Лабораторная работа 1.3
Изучение колебаний на примере физического маятника

Зотов Алексей 496 гр.

4 апреля 2016 г.

Цель работы: исследовать физический и математический маятники как колебательные системы, измерить зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

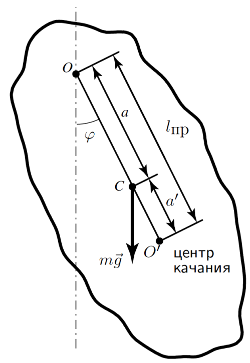

Рис. 1: физический маятник.

Экспериментальная установка. В данной работе в качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длиной l На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя расстояние a от точки опоры (точки подвеса) маятника до его центра масс. Используя теорему Гюйгенса–Штейнера и считая стержень тонким (его радиус много меньше длины), вычислим его момент инерции:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \tag{1}$$

Ход работы

1. Проведем $n = 6$ экспериментов, в каждом измерим время $N_T = 20$ полных колебаний маятников.

   (a) Физический маятник.
   Среднее значение $t_{avg} = 31.56$[с]. Среднее значение периода $T_{avg} = t_{avg}/20 = 1.578$[с].
   Среднеквадратичное отклонение измерения: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - t_{avg})^2}{n-1}} \approx 0.102$

Таблица 1: Время 20-ти полных колебаний физического маятника

i	1	2	3	4	5	6
$t_{20}, (c)$	31.43	31.72	31.56	31.62	31.49	31.53

Относительная погрешность измерения периода: $\varepsilon = \frac{\sigma}{N * T_{avg}} \approx 0.0032$

(b) Математический маятник.

Таблица 2: Время 20-ти полных колебаний математического маятника

i	1	2	3	4	5	6
$t_{20}, [c]$	31.56	31.34	31.6	31.62	31.63	31.54

Среднее значение $t_{avg} = 31.55$[с]. Среднее значение периода $T_{avg} = t_{avg}/20 = 1.577$[с].
Среднеквадратичное отклонение измерения: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - t_{avg})^2}{n-1}} \approx 0.108$
Относительная погрешность периода: $\varepsilon = \frac{\sigma}{N * T_{avg}} \approx 0.0034$

2. Возбудим малые колебания физического маятника, отклонив на угол $A_0 = 10^o$. Измерим время t затухания в ≈ 1.3 раза по достижении маятником значения амплитуды $A_1 \approx 7.5^o$. $t \approx 5$ мин 30 с $= 330$ (с).
   Количество колебаний $N = 209$.
   Добротность $Q = \frac{\pi}{\gamma_e T}$, где $\gamma_e = 1/\tau_e$ - величина обратная времени убавыния амплитуды A в e раз. Ее вычислим из закона убывания амплитуды: $\gamma_e = \gamma_{1.3} \ln 1.3$, тогда :

$$Q = \frac{\pi \tau_{1.3}}{T \ln(1.3)} \approx 2504.2 \tag{2}$$

3. Найдем зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс.

Таблица 3: Время 20-ти полных колебаний и периода физического маятника

$a, [cm]$	4.0	8.0	12.0	16.0	20.0	24.0	28.0	32.0	36.0	40.0	44.0	48.0
$t_{20}, [c]$	53.87	43.19	36.68	33.28	31.69	30.9	30.57	30.68	31.13	31.31	31.85	32.69
$T, [c]$	2.693	2.159	1.834	1.664	1.585	1.545	1.528	1.534	1.556	1.565	1.593	1.634

Таблица 4: Зависимость $[T^2a](a^2)$

$a^2, [m^2]$	0.002	0.006	0.014	0.026	0.04	0.058	0.078	0.102	0.13	0.16	0.194	0.23
$T^2a, [c^2m]$	0.29	0.373	0.404	0.443	0.502	0.573	0.654	0.753	0.872	0.98	1.116	1.282

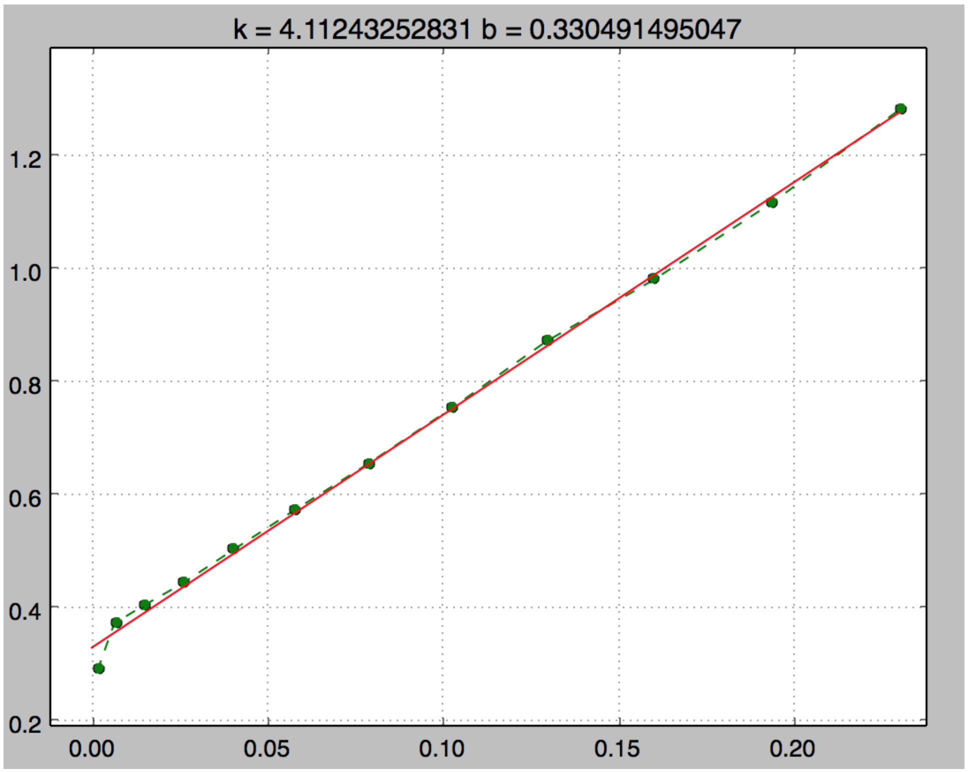

Рис. 2: график $[T^2a](a^2)$.

Аппроксимирующая по методу наименьших квадратов прямая $y = kx + b$, где $k = 4.11$, $b = 0.33$.
Подставляя в формулу для рассчета периода колебания маятника формулу момента инерции тонкого стержня получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{3}$$

отсюда:

$$T^2a = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g} \tag{4}$$

$\implies \frac{g}{4\pi^2} = \frac{1}{k} \approx 0.243 \implies g \approx 9.6[\frac{m}{c^2}]$
$l = \sqrt{\frac{12b}{k}} \approx 0.98[m]$
Рассчет погрешности:

$$\sigma_k \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} - k^2} \approx 0.0626 \tag{5}$$

$$\sigma_b = \sigma_k\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \approx 0.0046 \tag{6}$$

Учитывая $g = 4\pi^2/k$ и $l = \sqrt{\frac{12b}{k}}$ получим формулы для рассчета погрешностей :

$$\sigma_g = 4\pi^2 \frac{\sigma_k}{k^2} \approx 0.15 \tag{7}$$

$$\sigma_l = 0.5 * \sqrt{\frac{k}{12b}} \frac{12k\sigma_b + 12b\sigma_k}{k^2} \approx 0.014 \tag{8}$$

Табличное значение ускорения свободного падения $g_{tab} = 9.81[m/c^2]$, длина маятника $l = 1.0[m]$. С учетом погрешности полученные значения близки к табличным.

4. Приведенная длина маятника.
   Длину математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называют *приведенной длиной* :

$$l_{pr} = \frac{I}{ma} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{9}$$

   Зафиксируем точку опоры маятника так, что расстояние до центра масс до этой точки $a_1 = 21.0$ [cm] , $T_{a_1} \approx 1.58$ [c] , $l_{pr} = 21 + \frac{(100)^2}{21*12)} \approx 60.7$[c]
   Найдем длину математического маятника с таким периодом: $l_{mat} \approx 61.0$ [c] , разность ожидаемой и полученной величин $\Delta l = |l_{mat} - l_{pr}| = 0.3$ укладывается в погрешность измерений.

5. Обратимость точки подвеса.
   Теперь аналогично зафиксируем $a_2 = l_{pr} - a_1 = 40.0$ [cm] , $T_{a_2} \approx 1.57$ [c] $\implies \Delta T = |T_{a_2} - T_{a_1}| = 0.01$ [c]. Заметим, что в проведенном эксперименте $a_1 \neq a_2$, а значит, с учетом погрешности измерений, можно говорить о подтверждении закона обратимости точки подвеса и центра качания физического маятника.