Exercício 7.28 (Tardos)

Alice Duarte Scarpa, Bruno Lucian Costa

2015-06-23

1 Enunciado

Um grupo de estudantes está escrevendo um módulo para preparar cronogramas de monitoria. O protótipo inicial deles funciona do seguinte modo: O cronograma é semanal, de modo que podemos nos focar em uma única semana.

- O administrador do curso escolhe um conjunto de k intervalos disjuntos de uma hora de duração $I_1, I_2, \ldots, I_k$, nos quais seria possível que monitores dessem suas monitorias; o cronograma final consistirá de um subconjunto de alguns (mas geralmente não todos) esses intervalos.
- Cada monitor então entra com seu horário semanal, informando as horas em que ele está disponível para monitorias.
- O administrador então especifica, para parâmetros a, b e c, que cada monitor deve dar entre a e b horas de monitoria por semana, e que um total de c horas de monitoria deve ser dado semanalmente.

O problema é escolher um subconjunto dos horários (intervalos) e atribuir um monitor a cada um desses horários, respeitando a disponibilidade dos monitores e as restrições impostas pelo administrador.

a) Dê um algoritmo polinomial que ou constrói um cronograma válido de horas de monitoria (especificando que monitor cobre quais horários) ou informa que não há cronograma válido.

b) O algoritmo acima tornou-se popular, e surgiu a vontade de controlar também a densidade das monitorias: dado números d_i, com i entre 1 e 5, queremos um cronograma com pelo menos d_i horários de monitoria no dia da semana i. Dê um algoritmo polinomial para resolver o problema com essa restrição adicional.

2 Introdução

Queremos modelar esse problema como um problema de fluxo. Para isso vamos começar com algumas definições de fluxo.

2.1 Definições

Uma rede de fluxo é um grafo direcionado $G = (V, E)$ com as seguintes propriedades:

- Existe um único vértice *fonte* $s \in V$. Nenhuma aresta entra em s.
- A cada aresta e está associada uma capacidade inteira c_e e uma demanda d_e tal que $c_e \geq d_e \geq 0$.
- Existe um único vértice *dreno* $t \in V$. Nenhuma aresta sai de t.

Um fluxo f de s a t é uma função $f\colon E \to R^+$ que associa a cada aresta e um valor real não-negativo $f(e)$ tal que:

1. $\forall e \in E, d_e \leq f(e) \leq c_e$
2. Para todo nó $v \notin \{s, t\}$:

$$\sum_{e \text{ chegando em } v} f(e) = \sum_{e \text{ saindo de } v} f(e)$$

$f(e)$ representa o fluxo que vai passar pela aresta e. O valor de um fluxo é o total que parte da fonte s, isso é:

$$\text{Valor}(f) = \sum_{e \text{ saindo de } s} f(e) \tag{1}$$

2.2 Representação

Vamos usar uma classe para representar arestas. Uma aresta é inicializada com as propriedades: vértice de origem, vértice de destino, capacidade e demanda.

Para facilitar o processamento futuro, vamos adicionar também as propriedades reversa e original. Reversa aponta para uma outra aresta reversa à atual, a propriedade original é uma flag indicando se a aresta pertence à rede original ou não.

```
class Aresta():
    def __init__(self, origem, destino, capacidade, demanda):
        self.origem = origem
        self.destino = destino
        self.capacidade = capacidade
        self.demanda = demanda
        self.reversa = None
        self.original = True
```

Agora que temos a classe Aresta, vamos usá-la para auxiliar na representação de uma rede de fluxo também como objeto.

Uma rede de fluxo tem duas propriedades: adjacências, um dicionário que mapeia cada vértice às arestas que saem dele e fluxo.

O construtor da classe inicializa as duas propriedades como dicionários vazios.

Vamos precisar dos seguintes métodos na nossa classe RedeDeFluxo:

- `novo_vertice(v)`: Adiciona o vértice v à rede
- `nova_aresta(origem, destino, capacidade)`: Adiciona uma nova aresta a rede. Também cria a aresta reversa.
- `novo_fluxo(f, e)`: Adiciona um fluxo f à aresta e
- `encontra_arestas(v)`: Retorna as arestas que partem do vértice v
- `valor_do_fluxo(fonte)`: Encontra o valor do fluxo, como definido em (1).

```
class RedeDeFluxo():
    def __init__(self):
        self.adj = collections.OrderedDict()
        self.fluxo = {}

    def novo_vertice(self, v):
        self.adj[v] = []

    def nova_aresta(self, origem, destino, capacidade, demanda):
        aresta = Aresta(origem, destino, capacidade, demanda)
        self.adj[origem].append(aresta)

        # Criando a aresta reversa
```

```
        aresta_reversa = Aresta(destino, origem, 0, -demanda)
        self.adj[destino].append(aresta_reversa)
        aresta_reversa.original = False

        # Marcando aresta e aresta_reversa como reversas uma da outra
        aresta.reversa = aresta_reversa
        aresta_reversa.reversa = aresta

    def novo_fluxo(self, e, f):
        self.fluxo[e] = f

    def encontra_arestas(self, v):
        return self.adj[v]

    def valor_do_fluxo(self, fonte):
        valor = 0
        for aresta in self.encontra_arestas(fonte):
            valor += self.fluxo[aresta]
        return valor
```

3 Modelando o problema com fluxos

Os dois itens do problema podem ser reduzidos a encontrar um fluxo válido em uma rede usando construções semelhantes.

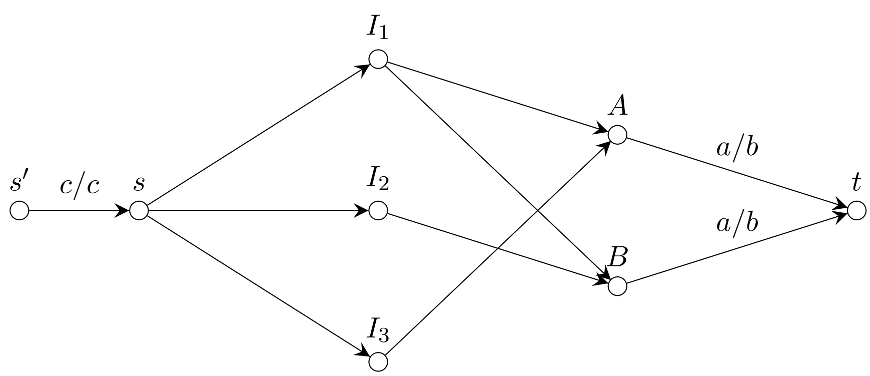
Para o item a), construimos o grafo da seguinte forma:

- Criamos um vértice s representando a fonte e um vértice t representando o dreno
- Para cada intervalo $I_i \in I_1, I_2, \ldots, I_k$ escolhido pelo administrador, criamos um vértice I_i e uma aresta (s, I_i) capacidade 1 e demanda 0
- Para cada monitor $T_i \in T_1, T_2, \ldots, T_m$ criamos um vértice T_i. Se o monitor está disponível para dar monitoria no intervalo I_j criamos uma aresta de (I_j, T_i) de demanda 0 e capacidade 1. Para cada monitor também criamos uma aresta (T_i, t) de demanda a e capacidade b.
- Para garantir que a solução final terá exatamente c horas de monitoria, criamos uma nova fonte s' e uma aresta (s', s) com demanda e capacidade c.

Para construir uma atribuição de intervalos válida a partir de um fluxo, é suficiente atribuir um intervalo a um monitor se a aresta que liga o intervalo ao monitor tem fluxo 1. As condições de capacidade e demanda da rede garantem que um intervalo é atribuído a no máximo um monitor, que cada monitor recebe apenas intervalos compatíveis com ele e que as restrições no número de hora são satisfeitas.

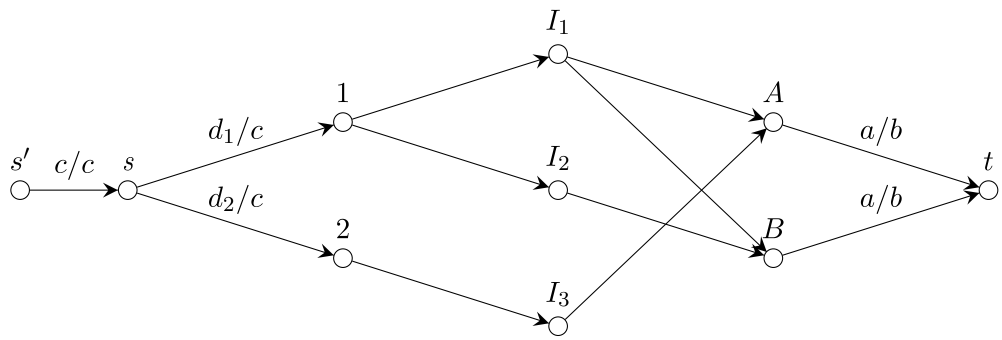
Reciprocamente, para toda atribuição de intervalos válida, podemos construir um fluxo passando uma unidade de fluxo pelo caminho (s', s, I, T, t) para cada par (I, T) de intervalo e monitor correspondente. A validade da atribuição implica imediatamente que as condições de demanda e capacidade são atendidas.

O caso com 3 intervalos e 2 monitores (A e B) em que o monitor A está disponível nos intervalos 1 e 2 e o monitor B está disponível nos horários 1 e 3 está representado abaixo. Os rótulos das arestas são da forma demanda/capacidade. As arestas sem rótulo tem demanda 0 e capacidade 1.



A única diferença na construção do item b é que, ao invés de ligarmos s diretamente aos intervalos de monitoria, ligamos s a cada dia da semana i com demanda d_i e capacidade c e depois criamos uma aresta com demanda 0 e capacidade 1 de cada dia da semana para os intervalos que são naquele dia.

Abaixo está o mesmo exemplo do item a) com dias da semana. Para deixar a visualização mais simples estamos colocando aqui apenas dois dias da semana.



4 Implementação

4.1 Fluxo máximo

Vamos começar estudando o problema de encontrar o fluxo máximo de uma rede G em que $d_e = 0 \ \forall e \in E \ f$. Vamos implementar aqui o algoritmo de Ford-Fulkerson para resolver esse problema.

O algoritmo tem 2 partes:

1. Dado um caminho P e partindo de um fluxo inicial f, obter um novo fluxo f' expandindo f em P
2. Partindo do fluxo $f(e) = 0$, expandir o fluxo enquanto for possível

- Primeira parte:

Queremos expandir o fluxo f em P. Mais precisamente, queremos mudar o valor do fluxo somando x ao valor de $f(e)$ para toda aresta e que está no caminho P.

O gargalo de um caminho P (com relação a um fluxo f) é o maior valor de x tal que $f(e) + x \leq c_e$ para toda aresta $e \in P$. Essa última condição significa que o fluxo

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{se } e \notin P \\ f(e) + x & \text{se } e \in P \end{cases}$$

ainda satisfaz as restrições de capacidade. O código abaixo computa tal valor de x.

```python
def encontra_gargalo(self, caminho):
    residuos = []
    for aresta in caminho:
        residuos.append(aresta.capacidade - self.fluxo[aresta])
    return min(residuos)
```

Como descrito acima, expandir o caminho é somar x ao valor de $f(e)$ para cada aresta do caminho. Precisamos atualizar também as arestas reversas, pois elas precisam satisfazer a propriedade $f(e) = -f(e.reversa)$.

```python
def expande_caminho(self, caminho):
    gargalo = self.encontra_gargalo(caminho)
    for aresta in caminho:
        self.fluxo[aresta] += gargalo
        self.fluxo[aresta.reversa] -= gargalo
```

Pela definição de gargalo, a operação de expandir P gera um fluxo válido. Se garantirmos que $c_e - f(e)$ é positivo para toda $e \in P$, então o gargalo também será positivo, de modo que o fluxo f' obtido terá valor maior que o anterior.

Tendo a restrição acima em mente, iremos fazer uma DFS no grafo, usando apenas as arestas que possuem $c_e - f(e)$ (chamaremos esse valor de `residuo`) positivo.

Mais precisamente, a função abaixo recebe um caminho parcialmente construído da fonte até `v` na variável `caminho` e recursivamente encontra uma maneira de chegar em dreno a partir de `v` usando apenas vértices não explorados. Se um caminho de `v` a dreno não existir, a função não retorna um valor (isto é, retorna `None`).

```python
def encontra_caminho(self, v, dreno, caminho, visitados):
    if v == dreno:
        return caminho

    visitados.add(v)

    for aresta in self.encontra_arestas(v):
        residuo = aresta.capacidade - self.fluxo[aresta]
        if residuo > 0 and aresta.destino not in visitados:
            resp = self.encontra_caminho(aresta.destino,
                                         dreno,
                                         caminho + [aresta],
```

```
                                        visitados)
            if resp != None:
                return resp
```

Como só chamamos a função com primeiro parâmetro igual a `w` quando `w` não está no conjunto de vértices visitados e `w` é imediatamente colocado em tal conjunto depois da chamada, chamamos a função uma única vez por vértice. Como a função demora tempo proporcional ao número de arestas que saem do vértice em questão, o tempo total gasto em todas as chamadas da função é $O(|V| + |E|)$.

Para as outras funções, note que um caminho tem no máximo $|V|$ vértices, e portanto as funções `encontra_gargalo` e `expande_caminho` têm complexidade $O(|V|)$.

Para a parte 2, vamos precisar criar um fluxo f com $f(e) = 0$ para toda aresta e. Podemos fazer isso utilizando o seguinte método na classe RedeDeFluxo():

```
def cria_fluxo_inicial(self):
    for vertice, arestas in self.adj.iteritems():
        for aresta in arestas:
            self.fluxo[aresta] = 0
```

Com todas as funções auxiliares prontas, podemos finalmente definir a função que encontra o fluxo máximo, repetidamente aumentando o fluxo como descrito na parte 1:

```
def fluxo_maximo(self, fonte, dreno):
    self.cria_fluxo_inicial()

    caminho = self.encontra_caminho(fonte, dreno, [], set())
    while caminho is not None:
        self.expande_caminho(caminho)
        caminho = self.encontra_caminho(fonte, dreno, [], set())
    return self.valor_do_fluxo(fonte)
```

Como o fluxo aumenta em pelo menos uma unidade por iteração e o custo de uma iteração é $O(|V| + |E|)$, a complexidade total do algoritmo é $O((|V| + |E|)F)$, onde F é o fluxo máximo possível na rede. No caso do exercício, F é no máximo o número de intervalos e portanto polinomial no tamanho da entrada.

4.2 Fluxo válido com demandas não-nulas

O nosso objetivo é encontrar um fluxo válido f para uma rede $G = (V, E)$ no caso em que as demandas são positivas.

Vamos construir uma rede $G' = (V', E')$ com um valor associado d tal que $d_e = 0 \; \forall e \in E'$ de tal forma que um fluxo válido para G existe se e somente se o valor do fluxo máximo em G' é d. Em caso afirmativo, podemos construir um fluxo válido f para G rapidamente a partir de qualquer fluxo máximo f' de G'.

Construimos G' da seguinte forma:

- Criamos um vértice em G' para cada vértice G
- Adicionamos uma fonte adicional F e um dreno adicional D a G'
- Definimos o saldo de cada vértice $v \in V$ como:

$$\text{saldo}(v) = \sum_{e \text{ saindo de } v} d_e - \sum_{e \text{ chegando em } v} d_e$$

- Se $\text{saldo}(v) > 0$ adicionamos uma aresta $(v, D, \text{saldo}(v), 0)$ a G'
- Se $\text{saldo}(v) < 0$ adicionamos uma aresta $(F, v, -\text{saldo}(v), 0)$ a G'
- Para cada aresta $e = (\text{origem}, \text{destino}, \text{capacidade}, \text{demanda}) \in E$, crie uma aresta $e' = (\text{origem}, \text{destino}, \text{capacidade} - \text{demanda}, 0)$ em G'

Codificando a construção acima:

```
def cria_rede_com_demandas_nulas(G):
    G_ = RedeDeFluxo()
    G_.novo_vertice('F')
    G_.novo_vertice('D')
    d = 0

    for vertice, arestas in G.adj.iteritems():
        G_.novo_vertice(vertice)
        saldo = sum(e.demanda for e in arestas)
        if saldo > 0:
            G_.nova_aresta(vertice, 'D', saldo, 0)
            d += saldo
        elif saldo < 0:
            G_.nova_aresta('F', vertice, -saldo, 0)
```

```
    for arestas in G.adj.values():
        for a in arestas:
             if a.original:
                 G_.nova_aresta(a.origem,
                                a.destino,
                                a.capacidade - a.demanda,
                                0)
    return G_, d
```

5 Rodando o algoritmo

5.1 Item A

A seguinte tabela mostra a disponibilidade dos monitores nos horários escolhidos pelo administrador:

	Ana	Bia	Caio	Davi	Edu	Felipe	Gabi	Hugo	Isa
Seg 10h				x					
Seg 14h						x	x	x	x
Seg 21h	x			x					
Ter 10h	x	x		x					
Ter 16h			x						
Ter 20h							x		x
Qua 9h						x			
Qua 17h			x						
Qua 19h								x	
Qui 7h		x				x			
Qui 13h							x		
Qui 19h		x			x			x	
Sex 7h			x		x				
Sex 11h	x				x				x
Sex 21h			x			x			x

As outras regras para monitoria estão na tabela abaixo:

Min de horas por monitor	1
Max de horas por monitor	3
Horas de monitoria	10

Podemos carregar as informações das tabelas para criar uma rede como descrita no final da Seção 3.

```python
# Lendo a tabela de disponibilidade
intervalos = collections.OrderedDict()
monitores = horarios[0][1:]

for disponibilidade in horarios[1:]:
    intervalos[disponibilidade[0]] = []
    for i, slot in enumerate(disponibilidade[1:]):
        if slot != '':
            intervalos[disponibilidade[0]].append(monitores[i])
```

Lendo a tabela de regras

```python
min_horas = regras[0][1]
max_horas = regras[1][1]
total_horas = regras[2][1]
```

Criando uma rede para o problema com os dados fornecidos

```python
def cria_rede(intervalos, monitores, min_horas, max_horas, total_horas):
    G = RedeDeFluxo()
    G.novo_vertice('Fonte')
    G.novo_vertice('Dreno')
    G.nova_aresta('Dreno', 'Fonte', total_horas, total_horas)

    # Criando um vertice para cada monitor e ligando esse vertice
    # ao dreno
    for monitor in monitores:
        G.novo_vertice(monitor)
        G.nova_aresta(monitor, 'Dreno', max_horas, min_horas)

    for intervalo, monitores_disponiveis in intervalos.iteritems():
        # Criando um vertice para cada intervalo e conectando a
        # fonte a cada um dos intervalos
        G.novo_vertice(intervalo)
        G.nova_aresta('Fonte', intervalo, 1, 0)

        # Conectando o intervalo a cada monitor disponivel nele
        for monitor in monitores_disponiveis:
            G.nova_aresta(intervalo, monitor, 1, 0)

    return G
```

Agora é só rodar o algoritmo com o grafo obtido:

```
G = cria_rede(intervalos, monitores, min_horas, max_horas, total_horas)
G_, d = cria_rede_com_demandas_nulas(G)
fluxo = G_.fluxo_maximo('F', 'D')
if fluxo == d:
    tabela_de_monitores = []
    for horario in intervalos:
        for w in G_.adj[horario]:
            if G_.fluxo[w] == 1:
                tabela_de_monitores.append([w.origem, w.destino])
    return tabela_de_monitores
else:
    return 'Impossivel'
```

No final, obtemos ou 'Impossível' se não existir um horário compatível ou uma tabela com um horário que atende a todas as restrições.

Para a tabela acima:

Seg 10h	Davi
Seg 14h	Gabi
Seg 21h	Ana
Ter 10h	Bia
Ter 16h	Caio
Ter 20h	Isa
Qua 9h	Felipe
Qua 17h	Caio
Qua 19h	Hugo
Qui 19h	Edu

5.2 Item b

No item b, além de todas as restrições do item a, há também a restrição de mínimo de horas por dia da semana.

Vamos expressar a nova restrição com uma tabela:

Seg	1
Ter	1
Qua	2
Qui	1
Sex	1

Parsear a nova tabela é simples:

```
minimo_por_dia = {}
for dia in min_por_dia:
    minimo_por_dia[dia[0]] = dia[1]
```

A única função que precisamos alterar do item a é a função `cria_rede`, que agora tem que lidar com a construção mencionada em TODO.

```
def cria_rede(intervalos, monitores, min_horas,
              max_horas, total_horas, minimo_por_dia):
    G = RedeDeFluxo()
    G.novo_vertice('Fonte')
    G.novo_vertice('Dreno')
    G.nova_aresta('Dreno', 'Fonte', total_horas, total_horas)

    # Criando um vertice para cada monitor e ligando esse vertice
    # ao dreno
    for monitor in monitores:
        G.novo_vertice(monitor)
        G.nova_aresta(monitor, 'Dreno', max_horas, min_horas)

    # Criando um vertice para cada dia e uma aresta da Fonte
    # ao dia com demanda igual ao minimo de horas de monitoria
    # para aquele dia e capacidade suficientemente grande
    # (vamos usar o total de horas)
    dias = minimo_por_dia.keys()
    for dia in dias:
        G.novo_vertice(dia)
        G.nova_aresta('Fonte', dia, total_horas, minimo_por_dia[dia])

    for intervalo, monitores_disponiveis in intervalos.iteritems():
        # Encontrando o dia do intervalo
        for dia in dias:
            if intervalo.startswith(dia):
                dia_do_intervalo = dia

        # Criando um vertice para cada intervalo e conectando o
        # dia do intervalo a cada um dos intervalos
        G.novo_vertice(intervalo)
        G.nova_aresta(dia_do_intervalo, intervalo, 1, 0)
```

```
    # Conectando o intervalo a cada monitor disponivel nele
    for monitor in monitores_disponiveis:
        G.nova_aresta(intervalo, monitor, 1, 0)

return G
```

Seg 10h	Davi
Seg 14h	Isa
Seg 21h	Ana
Ter 10h	Bia
Ter 16h	Caio
Qua 9h	Felipe
Qua 17h	Caio
Qua 19h	Hugo
Qui 13h	Gabi
Sex 7h	Edu