

# Exercício 4.5 (Tardos)

Alice Duarte Scarpa, Bruno Lucian Costa

2015-06-23

## 1 Enunciado

Vamos considerar uma rua campestre longa e quieta, com casas espalhadas bem esparsamente ao longo da mesma. (Podemos imaginar a rua como um grande segmento de reta, com um extremo leste e um extremo oeste.) Além disso, vamos assumir que, apesar do ambiente bucólico, os residentes de todas essas casas são ávidos usuários de telefonia celular.

Você quer colocar estações-base de celulares em certos pontos da rodovia, de modo que toda casa esteja a no máximo quatro milhas de uma das estações-base. Dê um algoritmo eficiente para alcançar esta meta, usando o menor número possível de bases.

## 2 Introdução

Com este exercício vamos abordar uma técnica chamada de algoritmos gulosos sempre realizando a escolha que parece ser a melhor no momento, fazendo uma escolha ótima local, com intuito de que esta escolha leve até a solução ótima global.

Antes porém, vai ser apresentado soluções utilizando algoritmos “naive” e um força bruta.

## 3 Soluções para o problema

### 3.1 Algoritmo naive

Esta primeira solução para o problema é uma das mais simples possíveis de se pensar quando confrontamos o problema. O problema diz que temos que colocar uma antena a no máximo 4 milhas de distancias, nesse algoritmo fizemos a solução baseado apenas nessa ideia, então com ele vamos colocar

uma antena a cada 4 milhas de distancia até que a casa mais distante esteja coberta pela nossas antenas.

```
def antena(lista):
    lmax = max(lista) # Valor maximo presente na lista de distancias
    ant = []
    j = 0
    for i in range(lmax): # Coloca uma antena a cada 4 milhas
        if j >= lmax: # Ver se a antena tem posicao maior que maximo da lista
            return ant
        j += 4
    ant.append(j)
```

Esse algoritmo bem simples nos retorna uma solução correta para o problema, mas ele ainda nos faz colocar muitas antenas de forma desnecessárias como podemos ver no exemplo a seguir.

Chamada da função:

```
print antena([3, 16, 11, 18, 5, 17, 24, 29, 1, 301])
```

Resultado:

```
[4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80,
84, 88, 92, 96, 100, 104, 108, 112, 116, 120, 124, 128, 132, 136, 140, 144, 148,
152, 156, 160, 164, 168, 172, 176, 180, 184, 188, 192, 196, 200, 204, 208, 212,
216, 220, 224, 228, 232, 236, 240, 244, 248, 252, 256, 260, 264, 268, 272, 276,
280, 284, 288, 292, 296, 300, 304]
```

Outro algoritmo “naive” que tem uma solução melhor do que anterior será apresentado a seguir.

```
def antena(lista):
    ant=[]
    for i in lista: #Pecorre toda a lista
        ant.append(lista[lista.index(i)]) #Para cada item da lista coloca uma antena

    ant.sort()
    return ant
```

Neste algoritmo a ideia seria colocar uma antena para cada casa o que resolveria nosso problema.

Vamos rodar o novo algoritmo com o mesmo exemplo que usamos na solução anterior para compararmos as soluções.

```
print antena([3, 16, 11, 18, 5, 17, 24, 29, 1, 301])
```

Resultado:

```
1 3 5 11 16 17 18 24 29 301
```

Já conseguimos perceber uma diferença muito grande entre as soluções.

Esses dois algoritmos até agora apresentados não nos retorna a melhor solução, os proximos algoritmos tentaremos conseguir a solução ótima para resolução deste problema.

### 3.2 Força Bruta

Esse algoritmo de força bem simples escolhe um ponto qualquer dentro dessa rua para coloca uma antena, depois disso ele percorre toda a lista para ver se tem alguma casa que é coberta por essa antena, se tiver retiramos essa casa da lista e efetuamos esse procedimento até que todas as casas tenham sido cobertas.

```
import math, numpy
def antena(lista):
    lmax = max(lista) # Valor maximo presente na lista de distancias
    ant = []

    while lista != []: # Realizar procedimento ate todas as casas cobertas
        torre = numpy.random.randint(1, lmax) #fixando uma torre em um ponto qualquer
        for j in lista: #Passando toda a lista
            if j >= torre-4 and j <= torre+4: # Verifica se tem casa esta coberta
                lista.remove(j) # remove a casa coberta
                ant.append(torre) # adiciona a torre a lista

    ant = list(set(ant)) # Remove as torres colocadas em duplicatas
    ant.sort() #Ordena as torres

    return ant
```

Vamos rodar o algoritmo com o mesmo exemplo usado com os algoritmos anteriores para vermos a diferença entre as soluções.

```
print antena([3, 16, 11, 18, 5, 17, 24, 29, 1, 301])
```

Resultado:

1 11 14 20 22 32 298

A solução do algoritmo para esse problema pode até ser a ótima eventualmente mas em suma ele demora mais a conseguir uma resposta para o problema devido a sua escolha aleatória do local a colocar a antena.

Em outras palavras esse algoritmo trabalha muito parecido com o jogo de batalha naval, ele escolhe aleatoriamente uma antena para colocar porém algumas vezes pode escolher em local vazio gerando retrabalho o algoritmo.

### 3.3 Algoritmo guloso

Esse algoritmo recebe uma lista com as distancias das casas até o ponto inicial. E começamos nosso algoritmo saindo do ponto inicial, ao oeste, em direção ao leste até que primeira casa esteja 4 milhas a oeste colocamos uma antena neste local e retiramos da lista todas as casas cobertas por essa antena. Depois continuamos com esse processo até todas as casas serem retiradas da lista.

```
def antena(lista):
    lmax = max(lista)# Valor maximo presente na lista de distancias
    ant = []
    j = 0
    for i in range(lmax):
        if j >= lmax:
            if j - ant[-1] <= 4:
                return ant
        if j in lista:
            j += 4
            ant.append(j)
            j += 4
        else:
            j += 1
    return ant
```

Vamos reproduzir o mesmo exemplo feito com o algoritmos anteriores para vermos a diferença entre as soluções.

```
print antena([3, 16, 11, 18, 5, 17, 24, 29, 1, 301])
```

Resultado:

5 15 28 305

Esse algoritmo sempre nos retorna a solução ótima e vamos mostrar isso a seguir.

Suponha  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$  sendo a solução com as posições das antenas que o nosso algoritmo retornou e  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$  sendo a solução ótima com as posições das antenas ordenadas de forma crescente. Queremos mostrar que  $k = m$ .

Vamos mostrar nosso algoritmo  $S$  “stay ahead” da solução  $T$ . Ou seja,  $s_i \geq t_i$ . Para  $i = 1$  essa afirmação é verdade, já que vamos ao leste o máximo possível antes de colocar a antena. Iremos assumir também é verdade para  $i \geq 1$ , ou seja,  $\{s_1 \dots s_i\}$  cobre as mesmas casas que  $\{t_1 \dots t_i\}$ , então se adicionarmos  $t_{i+1}$  para  $\{s_1 \dots s_i\}$ , não deixa nenhuma casa entre  $s_i$  e  $t_{i+1}$  descobertas. Mas no passo  $(i + 1)$  do algoritmo guloso é escolhido o  $s_{i+1}$  para ser o maior possível com a condição cobrir as casas entre  $s_i$  e  $s_{i+1}$  e então  $s_{i+1} > t_{i+1}$  o que prova o que queríamos.

Então, se  $k > m$ , a solução  $\{s_1 \dots s_m\}$  falha ao cobrir todas as casas, mas  $s_m \geq t_m$  logo  $\{t_1 \dots t_m\} = T$  também falha ao cobrir todas as casas. O que é uma contradição, pois assumimos que  $T$  era uma solução ótima para o problema.

## 4 Complexidade

Para o problema proposto foi apresentado quatro possíveis soluções. Duas opções “naive”, uma força bruta e outra utilizando o método de algoritmo guloso.

A primeira solução “naive” é linear em relação ao tamanho da rua, ou seja, tem complexidade  $O(m)$ , onde  $m$  é a distancia máxima que temos uma casa.

A segunda solução “naive” é linear em relação ao tamanho do vetor de distancias, ou seja, tem complexidade  $O(n)$ , onde  $n$  é o número de casas na rua.

A terceira solução é uma força bruta, escolhendo aleatoriamente uma posição para colocar a antena o que com valor de  $n$  muito grande torna-se algo exponencial.

A quarta solução é a única solução ótima e possui complexidade também linear, dependendo apenas do tamanho da rua.