Join der Abbildung in  $\mathcal{S}$  bezeichnet.

**Definition 5.7.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid und  $(S, \Pi)$  die zu  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  gehörige finitäre Summationsstruktur. Für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow S$  ist die Produktsumme von  $\alpha$  definiert als

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \Pi(\alpha|_J),$$

**Definition 5.8.** Sei  $(I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$  eine Mengenfamilie für eine endliche Menge  $H$  und eine beliebige Menge  $I$ . Dann ist

$$\bigtimes_{h \in H} I_h = \left\{ \gamma: H \rightarrow \bigcup_{h \in H} I_h \mid \forall h \in H: \gamma(h) \in I_h \right\}.$$

*Beispiel 5.6.* Seien  $H = \{1, 2\}$  und  $I = \{a, b, c, d\}$  Mengen und  $(I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$  mit  $I_1 = \{a\}$  und  $I_2 = \{b, c\}$  eine Familie. Dann ist

$$\begin{aligned} \bigtimes_{h \in H} I_h &= \{ \gamma_1: H \rightarrow \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}, \\ &\quad \gamma_2: H \rightarrow \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto c\} \}. \end{aligned}$$

**Satz 5.6.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid. Dann gilt für jede endliche Menge  $H$  und jede beliebige Menge  $I$  sowie für jede beliebige Mengenfamilie  $(I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$  und jede Familie  $(\alpha_h)_{h \in H}$  von Abbildungen  $\alpha_h: I_h \rightarrow S$  stets:

$$\prod_{h \in H} \sum_{i_h \in I_h} \alpha_h(i_h) = \sum_{(i_h)_{h \in H} \in \times_{h \in H} I_h} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h),$$

wobei  $(S, \Pi)$  die zu  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

*Beweis.* Sei  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{h \in H} \sum_{i_h \in I_h} \alpha_h(i_h) &= \sum_{i_1 \in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2 \in I_2} \alpha_2(i_2) * \dots * \sum_{i_n \in I_n} \alpha_n(i_n) \\ &= \sum_{i_n \in I_n} \left( \dots \left( \sum_{i_2 \in I_2} \left( \sum_{i_1 \in I_1} \alpha_1(i_1) \right) * \alpha_2(i_2) \right) \dots * \alpha_n(i_n) \right) \\ &= \sum_{i_n \in I_n} \dots \sum_{i_2 \in I_2} \sum_{i_1 \in I_1} \left( \alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) * \dots * \alpha_n(i_n) \right) \\ &= \sum_{(i_n, \dots, i_1) \in I_n \times \dots \times I_1} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h) \\ &= \sum_{(i_h)_{h \in H} \in \times_{h \in H} I_h} \prod_{h \in H} \alpha_h(i_h). \end{aligned}$$

□

*Beispiel 5.7.*

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2 \in I_2} \alpha_2(i_2) = \sum_{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2} \left( \alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) \right)$$

**Lemma 5.1.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid und sei  $(S, \Pi)$  die zu  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  gehörige finitäre Summationsstruktur. Weiterhin seien  $\alpha: I \rightarrow S$ ,  $\eta: I \rightarrow A$  und  $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \text{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  Abbildungen. Dann gilt:

$$\text{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J).$$

*Beweis.* Laut Definition von SOP gilt zunächst

$$\text{SOP}_S(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \Pi(\beta|_B).$$

Für  $B \subseteq_{\text{fin}} A$  gilt

$$\begin{aligned} \Pi(\beta|_B) &= \prod_{b \in B} \beta(b) \\ &= \prod_{b \in B} \text{SOP}_S(\alpha|_{\eta^{-1}(b)}) \\ &= \prod_{b \in B} \sum_{J_b \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(b)} \Pi(\alpha|_{J_b}) \\ &= \sum_{(J_b)_{b \in B} \in \times_{b \in B} \mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \prod_{b \in B} \Pi(\alpha|_{J_b}), \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichung aus Satz 5.6 ergibt. Für alle  $a, c \in B$  mit  $a \neq c$  ist  $J_a \cap J_c = \emptyset$ , da  $\eta^{-1}(a) \cap \eta^{-1}(c) = \emptyset$ , weshalb laut dem Teilsommenaxiom für  $(S, \Pi)$  gilt

$$\prod_{b \in B} \prod_{j_b \in J_b} \alpha(j_b) = \prod_{i \in \bigcup_{b \in B} J_b} \alpha(i).$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\Pi(\beta|_B) = \sum_{(J_b)_{b \in B} \in \times_{b \in B} \mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \Pi(\alpha|_{\bigcup_{b \in B} J_b}) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J).$$

□

**Satz 5.7.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Join-Summoid,  $(S, \Pi)$  die zu  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  gehörige finitäre Summationsstruktur und  $(S, +, \varepsilon)$  das zu  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$  gehörige kommutative Monoid, sodass  $0_S = \varepsilon$ . Dann ist  $(S, \text{SOP}_S)$  eine .

*Beweis.* Sei  $\alpha: \{i\} \rightarrow S$  eine Abbildung. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{SOP}_S(\alpha) &= \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \{i\}} \Pi(\alpha|_J) \\ &= \Pi(\alpha|_{\{i\}}) + \Pi(\alpha|_{\emptyset}) \\ &= \alpha(i) + \varepsilon \\ &= \alpha(i) + 0_S \\ &= \alpha(i). \end{aligned}$$

Damit ist das Fundierungsaxiom gezeigt.

Seien nun  $\alpha: I \rightarrow S$ ,  $\eta: I \rightarrow A$  sowie  $\beta: A \rightarrow S, a \mapsto \text{SOP}_S(\alpha|_{\eta^{-1}(a)})$  Abbildungen. Ferner sei  $H = \{(B, J) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(A) \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(I) \mid J \subseteq \eta^{-1}(B)\}$  eine Menge. Es gilt laut Lemma 5.1

$$\text{SOP}_S(\beta) = \sum_{B \subseteq_{\text{fin}} A} \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha|_J) = \sum_{(B, J) \in H} \Pi(\alpha|_J).$$

Seien weiterhin  $\varphi: \mathcal{P}_{\text{fin}}(I) \rightarrow S, J \mapsto \Pi(\alpha|_J)$  und  $\tau: H \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(I), (J, B) \mapsto J$  Abbildungen, wobei  $\tau$  surjektiv ist. Es gilt

$$\Sigma(\varphi) = \sum_{J \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(I)} \varphi(J) = \sum_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \Pi(\alpha|_J) = \text{SOP}_S(\alpha)$$

und außerdem

$$\Sigma(\varphi \circ \tau) = \sum_{(B, J) \in H} \varphi(\tau(B, J)) = \sum_{(B, J) \in H} \varphi(J) = \sum_{(B, J) \in H} \Pi_{\alpha|_J} = \text{SOP}_S(\beta).$$

Da  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$  idempotent ist gilt laut Satz 3.7  $\Sigma(\varphi) = \Sigma(\varphi \circ \tau)$  und damit schließlich  $\text{SOP}_S(\alpha) = \text{SOP}_S(\beta)$ , womit auch das Teilsummenaxiom bewiesen wäre.  $\square$

*Beispiel 5.8.* Es ist  $([0, \infty], \sup, +, 0)$  ein Summoid. Nach dem soeben bewiesenen Satz, ist also auch  $([0, \infty], \Sigma, \cdot, 1)$  ein Summoid, wobei für  $\alpha: I \rightarrow S$

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) = \sup_{J \subseteq_{\text{fin}} I} \left( \sum_{i \in J}^{\text{fin}} \alpha(i) \right),$$

wobei  $(S, \Sigma^{\text{fin}})$  die zu  $([0, \infty], +, 0)$  gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

## 6 Łukasiewicz-Norm und -Monoid

**Definition 6.1.** Die Łukasiewicz-Norm ist eine innere zweistellige Verknüpfung  $*$ :  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $(x, y) \mapsto \max(x + y - 1, 0)$ .

Das Łukasiewicz-Monoid ist definiert als  $\mathbb{L} = ([0, 1], *, 1)$ .

**Satz 6.1.** Sei  $*$  die Łukasiewicz-Norm. Dann gilt für beliebige Tupel  $(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1}$ :

$$x_0 * x_1 * \dots * x_n = \max((x_0 + x_1 + \dots + x_n) - n, 0).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt aus der Definition der Łukasiewicz-Norm. Sei also die Behauptung für ein  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  bereits gezeigt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x_0 * \dots * x_n) * x_{n+1} &= \max((x_0 + x_1 + \dots + x_n) - n, 0) * x_{n+1} \\ &= \max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n, 0) + x_{n+1} - 1, 0) \\ &= \max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\ &= \max((x_0 + \dots + x_n + x_{n+1}) - (n + 1), 0) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus folgender Überlegung: Gilt  $(x_0 + \dots + x_n) - n \geq 0$ , so folgt die Behauptung sofort.

Ist dagegen  $(x_0 + \dots + x_n) - n < 0$  so gilt

$$\begin{aligned} &\max(\max((x_0 + \dots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\ &= \max(x_{n+1} - 1, 0) = 0 \\ &= \max((x_0 + \dots + x_n + x_{n+1}) - (n + 1), 0), \end{aligned}$$

da  $x_{n+1} \in [0, 1]$  und somit  $x_{n+1} - 1 \leq 0$ . □

**Satz 6.2.** Das Łukasiewicz-Monoid ist ein kommutatives Monoid.

*Beweis.* Die Assoziativität folgt aus Satz 6.1. 1 ist das neutrale Element, da für alle  $x \in [0, 1]$

$$1 * x = \max(1 + x - 1, 0) = \max(x, 0) = x = \max(x + 1 - 1, 0) = x * 1 \quad \square$$

Die Kommutativität ergibt sich direkt aus der Definition.

**Definition 6.2.** Seien  $a, b \in [0, 1]$ . Es gelten folgende Schreibweisen:

- $\bar{a} = 1 - a$
- $a \vee b = \max(a, b)$
- $a \wedge b = \min(a, b)$

Der Operator  $\bar{\cdot}$  heißt Fuzzy-Negation und ist involutorisch (selbstinvers).

**Satz 6.3.** Sei  $*$  die Lukasiewicz-Norm und  $a, b \in [0, 1]$ .

Dann gilt  $a * b = \overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0$ .

*Beweis.*

$$\overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0 = (1 - (1 - a) - (1 - b)) \vee 0 = ((a + b) - 1) \vee 0 = a * b.$$

□

**Satz 6.4.** Sei  $a, b \in [0, 1]$ . Dann gilt:

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = a \wedge b.$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $a \geq b$ . Dann ist

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = 1 - ((1 - a) \vee (1 - b)) = 1 - (1 - b) = b = a \wedge b.$$

□

**Satz 6.5.** Die Fuzzy-Negation ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den Ordnungen  $([0, 1], \leq)$  und  $([0, 1], \geq)$ .

*Beweis.* Sei  $a, b \in [0, 1]$  mit  $a \leq b$ . Dann gilt

$$a \leq b \iff -a \geq -b \iff 1 - a \geq 1 - b \iff \bar{a} \geq \bar{b}.$$

□

**Satz 6.6.** Sei  $\mathbb{L} = ([0, 1], *, 1)$  das Lukasiewicz-Monoid,  $([0, 1], \Pi)$  die zu  $\mathbb{L}$  gehörige finitäre Summationsstruktur und  $([0, 1], \Sigma)$  die zu  $([0, 1], +, 0)$  gehörige finitäre Summationsstruktur. Dann gilt für jede Abbildung  $\alpha: I \rightarrow [0, 1]$  mit endlicher Indexmenge

$$\Pi(\alpha) = \overline{\left(\sum_{i \in I} \overline{\alpha(i)}\right)} \vee 0$$

*Beweis.* Es gilt für  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\sum_{i \in I} \overline{\alpha(i)}\right)} \vee 0 &= (1 - ((1 - \alpha(1)) + \dots + (1 - \alpha(n)))) \vee 0 \\ &= (1 - (n - (\alpha(1) + \dots + \alpha(n)))) \vee 0 \\ &= ((\alpha(1) + \dots + \alpha(n)) - (n - 1)) \vee 0 \\ &= \alpha(1) * \dots * \alpha(n) \\ &= \Pi(\alpha) \end{aligned}$$

□



**Definition 6.3.** Seien  $a, c \in [0, 1]$ . Das größte  $b \in [0, 1]$ , für das  $a \wedge b \leq c$  gilt wird mit  $a \overset{\Delta}{\rightarrow} c$  bezeichnet.

**Satz 6.7.** Für  $a, c \in [0, 1]$  gilt

$$a \overset{\Delta}{\rightarrow} c = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \leq c \\ c & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Definition 6.4.** Sei  $*$  die Łukasiewicz-Norm und  $a, c \in [0, 1]$ . Das größte  $b \in [0, 1]$  mit  $a * b \leq c$  wird mit  $a \overset{*}{\rightarrow} c$  bezeichnet.

**Satz 6.8.** Für  $a, c \in [0, 1]$  gilt

$$a \overset{*}{\rightarrow} c = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \leq c \\ \bar{a} + c & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Ist  $a \leq c$ , so ist  $a * 1 = a \leq c$ . Ist  $a > c$ , so muss für  $x = a \overset{*}{\rightarrow} c$  folgende Ungleichung gelten:

$$a + x - 1 \leq a * x \leq c.$$

Also gilt

$$x \leq (1 - a) + c = \bar{a} + c.$$

Das größte  $x$  ist dementsprechend genau  $\bar{a} + c$ . □

**Definition 6.5.** Sei  $\Omega$  eine Menge und seien  $A, C \subseteq \Omega$ . Die größte Menge  $B \subseteq \Omega$  mit  $A \cap B \subseteq C$  wird bezeichnet als  $A \overset{\cap}{\rightarrow} C$ .

**Satz 6.9.** Für  $A, B \subseteq \Omega$  gilt

$$A \overset{\cap}{\rightarrow} C = \begin{cases} \Omega & \text{wenn } A \subseteq C \\ \bar{A} \cup C & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Für  $A \subseteq C$  ist  $A \cap \Omega = A \subseteq C$ . Ist dagegen  $A \not\subseteq C$ , so gilt

$$A \cap (\bar{A} \cup C) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) = A \cap C \subseteq C.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\bar{A} \cup C$  die größte Menge mit dieser Eigenschaft ist. Dazu sei angenommen es existiere eine weitere Menge  $Y$  mit  $(\bar{A} \cup C) \subsetneq Y$  und  $A \cap Y \subseteq C$ . Sei  $y \in Y \setminus (\bar{A} \cup C) = (Y \setminus \bar{A}) \cap (Y \setminus C)$ . Das bedeutet, dass  $y \in Y$  sowie  $y \in A$  und  $y \notin C$ . Aus  $y \in A \cap Y$  und  $A \cap Y \subseteq C$  folgt aber  $y \in C$ . □

## 7 Summoid-Module

**Definition 7.1.** Sei  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  eine Summationsstruktur,  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $\text{scal}: S \rightarrow \text{End}_{\mathbb{M}}$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{S}$  nach  $\text{End}(\mathbb{M})$  mit  $\text{End}(\mathbb{M}) = (\text{End}_{\mathbb{M}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_M)$ . Dann ist  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein (linksseitiges) Summoid-Modul.

**Definition 7.2.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ . Dann ist die Operation

$$\cdot: S \times M \rightarrow M, (s, m) \mapsto s \cdot m = (\text{scal}(s))(m)$$

das (linksseitiges) Scaling bzgl.  $\mathfrak{M}$  bzw.  $(\mathbb{M}, \mathcal{S})$ .

*Anmerkung 7.1.* Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul wie in Definition 7.1. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Da  $\text{scal}$  ein Homomorphismus ist, gilt für alle  $(s_i)_{i \in I} \in S^I$

$$\text{scal}\left(\sum_{i \in I} s_i\right) = \overline{\sum_{i \in I} \text{scal}(s_i)},$$

d.h. für alle  $m \in M$  ist

$$\left(\sum_{i \in I} s_i\right) \cdot m = \sum_{i \in I} (s_i \cdot m),$$

2. Da  $\text{scal}$  ein Homomorphismus ist, gilt für  $s, t \in S$  stets

$$\text{scal}(s * t) = \text{scal}(s) \circ \text{scal}(t),$$

d.h. für alle  $m \in M$  ist

$$(s * t) \cdot m = s \cdot (t \cdot m).$$

3. Da  $\text{scal}$  ein Homomorphismus ist, gilt

$$\text{scal}(\varepsilon) = \text{id}_M,$$

d.h. für alle  $m \in M$  ist

$$\varepsilon \cdot m = m.$$

4. Für  $s \in S$  ist stets  $\text{scal}(s) \in \text{End}_{\mathbb{M}}$ , also gilt für alle  $(m_i)_{i \in I} \in M^I$

$$(\text{scal}(s))\left(\sum_{i \in I} m_i\right) = \sum_{i \in I} (\text{scal}(s))(m_i),$$

bzw.

$$s \cdot \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} s \cdot m_i.$$

**Definition 7.3.** Sei  $P$  eine Menge,  $\mathbb{W} = (W, *, \varepsilon)$  ein Monoid und  $\varphi$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathbb{W}$  und  $(P^P, \circ, \text{id}_P)$ . Dann wird  $\mathcal{W} = (P, \mathbb{W}, \varphi)$  (linksseitige) Monoid-Wirkung genannt.

Die Abbildung  $\cdot: W \times P \rightarrow P, (w, p) \mapsto (\varphi(w))(p)$  wird dann die zu  $\mathcal{W}$  gehörige Wirkung von  $\mathbb{W}$  auf  $P$  genannt.

*Anmerkung 7.2.* Für eine Monoid-Wirkung gilt:

- $\forall u, w \in W: \varphi(u) \circ \varphi(w) = \varphi(u * w)$ .
- $\varphi(\varepsilon) = \text{id}_P$ , d.h.  $\forall p \in P: \varepsilon \cdot p = p$ .

*Anmerkung 7.3.* Für ein Summoid-Modul  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  ist daher  $(M, \mathcal{S}_{\text{Mult}}, \text{scal})$  eine Monoid-Wirkung mit zugehöriger Wirkung von  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$  auf  $M$ , welche der skalaren Multiplikation entspricht.

**Definition 7.4.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Dann ist  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N = (S^N, \mathbb{E})$  das  $N$ -freie Summoid-Modul über  $\mathcal{S}$ , wobei  $\text{scal}: S \rightarrow \text{End}_{(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N}$  eine Abbildung mit

$$\text{scal}(s): S^N \rightarrow S^N, v \mapsto (s * v(n))_{n \in N}$$

für alle  $s \in S$  ist.

**Satz 7.1.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ . Dann gilt für alle  $m \in M$

$$0_{\mathcal{S}} \cdot m = 0_{\mathbb{M}}.$$

*Beweis.* Sei  $\alpha: \emptyset \rightarrow S$ , dann ist

$$0_{\mathcal{S}} \cdot m = \left( \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) \right) \cdot m = \sum_{i \in \emptyset} \alpha(i) \cdot m = 0_{\mathbb{M}}.$$

□

**Satz 7.2.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Dann ist  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N = (S^N, \mathbb{E})$  ein Summoid-Modul.

*Beweis.* Zunächst muss gezeigt werden, dass  $\text{scal}(s) \in \text{End}_{(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N}$ . Dazu sei  $(v_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$  und  $s \in S$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \left( s \cdot \sum_{i \in I} v_i \right)(n) &= s * \left( \sum_{i \in I} v_i \right)(n) \\ &= s * \sum_{i \in I} v_i(n) \\ &= \sum_{i \in I} s * v_i(n) \\ &= \sum_{i \in I} (s \cdot v_i)(n) \\ &= \left( \sum_{i \in I} s \cdot v_i \right)(n). \end{aligned}$$

Weiterhin ist zu zeigen, dass  $\text{scal}$  ein Homomorphismus zwischen  $\mathcal{S}$  und dem Endomorphismen-Summoid  $\text{End}((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N) = (\text{End}_{(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^N}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_{S^N})$  ist.

Es sei  $v \in S^N$  und  $n \in N$  sowie  $(s_i)_{i \in I} \in S^I$  für eine Menge  $I$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\left( \left( \text{scal} \left( \sum_{i \in I} s_i \right) \right) (v) \right) (n) &= \left( \sum_{i \in I} s_i \right) * v(n) \\
&= \sum_{i \in I} (s_i * v(n)) \\
&= \sum_{i \in I} ((\text{scal}(s_i))(v))(n) \\
&= \left( \sum_{i \in I} (\text{scal}(s_i))(v) \right) (n) \\
&= \left( \left( \overline{\sum_{i \in I} \text{scal}(s_i)} \right) (v) \right) (n).
\end{aligned}$$

Außerdem ist für  $s, t \in S$

$$\begin{aligned}
((\text{scal}(s * t))(v))(n) &= (s * t) * v(n) \\
&= s * (t * v(n)) \\
&= s * (\text{scal}(t)(v))(n) \\
&= (\text{scal}(s)(\text{scal}(t)(v)))(n) \\
&= (\text{scal}(s) \circ \text{scal}(t))(n).
\end{aligned}$$

Schließlich ist für  $v \in S^N$

$$\varepsilon \cdot v = v = \text{id}_{S^N}(v).$$

□

**Definition 7.5.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Dann heißt die Abbildung  $\delta^N: N \rightarrow S^N, n \mapsto \delta_n^N$  mit

$$\delta_n^N: N \rightarrow S, n' \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } n' = n \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

die Standardbasis von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ .

**Definition 7.6.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  ein Summoid-Modul und  $N$  eine Menge. Eine Abbildung  $\gamma: N \rightarrow M$  heißt  $N$ -fache Vektorenfamilie von  $\mathfrak{M}$ .

**Definition 7.7.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid-Modul und  $N$  eine Menge. Eine Abbildung  $u: N \rightarrow S$  heißt  $N$ -fache Familie von Skalaren von  $\mathfrak{M}$ .

**Definition 7.8.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ . Weiterhin seien  $N$  eine Menge und  $u \in S^N$  und  $\gamma \in M^N$  Abbildungen. Dann ist die Linearkombination von  $u$  und  $\gamma$  gegeben durch

$$u \odot \gamma = \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n).$$

**Definition 7.9.** Sei  $\mathfrak{M}$  ein Summoid-Modul,  $N$  eine Menge und  $\gamma \in M^N$  eine  $N$ -fache Vektorenfamilie von  $\mathfrak{M}$ . Dann ist  $f_\gamma$  definiert als

$$f_\gamma: S^N \rightarrow M, u \mapsto u \odot \gamma$$

die lineare Fortsetzung von  $\gamma$ .

**Definition 7.10.** Seien  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  sowie  $\mathfrak{M}' = (\mathbb{M}', \mathcal{S}, \text{scal}')$  mit  $\mathbb{M}' = (M', \mathbb{E}')$  Summoid-Module. Dann heißt eine Abbildung  $f: M \rightarrow M'$   $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung von  $\mathfrak{M}$  nach  $\mathfrak{M}'$ , falls  $f$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{M}$  nach  $\mathbb{M}'$  ist und außerdem

$$s \cdot' f(m) = f(s \cdot m)$$

für alle  $s \in S$  und  $m \in M$  gilt.

**Satz 7.3.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Sei weiterhin  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$  das  $N$ -freie Summoid-Modul über  $\mathcal{S}$  sowie  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal}')$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E}')$  ein Summoid-Modul. Ist außerdem  $\gamma \in M^N$  eine  $N$ -fache Vektorenfamilie von  $\mathfrak{M}$ . Dann ist  $f_\gamma$  eine  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  nach  $\mathfrak{M}$ .

*Beweis.* Sei  $I$  eine Menge und  $(u_i)_{i \in I} \in (S^N)^I$  eine  $I$ -fache Vektorenfamilie über  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f_\gamma \left( \sum_{i \in I} u_i \right) &= \left( \sum_{i \in I} u_i \right) \odot \gamma \\ &= \sum_{n \in N}' \left( \sum_{i \in I} u_i \right)(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N}' \left( \sum_{i \in I} u_i(n) \right) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N}' \sum_{i \in I}' u_i(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{i \in I}' \sum_{n \in N}' u_i(n) \cdot' \gamma(n) \\ &= \sum_{i \in I}' f_\gamma(u_i). \end{aligned}$$

Also ist  $f_\gamma$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N$  nach  $\mathbb{M}$ .

Sei nun  $v \in S^N$  und  $s \in S$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
s \cdot' f_\gamma(v) &= s \cdot' \sum_{n \in N}' v(n) \cdot' \gamma(n) \\
&= \sum_{n \in N}' s \cdot' (v(n) \cdot' \gamma(n)) \\
&= \sum_{n \in N}' (s * v(n)) \cdot' \gamma(n) \\
&= \sum_{n \in N}' (s \cdot v)(n) \cdot' \gamma(n) \\
&= f_\gamma(s \cdot v).
\end{aligned}$$

□

**Satz 7.4.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid,  $N$  eine Menge und  $\delta^N$  die Standardbasis von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ . Dann gilt:

$$f_{\delta^N} = \text{id}_{S^N}.$$

*Beweis.* Sei  $u \in S^N$ . Dann ist

$$f_{\delta^N}(u) = u \odot \delta^N = \sum_{n \in N} u(n) \cdot \delta_n^N = u.$$

□

**Satz 7.5.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  ein Summoid-Modul,  $N$  eine Menge,  $\delta^N$  die Standardbasis von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ ,  $\gamma \in M^N$  eine Vektorenfamilie und  $f_\gamma$  die lineare Fortsetzung von  $\gamma$ . Dann gilt  $f_\gamma \circ \delta^N = \gamma$ .

*Beweis.* Sei  $n \in N$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
(f_\gamma \circ \delta^N)(n) &= f_\gamma(\delta^N(n)) \\
&= f_\gamma(\delta_n^N) \\
&= \delta_n^N \odot \gamma \\
&= \sum_{n' \in N} \delta_n^N(n') \cdot \gamma(n') \\
&= \varepsilon \cdot \gamma(n) \\
&= \gamma(n).
\end{aligned}$$

□

**Definition 7.11.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  ein Summoid-Modul,  $N$  eine Menge und  $\gamma: N \rightarrow M$  eine Vektorenfamilie.

- $\gamma$  heißt erzeugend in  $\mathfrak{M}$  falls  $f_\gamma$  surjektiv ist.

- $\gamma$  heißt (linear) unabhängig in  $\mathfrak{M}$  falls  $f_\gamma$  injektiv ist.
- $\gamma$  heißt Basis von  $\mathfrak{M}$  falls  $f_\gamma$  bijektiv ist.

**Satz 7.6.** *Sei  $\mathcal{S}$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Desweiteren sei  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  das  $N$ -freie Summoid-Modul über  $\mathcal{S}$  sowie  $\delta^N$  die Standardbasis zu  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ . Dann ist  $\delta^N$  eine Basis von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ .*

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus Satz 7.4.  $\square$

**Lemma 7.1.** *Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid-Modul und  $N'$ ,  $N$  mit  $N' \subseteq N$  Mengen. Sei zudem  $\gamma \in M^N$  eine linear unabhängige Vektorenfamilie. Dann ist  $\gamma|_{N'}$  linear unabhängig.*

*Beweis.* Seien  $u', w' \in S^{N'}$  Familien von Skalaren. Sei weiterhin eine Abbildung

$$u: N \rightarrow S, n \mapsto \begin{cases} u'(n) & \text{falls } n \in N' \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $u|_{N'} = u'$  sowie analog dazu eine Abbildung  $w: N \rightarrow S$  definiert. Dann gilt

$$u' \odot \gamma|_{N'} = w' \odot \gamma|_{N'} \iff u \odot \gamma = w \odot \gamma,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit von  $\gamma$  demnach  $u = w$  und damit  $u' = w'$  folgt.  $\square$

**Satz 7.7.** *Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  und  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  ein Summoid-Modul. Seien weiterhin  $K, N$  Mengen sowie  $\kappa: K \rightarrow N$  eine Abbildung und  $\gamma \in M^N$  eine Vektorenfamilie. Dann gilt*

1. *Ist  $\kappa$  surjektiv und  $\gamma$  erzeugend, so ist auch  $\gamma \circ \kappa$  erzeugend in  $\mathfrak{M}$ .*
2. *Ist  $\kappa$  injektiv und  $\gamma$  unabhängig, so ist auch  $\gamma \circ \kappa$  unabhängig in  $\mathfrak{M}$ .*
3. *Ist  $\kappa$  bijektiv und  $\gamma$  eine Basis, so ist auch  $\gamma \circ \kappa$  eine Basis in  $\mathfrak{M}$ .*

*Beweis.* Sei  $m \in M$ . Da  $\gamma$  erzeugend ist existiert ein  $u \in S^N$  mit  $u \odot \gamma = m$ . Da  $\kappa$  surjektiv ist existiert eine Abbildung  $\eta: N \rightarrow K$  mit  $\kappa \circ \eta = \text{id}_N$ . Sei

$$w: K \rightarrow S, k \mapsto \begin{cases} u(\kappa(k)) & \text{falls } k \in \eta(N) \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \odot (\gamma \circ \kappa) &= \sum_{k \in K} w(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{k \in \eta(N)} u(\kappa(k)) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n) \\ &= u \odot \gamma = m. \end{aligned}$$

Damit wäre die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Aussage sei  $w, w' \in S^K$ . Da  $\kappa$  injektiv ist, existiert eine bijektive Abbildung  $\eta: \kappa(K) \rightarrow K$  mit  $\kappa \circ \eta = \text{id}_N$ . Dann folgt aus

$$\sum_{k \in K} w(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k) = \sum_{k \in K} w'(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k)$$

mithilfe des Umbenennungssatzes

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) \\ \iff \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot \gamma(n) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot \gamma(n) \\ \iff (w \circ \eta) \odot \gamma|_{\kappa(K)} &= (w' \circ \eta) \odot \gamma|_{\kappa(K)}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 7.1 folgt damit  $w \circ \eta = w' \circ \eta$  und daraus schließlich  $w = w'$ .

Die dritte Aussage ergibt sich aus den ersten beiden.  $\square$

**Definition 7.12.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $K, N$  Mengen und die Abbildung  $\kappa: K \rightarrow N$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\varphi_\kappa: S^N \rightarrow S^K, u \mapsto u \circ \kappa.$$

**Definition 7.13.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  und  $J$  Mengen. Dann ist die charakteristische Abbildung zu  $J$  in  $N$  bzgl.  $\mathcal{S}$  definiert als

$$\chi_J^N: N \rightarrow S, n \mapsto \begin{cases} \varepsilon & n \in J \\ 0_S & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz 7.8.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $K, N$  Mengen,  $\delta^N$  die Standardbasis von  $\text{Mod}(S, N)$  und eine Abbildung  $\kappa: K \rightarrow N$  gegeben. Dann gilt für alle  $k \in K$ :

$$\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N) = \chi_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}^K.$$

*Beweis.* Sei  $k' \in K$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N))(k') &= \delta_{\kappa(k)}^N(\kappa(k')) = \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } \kappa(k) = \kappa(k') \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \chi_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}^K(k'). \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 7.1.** Ist  $\kappa$  zudem injektiv, so gilt:

$$\varphi_\kappa(\delta_{\kappa(k)}^N) = \delta_k^K.$$



**Definition 7.14.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $K, N$  Mengen und die Abbildung  $\kappa: K \rightarrow N$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\psi_\kappa: S^K \rightarrow S^N, v \mapsto \left( \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \right)_{n \in N}.$$

**Satz 7.9.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $K$  und  $N$  Mengen und  $\delta^N$  und  $\delta^K$  die Standardbasen von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  bzw.  $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$  sowie  $\kappa: K \rightarrow N$  eine Abbildung. Dann gilt:

$$\psi_\kappa \circ \delta^K = \delta^N \circ \kappa.$$

*Beweis.* Sei  $k \in K$  und  $n \in N$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\psi_\kappa(\delta^K(k)))(n) &= \sum_{k' \in \kappa^{-1}(n)} \delta_k^K(k') \\ &= \begin{cases} \varepsilon & \kappa(k) = n \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases} \\ &= (\delta_\kappa^N(k))(n). \end{aligned}$$

□

**Satz 7.10.** Seien  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$ ,  $K$  und  $N$  Mengen,  $\gamma \in M^N$  und  $\lambda \in M^K$  Vektorenfamilien von  $\mathfrak{M}$  sowie eine Abbildung  $\kappa: K \rightarrow N$  gegeben, sodass  $\lambda = \gamma \circ \kappa$ . Dann gilt

$$f_\lambda = f_\gamma \circ \psi_\kappa.$$

*Beweis.* Sei  $v \in S^K$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f_\lambda(v) &= v \odot (\gamma \circ \kappa) \\ &= \sum_{k \in K} v(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{n \in N} \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} (v(k) \cdot \gamma(\kappa(k))) \\ &= \sum_{n \in N} \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} (v(k) \cdot \gamma(n)) \\ &= \sum_{n \in N} \left( \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \right) \cdot \gamma(n) \\ &= \sum_{n \in N} (\psi_\kappa(v))(n) \cdot \gamma(n) \\ &= \psi_\kappa(v) \odot \gamma \\ &= f_\gamma(\psi_\kappa(v)). \end{aligned}$$

□

**Satz 7.11.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $K$  und  $N$  Mengen,  $\kappa: K \rightarrow N$  eine Abbildung und  $\delta^N$  die Standardbasis von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ . Dann gilt:

$$\psi_\kappa = f_{\delta^N \circ \kappa}.$$

*Beweis.* Sei  $v \in S^K$  und  $n \in N$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (f_{\delta^N \circ \kappa}(v))(n) &= (v \odot (\delta^N \circ \kappa))(n) \\ &= \left( \sum_{k \in K} v(k) \cdot \delta_{\kappa(k)}^N \right)(n) \\ &= \sum_{k \in K} v(k) * \delta_{\kappa(k)}^N(n) \\ &= \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \\ &= (\psi_\kappa(v))(n). \end{aligned}$$

□

**Satz 7.12.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $N$  eine Menge. Sei weiterhin  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N) = (\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{S}_{\text{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{E})$  das  $N$ -freie Summoid-Modul über  $\mathcal{S}$  sowie  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal}')$  mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E}')$  ein Summoid-Modul. Seien zudem  $f$  und  $g$   $\mathcal{S}$ -lineare Abbildungen von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  nach  $\mathfrak{M}$ . Dann gilt

$$f \circ \delta^N = g \circ \delta^N \implies f = g.$$

*Beweis.* Sei  $v \in S^N$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v \odot \delta^N) \\ &= f\left(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N\right) \\ &= \sum_{n \in N}' v(n) \cdot' f(\delta_n^N) \\ &= \sum_{n \in N}' v(n) \cdot' g(\delta_n^N) \\ &= g\left(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N\right) \\ &= g(v \odot \delta^N) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

□

## 7.1 Matrizen und lineare Abbildungen

**Definition 7.15.** Seien  $K$ ,  $N$  und  $S$  Mengen und  $\rho \in (S^N)^K$  eine Abbildung. Dann ist  $(K, N, \text{mat}(\rho))$  mit  $\text{mat}(\rho): K \times N \rightarrow S, (k, n) \mapsto (\rho(k))(n)$  die zu  $\rho$  gehörige  $(K \times N)$ -Matrix über  $S$ .

**Definition 7.16.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $K$  und  $N$  Mengen. Sei desweiteren  $f: S^K \rightarrow S^N$  eine  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$  nach  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$ . Dann ist  $\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K)$  die zu  $(f, \delta^K, \delta^N)$  gehörige Matrix.

**Satz 7.13.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid,  $K$  und  $N$  Mengen und eine Abbildung  $\kappa: K \rightarrow N$  gegeben. Sei weiterhin  $\alpha_\kappa$  die zu  $(f_{\delta^N \circ \kappa}, \delta^K, \delta^N)$  gehörige Matrix. Dann gilt für beliebige  $k \in K$ :

$$\alpha_\kappa(k, \cdot) = \delta_{\kappa(k)}^N.$$

*Beweis.* Sei  $k \in K$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa(k, \cdot) &= (f_{\delta^N \circ \kappa} \circ \delta^K)(k) \\ &= f_{\delta^N \circ \kappa}(\delta_k^K) \\ &= \sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot (\delta^N \circ \kappa)(k') \\ &= (\delta^N \circ \kappa)(k) \\ &= \delta_{\kappa(k)}^N. \end{aligned}$$

□

*Anmerkung 7.4.* Das heißt, dass  $\alpha_\kappa$  in jeder Zeile  $k$  genau an der Stelle  $\kappa(k)$  den Eintrag  $\varepsilon$  und ansonsten  $0_S$  hat.

Ist  $\kappa$  eine Permutation, so steht in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein  $\varepsilon$ . In diesem Fall ist  $\alpha_\kappa$  also eine Permutationsmatrix.

**Definition 7.17.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid,  $K$  und  $N$  Mengen und  $\alpha: K \times N \rightarrow S$  eine Abbildung. Dann ist  $f_{\text{row}(\alpha)}$  die zu  $\alpha$  gehörige  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung.

**Satz 7.14.** Seien  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $K$  und  $N$  Mengen. Dann gilt

1. Ist  $f$  eine  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$  nach  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  und  $\alpha$  die zu  $(f, \delta^K, \delta^N)$  gehörige Matrix. Dann ist die zu  $\alpha$  gehörige lineare Abbildung gleich  $f$ .
2. Ist umgekehrt eine  $(K \times N)$ -Matrix  $(K, N, \alpha)$  gegeben, so entspricht die zu  $(f_{\text{row}(\alpha)}, \delta^K, \delta^N)$  gehörige Matrix genau  $\alpha$ .

*Beweis.* Die zu  $f$  gehörige Matrix  $\alpha$  ist gegeben durch

$$\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K): K \times N \rightarrow S, (k, n) \mapsto ((f \circ \delta^K)(k))(n).$$

Also ist  $\text{row}(\alpha) = f \circ \delta^K$ . Somit gilt für alle  $u \in S^K$

$$f_{\text{row}(\alpha)}(u) = f_{f \circ \delta^K}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot f(\delta_k^K) = f\left(\sum_{k \in K} u(k) \cdot \delta_k^K\right) = f(u),$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Seien nun  $k \in K$  und  $n \in N$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \text{mat}(f_{\text{row}(\alpha)} \circ \delta^K)(k, n) &= (f_{\text{row}(\alpha)}(\delta_k^K))(n) \\ &= \left( \sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot \text{row}_\alpha(k') \right)(n) \\ &= (\text{row}_\alpha(k))(n) \\ &= (\alpha(k, \cdot))(n) \\ &= \alpha(k, n) \end{aligned}$$

und somit der zweite Teil des Satzes bewiesen.  $\square$

**Definition 7.18.** Seien  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  und  $\mathfrak{M}' = (\mathbb{M}, \mathcal{S}', \text{scal}')$  Summoid-Module. Sei weiterhin  $\lambda$  eine  $K$ -Basis von  $\mathfrak{M}$  und  $\gamma$  eine  $N$ -Basis von  $\mathfrak{M}'$  sowie eine  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung  $g$  von  $\mathfrak{M}$  nach  $\mathfrak{M}'$  gegeben. Dann ist die zu  $(g; \lambda, \gamma)$  gehörige Matrix definiert als die zu  $f$  gehörige Matrix, wobei  $f = f_\gamma^{-1} \circ g \circ f_\lambda$ .

**Satz 7.15.** Die zu  $(g; \lambda, \gamma)$  gehörige Matrix ist eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei  $\alpha = \text{mat}(f \circ \delta^K)$  die zu  $f$  gehörige Matrix. Laut Voraussetzung ist weiterhin

$$f_\gamma \circ f = g \circ f_\lambda.$$

Für  $f_\gamma \circ f$  und  $k \in K$  gilt:

$$(f_\gamma \circ f)(\delta_k^K) = f_\gamma((f \circ \delta^K)(k)) = f_\gamma(\alpha(k, \cdot)) = \sum_{n \in N} \alpha(k, n) \cdot \gamma(n).$$

Für  $g \circ f_\lambda$  und  $k \in K$  gilt dagegen:

$$(g \circ f_\lambda)(\delta_k^K) = g\left(\sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot \lambda(k')\right) = g(\lambda(k)).$$

Zusammengefasst gilt also

$$g(\lambda(k)) = \sum_{n \in N} \alpha(k, n) \cdot \gamma(n) = f_\gamma(\alpha(k, \cdot)).$$

Da  $f_\gamma$  bijektiv ist, gibt es für jedes  $k \in K$  genau ein  $\alpha(k, \cdot)$ , welches diese Gleichung erfüllt.  $\square$

**Definition 7.19.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid,  $K$  und  $N$  Mengen und  $\alpha: K \times N \rightarrow S$  eine Abbildung. Sei nun  $u \in S^K$ . Dann ist

$$u \otimes \alpha = f_{\text{row}(\alpha)}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot \text{row}_\alpha(k)$$

das Vektor-Matrix-Produkt von  $u$  mit  $\alpha$ .

**Definition 7.20.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid,  $J$ ,  $K$  und  $N$  Mengen und  $\alpha: J \times K \rightarrow S$  und  $\beta: K \rightarrow N$  Abbildungen. Dann ist

$$\alpha \otimes \beta = \left( \sum_{k \in K} \alpha(j, k) * \beta(k, n) \right)_{j, n \in J \times N}$$

das Matrix-Matrix-Produkt von  $\alpha$  und  $\beta$ .

**Satz 7.16.** Sei  $\mathfrak{M} = (\mathbb{M}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul mit  $\mathbb{M} = (M, \mathbb{E})$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  sowie  $K$  eine Menge. Eine Abbildung  $\varphi: S^K \rightarrow M$  ist genau dann  $\mathcal{S}$ -linear von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$  nach  $\mathfrak{M}$  wenn eine Vektorenfamilie  $\gamma \in M^K$  existiert mit  $f_\gamma = \varphi$ .

*Beweis.* Angenommen  $\varphi$  ist  $\mathcal{S}$ -linear. Dann ist  $\varphi = f_{\varphi \circ \delta^K}$ , also  $\gamma = \varphi \circ \delta^K$ , denn für  $u \in S^K$  ist

$$f_{\varphi \circ \delta^K}(u) = \sum_{k \in K} u(k) \cdot \varphi(\delta_k^K) = \varphi \left( \sum_{k \in K} u(k) \cdot \delta_k^K \right) = \varphi(u).$$

Angenommen es existiert eine Abbildung  $\gamma \in M^K$  für die gilt  $\varphi = f_\gamma$ . Dann ist  $\varphi$  laut Satz 7.3  $\mathcal{S}$ -linear.  $\square$

**Satz 7.17.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid sowie  $K$  und  $N$  Mengen. Dann ist  $\varphi: S^K \rightarrow S^N$  eine  $\mathcal{S}$ -lineare Abbildung von  $\text{Mod}(\mathcal{S}, K)$  nach  $\text{Mod}(\mathcal{S}, N)$  genau dann wenn eine  $(K \times N)$ -Matrix über  $\mathcal{S}$  existiert mit  $\varphi = f_{\text{row}(\alpha)}$ .

*Beweis.* Angenommen  $\varphi$  ist  $\mathcal{S}$ -linear. Dann gilt, wie in Satz 7.16 gezeigt,

$$\varphi = f_{\varphi \circ \delta^K}$$

und damit auch

$$\varphi = f_{\text{row}(\text{mat}(\varphi \circ \delta^K))}.$$

Das heißt, dass  $\alpha = \text{mat}(\varphi \circ \delta^K)$ .

Die andere Richtung folgt wieder sofort.  $\square$

**Satz 7.18.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid sowie  $J$ ,  $K$  und  $N$  Mengen. Dann gilt für die Abbildungen  $\alpha \in S^{J \times K}$  und  $\beta \in S^{K \times N}$

$$f_{\text{row}(\alpha)} \bullet f_{\text{row}(\beta)} = f_{\text{row}(\alpha \otimes \beta)}.$$

*Beweis.* Sei  $u \in S^K$  und  $n \in N$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
((u \otimes \alpha) \otimes \beta)(n) &= \sum_{k \in K} (u \otimes \alpha)(k) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J} u(j) * \alpha(j, k) \right) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} u(j) * (\alpha(j, k) * \beta(k, n)) \\
&= \sum_{j \in J} u(j) \sum_{k \in K} \alpha(j, k) * \beta(k, n) \\
&= (u \otimes (\alpha \otimes \beta))(n).
\end{aligned}$$

□

## 8 Netzwerke und Aktionsnetzwerke

### 8.1 Netzwerke

**Definition 8.1.** Ein Tupel  $G = (V, E, \varrho)$  heißt Netzwerk (bzw. gerichteter Multigraph), wobei  $V$  und  $E$  Mengen sind und  $\varrho: E \rightarrow V \times V$  eine Abbildung ist.

$V$  wird dabei als die Knotenmenge von  $G$  bezeichnet.  $E$  ist die Menge der Kanten.  $\varrho$  wird auch die Graphenabbildung genannt und induziert die Abbildungen  $\sigma = \Pi_1 \circ \varrho$  und  $\tau = \Pi_2 \circ \varrho$ , wobei  $\Pi_n$  die Projektion auf die  $n$ -te Komponente ist.  $\sigma$  wird auch als die Source-Map und  $\tau$  als die Target-Map bezeichnet.

Für eine Kante  $e \in E$  ist  $\sigma(e)$  der Anfangsknoten und  $\tau(e)$  der Zielknoten.

**Definition 8.2.** Ein Netzwerk  $G = (V, E, \varrho)$  heiße dünn, falls  $\varrho$  injektiv ist.

**Definition 8.3.** Ein Netzwerk  $G = (V, E, \varrho)$  heiße  $n$ -knotig, falls  $|V| = n$ .

*Beispiel 8.1.* Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  ein binäres Relat. Dann ist  $G(\mathbb{P}) = (P, R, \varrho)$  mit  $\varrho: R \rightarrow P \times P, (p, q) \mapsto (p, q)$  ein dünnes Netzwerk, welches wir das relationelle Netzwerk zu  $\mathbb{P}$  nennen. Wir sagen auch  $G(\mathbb{P})$  ist  $\mathbb{P}$  als Netzwerk.

*Beispiel 8.2.* Sei  $P$  Menge. Dann ist  $G_P = (P, P \times P, \text{id}_{P \times P})$  das zu  $P$  gehörige logistische Netzwerk.

*Beispiel 8.3.* Sei  $M$  eine Menge und  $\perp$  ein Symbol. Dann ist das Netzwerk  $G(M, \perp) = (\{\perp\}, M, \varrho)$  mit  $\varrho: M \rightarrow \{\perp\} \times \{\perp\}, m \mapsto (\perp, \perp)$  ein einknotiges Netzwerk, welches wir das Kleeblattnetzwerk zu  $(M, \perp)$  nennen.

**Definition 8.4.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten  $v \in V$  die Mengen

$$\text{In}_G(v) = \{e \in E \mid \tau(e) = v\}$$

sowie

$$\text{Out}_G(v) = \{e \in E \mid \sigma(e) = v\}$$

definiert.

**Definition 8.5.** Seien  $G = (V, E, \varrho)$  und  $G' = (V', E', \varrho')$  Netzwerke. Das Paar  $(\varphi, \psi)$  bestehend aus den bijektiven Abbildungen  $\varphi: V \rightarrow V'$  und  $\psi: E \rightarrow E'$  ist ein Homomorphismus zwischen  $G$  und  $G'$ , falls für jedes  $e \in E$

$$\varphi(\varrho(e)) = \varrho'(\psi(e)).$$

**Definition 8.6.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Eine Abbildung  $n: V \rightarrow S$  heißt Knotenbewertung bzgl.  $(G, \mathcal{S})$ . Eine Abbildung  $u: E \rightarrow S$  heißt Kantenbewertung bzgl.  $(G, \mathcal{S})$ .

**Definition 8.7.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $m, n \in S^V$  Knotenbewertungen. Dann ist

$$m \odot n = \sum_{v \in V} m(v) * n(v).$$

**Definition 8.8.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $n \in S^V$  eine Knotenbewertung und  $u \in S^E$  eine Kantenbewertung. Dann ist

$$\begin{aligned} n \curlyvee u: V &\rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{In}_G(v)} n(\sigma(e)) * u(e) \\ u \curlywedge n: V &\rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} u(e) * n(\tau(e)). \end{aligned}$$

**Satz 8.1.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $m, n \in S^V$  Knotenbewertungen und  $u \in S^E$  eine Kantenbewertung. Dann gilt:

$$(m \curlyvee u) \odot n = m \odot (u \curlywedge n).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} (m \curlyvee u) \odot n &= \sum_{v \in V} (m \curlyvee u)(v) * n(v) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \text{In}_G(v)} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(v) \\ &= \sum_{e \in E} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(\tau(e)) \\ &= \sum_{e \in E} m(\sigma(e)) * (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} m(v) * (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} m(v) * \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} (u(e) * n(\tau(e))) \\ &= \sum_{v \in V} m(v) * (u \curlywedge n)(v) \\ &= m \odot (u \curlywedge n). \end{aligned}$$

□

**Satz 8.2.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $m, n \in S^V$  Knotenbewertungen und  $u, w \in S^E$  eine Kantenbewertung. Dann gilt:

$$((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n = m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).$$

*Beweis.* Sei  $m' = m \curlyvee u$  und  $n' = w \curlywedge n$ . Dann erhält man durch mehrfaches



Einsetzen und Anwenden von Satz 8.1

$$\begin{aligned}
((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n &= (m' \curlyvee w) \odot n \\
&= m' \odot (w \curlywedge n) \\
&= (m \curlyvee u) \odot n' \\
&= m \odot (u \curlywedge n') \\
&= m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).
\end{aligned}$$

□

**Definition 8.9.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Dann ist für eine Kantenbewertung  $u \in S^E$

$$\text{in}_u: V \rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{In}_G(v)} u(e)$$

die Inflow-Map von  $u$  auf  $G$  über  $\mathcal{S}$  und

$$\text{out}_u: V \rightarrow S, v \mapsto \sum_{e \in \text{Out}_G(v)} u(e)$$

die Outflow-Map von  $u$  auf  $G$  über  $\mathcal{S}$ .

**Definition 8.10.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk,  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $u \in S^E$  eine Kantenbewertung. Dann ist  $u$  eine Flow-Map auf  $V_0 \subseteq V$  über  $\mathcal{S}$ , falls für alle  $v \in V_0$

$$\text{in}_u(v) = \text{out}_u(v).$$

Die Kantenbewertung  $u$  ist eine Flow-Map auf  $G$  über  $\mathcal{S}$  falls  $u$  eine Flow-Map auf  $V$  ist.

**Definition 8.11.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Dann ist

$$E^{(n)} = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid \forall i \in [n-1]: \tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})\}$$

die Menge der Pfade der Länge  $n$  in  $G$ .

Außerdem ist

$$E^{(+)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} E^{(n)}$$

die Menge aller Pfade beliebiger Länge in  $G$ .

**Definition 8.12.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten  $v \in V$  und eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  die Mengen

$$\text{In}_G^{(n)}(v) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid \tau(e_n) = v\}$$

sowie

$$\text{Out}_G^{(n)}(v) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid \sigma(e_1) = v\}$$

definiert.

**Satz 8.3.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $m \in S^V$  eine Knotenbewertung und  $u, w \in S^E$  Kantenbewertungen. Dann gilt für alle  $v \in V$

$$((m \curlyvee u) \curlyvee w)(v) = \sum_{(e_1, e_2) \in \text{In}_G^{(2)}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2).$$

*Beweis.* Es sei  $m' = m \curlyvee u$  und  $v \in V$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (m' \curlyvee w)(v) &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} m'(\sigma(e_2)) * w(e_2) \\ &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} \left( \sum_{e_1 \in \text{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) \right) * w(e_2) \\ &= \sum_{e_2 \in \text{In}_G(v)} \sum_{e_1 \in \text{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2) \\ &= \sum_{(e_1, e_2) \in \text{In}_G^{(2)}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2). \end{aligned}$$

□

**Satz 8.4.** Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Seien weiterhin  $m \in S^V$  eine Knotenbewertung und  $u_1, \dots, u_k \in S^E$  mit  $k \geq 2$  Kantenbewertungen. Dann gilt für alle  $v \in V$

$$((\dots (m \curlyvee u_1) \dots) \curlyvee u_k)(v) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in \text{In}_G^{(k)}(v)} m(\sigma(e_1)) \prod_{i=1}^k u_i(e_i),$$

wobei

$$\prod_{i=1}^k u_i(e_i) = u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über  $k$ . Der Induktionsanfang wurde in Satz 8.3 bereits gezeigt. Sei nun angenommen, dass die Aussage für ein  $k \geq 2$  gilt. Dann ist für  $m' = ((\dots (m \curlyvee u_1) \dots) \curlyvee u_k)$

$$\begin{aligned} (m' \curlyvee u_{k+1})(v) &= \sum_{e_{k+1} \in \text{In}_G(v)} m'(\sigma(e_{k+1})) * u_{k+1}(e_{k+1}) \\ &= \sum_{e_{k+1} \in \text{In}_G(v)} \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in \text{In}_G^{(k)}(\sigma(e_{k+1}))} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i) \\ &= \sum_{(e_1, \dots, e_{k+1}) \in \text{In}_G^{(k+1)}(v)} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i). \end{aligned}$$

□

## 8.2 Aktionsnetzwerke

**Definition 8.13.** Ein Aktionsnetzwerk ist ein Tupel  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  bestehend aus einem Netzwerk  $G = (V, E, \varrho)$  sowie den Abbildungen  $\star: E^{(2)} \rightarrow E$  und  $\text{id}: V \rightarrow E$ , sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{(2)}: \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- $\forall (e_1, e_2, e_3) \in E^{(3)}: (e_1 \star e_2) \star e_3 = e_1 \star (e_2 \star e_3)$
- $\forall v \in V: \varrho(\text{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E: \text{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \text{id}(\tau(e))$

$E$  wird als die Menge von Aktionen (Handlungen) interpretiert, wobei  $V$  eine Menge von Zuständen darstellt.  $e_1 \star e_2$  ist die Verknüpfung von Aktionen  $e_1$  und  $e_2$ , was nur möglich ist, wenn  $(e_1, e_2)$  verkettbar sind, d.h. falls  $\tau(e_1) = \sigma(e_2)$ . Das entspricht der Aussage, dass  $e_2$  erst anfangen kann, wenn  $e_1$  aufhört.

**Definition 8.14.** Ein partielles Aktionsnetzwerk ist ein Tripel  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  bestehend aus einem Netzwerk  $G = (V, E, \varrho)$  sowie den Abbildungen  $\text{id}: V \rightarrow E$  und  $\star: R \rightarrow E$ , wobei  $R \subseteq E^{(2)}$ , sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in R: \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- Existieren  $e_1 \star (e_2 \star e_3)$  und  $(e_1 \star e_2) \star e_3$  so gilt  $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- Es gilt  $(e_1, e_2) \in R$  mit  $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$  genau dann wenn  $(e_2, e_3) \in R$  mit  $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$
- Aus  $(e_1, e_2) \in R$  mit  $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$  und  $(e_2, e_3) \in R$  mit  $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$  folgt stets:  $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- $\forall v \in V: \varrho(\text{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E: (\text{id}(\sigma(e)), e) \in R \wedge (e, \text{id}(\tau(e))) \in R$
- $\forall e \in E: \text{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \text{id}(\tau(e))$

*Beispiel 8.4.* Sei  $\mathbb{P} = (P, R)$  eine Präordnung. Dann ist  $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (G(\mathbb{P}), \star, \text{id})$  mit  $\star: R^{(2)} \rightarrow R, ((p, t), (t, q)) \mapsto (p, q)$  sowie  $\text{id}: P \rightarrow R, p \mapsto (p, p)$  das Aktionsnetzwerk zu  $\mathbb{P}$ .

*Beispiel 8.5.* Sei  $P$  eine Menge. Dann ist  $\mathbb{G}_P = \mathbb{G}((P, P \times P))$  das sogenannte logistische Aktionsnetzwerk zu  $P$ .

Beachte:  $(P, P \times P)$  ist eine Präordnung.

*Beispiel 8.6.* Sei  $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$  ein Monoid und  $\perp$  ein Symbol. Dann nennen wir  $\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp) = (G(M, \perp), *, \text{id})$  mit  $\text{id}: \{\perp\} \rightarrow M, \perp \mapsto \varepsilon$  das zu  $(\mathbb{M}, \perp)$  gehörige Aktionsnetzwerk.

*Beispiel 8.7.* Sei  $G = (V, E, \varrho)$  ein Netzwerk,  $W$  eine Menge und  $w: V \rightarrow W$  mit  $W \cap E^{(+)} = \emptyset$  eine Bijektion.

Wir definieren zuerst  $E^{(*)} = W \cup E^{(+)}$ . Weiterhin sei  $P(G, w) = (V, E^{(*)}, \varrho^*)$ , wobei  $\varrho^*: E^{(*)} \rightarrow V \times V$  eine Abbildung ist mit  $\varrho^*((e_1, \dots, e_n)) = (\sigma(e_1), \tau(e_n))$  für  $(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)}$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  sowie  $\varrho^*(w(v)) = (v, v)$ .

Dann ist das  $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \text{id})$  das Pfadaktionsnetzwerk zu  $(G, w)$ , wobei

- $(a_1, \dots, a_m) \star (b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$  für  $(a_1, \dots, a_m) \in E^{(m)}$  und  $(b_1, \dots, b_n) \in E^{(n)}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und  $\tau(a_m) = \sigma(b_1)$
- $w(\sigma(a_1)) \star (a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_m) = (a_1, \dots, a_m) \star w(\tau(a_m))$  für  $(a_1, \dots, a_m) \in E^{(m)}$  und  $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $w(v) \star w(v) = w(v)$

und  $\text{id}: V \rightarrow E^{(*)}, v \mapsto w(v)$ .

**Definition 8.15.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk. Eine Teilmenge  $D \subseteq E$  der Kantenmenge bildet eine Unterstruktur von  $\mathbb{G}$  falls gilt

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{(2)}: e_1, e_2 \in D \implies e_1 \star e_2 \in D$
- $\text{id}(V) \subseteq D$

In diesem Fall ist  $\mathbb{G}|_D = (G|_D, \star^D, \text{id}^D)$  bestehend aus  $G|_D = (V, D, \varrho|_D)$ ,  $\star^D: D^{(2)}, (d_1, d_2) \mapsto d_1 \star d_2$  und  $\text{id}^D: V \rightarrow D, v \mapsto \text{id}(v)$  die Einschränkung von  $\mathbb{G}$  auf  $D$ .

**Satz 8.5.** Ist  $P$  eine Menge und  $R \subseteq P \times P$ . Dann bildet  $R$  genau dann eine Unterstruktur von  $\mathbb{G}_P = (G_P, \star, \text{id})$  mit  $G_P = (P, P \times P, \text{id}_{P \times P})$  wenn  $(P, R)$  eine Präordnung ist.

*Beweis.* Es gilt:  $(p, t), (t, q) \in R$  genau dann wenn  $(p, q) = (p, t) \star (t, q) \in R$ . Weiterhin ist  $R$  genau dann reflexiv wenn  $\text{id}(P) = \{(p, p) \mid p \in P\} \subseteq R$ .  $\square$

*Anmerkung 8.1.* Ist  $\mathbb{P} = (P, R)$  eine Präordnung, so ist  $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (\mathbb{G}_P)|_R$ .

**Definition 8.16.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk. Dann ist

$$\mathbb{M}: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), (A, B) \mapsto \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times B\}$$

das Minkowski-Produkt in  $\mathbb{G}$ .

**Definition 8.17.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk. Dann ist  $\text{Minsk}(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, \mathbb{M}, \text{id}(V))$  ein Join-Summoid, welches wir das Minkowski-Summoid zu  $\mathbb{G}$  nennen.

**Satz 8.6.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk. Dann ist das Minkowski-Summoid  $\text{Minsk}(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, \mathbb{M}, \text{id}(V))$  ein Join-Summoid.

*Beweis.*  $(\mathcal{P}(E), \cup)$  ist eine idempotente Summationsstruktur.

$\mathbb{M}$  ist assoziativ, da  $\star$  assoziativ ist und es gilt

$$A \mathbb{M} \text{id}(V) = \{a \star e \mid (a, e) \in E^{(2)} \cap A \times \text{id}(V)\} = A = \text{id}(V) \mathbb{M} A.$$

Also ist  $\text{Minsk}(\mathbb{G})_{\text{Mult}}$  ein Monoid.

Und schließlich ist für  $A \in \mathcal{P}(E)$  und  $\beta: I \rightarrow \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A \mathbb{M} \bigcup_{i \in I} \beta(i) &= \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times \bigcup_{i \in I} \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{a \star b \mid (a, b) \in E^{(2)} \cap A \times \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i \in I} A \mathbb{M} \beta(i). \end{aligned}$$

Das Argument kann auch analog für die Rechtsdistributivität verwendet werden.  $\square$

*Beispiel 8.8.* Sei  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein kommutatives Monoid und  $\perp$  ein Symbol. In  $\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)$  ist das Minkowski-Produkt gerade die Minkowski-Summe, d.h.

$$A \mathbb{M} B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

**Definition 8.18.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk. Für jede Kantenmenge  $A \subseteq E$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A^{(n)}$  rekursiv wie folgt definiert:

- $A^{(0)} = \text{id}(V)$
- $A^{(1)} = A$
- $A^{(n+1)} = A^{(n)} \mathbb{M} A$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Der Kleenestern von  $A$  bzgl.  $\mathbb{G}$  ist dann definiert als

$$A^{(*)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}.$$

**Satz 8.7.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk und  $A \subseteq E$ . Dann ist  $A^{(*)}$  die kleinste Unterstruktur von  $\mathbb{G}$ , die  $A$  enthält.

*Beweis.* Es gilt  $\text{id}(V) = A^{(0)} \subseteq A^{(*)}$  und  $A = A^{(1)} \subseteq A^{(*)}$ . Seien  $(e_1, e_2) \in E^{(2)}$  mit  $e_1, e_2 \in A^{(*)}$ , d.h. es existieren  $m, n \in \mathbb{N}$ , sodass  $e_1 \in A^{(m)}$  und  $e_2 \in A^{(n)}$ . Dann ist

$$e_1 \star e_2 \in A^{(m)} \mathbb{M} A^{(n)} \subseteq A^{(*)}.$$

Also ist  $A^{(*)}$  eine Unterstruktur von  $\mathbb{G}$ , die  $A$  enthält.

Sei nun  $D \subseteq E$  eine Unterstruktur von  $\mathbb{G}$  mit  $A \subseteq D$ . Wir zeigen, dass  $A^{(n)} \subseteq D$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  per Induktion über  $n$ . Es gilt  $A^{(0)} \subseteq D$  und  $A^{(1)} \subseteq D$ . Sei also die Aussage für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  bereits erfüllt und sei  $a \in A^{(n+1)}$ . Das heißt  $a \in A^{(n)} \mathbb{M} A$ , also  $a = e_1 \star e_2$  mit  $(e_1, e_2) \in E^{(2)}$  sowie  $e_1 \in A^{(n)}$  und  $e_2 \in A$ . Da laut Voraussetzung sowohl  $A \subseteq D$  also auch  $A^{(n)} \subseteq D$ , ist  $a = e_1 \star e_2 \in D$ , da  $D$  eine Unterstruktur ist.  $\square$

*Beispiel 8.9.* Sei  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}})$  und  $A = \{2, 5\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \{0\} \\ A^{(1)} &= A = \{2, 5\} \\ A^{(2)} &= A \mathbin{\textcircled{M}} A = \{2 + 2, 5 + 2, 2 + 5, 5 + 5\} = \{4, 7, 10\} \\ A^{(3)} &= A^{(2)} \mathbin{\textcircled{M}} A = \{4 + 2, 4 + 5, 7 + 2, 7 + 5, 10 + 2, 10 + 5\} = \{6, 9, 12, 15\} \\ &\dots \\ A^{(*)} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}. \end{aligned}$$

*Beispiel 8.10.* Sei  $P$  eine Menge und  $A, B \subseteq P$ . Dann entspricht das Minkowski-Produkt von  $A$  und  $B$  gerade dem Relationenprodukt von  $A$  und  $B$ .

**Definition 8.19.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  ein Aktionsnetzwerk mit  $G = (V, E, \varrho)$  Für  $e \in E$  ist der Split von  $e$  definiert als

$$\text{Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(c, d) \in E^{(2)} \mid c \star d = e\}.$$

Allgemein ist der  $n$ -Split von  $e$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  definiert als

$$n\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{(n)} \mid e_1 \star \dots \star e_n = e\}.$$

**Definition 8.20.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  ein Aktionsnetzwerk mit  $G = (V, E, \varrho)$  und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Für die Kantenbewertungen  $u, w \in S^E$  ist dann die Faltung bzgl.  $(\mathbb{G}, \mathcal{S})$  definiert als

$$u \otimes w: E \rightarrow S, e \mapsto \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * w(d).$$

**Satz 8.8.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk und weiterhin  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Für die Kantenbewertungen  $u_1, \dots, u_k \in S^E$  mit  $k \geq 2$  und  $e \in E$  gilt

$$((\dots (u_1 \otimes u_2) \otimes \dots) \otimes u_k)(e) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über  $k$ . Für  $k = 2$  folgt die Gleichung sofort aus der Definition. Gelte sie nun für ein beliebiges  $k \geq 2$ . Sei nun  $u = (\dots (u_1 \otimes u_2) \otimes \dots) \otimes u_k$ . Dann ist für  $e \in E$

$$\begin{aligned} (u \otimes u_{k+1})(e) &= \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * u_{k+1}(d) \\ &= \sum_{(c, d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(c)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k) * u_{k+1}(d) \\ &= \sum_{(e_1, \dots, e_{k+1}) \in (k+1)\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_{k+1}(e_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Anmerkung 8.2. Analog gilt auch

$$(u_1 \circledast (u_2 \circledast (\dots (u_{k-1} \circledast u_k) \dots))) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Damit ist gleichzeitig gezeigt, dass  $\circledast$  assoziativ ist.

**Definition 8.21.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Dann ist  $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$  mit

$$\overline{\sum_{i \in I} u_i}: E \rightarrow S, e \mapsto \sum_{i \in I} u_i(e)$$

für beliebige  $(u_i)_{i \in I} \in (S^E)^I$  und

$$I_{\mathbb{G}}: E \rightarrow S, e \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } e \in \text{id}(V) \\ 0_S & \text{sonst} \end{cases}$$

das Faltungssumoid zu  $\mathbb{G}$  über  $\mathcal{S}$ .

**Satz 8.9.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk und weiterhin  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Dann ist  $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$  ebenfalls ein Summoid.

*Beweis.*  $(S^E, \bar{\Sigma})$  ist eine Summationsstruktur nach Satz 3.4.

Weiterhin wissen wir bereits, dass  $\circledast$  assoziativ ist. Sei also  $u \in S^E$ . Dann ist für  $e \in E$

$$(u \circledast I_{\mathbb{G}})(e) = \sum_{c \star d = e} u(c) * I_{\mathbb{G}}(d) = u(e) = \sum_{c \star d = e} I_{\mathbb{G}}(c) * u(d) = (I_{\mathbb{G}} \circledast u)(e),$$

da  $c \star d = e$  für  $d \in \text{id}(V)$  nur gilt, wenn  $c = e$ .

Sei nun  $(u_i)_{i \in I} \in (S^E)^I$  sowie  $w \in S^E$  und  $e \in E$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \left( w \circledast \overline{\sum_{i \in I} u_i} \right)(e) &= \sum_{c \star d = e} w(c) * \left( \overline{\sum_{i \in I} u_i} \right)(d) \\ &= \sum_{c \star d = e} w(c) * \sum_{i \in I} u_i(d) \\ &= \sum_{c \star d = e} \sum_{i \in I} w(c) * u_i(d) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{c \star d = e} w(c) * u_i(d) \\ &= \left( \overline{\sum_{i \in I} w \circledast u_i} \right)(e) \end{aligned}$$

und analog für die Rechtsdistributivität. □

**Definition 8.22.** Sei  $P$  eine Menge und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Dann nennen wir  $\text{Mat}_P(\mathcal{S}) = \mathcal{S}[\mathbb{G}_P]$  das Summoid der  $(P \times P)$ -Matrix über  $\mathcal{S}$ .

*Anmerkung 8.3.* Die Faltung von  $\text{Mat}_P(\mathcal{S})$  von  $u, w \in S^{P \times P}$  ist

$$u \otimes w: P \times P \rightarrow S, (p, q) \mapsto \sum_{t \in P} u(p, t) * w(t, q).$$

und entspricht damit der Matrizenmultiplikation. Außerdem ist

$$I_{\mathbb{G}_P}: P \times P \rightarrow S, (p, q) \mapsto \begin{cases} \varepsilon & p = q \\ 0_S & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Einheitsmatrix und  $\bar{\Sigma}$  die punktweise Summation von  $\mathcal{S}$ -Matrizen.

*Beispiel 8.11.* Sei  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein Monoid,  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $\perp$  ein Symbol sowie  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)$  das Aktionsnetzwerk zu  $(\mathbb{M}, \perp)$ . Dann ist  $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^M, \bar{\Sigma}, \otimes, I_{\mathbb{G}})$  ein Summoid, wobei für  $u, w \in S^M$

$$u \otimes w: M \rightarrow S, m \mapsto \sum_{c+d=m} u(c) * w(d)$$

und  $I_{\mathbb{G}}: \{\perp\} \rightarrow M, \perp \mapsto \varepsilon$ .

### 8.3 $\mathcal{S}$ -Algebren

**Definition 8.23.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid. Eine  $\mathcal{S}$ -Algebra ist definiert als das Tupel  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$  bestehend aus einem Summoid  $\mathcal{A} = (A, \mathbb{E}, \mathbb{A}, a)$ , sodass  $(\mathcal{A}_{\text{Sum}}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul bildet, wobei für alle  $s \in S$  und  $x, y \in A$

$$s \cdot (x \mathbb{A} y) = (s \cdot x) \mathbb{A} y = x \mathbb{A} (s \cdot y).$$

**Satz 8.10.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, id)$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk und weiterhin  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid. Dann bildet  $(\mathcal{S}[\mathbb{G}], \mathcal{S}, \text{scal})$  bestehend aus  $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \otimes, I_{\mathbb{G}})$  und der Skalarmultiplikation aus  $\text{Mod}(\mathcal{S}, E)$  eine  $\mathcal{S}$ -Algebra.

*Beweis.*  $\mathcal{S}[\mathbb{G}]$  ist ein Summoid und daher  $(\mathcal{S}[\mathbb{G}]_{\text{Sum}}, \mathcal{S}, \text{scal})$  ein Summoid-Modul.

Sei nun  $s \in S$ ,  $u, w \in S^E$  sowie  $e \in E$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (s \cdot (u \otimes w))(e) &= s * (u \otimes w)(e) \\ &= s * \sum_{c \star d = e} (u(c) * w(d)) \\ &= \sum_{c \star d = e} (s * u(c)) * w(d) = ((s \cdot u) \otimes w)(e) \\ &= \sum_{c \star d = e} u(c) * (s * w(d)) = (u \otimes (s \cdot w))(e). \end{aligned}$$

□



**Satz 8.11.** Sei  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid,  $\mathbb{M} = (M, +, 0)$  ein Monoid und  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$  mit  $\mathcal{A} = (A, \mathbb{E}, \mathbb{A}, a)$  eine  $\mathcal{S}$ -Algebra. Dann induziert jeder Homomorphismus  $\kappa$  von  $\mathbb{M}$  auf  $\mathcal{A}_{\text{Mult}}$  durch  $f_\kappa$  einen Homomorphismus von  $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)]$  nach  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* Sei  $(v_i)_{i \in I} \in (S^M)^I$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \left( \overline{\sum_{i \in I} u_i} \right) \odot \kappa &= \sum_{m \in M} \left( \overline{\sum_{i \in I} v_i} \right)(m) \cdot \kappa(m) \\ &= \sum_{m \in M} \left( \sum_{i \in I} v_i(m) \right) \cdot \kappa(m) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} v_i(m) \cdot \kappa(m) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} v_i(m) \cdot \kappa(m) \\ &= \sum_{i \in I} v_i \odot \kappa. \end{aligned}$$

Seien nun  $u, w \in S^M$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (u \otimes w) \odot \kappa &= \sum_{m \in M} \left( \sum_{c+d=m} u(c) * w(d) \right) \cdot \kappa(m) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot \kappa(c+d) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} \kappa(d)) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} u(c) \cdot (w(d) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} \kappa(d))) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} u(c) \cdot (\kappa(c) \mathbb{A} w(d) \cdot \kappa(d)) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) \cdot \kappa(c)) \mathbb{A} (w(d) \cdot \kappa(d)) \\ &= \sum_{(c,d) \in M \times M} (u(c) \cdot \kappa(c)) \mathbb{A} (w(d) \cdot \kappa(d)) \\ &= \sum_{c \in M} u(c) \cdot \kappa(c) \mathbb{A} \sum_{d \in M} w(d) \cdot \kappa(d) \\ &= (u \odot \kappa) \mathbb{A} (w \odot \kappa). \end{aligned}$$

□

*Beispiel 8.12.* Sei  $\mathbb{M} = \mathbb{N}_{\text{add}} = (\mathbb{N}, +, 0)$ ,  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein kommutatives Summoid und  $\mathfrak{A} = (\mathcal{S}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}})$  eine  $\mathcal{S}$ -Algebra ( $\mathcal{S}$  als  $\mathcal{S}$ -Algebra). Darüber hinaus sei  $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N}) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}^{\mathbb{N}}})$  mit  $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}} = (S^{\mathbb{N}}, \mathbb{E})$  gegeben. Damit ist  $\text{scal}_{\mathcal{S}}: S \rightarrow \text{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$  mit  $\text{scal}(s): S \rightarrow S, s' \mapsto s * s'$ , wodurch die Operation  $\cdot_{\mathcal{S}}: S^2 \rightarrow S, (s, x) \mapsto s * x$  definiert ist.

Für jedes  $r \in S$  ist  $\kappa_r: \mathbb{N} \rightarrow S, n \mapsto r^n$  ein Monoid-Homomorphismus von  $\mathbb{M}$  nach  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ .

Wir definieren weiterhin  $x := \delta_1^{\mathbb{N}}$  und  $x^n := \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{n\text{-fach}}$ , wobei  $\otimes$  die Faltung aus  $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}}, \perp)]$  ist. Also ist  $x^n = \delta_n^{\mathbb{N}}$  und

$$f_{\kappa_r}: S^{\mathbb{N}} \rightarrow S, u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{\mathcal{S}} \kappa_r(n)$$

ein Summoid-Homomorphismus von  $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}}, \perp)]$  nach  $\mathcal{S}$ . Das heißt folgendes: Für  $u \in S^{\mathbb{N}}$ , welches als Polynom

$$u[x] := u = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{S^{\mathbb{N}}} \delta_n^{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{S^{\mathbb{N}}} x^n$$

aufgefasst wird, wobei  $\cdot_{S^{\mathbb{N}}}$  die Skalarmultiplikation aus  $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N})$  sei, ist

$$f_{\kappa_r}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot_{\mathcal{S}} r^n.$$

Die Abbildung  $f_{\kappa_r}$  heißt deshalb Einsetzungs-Homomorphismus von  $r$  für jede formale Potenzreihe  $u[x]$ .

*Beispiel 8.13.* Sei  $\Omega$  eine endliche Menge und  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid. Weiterhin sei  $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}$  ein kommutatives Monoid. Beachte: Hier werden  $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{N}^{\Omega}) = ((\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}^{\Omega}}, \mathcal{S}, \text{scal}_{\mathcal{S}^{\mathbb{N}^{\Omega}}})$  mit  $(\mathcal{S}_{\text{Sum}})^{\mathbb{N}^{\Omega}} = (S^{\mathbb{N}^{\Omega}}, \mathbb{E})$  und außerdem die Faltung  $\otimes$  aus  $\mathcal{S}[\mathbb{G}((\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}, \perp)]$  betrachtet.

Für  $r \in S^{\Omega}$  ist

$$\kappa_r: \mathbb{N}^{\Omega} \rightarrow S, \alpha \mapsto \prod_{i \in \Omega}^* r_i^{\alpha_i}$$

ein Monoid-Homomorphismus zwischen  $(\mathbb{N}_{\text{add}})^{\Omega}$  und  $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ . Für  $i \in \Omega$  setze  $x_i = \delta_{\delta_i^{\mathbb{N}^{\Omega}}}$  und für  $\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}$  sei  $x^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mathbb{N}^{\Omega}}$ . Dann ist

$$x^{\alpha} = \prod_{i \in \Omega}^{\otimes} x_i^{\alpha(i)}.$$

Interpretiere  $u \in S^{\mathbb{N}^{\Omega}}$  wie folgt:

$$u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} \delta_{\alpha}^{\mathbb{N}^{\Omega}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} x^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\Omega}} u(\alpha) \cdot_{S^{\mathbb{N}^{\Omega}}} \prod_{i \in \Omega}^{\otimes} x_i^{\alpha(i)}$$

Dann ist  $f_{\kappa_r}$  ein Summoid-Homomorphismus von  $\mathcal{S}[\mathbb{G}((\mathbb{N}_{\text{add}})^\Omega, \perp)]$  nach  $\mathcal{S}$  und für  $u \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}^\Omega}$  ist

$$f_{\kappa_r}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot_{\mathcal{S}} \kappa_r(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot_{\mathcal{S}} \prod_{i \in \Omega}^* r_i^{\alpha(i)}$$

das Einsetzen von  $r$  in jede multivariable formale Potenzreihe.

## 8.4 Automaten

**Definition 8.24.** Sei  $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \vee, \wedge, 1)$  ein Summoid, wobei für  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{2}$

$$\bigvee_{i \in I} \alpha(i) = \begin{cases} 1 & \exists i \in I: \alpha(i) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $s \wedge t = \min(s, t)$  für  $s, t \in \mathbb{2}$ . Sei weiterhin  $P$  eine Menge von Zuständen und  $\mathbb{M} = (M, \circ, \varepsilon)$  ein Monoid sowie  $\text{Mat}_P(\mathcal{B})$  das Summoid der  $(P \times P)$ -Matrix über  $\mathcal{B}$ . Dann wird ein Homomorphismus  $\kappa$  von  $\mathbb{M}$  nach  $(\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}}$  Präautomat genannt.

Der Homomorphismus  $\kappa$  ordnet jedem Wort ein Element aus  $\mathbb{2}^{P \times P}$  zu und kann deshalb als Übergangsmatrix aufgefasst werden.

*Anmerkung 8.4.* Ist  $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \vee, \wedge, 1)$  wie in Definition 8.24 gegeben. Dann ist  $(\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}} = (\mathbb{2}^{P \times P}, \otimes, I)$  ein Monoid mit

$$I: P \times P \rightarrow \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für  $u, w \in \mathbb{2}^{P \times P}$

$$u \otimes w: P \times P \rightarrow \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \bigvee_{c \star d = (p, q)} u(c) \wedge w(d).$$

Das heißt es gilt

$$(u \otimes w)(p, q) = 1 \iff \exists t \in P: u(p, t) = 1 \wedge w(t, q) = 1.$$

**Definition 8.25.** Sei  $B$  ein Alphabet und  $G = G(B, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$  das Kleeblattnetzwerk zu  $(B, \perp)$ . Sei weiterhin  $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \text{id})$  das Pfadaktionsnetzwerk zu  $(G, w)$  mit  $w: \{\perp\} \rightarrow \{\varepsilon\}, \perp \mapsto \varepsilon$  und  $P(G, w) = (\{\perp\}, B^{(*)}, \varrho^*)$ . Dann ist  $\mathbb{B}^{(*)} = (B^{(*)}, \star, \varepsilon)$  das Wortmonoid zu  $(B, \varepsilon)$ .

*Anmerkung 8.5.* Ist  $B$  ein Alphabet und  $G = (G, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$  das Kleeblattnetzwerk zu  $(B, \perp)$ . Dann ist

$$B^{(+)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} B^n.$$

Für  $w: \{\perp\} \rightarrow \{\varepsilon\}$  ist also  $B^{(*)} = \{\varepsilon\} \cup B^{(+)}$ .

Dann ist für  $(w_1, \dots, w_m) \in B^m$  und  $(v_1, \dots, v_n) \in B^n$

- $(w_1, \dots, w_m) \star (v_1, \dots, v_m) = (w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_m)$
- $\varepsilon \star (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) \star \varepsilon$  und
- $\varepsilon \star \varepsilon = \varepsilon$ .

Das heißt, dass  $\star$  als Konkatenation von Wörtern über dem Alphabet  $B$  aufgefasst werden kann.

*Anmerkung 8.6.* Ist  $\kappa: B^{(*)} \rightarrow 2^{P \times P}$  ein Präautomat zum Wortmonoid  $\mathbb{B}^{(*)}$ , dann ordnet  $\kappa$  jedem Wort eine Übergangsmatrix zu, wobei  $(\kappa(w))(p, q)$  angibt, ob ein Wort  $w$  erkannt wird, wenn man von Zustand  $p$  in Zustand  $q$  geht. Da  $\kappa$  ein Homomorphismus ist, gilt für  $w_1, w_2 \in B^{(*)}$

$$\kappa(w_1 \star w_2) = \kappa(w_1) \otimes \kappa(w_2).$$

Das heißt, dass die Konkatenation von  $w_1$  und  $w_2$  beim Übergang von  $p$  nach  $q$  erkannt werden kann genau dann wenn ein Zustand  $t \in P$  existiert, sodass  $w_1$  beim Übergang von  $p$  nach  $t$  und  $w_2$  beim Übergang von  $t$  nach  $q$  erkannt werden kann.

**Satz 8.12.** Sei  $B$  ein Alphabet,  $P$  eine Menge von Zuständen und  $\lambda: B \rightarrow 2^{P \times P}$  eine Abbildung. Dann ist durch  $\lambda$  ein Präautomat  $\kappa_\lambda$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei zunächst  $\kappa_\lambda(b) = \lambda(b)$  für alle  $b \in B$ . Da  $\kappa$  ein Homomorphismus ist, muss für  $b_1, \dots, b_n \in B$  gelten

$$\begin{aligned} \kappa_\lambda((b_1, \dots, b_m)) &= \kappa_\lambda(b_1 \star \dots \star b_m) \\ &= \kappa_\lambda(b_1) \otimes \dots \otimes \kappa_\lambda(b_m) \\ &= \lambda(b_1) \otimes \dots \otimes \lambda(b_m). \end{aligned}$$

□

**Definition 8.26.** Sei  $\mathcal{B} = (2, \vee, \wedge, 1)$  ein Summoid wie in Definition 8.24,  $\mathbb{M}$  ein Monoid sowie  $\kappa$  ein Präautomat. Sei weiterhin  $P$  eine Menge von Zuständen und  $p, q \in P$ . Dann ist das Tupel  $\mathbb{D} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{B}))_{\text{Mult}}, \kappa, \delta_p^P, \delta_q^P)$  ein klassischer Automat, wobei  $p$  den Startzustand und  $q$  den Endzustand darstellen.

Ein Wort  $w \in B^{(*)}$  wird durch  $\mathbb{D}$  erkannt, falls  $\delta_p^P \otimes \kappa(w) = \delta_q^P$  ???, d.h.  $(\kappa(w))(p, q) = 1$ .

**Definition 8.27.** Sei  $\mathbb{M}$  ein Monoid,  $P$  eine Menge von Zuständen und weiterhin  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ . Dann heiße  $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa)$  ein  $\mathcal{S}$ -Präautomat bzgl.  $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa)$ , falls  $\kappa$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{M}$  nach  $(\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}$  ist.

Seien zusätzlich  $\alpha, \omega \in S^P$ , so ist  $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$  ein  $\mathcal{S}$ -Automat bzgl.  $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$ .

*Anmerkung 8.7.* Präautomaten können also als  $\mathcal{B}$ -Präautomaten aufgefasst werden.

**Definition 8.28.** Sei  $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$  mit  $G = (V, E, \varrho)$  ein Aktionsnetzwerk,  $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$  ein Summoid und  $\mathbb{M}$  ein Monoid sowie  $\kappa$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{M}$  nach  $(\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}$ . Dann ist  $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}, \kappa)$  ein verallgemeinerter Präautomat bzgl.  $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa)$ .

Seien zusätzlich  $\alpha, \omega \in S^V$ , so ist  $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\text{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$  ein verallgemeinerter Automat bzgl.  $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$ .

**Definition 8.29.** Sei  $\mathbb{M}$  ein Monoid,  $\mathcal{S}$  ein kommutatives Summoid und weiterhin  $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \text{scal})$  eine  $\mathcal{S}$ -Algebra. Ist  $\kappa$  ein Homomorphismus von  $\mathbb{M}$  nach  $\mathcal{A}_{\text{Mult}}$ , so heißt  $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\text{Mult}}, \kappa)$  verallgemeinerter  $\mathcal{S}$ -Präautomat bzgl.  $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\text{Mult}}, \kappa)$ .