UNIVESIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

CF-034
17.09.2020

Métodos Numéricos
FINAL

1. Una partícula está sometida a un potencial $V(x)$, simétrico con respecto a $x = 0$, realiza un movimiento oscilatorio con respecto a $x = 0$ y tiene una energía total

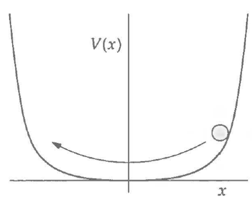
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x).$$

Se sabe que en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = a$(amplitud) y está en reposo.

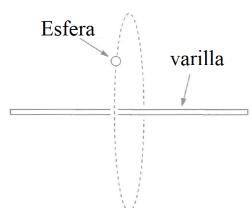
   (a) (3 puntos) Cuando la partícula llega por primera vez al origen a transcurrido un cuarto del periodo ($T/4$). Si se considera que no hay perdidas de energía, determine la expresión del periodo.

   (b) (2 puntos) Suponga que el potencial es $V(x) = x^4$ y la masa de la partícula es $m = 1$. Encuentre el periodo T para una amplitud $a = 2$ utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre con 5 puntos.

   (c) (2 puntos) Construya la gráfica de T vs a para $a \in [0; 2]$.



2. Una esfera puntual órbita alrededor del centro de la varilla en el espacio exterior debido a la interacción gravitatoria. Suponer que la sección recta de la barra es despreciable y la esfera orbita en un plano perpendicular a la varilla.



la varilla es una línea de masa M, longitud L y la esfera de masa m.

   (a) (3 puntos) Muestre que

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -GM\frac{x}{r^2\sqrt{(r^2 + L^2/4)}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -GM\frac{y}{r^2\sqrt{(r^2 + L^2/4)}} \end{aligned}$$

   donde las coordenadas x, y se miden en el plano perpendicular a la varilla y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) (3 puntos) Considere el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= -GM\frac{x}{r^2\sqrt{(r^2+L^2/4)}}, \qquad \frac{dx}{dt} = w \\
\frac{dg}{dt} &= -GM\frac{y}{r^2\sqrt{(r^2+L^2/4)}}, \qquad \frac{dy}{dt} = g
\end{aligned}
$$

y resuelva el sistema con RK4 para $t \in [0;10]$ para las condiciones iniciales $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $g_0 = 1$ y $w_0 = 0$. Tome $G = 1$, $M = 10$ y $L = 2$ y grafique x vs y (la orbita).

3. La densidad de neutrones $n(x,t)$ en una desintegración de U^{235} obedece la ecuación

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn, \quad x \in [-L/2; L/2]$$

donde D es el coeficiente de difusión y C es la razón de creación de neutrones. Considere que los neutrones que alcanzan la frontera dejan el sistema, es decir

$$n(-L/2,t) = 0, \quad n(L/2,t) = 0$$

y que en $t = 0$

$$n(x,t=0) = -x^2 + L^2/4$$

(a) (4 puntos) Considere el caso $L = 2$, $D = C = 1$, $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ y calcule $n(x,t)$ para 10 valores de $t \in [0;5]$. Para cada perfil anteriormente obtenido (t fijo) calcule

$$\bar{n}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n(x_i,t).$$

donde N es el número de puntos en el eje x. Realice una gráfica $\bar{n}$ vs t ajustada a la función $\bar{n} = Ae^{t/\alpha}$, donde A y α son constantes a determinar. Muestre el valor de α en la gráfica.

(b) (2 puntos) Repita el item anterior para $L = 4$.

(c) (1 punto) ¿ Son las gráficas de $\bar{n}$ vs t las mismas para $L = 4$ y $L = 2$? ¿ Puede extraer alguna conclusión de los cálculos anteriores?

Total: 20 puntos.