Exercício 8.19 (Tardos)

Alice Duarte Scarpa, Bruno Lucian Costa

2015-06-23

1 Enunciado

Um comboio de navios chega ao porto com um total de n vasilhames contendo tipos diferentes de materiais perigosos. Na doca, estão m caminhões, cada um com capacidade para até k vasilhames. Para cada um dos dois problemas, dê um algoritmo polinomial ou prove NP-completude:

- Cada vasilhame só pode ser carregado com segurança em alguns dos caminhões. Existe como estocar os n vasilhames nos m caminhões de modo que nenhum caminhão esteja sobrecarregado, e todo vasilhame esteja num caminhão que o comporta com segurança?

- Qualquer vasilhame pode ser colocado em qualquer caminhão, mas alguns pares de vasilhames não podem ficar juntos num mesmo caminhão. Existe como estocar os n vasilhames nos m caminhões de modo que nenhum caminhão esteja sobrecarregado e que nenhum dos pares proibidos de vasilhames esteja no mesmo caminhão?

2 Item a

Uma solução força-bruta para esse problema seria:

- Extenda a lista de vasilhames com vasilhames vazios, até que ela tenha tamanho mk (a capacidade total de todos os caminhões).

- Para cada uma das $(mk)!$ ordenações da lista acima, considere que os k primeiros vão para o primeiro caminhão, os k próximos para o segundo e assim até o final da lista. Se cada vasilhame estiver em um camihão que o comporta com segurança, retorne essa solução, se não, tente com uma nova ordem.

Esse algoritmo faz $(mk)!$ iterações do loop principal no pior caso, cada iteração tem custo mk para conferir se é uma solução válida. Isso dá uma complexidade total de $O(mk(mk)!)$

Esse é um algoritmo super-exponencial para o problema, mas isso não significa que o problema é NP-completo. Na verdade, como veremos a seguir, esse problema não é NP-completo pois aceita uma solução polinomial usando fluxos.

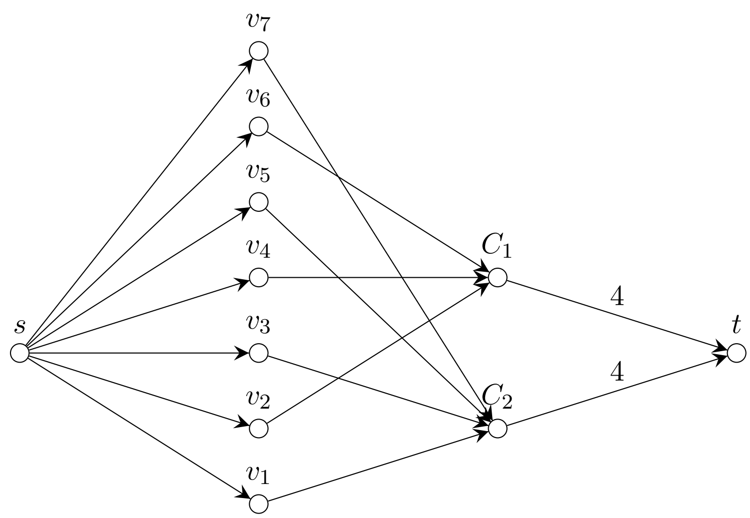
2.1 Solução com fluxos

Podemos transformar esse problemas em um problema de encontrar o fluxo máximo de um grafo usando a seguinte construção:

- Criamos um vértice s representando a fonte e um vértice t representando o dreno
- Para cada vasilhame $v_i \in v_1, v_2, \ldots, v_n$ criamos um vértice v_i e uma aresta (s, v_i) capacidade 1
- Para cada caminhão $C_i \in C_1, C_2, \ldots, C_m$ criamos um vértice C_i. Se o vasilhame v_j puder ser transportado com segurança no caminhão C_i criamos uma aresta (v_j, C_i) de capacidade 1. Para cada caminhão criamos também uma aresta (C_i, t) de capacidade k.

Dessa forma, existe uma configuração possível de caminhões se e somente se (TODO: provar) o fluxo máximo tem valor m.

A figura abaixo ilustra a construção para o caso com 7 vasilhames e 2 caminhões de capacidade 4. Em que os vértices pares podem ir no caminhão 1 e os ímpares no caminhão 2:



2.1.1 Implementação

2.1.2 Complexidade

3 Item b