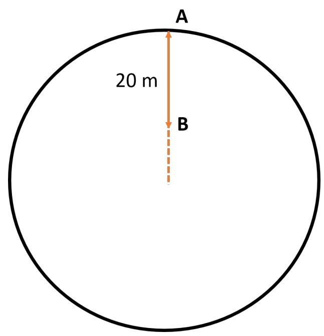
UNIVESIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

CF-034
10.09.2020

Métodos Numéricos
Práctica 4

1. Se desea conocer la evolución temporal del perfil de temperaturas en la corteza de la Tierra a lo largo del segmento AB.



Se sabe que a una profundidad de $20m$ (punto B), la temperatura de la corteza se mantiene constante e igual a $11°$. Sobre la superficie de la Tierra (punto A), la temperatura varía con el tiempo de manera periódica según el perfil

$$T_A(t) = 10° + 12° Sen(2\pi t/\tau)$$

donde T_A esta medido en grados centígrados, t en días y $\tau = 365$ días. Use la ecuación de difusión del calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

donde x es medido a lo largo del segmento AB y el coeficiente de difusión térmica de la Tierra es constante e igual a $D = 0{,}1m^2$/día. Considere como condición inicial una temperatura constante e igual a $10°$ para los puntos interiores al segmento AB.

(a) (3 puntos) Considere un esquema de descretización de Crank-Nicolson, un Δt fijo y una malla de 5 puntos (incluidos los extremos) en el segmento AB. Escriba, en forma matricial, el sistema lineal que se tiene que resolver en cada instante.

(b) (3 puntos) Muestre los perfiles de temperatura para los años 3,6 y 9. Escoja el número de puntos sobre el segemento AB y consecuentemente Δt.

(c) (2 puntos) ¿Es posible que el perfil de temperatura sobre el segmento AB llegue a un estado estacionario? Si la respuesta es afirmativa, ¿ en cuanto tiempo sucederá ?

2. En una región del espacio $S : \{(x, y) \in [0m : 1m] \times [0m : 1m]\}$ se tiene una densidad de carga

$$\rho(x, y) = 177{,}08 \times 10^{-12} Cos(3\pi x)Sin(2\pi y)C/m^3$$

si se sabe que el potencial eléctrico Φ verifica la ecuación de Poisson

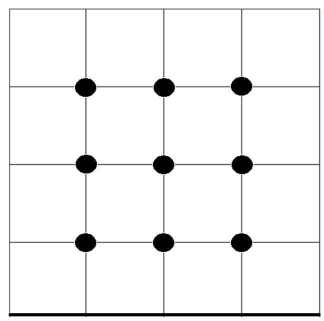
$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y también las siguientes condiciones de frontera

$$\Phi(0,y) = \lambda_1 y^2 \qquad \Phi(1,y) = 1(V)$$
$$\Phi(x,0) = \lambda_2 x^3 \qquad \Phi(x,1) = 1(V)$$

donde $\lambda_1 = 1V/m^2$ y $\lambda_2 = 1V/m^3$.

(a) (3 puntos) Considere un esquema de discretización de 5 puntos para el laplaciano, un $\Delta x = \Delta y = h$ fijo y la malla mostrada en la figura. Escriba, en forma matricial, el sistema lineal que verifican los puntos interiores.



(b) (3 puntos) Hallar y graficar el potencial eléctrico Φ en la región S.

Nota: considere $\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$

3. (4 puntos) Para una barra unidimensional de longitud $L = 10m$, la solución estacionaria del calor se puede representar como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 0{,}15T = 0$$

La temperatura en los extremos de la barra es $T(0) = 240$ y $T(10m) = 150$. Utilice el método del disparo para encontrar el perfil de T. Muestre En una gráfica la solución numérica y la solución analítica.

Total: 18 puntos.