

Лабораторная работа 1.2

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Зотов Алексей 496 гр.

22 марта 2016 г.

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса–Штейнера.

В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Определение. Моментом инерции твердого тела (или системы тел) относительно выбранной оси, называется величина, определяемая соотношением:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Из определения момента инерции и по 2-му закону Ньютона для движения материальной точки под действием силы \vec{F} , учитывая $v = \omega r$, уравнение вращательного движения принимает вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad \text{где } M - \text{момент силы } \vec{F} \quad (2)$$

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a_0 :

$$I = I_0 + ma_0^2 \quad (3)$$

Экспериментальная установка. Будем использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' вращающейся платформы P' .

Платформа P укреплен на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе создадим крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

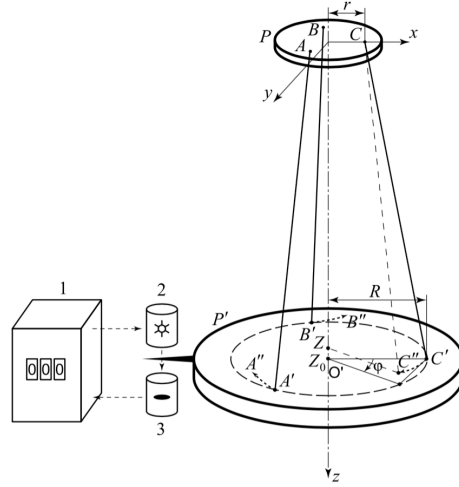


Рис. 1: трифилярный подвес

Уравнение гармонических колебаний. Уравнение малых колебаний трифилярного подвеса выглядит следующим образом:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \quad (4)$$

где I — момент инерции тела вместе с платформой, m — их суммарная масса, z_0 — расстояние от центра нижней платформы O' до центра верхней O в положении равновесия, а R и r — расстояния от оси вращения до точки крепления нити на нижней и на верхней платформах соответственно (см. рис. 2).

Решение уравнения (4) представляет собой гармонические колебания:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(2\pi t/T + \theta) \quad (5)$$

где амплитуда φ_m и фаза θ определяются начальными условиями, а *период колебаний* равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (6)$$

положим $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$, эта величина постоянна для данной установки. Тогда момент инерции можно выразить следующим образом:

$$I = kmT^2 \quad (7)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний.

Аддитивность моментов инерции. Момент инерции самого тела можно вычислить, воспользовавшись аддитивностью I_{A+B} — момент инерции составного тела (А+В) равен сумме моментов инерции его частей А и В :

$$I_{A+B} = I_A + I_B \quad (8)$$

Ход работы

1. Параметры установки.

$$R_0 = (114.6 \pm 0.5)mm.$$

$$r_0 = (30.2 \pm 0.3)mm.$$

$$m_0 = (448.2 \pm 0.3)g.$$

$$z_0 = (214 \pm 1)cm.$$

$$\Delta k = \frac{g}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{r_0 \Delta R_0}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{R_0 \Delta r_0}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{r_0 R_0 \Delta z_0}{z_0^2}\right)^2}$$

$$k = (3.9920 \pm 0.0699) * 10^{-4} \quad [m^2/c^2]$$

$$I_0 = \left(\frac{R_0^2 M_0}{2}\right) = (2.9431 \pm 0.0154) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$$

2. Пустая платформа, определение погрешности.

Измерим период колебаний пустой платформы:

$N_T = 20$ - количество полных колебаний на 1 измерение.

$n = 6$ - количество измерений.

Таблица 1: Измерения времени 40 колебаний пустой платформы.

i	1	2	3	4	5	6
$t_{i,c}$	86.546	86.435	86.614	87.299	87.325	87.148

среднее время 20 колебаний: $t_{cp} = 86.8945(c)$

среднее время одного колебания: $T_{cp} = \frac{t_{cp}}{20} = 4.344725 \approx 4.345(c)$

Среднеквадратичное отклонение измерения: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(t_i - t_{cp})^2}{n-1}} \approx 0.3957$

Относительная погрешность измеряемой величины: $\varepsilon = \frac{\sigma}{N * T_{cp}}$

положим $N = 19 \implies \varepsilon < 0.0048 < 0.005$

3. Измерения с различными телами

(а) Диск
 $R = (8.5 \pm 0.025)cm$ - радиус диска

$m = 580.1g$ - общая масса

$t = 69.189 \implies T \approx 3.5047(c)$ - измеренный период

$I_1 = k(m + m_0)T^2 - I_0 = (2.0976 \pm 0.0658) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$ - измеренный момент

$I_2 = R^2 * m/2 = 2.0956 * 10^{-3}$ - теоретический результат, с учетом погрешности совпадает с результатом, полученным из опыта.

(b) Кольцо

$R = (8.4 \pm 0.025)cm$ - радиус кольца

$d = (0.5 \pm 0.025)cm$ - толщина стенки кольца

$m = 975.2g$ - общая масса

$t = 79.027(c) \implies T \approx 4.16()$

$I_1 = (6.8905 \pm 0.0984) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$ - измеренный момент $I_2 = 6.8810 * 10^{-3}$ - теоретический результат, с учетом погрешности, совпадает с результатом, полученным из опыта.

(c) Брус

$M = 706.5g$ - общая масса

$l = (21 \pm 0.05)cm$ - длина

$d_{cp} = (2 \pm 0.025)cm$ - толщина

Таблица 2: Измерения толщины бруса.

i	1	2	3	4	5
d_i, cm	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

$t = 68.840(c) \implies T \approx 3.623(c)$

$I_1 = (3.1084 \pm 0.0605) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$

$I_2 = 2.596 * 10^{-3}$

(d) Диск + Кольцо

$t = 72.837(c) \implies T \approx 3.834(c)$

$I = (8.8137 \pm 0.117582) * 10^{-3} \quad [m^2 * kg]$

По закону аддитивности $I = I_d + I_k = (8.9881 \pm 0.16416) * 10^{-3}$, что, с учетом погрешности, удовлетворяет результатам опыта.

(e) Полудиск

$M = 566.4g$

$R = (4.15 \pm 0.025)cm$

Расположим диски как показано на рисунке 2. Найдем зависимость $T(h)$ периода колебаний от расстояния до центра платформы.

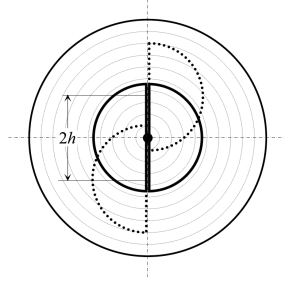


Рис. 2: расположение дисков на платформе.

Таблица 3: Период колебаний и расположение дисков.

h	0	0.45	1.375	2.85	3.35	4.35	5.35	7.35
t, c	50.532	50.686	52.048	55.297	57.383	61.748	66.124	76.614
T, c	2.6596	2.6677	2.7394	2.9104	3.0202	3.2499	3.4802	4.0323

Таблица 4: Данные для построения графика $I(h^2)$

$h, [m]$	0.0	2e-05	0.00019	0.00081	0.00112	0.00189	0.00286	0.0054
$I(h^2), [kg * m^2]$	0.00152	0.00155	0.00179	0.0024	0.00281	0.00372	0.0047	0.00732

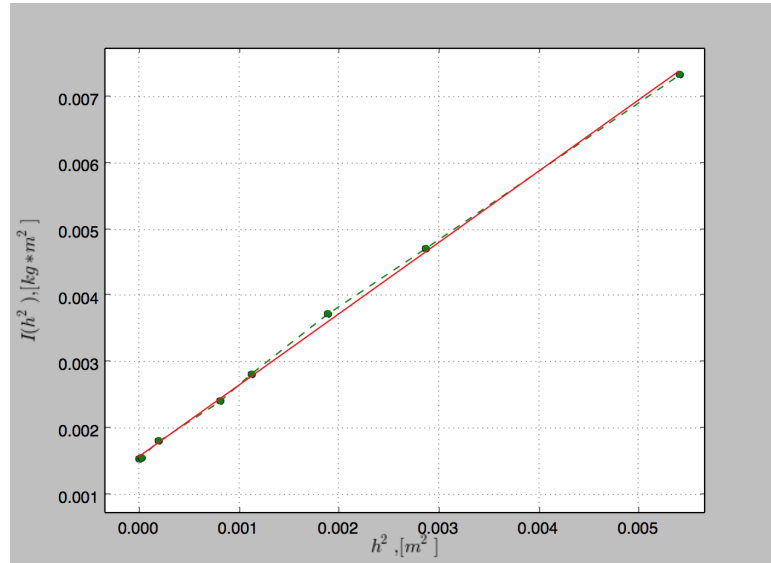


Рис. 3: график $I(h^2)$.

$$\Delta I_{max} = 0.1136 * 10^{-3} \implies I_0 = I(0) = (1.52 \pm 0.11) * 10^{-3} [kg * m^2]$$

$$\text{Рассчитанный момент инерции диска } I_{th} = (0.978 \pm 0.117) * 10^{-3} [kg * m^2]$$

Коэффициент наклона прямой $k = 1.07567683217$ из закона Гюйгенса-Штейнера равен массе m .

$$\Delta k_{max} = 0.0122017789351 \implies m = 1.0757 \pm 0.0122 [kg]$$

Указанная масса диска $m_d = 1.1317 [kg]$.