

# Лабораторная работа 1.2

## Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Зотов Алексей 496 гр.

21 марта 2016 г.

**Цель работы:** измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса–Штейнера.

**В работе используются:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

**Определение.** Моментом инерции твердого тела (или системы тел) относительно выбранной оси, называется величина, определяемая соотношением:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Из определения момента инерции и по 2-му закону Ньютона для движения материальной точки под действием силы  $\vec{F}$ , учитывая  $v = \omega r$ , уравнение вращательного движения принимает вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad \text{где } M - \text{момент силы } \vec{F} \quad (2)$$

**Теорема Гюйгенса–Штейнера.** Момент инерции  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $I_0$  относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния между осями  $a_0$ :

$$I = I_0 + ma_0^2 \quad (3)$$

**Экспериментальная установка.** Будем использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  вращающейся платформы  $P'$ .

Платформа  $P$  укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе создадим крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

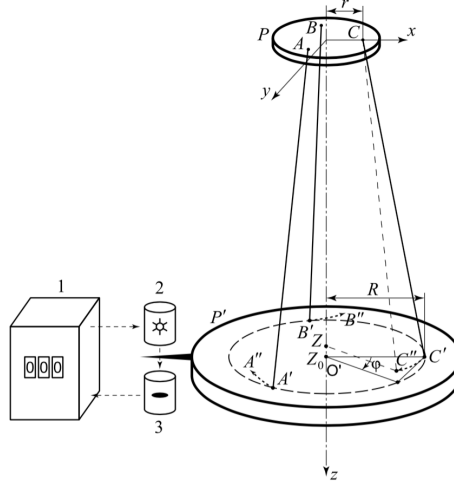


Рис. 1: трифилярный подвес

**Уравнение гармонических колебаний.** Уравнение малых колебаний трифилярного подвеса выглядит следующим образом:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \quad (4)$$

где  $I$  — момент инерции тела вместе с платформой,  $m$  — их суммарная масса,  $z_0$  — расстояние от центра нижней платформы  $O'$  до центра верхней  $O$  в положении равновесия, а  $R$  и  $r$  — расстояния от оси вращения до точки крепления нити на нижней и на верхней платформах соответственно (см. рис. 2).

Решение уравнения (4) представляет собой гармонические колебания:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(2\pi t/T + \theta) \quad (5)$$

где амплитуда  $\varphi_m$  и фаза  $\theta$  определяются начальными условиями, а *период колебаний* равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (6)$$

положим  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ , эта величина постоянна для данной установки. Тогда момент инерции можно выразить следующим образом:

$$I = kmT^2 \quad (7)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний.

**Аддитивность моментов инерции.** Момент инерции самого тела можно вычислить, воспользовавшись аддитивностью  $I_{A+B}$  — момент инерции составного тела (А+В) равен сумме моментов инерции его частей А и В :

$$I_{A+B} = I_A + I_B \quad (8)$$

## Ход работы

### 1. Параметры установки.

$$R_0 = (114.6 \pm 0.5) \text{ mm.}$$

$$r_0 = (30.2 \pm 0.3) \text{ mm.}$$

$$m_0 = (448.2 \pm 0.3) \text{ g.}$$

$$z_0 = (214 \pm 1) \text{ cm.}$$

$$\Delta k = \frac{g}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{r_0 \Delta R_0}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{R_0 \Delta r_0}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{r_0 R_0 \Delta z_0}{z_0^2}\right)^2}$$

$$k = (3.9920 \pm 0.0699) * 10^{-4} \quad [m^2/c^2]$$

$$I_0 = \left(\frac{R_0^2 M_0}{2}\right) = (2.9431 \pm 0.0154) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$$

### 2. Пустая платформа, определение погрешности.

Измерим период колебаний пустой платформы:

$N_T = 20$  - количество полных колебаний на 1 измерение.

$n = 6$  - количество измерений.

Таблица 1: Измерения времени 40 колебаний пустой платформы.

| $i$       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $t_{i,c}$ | 86.546 | 86.435 | 86.614 | 87.299 | 87.325 | 87.148 |

среднее время 20 колебаний:  $t_{cp} = 86.8945(\text{с})$

среднее время одного колебания:  $T_{cp} = \frac{t_{cp}}{20} = 4.344725 \approx 4.345(\text{с})$

погрешность измерения:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(t_i - t_{cp})^2}{n-1}} \approx 0.3957$

относительная погрешность измеряемой величины:  $\varepsilon = \frac{\sigma}{N * T_{cp}}$

положим  $N = 19 \implies \varepsilon < 0.0048 < 0.005$

### 3. Измерения с различными телами

(a) Диск

$R = (8.5 \pm 0.025) \text{ cm}$  - радиус диска

$m = 580.1 \text{ g}$  - общая масса

$t = 69.189 \implies T \approx 3.5047(\text{с})$  - измеренный период

$I_1 = k(m + m_0)T^2 - I_0 = (2.0976 \pm 0.0658) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$  - измеренный момент

$I_2 = R^2 * m/2 = 2.0956 * 10^{-3}$  - теоретический результат, с учетом погрешности совпадает с результатом, полученным из опыта.

(b) Кольцо

$R = (8.4 \pm 0.025) \text{ cm}$  - радиус кольца

$d = (0.5 \pm 0.025) \text{ cm}$  - толщина стенки кольца

$m = 975.2 \text{ g}$  - общая масса

$$t = 79.027(c) \implies T \approx 4.16()$$

$I_1 = (6.8905 \pm 0.0984) * 10^{-3} \text{ [m}^2 * \text{kg]}$  - измеренный момент  $I_2 = 6.8810 * 10^{-3}$  - теоретический результат, с учетом погрешности, совпадает с результатом, полученным из опыта.

(с) Брус

$M = 706.5g$  - общая масса

$l = (21 \pm 0.05)cm$  - длина

$d_{cp} = (2 \pm 0.025)cm$  - толщина

Таблица 2: Измерения толщины бруса.

| $i$       | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $d_i, cm$ | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 |

$$t = 68.840(c) \implies T \approx 3.623(c)$$

$$I_1 = (3.1084 \pm 0.0605) * 10^{-3} \text{ [m}^2 * \text{kg]}$$

$$I_2 = 2.596 * 10^{-3}$$

(d) Диск + Кольцо

$$t = 72.837(c) \implies T \approx 3.834(c)$$

$$I = (8.8137 \pm 0.117582) * 10^{-3} \text{ [m}^2 * \text{kg]}$$

По закону аддитивности  $I = I_d + I_k = (8.9881 \pm 0.16416) * 10^{-3}$ , что, с учетом погрешности, удовлетворяет результатам опыта.

(e) Полудиск

$$M = 566.4g$$

$$R = (4.15 \pm 0.025)cm$$

Расположим диски как показано на рисунке 2. Найдем зависимость  $T(h)$  периода колебаний от расстояния до центра платформы.

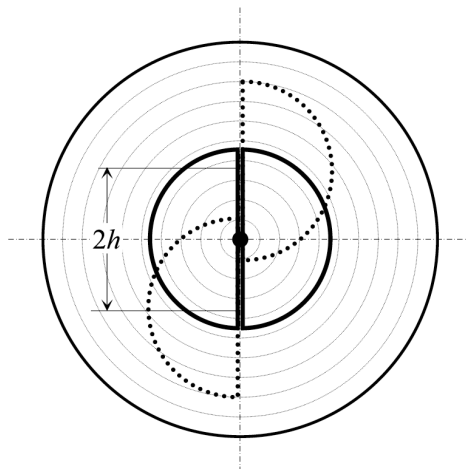


Рис. 2: расположение дисков на платформе.

Таблица 3: Период колебаний и расположение дисков.

|        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $h$    | 0      | 0.45   | 1.375  | 2.85   | 3.35   | 4.35   | 5.35   | 7.35   |
| $t, c$ | 50.532 | 50.686 | 52.048 | 55.297 | 57.383 | 61.748 | 66.124 | 76.614 |
| $T, c$ | 2.6596 | 2.6677 | 2.7394 | 2.9104 | 3.0202 | 3.2499 | 3.4802 | 4.0323 |

Таблица 4: Данные для построения графика  $I(h^2)$

|                      |         |         |         |         |         |         |         |         |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $h, [m]$             | 0.0     | 2e-05   | 0.00019 | 0.00081 | 0.00112 | 0.00189 | 0.00286 | 0.0054  |
| $I(h^2), [kg * m^2]$ | 0.00152 | 0.00155 | 0.00179 | 0.0024  | 0.00281 | 0.00372 | 0.0047  | 0.00732 |

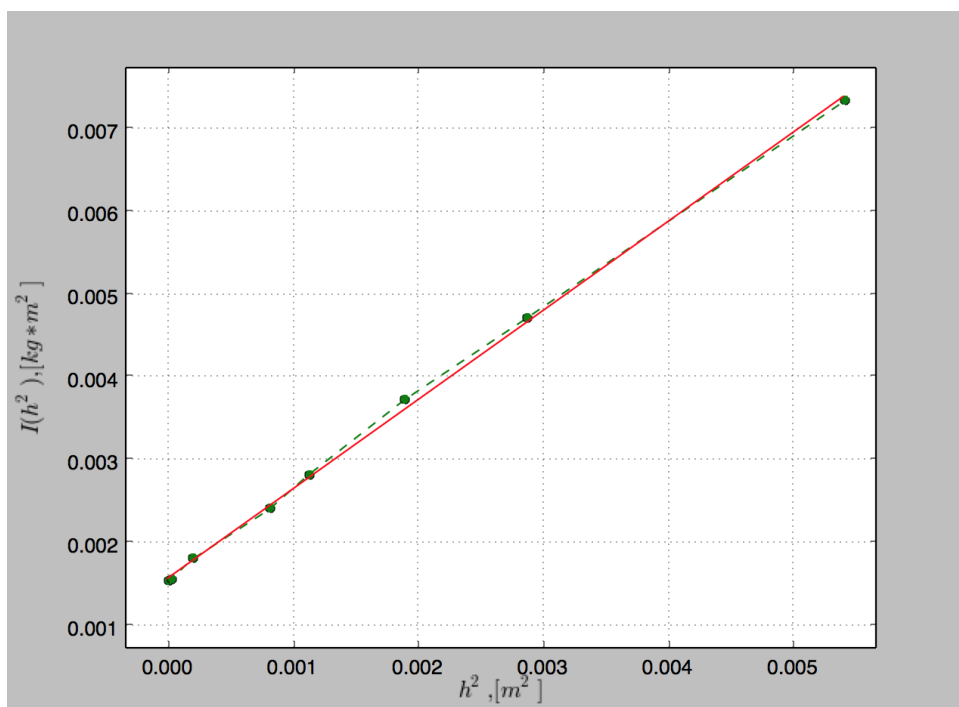


Рис. 3: график  $I(h^2)$ .

$$\Delta I_{max} = 0.1136 * 10^{-3} \implies I_0 = I(0) = (1.52 \pm 0.11) * 10^{-3} [kg * m^2]$$

$$\text{Рассчитанный момент инерции диска } I_{th} = (0.978 \pm 0.117) * 10^{-3} [kg * m^2]$$

Коэффициент наклона прямой  $k = 1.07567683217$  из закона Гюйгенса-Штейнера равен массе  $m$ .

$$\Delta k_{max} = 0.0122017789351 \implies m = 1.0757 \pm 0.0122 [kg]$$

$$\text{Указанная масса диска } m_d = 1.1317 [kg]$$