Methoden algewandter Algebra 1/2

Alex Ivliev

10. August 2019

Inhaltsverzeichnis

1 allgemeine Definitionen **2**

2 Inzidenzstrukturen **4**

3 Summation **9**
3.1 Summationsstrukturen und Monoide 13
3.2 Summation und Inzidenzstrukturen 17

4 Targoide und vollständige Verbände **20**
4.1 vollständige Verbände und Summation 21

5 Summoide **24**
5.1 Produktsummen 27

6 Łukasiewicz-Norm und -Monoid **31**

7 Summoid-Module **34**
7.1 Matrizen und lineare Abbildungen 42

8 Netzwerke und Aktionsnetzwerke **46**
8.1 Netzwerke 46
8.2 Aktionsnetzwerke 50
8.3 $\mathcal{S}$-Algebren 55
8.4 Automaten 57

1 allgemeine Definitionen

Definition 1.1. Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Definition 1.2. Es sei $\mathbb{2} = \{0, 1\}$.

Definition 1.3. Für eine natürliche Zahl n ist $[n] = \{1, 2, ..., n\}$.

Definition 1.4. Die Menge $[0, \infty]$ ist definiert als $[0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Definition 1.5. Sei M eine Menge. Dann ist $m \subseteq_{\text{fin}} M$, falls $m \subseteq M$ und m endlich ist.

Definition 1.6. Sei M eine Menge. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{m \mid m \subseteq M\}$ die Menge aller Teilmengen von M.

Definition 1.7. Sei M eine Menge und n eine natürliche Zahl. Dann ist

$$\binom{M}{n} = \{m \subseteq M \mid |m| = n\}.$$

Definition 1.8. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Sei weiterhin $y \in Y$ ein Element aus der Zielmenge. Dann ist

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Ist f eine bijektive Abbildung, so bezeichet $f^{-1}(y)$ den Funktionswert von y der Umkehrabbildung von f.

Definition 1.9. Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Dann ist

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon f(a) = b\}.$$

Definition 1.10. Das Tripel $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$ heißt Monoid, falls M eine beliebige Menge, $*\colon M \times M \to M$ eine innere zweistellige Verknüpfung und $\varepsilon \in M$ ist und zusätzlich folgende Eigenschaften gelten:

- Assoziativität: $\forall a,b,c \in M\colon (a * b) * c = a * (b * c)$
- neutrales Element: $\forall m \in M\colon \varepsilon * m = m = m * \varepsilon$

M wird dabei die Grundmenge des Monoids genannt. Gilt darüber hinaus noch

- Kommutativität: $\forall a,b \in M\colon a * b = b * a$,

dann ist $\mathbb{M}$ ein kommutatives Monoid.

Definition 1.11. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt konstant falls

$$\forall a \in A\colon f(a) = b$$

für ein Element $b \in B$.

Definition 1.12. Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann ist $g \circ f\colon A \to C, a \mapsto g(f(a))$ die kontravariante Verkettung von (f, g). Dagegen bezeichnet man $f \bullet g\colon A \to C, a \mapsto ((a)f)g$ als die kovariante Verkettung von (f, g).

Es gilt also $g \circ f = f \bullet g$.

Definition 1.13. Sei P eine Menge und $R \subseteq P \times P$ eine Relation auf dieser Menge. Dann ist das Paar $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat.

Für $(p, q) \in R$ schreibe auch $p\ R\ q$.

Definition 1.14. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt Präordnung, falls folgende Eigenschaften gelten:

- Reflexivität: $\forall p \in P\colon p\ R\ p$
- Transitivität: $\forall p, t, q \in P\colon p\ R\ t \wedge t\ R\ q \implies p\ R\ q$

$\mathbb{P}$ heißt Ordnung (partiell geordnete Menge), falls zusätzlich folgende Eigenschaften gilt:

- Antisymmetrie: $\forall p, q \in P\colon p\ R\ q \wedge q\ R\ p \implies p = q$

Beispiel 1.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathbb{P} = (P, R)$ mit $P = \mathcal{P}(\Omega)$ und $R = \{(X, Y) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2 \mid X \subseteq Y\}$ eine Ordnung. Diese Ordnung soll mit $R^\Omega = (\mathcal{P}(\Omega), \subseteq)$ bezeichnet werden.

2 Inzidenzstrukturen

Definition 2.1. Seien P, B und I Mengen, wobei $I \subseteq P \times B$. Das Tripel $\mathcal{I} = (P, B, I)$ heißt Inzidenzstruktur.

Die Menge P wird als Menge von Punkten interpretiert und B als Menge von Blöcken. Für ein $p \in P$ und ein $b \in B$ $(p, b) \in I$, so schreibe $p\ I\ b$.

Beispiel 2.1 (Würfel). Bei einem Würfel ist P die Menge der 8 Ecken und B die Menge der 6 Seiten. Es gilt $p\ I\ b$ für ein $p \in P$ und ein $b \in B$ genau dann wenn p eine Ecke der Seite b ist.

Definition 2.2. Eine Inzidenzstruktur (P, B, I) heißt endlich falls P und B (und daher I) endlich sind.

Definition 2.3. Für eine Inzidenzstruktur (P, B, I) und ein Element $p \in P$ ist weiterhin $pI = \{b \in B \mid p\ I\ b\}$ die Menge aller Blöcke, die mit p inzidieren.

Für ein Element $b \in B$ ist $Ib = \{p \in P \mid p\ I\ b\}$ die Menge alle Punkte, die mit b inzidieren.

Definition 2.4. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, B, I)$ heißt taktische Konfiguration mit den Parametern $(v, r, b, k) \in \mathbb{N}^4$ falls folgende Bedingungen gelten:

- $|P| = v$ und $|B| = b$
- $\forall p \in P \colon |pI| = r$
- $\forall b \in B \colon |Ib| = k$

Beispiel 2.2 (Würfel). Die Inzidenzstruktur des Würfels aus Beispiel 2.1 ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(8, 3, 6, 4)$.

Satz 2.1 (Doppelte Abzählung). *Sei $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine endliche Inzidenzstruktur. Dann gilt*

$$\sum_{p \in P} |pI| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

Beweis. Es gilt

$$\dot{\bigcup}\{\{p\} \times pI \mid p \in P\} = I = \dot{\bigcup}\{Ib \times \{b\} \mid b \in B\}$$

und daher

$$\sum_{p \in P} |pI| = |I| = \sum_{b \in B} |Ib|.$$

□

Satz 2.2. *Ist $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine endliche taktische Konfiguration mit Parametern (v, r, b, k), dann gilt:*

$$v \cdot r = b \cdot k.$$

Beweis. Mithilfe von Satz 2.1 ergibt sich folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} v \cdot r = \sum_{p \in P} r &= \sum_{p \in P} |pI| \\ &= \sum_{b \in B} |Ib| = \sum_{b \in B} k = b \cdot k. \end{aligned}$$

□

Definition 2.5. Sei $\mathcal{I} = (P, B, I)$ eine Inzidenzstruktur. Die Inzidenzstruktur $\mathcal{I}^{-1} = (B, P, I^{-1})$ mit $I^{-1} = \{(b, p) \in B \times P \mid p\ I\ b\}$ ist die zu $\mathcal{I}$ duale Inzidenzstruktur.

Satz 2.3. *Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P, B, I)$ ist genau dann eine taktische Konfiguration, wenn $\mathcal{I}^{-1} = (P^{-1}, B^{-1}, I^{-1})$ auch eine ist, wobei $P^{-1} = B$ und $B^{-1} = P$.*

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ eine taktische Konfiguration mit Parametern (v, r, b, k). Laut Definition gilt daher:

- $|P| = v$ und $|B| = b$
- $\forall p \in P \colon |pI| = r$
- $\forall b \in B \colon |Ib| = k$

Für $\mathcal{I}^{-1}$ ergeben sich folgende Parameter:

- $|P^{-1}| = |B| = b$ und $|B^{-1}| = |P| = v$
- $\forall p^{-1} \in P^{-1} \colon |p^{-1} I^{-1}| = k$
- $\forall b^{-1} \in B^{-1} \colon |I^{-1} b^{-1}| = b$

Also ist $\mathcal{I}^{-1}$ eine taktische Konfiguration mit den Parametern (b, k, v, r). □

Beispiel 2.3. Der Ikosaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(12, 5, 20, 3)$ und dual zur taktischen Konfiguration mit Parametern $(20, 3, 12, 5)$, was dem Dodekaeder entspricht.

Der Oktaeder ist eine taktische Konfiguration mit Parametern $(6, 4, 8, 3)$ und dual zur taktische Konfiguration mit Parametern $(8, 3, 6, 4)$, was dem Hexaeder entspricht.

Satz 2.4 (Dualitätsprinzip)**.** *Es gilt für alle taktischen Konfigurationen: Ist eine Aussage für eine dualitätsabgeschlossene Klasse von Inzidenzstrukturen wahr, so ist sie auch für die duale Inzidenzstruktur wahr.*

Definition 2.6. Seien $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien $\varphi \colon P \to P'$ und $\psi \colon B \to B'$ Abbildungen, für die gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (p\ I\ b \implies \varphi(p)\ I'\ \psi(b)).$$

Dann heißt das Abbildungspaar (φ, ψ) Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$. Homomorphismen zwischen Inzidenzstrukturen sind inzidenzerhaltend.

Definition 2.7. Ein Homomorphismus (φ, ψ) zwischen den Inzidenzstrukturen $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ ist (inzidenz-)reflektierend, falls gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (\varphi(p)\ I'\ \psi(b) \implies p\ I\ b).$$

Definition 2.8. Ein reflektierender Homomorphismus (φ, ψ) heißt Isomorphismus, falls φ und ψ bijektiv sind. Zwei Inzidenzstrukturen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ heißen isomorph zueinander, falls zwischen ihnen ein Isomorphismus existiert. In diesem fall schreibe $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}'$.

Satz 2.5. *Seien $\mathcal{I} = (P, B, I)$ und $\mathcal{I}' = (P', B', I')$ Inzidenzstrukturen. Weiterhin seien $\varphi \colon P \to P'$ und $\psi \colon B \to B'$ bijektive Abbildungen. Dann gilt: (φ, ψ) ist ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ genau dann wenn (φ, ψ) ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ ist und $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}'$ und $\mathcal{I}$ ist.*

Beweis. Angenommen (φ, ψ) ist ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$. Dann ist (φ, ψ) ein reflektierender Homomorphismus, weshalb gilt:

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (\varphi(p)\ I'\ \psi(b) \implies p\ I\ b)$$

und daher auch

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (\varphi(p)\ I'\ \psi(b) \implies \varphi^{-1}(\varphi(p))\ I\ \psi^{-1}(\psi(b))).$$

Zu jedem Punkt $p' \in P'$ und jedem Block $b' \in B'$ lässt sich wegen der Bijektivität von φ und ψ jeweils genau ein Element $p \in P$ und $b \in B$ finden, sodass $\varphi(p) = p'$ bzw. $\psi(b) = b'$. Die obige Aussage kann also wie folgt umgeschrieben werden:

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B' \colon (p'\ I'\ b' \implies \varphi^{-1}(p')\ I\ \psi^{-1}(b')).$$

Somit ist $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}'$ und $\mathcal{I}$.

Nun sei angenommen, dass (φ, ψ) und $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ Homomorphismen sind. Das heißt es gilt

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B' \colon (p'\ I'\ b' \implies \varphi^{-1}(p')\ I\ \psi^{-1}(b')).$$

Analog zum ersten Teil des Beweises lässt sich die Aussage wie folgt umschreiben:

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (\varphi(p)\ I'\ \psi(b) \implies \varphi^{-1}(\varphi(p))\ I\ \psi^{-1}(\psi(b))).$$

Also ist (φ, ψ) reflektierend und somit ein Isomorphismus. □

Satz 2.6. *Seien $\mathcal{I}, \mathcal{I}', \mathcal{I}''$ Inzidenzstrukturen. Sei weiterhin (φ, ψ) ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ und (φ', ψ') ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}'$ und $\mathcal{I}''$. Dann ist $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}''$.*

Beweis. Laut Definition gelten folgende Aussagen:

$$\forall p \in P \forall b \in B \colon (p\ I\ b \implies \varphi(p)\ I'\ \psi(b)).$$

und

$$\forall p' \in P' \forall b' \in B' \colon (p' \; I' \; b' \implies \varphi'(p') \; I'' \; \psi'(b')).$$

Da $\varphi(p) \in P'$ und $\psi(b) \in B'$ folgt aus $p \; I \; b$ für alle $p \in P$ und alle $b \in B$:

$$\varphi'(\varphi(p)) \; I'' \; \psi'(\psi(b)) = (\varphi' \circ \varphi)(p) \; I'' \; (\psi' \circ \psi)(b).$$

Also ist $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}''$. □

Definition 2.9. Sei $\mathcal{I}$ eine Inzidenzstruktur. $\mathcal{I}$ heißt selbstdual falls $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}^{-1}$.

Definition 2.10. Gegeben seien drei natürliche Zahlen i, j, k mit $i \leq j \leq n$. Dann ist $\mathcal{I}_{i,j}^n = (\binom{[n]}{i}, \binom{[n]}{j}, \subseteq)$ die sogenannte kombinatorische taktische Konfiguration mit den Parametern $(\binom{n}{i}, \binom{n-i}{j-i}, \binom{n}{j}, \binom{j}{i})$.

Satz 2.7. *Seien $i, j, k \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j \leq n$. Dann ist $\mathcal{I}_{i,j}^n$ eine taktische Konfiguration mit den Parametern $(\binom{n}{i}, \binom{n-i}{j-i}, \binom{n}{j}, \binom{j}{i})$*

Beweis. Sei $I \in \binom{[n]}{i}$ und $J \in \binom{[n]}{j}$. Dann ist $I \subseteq J$ genau dann wenn J alle Elemente von I enthält und zusätzlich $|J| - |I|$ weitere aus $[n] \setminus I$. Das heißt I steht mit $|\binom{[n] \setminus I}{j-i}| = \binom{n-i}{j-i}$ Mengen in Beziehung.

Umgekehrt steht J genau mit jeder i-elementigen Teilmenge von J in Beziehung. □

Satz 2.8. *Sei $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ mit $i \leq \frac{n}{2}$ eine kombinatorische taktische Konfiguration. Dann ist $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ selbstdual.*

Beweis. Sei $\varphi \colon \binom{[n]}{i} \to \binom{[n]}{n-i}, X \mapsto [n] \setminus X$ eine bijektive Abbildung. Seien weterhin $I \in \binom{[n]}{i}$ und $J \in \binom{[n]}{n-i}$ Mengen mit $I \subseteq J$. Das heißt für alle $i \in I$ gilt

$$i \in I \implies i \in J.$$

Der Kontrapositiv lautet

$$i \notin J \implies i \notin I,$$

was äquivalent ist zu

$$i \in [n] \setminus J \implies i \in [n] \setminus I \iff i \in \varphi(J) \implies i \in \varphi(I),$$

also $\varphi(I) \supseteq \varphi(J)$. Das selbe Argument kann auch für φ^{-1} verwendet werden, womit gezeigt ist, dass das Abbildungspaar (φ, φ^{-1}) ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{I}_{i,n-i}^n$ und $(\mathcal{I}_{i,n-i}^n)^{-1}$ ist. □

Beispiel 2.4 (Tetraeder). Kombinatorische Beschreibung eines Tetraeders lautet: $\mathcal{I} = (\binom{[4]}{1}, \binom{[4]}{3}, \subseteq)$. Die duale Inzidenzstruktur ist: $\mathcal{I}^{-1} = (\binom{[4]}{3}, \binom{[4]}{1}, \supseteq)$. Der Isomorphismus (φ, ψ) ist gegeben durch $\varphi \colon \binom{[4]}{1} \to \binom{[4]}{3}, x \mapsto \overline{x}$ und weiterhin $\psi \colon \binom{[4]}{3} \to \binom{[4]}{1}, x \mapsto \overline{x}$.

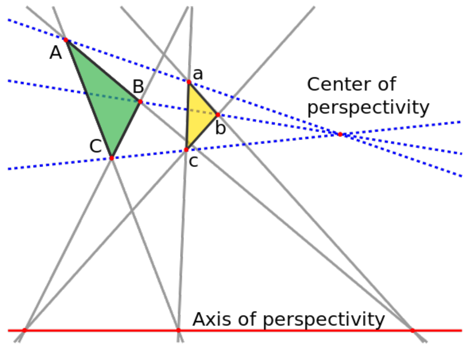

Abbildung 1: Desargues-Konfiguration

Beispiel 2.5 (Desargues-Konfiguration). Analog zum Tetraeder, nur das die Inzidenzstruktur durch $\mathcal{I}^5_{2,3} = (\binom{[5]}{2}, \binom{[5]}{3}, \subseteq)$ gegeben ist. Die Desargues-Konfiguration ist selbstdual und hat 10 Punkte (Die Punkte A, B, C, a, b, c, das Zentrum der Perspektive und die drei Punkte, die auf der roten Linie liegen) und 10 Blöcke (Die 6 Linien der zwei Dreiecke, die 3 Linien, die sich im Zentrum der Perspektive treffen und die Achse der Perspektive). In der dazu dualen Konfiguration sind Achse und Zentrum der Perspektive getauscht.

3 Summation

Definition 3.1. Ein Paar (S, Σ) heißt [finitäre] Summationsstruktur, falls Σ eine Abbildungsvorschrift (Klassenabbildung) ist, die jeder Abbildung $\alpha \colon I \to S$ mit beliebiger [endlicher] Definitionsmenge I genau ein Element $\Sigma(\alpha)$ aus S zuorndet, sodass gilt:

- Fundierungsaxiom: Ist $\alpha \colon \{i\} \to S$, so gilt $\Sigma(\alpha) = \alpha(i)$.
- Teilsummenaxiom: Sind $\alpha \colon I \to S$ und $\eta \colon I \to A$ Abbildungen [A und I endlich], so gilt für die Abbildung $\beta \colon A \to S, a \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ stets:
$$\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha).$$

Die Menge S wird Grundmenge genannt.

Definition 3.2. Sei (S, Σ) eine [finitäre] Summationsstruktur und $\alpha \colon I \to S$ eine beliebige Abbildung [I endlich]. Dann gelten folgende Schreibweisen:

- $(\alpha(i))_{i \in I} = (\alpha(i) \mid i \in I) = \alpha$
- $\sum_{i \in I} \alpha(i) = \Sigma(\alpha)$

Satz 3.1. *Sei Ω eine Menge. Dann ist $(\mathcal{P}(\Omega), \bigcup)$ eine Summationsstruktur, wobei für jede Abbildung $\alpha \colon I \to \mathcal{P}(\Omega)$ die Summation über α wie folgt definitert ist:*
$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in I \colon x \in \alpha(i)\}.$$

Beweis. Sei $\alpha \colon \{i'\} \to \mathcal{P}(\Omega)$ eine Abbildung. Es ist
$$\bigcup \alpha = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \{i'\} \colon x \in \alpha(i)\} = \alpha(i').$$
Also gilt das Fundierungsaxiom.

Seien nun $\alpha \colon I \to \mathcal{P}(\Omega)$ und $\eta \colon I \to A$ Abbildungen. Dann gilt für die Abbildung $\beta \colon A \to \mathcal{P}(\Omega), a \mapsto \bigcup \alpha_{|\eta^{-1}(a)}$:
$$\begin{aligned}
\beta(a) &= \{x \in \Omega \mid \exists i \in \eta^{-1}(a) \colon x \in \alpha(i)\}. \\
\bigcup \beta &= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A \colon x \in \beta(a)\} \\
&= \{x \in \Omega \mid \exists a \in A \exists i \in \eta^{-1}(a) \colon x \in \alpha(i)\} \\
&= \{x \in \Omega \mid \exists i \in I \colon x \in \alpha(i)\} \\
&= \bigcup \alpha.
\end{aligned}$$
Also gilt auch das Teilsummenaxiom. □

Satz 3.2 (Invarianz der Summation gegenüber Umbenennung)**.** *Sei (S, Σ) eine [finitäre] Summationsstruktur. Sei außerdem $\alpha \colon I \to S$ eine Abbildung und sei $\tau \colon H \to I$ eine Bijektion [I endlich]. Dann gilt:*
$$\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha).$$

Beweis. Sei $\eta = \tau^{-1}$ eine Abbildung von I nach H. Weiterhin sei eine Abbildung $\beta\colon H \to S, h \mapsto \Sigma(\alpha_{|\{\eta^{-1}(h)\}})$ definiert. Aus dem Fundierungsaxiom folgt dann

$$\beta(h) = \Sigma(\alpha_{|\{\tau(h)\}}) = \alpha(\tau(h)) = (\alpha \circ \tau)(h).$$

Also ist $\beta = \alpha \circ \tau$. Weiterhin gilt laut Teilsummenaxiom $\Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$ und damit $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$. □

Definition 3.3. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann definieren wir $0_{\mathbb{S}} = \Sigma(\emptyset \to S)$.

Satz 3.3. *Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur und $f\colon A \to S, a \mapsto 0_{\mathbb{S}}$ eine konstante Abbildung. Dann gilt*

$$\Sigma(f) = 0_{\mathbb{S}}.$$

Beweis. Sei $\alpha = \emptyset \to S$ eine Abbildung. Seien weiterhin die Abbildungen $\eta\colon \emptyset \to A$ und $\beta\colon A \to S, a \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ gegeben. Dann gilt laut dem Teilsummenaxiom

$$0_{\mathbb{S}} = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) = \sum_{a \in A} \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(a)}) = \sum_{a \in A} \Sigma(\alpha_{|\emptyset}) = \sum_{a \in A} 0_{\mathbb{S}} = \Sigma(f).$$

□

Definition 3.4. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann ist für beliebige Abbildungen $\alpha\colon I \to S$

$$\mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) = \{i \in I \mid \alpha(i) \neq 0_{\mathbb{S}}\}$$

der Support von α in $\mathbb{S}$.

Satz 3.4. *Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur. Dann gilt für alle Abbildungen $\alpha\colon I \to S$*

$$\Sigma(\alpha) = \Sigma(\alpha_{|supp_{\mathbb{S}}(\alpha)}).$$

Beweis. Es seien $\eta\colon \mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) \to I, i \mapsto i$ sowie $\beta\colon I \to S, i \mapsto \Sigma(\alpha'_{|\eta^{-1}(i)})$ Abbildungen, wobei $\alpha' = \alpha_{|\mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}$. Dann gilt laut dem Teilsummenaxiom

$$\Sigma(\alpha_{|\mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha)}) = \Sigma(\alpha') = \Sigma(\beta) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j) = \Sigma(\alpha).$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für alle $i \in I$

$$\alpha(i) = \begin{cases} \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j) = \alpha(i) & i \in \mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha) \\ \sum_{j \in \eta^{-1}(i)} \alpha'(j = \sum_{j \in \emptyset} \alpha(j) = 0_{\mathbb{S}} & i \notin \mathrm{supp}_{\mathbb{S}}(\alpha). \end{cases}$$

□

Definition 3.5. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur und N eine Menge. Dann ist $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$ die N-fache Potenz von $\mathbb{S}$, wobei $\bar{\Sigma}$ für jede Abbildungsfamilie $(\alpha_i)_{i\in I} \in (S^N)^I$ (I [endliche] Menge) wie folgt definiert ist:

$$\overline{\sum_{i\in I}}\alpha_i \colon N \to S, n \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i(n).$$

Satz 3.5. *Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine Summationsstruktur und N eine Menge. So ist auch $\mathbb{S}^N = (S^N, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur.*

Beweis. Sei $\alpha\colon \{i\} \to S^N$ eine Abbildung. Da das Fundierungsaxiom in $\mathbb{S}$ gilt, ist $\bar{\Sigma}(\alpha)\colon N \to S, n \mapsto \alpha_i(n)$ und somit $\bar{\Sigma}(\alpha) = \alpha(i)$. Also gilt das Fundierungsaxiom in $\mathbb{S}^N$.

Seien nun $\alpha\colon I \to S^N$, $\eta\colon I \to A$ und $\beta\colon A \to S^N, a \mapsto \bar{\Sigma}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Dann gilt für alle $n \in N$:

$$\begin{aligned}
(\bar{\Sigma}(\beta))(n) &= \sum_{a\in A}(\beta(a))(n) \\
&= \sum_{a\in A}(\bar{\Sigma}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)}))(n) \\
&= \sum_{a\in A}\sum_{i\in\eta^{-1}(a)}(\alpha(i))(n) \\
&= \sum_{i\in I}(\alpha(i))(n) \\
&= (\bar{\Sigma}(\alpha))(n),
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Teilsummenaxiom für $\mathbb{S}$ folgt. □

Definition 3.6. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine finitäre Summationsstruktur und N eine Menge. Dann ist $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$ die N-fache Kopotenz von $\mathbb{S}$, wobei

$$S^{(N)} = \{s \in S^N \mid \operatorname{supp}_{\mathbb{S}}(s) \text{ endlich}\}$$

und $\bar{\Sigma}$ für jede Abbildungsfamilie $(\alpha_i)_{i\in I} \in (S^{(N)})^I$ (I endliche Menge) wie folgt definiert ist

$$\overline{\sum_{i\in I}}\alpha_i \colon N \to S, n \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i(n).$$

Satz 3.6. *Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine finitäre Summationsstruktur und N eine Menge. So ist auch $\mathbb{S}^{(N)} = (S^{(N)}, \bar{\Sigma})$ eine finitäre Summationsstruktur.*

Beweis. Das Gelten von Fundierungs- und Teilsummenaxiom lassen sich analog zu Satz 3.5 beweisen. An dieser Stelle soll daher lediglich gezeigt werden, dass für alle Abbildungen $\alpha \in (S^{(N)})^I$ mit endlicher Indexmenge I gilt, dass $\operatorname{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ endlich ist, d.h. $\bar{\Sigma}(\alpha) \in S^{(N)}$.

Der Support von $\bar{\Sigma}(\alpha)$ ist

$$\operatorname{supp}_{\mathbb{S}}\left(\overline{\sum_{i\in I}}\alpha_i\right) = \{n \in N \mid \sum_{i\in I} \alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}\}.$$

Ist N endlich folgt die Aussage daher sofort. Sei N also eine unendliche Menge. Aus Satz 3.3 folgt, dass für alle $n \in \operatorname{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ ein $i \in I$ existieren muss, sodass $\alpha_i(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$. Für einen Widerspruch sei angenommen $\operatorname{supp}_{\mathbb{S}}(\bar{\Sigma}(\alpha))$ wäre unendlich. Da I aber eine endliche Menge ist, muss es ein $j \in I$ gegeben, sodass $\alpha_j(n) \neq 0_{\mathbb{S}}$ für unendlich viele $n \in N$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass $\alpha_j \in S^{(N)}$. □

Definition 3.7. Seien $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ und $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$ Summationsstrukturen. Dann ist eine Abbildung $\varphi \colon S \to S'$ ein Homomorphismus von $\mathbb{S}$ nach $\mathbb{S}'$ falls für jede Abbildung $\alpha \colon I \to S$ stets gilt:

$$\varphi(\Sigma(\alpha)) = \Sigma'(\varphi \circ \alpha).$$

Ein bijektiver Homomorphismus wird Isomorphismus genannt.

Satz 3.7. *Seien $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$, $\mathbb{S}' = (S', \Sigma')$ und $\mathbb{S}'' = (S'', \Sigma'')$ Summationsstrukturen. Seien weiterhin $\varphi \colon S \to S'$ und $\varphi' \colon S' \to S''$ Homomorphismen in die jeweilige Struktur. Dann ist $\varphi' \circ \varphi \colon S \to S''$ ein Homomorphismus von $\mathbb{S}$ nach $\mathbb{S}''$.*

Beweis. Für eine Abbildung $\alpha \colon I \to S$ gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi' \circ \varphi)(\Sigma(\alpha)) &= \varphi'(\varphi(\Sigma(\alpha))) \\ &= \varphi'(\Sigma'(\varphi \circ \alpha)) = \Sigma''((\varphi' \circ \varphi) \circ \alpha).\end{aligned}$$

□

Definition 3.8. Sei $\mathbb{S}$ eine Summationsstruktur. Ein Homomorphismus von $\mathbb{S}$ nach $\mathbb{S}$ heißt Endomorphismus von $\mathbb{S}$.

$\mathrm{End}_{\mathbb{S}}$ bezeichnet die Menge aller Endomorphismen auf $\mathbb{S}$.

Definition 3.9. Eine [finitäre] Summationsstruktur (S, Σ) heißt idempotent, falls für jede konstante Abbildung $\alpha \colon I \to S$ [wobei I endlich] gilt:

$$\forall i \in I \colon \Sigma(\alpha) = \alpha(i).$$

Satz 3.8. *Sei (S, Σ) eine Summationsstruktur. Dann ist (S, Σ) genau dann idempotent, wenn für jede Abbildung $\alpha \colon I \to S$ und jede surjektive Abbildung $\tau \colon H \to I$ gilt: $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$.*

Beweis. Zunächst sei angenommen, dass (S, Σ) idempotent ist. Setze $\eta = \tau$. Dann ist $\beta \colon I \to S, i \mapsto \Sigma((\alpha \circ \tau)_{|\tau^{-1}(i)})$ und es gilt $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta)$ laut dem Teilsummenaxiom. $(\alpha \circ \tau)_{|\tau^{-1}(i)}$ ist eine konstante Abbildung, weshalb wegen der Idempotenz von (S, Σ) für alle $h \in \tau^{-1}(i)$ gilt:

$$\Sigma((\alpha \circ \tau)_{|\tau^{-1}(i)}) = (\alpha \circ \tau)(h) = \alpha(i).$$

Das heißt $\alpha = \beta$ und somit $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\beta) = \Sigma(\alpha)$.

Gilt nun umgekehrt $\Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha)$ für jede Abbildung $\alpha \colon I \to S$ und jede surjektive Abbildung $\tau \colon H \to I$. Sei weiterhin für ein beliebiges $c \in S$

$\gamma\colon H \to S, h \mapsto c$ eine konstante Abbildung. Für ein festes $j \in H$ seien außerdem $\tau\colon H \to \{j\}, h \mapsto j$ und $\alpha\colon \{j\} \to S, j \mapsto c$ Abbildungen. Da $\gamma = \alpha \circ \tau$ und τ eine surjektive Abbildung ist gilt laut Voraussetzung für alle $h \in H$:

$$\Sigma(\gamma) = \Sigma(\alpha \circ \tau) = \Sigma(\alpha) = c = \gamma(h),$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Fundierungsaxiom folgt. □

3.1 Summationsstrukturen und Monoide

Satz 3.9. *Sei (M, Σ) eine (finitäre) Summationsstruktur. Dann lässt sich wie folgt das zu (M, Σ) zugehörige kommutative Monoid $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ konstruieren: Setze $0 = \Sigma(\emptyset \to M)$ und $+\colon M \times M \to M, (a, b) \mapsto \Sigma(\alpha)$, wobei $\alpha\colon [2] \to M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}$.*

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass $\mathbb{M}$ assoziativ ist. Dazu sei a,b,$c \in M$. Weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} \alpha\colon [3] &\to M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c\}, \\ \eta_1\colon [3] &\to [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2\}, \\ \eta_2\colon [3] &\to [2], \{1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2\}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} \beta_1\colon [2] &\to M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ \beta_2\colon [2] &\to M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(i)}). \end{aligned}$$

Da β_1 eine Funktion von $[2] \to M$ ist kann $\Sigma(\beta_1)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\Sigma(\beta_1) = \beta_1(1) + \beta_1(2).$$

$\beta_1(1)$ ergibt sich aus folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \beta_1(1) &= \Sigma(\alpha_{\eta_1^{-1}(1)}) \\ &= \Sigma(\alpha_{[2]}) \\ &= \Sigma_{i \in [2]}(\alpha(i)) \\ &= \alpha(1) + \alpha(2) = a + b. \end{aligned}$$

$\beta_1(2)$ kann dagegen wie folgt berechnet werden:

$$\beta_1(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\{3\}}) = \alpha(3) = c$$

Insgesamt ist also $\Sigma(\beta_1) = (a + b) + c$.

Analog zu β_1 kann auch $\Sigma(\beta_2)$ wie folgt angegeben werden:

$$\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2).$$

$\beta_2(1)$ ist schlicht:

$$\beta_2(1) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(1)}) = \alpha(1) = a.$$

Für $\beta_2(2)$ ergibt sich:

$$\beta_2(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}}).$$

Da $\alpha_{|\{2,3\}}$ keine Abbildung von $[2] \to M$ ist bedarf es folgender Umbenennung:

$$\tau\colon [2] \to \{2,3\}, \{1 \to 2, 2 \to 3\}.$$

Nun kann $\beta_2(2)$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\beta_2(2) &= \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}}) \\ &= \Sigma(\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau) \\ &= (\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau)(1) + (\alpha_{|\{2,3\}} \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(2) + \alpha(3) \\ &= b + c.\end{aligned}$$

Also ist $\Sigma(\beta_2) = \beta_2(1) + \beta_2(2) = a + (b + c)$.

Nach Teilsummenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Als nächstes soll gezeigt werden, dass 0 tatsächlich das neutrale Element ist. Dazu sei $m \in M$ ein beliebiges Element aus M und weiterhin seien folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}\alpha&\colon \{1\} \to \{m\}, 1 \mapsto m \\ \eta_1&\colon \{1\} \to [2], 1 \mapsto 1 \\ \eta_2&\colon \{1\} \to [2], 1 \mapsto 2\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}&\beta_1\colon [2] \to M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(i)}) \text{ und} \\ &\beta_2\colon [2] \to M, i \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(i)}).\end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned}\Sigma(\beta_1) &= \beta_1(1) + \beta_1(2) \text{ und} \\ \Sigma(\beta_2) &= \beta_2(1) + \beta_2(2).\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\beta_1(1) = \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(1)}) = \Sigma(\alpha_{|\{1\}}) = \alpha(1) = m \text{ und}$$
$$\beta_1(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_1^{-1}(2)}) = \Sigma(\alpha_{|\emptyset}) = 0.$$

Außerdem ist

$$\beta_2(1) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(1)}) = 0 \text{ und}$$
$$\beta_2(2) = \Sigma(\alpha_{|\eta_2^{-1}(2)}) = \alpha(1) = m.$$

Laut Teilsummenaxiom gilt schließlich:

$$\Sigma(\beta_1) = \Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta_2).$$

und damit

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

Um letztendlich die Kommutativität zu zeigen seien $a,b \in M$ zwei Elemente aus M und folgende Funktionen definiert:

$$\alpha\colon [2] \to M, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\} \text{ und}$$
$$\tau\colon [2] \to [2], \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1\}.$$

Laut Umbenennungssatz gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= \alpha(1) + \alpha(2) \\ &= \Sigma(\alpha) \\ &= \Sigma(\alpha \circ \tau) \\ &= (\alpha \circ \tau)(1) + (\alpha \circ \tau)(2) \\ &= \alpha(\tau(1)) + \alpha(\tau(2)) = \alpha(2) + \alpha(1) = b + a. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Definition 3.10. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist (M, Σ^{fin}) die zu $\mathbb{M}$ gehörige finitäre Summationsstruktur, wobei für jede endliche Menge $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ und jede Abbildung $\alpha\colon I \to M$

$$\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i_1) + \alpha(i_2) + \cdots + \alpha(i_n).$$

Satz 3.10. *Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist (M, Σ^{fin}) eine finitäre Summationsstruktur.*

Beweis. Sei $\alpha\colon \{i\} \to M$ eine Abbildung. Dann ist $\Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = \alpha(i)$. Es gilt demnach das Fundierungsaxiom.

Seien weiterhin $\alpha\colon I \to M$, $\eta\colon I \to A$ und $\beta\colon A \to M, a \mapsto \Sigma^{\text{fin}}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen, wobei $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ und $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ endliche Mengen sind. Außerdem sei $n_k = |\{i_{k,l} \mid i_{k,l} \in \eta^{-1}(a_k) \subseteq I\}|$ Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma^{\text{fin}}(\beta) &= \beta(a_1) + \cdots + \beta(a_m)\\ &= (\alpha(i_{1,1}) + \cdots + \alpha(i_{1,n_1})) + \cdots + (\alpha(i_{m,1}) + \cdots + \alpha(i_{m,n_m}))\\ &= \alpha(i_1) + \cdots + \alpha(i_n)\\ &= \Sigma^{\text{fin}}(\alpha).\end{aligned}$$

Also gilt auch das Teilsummenaxiom. □

Definition 3.11. Ein kommutatives Monoid $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ heiße natürlich geordnet, falls $\leq_{\mathbb{M}} = \{(x, y) \in M^2 \mid \exists t \in M\colon x + t = y\}$ eine Ordnungsrelation definiert.

Satz 3.11. *Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. Dann ist $\mathbb{M}$ genau dann natürlich geordnet wenn gilt:*

$$\forall x,s,t \in M\colon (x + s) + t = x \implies x + s = x. \qquad (*)$$

Beweis. Ist $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid, so ist $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ stets reflexiv und transitiv. Denn für alle x existiert $\varepsilon \in M$ mit $x + \varepsilon = x$ und somit $x \leq_{\mathbb{M}} x$. Gilt außerdem $x \leq_{\mathbb{M}} y$ und $y \leq_{\mathbb{M}} z$, d.h. ist $x + t_1 = y$ und $y + t_2 = z$ für $t_1, t_2 \in M$. Dann ist $x + (t_1 + t_2) = z$, wobei $t_1 + t_2 \in M$, womit $x \leq_{\mathbb{M}} z$ gilt.

Also bleibt zu zeigen, dass $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ genau dann anti-symmetrisch ist wenn $(*)$ gilt. Sei dazu $(M, \leq_{\mathbb{M}})$ anti-symmetrisch und sei außerdem $(x + s) + t = x$ für beliebige $x,s,t \in M$. Dann ist $x \leq_{\mathbb{M}} x + s$ und $x + s \leq_{\mathbb{M}} x$, also $x = x + s$.

Gilt umgekehrt $(*)$ und seien $x,y \in M$ mit $x \leq_{\mathbb{M}} y$ und $y \leq_{\mathbb{M}} x$. Das heißt es existiert $t_1, t_2 \in M$ mit $x + t_1 = y$ und $y + t_2 = x$. Also ist $(x + t_1) + t_2 = x$, woraus laut Voraussetzung $x + t_1 = x$, also $y = x$, folgt. □

Beispiel 3.1. Beispiele für ein natürlich geordnetes kommutatives Monoid sind $(\mathbb{N}, +, 0)$ und $(\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, +, 0)$, wobei $x + \infty = \infty$.

Ein Gegenbeispiel ist $(\mathbb{Z}, +, 0)$, da $0 \leq 1$ und $1 \leq 0$ gilt.

Definition 3.12. Sei $(M, +, \varepsilon)$ ein Monoid. Ein Element $x \in M$ heißt idempotent, falls

$$x + x = x.$$

Ein Monoid heißt idempotent, falls jedes seiner Elemente idempotent ist.

Satz 3.12. *Ein kommutatives Monoid $\mathbb{M}$ ist genau dann idempotent, wenn die zu $\mathbb{M}$ gehörige finitäre Summationsstruktur idempotent ist.*

Beweis. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein idempotentes kommutatives Monoid. Sei weiterhin $\alpha\colon I \to M$ eine Abbildung mit endlicher Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, sodass $\forall 1 \leq j \leq n\colon \alpha(i_j) = m \in M$. Dann ist für alle $i \in I$

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{fin}}(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha(i_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m = m = \alpha(i). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt (M, Σ^{fin}) eine idempotente Summationsstruktur und $m \in M$ ein Element aus der Grundmenge. Weiterhin sei $\alpha\colon [2] \to M, i \mapsto m$ eine konstante Abbildung. Es gilt

$$m + m = \alpha(1) + \alpha(2) = \Sigma^{\text{fin}}(\alpha) = m.$$

□

3.2 Summation und Inzidenzstrukturen

Definition 3.13. Eine Matrix über einer Menge M (auch M-wertige Matrix) ist definitert als Tripel (P, B, α) bestehend aus den Mengen P, B und einer Abbildung $\alpha\colon P \times B \to M$.

Wir sagen auch, dass α eine $(P \times B)$-Matrix über M ist.

Definition 3.14. Eine M-wertige Matrix $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ wird auch Fuzzy-Inzidenz-struktur genannt. Ist $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur, so nennt man $\mathcal{I}$ auch eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über $\mathbb{M}$. Sind P und B endlich, so ist $\mathcal{I}$ finitär.

Definition 3.15. Gegeben sei eine M-wertige Matrix $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$. Für jedes $p \in P$ heiße die Abbildung $\alpha(p, \cdot)\colon B \to M, b \mapsto \alpha(p, b)$ die p-te Zeile von $\mathcal{I}$ bzw. α. $\text{row}_\alpha\colon P \to M^B, p \mapsto \alpha(p, \cdot)$ ist die Row-Map für $\mathcal{I}$ bzw. α.

Analog wird für jedes $b \in B$ die Abbildung $\alpha(\cdot, b)\colon P \to M, p \mapsto \alpha(p, b)$ als die b-te Spalte von $\mathcal{I}$ bzw. α bezeichnet. Weiterhin ist $\text{col}_\alpha\colon B \to M^P, b \mapsto \alpha(\cdot, b)$ die Column-Map für $\mathcal{I}$ bzw. α.

Definition 3.16. Sei $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ eine M-wertige Fuzzy-Inzidenzstruktur über $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$. Dann ist die Zeilensumme von $\mathcal{I}$ bzw. α

$$\Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \alpha(p, b).$$

Analog ist die Spaltensumme von $\mathcal{I}$ bzw. α definiert als

$$\Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{p \in P} \alpha(p, b).$$

Definition 3.17. Eine Fuzzy-Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$ über $\mathbb{M}$ wird als taktische Fuzzy-Konfiguration über $\mathbb{M}$ bezeichnet, falls $r_\mathcal{I}$ und $k_\mathcal{I}$ existieren mit

- $\forall p \in P\colon \Sigma(\alpha(p,\cdot)) = r_{\mathcal{I}}$ und
- $\forall b \in B\colon \Sigma(\alpha(\cdot,b)) = k_{\mathcal{I}}$.

Satz 3.13 (Satz der doppelten Abzählung)**.** *Sei $\mathcal{I} = (P,B,\alpha)$ eine [finitäre] Fuzzy-Inzidenzstruktur über einer [finitären] Summationsstruktur $\mathbb{M} = (M,\Sigma)$. Dann gilt:*

$$\sum_{p\in P}\sum_{b\in B}\alpha(p,b) = \Sigma(\alpha) = \sum_{b\in B}\sum_{p\in P}\alpha(p,b).$$

Beweis. Es seien $\eta\colon P\times B \to P, (p,b)\mapsto p$ und $\beta\colon P\to M, p\mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(p)})$ Abbildungen. Desweiteren sei eine bijektive Abbildung $\tau_p\colon B\to \{p\}\times B, b\mapsto (p,b)$ gegeben. Für ein $p\in P$ ist

$$\begin{aligned}\beta(p) &= \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(p)})\\ &= \Sigma(\alpha_{|\{p\}\times B})\\ &= \Sigma(\alpha_{|\{p\}\times B}\circ\tau_p)\\ &= \Sigma(\alpha(p,\cdot)).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich mithilfe des Teilsummenaxioms:

$$\begin{aligned}\sum_{p\in P}\sum_{b\in B}\alpha(p,b) &= \sum_{p\in P}\Sigma(\alpha(p,\cdot))\\ &= \sum_{p\in P}\beta(p)\\ &= \Sigma(\alpha).\end{aligned}$$

Analog kann ebenfalls $\sum_{b\in B}\sum_{p\in P}\alpha(p,b) = \Sigma(\alpha)$ gezeigt werden. □

Definition 3.18. Sei $\mathcal{I} = (P,B,I)$ eine Inzidenzstruktur. Sei weiterhin

$$\alpha_{\mathcal{I}}\colon P\times B\to \mathbb{N}\cup\{\infty\}, (p,b)\mapsto \begin{cases}1 & p\ I\ b\\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

Dann ist $(P,B,\alpha_{\mathcal{I}})$ eine Fuzzy-Inzidenzstruktur über $(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\Sigma)$, wobei Σ die erweiterte normale Summation darstellt.

Satz 3.14. *Eine endliche Inzidenzstruktur $\mathcal{I} = (P,B,I)$ ist genau dann eine taktische Konfiguration mit den Parametern $(|P|,r,|B|,k)$, wenn $\mathcal{I}' = (P,B,\alpha_{\mathcal{I}})$ eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern $(|P|,r_{\mathcal{I}},|B|,k_{\mathcal{I}})$ über der natürlichen Summationsstruktur $(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\Sigma)$ ist. Insbesondere ist $r = r_{\mathcal{I}}$ und $k = k_{\mathcal{I}}$.*

Beweis. Sei $p\in P$ ein beliebiges Element in P. Dann gilt

$$r_{\mathcal{I}} = \Sigma(\alpha_{\mathcal{I}}(p,\cdot)) = \sum_{b\in B}\alpha_{\mathcal{I}}(p,b) = \sum_{b\in pI} 1 = |pI| = r.$$

Ein ähnliches Argument kann auch für die Blöcke verwendet werden, wodurch die Behauptung bewiesen ist. □

Satz 3.15. *Ist $\mathcal{I} = (P, B, \alpha)$ eine taktische Fuzzy-Konfiguration mit den Parametern $(|P|, r_{\mathcal{I}}, |B|, k_{\mathcal{I}})$ über der Summationsstruktur $\mathbb{M} = (M, \Sigma)$, so gilt:*

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

Beweis. Mithilfe der doppelten Abzählung ergibt sich:

$$\sum_{p \in P} r_{\mathcal{I}} = \sum_{p \in P} \Sigma(\alpha(p, \cdot)) = \sum_{b \in B} \Sigma(\alpha(\cdot, b)) = \sum_{b \in B} k_{\mathcal{I}}.$$

□

4 Targoide und vollständige Verbände

Definition 4.1. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat. Zu einer Teilmenge $X \subseteq P$ heiße $t \in P$ Target von X bzgl. $\mathbb{P}$ falls $\forall x \in X : x \; R \; t$.

Analog heißt $s \in X$ Source von X bzgl. $\mathbb{P}$ falls $\forall x \in X : s \; R \; x$.

Definition 4.2. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat und $X \subseteq P$. Dann ist t ein essentielles Target von X bzgl. $\mathbb{P}$, falls es ein Target von X ist und weiterhin gilt:

$$\forall u \in P : ((\forall x \in X : x \; R \; u) \implies t \; R \; u),$$

d.h. wenn $u \in P$ ebenfalls Target von X ist, dann gilt $t \; R \; u$.

Analog dazu ist der Begriff essentielle Source definiert.

Definition 4.3. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt Targoid falls jede Teilmenge $X \subseteq P$ ein essentielles Target besitzt (Targoid-Eigenschaft).

Analog dazu heißt ein binäres Relat Sourcoid falls jede Teilmenge $X \subseteq P$ eine essentielle Source besitzt (Sourcoid-Eigenschaft).

Definition 4.4. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat, so ist $\mathbb{P}^{-1} = (P, R^{-1})$ mit $R^{-1} = \{(q, p) \in R \mid p \; R \; q\}$ das dazu duale binäre Relat bzw. sein Opposite.

Satz 4.1. *Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ ist ein Tagroid genau dann wenn $\mathbb{P}^{-1}$ ein Sourcoid ist.*

Beweis. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein Targoid und $X \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge. Ist $t \in P$ ein Target von X bzgl. $\mathbb{P}$, dann gilt $x \; R \; t$ für alle $x \in X$ also auch $t \; R^{-1} \; x$. Das heißt die Targets von X bzgl. $\mathbb{P}$ sind genau die Sources von X bzgl. $\mathbb{P}^{-1}$.

Sei nun $t \in P$ ein essentielles Target von X bzgl. $\mathbb{P}$. Das heißt für alle weiteren Targets $u \in P$ bzgl. $\mathbb{P}$ gilt $t \; R \; u$, also $u \; R^{-1} \; t$. Da alle Targets von X bzgl. $\mathbb{P}$ Sources von X bzgl. $\mathbb{P}^{-1}$ sind, ist t eine essentielle Source von X bzgl. $\mathbb{P}^{-1}$. $\square$

Lemma 4.1. *Sei (P, R) ein Targoid mit nichtleerer Grundmenge P. Dann existiert ein Element $p \in P$ für das gilt: $\forall q \in P : p \; R \; q$. Das heißt insbesondere, dass p Source von jeder Teilmenge in P ist.*

Beweis. Sei $X = \emptyset \subseteq P$. Dann ist die Menge aller Targets von X gleich der Menge $P \neq \emptyset$. Da (P, R) ein Targoid ist, gibt es zu X ein essentielles Target t. Das heißt, es gilt $t \; R \; p$ für alle Targets p von X, was aber allen Elementen in P entspricht. $\square$

Satz 4.2. *Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ ist ein Tagroid genau dann wenn $\mathbb{P}$ ein Sourcoid ist.*

Beweis. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein Targoid und $X \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge von P. Sei weiterhin $S_X = \{s \in P \mid s \text{ ist Source von } X\} \subseteq P$. S_X ist wegen Lemma 4.1 nicht leer. Da $\mathbb{P}$ ein Targoid ist, existiert ein essentielles Target t von S_X. Für alle $x \in X$ gilt: x ist Target von S_X. Da t ein essentielles Target ist gilt aber auch $t \; R \; x$ für alle $x \in X$. Das heißt, dass t eine Source von X ist. Sei weiterhin

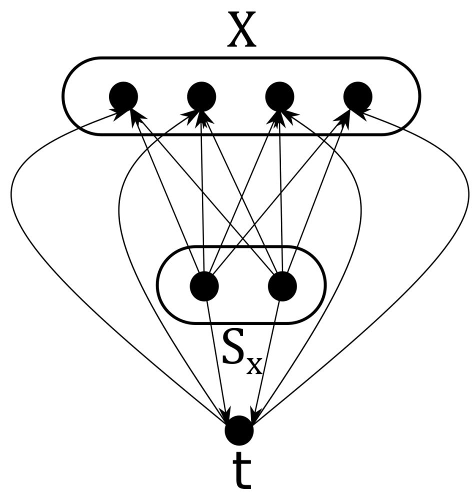

Abbildung 2: Veranschaulichung von Satz 4.2

$s \in P$ eine Source von X. Dann ist auch $s \in S_X$ und da t ein Target von S_X gilt $s\ R\ t$. Also ist t eine essentielle Source von X.

Sei umgekehrt $\mathbb{P}$ ein Sourcoid. Dann ist $\mathbb{P}^{-1}$ ein Targoid und deshalb wie soeben gezeigt ein Sourcoid. Also ist $(\mathbb{P}^{-1})^{-1} = \mathbb{P}$ ein Targoid. □

4.1 vollständige Verbände und Summation

Definition 4.5. Ein binäres Relat $\mathbb{P} = (P, R)$ heißt vollständiger Verband (geordnetes Targoid) genau dann wenn $\mathbb{P}$ sowohl Ordnung als auch Targoid bzw. Sourcoid ist.

Satz 4.3. *Ist (P, R) ein reflexives binäres Relat, dann ist p ein essentielles Target von $\{p\}$.*

Beweis. Da $(p, p) \in R$ ist p Target von $\{p\}$. Sei t ein beliebiges Target von $\{p\}$. Dann gilt auch $p\ R\ t$, womit bewiesen wäre, dass p ein essentielles Target ist. □

Satz 4.4. *Ist (P, R) anti-symmetrisch, so existiert zu jeder Teilmenge nur höchstens ein essentielles Target.*

Beweis. Angenommen für eine Teilmenge von P existieren zwei verschiedene essentielle Targets t_1 und t_2. Dann gilt aber auch $t_1\ R\ t_2$ und $t_2\ R\ t_1$ und wegen der Anti-Symmetrie auch $t_1 = t_2$. Widerspruch. □

Definition 4.6. Sei (P, R) ein binäres Relat und sei $\alpha\colon I \to P$ eine Abbildung. Dann heiße $t \in P$ [essentielles] Target von α in (P, R), falls t ein [essentielles] Target von $\alpha(I)$ ist.

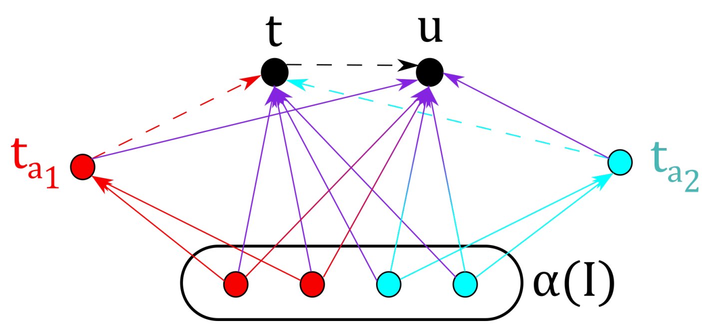

Abbildung 3: Veranschaulichung von Lemma 4.2

Lemma 4.2. *Sei (P, R) ein transitives binäres Relat. Dann gilt: Sind $\alpha\colon I \to P$ und $\eta\colon I \to A$ Abbildungen derart, dass für alle $a \in A$ zu $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ stets ein essentielles Target t_a existiert und ein $t \in P$ existiert, welches ein essentielles Target von α ist, so ist t auch essentielles Target von $\beta\colon A \to P, a \mapsto t_a$.*

Beweis. Da t ein Target von α ist, ist t auch gleichzeitig Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ für alle $a \in A$. Da t_a das essentielle Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ ist, ist auch $t_a\ R\ t$. Das bedeutet, dass für alle $a \in A$ gilt: $\beta(a)\ R\ t$, womit gezeigt wäre, dass t ein Target von β in (P, R) ist.

Sei $u \in P$ ein weiteres Target von β in (P, R). Das heißt $\forall a \in A\colon t_a\ R\ u$. Für jedes $a \in A$ ist t_a aber auch Target von $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$, weshalb $\forall i \in \eta^{-1}(a)\colon \alpha(i)\ R\ t_a$. Da (P, R) transitiv ist gilt damit $\forall a \in A \forall i \in \eta^{-1}(a)\colon \alpha(i)\ R\ u$ und somit $\forall i \in I\colon \alpha(i)\ R\ u$, d.h. u ist Target von α in (P, R). Da t ein essentielles Target von α in (P, R) ist, gilt $t\ R\ u$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Satz 4.5. *Ist (P, R) ein vollständiger Verband, so ist (P, Σ) derart, das Σ jeder Abbildung $\alpha\colon I \to P$ durch $\Sigma(\alpha)$ das essentielle Target von α zuweist, eine Summationsstruktur.*

Beweis. Sei $\alpha\colon \{i\} \to P$ eine Abbildung. Wegen der Reflexivität von (P, R) besitzt α laut Satz 4.4 genau ein essentielles Target, welches laut Satz 4.3 $\alpha(i)$ ist. Damit ist $\Sigma(\alpha) = \alpha(i)$ und das Fundierungsaxiom gilt.

Seien weiterhin $\alpha\colon I \to P$, $\eta\colon I \to A$ und $\beta\colon A \to P, a \mapsto \Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Aufgrund der Antisymmetrie besitzt α genau ein essentielles Target $\Sigma(\alpha)$ in (P, R) (Satz 4.4). Aus dem selben Grund besitzt $\alpha_{|\eta^{-1}(a)}$ für alle $a \in A$ ein essentielles Target $\Sigma(\alpha_{|\eta^{-1}(a)}) = \beta(a)$. Durch das soeben bewiesenen Lemma 4.2 ergibt sich somit, dass das essentielle Target von β gleich dem essentiellen Target von α ist. Damit ist $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)$, womit gezeigt ist, dass auch das Teilsummenaxiom erfüllt ist. □

Definition 4.7. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ ein vollständiger Verband und $\alpha\colon I \to P$ eine Abbildung, so bezeichnet man das essentielle Target von α in (P, R) auch als Supremum von α (schreibe $\sup_{\mathbb{P}} \alpha$)

Eine essentielle Source von α wird analog dazu als Infimum von α (schreibe $\inf_{\mathbb{P}} \alpha$) bezeichnet.

Satz 4.6. *Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein vollständiger Verband. Dann ist $(P, \sup_{\mathbb{P}})$ eine idempotente Summationsstruktur.*

Beweis. Laut Satz 4.5 ist $(P, \sup_{\mathbb{P}})$ eine vollständige Summationsstruktur. Zu zeigen bleibt also noch die Idempotenz. Dazu sei $\alpha\colon I \to P, i \mapsto p$ eine konstante Abbildung. $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha)$ ist das (eindeutig bestimmte) essentielle Target von $\alpha(I) = \{p\}$. Dies entspricht laut Satz 4.3 p selbst, also gilt für alle $i \in I$: $\sup_{\mathbb{P}}(\alpha) = p = \alpha(i)$. □

Satz 4.7. *Ist $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine idempotente finitäre Summationsstruktur und $+$ die durch $\mathbb{S}$ induzierte Addition, so gilt für $\leq_{\mathbb{S}} = \{(x, y) \in S^2 \mid \exists s \in S\colon x + s = y\}$ stets, dass $(S, \leq_{\mathbb{S}})$ ein vollständiger Verband ist.*

Beweis. Es gilt $x + 0_{\mathbb{S}} = x$ und damit $x \leq_{\mathbb{S}} x$ für alle $x \in X$. Ist außerdem $x \leq_{\mathbb{S}} y$ und $y \leq_{\mathbb{S}} z$ für $x, y, z \in S$, so gibt es $s_1, s_2 \in S$ mit $y = x + s_1$ und $z = y + s_2$ und damit auch $z = x + (s_1 + s_2)$, also $x \leq_{\mathbb{S}} z$. Weiterhin ist $(S, +, 0)$ laut Satz 3.12 idempotent, da $\mathbb{S}$ idempotent ist. Seien $x, y \in S$ und gelte $x \leq_{\mathbb{S}} y$ und $y \leq_{\mathbb{S}} x$, d.h. es existieren $s_1, s_2 \in S$ mit $x + s_1 = y$ und $y + s_2 = x$. Dann gilt:

$$y = x + s_1 = x + (x + s_1) = x + y = y + x = y + (y + s_2) = y + s_2 = x.$$

Zu zeigen bleibt also noch, dass jede Teilmenge von S ein essentielles Target besitzt. Sei also $X \subseteq S$ eine Teilmenge von S und $t = \max(X)$. Dann ist t das essentielle Target von X und die Aussage ist bewiesen. □

5 Summoide

Definition 5.1. Ein Summoid ist definiert als Quadrupel $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$, bestehend aus einer Summationsstruktur $\mathcal{S}_{\text{Sum}} = (S, \Sigma)$ und einem Monoid $\mathcal{S}_{\text{Mult}} = (S, *, \varepsilon)$, sodass für ein Element $s \in S$ und eine Abbildung $\alpha\colon I \to S$ folgende Distributivgesetze gelten:

$$s * \Sigma(\alpha) = \Sigma(s * \alpha) \text{ mit } s * \alpha\colon I \to S, i \mapsto s * \alpha(i)$$
$$\Sigma(\alpha) * s = \Sigma(\alpha * s) \text{ mit } \alpha * s\colon I \to S, i \mapsto \alpha(i) * s$$

Ein Summoid $\mathcal{S}$ heißt finitär wenn $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$ eine finitäre Summationsstruktur ist.

Beispiel 5.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathcal{S}_\Omega = (\mathcal{P}(\Omega), \bigcup, \cap, \Omega)$ das sogenannte Potenzmengensummoid.

Beispiel 5.2. Das Quadrupel $\mathcal{S}_{\text{Real}} = ([0,\infty], \Sigma, *, 1)$ ist das reelle Summoid, wobei $\Sigma(\alpha) = \sup_{J \subseteq_{\text{fin}} I}(\Sigma(\alpha_{|J}))$ für jede Abbildung $\alpha\colon I \to [0,\infty]$ bzgl. der Ordnung $\leq$ mit $x \leq y \iff \exists t \in [0,\infty]\colon x + t = y$ und $\cdot$ die übliche Multiplikation darstellt mit $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$.

Beispiel 5.3. Das Quadrupel $\mathcal{S}_{\text{trop}} = ([0,\infty], \Sigma_{\text{trop}}, \cdot_{\text{trop}}, 1_{\text{trop}})$ ist das reelle tropische Summoid, wobei für jede Abbildung $\alpha\colon I \to [0,\infty]$

$$\Sigma_{\text{trop}}(\alpha) = \inf_{([0,\infty],\leq)} \alpha$$

und für $x, y \in [0,\infty]$

$$x \cdot_{\text{trop}} y = \begin{cases} x + y & \text{falls } \infty \notin \{x, y\} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $1_{\text{trop}} = 0$.

Achtung: $0_{\text{trop}} = \Sigma_{\text{trop}}(\emptyset \to [0,\infty]) = \infty$.

Beispiel 5.4. Sei P eine Menge. Dann ist $\text{Rel}_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$ mit $R * S = \{(p,q) \in P \times P \mid \exists t \in P\colon p\,R\,t \wedge t\,S\,q\}$ sowie $\Delta_P = \{(p,p) \mid p \in P\}$ (die diagonale Gleichheitsrelation) ein Summoid, welches das Relationensummoid zu P genannt wird.

Satz 5.1. *Das Relationensummoid $Rel_2 P = (\mathcal{P}(P \times P), \bigcup, *, \Delta_P)$ aus Beispiel 5.4 ist ein Summoid.*

Beweis. An dieser Stelle soll nur die Linksdistributivität gezeigt werden. Seien dazu $R \in \mathcal{P}(P \times P)$ und $S\colon \Lambda \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ eine Abbildung für eine beliebige Indexmenge Λ. Für alle $(p,q) \in P \times P$ gilt:

$$\begin{aligned}
(p,q) \in R * \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda &\iff \exists t \in P\colon (p,t) \in R \wedge (t,q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \\
&\iff \exists t \in P\colon (p,t) \in R \wedge \exists \lambda \in \Lambda\colon (t,q) \in S_\lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \Lambda \exists t \in P\colon (p,t) \in R \wedge (t,q) \in S_\lambda \\
&\iff (p,q) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R * S_\lambda.
\end{aligned}$$

□

Definition 5.2. Wir setzen $0_{\mathcal{S}} = 0_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$.

Definition 5.3. Ein Summoid $\mathcal{S}$ heißt kommutativ falls $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ kommutativ ist.

Definition 5.4. Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann wird $\text{End}(\mathbb{S}) = (\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, \text{id}_S)$ als [finitäres] Endomorphismen-Summoid bezeichnet, wobei $\bar{\Sigma}(\varphi)$ für eine Abbildung $\varphi\colon \Lambda \to \text{End}_{\mathbb{S}}$ definiert ist als

$$\bar{\Sigma}(\varphi)\colon S \to S, s \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(s).$$

Ist $\mathcal{S}$ ein Summoid, so ist $\text{End}_{\mathcal{S}} = \text{End}(\mathcal{S}_{\text{Sum}})$.

Satz 5.2. *Sei $\mathbb{S} = (S, \Sigma)$ eine [finitäre] Summationsstruktur. Dann ist das Endomorphismen-Summoid $End(\mathbb{S}) = (End_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma}, \circ, id_S)$ ein Summoid.*

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass $(\text{End}_{\mathbb{S}}, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur ist. Laut Satz 3.5 ist bewiesen, dass $(S^S, \bar{\Sigma})$ eine Summationsstruktur darstellt, wodurch noch zu zeigen bleibt, dass für jede beliebige Abbildung $\varphi\colon \Lambda \to \text{End}_{\mathbb{S}}$ gilt: $\bar{\Sigma}(\varphi) \in \text{End}_{\mathbb{S}}$. Sei dazu $\alpha\colon I \to S$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\bar{\Sigma}(\varphi))(\Sigma(\alpha)) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\Sigma(\alpha)) \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} \Sigma(\varphi_\lambda \circ \alpha) \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \varphi_\lambda(\alpha(i)) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\alpha(i)) \\
&= \sum_{i \in I} (\bar{\Sigma}(\varphi))(\alpha(i)) \\
&= \Sigma((\bar{\Sigma}(\varphi)) \circ \alpha).
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht ist $(\text{End}_{\mathbb{S}}, \circ, \text{id}_S)$ ein Monoid, sodass nur noch die Distributivgesetze gezeigt werden müssen. Seien dazu $\psi \in \text{End}_{\mathbb{S}}$, $\varphi\colon \Lambda \to \text{End}_{\mathbb{S}}$. Dann gilt für alle $s \in S$

$$\psi((\bar{\Sigma}(\varphi))(s)) = \psi(\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(s)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi \circ \varphi_\lambda)(s) = (\bar{\Sigma}(\psi \circ \varphi))(s)$$

und

$$(\bar{\Sigma}(\varphi)(\psi(s)) = (\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(\psi(s))) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda \circ \psi)(s) = (\bar{\Sigma}(\varphi \circ \psi))(s).$$

□

Definition 5.5. Seien $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ und $\mathcal{S}' = (S', \Sigma', *', \varepsilon')$ Summoide. Dann heißt eine Abbildung φ Homomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$, falls φ ein Homomorphismus von $\mathcal{S}_{\text{Sum}}$ nach $\mathcal{S}'_{\text{Sum}}$ und ein Homomorphismus von $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$ nach $\mathcal{S}'_{\text{Mult}}$ ist.

Satz 5.3. *$\mathcal{S} = ([0,1], \inf, \cdot, 1)$ und $\mathcal{S}' = ([0,\infty], \sup, +, 0)$ sind isomorph.*

Beweis. Sei $\varphi\colon [0,\infty] \to [0,1], x \mapsto 2^{-x}$, wobei $2^{-\infty} = 0$. φ ist bijektiv und es gilt für jede Abbildung $\alpha\colon I \to [0,\infty]$:

$$\varphi(\sup \alpha) = \inf(\varphi \circ \alpha).$$

Außerdem $\varphi(0) = 1$ und es gilt für alle $a, b \in [0,\infty]$:

$$\varphi(a+b) = 2^{-(a+b)} = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

□

Satz 5.4. *Ist $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein [finitäres] Summoid, so ist die Abbildung $\lambda\colon S \to End_{\mathcal{S}_{Sum}}, s \mapsto \lambda_s$ mit $\lambda_s\colon S \to S, x \mapsto s * x$ ein injektiver Homomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $End_{\mathcal{S}} = (End_{\mathcal{S}_{Sum}}, \bar{\Sigma}, \circ, id_S)$.*

Beweis. Zunächst muss gezeigt werden, dass λ wohldefiniert ist, d.h. dass für alle $s \in S$ gilt: $\lambda_s \in \mathrm{End}_{\mathcal{S}_{\text{Sum}}}$. Sei dazu $\alpha\colon I \to S$ eine Abbildung und $s \in S$. Dann ist

$$\lambda_s(\Sigma(\alpha)) = s * \Sigma(\alpha) = \Sigma(s * \alpha) = \Sigma(\lambda_s \circ \alpha).$$

Sei nun $\alpha\colon I \to S$ eine Abbildung mit [endlicher] Indexmenge I und $s \in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda(\Sigma(\alpha)))(s) &= \lambda_{\Sigma(\alpha)}(s) \\
&= \Sigma(\alpha) * s \\
&= \Sigma(\alpha * s) \\
&= \sum_{i \in I} (\alpha * s)(i) \\
&= \sum_{i \in I} (\alpha(i) * s) \\
&= \sum_{i \in I} ((\lambda \circ \alpha)(i))(s) = (\bar{\Sigma}(\lambda \circ \alpha))(s).
\end{aligned}$$

Seien nun $s_1, s_2, s \in S$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\lambda(s_1 * s_2))(s) &= (s_1 * s_2) * s \\
&= s_1 * (s_2 * s) \\
&= s_1 * \lambda_{s_2}(s) \\
&= \lambda_{s_1}(\lambda_{s_2}(s)) = (\lambda(s_1) \circ \lambda(s_2))(s).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass λ ein Homomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathrm{End}_{\mathcal{S}}$ ist.

Um noch schließlich die Injektivität zu zeigen seien $s, t \in S$ und $\lambda(s) = \lambda(t)$. Dann gilt

$$s = s * \varepsilon = \lambda_s(\varepsilon) = \lambda_t(\varepsilon) = t * \varepsilon = t.$$

□

Beispiel 5.5. Sei $\mathrm{Nat} = (\mathbb{N}, \Sigma, \cdot, 1)$ das natürliche Summoid. Dann ist $End(\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}}) = (End_{\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}}}, \bar{\Sigma}, \circ, \mathrm{id}_{\mathbb{N}})$ das zur natürlichen Summationsstruktur gehörige Endomorphismen-Summoid.

Sei $\mathbb{1}^{[n]} \colon [n] \to \mathbb{N}, i \mapsto 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $\varphi \in End_{\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}}}$:

$$\varphi(n) = \varphi(\Sigma(\mathbb{1}^{[n]})) = \Sigma(\varphi \circ \mathbb{1}^{[n]}) = \sum_{i \in [n]} \varphi(1) = (\varphi(1)) \cdot n.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\lambda_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto k \cdot n$ stets ein Endomorphismus von Nat. Denn für jede Abbildung $\alpha \colon I \to \mathbb{N}$ gilt stets:

$$\lambda_k(\Sigma(\alpha)) = k \cdot \sum_{i \in I} \alpha(i) = \sum_{i \in I} k \cdot \alpha(i) = \sum \lambda_k(\alpha).$$

Damit ist $End_{\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}}} = \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $\psi \colon \mathbb{N} \to End_{\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}}}, k \mapsto \lambda_k$ ein Isomorphismus von Nat nach $End(\mathrm{Nat}_{\mathrm{Sum}})$.

5.1 Produktsummen

Definition 5.6. Ein Summoid $\mathcal{S}$ heißt Join-Summoid falls $\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}$ idempotent ist. Für eine beliebige Abbildung wird die Summe der Abbildung auch als der Join der Abbildung in $\mathcal{S}$ bezeichnet.

Definition 5.7. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{\mathrm{Mult}}$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Für jede Abbildung $\alpha \colon I \to S$ ist die Produktsumme von α definiert als

$$\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sum_{J \subseteq_{\mathrm{fin}} I} \Pi(\alpha_{|J}),$$

Definition 5.8. Sei $(I_h)_{h \in H} \in \mathcal{P}(I)^H$ eine Mengenfamilie für eine endliche Menge H und eine beliebige Menge I. Dann ist

$$\bigtimes_{h \in H} I_h = \{\gamma \colon H \to \bigcup_{h \in H} I_h \mid \forall h \in H \colon \gamma(h) \in I_h\}.$$

Beispiel 5.6. Seien $H = \{1, 2\}$ und $I = \{a, b, c, d\}$ Mengen und $F \in \mathcal{P}(I)^H$ mit $F = (\{a\}, \{b, c\})$ eine Familie. Dann ist

$$\begin{aligned} \bigtimes_{h \in H} F = \{&\gamma_1 \colon H \to \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}, \\ &\gamma_2 \colon H \to \{a, b, c\}, \{1 \mapsto a, 2 \mapsto c\}\}. \end{aligned}$$

Satz 5.5. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid. Dann gilt für jede endliche Menge H und jede beliebige Menge I sowie für jede beliebige Mengenfamilie $I_h = (I_h)_{h\in H} \in \mathcal{P}(I)^H$ und jede Familie $(\alpha_h)_{h\in H}$ von Abbildungen $\alpha_h \colon I_h \to S$ stets:*

$$\prod_{h\in H} \sum_{i_h\in I_h} \alpha_h(i_h) = \sum_{(i_h)_{h\in H}\in \times_{h\in H} I_h} \prod_{h\in H} \alpha_h(i_h),$$

wobei (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{Mult}$ gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

Beweis. Sei $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\prod_{h\in H} \sum_{i_h\in I_h} \alpha_h(i_h) &= \sum_{i_1\in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2\in I_2} \alpha_2(i_2) * \cdots * \sum_{i_n\in I_n} \alpha_n(i_n) \\
&= \sum_{i_n\in I_n} \left(\ldots \left(\sum_{i_2\in I_2} \left(\sum_{i_1\in I_1} \alpha_1(i_1) \right) * \alpha_2(i_2) \right) \cdots * \alpha_n(i_n) \right) \\
&= \sum_{i_n\in I_n} \cdots \sum_{i_2\in I_2} \sum_{i_1\in I_1} \Big(\alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) * \ldots \alpha_n(i_n) \Big) \\
&= \sum_{(i_n,\ldots,i_1)\in I_n\times\cdots\times I_1} \prod_{h\in H} \alpha_h(i_h) \\
&= \sum_{(i_h)_{h\in H}\in \times_{h\in H} I_h} \prod_{h\in H} \alpha_h(i_h).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.7.

$$\sum_{i\in I_1} \alpha_1(i_1) * \sum_{i_2\in I_2} \alpha_2(i_2) = \sum_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2} \Big(\alpha_1(i_1) * \alpha_2(i_2) \Big)$$

Lemma 5.1. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid und sei (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{Mult}$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Weiterhin seien $\alpha \colon I \to S$, $\eta \colon I \to A$ und $\beta \colon A \to S, a \mapsto SOP_{\mathcal{S}}(\alpha_{|\eta^{-1}(a)})$ Abbildungen. Dann gilt:*

$$SOP_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B\subseteq_{fin} A} \sum_{J\subseteq_{fin} \eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha_{|J}).$$

Beweis. Laut Definition von SOP gilt zunächst

$$\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B\subseteq_{\mathrm{fin}} A} \Pi(\beta_{|B}).$$

Für $B \subseteq_{\text{fin}} A$ gilt

$$\begin{aligned}
\Pi(\beta_{|B}) &= \prod_{b\in B} \beta(b) \\
&= \prod_{b\in B} \mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha_{|\eta^{-1}(b)}) \\
&= \prod_{b\in B} \sum_{J\subseteq_{\text{fin}}\eta^{-1}(b)} \Pi(\alpha_{|J}) \\
&= \sum_{(J_b)_{b\in B}\in \times_{b\in B}\mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \prod_{b\in B} \Pi(\alpha_{|J_b}),
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichung aus Satz 5.5 ergibt. Für alle $a, c \in B$ ist $J_a \cap J_c = \emptyset$, weshalb gilt

$$\prod_{b\in B} \prod_{j_b\in J_b} \alpha(j_b) = \prod_{i\in \bigcup_{b\in B} J_b} \alpha(i).$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\Pi(\beta_{|B}) = \sum_{(J_b)_{b\in B}\in \times_{b\in B}\mathcal{P}_{\text{fin}}(\eta^{-1}(b))} \Pi(\alpha_{|\bigcup_{b\in B} J_b}) = \sum_{J\subseteq_{\text{fin}}\eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha_{|J}).$$

□

Satz 5.6. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Join-Summoid, (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{Mult}$ gehörige finitäre Summationsstruktur und $(S, +, \varepsilon)$ das zu $\mathcal{S}_{Sum}$ gehörige kommutative Monoid. Dann ist $(S, SOP_{\mathcal{S}})$ eine Summationsstruktur.*

Beweis. Sei $\alpha \colon \{i\} \to S$ eine Abbildung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) &= \sum_{J\subseteq_{\text{fin}}\{i\}} \Pi(\alpha_{|J}) \\
&= \Pi(\alpha_{|\{i\}}) + \Pi(\alpha_{|\emptyset}) \\
&= \alpha(i) + \varepsilon \\
&= \alpha(i).
\end{aligned}$$

Damit ist das Fundierungsaxiom gezeigt.

Laut Lemma 5.1 gilt

$$\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta) = \sum_{B\subseteq_{\text{fin}} A} \sum_{J\subseteq_{\text{fin}}\eta^{-1}(B)} \Pi(\alpha_{|J}).$$

In $\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha)$ tritt jeder Summand $\Pi(\alpha_{|J})$ nur ein mal auf. Da $\mathcal{S}$ aber idempotent ist, gilt $\mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\alpha) = \mathrm{SOP}_{\mathcal{S}}(\beta)$, womit auch das Teilsummenaxiom bewiesen wäre.

□

Satz 5.7. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Join-Summoid. Dann bildet $(S, SOP_{\mathcal{S}})$ eine Summationsstruktur genau dann wenn ε kleinstes Element in S bzgl. der natürlichen Ordnung von $\mathcal{S}$ ist. D.h. $\mathcal{S}$ ist kommutatives Summoid mit $\Sigma(\emptyset \to S) = \varepsilon$.*

Beweis. ??? □

Beispiel 5.8. $([0, \infty], \sup, +, 0)$

6 Łukasiewicz-Norm und -Monoid

Definition 6.1. Die Łukasiewicz-Norm ist eine innere zweistellige Verknüpfung $*\colon [0,1]^2 \to [0,1], (x,y) \mapsto \max(x+y-1, 0)$.

Das Łukasiewicz-Monoid ist definiert als $\mathbb{L} = ([0,1], *, 1)$.

Satz 6.1. *Sei $*$ die Łukasiewicz-Norm. Dann gilt für beliebige Tupel $(x_0, \ldots, x_n) \in [0,1]^{n+1}$:*

$$x_0 * x_1 * \cdots * x_n = \max((x_0 + x_1 + \cdots + x_n) - n, 0).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt aus der Definition der Łukasiewicz-Norm. Sei also die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bereits gezeigt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x_0 * \cdots * x_n) * x_{n+1} &= \max((x_0 + x_1 + \cdots + x_n) - n, 0) * x_{n+1} \\
&= \max(\max((x_0 + \cdots + x_n) - n, 0) + x_{n+1} - 1, 0) \\
&= \max(\max((x_0 + \cdots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\
&= \max((x_0 + \cdots + x_n + x_{n+1}) - (n+1), 0)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus folgender Überlegung: Gilt $(x_0 + \cdots + x_n) - n \geq 0$, so folgt die Behauptung sofort.
Ist dagegen $(x_0 + \cdots + x_n) - n < 0$ so gilt

$$\begin{aligned}
&\max(\max((x_0 + \cdots + x_n) - n + x_{n+1} - 1, x_{n+1} - 1), 0) \\
&= \max(x_{n+1} - 1, 0) = 0 \\
&= \max((x_0 + \cdots + x_n + x_{n+1}) - (n+1), 0),
\end{aligned}$$

da $x_{n+1} \in [0,1]$ und somit $x_{n+1} - 1 \leq 0$. □

Satz 6.2. *Das Łukasiewicz-Monoid ist ein Monoid.*

Beweis. Als erstes soll die Assoziativität gezeigt werden. Für $x, y, z \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= \max(((x + y) + z) - 2, 0) \\
&= \max((x + (y + z)) - 2, 0) = x * (y * z).
\end{aligned}$$

1 ist das neutrale Element, da für alle $x \in [0,1]$

$$1 * x = \max(1 + x - 1, 0) = \max(x, 0) = x = \max(x + 1 - 1, 0) = x * 1$$ □

Definition 6.2. Seien $a, b \in [0,1]$. Es gelten folgende Schreibweisen:

- $\overline{a} = 1 - a$
- $a \vee b = max(a, b)$
- $a \wedge b = min(a, b)$

Der Operator $\bar{\cdot}$ heißt Fuzzy-Negation und ist involutorisch (selbstinvers).

Satz 6.3. *Sei $*$ die Łukasiewicz-Norm und $a, b \in [0,1]$.*
Dann gilt $a * b = \overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0$.

Beweis.

$$\overline{(\bar{a} + \bar{b})} \vee 0 = (1 - (1-a) - (1-b)) \vee 0 = ((a+b) - 1) \vee 0 = a * b.$$

□

Satz 6.4. *Sei $a, b \in [0,1]$. Dann gilt:*

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = a \wedge b.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \geq b$. Dann ist

$$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = 1 - ((1-a) \vee (1-b)) = 1 - (1-b) = b = a \wedge b.$$

□

Satz 6.5. *Die Fuzzy-Negation ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen den Ordnungen $([0,1], \leq)$ und $([0,1], \geq)$. Die Fuzzy-Negation ist deshalb ein Antiautomorphismus.*

Beweis. Sei $a, b \in [0,1]$ mit $a \leq b$. Dann gilt

$$a \leq b \iff -a \geq -b \iff 1 - a \geq 1 - b \iff \bar{a} \geq \bar{b}.$$

□

Satz 6.6. *Sei $\mathbb{L} = ([0,1], *, 1)$ das Łukasiewicz-Monoid, $([0,1], \Pi)$ die zu $\mathbb{L}$ gehörige finitäre Summationsstruktur und $([0,1], \Sigma)$ die zu $([0,1], +, 0)$ gehörige finitäre Summationsstruktur. Dann gilt für jede Abbildung $\alpha \colon I \to [0,1]$ mit endlicher Indexmenge*

$$\Pi(\alpha) = \overline{(\sum_{i \in I} (\overline{\alpha(i)}))} \vee 0$$

Beweis. Es gilt für $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$

$$\begin{aligned}
\overline{(\sum_{i \in I} (\overline{\alpha(i)}))} \vee 0 &= (1 - ((1 - \alpha(1)) + \cdots + (1 - \alpha(n)))) \vee 0 \\
&= (1 - (n - (\alpha(1) + \cdots + \alpha(n)))) \vee 0 \\
&= ((\alpha(1) + \cdots + \alpha(n)) - (n-1)) \vee 0 \\
&= \alpha(1) * \cdots * \alpha(n) \\
&= \Pi(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Definition 6.3. Seien $a, c \in [0,1]$. Das größte $b \in [0,1]$, für das $a \wedge b \leq c$ gilt wird mit $a \overset{\wedge}{\to} c$ bezeichnet.

$a \overset{\wedge}{\to} c$ ist also definiert als

$$a \overset{\wedge}{\to} c = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \leq c \\ c & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 6.4. Sei $*$ die Łukasiewicz-Norm und $a, c \in [0,1]$. Das größte $b \in [0,1]$ mit $a * b \leq c$ wird mit $a \overset{*}{\to} c$ bezeichnet.

Satz 6.7. *$a \overset{*}{\to} c = (\overline{a} + c) \wedge 1$.*

Beweis. Für $x = a \overset{*}{\to} c$ muss folgende Ungleichung gelten:

$$a + x - 1 \leq a * x \leq c.$$

Also gilt

$$x \leq (1 - a) + c = \overline{a} + c.$$

Ist $\overline{a} + c \geq 1$, so muss $a \overset{*}{\to} c = 1$ sein und ansonsten $\overline{a} + c$. □

Definition 6.5. Sei Ω eine Menge und seien $A, C \subseteq \Omega$. Die größte Menge $B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B \subseteq C$ wird bezeichnet als $A \overset{\cap}{\to} C$.

Satz 6.8.

$$A \overset{\cap}{\to} C = \begin{cases} \Omega & \textit{wenn } A \subseteq C \\ \bar{A} \cup C & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $A \subseteq C$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Ist dagegen $A \nsubseteq C$, so gilt

$$A \cap (\bar{A} \cup C) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap C) = A \cap C \subseteq C.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{A} \cup C$ die größe Menge mit dieser Eigenschaft ist. Dazu sei angenommen es existiere eine weitere Menge Y mit $(\bar{A} \cup C) \subsetneq Y$ und $A \cap Y \subseteq C$. Sei $y \in Y \setminus (\bar{A} \cup C) = (Y \setminus \bar{A}) \cap (Y \setminus C)$. Das beudetet, dass $y \in A$ und $y \notin C$. Aus $y \in A$ folgt aber auch laut Voraussetzung $y \in C$. □

7 Summoid-Module

Definition 7.1. Sei $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ eine Summationsstruktur, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und $\mathrm{scal}\colon S \to \mathrm{End}_{\mathbb{M}}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathrm{End}(\mathbb{M})$ mit $\mathrm{End}(\mathbb{M}) = (\mathrm{End}_{\mathbb{M}}, \bar{\Sigma}, \circ, \mathrm{id}_M)$. Dann ist $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ ein (linksseitiges) Summoid-Modul.

Definition 7.2. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Dann heißt eine Abbildung

$$\cdot\colon S \times M \to M, (s, m) \mapsto s \cdot m = (\mathrm{scal}(s))(m)$$

(linksseitiges) Scaling bzgl. $(\mathcal{S}, \mathbb{M})$.

Anmerkung 7.1. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ ein Summoid-Modul wie oben. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt für alle $(s_i)_{i \in I} \in S^I$

$$\mathrm{scal}\left(\sum_{i \in I} s_i\right) = \overline{\sum_{i \in I}} \mathrm{scal}(s_i),$$

   d.h. für alle $m \in M$ ist

$$\left(\sum_{i \in I} s_i\right) \cdot m = \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{i \in I} (s_i \cdot m),$$

2. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt für $s, t \in S$ stets

$$\mathrm{scal}(s * t) = \mathrm{scal}(s) \circ \mathrm{scal}(t),$$

   d.h. für alle $m \in M$ ist

$$(s * t) \cdot m = s \cdot (t \cdot m).$$

3. Da scal ein Homomorphismus ist, gilt

$$\mathrm{scal}(\varepsilon) = \mathrm{id}_M,$$

   d.h. für alle $m \in M$ ist

$$\varepsilon \cdot m = m.$$

4. Für $s \in S$ ist stets $\mathrm{scal}(s) \in \mathrm{End}_{\mathbb{M}}$, also gilt für alle $(m_i)_{i \in I} \in M^I$

$$(\mathrm{scal}(s))\left(\mathop{\mathbb{\Sigma}}_{i \in I} m_i\right) = \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{i \in I} (\mathrm{scal}(s))(m_i),$$

   bzw.

$$s \cdot \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{i \in I} m_i = \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{i \in I} s \cdot m_i.$$

Definition 7.3. Sei P eine Menge, $\mathbb{W} = (W, *, \varepsilon)$ ein Monoid und φ ein Homomorphismus zwischen $\mathbb{W}$ und $(P^P, \circ, \mathrm{id}_P)$. Dann wird $\mathcal{W} = (P, \mathbb{W}, \varphi)$ (linksseitige) Monoid-Wirkung genannt.

Die Abbildung $\cdot\colon W \times P \to P, (w, p) \mapsto (\varphi(w))(p)$ wird dann die zu $\mathcal{W}$ gehörige Wirkung von $\mathbb{W}$ auf P genannt.

Anmerkung 7.2. Für eine Monoid-Wirkung gilt:

- $\forall u, w \in W\colon \varphi(u) \circ \varphi(w) = \varphi(u * w)$.
- $\varphi(\varepsilon) = \mathrm{id}_P$, d.h. $\forall p \in P\colon \varepsilon \cdot p = p$.

Anmerkung 7.3. Für ein Summoid-Modul $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ ist daher $(M, \mathcal{S}_{\mathrm{Mult}}, \mathrm{scal})$ eine Monoid-Wirkung mit zugehöriger Wirkung von $\mathcal{S}_{\mathrm{Mult}}$ auf M, welche der skalaren Multiplikation entspricht.

Definition 7.4. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann ist $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}, N) = ({\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N, \mathcal{S}, \mathrm{scal})$ mit ${\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N = (S^N, \mathbb{\Sigma})$ das N-freie Summoid-Modul über $\mathcal{S}$, wobei $\mathrm{scal}\colon S \to \mathrm{End}_{{\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N}$ eine Abbildung mit

$$\mathrm{scal}(s)\colon S^N \to S^N, v \mapsto (s * v(n))_{n \in N}$$

für alle $s \in S$ ist.

Satz 7.1. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann ist Mod$(\mathcal{S}, N)$ ein Summoid-Modul.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass scal ein Homomorphismus zwischen $\mathcal{S}$ und dem Endomorphismen-Summoid $\mathrm{End}({\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N) = (\mathrm{End}_{{\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N}, \bar{\Sigma}, \circ, \mathrm{id}_S)$ ist.

Es sei $\varphi \in S^N$ und $n \in N$ sowie $(s_i)_{i \in I} \in S^I$ für eine Menge I. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\left(\mathrm{scal}\left(\sum_{i \in I} s_i\right)\right)(\varphi)\right)(n) &= \left(\sum_{i \in I} s_i\right) * \varphi(n) \\
&= \sum_{i \in I} \big(s_i * \varphi(n)\big) \\
&= \sum_{i \in I} ((\mathrm{scal}(s_i))(\varphi))(n) \\
&= \left(\mathbb{\Sigma}_{i \in I} (\mathrm{scal}(s_i))(\varphi)\right)(n) \\
&= \left(\left(\overline{\sum_{i \in I}} \mathrm{scal}(s_i)\right)(\varphi)\right)(n).
\end{aligned}$$

Außerdem ist für $s, t \in S$

$$\begin{aligned}
((\mathrm{scal}(s * t))(\varphi))(n) &= (s * t) * \varphi(n) \\
&= s * (t * \varphi(n)) \\
&= s * (\mathrm{scal}(t)(\varphi))(n) \\
&= (\mathrm{scal}(s)(\mathrm{scal}(t)(\varphi)))(n) \\
&= (\mathrm{scal}(s) \circ \mathrm{scal}(t))(n).
\end{aligned}$$

□

Definition 7.5. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Dann heiße die Abbildung $\delta^N : N \to S^N, n \mapsto \delta^N_n$ mit

$$\delta^N_n : N \to S, n' \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } n' = n \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst} \end{cases}$$

die Standardbasis von $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}, N)$.

Definition 7.6. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ ein Summoid-Modul und N eine Menge. Eine Abbildung $\gamma\colon N \to M$ heißt N-fache Vektorenfamilie von $\mathfrak{M}$.

Definition 7.7. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid-Modul und N eine Menge. Eine Abbildung $u\colon N \to S$ heißt N-fache Familie von Skalaren von $\mathfrak{M}$.

Definition 7.8. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Weiterhin seien N eine Menge und $u \in S^N$ und $\gamma \in M^N$ Abbildungen. Dann ist die Linearkombination von u und γ gegeben durch

$$u \odot \gamma = \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n).$$

Definition 7.9. Sei $\mathfrak{M}$ ein Summoid-Modul, N eine Menge und $\gamma \in M^N$ eine N-fache Vektorenfamilie von $\mathfrak{M}$. Dann ist f_γ definiert als

$$f_\gamma\colon S^N \to M, u \mapsto u \odot \gamma$$

die lineare Fortsetzung von γ.

Definition 7.10. Seien $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ sowie $\mathfrak{M}' = (\mathbb{M}', \mathcal{S}, \mathrm{scal}')$ mit $\mathbb{M}' = (M', \mathbb{\Sigma}')$ Summoid-Module. Dann heißt eine Abbildung $f\colon M \to M'$ $\mathcal{S}$-lineare Abbildung von $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{M}'$, falls f ein Homomorphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathbb{M}'$ ist und außerdem

$$s \cdot' f(m) = f(s \cdot m)$$

für alle $s \in S$ und $m \in M$ gilt.

Satz 7.2. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Sei weiterhin $Mod(\mathcal{S}, N) = ({\mathcal{S}_{Sum}}^N, \mathcal{S}, scal)$ mit ${\mathcal{S}_{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{\Sigma})$ das N-freie Summoid-Modul über $\mathcal{S}$ sowie $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal')$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma}')$ ein Summoid-Modul. Ist außerdem $\gamma \in M^N$ eine N-fache Vektorenfamilie von $\mathfrak{M}$. Dann ist f_γ eine $\mathcal{S}$-lineare Abbildung von $Mod(\mathcal{S}, N)$ nach $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Sei I eine Menge und $(u_i)_{i\in I} \in (S^N)^I$ eine I-fache Vektorenfamilie über $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
f_\gamma\left(\sum_{i\in I} u_i\right) &= \left(\sum_{i\in I} u_i\right) \odot \gamma \\
&= {\sum_{n\in N}}' \left(\sum_{i\in I} u_i\right)(n) \cdot \gamma(n) \\
&= {\sum_{n\in N}}' \left(\sum_{i\in I} u_i(n)\right) \cdot \gamma(n) \\
&= {\sum_{n\in N}}' {\sum_{i\in I}}' u_i(n) \cdot \gamma(n) \\
&= {\sum_{i\in I}}' {\sum_{n\in N}}' u_i(n) \cdot \gamma(n) \\
&= {\sum_{i\in I}}' f_\gamma(u_i).
\end{aligned}
$$

Also ist f_γ ein Homomorphismus von ${\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}}}^N$ nach $\mathbb{M}$.

Sei nun $v \in S^N$ und $s \in S$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
s \cdot' f_\gamma(v) &= s \cdot' \sum_{n\in N} v(n) \cdot \gamma(n) \\
&= \sum_{n\in N} s \cdot (v(n) \cdot \gamma(n)) \\
&= \sum_{n\in N} (s \cdot v(n)) \cdot \gamma(n) \\
&= \sum_{n\in N} (s \cdot v)(n) \cdot \gamma(n) \\
&= f_\gamma(s \cdot v).
\end{aligned}
$$

□

Satz 7.3. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, N eine Menge und δ^N die Standardbasis von Mod($\mathcal{S}, N$). Dann gilt:*

$$f_{\delta^N} = id_{S^N}.$$

Beweis. Sei $v \in S^N$. Dann ist

$$f_{\delta^N}(v) = v \odot \delta^N = \sum_{n\in N} v(n) \cdot \delta_n^N = v.$$

□

Satz 7.4. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal)$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ ein Summoid-Modul, N eine Menge, δ^N die Standardbasis von Mod($\mathcal{S}, N$), $\gamma \in M^N$ eine Vektorenfamilie und f_γ die lineare Fortsetzung von γ. Dann gilt $f_\gamma \circ \delta^N = \gamma$.*

Beweis. Sei $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}(f_\gamma \circ \delta^N)(n) &= f_\gamma(\delta^N(n)) \\ &= f_\gamma(\delta_n^N) \\ &= \delta_n^N \odot \gamma \\ &= \sum_{n' \in N} \delta_n^N(n') \cdot \gamma(n') \\ &= \varepsilon \cdot \gamma(n) \\ &= \gamma(n).\end{aligned}$$

□

Definition 7.11. Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ ein Summoid-Modul, N eine Menge und $\gamma\colon N \to M$ eine Vektorenfamilie.

- γ heißt erzeugend in $\mathfrak{M}$ falls f_γ surjektiv ist.
- γ heißt (linear) unabhängig in $\mathfrak{M}$ falls f_γ injektiv ist.
- γ heißt Basis von $\mathfrak{M}$ falls f_γ bijektiv ist.

Satz 7.5. *Sei $\mathcal{S}$ ein Summoid und N eine Menge. Desweiteren sei Mod$(\mathcal{S}, N)$ das N-freie Summoid-Modul über $\mathcal{S}$ sowie δ^N die Standardbasis zu Mod$(\mathcal{S}, N)$. Dann ist δ^N eine Basis von Mod$(\mathcal{S}, N)$.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 7.3. □

Lemma 7.1. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal)$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid-Modul und N', N mit $N' \subseteq N$ Mengen. Sei zudem $\gamma \in M^N$ eine linear unabhängige Vektorenfamilie. Dann ist $\gamma_{|N'}$ linear unabhängig.*

Beweis. Seien $u', w' \in S^{N'}$ Familien von Skalaren. Sei weiterhin eine Abbildung

$$u\colon N \to S, n \mapsto \begin{cases} u'(n) & \text{falls } n \in N' \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $u_{|N'} = u'$ sowie analog dazu eine Abbildung $w\colon N \to S$ definiert. Dann gilt

$$u' \odot \gamma_{|N'} = w' \odot \gamma_{|N'} \iff u \odot \gamma = w \odot \gamma,$$

woraus wegen der Unabhängigkeit von γ demnach $u = w$ und damit $u' = w'$ folgt. □

Satz 7.6. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal)$ mit $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ und $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma})$ ein Summoid-Modul. Seien weiterhin K, N Mengen sowie $\kappa\colon K \to N$ eine Abbildung und $\gamma \in M^N$ eine Vektorenfamilie. Dann gilt*

1. *Ist κ surjektiv und γ erzeugend, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ erzeugend in $\mathfrak{M}$.*

2. *Ist κ injektiv und γ unabhängig, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ unabhängig in $\mathfrak{M}$.*

3. *Ist κ bijektiv und γ eine Basis, so ist auch $\gamma \circ \kappa$ eine Basis in $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Sei $m \in M$. Da γ erzeugend ist existiert ein $u \in S^N$ mit $u \odot \gamma = m$. Da κ surjektiv ist existiert eine Abbildung $\eta\colon N \to K$ mit $\kappa \circ \eta = \mathrm{id}_N$. Sei

$$w\colon K \to S, k \mapsto \begin{cases} u(\kappa(k)) & \text{falls } k \in \eta(N) \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Abbildung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \odot (\gamma \circ \kappa) &= \sum_{k \in K} w(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{k \in \eta(N)} u(\kappa(k)) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\ &= \sum_{n \in N} u(n) \cdot \gamma(n) \\ &= u \odot \gamma = m. \end{aligned}$$

Damit wäre die erste Aussage bewiesen.

Für die zweite Aussage sei $w, w' \in S^K$. Da κ injektiv ist, existiert eine bijektive Abbildung $\eta\colon \kappa(K) \to K$ mit $\kappa \circ \eta = \mathrm{id}_N$. Dann folgt aus

$$\sum_{k \in K} w(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k) = \sum_{k \in K} w'(k) \cdot (\gamma \circ \kappa)(k)$$

mithilfe des Umbenennungssatzes

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot (\gamma \circ \kappa)(\eta(n)) \\ \iff \sum_{n \in \kappa(K)} w(\eta(n)) \cdot \gamma(n) &= \sum_{n \in \kappa(K)} w'(\eta(n)) \cdot \gamma(n) \\ \iff (w \circ \eta) \odot \gamma_{|\kappa(k)} &= (w' \circ \eta) \odot \gamma_{|\kappa(k)}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 7.1 folgt damit $w \circ \eta = w' \circ \eta$ und daraus schließlich $w = w'$.

Die dritte Aussage ergibt sich aus den ersten beiden. □

Definition 7.12. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen und die Abbildung $\kappa\colon K \to N$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\varphi_\kappa\colon S^N \to S^K, u \mapsto u \circ \kappa.$$

Definition 7.13. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N und J Mengen. Dann ist die charakteristische Abbildung zu J in N bzgl. $\mathcal{S}$ definiert als

$$\chi_J^N\colon N \to S, n \mapsto \begin{cases} \varepsilon & n \in J \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 7.7. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen, δ^N die Standardbasis von Mod(S, N) und eine Abbildung $\kappa\colon K \to N$ gegeben. Dann gilt für alle $k \in K$:*

$$\varphi_\kappa(\delta^N_{\kappa(k)}) = \chi^K_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}.$$

Beweis. Sei $k' \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi_\kappa(\delta^N_{\kappa(k)}))(k') = \delta^N_{\kappa(k)}(\kappa(k')) &= \begin{cases}\varepsilon & \text{falls } \kappa(k) = \kappa(k') \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst}\end{cases} \\ &= \chi^K_{\kappa^{-1}(\kappa(k))}(k').\end{aligned}$$

□

Korollar 7.1. *Ist κ zudem injektiv, so gilt:*

$$\varphi_\kappa(\delta^N_{\kappa(k)}) = \delta^K_k.$$

Definition 7.14. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K, N Mengen und die Abbildung $\kappa\colon K \to N$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung definiert:

$$\psi_\kappa\colon S^K \to S^N, v \mapsto \left(\sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k)\right)_{n \in N}.$$

Satz 7.8. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K und N Mengen und δ^N und δ^K die Standardbasen von Mod$(\mathcal{S}, N)$ bzw. Mod$(\mathcal{S}, K)$ sowie $\kappa\colon K \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$\psi_\kappa \circ \delta^K = \delta^N \circ \kappa.$$

Beweis. Sei $k \in K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\psi_\kappa(\delta^K(k)))(n) &= \sum_{k' \in \kappa^{-1}(n)} \delta^K_k(k') \\ &= \begin{cases}\varepsilon & \kappa(k) = n \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst}\end{cases} \\ &= (\delta^N_\kappa(k))(n).\end{aligned}$$

□

Satz 7.9. *Seien $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal)$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M, \boldsymbol{\Sigma})$, K und N Mengen, $\gamma \in M^N$ und $\lambda \in M^K$ Vektorenfamilien von $\mathfrak{M}$ sowie eine Abbildung $\kappa\colon K \to N$ gegeben, sodass $\lambda = \gamma \circ \kappa$. Dann gilt*

$$f_\lambda = f_\gamma \circ \psi_\kappa.$$

Beweis. Sei $v \in S^K$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f_\lambda(v) &= v \odot (\gamma \circ \kappa) \\
&= \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{k \in K} v(k) \cdot \gamma(\kappa(k)) \\
&= \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{n \in N} \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{k \in \kappa^{-1}(n)} \big(v(k) \cdot \gamma(\kappa(k))\big) \\
&= \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{n \in N} \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{k \in \kappa^{-1}(n)} \big(v(k) \cdot \gamma(n)\big) \\
&= \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{n \in N} \left(\sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \right) \cdot \gamma(n) \\
&= \mathop{\mathbb{\Sigma}}_{n \in N} (\psi_\kappa(v))(n) \cdot \gamma(n) \\
&= \psi_\kappa(v) \odot \gamma \\
&= f_\gamma(\psi_\kappa(v)).
\end{aligned}$$

□

Satz 7.10. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin K und N Mengen, $\kappa\colon K \to N$ eine Abbildung und δ^N die Standardbasis von $Mod(\mathcal{S}, N)$. Dann gilt:*

$$\psi_\kappa = f_{\delta^N \circ \kappa}.$$

Beweis. Sei $v \in S^K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(f_{\delta^N \circ \kappa}(v))(n) &= (v \odot (\delta^N \circ \kappa))(n) \\
&= \left(\mathop{\mathbb{\Sigma}}_{k \in K} v(k) \cdot \delta^N_{\kappa(k)} \right)(n) \\
&= \sum_{k \in K} v(k) \cdot \delta^N_{\kappa(k)}(n) \\
&= \sum_{k \in \kappa^{-1}(n)} v(k) \\
&= (\psi_\kappa(v))(n).
\end{aligned}$$

□

Satz 7.11. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und N eine Menge. Sei weiterhin $Mod(\mathcal{S}, N) = ({\mathcal{S}_{Sum}}^N, \mathcal{S}, scal)$ mit ${\mathcal{S}_{Sum}}^N = (S^N, \mathbb{\Sigma})$ das N-freie Summoid-Modul über $\mathcal{S}$ sowie $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, scal')$ mit $\mathbb{M} = (M, \mathbb{\Sigma}')$ ein Summoid-Modul. Seien zudem f und g $\mathcal{S}$-lineare Abbildungen von $Mod(\mathcal{S}, N)$ nach $\mathfrak{M}$. Dann gilt*

$$f \circ \delta^N = g \circ \delta^N \implies f = g.$$

Beweis. Sei $v \in S^N$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v \odot \delta^N) \\ &= f\Bigg(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N\Bigg) \\ &= \sum_{n \in N}{}' v(n) \cdot f(\delta_n^N) \\ &= \sum_{n \in N}{}' v(n) \cdot g(\delta_n^N) \\ &= g(\sum_{n \in N} v(n) \cdot \delta_n^N) \\ &= g(v \odot \delta^N) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

□

7.1 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition 7.15. Seien K, N und S Mengen und $\rho \in (S^N)^K$ eine Abbildung. Dann ist $(K, N, \mathrm{mat}(\rho))$ mit $\mathrm{mat}(\rho)\colon K \times N \to S, (k, n) \mapsto (\rho(k))(n)$ die zu ρ gehörige $(K \times N)$-Matrix über S.

Definition 7.16. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und K und N Mengen. Sei desweiteren $f\colon S^K \to S^N$ eine $\mathcal{S}$-lineare Abbildung von $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}, K)$ nach $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}, N)$. Dann ist $\alpha = \mathrm{mat}(f \circ \delta^K)$ die zu (f, δ^K, δ^N) gehörige Matrix.

Satz 7.12. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und eine Abbildung $\kappa\colon K \to N$ gegeben. Sei weiterhin α_κ die zu $(f_{\delta^N \circ \kappa}, \delta^K, \delta^N)$ gehörige Matrix. Dann gilt für beliebige $k \in K$:*

$$\alpha_\kappa(k, \cdot) = \delta^N_{\kappa(k)}.$$

Beweis. Sei $k \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_\kappa(k, \cdot) &= (f_{\delta^N \circ \kappa} \circ \delta^K)(k) \\ &= f_{\delta^N \circ \kappa}(\delta_k^K) \\ &= \sum_{k' \in K} \delta_k^K(k') \cdot (\delta^N \circ \kappa)(k') \\ &= (\delta^N \circ \kappa)(k) \\ &= \delta^N_{\kappa(k)}. \end{aligned}$$

□

Anmerkung 7.4. Das heißt, dass α_κ in jeder Zeile k genau an den Stellen $\kappa(k)$ den Eintrag ε und ansonsten $0_{\mathcal{S}}$ hat.

Ist κ eine Permutation, so steht in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein ε. In diesem Fall ist α_κ also eine Permutationsmatrix.

Definition 7.17. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und $\alpha\colon K \times N \to S$ eine Abbildung. Dann ist $f_{\mathrm{row}(\alpha)}$ die zu α gehörige $\mathcal{S}$-lineare Abbildung.

Satz 7.13. *Seien $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \epsilon)$ ein Summoid und K und N Mengen. Dann gilt*

1. *Ist f eine $\mathcal{S}$-lineare Abbildung von Mod$(\mathcal{S}, K)$ nach Mod$(\mathcal{S}, N)$ und α die zu (f, δ^K, δ^N) gehörige Matrix. Dann ist die zu α gehörige lineare Abbildung gleich f.*

2. *Ist umgekehrt eine $(K \times N)$-Matrix (K, N, α) gegeben, so entspricht die zu $(f_{row(\alpha)}, \delta^K, \delta^N)$ gehörige Matrix genau α.*

Beweis. Die zu f gehörige Matrix α ist gegeben durch

$$\alpha = \mathrm{mat}(f \circ \delta^K)\colon K \times N \to S, (k, n) \mapsto ((f \circ \delta^K)(k))(n).$$

Also ist $\mathrm{row}(\alpha) = f \circ \delta^K$. Somit gilt für alle $u \in S^K$

$$f_{\mathrm{row}(\alpha)}(u) = f_{f\circ\delta^K}(u) = \sum_{k\in K} u(k) \cdot f(\delta_k^K) = f\left(\sum_{k\in K} u(k) \cdot \delta_k^K\right) = f(u),$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Seien nun $k \in K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}(f_{\mathrm{row}(\alpha)} \circ \delta^K)(k, n) &= (f_{\mathrm{row}(\alpha)}(\delta_k^K))(n) \\
&= \left(\sum_{k'\in K} \delta_k^K(k') \cdot \mathrm{row}_\alpha(k')\right)(n) \\
&= (\mathrm{row}_\alpha(k))(n) \\
&= (\alpha(k, \cdot))(n) \\
&= \alpha(k, n)
\end{aligned}$$

und somit der zweite Teil des Satzes bewiesen. □

Definition 7.18. Seien $\mathfrak{M} = (\mathcal{S}, \mathbb{M}, \mathrm{scal})$ und $\mathfrak{M}' = (\mathcal{S}, \mathbb{M}', \mathrm{scal}')$ Summoid-Module. Sei weiterhin λ eine K-Basis von $\mathfrak{M}$ und γ eine N-Basis von $\mathfrak{M}'$ sowie eine $\mathcal{S}$-lineare Abbildung g von $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{M}'$ gegeben. Dann ist die zu $(g; \lambda, \gamma)$ gehörige Matrix definiert als die zu f gehörige Matrix, wobei $f = f_\gamma^{-1} \circ g \circ f_\lambda$.

Satz 7.14. *Die zu $(g; \lambda, \gamma)$ gehörige Matrix ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\alpha = \mathrm{mat}(f \circ \delta^K)$ die zu f gehörige Matrix. Laut Voraussetzung ist weiterhin

$$f_\gamma \circ f = g \circ f_\lambda.$$

Für $f_\gamma \circ f$ und $k \in K$ gilt:

$$(f_\gamma \circ f)(\delta_k^K) = f_\gamma((f \circ \delta^K)(k)) = f_\gamma(\alpha(k,\cdot)) = \sum_{n\in N} \alpha(k,n)\cdot\gamma(n).$$

Für $g \circ f_\lambda$ und $k \in K$ gilt dagegen:

$$(g \circ f_\lambda)(\delta_k^K) = g\left(\sum_{k'\in K} \delta_k^K(k')\cdot\lambda(k')\right) = g(\lambda(k)).$$

Zusammengefasst gilt also

$$g(\lambda(k)) = \sum_{n\in N} \alpha(k,n)\cdot\gamma(n) = f_\gamma(\alpha(k,\cdot)).$$

Da f_γ bijektiv ist, gibt es für jedes $k \in K$ genau ein $\alpha(k,\cdot)$, welches diese Gleichung erfüllt. □

Definition 7.19. Sei $\mathcal{S} = (S,\Sigma,*,\varepsilon)$ ein Summoid, K und N Mengen und $\alpha\colon K\times N \to S$ eine Abbildung. Sei nun $u \in S^K$. Dann ist

$$u \otimes \alpha = f_{\mathrm{row}(\alpha)}(u) = \sum_{k\in K} u(k)\cdot \mathrm{row}_\alpha(k)$$

das Vektor-Matrix-Produkt von u mit α.

Definition 7.20. Sei $\mathcal{S} = (S,\Sigma,*,\varepsilon)$ ein Summoid, J, K und N Mengen und $\alpha\colon J\times K \to S$ und $\beta\colon K \to N$ Abbildungen. Dann ist

$$\alpha \otimes \beta = \left(\sum_{k\in K} \alpha(j,k) * \beta(k,n)\right)_{j,n\in J\times N}$$

das Matrix-Matrix-Produkt von α und β.

Satz 7.15. *Sei $\mathfrak{M} = (\mathcal{S},\mathbb{M},scal)$ ein Summoid-Modul mit $\mathbb{M} = (M,\mathbb{\Sigma})$ und $\mathcal{S} = (S,\Sigma,*,\varepsilon)$ sowie K eine Menge. Eine Abbildung $\varphi\colon S^K \to M$ ist genau dann $\mathcal{S}$-linear von Mod$(\mathcal{S},K)$ nach $\mathfrak{M}$ wenn eine Vektorenfamilie $\gamma \in M^K$ existiert mit $f_\gamma = \varphi$.*

Beweis. Angenommen φ ist $\mathcal{S}$-linear. Dann ist $\varphi = f_{\varphi\circ\delta^K}$, also $\gamma = \varphi\circ\delta^K$, denn für $u \in S^K$ ist

$$f_{\varphi\circ\delta^K}(u) = \sum_{k\in K} u(k)\cdot\varphi(\delta_k^K) = \varphi\left(\sum_{k\in K} u(k)\cdot\delta_k^K\right) = \varphi(u).$$

Angenommen es existiert eine Abbildung $\gamma \in M^K$ für die gilt $\varphi = f_\gamma$. Dann ist φ laut Satz 7.2 $\mathcal{S}$-linear. □

Satz 7.16. *Sei $\mathcal{S} = (S,\Sigma,*,\varepsilon)$ ein Summoid sowie K und N Mengen. Dann ist $\varphi\colon S^K \to S^N$ eine $\mathcal{S}$-lineare Abbildung von Mod$(\mathcal{S},K)$ nach Mod$(\mathcal{S},N)$ genau dann wenn eine $(K\times N)$-Matrix über $\mathcal{S}$ existiert mit $\varphi = f_{row(\alpha)}$.*

Beweis. Angenommen φ ist $\mathcal{S}$-linear. Dann gilt, wie in Satz 7.15 gezeigt,

$$\varphi = f_{\varphi \circ \delta^K}$$

und damit auch

$$\varphi = f_{\mathrm{row}(\mathrm{mat}(\varphi \circ \delta^K))}.$$

Das heißt, dass $\alpha = \mathrm{mat}(\varphi \circ \delta^K)$.

Die andere Richtung folgt wieder sofort. □

Satz 7.17. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid sowie J, K und N Mengen. Dann gilt für die Abbildungen $\alpha \in S^{J \times K}$ und $\beta \in S^{K \times N}$*

$$f_{row(\alpha)} \bullet f_{row(\beta)} = f_{row(\alpha \otimes \beta)}.$$

Beweis. Sei $u \in S^K$ und $n \in N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
((u \otimes \alpha) \otimes \beta)(n) &= \sum_{k \in K} (u * \alpha)(k) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} u(j) * \alpha(j, k) \right) * \beta(k, n) \\
&= \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} u(j) * (\alpha(j, k) * \beta(k, n)) \\
&= \sum_{j \in J} u(j) \sum_{k \in K} \alpha(j, k) * \beta(k, n) \\
&= (u \otimes (\alpha \otimes \beta))(n).
\end{aligned}$$

□

8 Netzwerke und Aktionsnetzwerke

8.1 Netzwerke

Definition 8.1. Ein Tupel $G = (V, E, \varrho)$ heißt Netzwerk (bzw. gerichteter Multigraph), wobei V und E Mengen sind und $\varrho\colon E \to V \times V$ eine Abbildung ist.

V wird dabei als die Knotenmenge von G bezeichnet. E ist die Menge der Kanten. ϱ wird auch die Graphenabbildung genannt und induziert die Abbildungen $\sigma = \Pi_1 \circ \varrho$ und $\tau = \Pi_2 \circ \varrho$, wobei Π_n die Projektion auf die n-te Kompenente ist. σ wird auch als die Source-Map und τ als die Target-Map bezeichet.

Für eine Kante $e \in E$ ist $\sigma(e)$ der Anfangsknoten und $\tau(e)$ der Zielknoten.

Definition 8.2. Ein Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ heiße dünn, falls ϱ injektiv ist.

Definition 8.3. Ein Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ heiße n-knotig, falls $|V| = n$.

Beispiel 8.1. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ ein binäres Relat. Dann ist $G(\mathbb{P}) = (P, R, \varrho)$ mit $\varrho\colon R \to P \times P, (p, q) \mapsto (p, q)$ ein dünnes Netzwerk, welches wir das relationelle Netzwerk zu $\mathbb{P}$ nennen. Wir sagen auch $G(\mathbb{P})$ ist $\mathbb{P}$ als Netzwerk.

Beispiel 8.2. Sei P Menge. Dann ist $G(P) = (P, P \times P, \mathrm{id}_{P\times P})$ das zu P gehörige logistische Netzwerk.

Beispiel 8.3. Sei M eine Menge und $\perp$ ein Symbol. Dann ist das Netzwerk $G(M, \perp) = (\{\perp\}, M, \varrho)$ mit $\varrho\colon M \to \{\perp\} \times \{\perp\}, m \mapsto (\perp, \perp)$ ein einknotiges Netzwerk, welches wir das Kleeblattnetzwerk zu $(M, \perp)$ nennen.

Definition 8.4. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten $v \in V$ die Mengen

$$\mathrm{In}_G(v) = \{e \in E \mid \tau(e) = v\}$$

sowie

$$\mathrm{Out}_G(v) = \{e \in E \mid \sigma(e) = v\}$$

definiert.

Definition 8.5. Seien $G = (V, E, \varrho)$ und $G' = (V', E', \varrho')$ Netzwerke. Das Paar (φ, ψ) bestehend aus den bijektiven Abbildungen $\varphi\colon V \to V'$ und $\psi\colon E \to E'$ ist ein Homomorphismus zwischen G und G', falls für jedes $e \in E$

$$\varphi(\varrho(e)) = \varrho'(\psi(e)).$$

Definition 8.6. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Eine Abbildung $n\colon V \to S$ heißt Knotenbewertung bzgl. $(G, \mathcal{S})$. Eine Abbildung $u\colon E \to S$ heißt Kantenbewertung bzgl. $(G, \mathcal{S})$.

Definition 8.7. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen. Dann ist

$$m \odot n = \sum_{v \in V} m(v) * n(v).$$

Definition 8.8. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $n \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann ist

$$n \curlyvee u \colon V \to S, v \mapsto \sum_{\mathrm{In}_G(v)} n(\sigma(e)) * u(e)$$

$$u \curlywedge n \colon V \to S, v \mapsto \sum_{\mathrm{Out}_G(v)} u(e) * n(\tau(e)).$$

Satz 8.1. *Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann gilt:*

$$(m \curlyvee u) \odot n = m \odot (u \curlywedge n).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(m \curlyvee u) \odot n &= \sum_{v \in V} (m \curlyvee u)(v) * n(v) \\
&= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \mathrm{In}_G(v)} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(v) \\
&= \sum_{e \in E} (m(\sigma(e)) * u(e)) * n(\tau(e)) \\
&= \sum_{e \in E} m(\sigma(e)) * (u(e) * n(\tau(e))) \\
&= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \mathrm{Out}_G(v)} m(v) * (u(e) * n(\tau(e))) \\
&= \sum_{v \in V} m(v) * \sum_{e \in \mathrm{Out}_G(v)} (u(e) * n(\tau(e))) \\
&= \sum_{v \in V} m(v) * (u \curlywedge n)(v) \\
&= m \odot (u \curlywedge n).
\end{aligned}$$

□

Satz 8.2. *Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m, n \in S^V$ Knotenbewertungen und $u, w \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann gilt:*

$$((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n = m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).$$

Beweis. Sei $m' = m \curlyvee u$ und $n' = w \curlywedge n$. Dann erhält man durch mehrfaches

Einsetzen und Anwenden von Satz 8.1

$$\begin{aligned}((m \curlyvee u) \curlyvee w) \odot n &= (m' \curlyvee w) \odot n \\ &= m' \odot (w \curlywedge n) \\ &= (m \curlyvee u) \odot n' \\ &= m \odot (u \curlywedge n') \\ &= m \odot (u \curlywedge (w \curlywedge n)).\end{aligned}$$

□

Definition 8.9. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist für eine Kantenbewertung $u \in S^E$

$$\mathrm{in}_u \colon V \to S, v \mapsto \sum_{e \in \mathrm{In}_G(v)} u(e)$$

die Inflow-Map von u auf G über $\mathcal{S}$ und

$$\mathrm{out}_u \colon V \to S, v \mapsto \sum_{e \in \mathrm{Out}_G(v)} u(e)$$

die Outflow-Map von u auf G über $\mathcal{S}$.

Definition 8.10. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und $u \in S^E$ eine Kantenbewertung. Dann ist u eine Flow-Map auf $V_0 \subseteq V$ über $\mathcal{S}$, falls für alle $v \in V_0$

$$\mathrm{in}_u(v) = \mathrm{out}_u(v).$$

Die Kantenbewertung u ist eine Flow-Map auf G über $\mathcal{S}$ falls u eine Flow-Map auf V ist.

Definition 8.11. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist

$$E^{\langle n \rangle} = \{(e_1, \ldots, e_n) \in E^n \mid \forall i \in [n] \colon \tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})\}$$

die Menge der Pfade der Länge n in G.

Außerdem ist

$$E^{\langle + \rangle} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} E^{\langle n \rangle}$$

die Menge aller Pfade beliebiger Länge in G.

Definition 8.12. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk. Dann sind für einen Knoten $v \in V$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$\mathrm{In}_G^{\langle n \rangle}(v) = \{(e_1, \ldots, e_n) \in E^{\langle n \rangle} \mid \tau(e_n) = v\}$$

sowie

$$\mathrm{Out}_G^{\langle n \rangle}(v) = \{(e_1, \ldots, e_n) \in E^{\langle n \rangle} \mid \sigma(e_1) = v\}$$

definiert.

Satz 8.3. *Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u, w \in S^E$ Kantenbewertungen. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$((m \curlyvee u) \curlyvee w)(v) = \sum_{(e_1,e_2) \in In_G^{\langle 2 \rangle}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2).$$

Beweis. Es sei $m' = m \curlyvee u$ und $v \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(m' \curlyvee w)(v) &= \sum_{e_2 \in \mathrm{In}_G(v)} m'(\sigma(e_2)) * w(e_2) \\
&= \sum_{e_2 \in \mathrm{In}_G(v)} \left(\sum_{e_1 \in \mathrm{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1)) \right) * w(e_2) \\
&= \sum_{e_2 \in \mathrm{In}_G(v)} \sum_{e_1 \in \mathrm{In}_G(\sigma(e_2))} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2) \\
&= \sum_{(e_1,e_2) \in \mathrm{In}_G^{\langle 2 \rangle}(v)} m(\sigma(e_1)) * u(e_1) * w(e_2).
\end{aligned}$$

□

Satz 8.4. *Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Seien weiterhin $m \in S^V$ eine Knotenbewertung und $u_1, \ldots, u_k \in S^E$ mit $k \geq 2$ Kantenbewertungen. Dann gilt für alle $v \in V$*

$$((\ldots(m \curlyvee u_1)\ldots) \curlyvee u_k)(v) = \sum_{(e_1,\ldots e_k) \in In_G^{\langle k \rangle}(v)} m(\sigma(e_1)) \prod_{i=1}^{k} u_i(e_i),$$

wobei (S, Π) die zu $\mathcal{S}_{Mult}$ gehörige finitäre Summationsstruktur ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über k. Der Induktionsanfang wurde in Satz 8.3 bereits gezeigt. Sei nun angenommen, dass die Aussage für ein $k \geq 2$ gilt. Dann ist für $m' = ((\ldots(m \curlyvee u_1)\ldots) \curlyvee u_k)$

$$\begin{aligned}
(m' \curlyvee u_{k+1})(v) &= \sum_{e_{k+1} \in \mathrm{In}_G(v)} m'(\sigma(e_{k+1})) * u_{k+1}(e_{k+1}) \\
&= \sum_{e_{k+1} \in \mathrm{In}_G(v)} \sum_{(e_1,\ldots e_k) \in \mathrm{In}_G^{\langle k \rangle}(\sigma(e_{k+1}))} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i) \\
&= \sum_{(e_1,\ldots e_{k+1}) \in \mathrm{In}_G^{\langle k+1 \rangle}(v)} m(\sigma(e_1)) * \prod_{i=1}^{k+1} u_i(e_i).
\end{aligned}$$

□

8.2 Aktionsnetzwerke

Definition 8.13. Ein Aktionsnetzwerk ist ein Tupel $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ bestehend aus einem Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ sowie den Abbildungen $\star\colon E^{\langle 2\rangle} \to E$ und $\mathrm{id}\colon V \to E$, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{\langle 2\rangle}\colon \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- $\forall (e_1, e_2, e_3) \in E^{\langle 3\rangle}\colon (e_1 \star e_2) \star e_3 = e_1 \star (e_2 \star e_3)$
- $\forall v \in V\colon \varrho(\mathrm{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E\colon \mathrm{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \mathrm{id}(\tau(e))$

E wird als die Menge von Aktionen (Handlungen) interpretiert, wobei V eine Menge von Zuständen darstellt. $e_1 \star e_2$ ist die Verknüpfung von Aktionen e_1 und e_2, was nur möglich ist, wenn (e_1, e_2) verkettbar sind, d.h. falls $\tau(e_1) = \sigma(e_2)$. Das entspricht der Aussage, dass e_2 erst anfangen kann, wenn e_1 aufhört.

Definition 8.14. Ein partielles Aktionsnetzwerk ist ein Tripel $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ bestehend aus einem Netzwerk $G = (V, E, \varrho)$ spwie den Abbildungen $\mathrm{id}\colon V \to E$ und $\star\colon R \to E$, wobei $R \subseteq E^{\langle 2\rangle}$, sodass folgende Bedingungen gelten:

- $\forall (e_1, e_2) \in R\colon \varrho(e_1 \star e_2) = (\sigma(e_1), \tau(e_2))$
- Existieren $e_1 \star (e_2 \star e_3)$ und $(e_1 \star e_2) \star e_3$ so gilt $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- Es gilt $(e_1, e_2) \in R$ mit $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$ genau dann wenn $(e_2, e_3) \in R$ mit $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$
- Aus $(e_1, e_2) \in R$ mit $(e_1 \star e_2, e_3) \in R$ und $(e_2, e_3) \in R$ mit $(e_1, e_2 \star e_3) \in R$ folgt stets: $e_1 \star (e_2 \star e_3) = (e_1 \star e_2) \star e_3$
- $\forall v \in V\colon \varrho(\mathrm{id}(v)) = (v, v)$
- $\forall e \in E\colon (\mathrm{id}(\sigma(e)), e) \in R \wedge (e, \mathrm{id}(\tau(e))) \in R$
- $\forall e \in E\colon \mathrm{id}(\sigma(e)) \star e = e = e \star \mathrm{id}(\tau(e))$

Beispiel 8.4. Sei $\mathbb{P} = (P, R)$ eine Präordnung. Dann ist $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (G(\mathbb{P}), \star, \mathrm{id})$ mit $\star\colon R^{\langle 2\rangle} \to R, ((p,t),(t,q)) \mapsto (p,q)$ sowie $\mathrm{id}\colon P \to R, p \mapsto (p,p)$ das Aktionsnetzwerk zu $\mathbb{P}$.

Beispiel 8.5. Sei P eine Menge. Dann ist $\mathbb{G}((P, P \times P))$ das sogenannte logistische Aktionsnetzwerk zu P.

Beachte: $(P, P \times P)$ ist eine Präordnung.

Beispiel 8.6. Sei $\mathbb{M} = (M, *, \varepsilon)$ ein Monoid und $\perp$ ein Symbol. Dann nennen wir $\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp) = (G(M, \perp), *, \mathrm{id})$ mit $\mathrm{id}\colon \{\perp\} \to M, \perp \mapsto \varepsilon$ das zu $(\mathbb{M}, \perp)$ gehörige Aktionsnetzwerk.

Beispiel 8.7. Sei $G = (V, E, \varrho)$ ein Netzwerk, W eine Menge und $w\colon V \to W$ mit $W \cap E^{\langle + \rangle} = \emptyset$ eine Bijektion.

Wir definieren zuerst $E^{\langle * \rangle} = W \cup E^{\langle + \rangle}$. Weiterhin sei $P(G, w) = (V, E^{\langle * \rangle}, \varrho^*)$, wobei $\varrho^*\colon E^{\langle * \rangle} \to V \times V$ eine Abbildung ist mit $\varrho^*((e_1, \ldots, e_n)) = (\sigma(e_1), \tau(e_n))$ für $(e_1, \ldots, e_n) \in E^{\langle n \rangle}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sowie $\varrho^*(w(v)) = (v, v)$.

Dann ist das $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \mathrm{id})$ das Pfadaktionsnetzwerk zu (G, w), wobei

- $(a_1, \ldots, a_m) \star (b_1, \ldots b_n) = (a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n)$ für $(a_1, \ldots a_m) \in E^{\langle m \rangle}$ und $(b_1, \ldots b_n) \in E^{\langle n \rangle}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $w(\sigma(a_1)) \star (a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_m) \star w(\tau(a_m))$ für $(a_1, \ldots, a_m) \in E^{\langle m \rangle}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $w(v) \star w(v) = w(v)$

und $\mathrm{id}\colon V \to E^{\langle * \rangle}, v \mapsto w(v)$.

Definition 8.15. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Eine Teilmenge $D \subseteq E$ der Kantenmenge bildet eine Unterstruktur von $\mathbb{G}$ falls gilt

- $\forall (e_1, e_2) \in E^{\langle 2 \rangle}\colon e_1, e_2 \in D \implies e_1 \star e_2 \in D$
- $\mathrm{id}(V) \subseteq D$

In diesem Fall ist $\mathbb{G}_{|D} = (G_{|D}, \star^D, \mathrm{id}^D)$ bestehend aus $G_D = (V, E, \varrho_{|D})$, $\star^D\colon D^{\langle 2 \rangle}, (d_1, d_2) \mapsto d_1 \star d_2$ und $\mathrm{id}^D\colon V \to D, v \mapsto \mathrm{id}(v)$ die Einschränkung von $\mathbb{G}$ auf D.

Satz 8.5. *Ist P eine Menge und $R \subseteq P \times P$. Dann bildet R genau dann eine Unterstruktur von $\mathbb{G}_P = (G_P, \star, id_{P \times P})$ mit $G_P = (P, P \times P, id)$ wenn (P, R) eine Präordnung ist.*

Beweis. Es gilt: $(p, t), (t, q) \in R$ genau dann wenn $(p, q) = (p, t) \star (t, q) \in R$. Weiterhin ist R genau dann reflexiv wenn $\mathrm{id}(P) = \{(p, p) \mid p \in P\} \subseteq R$. □

Anmerkung 8.1. Ist $\mathbb{P} = (P, R)$ eine Präordnung, so ist $\mathbb{G}(\mathbb{P}) = (\mathbb{G}_P)_{|R}$.

Definition 8.16. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist

$$Ⓜ\colon \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), (A, B) \mapsto \{a \star b \mid (a, b) \in E^{\langle 2 \rangle} \cap A \times B\}$$

das Minkowski-Produkt in $\mathbb{G}$.

Definition 8.17. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist $\mathrm{Minsk}(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, Ⓜ, \mathrm{id}(V))$ ein Join-Summoid, welches wir das Minkowski-Summoid zu $\mathbb{G}$ nennen.

Satz 8.6. *Sei $\mathbb{G} = (G, \star, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Dann ist das Minkowski-Summoid $Minsk(\mathbb{G}) = (\mathcal{P}(E), \bigcup, Ⓜ, id(V))$ ein Join-Summmoid.*

Beweis. $(\mathcal{P}(E), \bigcup)$ ist eine idempotente Summationsstruktur.

Ⓜ ist assoziativ, da $\star$ assoziativ ist und es gilt

$$A \circledM \operatorname{id}(V) = \{a \star e \mid (a,e) \in E^{\langle 2\rangle} \cap A \times \operatorname{id}(V)\} = A = \operatorname{id}(V) \circledM A.$$

Also ist $\operatorname{Minsk}(\mathbb{G})_{\text{Mult}}$ ein Monoid.

Und schließlich ist für $A \in \mathcal{P}(E)$ und $\beta\colon I \to \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A \circledM \bigcup_{i\in I} \beta(i) &= \{a \star b \mid (a,b) \in E^{\langle 2\rangle} \cap A \times \bigcup_{i\in I} \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{a \star b \mid (a,b) \in E^{\langle 2\rangle} \cap A \times \beta(i)\} \\ &= \bigcup_{i\in I} A \circledM \beta(i). \end{aligned}$$

Das Argument kann auch analog für die Rechtsdistributivität verwendet werden. □

Beispiel 8.8. Sei $\mathbb{M} = (M, +, \varepsilon)$ ein kommutatives Monoid. In $\mathbb{G}(\mathbb{M})$ ist das Minkowski-Produkt gerade die Minkowski-Summe, d.h.

$$A \circledM B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Definition 8.18. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \operatorname{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk. Für jede Kantenmenge $A \subseteq E$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A^{(n)}$ rekursiv wie folgt definiert:

- $A^{(0)} = \operatorname{id}(V)$
- $A^{(1)} = A$
- $A^{(n+1)} = A^{(n)} \circledM A$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Der Kleenestern von A bzgl. $\mathbb{G}$ ist dann definiert als

$$A^{(*)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}.$$

Satz 8.7. *Sei $\mathbb{G} = (G, \star, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und $A \subseteq E$. Dann ist $A^{(*)}$ die kleinste Unterstruktur von $\mathbb{G}$, die A enthält.*

Beweis. Es gilt $\operatorname{id}(V) = A^{(0)} \subseteq A^{(*)}$ und $A = A^{(1)} \subseteq A^{(*)}$. Seien $(e_1, e_2) \in E^{\langle 2\rangle}$ mit $e_1, e_2 \in A^{(*)}$, d.h. es existieren $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $e_1 \in A^{(m)}$ und $e_2 \in A^{(n)}$. Dann ist

$$e_1 \star e_2 \in A^{(m)} \circledM A^{(n)} \subseteq A^{(*)}.$$

Also ist $A^{(*)}$ eine Unterstruktur von $\mathbb{G}$, die A ennthält.

Sei nun $D \subseteq E$ eine Unterstruktur von $\mathbb{G}$ mit $A \subseteq D$. Wir zeigen, dass $A^{(n)} \subseteq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion über n. Es gilt $A^{(0)} \subseteq D$ und $A^{(1)} \subseteq D$. Sei also die Aussage für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ bereits erfüllt und sei $a \in A^{(n+1)}$. Das heißt $a \in A^{(n)} \circledM A$, also $a = e_1 \star e_2$ mit $(e_1, e_2) \in E^{\langle 2\rangle}$ sowie $e_1 \in A^{(n)}$ und $e_2 \in A$. Da laut Voraussetzung sowohl $A \subseteq D$ also auch $A^{(n)} \subseteq D$, ist $a = e_1 \star e_2 \in D$, da D eine Unterstruktur ist. □

Beispiel 8.9. Sei $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}})$ und $A = \{2, 5\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A^{(0)} &= \{0\} \\
A^{(1)} &= A = \{2, 5\} \\
A^{(2)} &= A \circledM A = \{2+2, 5+2, 2+5, 5+5\} = \{4, 7, 10\} \\
A^{(3)} &= A^{(2)} \circledM A = \{4+2, 4+5, 7+2, 7+5, 10+2, 10+5\} = \{6, 9, 12, 15\} \\
&\dots \\
A^{(*)} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}.
\end{aligned}$$

Beispiel 8.10. Sei P eine Menge und $A, B \subseteq P$. Dann entspricht das Minkowski-Produkt von A und B gerade dem Relationenprodukt von A und B.

Definition 8.19. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ ein Aktionsnetzwerk mit $G = (V, E, \varrho)$ Für $e \in E$ ist der Split von e definiert als

$$\text{Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(c, d) \in E^{\langle 2 \rangle} \mid c \star d = e\}.$$

Allgemein ist der n-Split von e für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ definiert als

$$n\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e) = \{(e_1, \dots, e_n) \in E^{\langle n \rangle} \mid e_1 \star \dots \star e_n = e\}.$$

Definition 8.20. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \text{id})$ ein Aktionsnetzwerk mit $G = (V, E, \varrho)$ und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Für die Kantenbewertungen $u, w \in S^E$ ist dann die Faltung bzgl. $(\mathbb{G}, \mathcal{S})$ definiert als

$$u \circledast w \colon E \to S, e \mapsto \sum_{(c,d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * w(d).$$

Satz 8.8. *Sei $\mathbb{G} = (G, \star, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Für die Kantenbewertungen $u_1, \dots, u_k \in S^E$ mit $k \geq 2$ und $e \in E$ gilt*

$$((\dots(u_1 \circledast u_2) \circledast \dots) \circledast u_k)(e) = \sum_{(e_1, \dots, e_k) \in k\text{-}\mathit{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über k. Für $k = 2$ folgt die Gleichung sofort aus der Definition. Gelte sie nun für ein beliebiges $k \geq 2$. Sei nun $u = (\dots(u_1 \circledast u_2) \circledast \dots) \circledast u_k$. Dann ist für $e \in E$

$$\begin{aligned}
(u \circledast u_{k+1})(e) &= \sum_{(c,d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} u(c) * u_{k+1}(d) \\
&= \sum_{(c,d) \in \text{Split}_{\mathbb{G}}(e)} \sum_{(e_1, \dots e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(c)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k) * u_{k+1}(d) \\
&= \sum_{(e_1, \dots, e_{k+1}) \in (k+1)\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_{k+1}(e_{k+1}).
\end{aligned}$$

$\square$

Anmerkung 8.2. Analog gilt auch

$$(u_1 \circledast (u_2 \circledast (\dots (u_{k-1} \circledast u_k) \dots))) = \sum_{(e_1,\dots,e_k) \in k\text{-Split}_{\mathbb{G}}(e)} u_1(e_1) * \dots * u_k(e_k).$$

Damit ist gleichzeitig gezeigt, dass $\circledast$ assoziativ ist.

Definition 8.21. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$ mit

$$\overline{\sum_{\nu \in N}} u_\nu \colon E \to S, e \mapsto \sum_{\nu \in N} u_\nu(e)$$

für beliebige $(u_\nu)_{\nu \in N} \in (S^E)^N$ und

$$I_G \colon E \to S, e \mapsto \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } e \in \mathrm{id}(V) \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst} \end{cases}$$

das Faltungssumoid zu $\mathbb{G}$ über $\mathcal{S}$.

Satz 8.9. *Sei $\mathbb{G} = (G, *, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann ist $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_{\mathbb{G}})$ ebenfalls ein Summoid.*

Beweis. $(S^E, \bar{\Sigma})$ ist eine Summationsstruktur nach Satz 3.5.

Weiterhin wissen wir bereits, dass $\circledast$ assoziativ ist. Sei also $u \in S^E$. Dann ist für $e \in E$

$$(u \circledast I_{\mathbb{G}})(e) = \sum_{c \star d = e} u(c) * I_{\mathbb{G}}(d) = u(c) = \sum_{c \star d = e} I_{\mathbb{G}}(c) * u(d) = (I_{\mathbb{G}} \circledast u)(e),$$

da $c \star d = e$ für $d \in \mathrm{id}(V)$ nur gilt, wenn $c = e$.

Sei nun $(u_i)_{i \in I} \in (S^E)^I$ sowie $w \in S^E$ und $e \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(w \circledast \overline{\sum_{i \in I}} u_i\right)(e) &= \sum_{c \star d = e} w(c) * \left(\overline{\sum_{i \in I}} u_i\right)(d) \\
&= \sum_{c \star d = e} w(c) * \sum_{i \in I} u_i(d) \\
&= \sum_{c \star d = e} \sum_{i \in I} w(c) * u_i(d) \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{c \star d = e} w(c) * u_i(d) \\
&= \left(\overline{\sum_{i \in I}} w \circledast u_i\right)(e)
\end{aligned}$$

und analog für die Rechtsdistributivität. □

Definition 8.22. Sei P eine Menge und $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Dann nennen wir $\mathrm{Mat}_P(\mathcal{S}) = \mathcal{S}[\mathbb{G}_P]$ das Summoid der $(P \times P)$-Matrix über $\mathcal{S}$.

Anmerkung 8.3. Die Faltung von $\mathrm{Mat}_P(\mathcal{S})$ von $u, w \in S^{P \times P}$ ist

$$u \circledast w \colon P \times P \to S, (p,q) \mapsto \sum_{t \in P} u(p,t) * w(t,q).$$

Außerdem ist

$$I_{\mathbb{G}_P} \colon P \times P \to S, (p,q) \mapsto \begin{cases} \varepsilon & p = q \\ 0_{\mathcal{S}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Einheitsmatrix und $\bar{\Sigma}$ die punktweise Summation von $\mathcal{S}$-Matrizen.

8.3 $\mathcal{S}$-Algebren

Definition 8.23. Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summmoid. Eine $\mathcal{S}$-Algebra ist definiert als das Tupel $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathrm{scal})$ bestehend aus einem Summoid $\mathcal{A} = (A, \boldsymbol{\Sigma}, \text{Ⓐ}, a)$, sodass $(\mathcal{A}_{\mathrm{Sum}}, \mathcal{S}, \mathrm{scal})$ ein Summoid-Modul bildet, wobei für alle $s \in S$ und $x, y \in A$

$$s \cdot (x \text{ Ⓐ } y) = (s \cdot x) \text{ Ⓐ } y = x \text{ Ⓐ } (s \cdot y).$$

Satz 8.10. *Sei $\mathbb{G} = (G, \star, id)$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid. Dann bildet $(\mathcal{S}[\mathbb{G}], \mathcal{S}, scal)$ bestehend aus $\mathcal{S}[\mathbb{G}] = (S^E, \bar{\Sigma}, \circledast, I_G)$ und der Skalarmultiplikation aus $Mod(\mathcal{S}, E)$ eine $\mathcal{S}$-Algebra.*

Beweis. Da $\mathcal{S}[\mathbb{G}]$ ein Summoid und $(\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\mathrm{Sum}} = (\mathcal{S}_{\mathrm{Sum}})^E$ ist, ist $(\mathcal{S}[\mathbb{G}], \mathcal{S}, \mathrm{scal})$ ein Summoid-Modul.

Sei nun $s \in S$, $u, w \in S^E$ sowie $e \in E$. Dann ist

$$\begin{aligned} (s \cdot (u \circledast w))(e) &= s \cdot \sum_{c \star d = e} u(c) * w(d) \\ &= \sum_{c \star d = e} s * (u(c) * w(d)) \\ &= \sum_{c \star d = e} (s * u(c)) * w(d) \\ &= ((s \cdot u) \circledast w)(e) \\ &= (u \circledast (s \cdot w))(e) \end{aligned}$$

□

Satz 8.11. *Sei $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid, $\mathbb{M} = (M, +, 0)$ ein Monoid und $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, scal)$ mit $\mathcal{A} = (A, \boldsymbol{\Sigma}, \text{Ⓐ}, a)$ eine $\mathcal{S}$-Algebra. Dann induziert jeder Homomorphismus κ von $\mathbb{M}$ auf $\mathcal{A}_{Mult}$ durch f_κ einen Homomorphismus von $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{M}, \perp)]$ nach $\mathcal{A}$.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
(u \circledast w) \odot \kappa &= \sum_{m \in M} \left(\sum_{c+d=m} u(c) * w(d) \right) \cdot \kappa(m) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot \kappa(c+d) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) * w(d)) \cdot (\kappa(c) \textcircled{A}\, \kappa(d)) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{c+d=m} (u(c) \cdot \kappa(c)) \textcircled{A}\, (w(d) \cdot \kappa(d)) \\
&= \sum_{(c,d) \in M \times M} (u(c) \cdot \kappa(c)) \textcircled{A}\, (w(d) \cdot \kappa(d)) \\
&= \sum_{c \in M} u(c) \cdot \kappa(c) \textcircled{A} \sum_{d \in M} w(d) \cdot \kappa(d) \\
&= (u \odot \kappa) \textcircled{A}\, (w \odot \kappa).
\end{aligned}
$$

??? □

Beispiel 8.11. Sei $\mathbb{M} = \mathbb{N}_{\text{add}} = (\mathbb{N}, +, 0)$, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein kommutatives Summoid und $\mathfrak{A} = (\mathcal{S}, \mathcal{S}, \text{scal})$ eine $\mathcal{S}$-Algebra ($\mathcal{S}$ als $\mathcal{S}$-Algebra). Für jedes $r \in S$ ist $\kappa_r \colon \mathbb{N} \to S, n \mapsto r^n$ ein Monoid-Homomorphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$. Dann ist

$$f_\kappa \colon S^{\mathbb{N}} \to S, u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot \kappa(n)$$

ein Summoid-Homomorphismus von $\mathcal{S}[\mathbb{G}(\mathbb{N}_{\text{add}}, \perp)]$ nach $\mathbb{S}$. Das heißt folgendes: Für $u \in S^{\mathbb{N}}$, welches als Polynom

$$u[x] = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot x^n$$

aufgefasst wird, ist

$$(f_\kappa(u))(r) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) \cdot r^n.$$

Die Abbildung f_κ heißt deshalb Einsetzungs-Homomorphismus von r für jede formale Potenzreihe $u[x]$.

Beispiel 8.12. Sei Ω eine endliche Menge und $(\mathcal{S}, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid. Weiterhin ist $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_{\text{add}})^\Omega$ ein kommutatives Monoid. Für $r \in S^\Omega$ ist

$$\kappa_r \colon \mathbb{N}^\Omega \to S, \alpha \mapsto \prod_{i \in \Omega} r_i^{\alpha_i}$$

ein Monoid-Homomorphismus zwischen $(\mathbb{N}_{\text{add}})^\Omega$ und $\mathcal{S}_{\text{Mult}}$. Für $i \in \Omega$ setze $x_i = \delta^{\mathbb{N}^\Omega}_{\delta^\Omega_i}$ und für $\alpha \in \mathbb{N}^\Omega$ sei $x^\alpha = \delta^{\mathbb{N}^\Omega}_\alpha$. Dann ist

$$x^\alpha = \prod_{i \in \Omega} x_i^{\alpha(i)}.$$

Dann ist für $u \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}^\Omega}$

$$f_\kappa(n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} u(\alpha) \cdot \prod_{i \in \Omega} x_i^{\alpha(i)}$$

das Einsetzen von r in jede multivariable formale Potenzreihe. ???

8.4 Automaten

Definition 8.24. Sei $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \Sigma, *, 1)$ ein Summoid, wobei für $\alpha\colon I \to \mathbb{2}$

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \neq 0^I \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $s * t = \min\{s, t\}$ für $s, t \in \mathbb{2}$. Sei weiterhin P eine Menge von Zuständen und $\mathbb{M} = (M, \circ, \varepsilon)$ ein Monoid (Wortmonoid) sowie $\mathcal{B}[\mathbb{G}_P]$ das Faltungssumoid zu $\mathbb{G}$ über $\mathcal{B}$. Dann wird ein Homomorphismus κ von $\mathbb{M}$ nach $\mathcal{B}[\mathbb{G}_P]_{\text{Mult}}$ Präautomat genannt.

Der Homomorphismus κ ordnet jedem Wort ein Element aus $\mathbb{2}^{P \times P}$ zu und kann deshalb als Übergangsmatrix aufgefasst werden.

Anmerkung 8.4. Ist $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \Sigma, *, 1)$ wie in Definition 8.24 gegeben. Dann ist $\mathcal{B}[\mathbb{G}_P]_{\text{Mult}} = (\mathbb{2}^{P \times P}, \circledast, I_{\mathbb{G}_P})$ ein Monoid mit

$$I_{\mathbb{G}_P}\colon P \times P \to \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $u, w \in \mathbb{2}^{P \times P}$

$$u \circledast w\colon P \times P \to \mathbb{2}, (p, q) \mapsto \sum_{c \star d = (p,q)} u(c) * w(d).$$

Das heißt es gilt

$$(u \circledast w)(p, q) = 1 \iff \exists t \in P\colon u(p, t) = 1 \wedge w(t, q) = 1.$$

Definition 8.25. Sei B ein Alphabet und $G = G(B, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$ das Kleeblattnetzwerk zu $(B, \perp)$. Sei weiterhin $\mathbb{P}(G, w) = (P(G, w), \star, \text{id})$ das Pfadaktionsnetzwerk zu (G, w) mit $w\colon \{\perp\} \to \{\varepsilon\}, \perp \mapsto \varepsilon$ und $P(G, w) = (\{\perp\}, B^{\langle * \rangle}, \varrho^*)$. Dann ist $\mathbb{B}^{\langle * \rangle} = (B^{\langle * \rangle}, \star, \varepsilon)$ das Wortmonoid zu (B, ε).

Anmerkung 8.5. Ist B ein Alphabet und $G = (G, \perp) = (\{\perp\}, B, \varrho)$ das Kleeblattnetzwerk zu $(B, \perp)$. Dann ist

$$B^{\langle + \rangle} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} B^n.$$

Für $w\colon \{\perp\} \to \{\varepsilon\}$ ist also $B^{\langle * \rangle} = \{\varepsilon\} \cup B^{\langle + \rangle}$.
Dann ist für $(w_1, \ldots, w_m) \in B^m$ und $(v_1, \ldots, v_n) \in B^n$

- $(w_1, \dots, w_m) \star (v_1, \dots, v_m) = (w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_m)$
- $\varepsilon \star (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) = (w_1, \dots, w_m) \star \varepsilon$ und
- $\varepsilon \star \varepsilon = \varepsilon$.

Das heißt, dass $\star$ als Konkatenation von Wörtern über dem Alphabet B aufgefasst werden kann.

Anmerkung 8.6. Ist $\kappa\colon B^{\langle * \rangle} \to \mathbb{2}^{P \times P}$ ein Präautomat zum Wortmonoid $\mathbb{B}^{\langle * \rangle}$, dann ordnet κ jedem Wort eine Übergangsmatrix zu, wobei $(\kappa(w))(p, q)$ angibt, ob ein Wort w erkannt wird, wenn man von Zustand p in Zustand q geht. Da κ ein Homomorphismus ist, gilt für $w_1, w_2 \in B^{\langle * \rangle}$

$$\kappa(w_1 \star w_2) = \kappa(w_1) \circledast \kappa(w_2).$$

Das heißt, dass die Konkatenation von w_1 und w_2 beim Übergang von p nach q erkannt werden kann genau dann wenn ein Zustand $t \in P$ existiert, sodass w_1 beim Übergang von p nach t und w_2 beim Übergang von t nach q erkannt werden kann.

Satz 8.12. *Sei B ein Alphabet, P eine Menge von Zuständen und $\lambda\colon B \to \mathbb{2}^{P \times P}$ eine Abbildung. Dann ist durch λ ein Präautomat κ_λ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei zunächst $\kappa_\lambda(b) = \lambda(b)$ für alle $b \in B$. Da κ ein Homomorphismus ist, muss für $b_1, \dots, b_n \in B$ gelten

$$\begin{aligned}\kappa_\lambda((b_1, \dots, b_m)) &= \kappa_\lambda(b_1 \star \dots \star b_m) \\ &= \kappa_\lambda(b_1) \circledast \dots \circledast \kappa_\lambda(b_n) \\ &= \lambda(b_1) \circledast \dots \circledast \lambda(b_n).\end{aligned}$$

$\square$

Definition 8.26. Sei $\mathcal{B} = (\mathbb{2}, \Sigma, *, 1)$ ein Summoid wie in Definition 8.24, $\mathbb{M}$ ein Monoid sowie κ ein Präautomat. Sei weiterhin P eine Menge von Zuständen und $p, q \in P$. Dann ist das Tupel $\mathbb{D} = (\mathbb{M}, \mathcal{B}[\mathbb{G}_P]_{\text{Mult}}, \kappa, \delta_p^P, \delta_q^P)$ ein klassischer Automat, wobei p den Startzustand und q den Endzustand darstellen.

Ein Wort $w \in B^{\langle * \rangle}$ wird durch $\mathbb{D}$ erkannnt, falls $\delta_p^P \circledast \kappa(w) = \delta_q^P \circledast \kappa(w)$, d.h. $(\kappa(w))(p, q) = 1$.

Definition 8.27. Sei $\mathbb{M}$ ein Monoid, P eine Menge von Zuständen und weiterhin $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$. Dann heiße $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa)$ ein $\mathcal{S}$-Präautomat bzgl. $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa)$, falls κ ein Homomorphismus von $\mathbb{M}$ nach $(\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}$ ist.

Seien zusätzlich $\alpha, \omega \in S^P$, so ist $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\text{Mat}_P(\mathcal{S}))_{\text{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$ ein $\mathcal{S}$-Automat bzgl. $(P, \mathbb{M}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$.

Anmerkung 8.7. Präautomaten können also als $\mathcal{B}$-Präautomaten aufgefasst werden.

Definition 8.28. Sei $\mathbb{G} = (G, \star, \mathrm{id})$ mit $G = (V, E, \varrho)$ ein Aktionsnetzwerk, $\mathcal{S} = (S, \Sigma, *, \varepsilon)$ ein Summoid und $\mathbb{M}$ ein Monoid sowie κ ein Homomorphismus von $\mathbb{M}$ nach $(\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\mathrm{Mult}}$. Dann ist $\mathbb{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\mathrm{Mult}}, \kappa)$ ein verallgemeinerter Präautomat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa)$.

Seien zusätzlich $\alpha, \omega \in S^V$, so ist $\mathcal{A} = (\mathbb{M}, (\mathcal{S}[\mathbb{G}])_{\mathrm{Mult}}, \kappa, \alpha, \omega)$ ein verallgemeinerter Automat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathcal{S}, \kappa, \alpha, \omega)$.

Definition 8.29. Sei $\mathbb{M}$ ein Monoid, $\mathcal{S}$ ein kommutatives Summoid und weiterhin $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathrm{scal})$ eine $\mathcal{S}$-Algebra. Ist κ ein Homomorphismus von $\mathbb{M}$ nach $\mathcal{A}_{\mathrm{Mult}}$, so heißt $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\mathrm{Mult}}, \kappa)$ verallgemeinerter $\mathcal{S}$-Präautomat bzgl. $(\mathbb{M}, \mathcal{A}_{\mathrm{Mult}}, \kappa)$.