

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ПО ПРЕДМЕТУ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»
ПО ТЕМЕ «РЯДЫ ФУРЬЕ»**

Лектор: Перегудин А. А.
Практик: Пашенко А. В.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР
Группа: R3241

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Задание 1. Вещественные функции	2
1.1	Квадратная волна	2
1.2	Чётная периодическая функция	13
1.3	Нечётная периодическая функция	21
1.4	Ни чётная, ни нечётная периодическая функция	25
2	Комплексная функция	30
2.1	Комплекснозначная функция $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$	30
3	Вывод	40
3.1	Лабораторная работа №1	40

1 Задание 1. Вещественные функции

Зададим числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$. Пусть

$$a = 1, b = 2, t_0 = 0.5\pi, t_1 = 1.5\pi, t_2 = 2\pi$$

1.1 Квадратная волна

Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0 = 2\pi - 0.5\pi = 1.5\pi$ будет принимать следующий вид:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.5\pi, 1.5\pi), \\ 2, & t \in [1.5\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Построим график $f(t)$, используя код, написанный на языке программирования python, однако перед этим познакомимся с файлом static.py, из которого будут импортироваться все переменные и функции

```

1 import sympy as sp
2
3 a = 1
4 b = 2
5
6 pN = 25
7 N = 3
8 N_1 = 10
9 N_2 = 20
10 N_3 = 30
11 N_4 = 40
12 N_5 = 50
13
14 t = sp.Symbol('t')
15
16 gap_start = 0.5 * sp.pi
17 gap_start_val = float(gap_start.evalf())
18
19 gap_mid = 1.5 * sp.pi
20 gap_mid_val = float(gap_mid.evalf())
21
22 gap_end = 2 * sp.pi
23 gap_end_val = float(gap_end.evalf())
24
25 gap_len = gap_end - gap_start
26 gap_len_val = float(gap_len.evalf())
27
28 gap_1 = [gap_start, gap_mid]
29 gap_2 = [gap_mid, gap_end]
30 gaps = [gap_1, gap_2]
31
32 # can not check if "t" is in [gap_start, gap_mid]
33 # and etc. because "t" is a symbol so bad code here
34 def square_wave_a(t):
35     return a
36
37 def square_wave_b(t):
38     return b
39
40 def even_periodic_func(t):
41     return sp.cos(t)
42
43 def odd_periodic_func(t):
44     return sp.sin(t)
45
46 def not_even_or_odd_periodic_func(t):
47     return sp.cos(t) + t
48
49 def test_func(t):
50     return t

```

Здесь находятся заданные ранее a, b , интервалы $[t_0, t_1)$ и $[t_1, t_2)$ в списке gaps, функции первого задания и различные N для вычисления коэффициентов Фурье. Квадратная волна задана двумя функциями – так проще считать интегралы

Построение графиков реализовано через библиотеку sympy. В static.py указана символьная переменная t , которая будет присутствовать во всех выражениях и по которой будут интегрироваться функции. Для построения графика $f(t)$ потребовался следующий код

```
1 f_t_1 = square_wave_a(t)
2 f_t_2 = square_wave_b(t)
3 def build_f_t():
4     sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
5             (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
6             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
7             ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
8             ylabel=r'$f(t)$')
9 build_f_t()
```

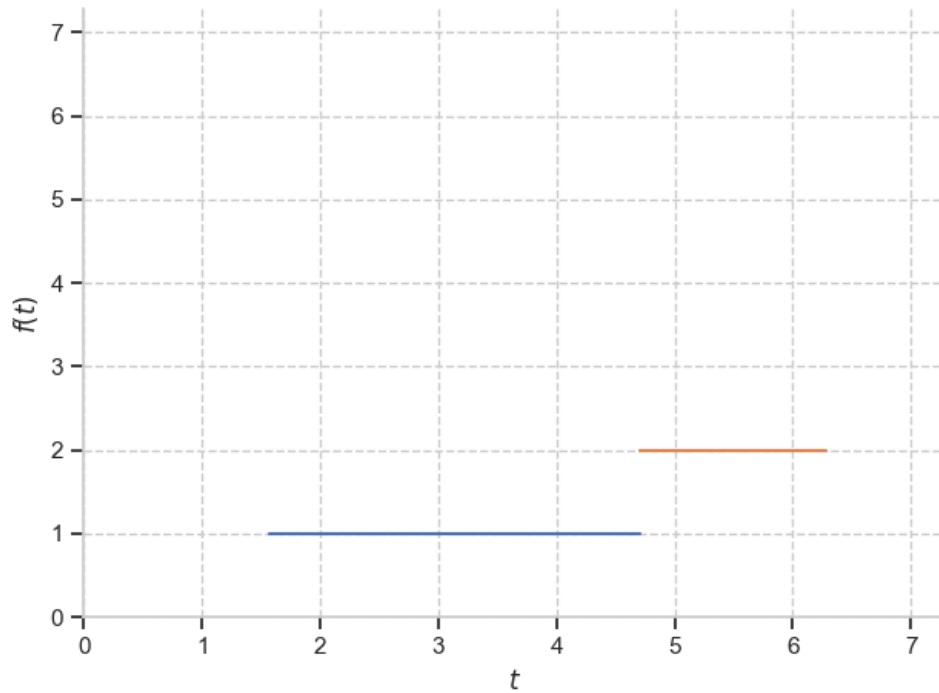


Рис. 1: График $f(t)$ квадратной волны

Теперь найдем коэффициенты a_n , a_0 , b_n , c_n и ω_n чтобы рассмотреть частичные суммы рядов Фурье $F_N(t)$ и $G_N(t)$ следующего вида:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \quad G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Формулы a_n , b_n , c_n в общем виде для квадратной волны будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cos(\omega_n t) dt = \frac{2}{1.5\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \cos\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi} t\right) dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi} t\right) dt \right) = \frac{4}{3\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \cos\left(\frac{4}{3} nt\right) dt + \right. \\ &= 2 \int_{1.5\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{4}{3} nt\right) dt \left. \right) = \left[\begin{array}{l} x = 4/3 nt \\ t = 3/4n x \\ dt = 3/4n dx \end{array} \right] = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{3}{4n} \left(\int_{x_1=\frac{4}{3}n \cdot 0.5\pi=\frac{2}{3}\pi n}^{x_2=\frac{4}{3}n \cdot 1.5\pi=2\pi n} \cos(x) dx + 2 \int_{x_3=\frac{4}{3}n \cdot 1.5\pi=2\pi n}^{x_4=\frac{4}{3}n \cdot 2\pi=\frac{8}{3}\pi n} \cos(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\sin(x) \Big|_{\frac{2}{3}\pi n}^{2\pi n} + 2 \sin(x) \Big|_{2\pi n}^{\frac{8}{3}\pi n} \right) = \frac{1}{\pi n} \left(-\sin(2\pi n) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2 \sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right) \right) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(\omega_n t) dt = \frac{2}{1.5\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \sin\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi} t\right) dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi} t\right) dt \right) = \frac{4}{3\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \sin\left(\frac{4}{3} nt\right) dt + \right. \\ &+ 2 \int_{1.5\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{4}{3} nt\right) dt \left. \right) = \left[\begin{array}{l} x = 4/3 nt \\ t = 3/4n x \\ dt = 3/4n dx \end{array} \right] = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{3}{4n} \left(\int_{x_1=\frac{4}{3}n \cdot 0.5\pi=\frac{2}{3}\pi n}^{x_2=\frac{4}{3}n \cdot 1.5\pi=2\pi n} \sin(x) dx + 2 \int_{x_3=\frac{4}{3}n \cdot 1.5\pi=2\pi n}^{x_4=\frac{4}{3}n \cdot 2\pi=\frac{8}{3}\pi n} \sin(x) dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi n} \left(\cos(x) \Big|_{\frac{2}{3}\pi n}^{2\pi n} + 2 \cos(x) \Big|_{2\pi n}^{\frac{8}{3}\pi n} \right) = -\frac{1}{\pi n} \left(-\cos(2\pi n) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2 \cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right) \right) \\
c_n &= \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{1.5\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} e^{-i\frac{2\pi n}{1.5\pi} t} dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2e^{-i\frac{2\pi n}{1.5\pi} t} dt \right) = \frac{2}{3\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} e^{-i\frac{4}{3}nt} dt + 2 \int_{1.5\pi}^{2\pi} e^{-i\frac{4}{3}nt} dt \right) = \\
&= \left[x = -\frac{4}{3}int, \quad t = -\frac{3}{4ni}x = \frac{3i}{4n}x, \quad dt = \frac{3i}{4n}dx \right] = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{3i}{4n} \left(\int_{x_1=-\frac{4}{3}in \cdot 0.5\pi = -\frac{2}{3}\pi in}^{x_2=-\frac{4}{3}in \cdot 1.5\pi = -2\pi in} e^x dx + 2 \int_{x_3=x_1=-2\pi in}^{x_4=-\frac{4}{3}in \cdot 2\pi = -\frac{8}{3}\pi in} e^x dx \right) = \\
&= \frac{i}{2\pi n} \left(e^x \Big|_{-\frac{2}{3}\pi in}^{-2\pi in} + 2e^x \Big|_{-2\pi in}^{-\frac{8}{3}\pi in} \right) = \frac{i}{2\pi n} (-e^{-2\pi in} - e^{-\frac{2}{3}\pi in} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi in}) \\
a_0 &= \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) dt = \frac{2}{1.5\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} 1 dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2 dt \right) = \frac{4}{3\pi} \left(t \Big|_{0.5\pi}^{1.5\pi} + 2t \Big|_{1.5\pi}^{2\pi} \right) = \frac{4}{3\pi} (1.5\pi - 0.5\pi + 2(2\pi - 1.5\pi)) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$\begin{aligned}
F_N(t) &= \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi n} \left(\left(-\sin(2\pi n) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2 \sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right) \right) \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\cos(2\pi n) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) - 2 \cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right) \right) \sin\left(\frac{4}{3}nt\right) \right) \\
G_N(t) &= \sum_{n=-N}^N \frac{i}{2\pi n} (-e^{-2\pi in} - e^{-\frac{2}{3}\pi in} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi in}) e^{\frac{4i}{3}nt}
\end{aligned}$$

Теперь вычислим значения коэффициентов при $n = 0, 1, 2$. Значение $a_0 = 8/3$ было вычислено выше. Получим:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi} \left(-\sin(2\pi) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 2 \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.28 \\
a_2 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\sin(4\pi) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 2 \sin\left(\frac{16}{3}\pi\right) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx -0.14 \\
b_0 &= 0, \text{ так как при } n = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi \cdot 0}{1.5\pi} = 0 \Rightarrow \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \sin(0) dt = 0 \\
b_1 &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(2\pi) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - 2 \cos\left(\frac{8}{3}\pi\right) \right) = \frac{3}{2\pi} \approx 0.48 \\
b_2 &= \frac{1}{2\pi} \left(\cos(4\pi) + \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - 2 \cos\left(\frac{16}{3}\pi\right) \right) = \frac{3}{4\pi} \approx 0.24 \\
c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3} \approx 1.33, \text{ так как при } n = 0 \Rightarrow \omega_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) e^0 dt = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) dt, \\
&\text{что отличается от } a_0 \text{ коэффициентом } \frac{1}{T} \text{ вместо } \frac{2}{T} \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2} \\
c_1 &= \frac{i}{2\pi} (-e^{-2\pi i} - e^{-\frac{2}{3}\pi i} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi i}) \approx 0.14 - 0.24i \\
c_2 &= \frac{i}{4\pi} (-e^{-4\pi i} - e^{-\frac{4}{3}\pi i} + 2e^{-\frac{16}{3}\pi i}) \approx -0.07 - 0.12i
\end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье при произвольно заданном значении N я написал следующий код:

```

1 import sympy as sp
2
3 t = sp.Symbol('t')
4
5 def calc_coeff(complex: bool, gap_len):
6     if complex:
7         return 1 / gap_len
8     return 2 / gap_len
9
10 def calc_omega_n(n, gap_len):
11     return 2 * sp.pi * n / gap_len
12
13 def calc_a_n(n, start, end, gap_len, f):
14     integrand = f(t)
15     if n != 0:
16         omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
17         integrand *= sp.cos(omega_n * t)
18
19     result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))
20
21     coeff = calc_coeff(False, gap_len)
22     return coeff * result
23
24 def calc_b_n(n, start, end, gap_len, f):
25     if (n == 0):
26         return 0
27
28     omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
29     integrand = f(t) * sp.sin(omega_n * t)
30
31     result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))
32
33     coeff = calc_coeff(False, gap_len)
34     return coeff * result
35
36 def calc_c_n(n, start, end, gap_len, f):
37     omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
38     integrand = f(t) * sp.exp(-1j * omega_n * t)
39
40     result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))
41
42     coeff = calc_coeff(True, gap_len)
43     return coeff * result

```

Пример использования кода:

```

1 funcs = [square_wave_a, square_wave_b]
2 def find_a_b_c(N):
3     a_N = sum(calc_a_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
4               for i, gap in enumerate(gaps))
5     b_N = sum(calc_b_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
6               for i, gap in enumerate(gaps))
7     c_N = sum(calc_c_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
8               for i, gap in enumerate(gaps))
9
10    print(f'a_{N}={a_N}\n')
11    print(f'b_{N}={b_N}\n')
12    print(f'c_{N}={c_N}\n')
13 find_a_b_c(N)

```

Найдем с помощью него коэффициенты при $N=3$. Для наглядности были добавлены вычисления для $N=0, 1, 2$. Результат выполнения кода:

```

1 a_0=2.666666666666667    b_0=0    c_0=1.333333333333333
2 a_1=0.275664447710896    b_1=0.477464829275686    c_1=0.137832223855448 - 0.238732414637843*I
3 a_2=-0.137832223855448    b_2=0.238732414637843    c_2=-0.0689161119277239 - 0.119366207318922*I
4 a_3=0    b_3=0    c_3=-0.e-261 + 0.e-255*I

```

Теперь построим графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при различных значениях N . Ряд Фурье построен зеленым цветом поверх заданной функции $f(t)$

Для построения графика $F_N(t)$ при разных значениях функции на разных интервалах я написал следующий код:

```

1 def calc_F_N_generic(N, gaps: list, functions: list):
2     if (len(gaps) != len(functions)
3         or len(gaps) <= 0
4         or len(functions) <= 0):
5         return None
6
7     gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
8
9     a_0 = sum(calc_a_n(0, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
10              for i, gap in enumerate(gaps))
11
12     F_N = a_0 / 2
13     for n in range(1, N + 1):
14         a_n = sum(calc_a_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
15                  for i, gap in enumerate(gaps))
16         b_n = sum(calc_b_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
17                  for i, gap in enumerate(gaps))
18
19         omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
20         F_N += a_n * sp.cos(omega_n * t) + b_n * sp.sin(omega_n * t)
21
22     return F_N

```

Для $G_N(t)$:

```

1 def calc_G_N_generic(N, gaps: list, functions: list):
2     if (len(gaps) != len(functions)
3         or len(gaps) <= 0
4         or len(functions) <= 0):
5         return None
6
7     G_N = 0
8     gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
9     for n in range(-N, N + 1):
10         c_n = sum(calc_c_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
11                  for i, gap in enumerate(gaps))
12
13         omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
14         G_N += c_n * sp.exp(1j * omega_n * t)
15
16     return G_N

```

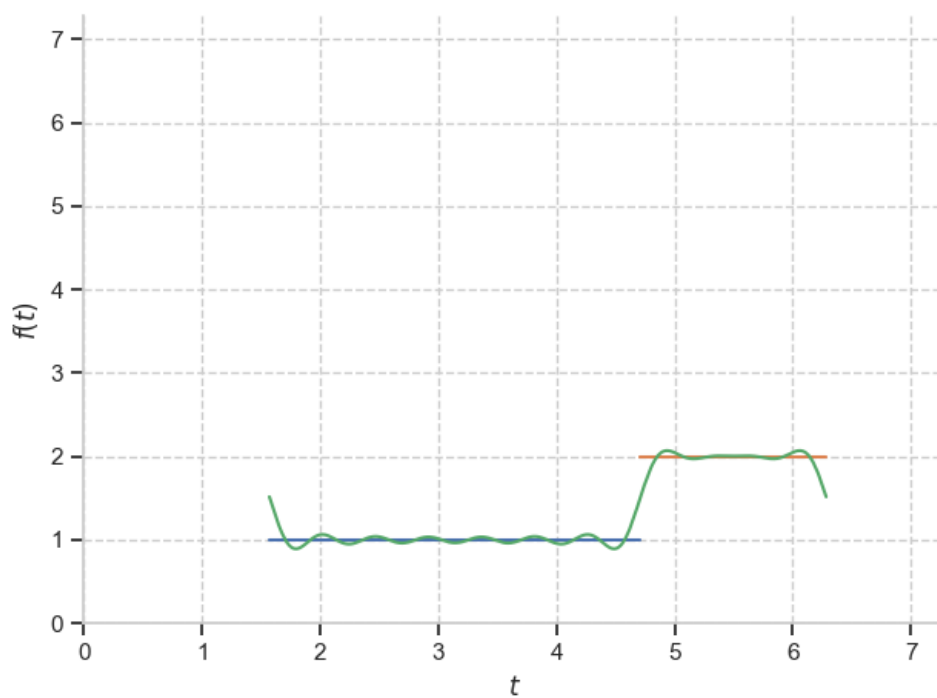
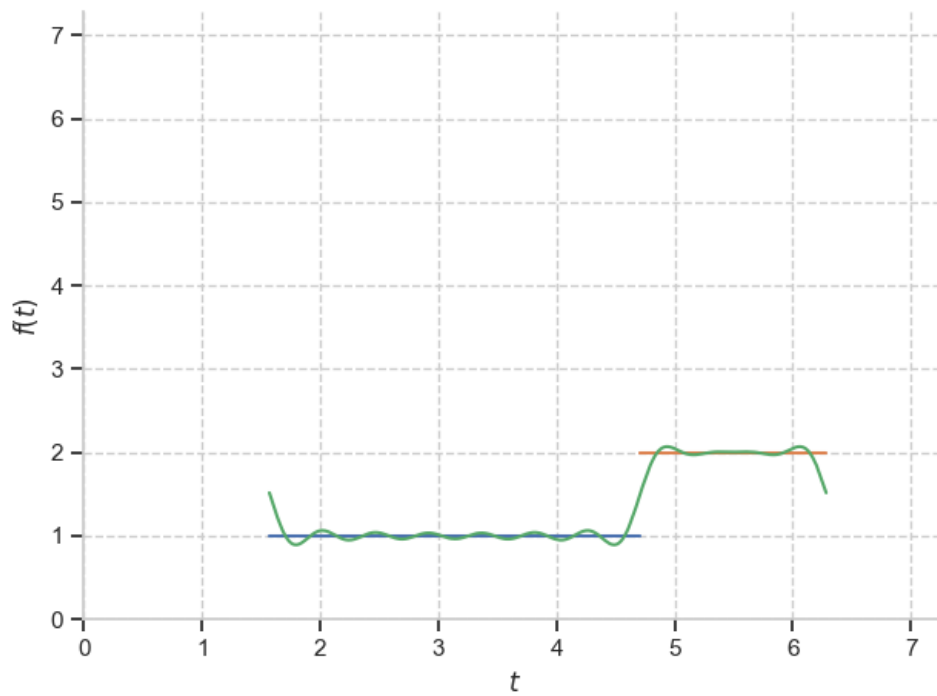
Пример использования кода:

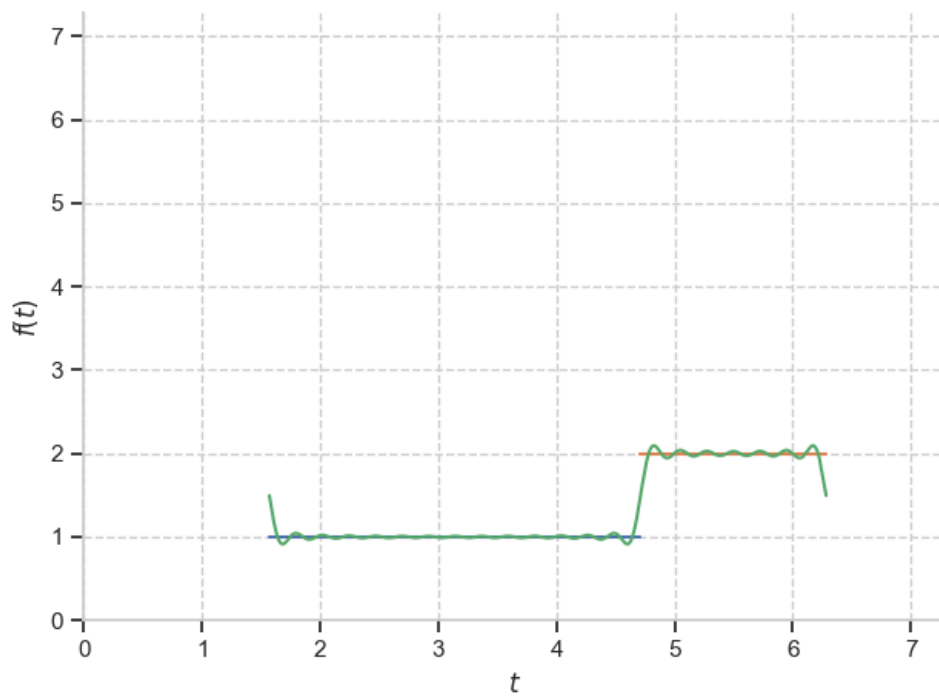
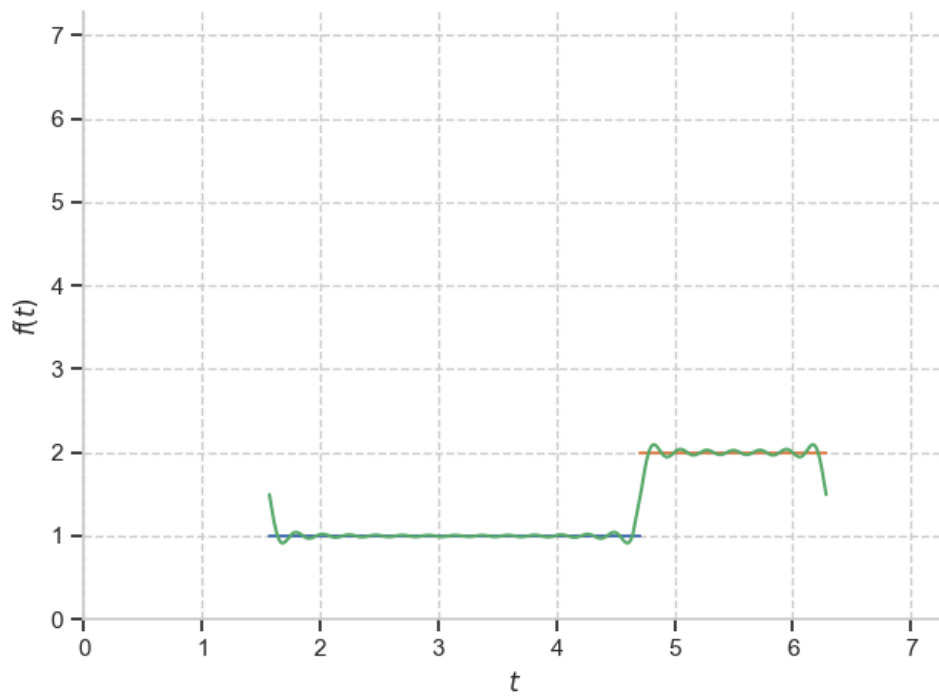
```

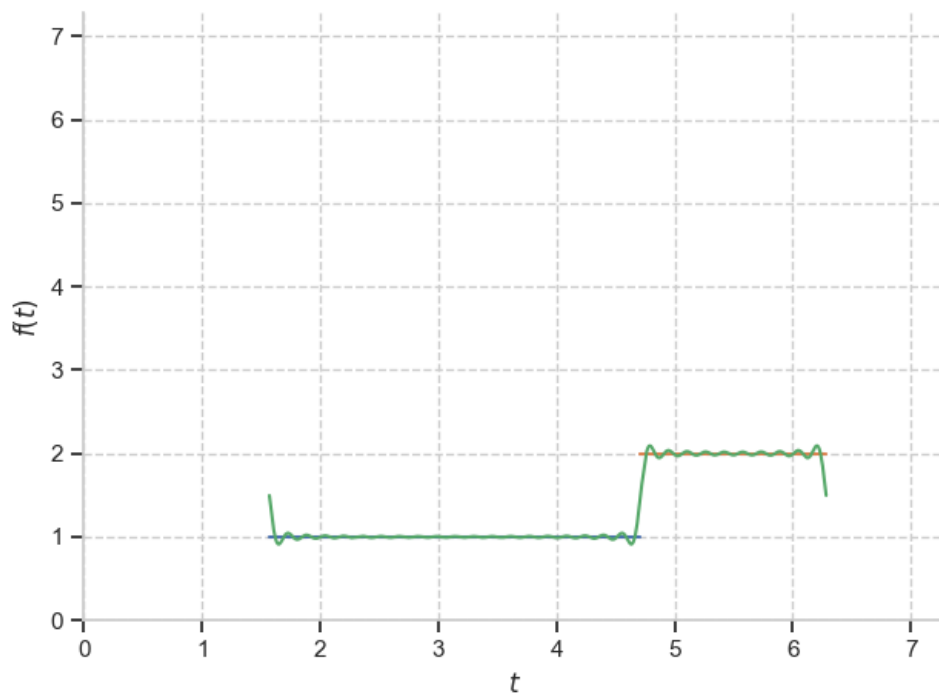
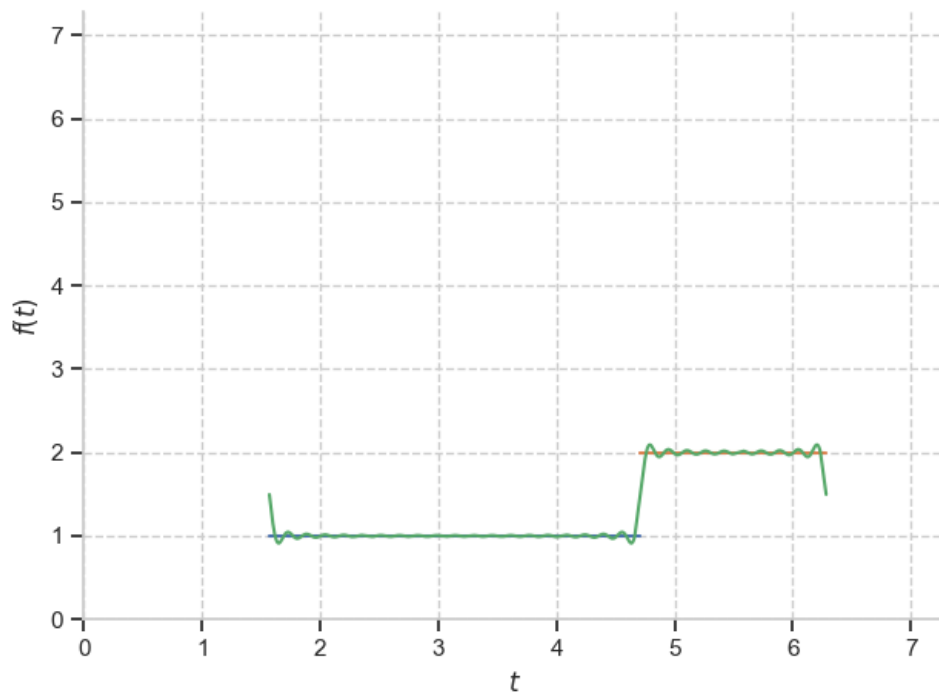
1 def build_F_N__f_t(N):
2     F_N = calc_F_N_generic(N, gaps, funcs)
3     sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
4             (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
5             (F_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
6             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
7             ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
8             ylabel=r'$f(t)$')
9
10 def build_G_N__f_t(N):
11     G_N = calc_G_N_generic(N, gaps, funcs)
12     sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
13             (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
14             (G_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
15             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
16             ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
17             ylabel=r'$f(t)$')
18 build_F_N__f_t(N_1)
19 build_F_N__f_t(N_2)
20 build_F_N__f_t(N_3)
21 build_F_N__f_t(N_4)
22 build_F_N__f_t(N_5)
23 build_G_N__f_t(N_1)
24 build_G_N__f_t(N_2)
25 build_G_N__f_t(N_3)
26 build_G_N__f_t(N_4)
27 build_G_N__f_t(N_5)

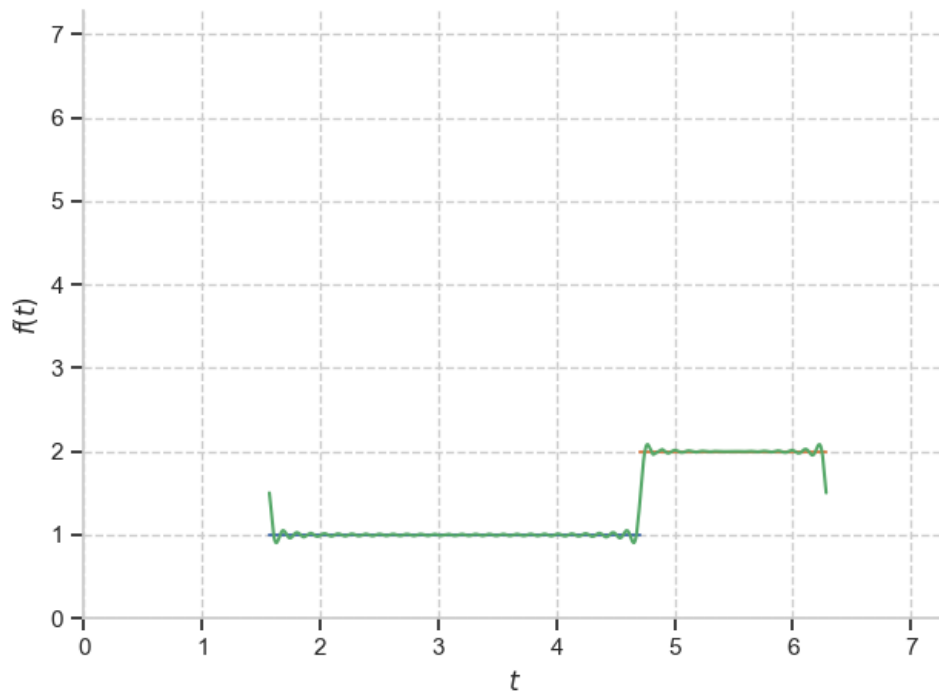
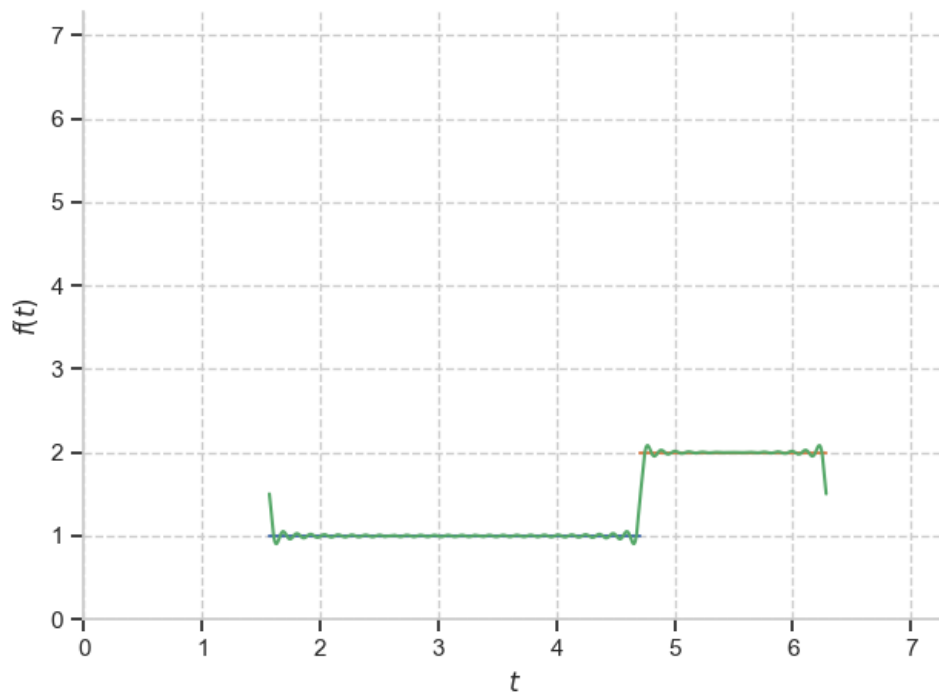
```

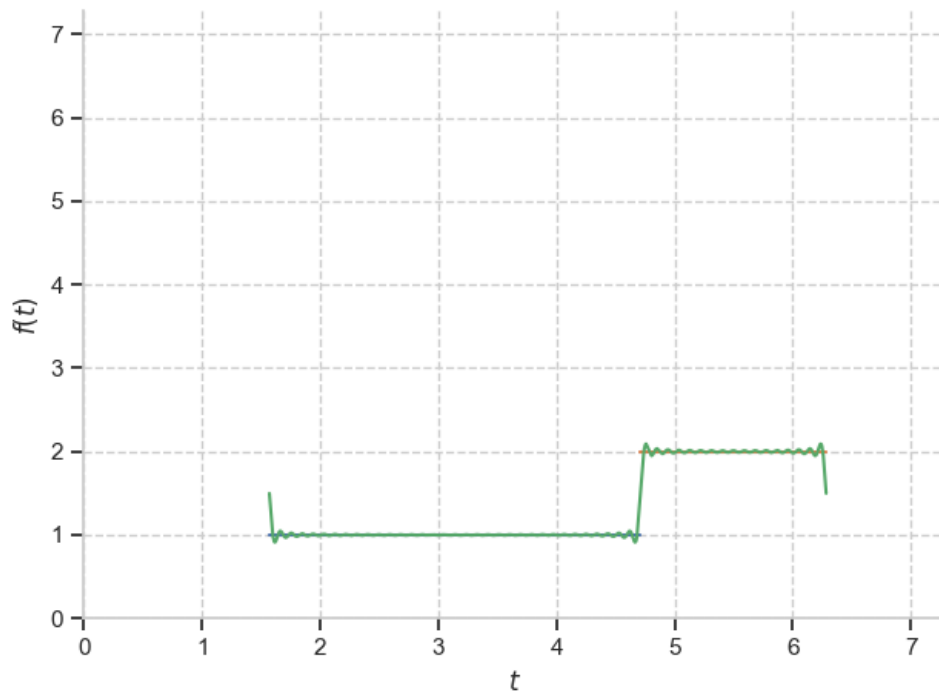
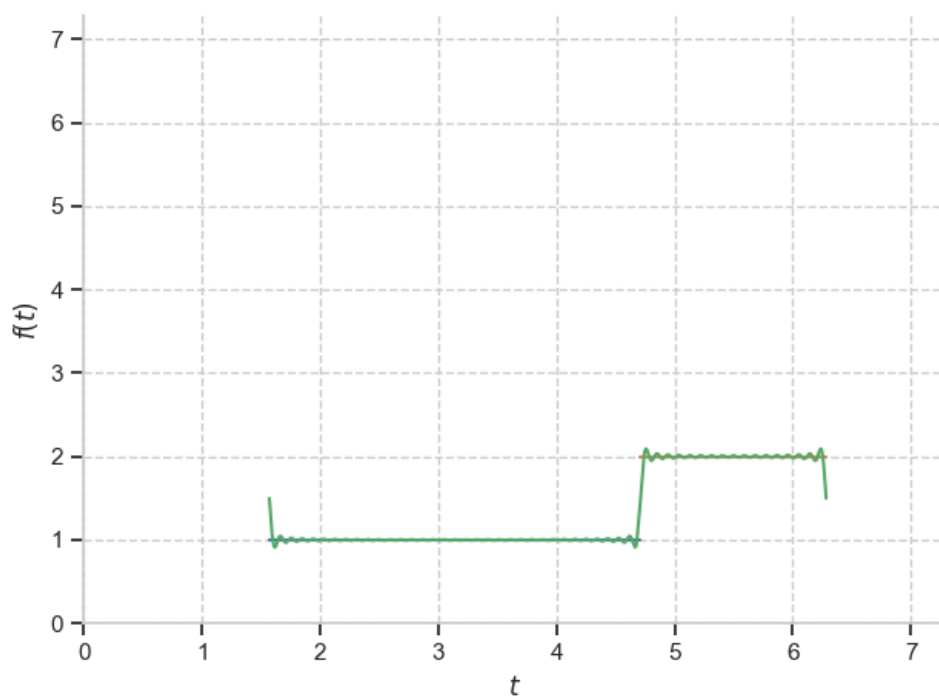
Далее приведены графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N=10, 20, 30, 40, 50$

Рис. 2: График $F_N(t)$ квадратной волны при $N=10$ Рис. 3: График $G_N(t)$ квадратной волны при $N=10$

Рис. 4: График $F_N(t)$ квадратной волны при $N=20$ Рис. 5: График $G_N(t)$ квадратной волны при $N=20$

Рис. 6: График $F_N(t)$ квадратной волны при $N=30$ Рис. 7: График $G_N(t)$ квадратной волны при $N=30$

Рис. 8: График $F_N(t)$ квадратной волны при $N=40$ Рис. 9: График $G_N(t)$ квадратной волны при $N=40$

Рис. 10: График $F_N(t)$ квадратной волны при $N=50$ Рис. 11: График $G_N(t)$ квадратной волны при $N=50$

Как можно заметить, чем больше значение N , тем точнее ряд Фурье повторяет изначально заданную функцию $f(t)$. Уже при $N=50$ функцию $f(t)$ почти не видно за функцией $F_N(t)$ или $G_N(t)$. За простоту написания $G_N(t)$ мы платим сложностью алгоритма – в $G_N(t)$ два раза больше итераций, чем в $F_N(t)$. Так как обе функции описывают одну и ту же $f(t)$, то результат на графиках будет одинаковым

Равенство Парсеваля выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_a^b |f(t)|^2 dt,$$

где $|c_n|^2 = (\operatorname{Re} c_n)^2 + (\operatorname{Im} c_n)^2$, $|f(t)|^2 = f^*(t)f(t)$

Для проверки равенства Парсеваля я написал следующий код:

```

1 def calc_parseval_coeffs_generic(N, gaps: list, functions: list):
2     if (len(gaps) != len(functions)
3         or len(gaps) <= 0
4         or len(functions) <= 0):
5         return None
6
7     coeffs = 0
8     gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
9     for n in range(-N, N + 1):
10         c_n = sum(calc_c_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
11                   for i, gap in enumerate(gaps))
12
13         coeffs += sp.re(c_n) ** 2 + sp.im(c_n) ** 2
14
15     return coeffs
16
17 def calc_parseval_square_func_generic(gaps: list, functions: list):
18     result = 0
19     for i in range(len(gaps)):
20         integrand = functions[i] * sp.conjugate(functions[i])
21         result += sp.integrate(integrand, (t, gaps[i][0], gaps[i][1]))
22
23     gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
24     return (1 / gap_len) * result

```

Пример использования кода:

```

1 f_t_1 = square_wave_a(t)
2 f_t_2 = square_wave_b(t)
3 funcs = [square_wave_a, square_wave_b]
4 funcs_t = [f_t_1, f_t_2]
5 def find_parseval(N):
6     coeffs_sum = calc_parseval_coeffs_generic(N, gaps, funcs)
7     sqf_res = calc_parseval_square_func_generic(gaps, funcs_t)
8
9     print(f'coeffs_sum={coeffs_sum.evalf()}')
10    print(f'sqf_res={sqf_res.evalf()}')
11    return find_parseval(N)

```

Результат проверки для N=10:

```
1 coeffs_sum=1.99032933097543      sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=25:

```
1 coeffs_sum=1.99602510318456      sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=50:

```
1 coeffs_sum=1.99801369165273      sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=100:

```
1 coeffs_sum=1.99899180407561      sqf_res=2.00000000000000
```

Как видим, сумма коэффициентов с увеличением N приближается к вычисленному значению интеграла квадрата функции $f(t)$. Равенство Парсеваля не выполняется в чистом виде, так как коэффициентов бесконечно много, а мы взяли лишь малую их часть. То есть мы наблюдаем стремление к равенству Парсеваля, а выполнение равенства Парсеваля было бы при равенстве нулю всех коэффициентов кроме одного

1.2 Чётная периодическая функция

Зададим следующую чётную периодическую функцию:

$$f(t) = \cos(t)$$

Для построения графика $f(t)$ будем использовать следующий код:

```
1 f_t = even_periodic_func(t)
2
3 def build_f_t():
4     sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
5             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
6             ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
```

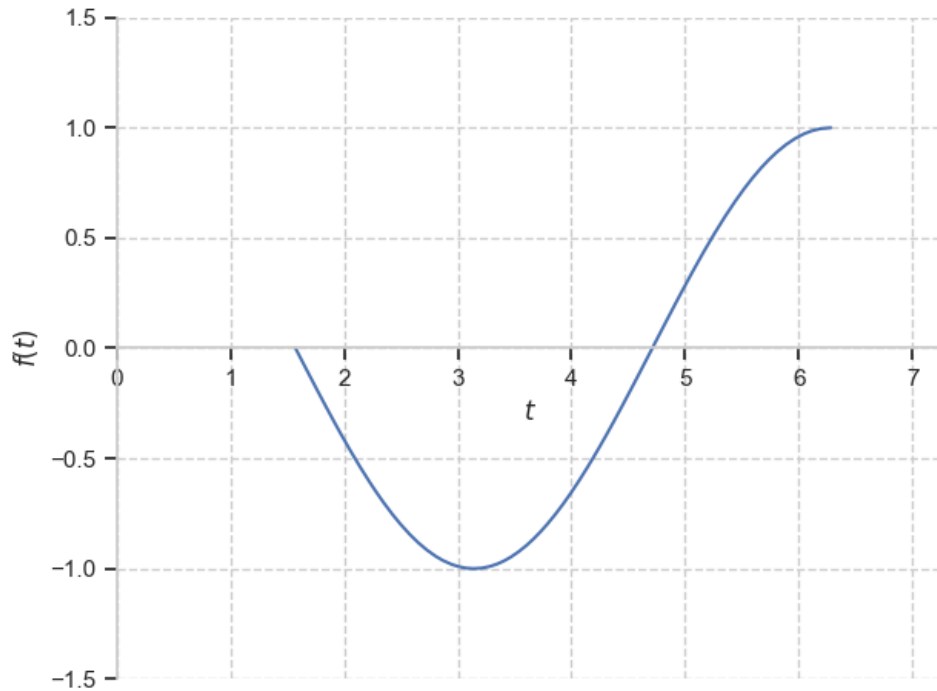


Рис. 12: График $f(t)$ чётной периодической функции

Формулы для вычисления коэффициентов a_n , a_0 , b_n , c_n будут иметь вид:

$$a_n = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t) \cdot \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t) \cdot \sin\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + (4n+3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$c_n = \frac{2}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t) \cdot e^{-\frac{4i}{3}nt} dt = \frac{2}{\pi(16n^2-9)} \left(4n \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + i \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) + 3 \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t) dt = \frac{4}{3\pi} \sin(t) \Big|_{0.5\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$F_N(t) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)} \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) +$$

$$+ \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) + (4n+3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)} \sin\left(\frac{4}{3}nt\right)$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{2e^{\frac{4i}{3}nt}}{\pi(16n^2-9)} \left(4n \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + i \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) + 3 \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)$$

С помощью приведенного ранее кода найдем значения коэффициентов при N=3:

```
1 a_3=0.0282942121052258
2 b_3=-0.113176848420903
3 c_3=0.0141471060526129 + 0.0565884242104517*I
```

Построим графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$. Для случая с одной функцией и одним интервалом я написал упрощенную версию кода. Для $F_N(t)$ имеем:

```
1 def calc_F_N(N, start, end, f):
2     gap_len = end - start
3
4     a_0 = calc_a_n(0, start, end, gap_len, f)
5
6     F_N = a_0 / 2
7     for n in range(1, N + 1):
8         a_n = calc_a_n(n, start, end, gap_len, f)
9         b_n = calc_b_n(n, start, end, gap_len, f)
10
11         omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
12         F_N += a_n * sp.cos(omega_n * t) + b_n * sp.sin(omega_n * t)
13
14     return F_N
```

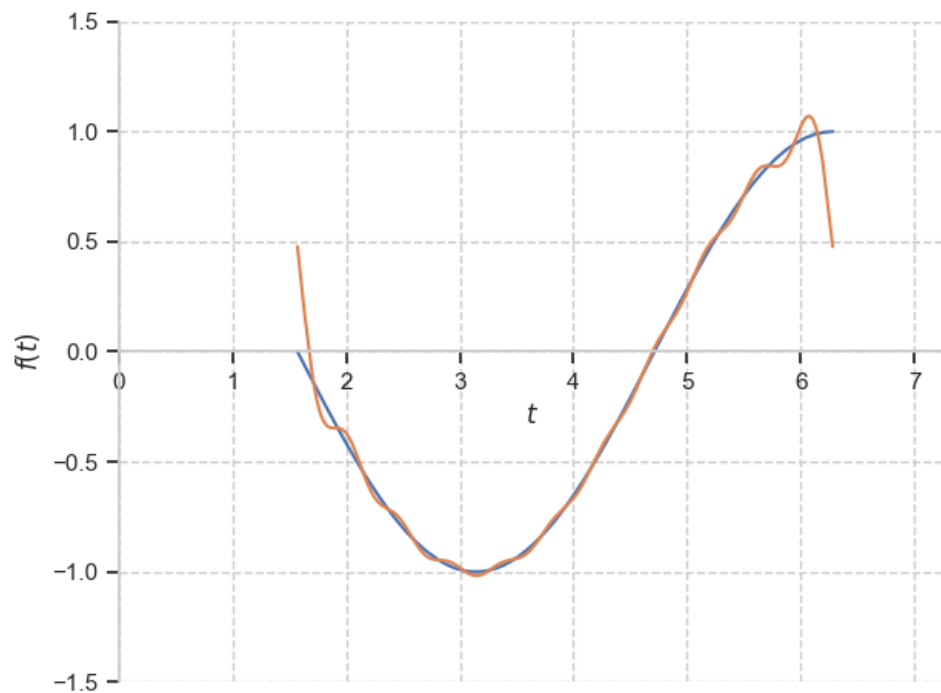
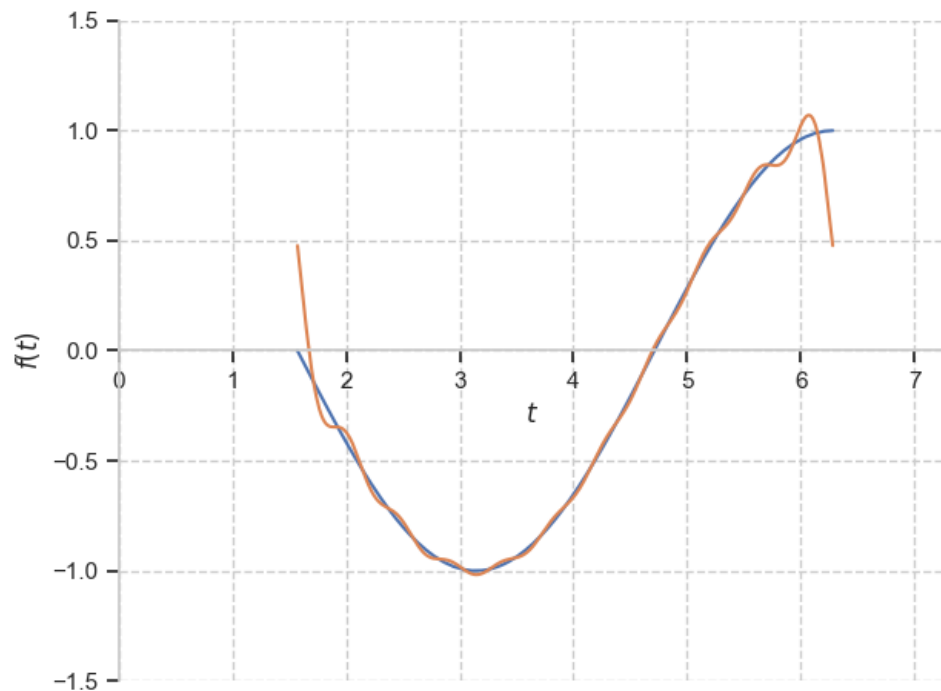
Для G_N :

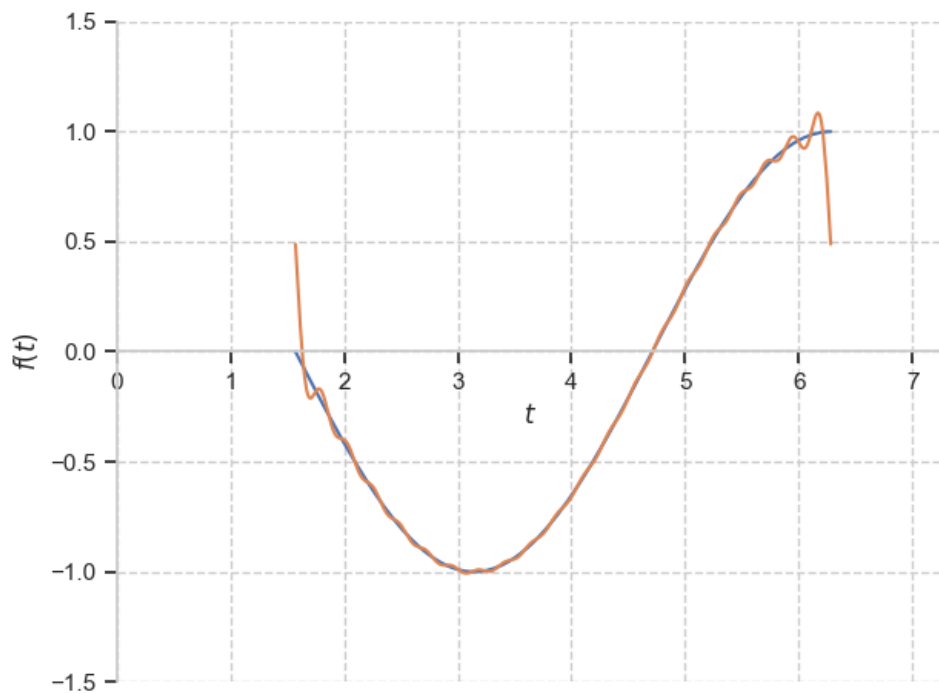
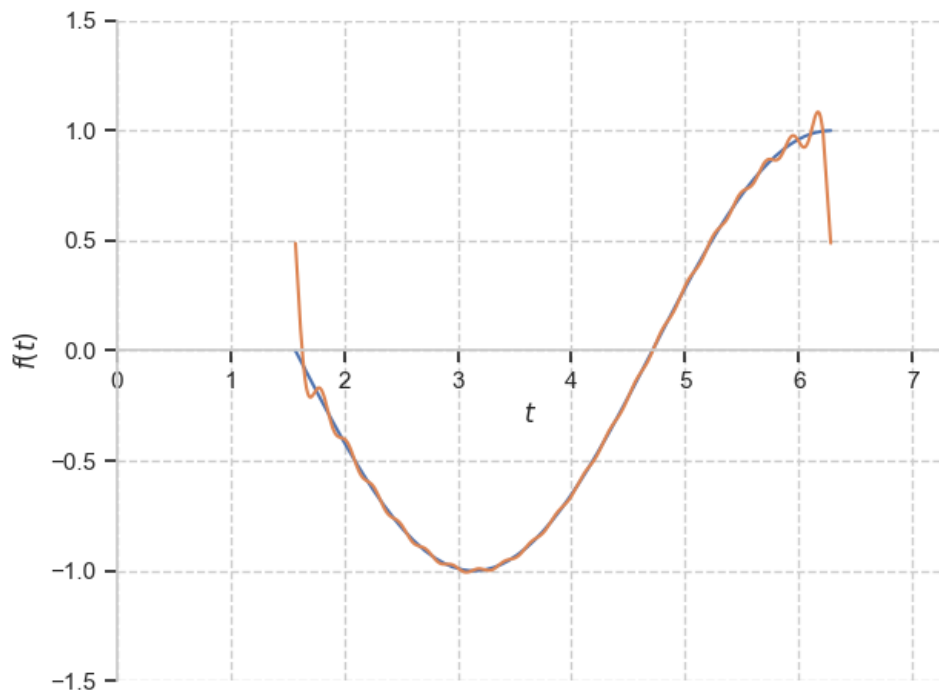
```
1 def calc_G_N(N, start, end, f):
2     G_N = 0
3     gap_len = end - start
4     for n in range(-N, N + 1):
5         c_n = calc_c_n(n, start, end, gap_len, f)
6
7         omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
8         G_N += c_n * sp.exp(1j * omega_n * t)
9
10    return G_N
```

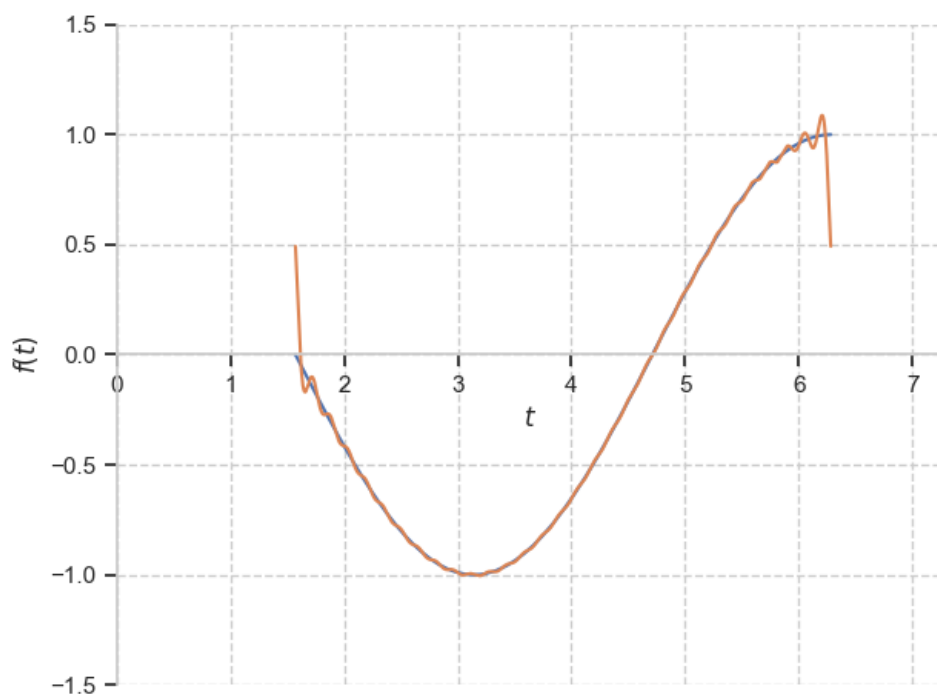
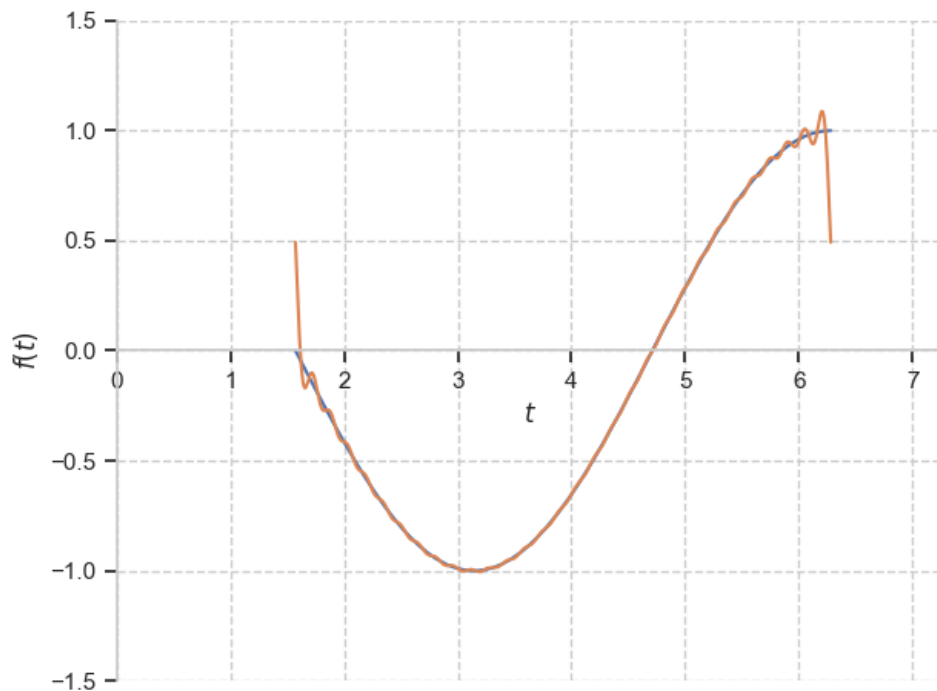
Пример использования кода:

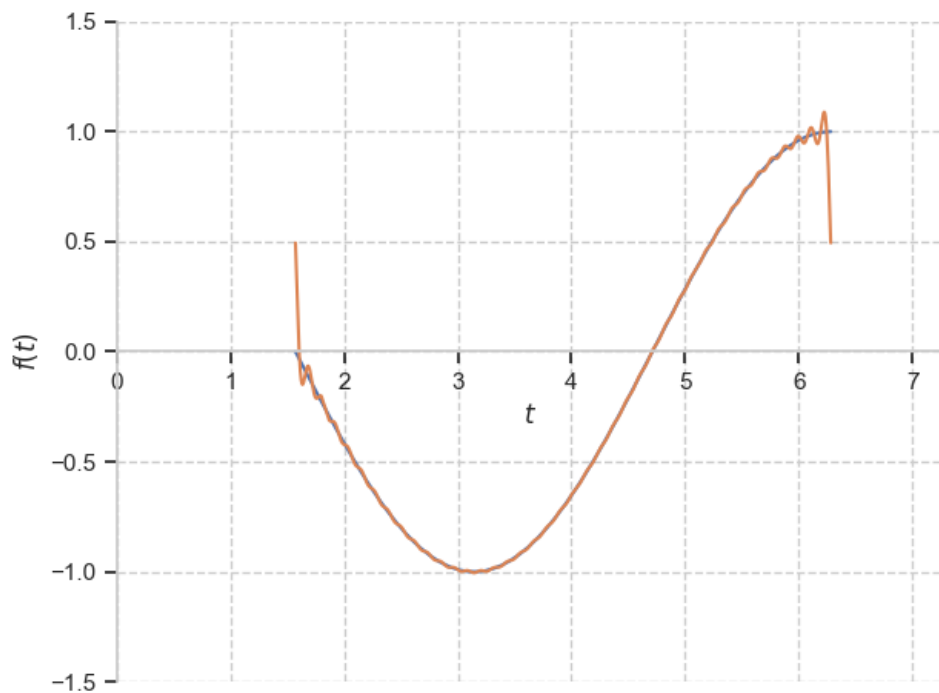
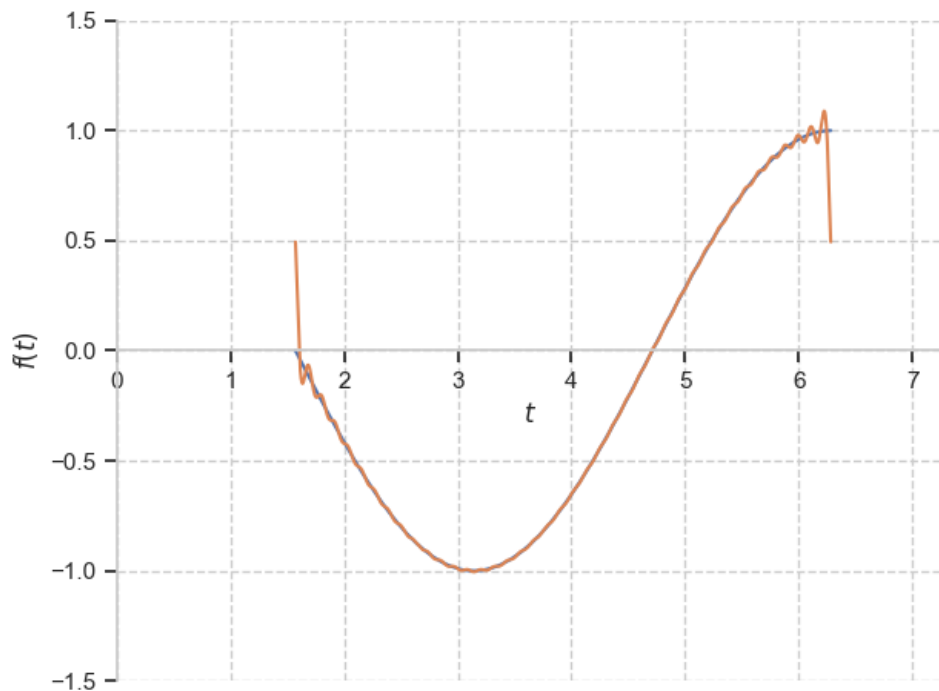
```
1 def build_F_N__f_t(N):
2     F_N = calc_F_N(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
3     sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
4             (F_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
5             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
6             ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
7
8 def build_G_N__f_t(N):
9     G_N = calc_G_N(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
10    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
11            (G_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
12            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
13            ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
14 build_F_N__f_t(N_1)
15 build_F_N__f_t(N_2)
16 build_F_N__f_t(N_3)
17 build_F_N__f_t(N_4)
18 build_F_N__f_t(N_5)
19 build_G_N__f_t(N_1)
20 build_G_N__f_t(N_2)
21 build_G_N__f_t(N_3)
22 build_G_N__f_t(N_4)
23 build_G_N__f_t(N_5)
```

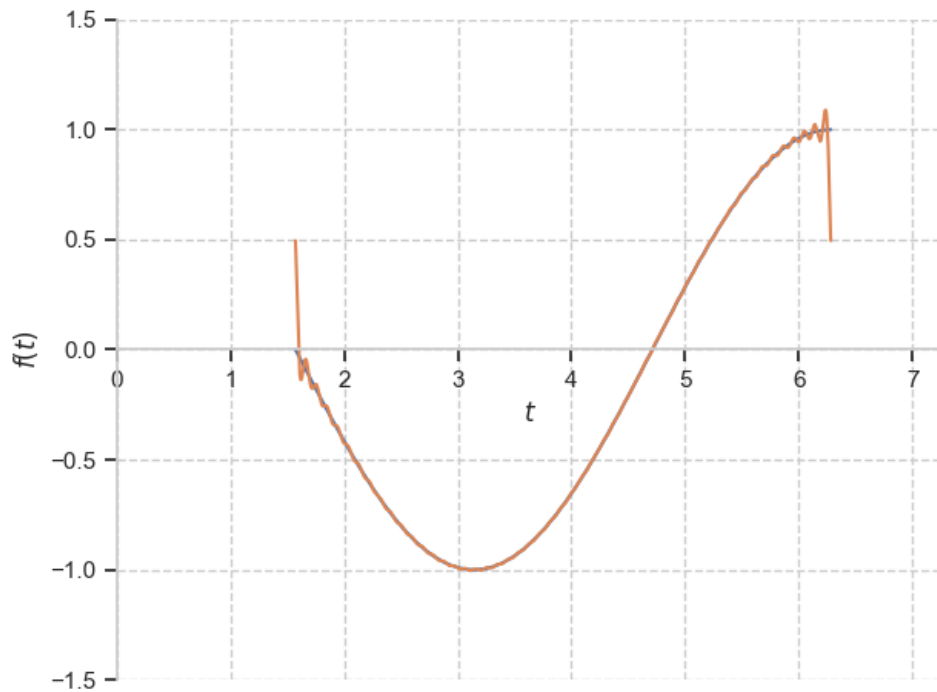
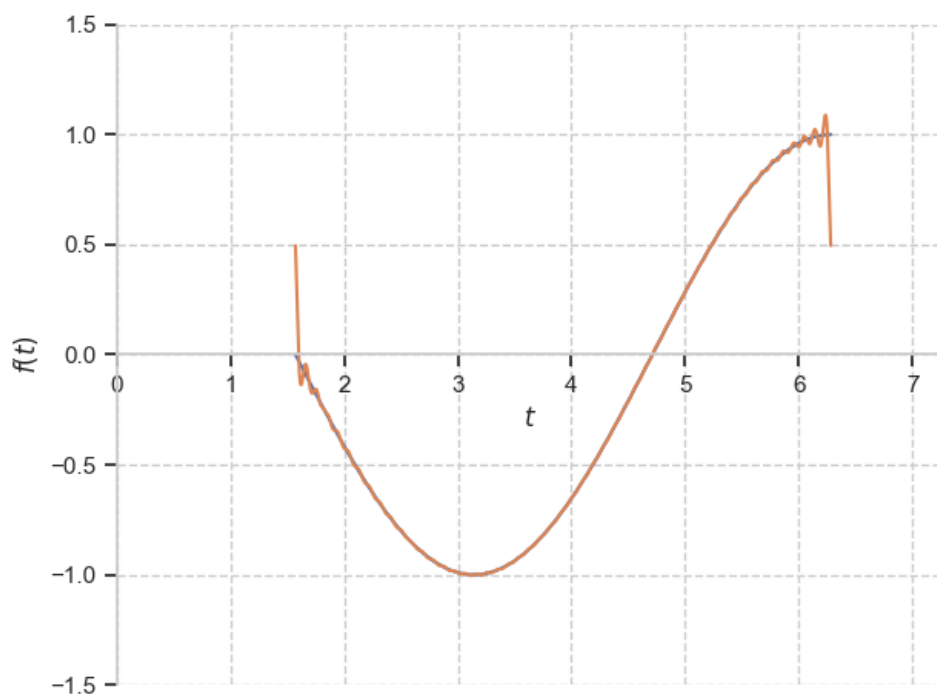
Далее приведены графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ оранжевым цветом поверх функции $f(t)$

Рис. 13: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при $N=10$ Рис. 14: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при $N=10$

Рис. 15: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при $N=20$ Рис. 16: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при $N=20$

Рис. 17: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при $N=30$ Рис. 18: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при $N=30$

Рис. 19: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при $N=40$ Рис. 20: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при $N=40$

Рис. 21: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при $N=50$ Рис. 22: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при $N=50$

Исходя из полученных графиков можно сделать вывод, что приводить и графики $F_N(t)$, и графики $G_N(t)$ в работе избыточно, так как они одинаковы, в чем мы убедились еще тогда, когда строили квадратную волну. Поэтому далее в отчете я буду приводить только графики $F_N(t)$. Тем не менее, графики $G_N(t)$ у меня построены на каждую функцию в пяти экземплярах

Так как функция $f(t)$ чётная, то в частичных суммах ряда Фурье преобладают косинусы, поэтому графики очень похожи. Если рассматривать функцию $f(t)$ с периодом 2π , например на промежутке $[0.5\pi, 2.5\pi]$, то графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ будут совпадать с графиком $f(t)$, так как все b_n занулятся

Для проверки равенства Парсеваля для одной функции на одном интервале я написал упрощенную версию кода:

```

1 def calc_parseval_coeffs(N, start, end, f):
2     coeffs = 0
3     gap_len = end - start
4     for n in range(-N, N + 1):
5         c_n = calc_c_n(n, start, end, gap_len, f)
6
7         coeffs += sp.re(c_n) ** 2 + sp.im(c_n) ** 2
8
9     return coeffs
10 def calc_parseval_square_func(start, end, f):
11     integrand = f * sp.conjugate(f)
12
13     result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))
14
15     gap_len = end - start
16     return (1 / gap_len) * result

```

Пример использования упрощенной версии кода:

```

1 def find_parseval(N):
2     coeffs_sum = calcs.calc_parseval_coeffs(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
3     sqf_res = calcs.calc_parseval_square_func(gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func(t))
4
5     print(f'coeffs_sum={coeffs_sum.evalf()}')
6     print(f'sqf_res={sqf_res.evalf()}')
7 find_parseval(N)

```

Результат выполнения кода для N=10

```
1 coeffs_sum=0.495154186636485      sqf_res=0.5000000000000000
```

Результат выполнения кода для N=25

```
1 coeffs_sum=0.498011845838439      sqf_res=0.5000000000000000
```

Результат выполнения кода для N=50

```
1 coeffs_sum=0.498996631466442      sqf_res=0.5000000000000000
```

Результат выполнения кода для N=100

```
1 coeffs_sum=0.499495890594569      sqf_res=0.5000000000000000
```

Сумма коэффициентов приближается к вычисленному значению интеграла, следовательно наблюдаем стремление к равенству Парсеваля

1.3 Нечётная периодическая функция

Зададим следующую чётную периодическую функцию:

$$f(t) = \sin(t)$$

Для построения графика $f(t)$ будем использовать следующий код:

```

1 f_t = odd_periodic_func(t)
2
3 def build_f_t():
4     sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
5             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
6             ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
```

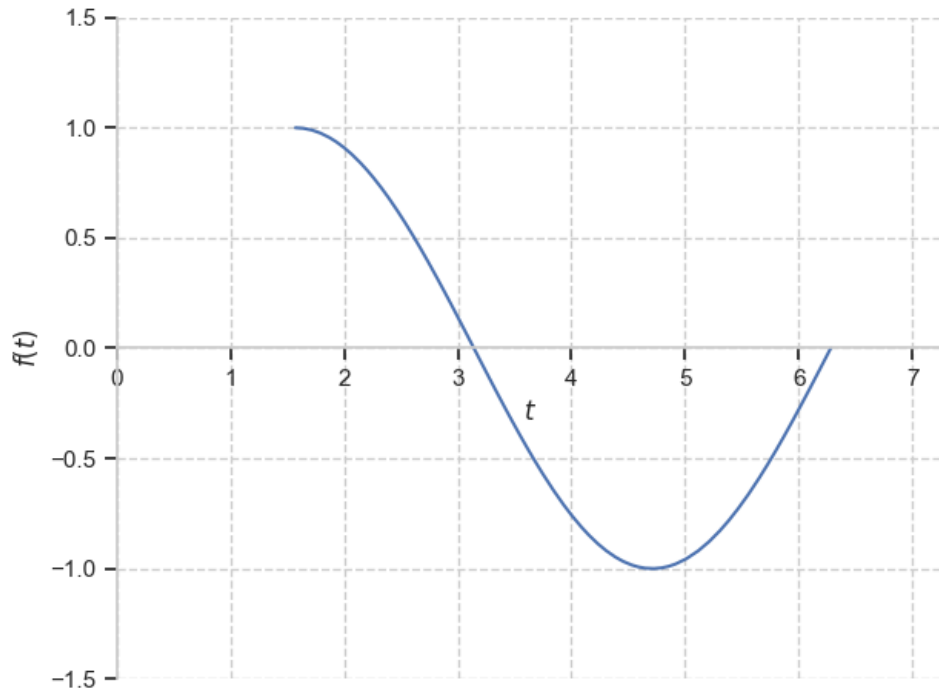


Рис. 23: График $f(t)$ нечётной периодической функции

Формулы для вычисления a_n , a_0 , b_n , c_n будут иметь вид:

$$a_n = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t) \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t) \sin\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = \frac{2 \left((4n-3) \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$c_n = \frac{2}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t) e^{-\frac{4i}{3}nt} dt = -\frac{2}{\pi(16n^2-9)} \left(3 \left(i \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) + 4n \left(i \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t) dt = -\frac{4}{3\pi} \cos(t) \Big|_{0.5\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$F_N(t) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{2 \left((4n-3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)} \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) +$$

$$+ \frac{2 \left((4n-3) \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) - (4n+3) \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)}{\pi(9-16n^2)} \sin\left(\frac{4}{3}nt\right)$$

$$G_N = \sum_{n=-N}^N -\frac{2e^{\frac{4i}{3}nt}}{\pi(16n^2-9)} \left(3 \left(i \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \right) + 4n \left(i \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \right)$$

С помощью написанной ранее программы вычислим значения коэффициентов при N=3

```
1 a_3=0.0282942121052258
2 b_3=0.113176848420903
3 c_3=0.0141471060526129 - 0.0565884242104517*I
```

Построим графики $F_N(t)$, используя упрощенный код для нахождения частичной суммы ряда Фурье. Функция $F_N(t)$ нарисована оранжевым цветом поверх заданной функции $f(t)$

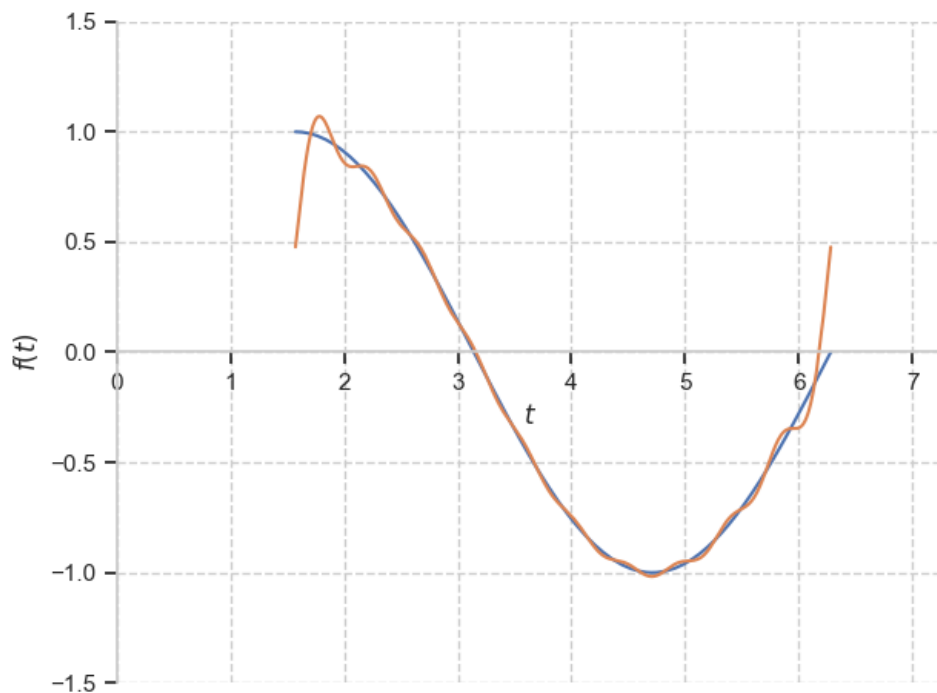


Рис. 24: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=10

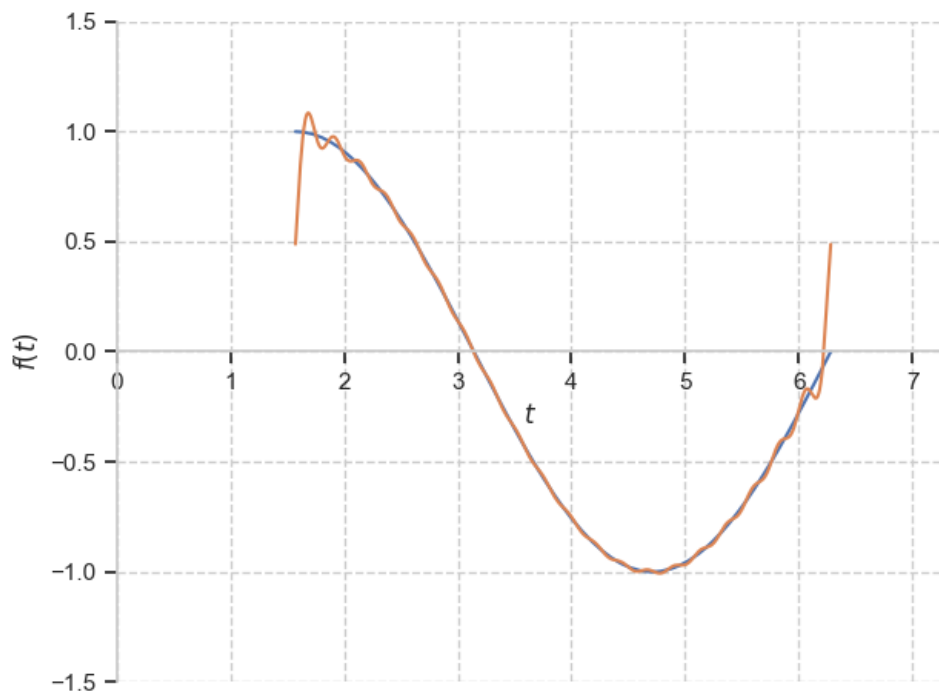


Рис. 25: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при $N=20$

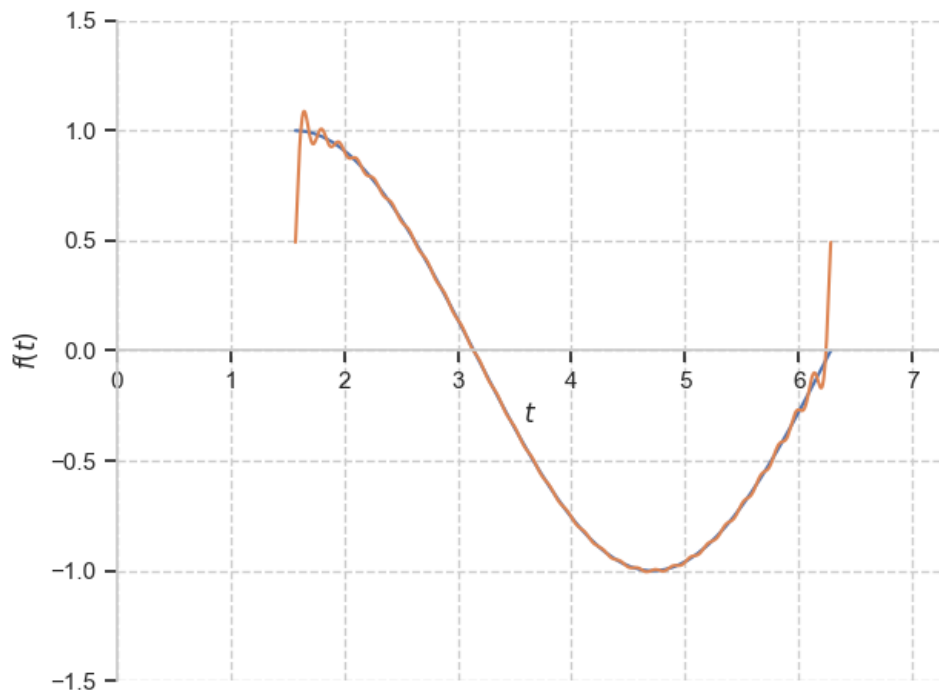
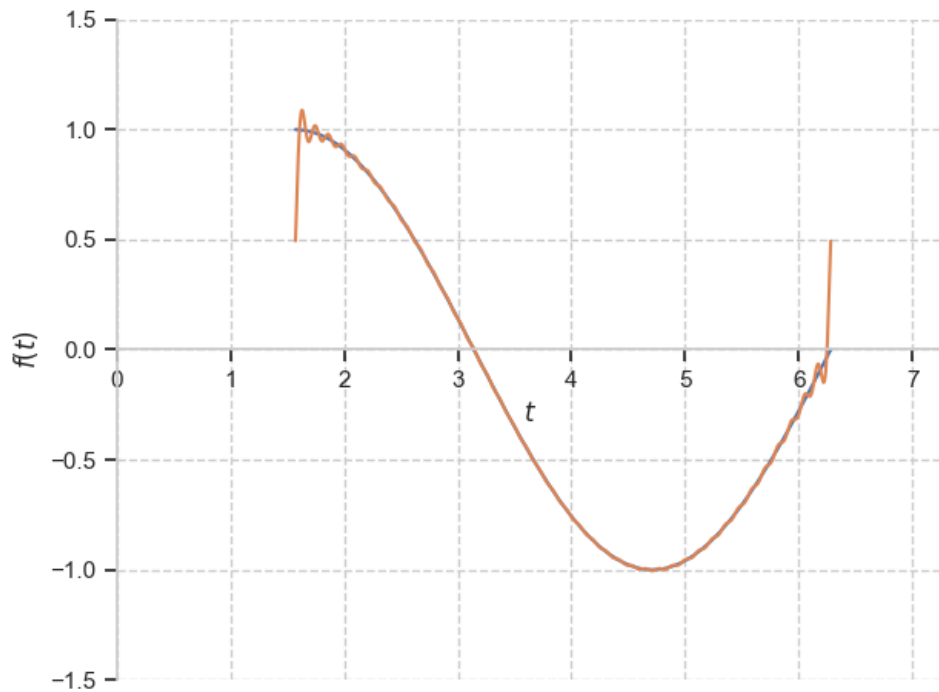
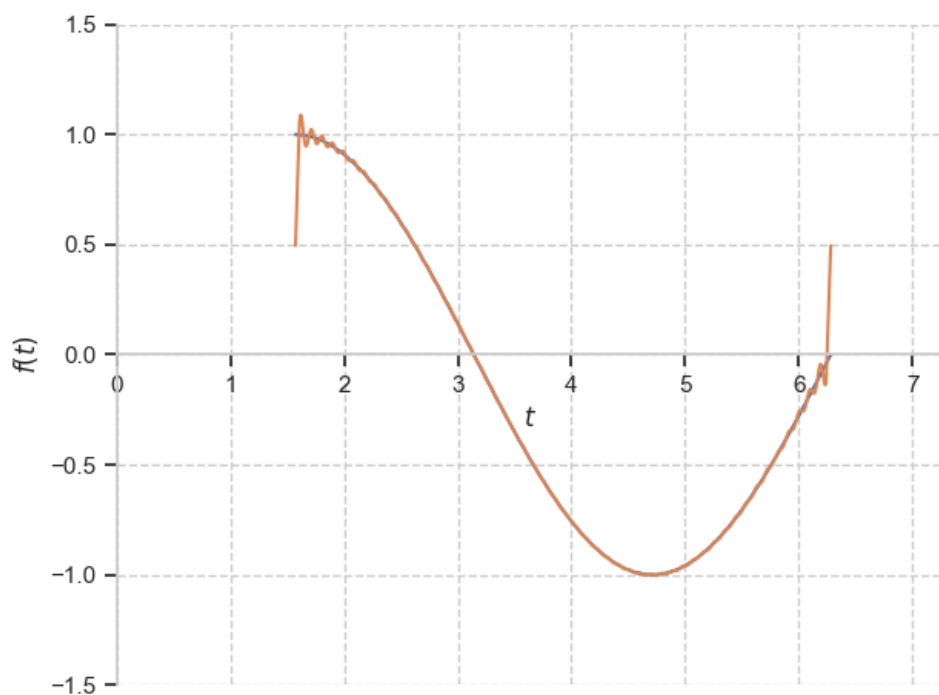


Рис. 26: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при $N=30$

Рис. 27: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при $N=40$ Рис. 28: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при $N=50$

Наблюдаем такой же успех в аппроксимации функции, как и с графиком чётной периодической функции, так как в сумме ряда Фурье преобладают синусы. Если бы период был 2π , то графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ совпадали с $f(t)$, так как все a_n занулились

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля. Результат для N=10:

```
1 coeffs_sum=0.495154186636485      sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=25:

```
1 coeffs_sum=0.498011845838439      sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=50:

```
1 coeffs_sum=0.498996631466442      sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=100:

```
1 coeffs_sum=0.499495890594569      sqf_res=0.500000000000000
```

С увеличением N сумма коэффициентов приближается к результату интеграла, значит существует стремление к равенству Парсеваля

1.4 Ни чётная, ни нечётная периодическая функция

Зададим следующую ни чётную, ни нечётную периодическую функцию:

$$f(t) = \cos(t) + t$$

Используя следующий код построим график функции $f(t)$:

```
1 f_t = not_even_or_odd_periodic_func(t)
2
3 def build_f_t():
4     sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
5             axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
6             ylim=(0, gap_end_val + 2), xlabel=r'$t$',
7             ylabel=r'$f(t)$')
8 build_f_t()
```

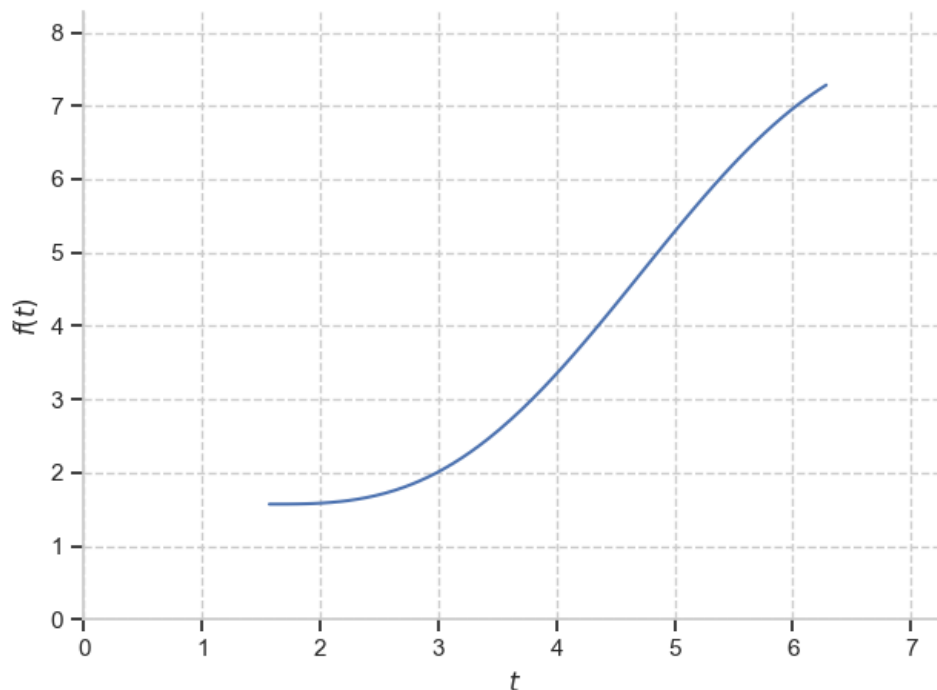


Рис. 29: График $f(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции

Найдем формулы для вычисления коэффициентов a_n , a_0 , b_n , c_n и запишем $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} (\cos(t) + t) \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = \frac{1}{4\pi n^2(16n^2 - 9)} \left((32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \right. \\
&\quad + (24n^2 - 32n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (128\pi n^3 - 72\pi n) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (48n^2 - 27) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) \\
&\quad \left. + (18\pi n - 32\pi n^3) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (27 - 48n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \\
b_n &= \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} (\cos(t) + t) \sin\left(\frac{4}{3}nt\right) dt = -\frac{1}{4\pi n^2(16n^2 - 9)} \left((32n^3 - 24n^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \right. \\
&\quad + (32n^3 - 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (-32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (27 - 48n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (128\pi n^3 - 72\pi n) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \\
&\quad \left. + (48n^2 - 27) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (18\pi n - 32\pi n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \\
c_n &= \frac{2}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} (\cos(t) + t) e^{-\frac{4i}{3}nt} dt = \frac{1}{4\pi n^2(16n^2 - 9)} \left((32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (24in^2 - 32in^3) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \right. \\
&\quad + (32n^3 + 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (-32in^3 - 24in^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (24n^2 - 32n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \\
&\quad + (24in^2 - 32in^3) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32in^3 + 24in^2) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \\
&\quad + (128\pi n^3 + 48in^2 - 72\pi n - 27i) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (-128i\pi n^3 + 48n^2 + 72i\pi n - 27) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \\
&\quad \left. + (-32\pi n^3 - 48in^2 + 18\pi n + 27i) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32i\pi n^3 - 48n^2 - 18i\pi n + 27) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \\
a_0 &= \frac{4}{3\pi} \int_{0.5\pi}^{2\pi} (\cos(t) + t) dt = \frac{4}{3\pi} \left(\int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t) dt + \int_{0.5\pi}^{2\pi} t dt \right) = \frac{4}{3\pi} \left(\sin(t) + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{0.5\pi}^{2\pi} = \frac{15\pi^2 - 8}{6\pi} \\
F_N(t) &= \frac{15\pi^2 - 8}{12\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4\pi n^2(16n^2 - 9)} \left(\left((32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \right. \right. \\
&\quad + (24n^2 - 32n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (128\pi n^3 - 72\pi n) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \\
&\quad + (48n^2 - 27) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (18\pi n - 32\pi n^3) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (27 - 48n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \Big) \cos\left(\frac{4}{3}nt\right) + \\
&\quad - \left((32n^3 - 24n^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (32n^3 - 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \right. \\
&\quad + (-32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (27 - 48n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (128\pi n^3 - 72\pi n) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \\
&\quad \left. + (48n^2 - 27) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (18\pi n - 32\pi n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \Big) \sin\left(\frac{4}{3}nt\right) \Big) \\
G_N &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{4\pi n^2(16n^2 - 9)} \left((32n^3 - 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (24in^2 - 32in^3) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \right. \\
&\quad + (32n^3 + 24n^2) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (-32in^3 - 24in^2) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (24n^2 - 32n^3) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \\
&\quad + (24in^2 - 32in^3) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32n^3 + 24n^2) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32in^3 + 24in^2) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \\
&\quad + (128\pi n^3 + 48in^2 - 72\pi n - 27i) \sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + (-128i\pi n^3 + 48n^2 + 72i\pi n - 27) \cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right) + \\
&\quad \left. + (-32\pi n^3 - 48in^2 + 18\pi n + 27i) \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + (32i\pi n^3 - 48n^2 - 18i\pi n + 27) \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) e^{\frac{4i}{3}nt}
\end{aligned}$$

Вычислим программно значения коэффициентов при $N=3$:

```
1 a_3=0.0282942121052258
2 b_3=-0.613176848420903
3 c_3=0.0141471060526129 + 0.306588424210452*I
```

Построим графики $F_N(t)$ для различных значений N . Примеры использования кода были приведены ранее, здесь также используется упрощенный алгоритм для одной функции на одном интервале. Оранжевым цветом нарисована $F_N(t)$ поверх функции $f(t)$

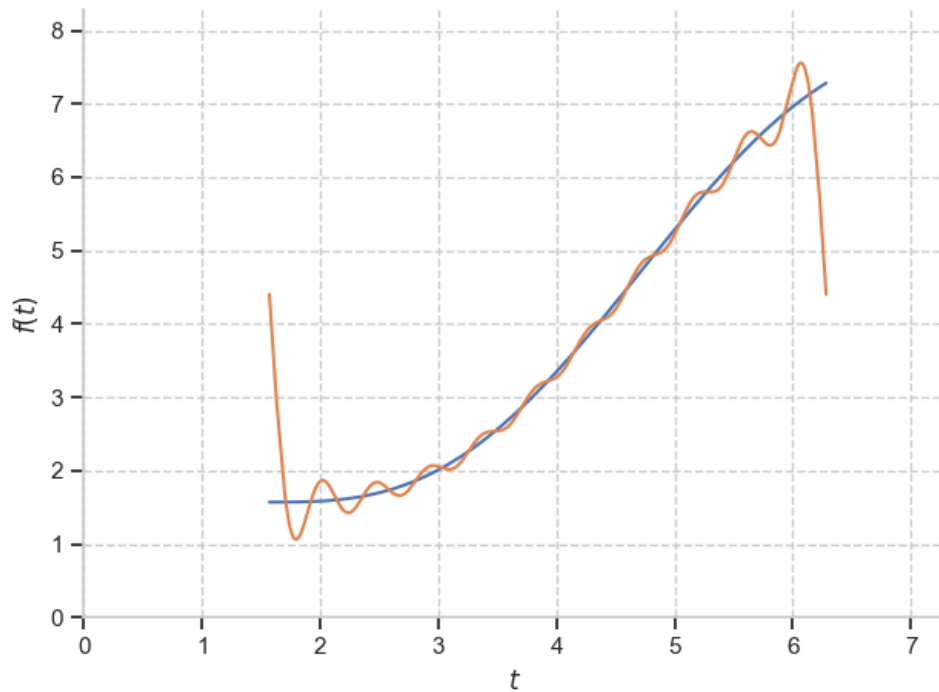


Рис. 30: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при $N=10$

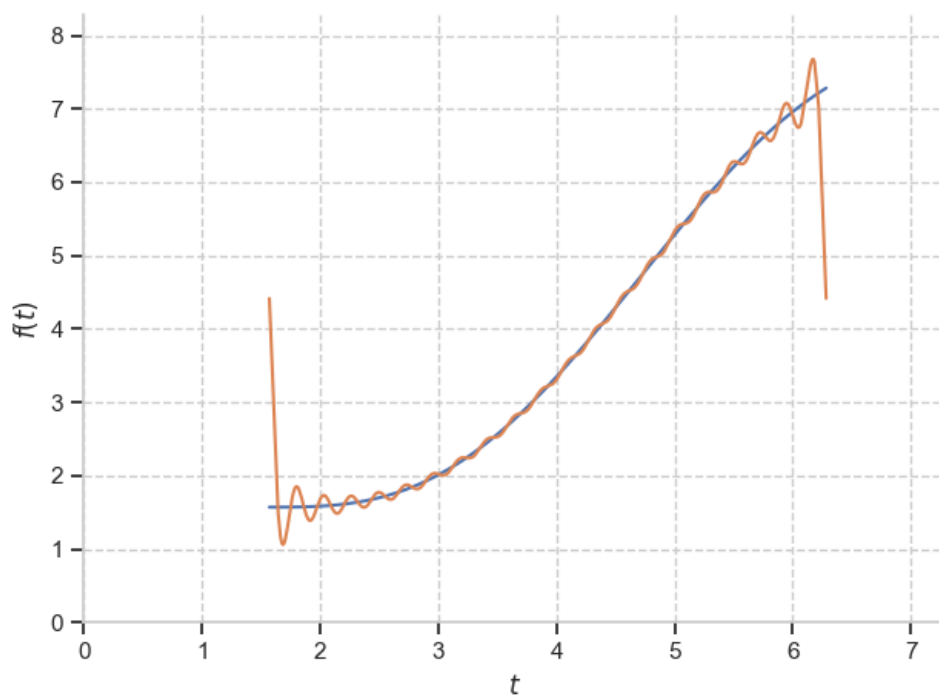


Рис. 31: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при $N=20$

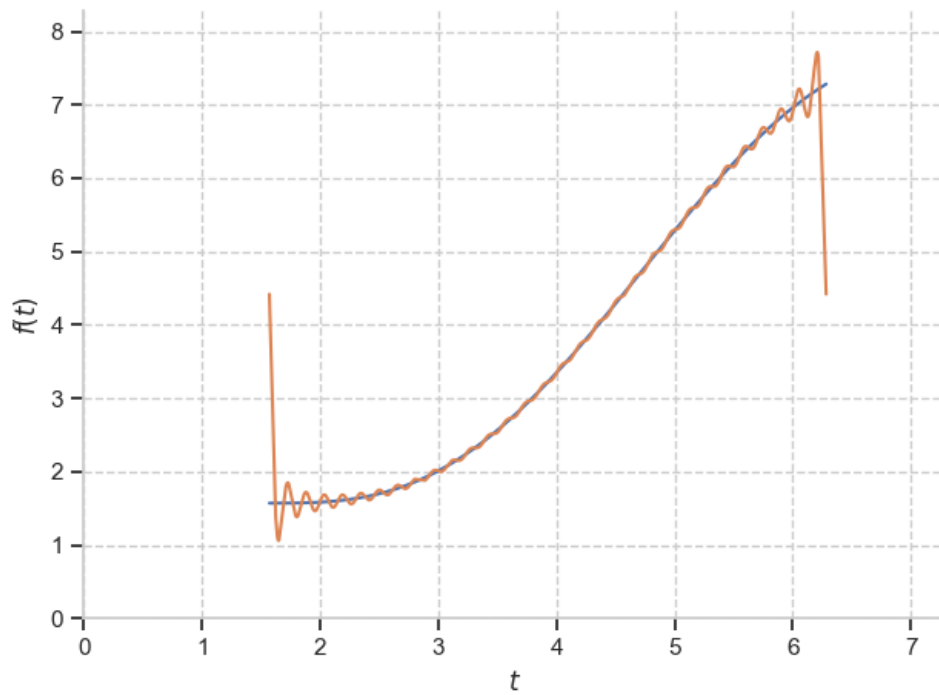


Рис. 32: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при $N=30$

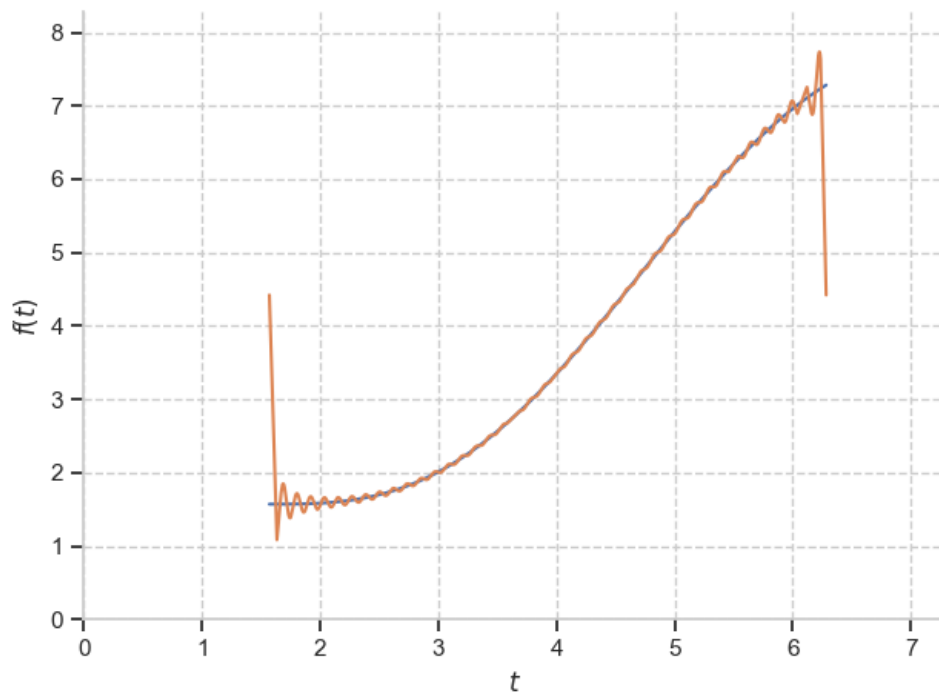


Рис. 33: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при $N=40$

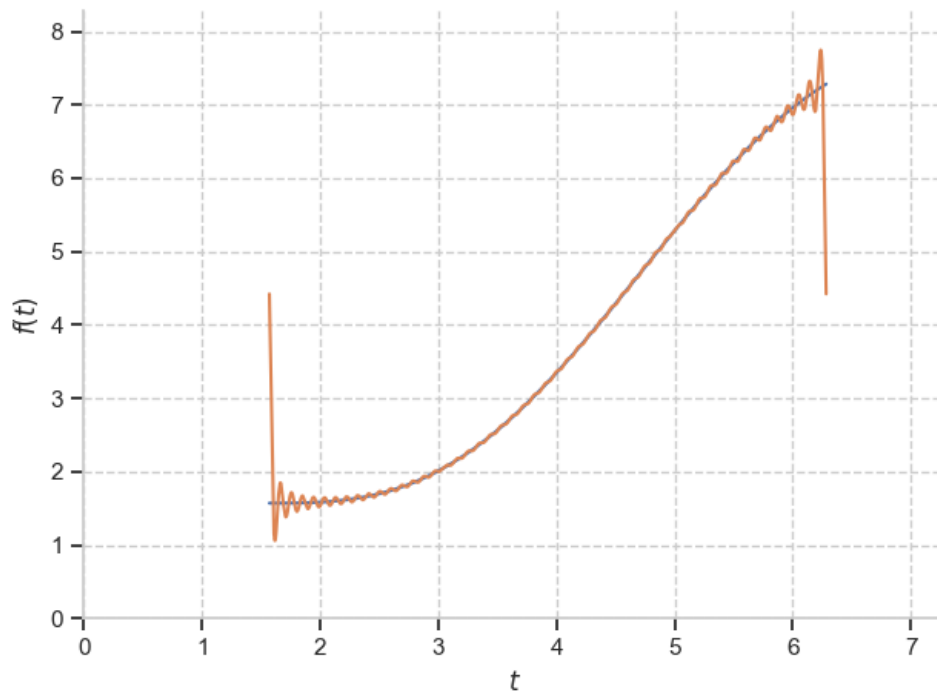


Рис. 34: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при $N=50$

Снова наблюдаем как ряд Фурье хорошо описывает заданную функцию. В данном случае в сумме ряда Фурье достаточно и синусов и косинусов, что позволяет описать ни чётную, ни нечётную функцию. Преобладание синусов приведет к графику, похожему на синусоиду, а косинусов на косинусоиду

Проверим выполнение равенства Парсеваля при $N=10, 25, 50, 100$ соответственно:

```

1 coeffs_sum=17.3721304758656
2 coeffs_sum=17.4647269560923
3 coeffs_sum=17.4968192131263
4 coeffs_sum=17.5131052270956
5 sqf_res=17.5295542168181

```

При $N \geq 100$ сумма коэффициентов близка к значению интеграла функции, следовательно сумма коэффициентов стремится к равенству Парсеваля

2 Комплексная функция

2.1 Комплекснозначная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Зададим числа $R, T > 0$. Пусть $R = 2, T = 2\pi$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 4 - 8t/\pi, & t \in [\pi/4, 3\pi/4), \\ -2, & t \in [3\pi/4, 5\pi/4), \\ -12 + 8t/\pi, & t \in [5\pi/4, 7\pi/4), \end{cases} \quad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 8t/\pi, & t \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 2, & t \in [\pi/4, 3\pi/4), \\ 8 - 8t/\pi, & t \in [3\pi/4, 5\pi/4), \\ -2, & t \in [5\pi/4, 7\pi/4), \end{cases}$$

Прежде чем строить график $f(t)$ на языке программирования python с использованием библиотеки sympy, познакомимся с файлом static.py для задания 2:

```

1 import sympy as sp
2
3 R = 2
4 T = 2 * sp.pi
5
6 pN = 25
7 N = 3
8 N_1 = 1
9 N_2 = 2
10 N_3 = 3
11 N_4 = 10
12
13 t = sp.Symbol('t')
14
15 point_common = T / 8
16
17 point_1 = -point_common
18 point_1_val = float(point_1.evalf())
19
20 point_2 = point_common
21 point_2_val = float(point_2.evalf())
22
23 point_3 = 3 * point_common
24 point_3_val = float(point_3.evalf())
25
26 point_4 = 5 * point_common
27 point_4_val = float(point_4.evalf())
28
29 point_5 = 7 * point_common
30 point_5_val = float(point_5.evalf())
31
32 gap_1 = [point_1, point_2]
33 gap_2 = [point_2, point_3]
34 gap_3 = [point_3, point_4]
35 gap_4 = [point_4, point_5]
36 gaps = [gap_1, gap_2, gap_3, gap_4]
37
38 gap_len = gap_4[1] - gap_1[0]
39 gap_len_val = float(gap_len.evalf())
40
41 # can not compare expressions with a
42 # variable like "t" so bad code here
43 def gap_1_cfunc(t):
44     return R + (8 * R * t / T) * 1j
45
46 def gap_2_cfunc(t):
47     return 2 * R - (8 * R * t / T) + R * 1j
48
49 def gap_3_cfunc(t):
50     return -R + (4 * R - (8 * R * t / T)) * 1j
51
52 def gap_4_cfunc(t):
53     return -6 * R + (8 * R * t / T) - R * 1j

```

Аналогично принципу из задания 1 из этого файла будут импортироваться все необходимые данные для работы с рядом Фурье и построения графиков. Я задал функции, объединив действительные и мнимые части на одинаковых интервалах по типу $z = a + ib$ и упростил выражения

Пример кода для построения параметрического графика комплекснозначной функции:

```
1 f_c_1, f_c_2, f_c_3, f_c_4 = gap_1_cfunc(t), gap_2_cfunc(t), gap_3_cfunc(t), gap_4_cfunc(t)
2 def build_ft():
3     sp.plot_parametric((sp.re(f_c_1), sp.im(f_c_1), (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
4                       (sp.re(f_c_2), sp.im(f_c_2), (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
5                       (sp.re(f_c_3), sp.im(f_c_3), (t, gaps[2][0], gaps[2][1])),
6                       (sp.re(f_c_4), sp.im(f_c_4), (t, gaps[3][0], gaps[3][1])),
7                       xlabel=r'Re$(t)$', ylabel=r'Im$(t)$')
```

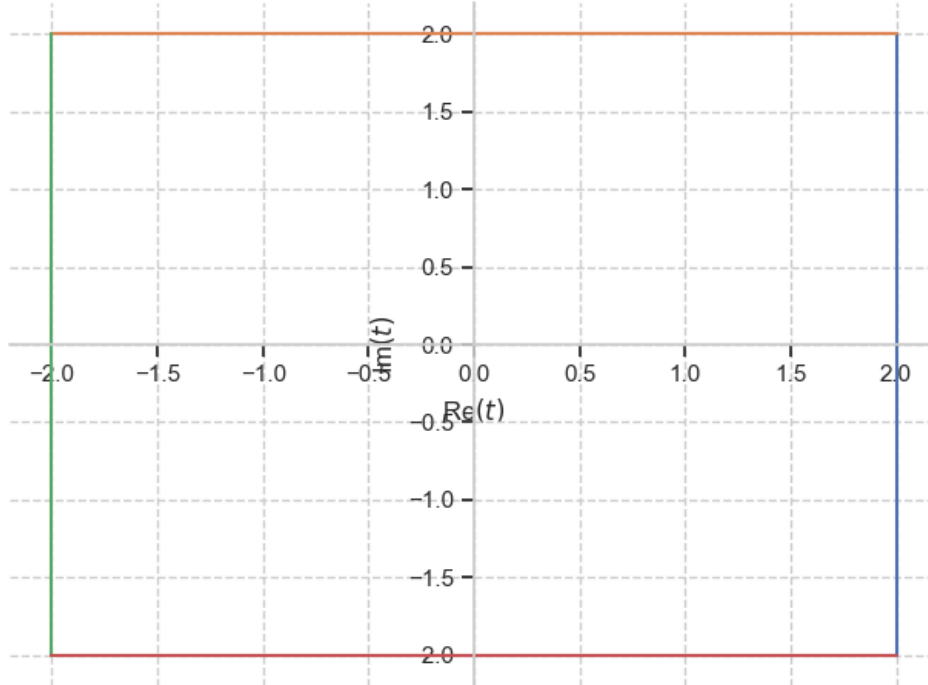


Рис. 35: Параметрический график $f(t)$ комплекснозначной функции

Запишем коэффициент c_n :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_h^{h+T} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(2 + \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(6 - \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} dt + \right. \\ \left. \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \left(6 - \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} dt + \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} \left(-14 + \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} dt \right)$$

Рассмотрим отдельно интеграл функции $2 + 8t/\pi$ на промежутке $[-\pi/4, \pi/4]$:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(2 + \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} dt = \begin{bmatrix} u = 2 + 8t/\pi & v = \int e^{-int} dt \\ du = 8/\pi dt & dv = e^{-int} dt \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$v = \int e^{-int} dt = \begin{bmatrix} x = -int \\ dx = -in dt \\ dt = i/n dx \end{bmatrix} = \frac{i}{n} \int e^x dx = \frac{i}{n} e^x = \frac{i}{n} e^{-int}, \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow (1) = \frac{i}{n} \left(2 + \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{8i}{\pi n} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-int} dt, \quad (3)$$

$$\frac{i}{n} \left(2 + \frac{8t}{\pi}\right) e^{-int} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{i}{n} \left(\left(2 + \frac{8 \cdot \pi/4}{\pi}\right) e^{-\pi/4 in} - \left(2 + \frac{8 \cdot (-\pi/4)}{\pi}\right) e^{\pi/4 in} \right) = \frac{4i}{n} e^{-\pi/4 in}, \quad (4)$$

$$-\frac{8i}{\pi n} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-int} dt = -\frac{8i}{\pi n} \cdot \frac{i}{n} e^{-int} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{8}{\pi n^2} e^{-int} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{8}{\pi n^2} (e^{-\pi/4 in} - e^{\pi/4 in}), \quad (5)$$

$$(1) = (4) + (5) = \frac{4i}{n} e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{8}{\pi n^2} (e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) = \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) \right) \quad (6)$$

Остальные интегралы решаются аналогичным способом, поэтому я приведу неполное решение для них:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} dt &= \frac{i}{n} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{8}{\pi n^2} e^{-int} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{3\pi}{4}in} - e^{-\frac{\pi}{4}in}) \right) \\ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} dt &= \frac{i}{n} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} - \frac{8}{\pi n^2} e^{-int} \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{5\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{5\pi}{4}in} - e^{-\frac{3\pi}{4}in}) \right) \\ \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(-14 + \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} dt &= \frac{i}{n} \left(-14 + \frac{8t}{\pi} \right) e^{-int} \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + \frac{8}{\pi n^2} e^{-int} \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{5\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) \right) \end{aligned}$$

Суммируем все вычисленные интегралы и упростим выражение:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) \right) - \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{3\pi}{4}in} - e^{-\frac{\pi}{4}in}) \right) - \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{5\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{5\pi}{4}in} - e^{-\frac{3\pi}{4}in}) \right) + \\ &+ \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{5\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) \right) = \frac{4}{n} \left(i e^{-\frac{\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) - i e^{-\frac{\pi}{4}in} - \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{3\pi}{4}in} - e^{-\frac{\pi}{4}in}) + \right. \\ &- i e^{-\frac{5\pi}{4}in} - \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{5\pi}{4}in} - e^{-\frac{3\pi}{4}in}) + i e^{-\frac{5\pi}{4}in} + \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) \left. \right) = \frac{4}{n} \cdot \frac{2}{\pi n} (e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in} - e^{-\frac{3\pi}{4}in} + e^{-\frac{\pi}{4}in} + \\ &- e^{-\frac{5\pi}{4}in} + e^{-\frac{3\pi}{4}in} + e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) = \frac{8}{\pi n^2} (2(e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) + e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) \end{aligned}$$

Тогда коэффициент c_n будет иметь вид:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{8}{\pi n^2} (2(e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) + e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}) = \frac{4}{(\pi n)^2} (2(e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) + e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in})$$

Получим следующий ряд Фурье $G_N(t)$:

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N \frac{4e^{int}}{(\pi n)^2} (2(e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{-\frac{5\pi}{4}in}) + e^{-\frac{7\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in})$$

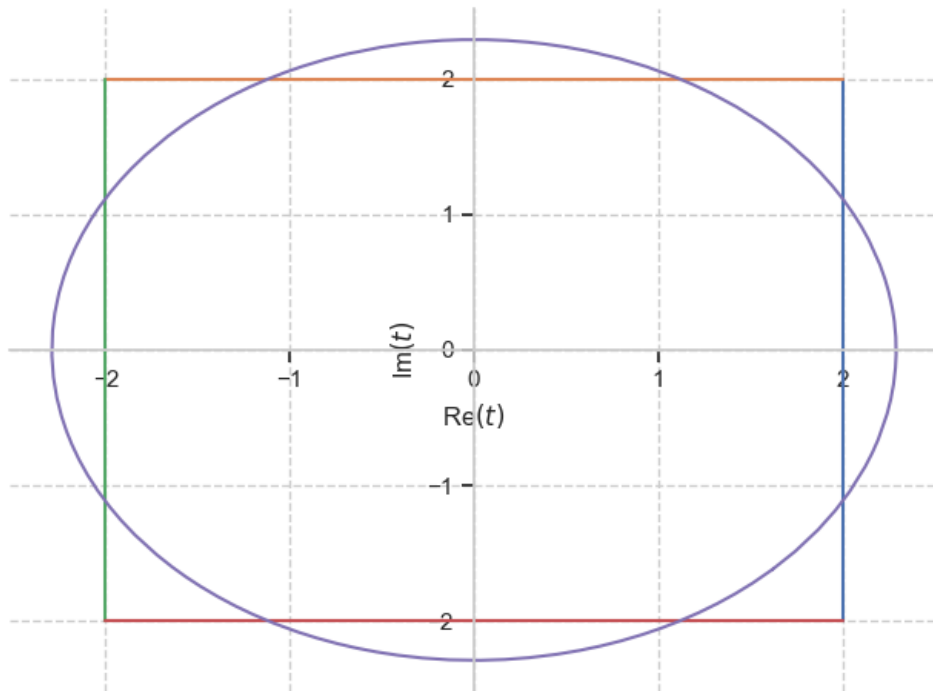
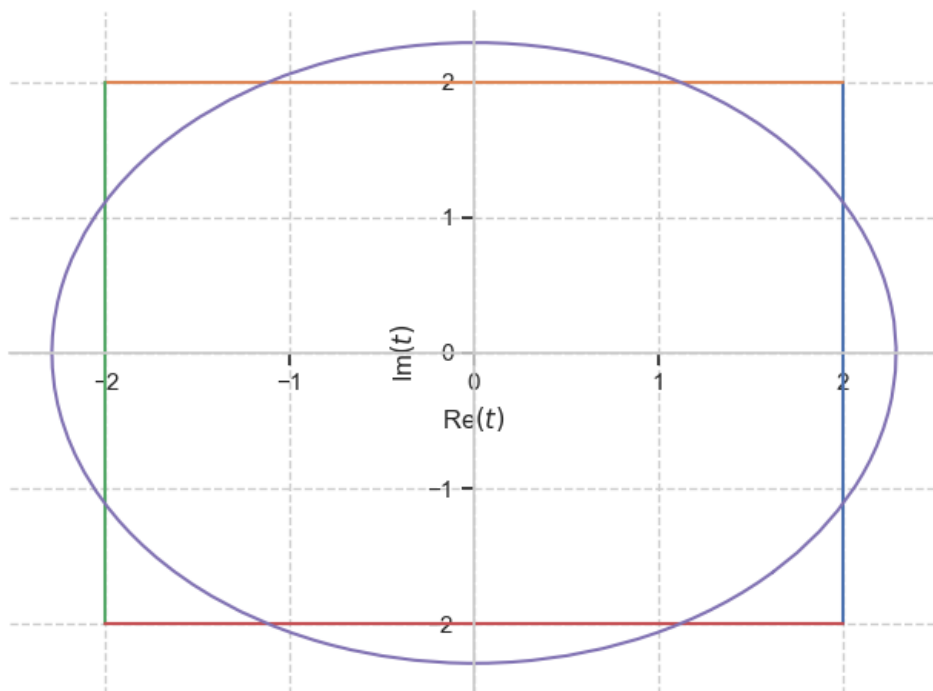
Вычислим коэффициенты c_0 , c_1 , c_2 :

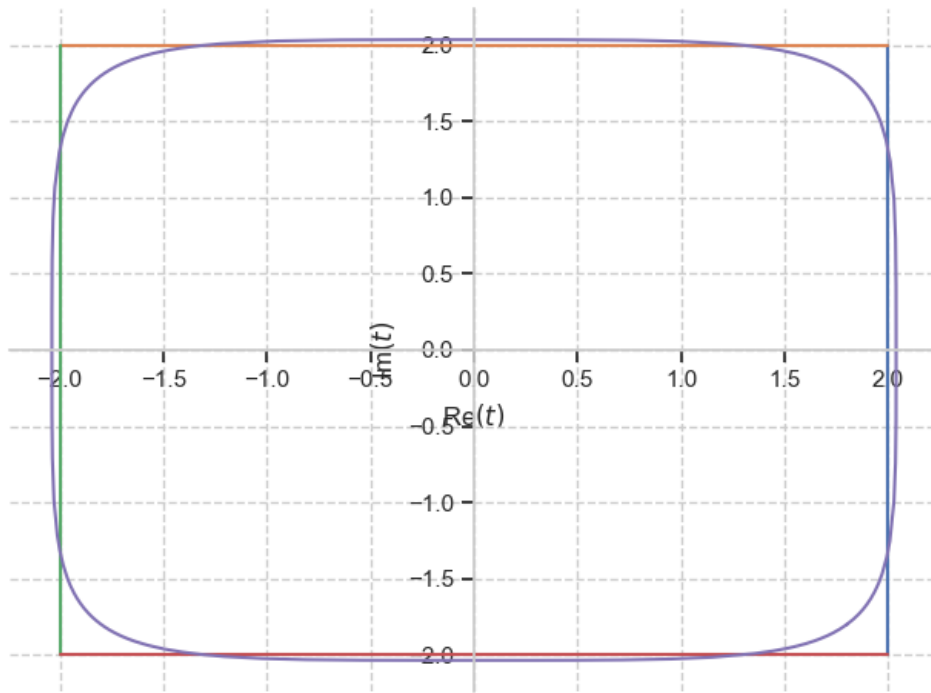
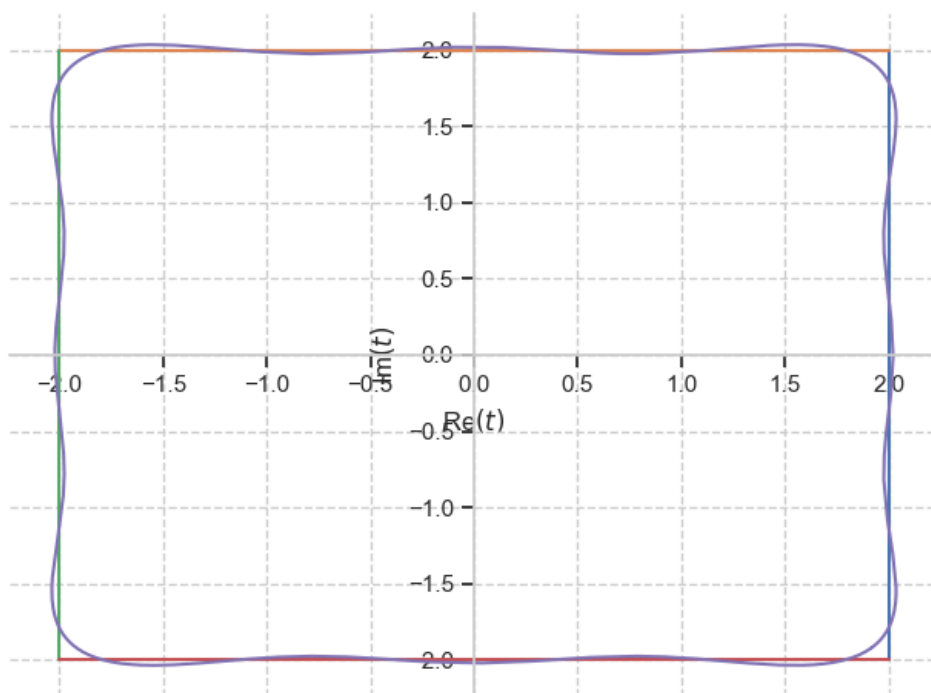
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 + \frac{8t}{\pi} \right) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(6 - \frac{8t}{\pi} \right) dt + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(-14 + \frac{8t}{\pi} \right) dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\left(2t + \frac{8t^2}{2\pi} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \right. \\ &+ \left(6t - \frac{8t^2}{2\pi} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \left(6t - \frac{8t^2}{2\pi} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left(-14t + \frac{8t^2}{2\pi} \right) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left. \right) = \frac{1}{2\pi} (\pi + \pi - \pi - \pi) = 0 \\ c_1 &= \frac{4}{\pi^2} (2(e^{-\frac{\pi}{4}i} - e^{-\frac{5\pi}{4}i}) + e^{-\frac{7\pi}{4}i} - e^{\frac{\pi}{4}i}) = \frac{8}{\pi^2} (e^{-\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{3\pi}{4}i}) \\ c_2 &= \frac{1}{\pi^2} (2(e^{-\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{5\pi}{2}i}) + e^{-\frac{7\pi}{2}i} - e^{\frac{\pi}{2}i}) = 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся ранее написанной программой и вычислим c_3 :

```
1 c_3 = -1.24943987955415e-17 + 8.74607915687906e-17*I
```

Далее построим параметрические графики $G_N(t)$ для $N=1, 2, 3, 10$. $G_N(t)$ нарисована фиолетовым цветом поверх параметрического графика $f(t)$

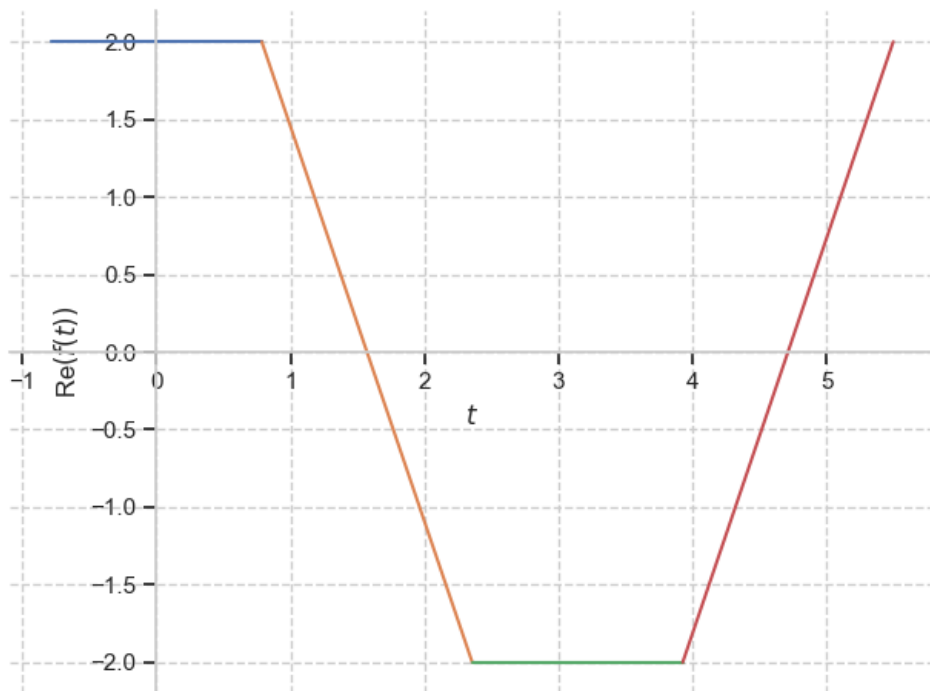
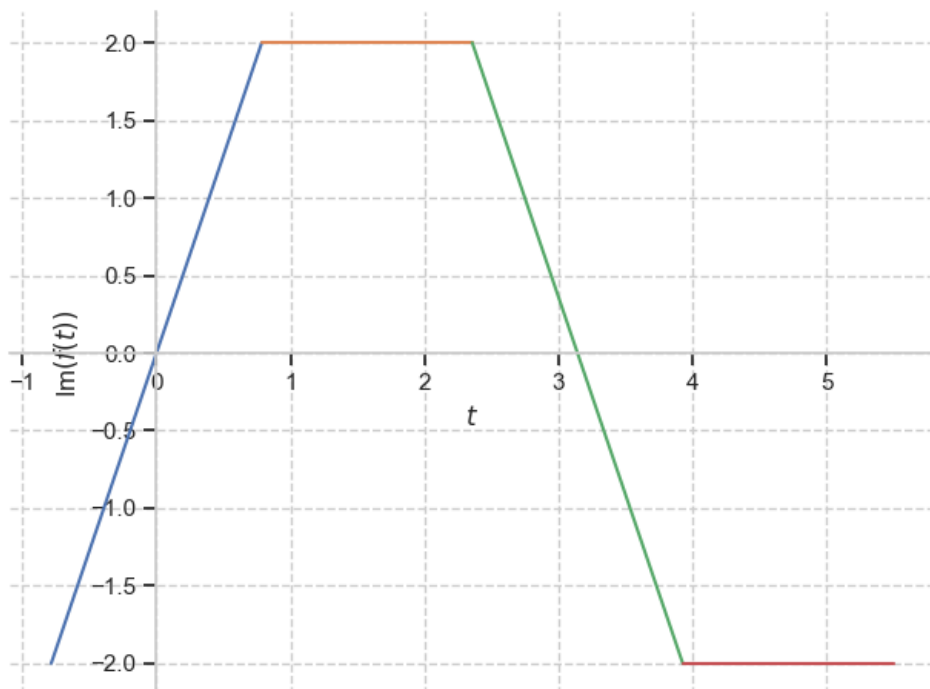
Рис. 36: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=1$ Рис. 37: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=2$

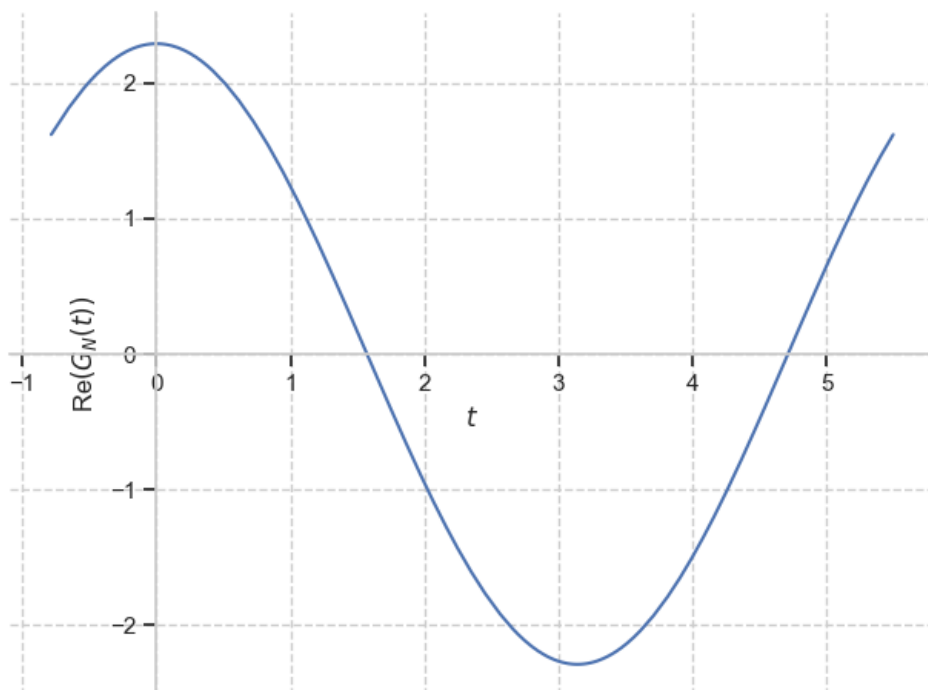
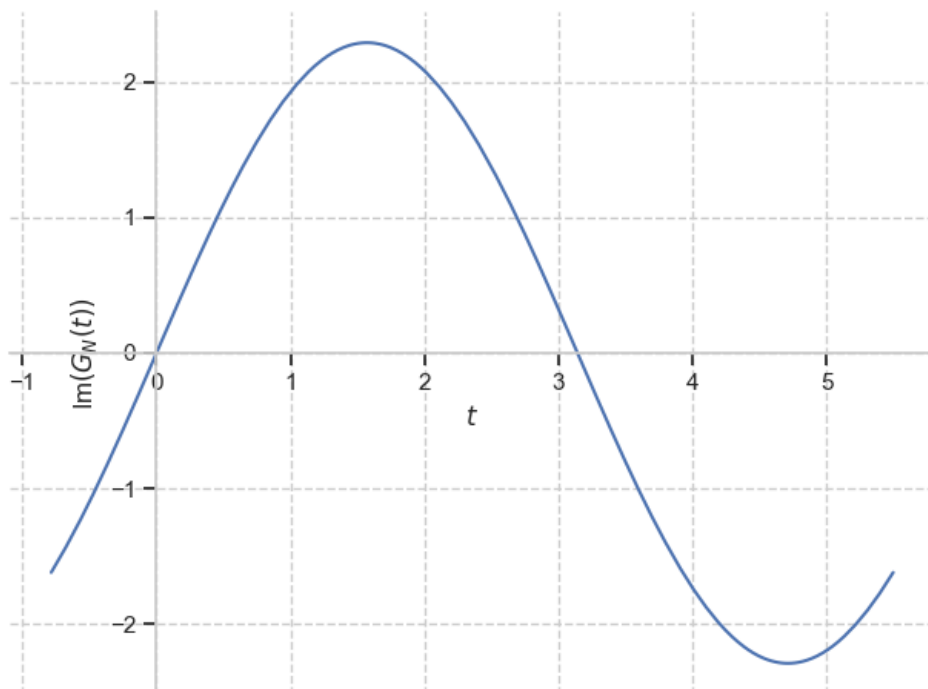
Рис. 38: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=3$ Рис. 39: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=10$

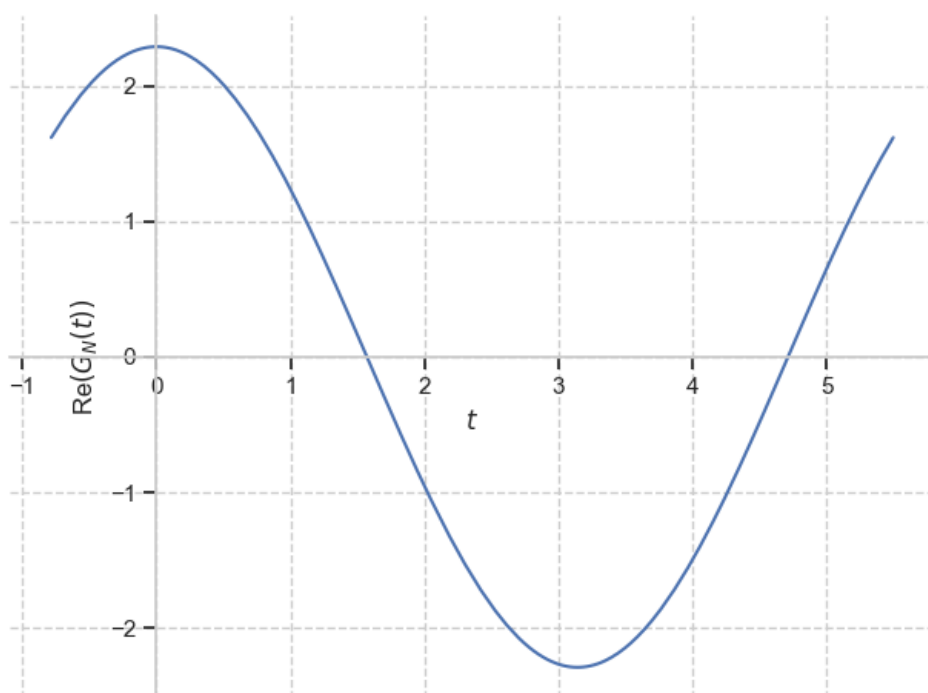
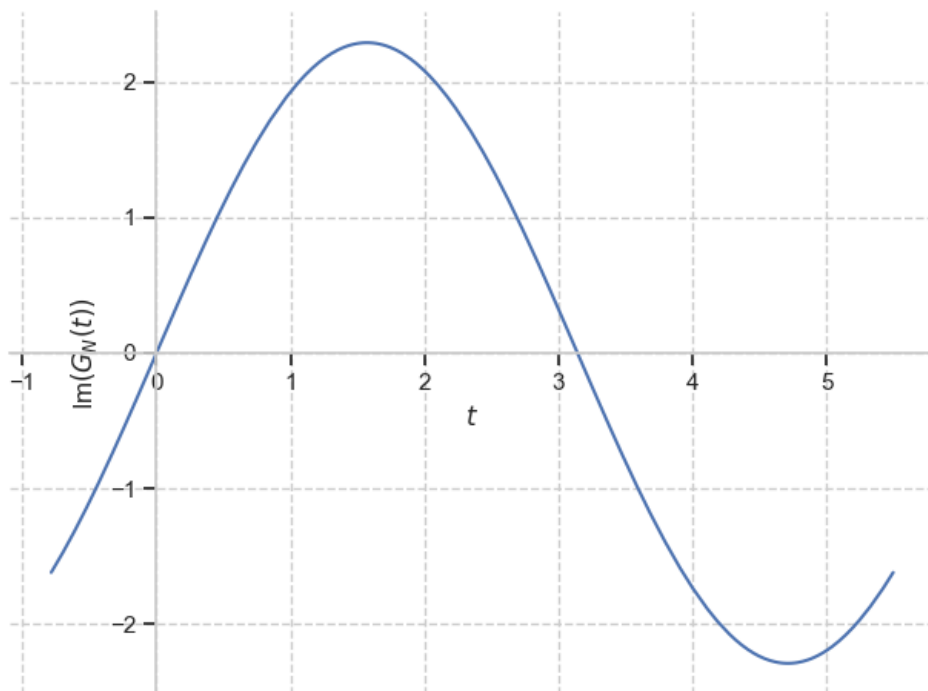
Как видим, при $N < 3$ график $G_N(t)$ напоминает эллипс, а при $N \geq 3$ стремится к квадрату, то есть к функции $f(t)$

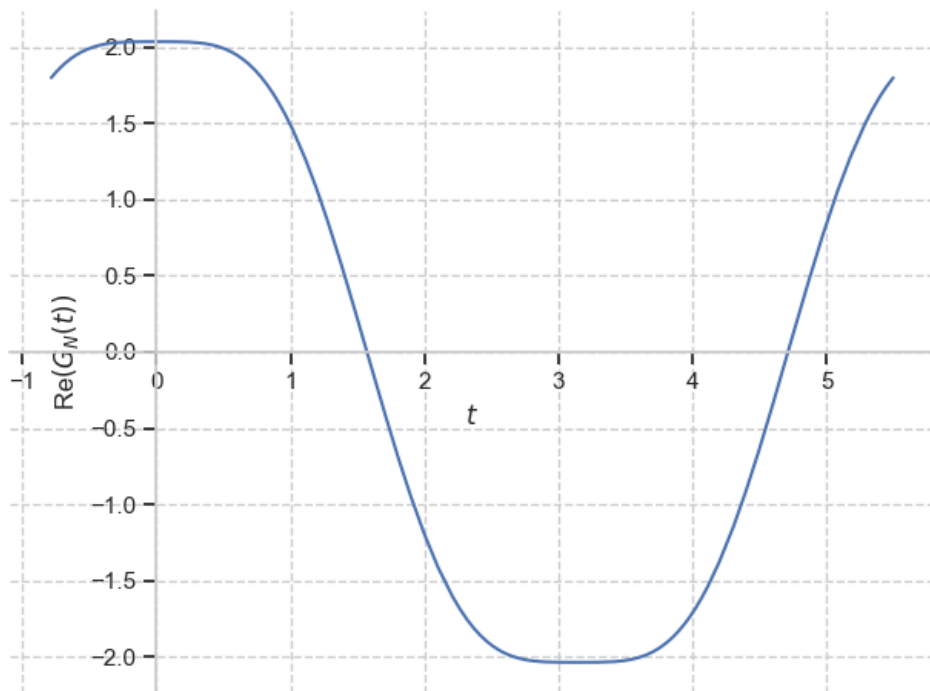
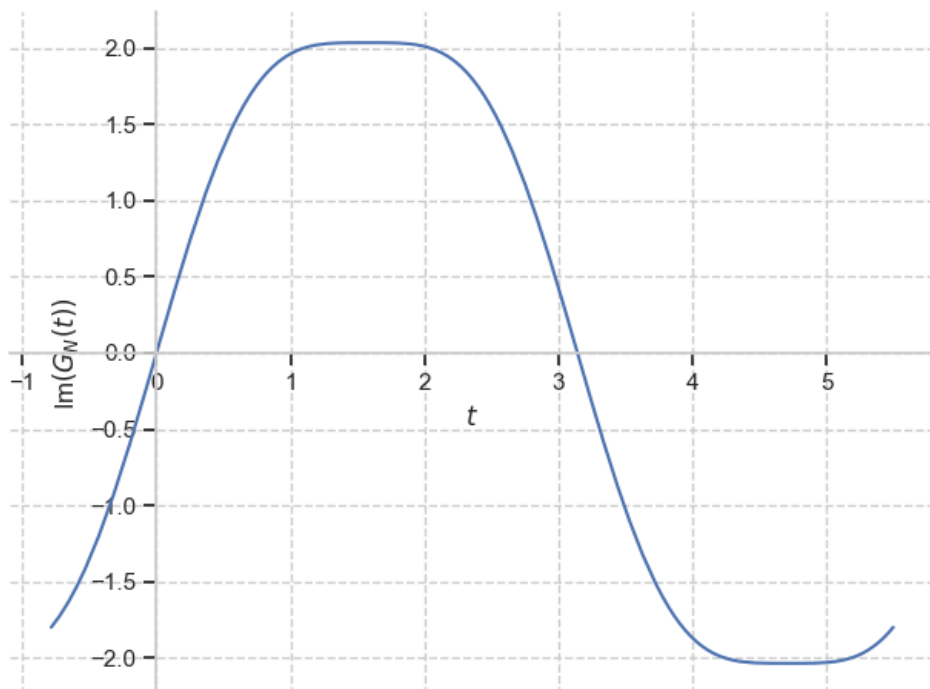
Далее построим графики $\operatorname{Re} f(t)$, $\operatorname{Im} f(t)$ и графики $\operatorname{Re} G_N(t)$, $\operatorname{Im} G_N(t)$ для $N=1, 2, 3, 10$. Пример кода для построения графика $\operatorname{Re} G_N(t)$:

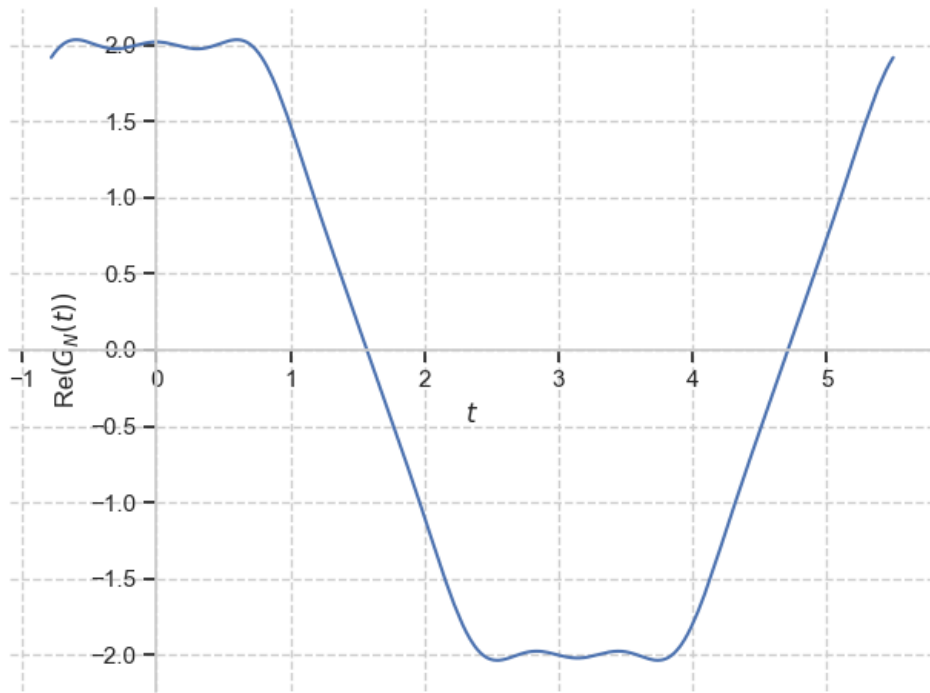
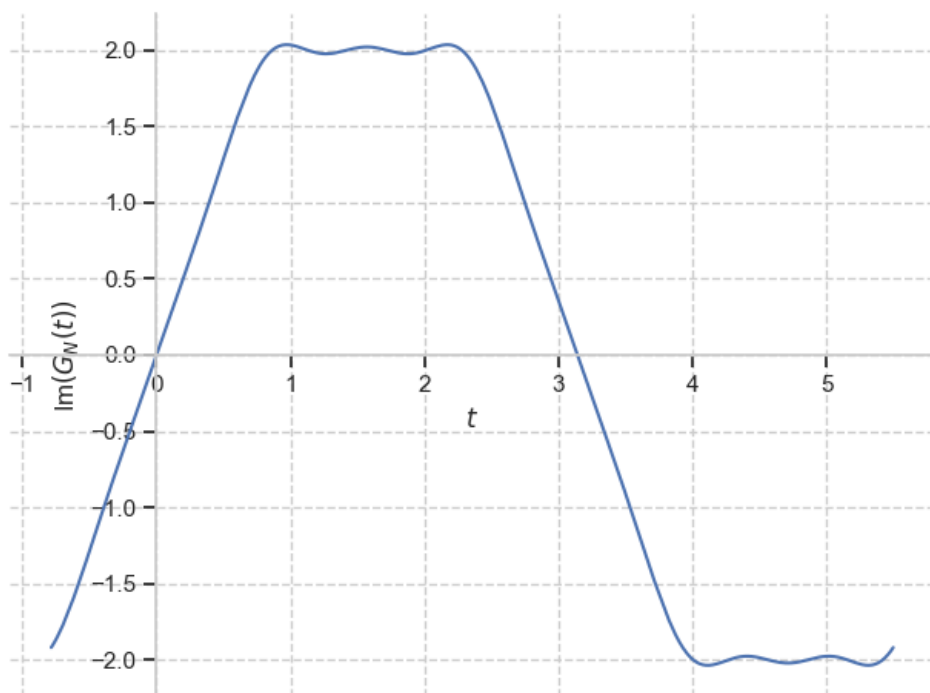
```
1 funcs = [gap_1_cfunc, gap_2_cfunc, gap_3_cfunc, gap_4_cfunc]
2 def build_Re_G_N(N):
3     G_N = calc_G_N_generic(N, gaps, funcs)
4     sp.plot((sp.re(G_N), (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
5             xlabel=r'$t$', ylabel=r'Re$(G_{\{N\}}(t))$')
6 build_Re_G_N(N_1)
```

Рис. 40: График $\text{Re } f(t)$ комплекснозначной функцииРис. 41: График $\text{Im } f(t)$ комплекснозначной функции

Рис. 42: График $\text{Re } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=1$ Рис. 43: График $\text{Im } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=1$

Рис. 44: График $\text{Re } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=2$ Рис. 45: График $\text{Im } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=2$

Рис. 46: График $\text{Re } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=3$ Рис. 47: График $\text{Im } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=3$

Рис. 48: График $\text{Re } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=10$ Рис. 49: График $\text{Im } G_N(t)$ комплекснозначной функции при $N=10$

Видим, как при увеличении N график $\text{Re } G_N(t)$ стремится к $\text{Re } f(t)$, а $\text{Im } G_N(t)$ к $\text{Im } f(t)$. График функции $\text{Re } f(t)$ и графики функции $\text{Re } G_N(t)$ симметричны относительно оси ординат, что означает, что мы видим чётную функцию. Значит график функции $\text{Re } G_N(t)$ так или иначе является графиком суммы косинусов. График функции $\text{Im } f(t)$ и графики функции $\text{Im } G_N(t)$ симметричны относительно начала координат, то есть представляют собой нечётную функцию, значит так или иначе график функции $\text{Im } G_N(t)$ является графиком суммы синусов

Проверим равенство Парсеваля тем же кодом, что и ранее. Результат при N=10:

```
1 coeffs_sum=5.33247424348813      sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=25:

```
1 coeffs_sum=5.33328363761286      sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=50:

```
1 coeffs_sum=5.33332633068821      sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=100:

```
1 coeffs_sum=5.33333245747799      sqf_res=5.33333333333332
```

Видим, что сумма коэффициентов стремится к равенству Парсеваля, но в чистом виде оно не выполняется

3 Вывод

3.1 Лабораторная работа №1

В ходе выполнения работы я расширил свои знания о ряде Фурье, научился строить графики ряда Фурье, проанализировал построенные графики, познакомился с равенством Парсеваля и проверил его выполнение для каждой функции