Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ПО ПРЕДМЕТУ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»
ПО ТЕМЕ «РЯДЫ ФУРЬЕ»

Лектор: Перегудин А. А.
Практик: Пашенко А. В.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР
Группа: R3241

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Задание 1. Вещественные функции

Зададим числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$. Пусть

$$a = 1,\ \ b = 2,\ \ t_0 = 0.5\pi,\ \ t_1 = 1.5\pi,\ \ t_2 = 2\pi$$

1.1 Квадратная волна

Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0 = 2\pi - 0.5\pi = 1.5\pi$ будет принимать следующий вид:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.5\pi, 1.5\pi), \\ 2, & t \in [1.5\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Построим график $f(t)$, используя код, написанный на языке программирования python, однако перед этим познакомимся с файлом static.py, из которого будут импортироваться все переменные и функции

```python
import sympy as sp

a = 1
b = 2

pN = 25
N = 3
N_1 = 10
N_2 = 20
N_3 = 30
N_4 = 40
N_5 = 50

t = sp.Symbol('t')

gap_start = 0.5 * sp.pi
gap_start_val = float(gap_start.evalf())

gap_mid = 1.5 * sp.pi
gap_mid_val = float(gap_mid.evalf())

gap_end = 2 * sp.pi
gap_end_val = float(gap_end.evalf())

gap_len = gap_end - gap_start
gap_len_val = float(gap_len.evalf())

gap_1 = [gap_start, gap_mid]
gap_2 = [gap_mid, gap_end]
gaps = [gap_1, gap_2]

# can not check if "t" is in [gap_start, gap_mid)
# and etc. because "t" is a symbol so bad code here
def square_wave_a(t):
    return a

def square_wave_b(t):
    return b

def even_periodic_func(t):
    return sp.cos(t)

def odd_periodic_func(t):
    return sp.sin(t)

def not_even_or_odd_periodic_func(t):
    return sp.cos(t) + t

def test_func(t):
    return t
```

Здесь находятся заданные ранее a, b, интервалы $[t_0, t_1)$ и $[t_1, t_2)$ в списке gaps, функции первого задания и различные N для вычисления коэффициентов Фурье. Квадратная волна задана двумя функциями – так проще считать интегралы

Построение графиков реализовано через библиотеку sympy. В static.py указана символьная переменная t, которая будет присутствовать во всех выражениях и по которой будут интегрироваться функции. Для построения графика $f(t)$ потребовался следующий код

```python
f_t_1 = square_wave_a(t)
f_t_2 = square_wave_b(t)
def build_f_t():
    sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
            (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
            ylabel=r'$f(t)$')
build_f_t()
```

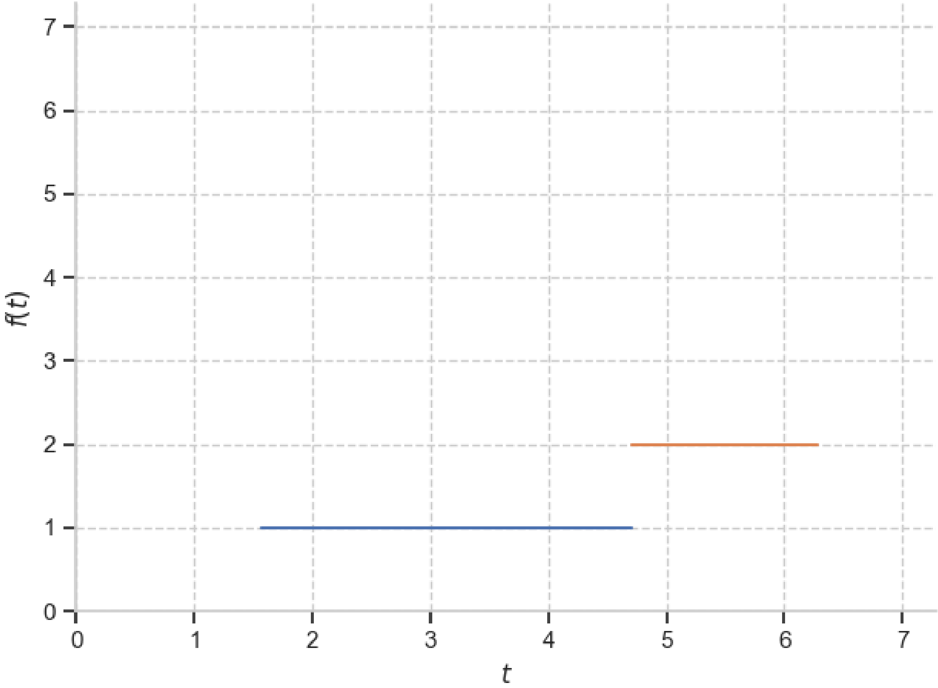

Рис. 1: График $f(t)$ квадратной волны

Теперь найдем коэффициенты a_n, a_0, b_n, c_n и ω_n чтобы рассмотреть частичные суммы рядов Фурье $F_N(t)$ и $G_N(t)$ следующего вида:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \qquad G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_n t} \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Формулы a_n, b_n, c_n в общем виде для квадратной волны будут выглядеть следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_h^{h+T} f(t)\cos(\omega_n t)\,dt = \frac{2}{1.5\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi}\cos\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi}t\right)dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2\cos\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi}t\right)dt\right) = \frac{4}{3\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi}\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)dt + \right.$$

$$\left. = +2\int_{1.5\pi}^{2\pi}\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)dt\right) = \begin{bmatrix} x = {}^{4}/_{3}nt \\ t = {}^{3}/_{4n}x \\ dt = {}^{3}/_{4n}\,dx \end{bmatrix} = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{3}{4n}\left(\int_{x_1=\frac{4}{3}n\cdot 0.5\pi=\frac{2}{3}\pi n}^{x_2=\frac{4}{3}n\cdot 1.5\pi=2\pi n}\cos(x)\,dx + 2\int_{x_3=\frac{4}{3}n\cdot 1.5\pi=2\pi n}^{x_4=\frac{4}{3}n\cdot 2\pi=\frac{8}{3}\pi n}\cos(x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\sin(x)\Big|_{\frac{2}{3}\pi n}^{2\pi n} + 2\sin(x)\Big|_{2\pi n}^{\frac{8}{3}\pi n}\right) = \frac{1}{\pi n}\left(-\sin(2\pi n) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2\sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right)\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_h^{h+T} f(t)\sin(\omega_n t)\,dt = \frac{2}{1.5\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi}\sin\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi}t\right)dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2\sin\left(\frac{2\pi n}{1.5\pi}t\right)dt\right) = \frac{4}{3\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi}\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)dt + \right.$$

$$\left. +2\int_{1.5\pi}^{2\pi}\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)dt\right) = \begin{bmatrix} x = {}^{4}/_{3}nt \\ t = {}^{3}/_{4n}x \\ dt = {}^{3}/_{4n}\,dx \end{bmatrix} = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{3}{4n}\left(\int_{x_1=\frac{4}{3}n\cdot 0.5\pi=\frac{2}{3}\pi n}^{x_2=\frac{4}{3}n\cdot 1.5\pi=2\pi n}\sin(x)\,dx + 2\int_{x_3=\frac{4}{3}n\cdot 1.5\pi=2\pi n}^{x_4=\frac{4}{3}n\cdot 2\pi=\frac{8}{3}\pi n}\sin(x)\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(\cos(x)\Big|_{\frac{2}{3}\pi n}^{2\pi n} + 2\cos(x)\Big|_{2\pi n}^{\frac{8}{3}\pi n}\right) = -\frac{1}{\pi n}\left(-\cos(2\pi n) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2\cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right)\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_h^{h+T} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{1.5\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} e^{-i\frac{2\pi n}{1.5\pi}t}\,dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2e^{-i\frac{2\pi n}{1.5\pi}t}\,dt\right) = \frac{2}{3\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} e^{-i\frac{4}{3}nt}\,dt + 2\int_{1.5\pi}^{2\pi} e^{-i\frac{4}{3}nt}\,dt\right) =$$

$$= \left[x = -\frac{4}{3}int,\quad t = -\frac{3}{4ni}x = \frac{3i}{4n}x,\quad dt = \frac{3i}{4n}\,dx\right] = \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{3i}{4n}\left(\int_{x_1=-\frac{4}{3}in\cdot 0.5\pi=-\frac{2}{3}\pi in}^{x_2=-\frac{4}{3}in\cdot 1.5\pi=-2\pi in} e^x\,dx + 2\int_{x_3=x_1=-2\pi in}^{x_4=-\frac{4}{3}in\cdot 2\pi=-\frac{8}{3}\pi in} e^x\,dx\right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi n}\left(e^x\Big|_{-\frac{2}{3}\pi in}^{-2\pi in} + 2e^x\Big|_{-2\pi in}^{-\frac{8}{3}\pi in}\right) = \frac{i}{2\pi n}(-e^{-2\pi in} - e^{-\frac{2}{3}\pi in} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi in})$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_h^{h+T} f(t)\,dt = \frac{2}{1.5\pi}\left(\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} 1\,dt + \int_{1.5\pi}^{2\pi} 2\,dt\right) = \frac{4}{3\pi}\left(t\Big|_{0.5\pi}^{1.5\pi} + 2t\Big|_{1.5\pi}^{2\pi}\right) = \frac{4}{3\pi}(1.5\pi - 0.5\pi + 2(2\pi - 1.5\pi)) = \frac{8}{3}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$F_N(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi n}\left(\left(-\sin(2\pi n) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right) + 2\sin\left(\frac{8}{3}\pi n\right)\right)\cos\left(\frac{4}{3}nt\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\cos(2\pi n) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) - 2\cos\left(\frac{8}{3}\pi n\right)\right)\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)\right)$$
$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N}\frac{i}{2\pi n}(-e^{-2\pi in} - e^{-\frac{2}{3}\pi in} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi in})e^{\frac{4i}{3}nt}$$

Теперь вычислим значения коэффициентов при $n = 0, 1, 2$. Значение $a_0 = {}^8/_3$ было вычислено выше. Получим:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(-\sin(2\pi) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 2\sin\left(\frac{8}{3}\pi\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.28$$
$$a_2 = \frac{1}{2\pi}\left(-\sin(4\pi) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) + 2\sin\left(\frac{16}{3}\pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx -0.14$$
$$b_0 = 0,\ \text{так как при } n = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi\cdot 0}{1.5\pi} = 0 \Rightarrow \frac{2}{T}\int_h^{h+T} f(t)\sin(0)\,dt = 0$$
$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left(\cos(2\pi) + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - 2\cos\left(\frac{8}{3}\pi\right)\right) = \frac{3}{2\pi} \approx 0.48$$
$$b_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\cos(4\pi) + \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - 2\cos\left(\frac{16}{3}\pi\right)\right) = \frac{3}{4\pi} \approx 0.24$$
$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{{}^8/_3}{2} = \frac{4}{3} \approx 1.33,\ \text{так как при } n = 0 \Rightarrow \omega_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{T}\int_h^{h+T} f(t)e^0\,dt = \frac{1}{T}\int_h^{h+T} f(t)\,dt,$$

что отличается от a_0 коэффициентом $\frac{1}{T}$ вместо $\frac{2}{T} \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2}$

$$c_1 = \frac{i}{2\pi}(-e^{-2\pi i} - e^{-\frac{2}{3}\pi i} + 2e^{-\frac{8}{3}\pi i}) \approx 0.14 - 0.24i$$
$$c_2 = \frac{i}{4\pi}(-e^{-4\pi i} - e^{-\frac{4}{3}\pi i} + 2e^{-\frac{16}{3}\pi i}) \approx -0.07 - 0.12i$$

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье при произвольно заданном значении N я написал следующий код:

```
import sympy as sp

t = sp.Symbol('t')

def calc_coeff(complex: bool, gap_len):
    if complex:
        return 1 / gap_len
    return 2 / gap_len

def calc_omega_n(n, gap_len):
    return 2 * sp.pi * n / gap_len

def calc_a_n(n, start, end, gap_len, f):
    integrand = f(t)
    if n != 0:
        omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
        integrand *= sp.cos(omega_n * t)

    result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))

    coeff = calc_coeff(False, gap_len)
    return coeff * result

def calc_b_n(n, start, end, gap_len, f):
    if (n == 0):
        return 0

    omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
    integrand = f(t) * sp.sin(omega_n * t)

    result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))

    coeff = calc_coeff(False, gap_len)
    return coeff * result

def calc_c_n(n, start, end, gap_len, f):
    omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
    integrand = f(t) * sp.exp(-1j * omega_n * t)

    result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))

    coeff = calc_coeff(True, gap_len)
    return coeff * result
```

Пример использования кода:

```
funcs = [square_wave_a, square_wave_b]
def find_a_b_c(N):
    a_N = sum(calc_a_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
              for i, gap in enumerate(gaps))
    b_N = sum(calc_b_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
              for i, gap in enumerate(gaps))
    c_N = sum(calc_c_n(N, gap[0], gap[1], gap_len, funcs[i])
              for i, gap in enumerate(gaps))

    print(f'a_{N}={a_N}\n')
    print(f'b_{N}={b_N}\n')
    print(f'c_{N}={c_N}\n')
find_a_b_c(N)
```

Найдем с помощью него коэффицинты при N=3. Для наглядности были добавлены вычисления для N=0, 1, 2. Результат выполнения кода:

```
a_0=2.66666666666667    b_0=0                  c_0=1.33333333333333
a_1=0.275664447710896   b_1=0.477464829275686  c_1=0.137832223855448 - 0.238732414637843*I
a_2=-0.137832223855448  b_2=0.238732414637843  c_2=-0.0689161119277239 - 0.119366207318922*I
a_3=0                   b_3=0                  c_3=-0.e-261 + 0.e-255*I
```

Теперь построим графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при различных значениях N. Ряд Фурье построен зеленым цветом поверх заданной функции $f(t)$

Для построения графика $F_N(t)$ при разных значениях функции на разных интервалах я написал следующий код:

```python
def calc_F_N_generic(N, gaps: list, functions: list):
    if (len(gaps) != len(functions)
        or len(gaps) <= 0
        or len(functions) <= 0):
        return None

    gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]

    a_0 = sum(calc_a_n(0, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
              for i, gap in enumerate(gaps))

    F_N = a_0 / 2
    for n in range(1, N + 1):
        a_n = sum(calc_a_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
                  for i, gap in enumerate(gaps))
        b_n = sum(calc_b_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
                  for i, gap in enumerate(gaps))

        omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
        F_N += a_n * sp.cos(omega_n * t) + b_n * sp.sin(omega_n * t)

    return F_N
```

Для $G_N(t)$:

```python
def calc_G_N_generic(N, gaps: list, functions: list):
    if (len(gaps) != len(functions)
        or len(gaps) <= 0
        or len(functions) <= 0):
        return None

    G_N = 0
    gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
    for n in range(-N, N + 1):
        c_n = sum(calc_c_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
                  for i, gap in enumerate(gaps))

        omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
        G_N += c_n * sp.exp(1j * omega_n * t)

    return G_N
```

Пример использования кода:

```python
def build_F_N__f_t(N):
    F_N = calc_F_N_generic(N, gaps, funcs)
    sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
            (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
            (F_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
            ylabel=r'$f(t)$')

def build_G_N__f_t(N):
    G_N = calc_G_N_generic(N, gaps, funcs)
    sp.plot((f_t_1, (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
            (f_t_2, (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
            (G_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(0, gap_end_val + 1), xlabel=r'$t$',
            ylabel=r'$f(t)$')
build_F_N__f_t(N_1)
build_F_N__f_t(N_2)
build_F_N__f_t(N_3)
build_F_N__f_t(N_4)
build_F_N__f_t(N_5)
build_G_N__f_t(N_1)
build_G_N__f_t(N_2)
build_G_N__f_t(N_3)
build_G_N__f_t(N_4)
build_G_N__f_t(N_5)
```

Далее приведены графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при N=10, 20, 30, 40, 50

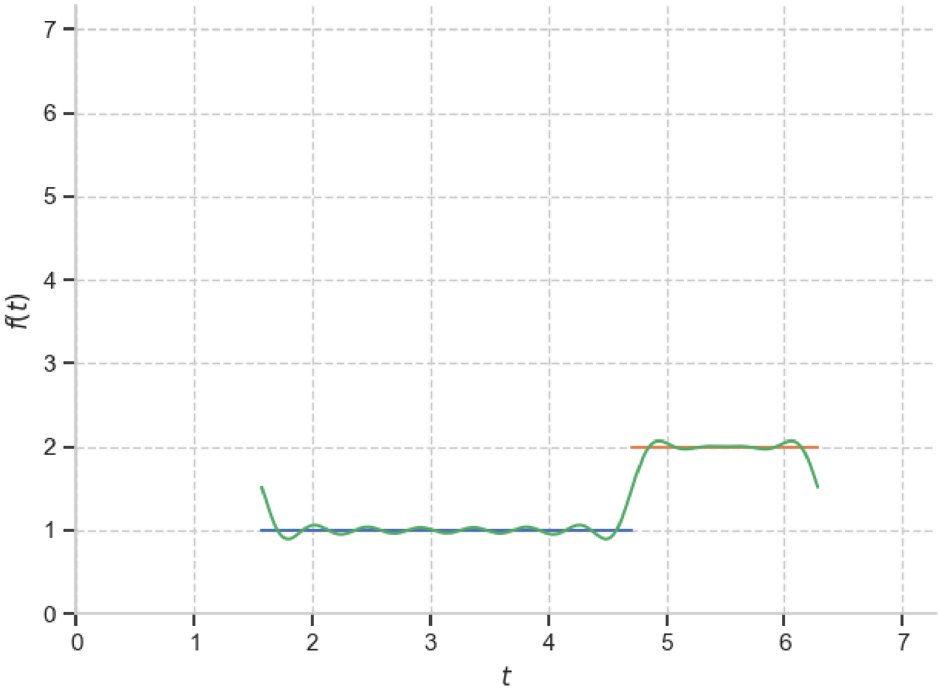

Рис. 2: График $F_N(t)$ квадратной волны при N=10

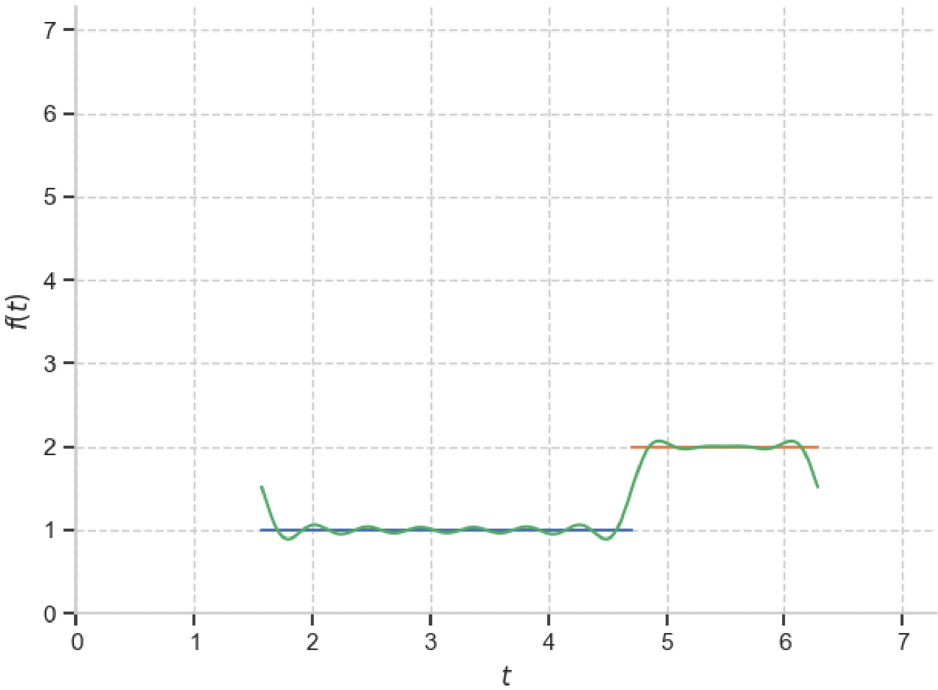

Рис. 3: График $G_N(t)$ квадратной волны при N=10

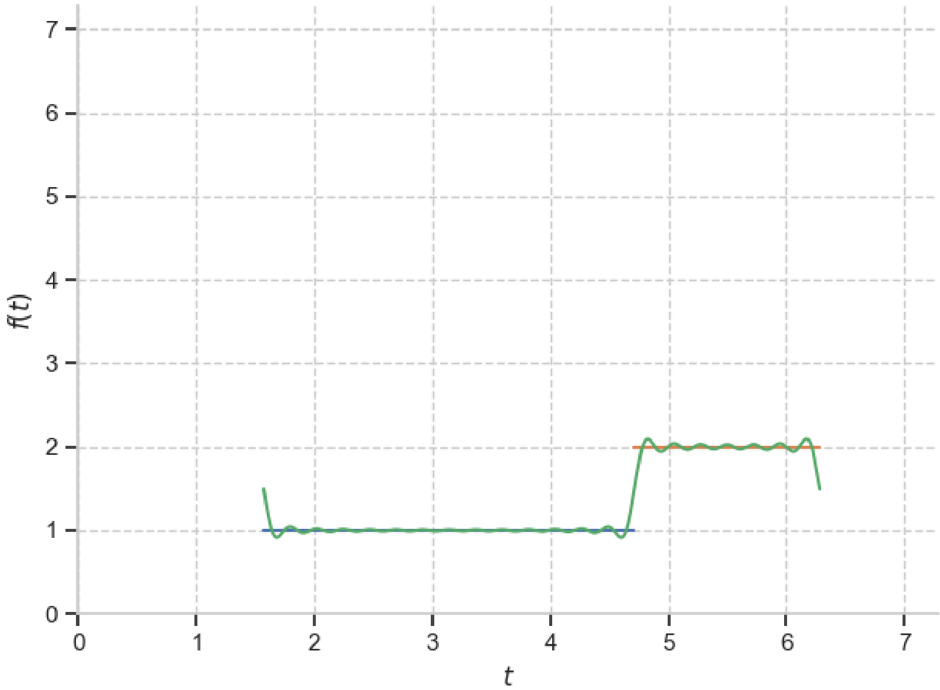

Рис. 4: График $F_N(t)$ квадратной волны при N=20

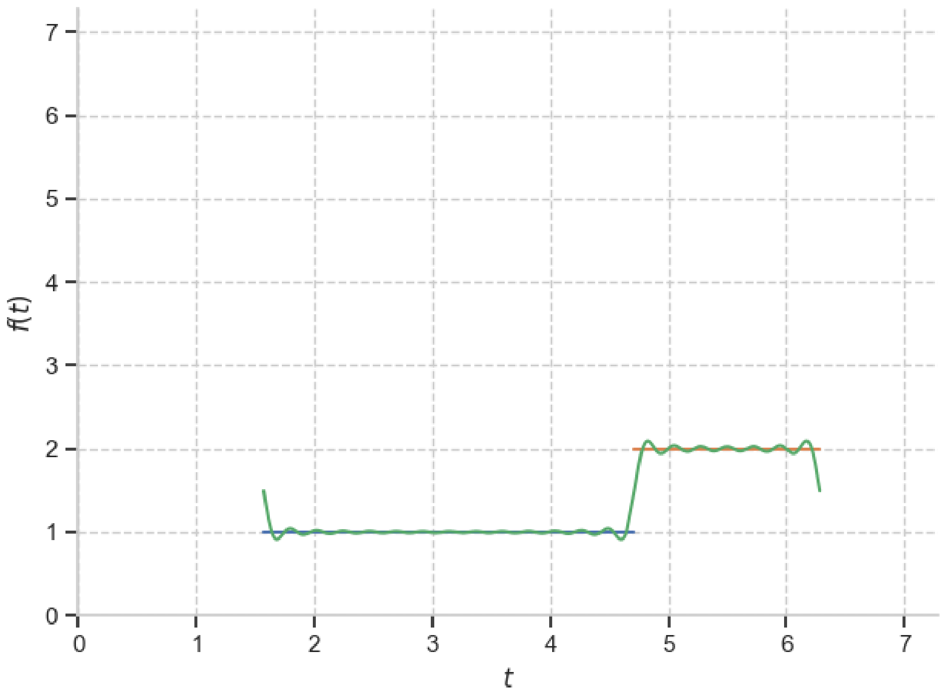

Рис. 5: График $G_N(t)$ квадратной волны при N=20

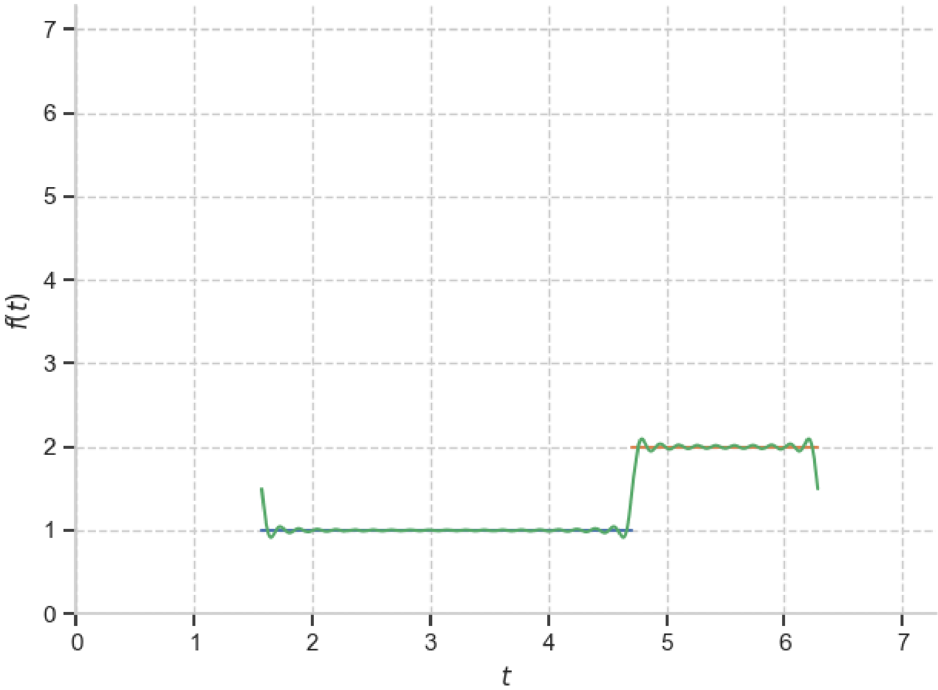

Рис. 6: График $F_N(t)$ квадратной волны при N=30

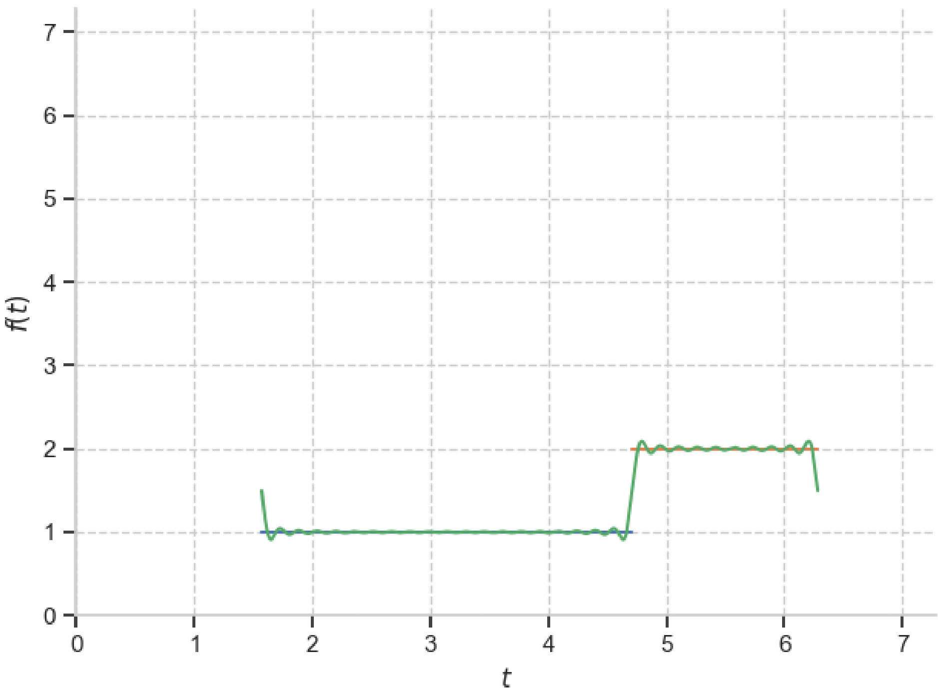

Рис. 7: График $G_N(t)$ квадратной волны при N=30

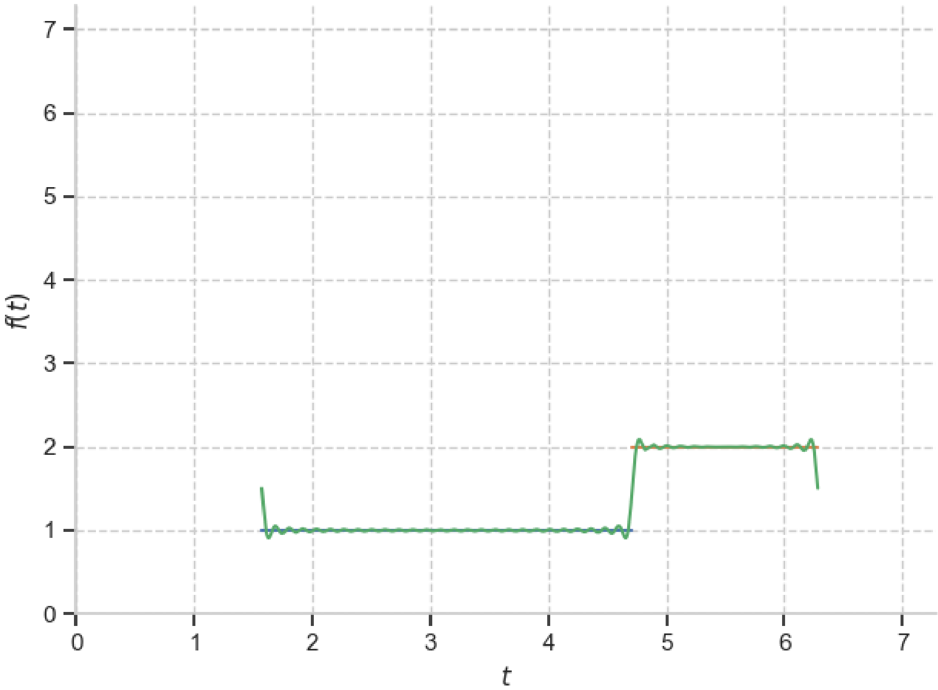

Рис. 8: График $F_N(t)$ квадратной волны при N=40

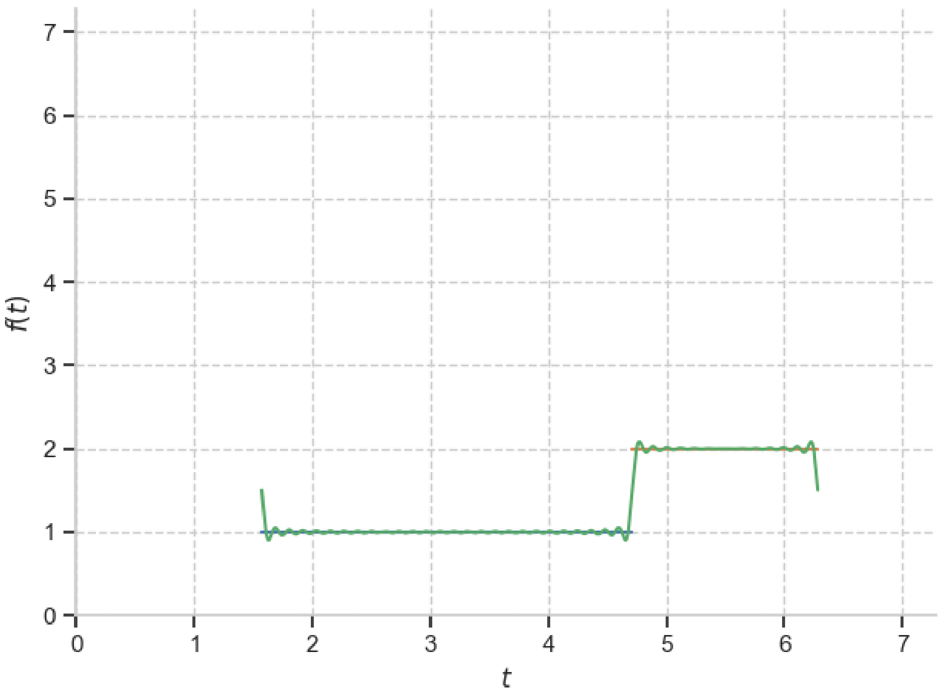

Рис. 9: График $G_N(t)$ квадратной волны при N=40

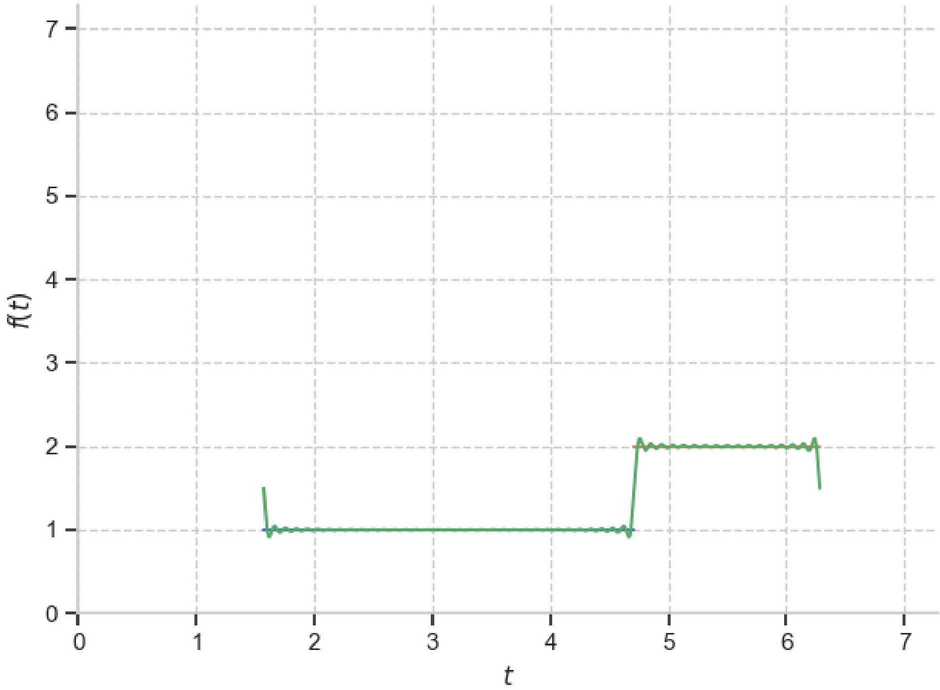

Рис. 10: График $F_N(t)$ квадратной волны при N=50

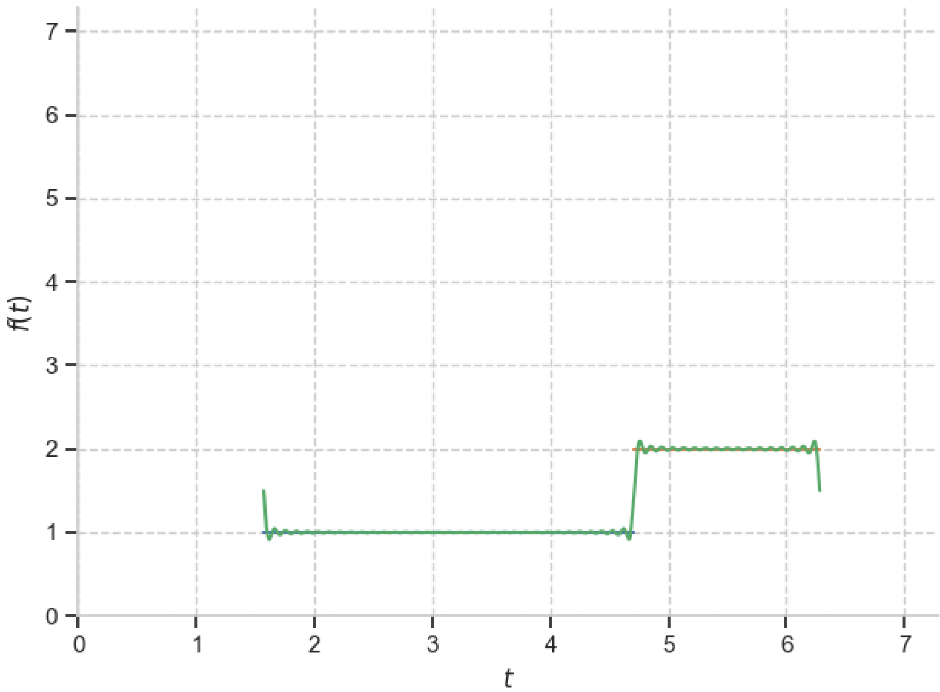

Рис. 11: График $G_N(t)$ квадратной волны при N=50

Как можно заметить, чем больше значение N, тем точнее ряд Фурье повторяет изначально заданную функцию $f(t)$. Уже при N=50 функцию $f(t)$ почти не видно за функцией $F_N(t)$ или $G_N(t)$. За простоту написания $G_N(t)$ мы платим сложностью алгоритма – в $G_N(t)$ два раза больше итераций, чем в $F_N(t)$. Так как обе функции описывают одну и ту же $f(t)$, то результат на графиках будет одинаковым

Равенство Парсеваля выглядит следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_a^b |f(t)|^2 \, dt,$$

где $|c_n|^2 = (\operatorname{Re} c_n)^2 + (\operatorname{Im} c_n)^2, \ |f(t)|^2 = f^*(t)f(t)$

Для проверки равенства Парсеваля я написал следующий код:

```
def calc_parseval_coeffs_generic(N, gaps: list, functions: list):
    if (len(gaps) != len(functions)
        or len(gaps) <= 0
        or len(functions) <= 0):
        return None

    coeffs = 0
    gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
    for n in range(-N, N + 1):
        c_n = sum(calc_c_n(n, gap[0], gap[1], gap_len, functions[i])
                  for i, gap in enumerate(gaps))

        coeffs += sp.re(c_n) ** 2 + sp.im(c_n) ** 2

    return coeffs

def calc_parseval_square_func_generic(gaps: list, functions: list):
    result = 0
    for i in range(len(gaps)):
        integrand = functions[i] * sp.conjugate(functions[i])
        result += sp.integrate(integrand, (t, gaps[i][0], gaps[i][1]))

    gap_len = gaps[-1][1] - gaps[0][0]
    return (1 / gap_len) * result
```

Пример использования кода:

```
f_t_1 = square_wave_a(t)
f_t_2 = square_wave_b(t)
funcs = [square_wave_a, square_wave_b]
funcs_t = [f_t_1, f_t_2]
def find_parseval(N):
    coeffs_sum = calc_parseval_coeffs_generic(N, gaps, funcs)
    sqf_res = calc_parseval_square_func_generic(gaps, funcs_t)

    print(f'coeffs_sum={coeffs_sum.evalf()}')
    print(f'sqf_res={sqf_res.evalf()}')
find_parseval(N)
```

Результат проверки для N=10:

```
coeffs_sum=1.99032933097543    sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=25:

```
coeffs_sum=1.99602510318456    sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=50:

```
coeffs_sum=1.99801369165273    sqf_res=2.00000000000000
```

Результат проверки для N=100:

```
coeffs_sum=1.99899180407561    sqf_res=2.00000000000000
```

Как видим, сумма коэффициентов с увеличением N приближается к вычисленному значению интеграла квадрата функции $f(t)$. Равенство Парсеваля не выполняется в чистом виде, так как коэффициентов бесконечно много, а мы взяли лишь малую их часть. То есть мы наблюдаем стремление к равенству Парсеваля, а выполнение равенства Парсеваля было бы при равенстве нулю всех коэффициентов кроме одного

1.2 Чётная периодическая функция

Зададим следующую чётную периодическую функцию:

$$f(t) = \cos(t)$$

Для построения графика $f(t)$ будем использовать следующий код:

```
f_t = even_periodic_func(t)

def build_f_t():
    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
```

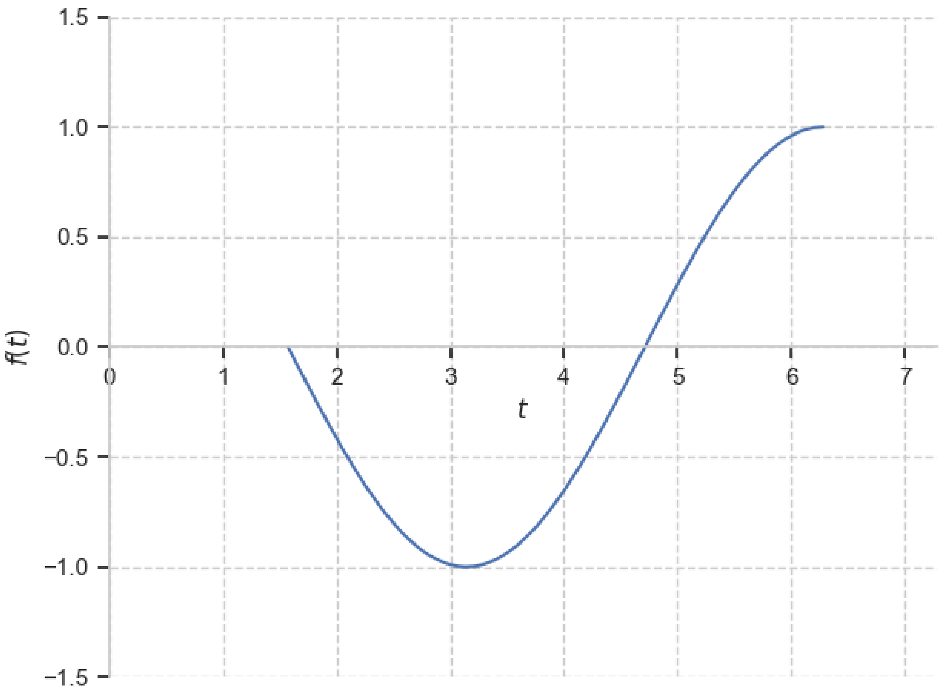

Рис. 12: График $f(t)$ чётной периодической функции

Формулы для вычисления коэффициентов a_n, a_0, b_n, c_n будут иметь вид:

$$a_n = \frac{4}{3\pi}\int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t)\cdot\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = \frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi\left(9-16n^2\right)}$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi}\int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t)\cdot\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = \frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)+(4n+3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi\left(9-16n^2\right)}$$

$$c_n = \frac{2}{3\pi}\int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t)\cdot e^{-\frac{4i}{3}nt}dt = \frac{2}{\pi(16n^2-9)}\left(4n\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+i\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)+3\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3\pi}\int_{0.5\pi}^{2\pi} \cos(t)\,dt = \frac{4}{3\pi}\sin(t)\Big|_{0.5\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$F_N(t) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{N}\frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi\left(9-16n^2\right)}\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)+$$

$$+\frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)+(4n+3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi\left(9-16n^2\right)}\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)$$

$$G_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{2e^{\frac{4i}{3}nt}}{\pi(16n^2-9)}\left(4n\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+i\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)+3\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)$$

С помощью приведенного ранее кода найдем значения коэффициентов при N=3:

```
a_3=0.0282942121052258
b_3=-0.113176848420903
c_3=0.0141471060526129 + 0.0565884242104517*I
```

Построим графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$. Для случая с одной функцией и одним интервалом я написал упрощенную версию кода. Для $F_N(t)$ имеем:

```python
def calc_F_N(N, start, end, f):
    gap_len = end - start

    a_0 = calc_a_n(0, start, end, gap_len, f)

    F_N = a_0 / 2
    for n in range(1, N + 1):
        a_n = calc_a_n(n, start, end, gap_len, f)
        b_n = calc_b_n(n, start, end, gap_len, f)

        omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
        F_N += a_n * sp.cos(omega_n * t) + b_n * sp.sin(omega_n * t)

    return F_N
```

Для G_N:

```python
def calc_G_N(N, start, end, f):
    G_N = 0
    gap_len = end - start
    for n in range(-N, N + 1):
        c_n = calc_c_n(n, start, end, gap_len, f)

        omega_n = calc_omega_n(n, gap_len)
        G_N += c_n * sp.exp(1j * omega_n * t)

    return G_N
```

Пример использования кода:

```python
def build_F_N__f_t(N):
    F_N = calc_F_N(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            (F_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')

def build_G_N__f_t(N):
    G_N = calc_G_N(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            (G_N, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
build_F_N__f_t(N_1)
build_F_N__f_t(N_2)
build_F_N__f_t(N_3)
build_F_N__f_t(N_4)
build_F_N__f_t(N_5)
build_G_N__f_t(N_1)
build_G_N__f_t(N_2)
build_G_N__f_t(N_3)
build_G_N__f_t(N_4)
build_G_N__f_t(N_5)
```

Далее приведены графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ оранжевым цветом поверх функции $f(t)$

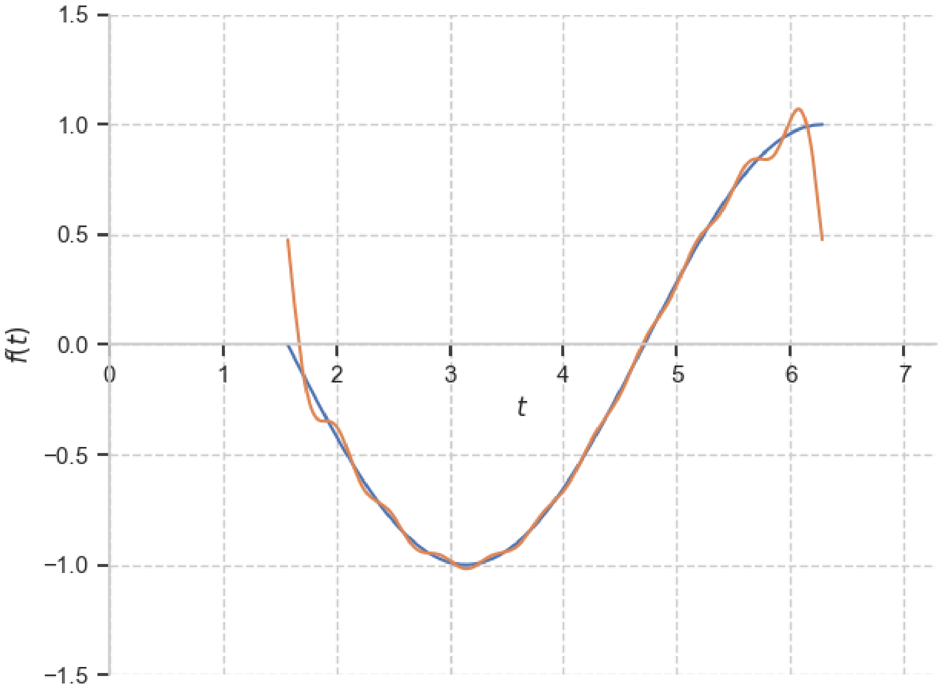

Рис. 13: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при N=10

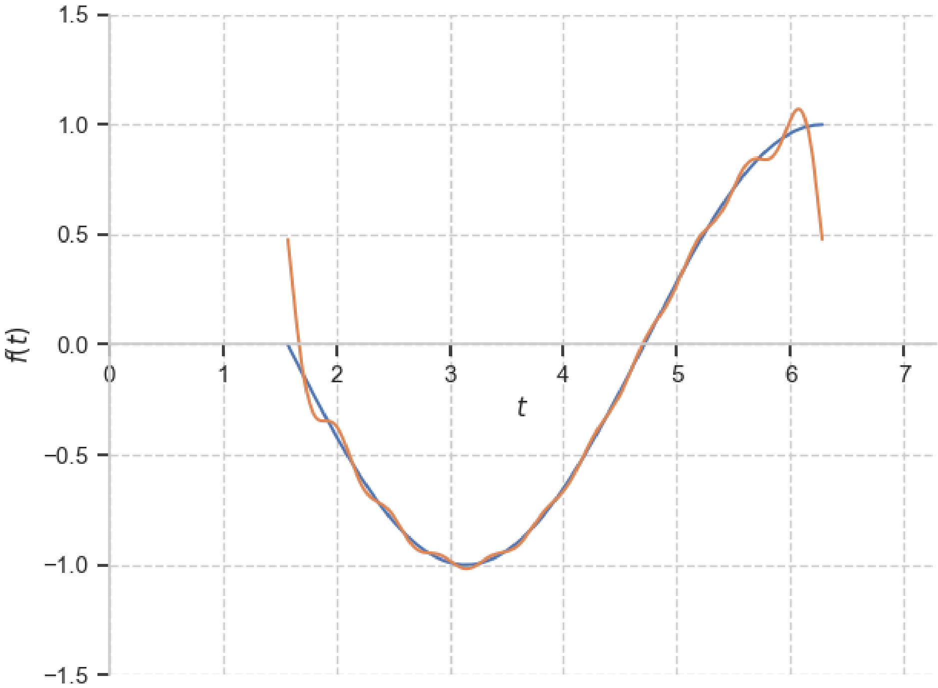

Рис. 14: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при N=10

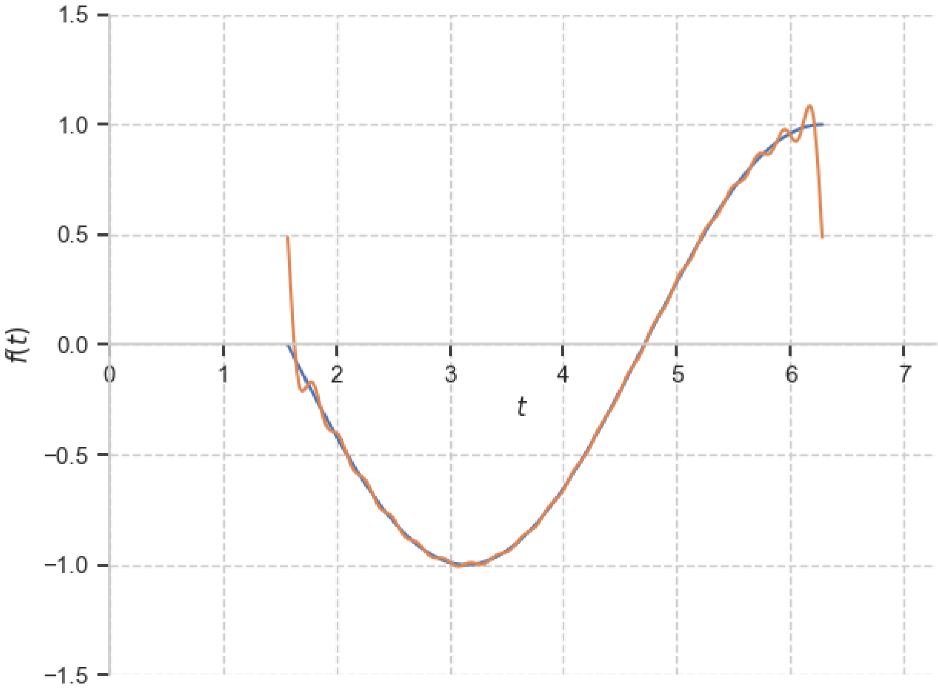

Рис. 15: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при N=20

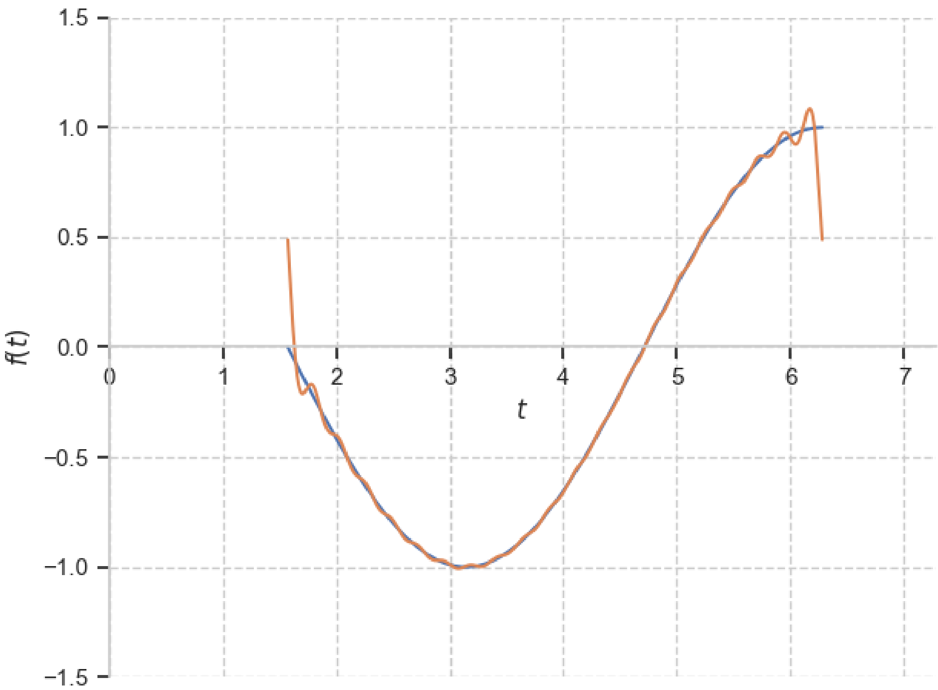

Рис. 16: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при N=20

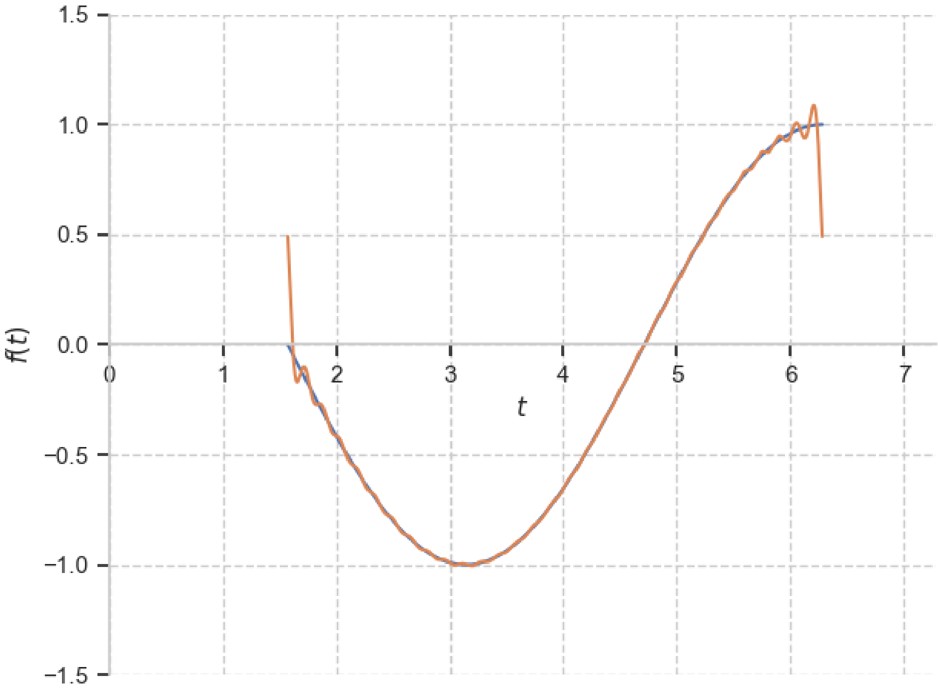

Рис. 17: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при N=30

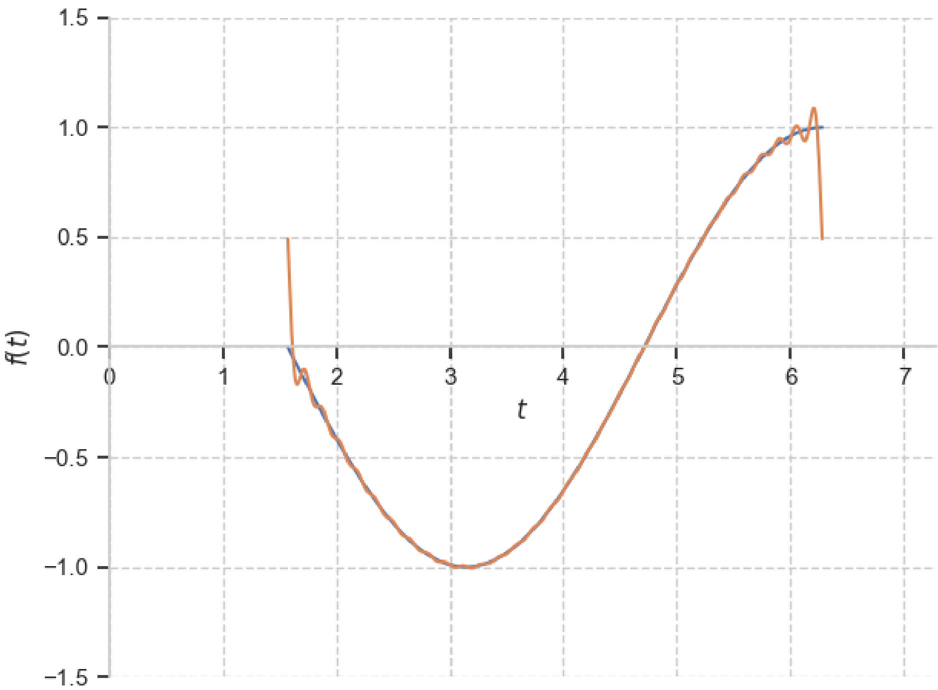

Рис. 18: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при N=30

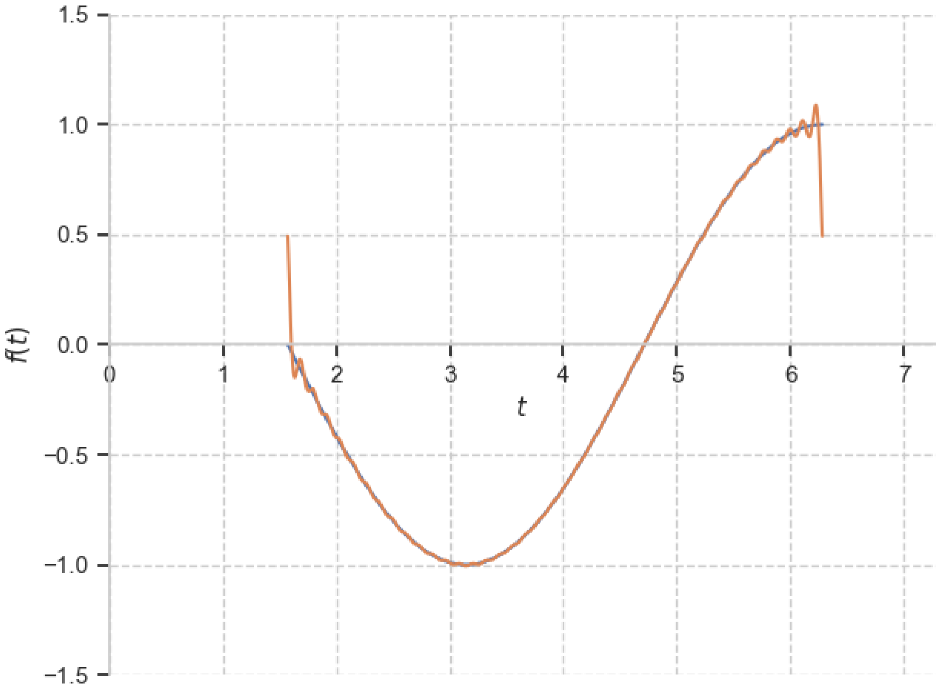

Рис. 19: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при N=40

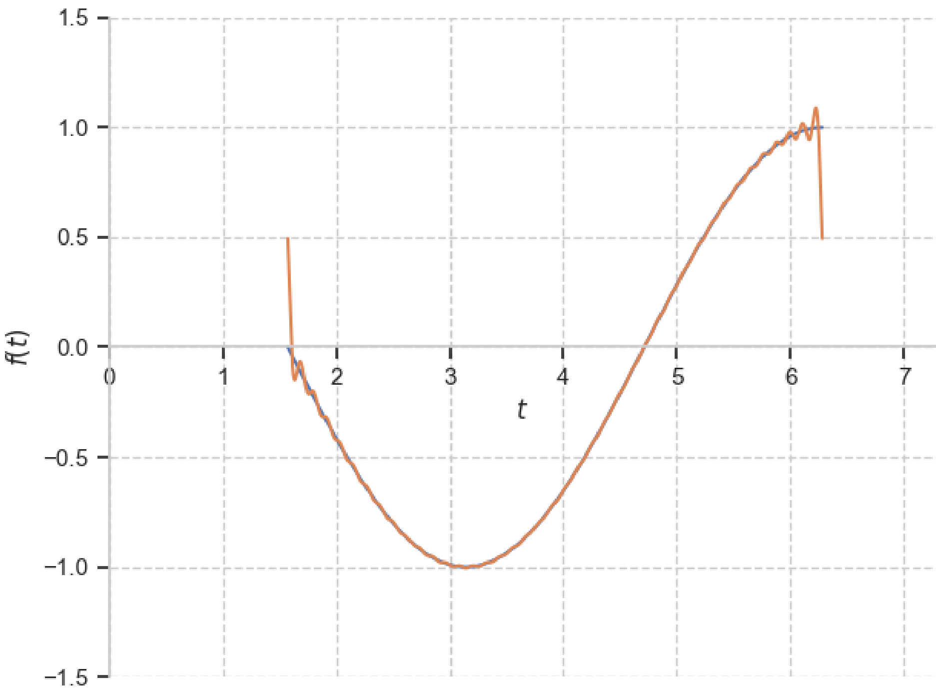

Рис. 20: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при N=40

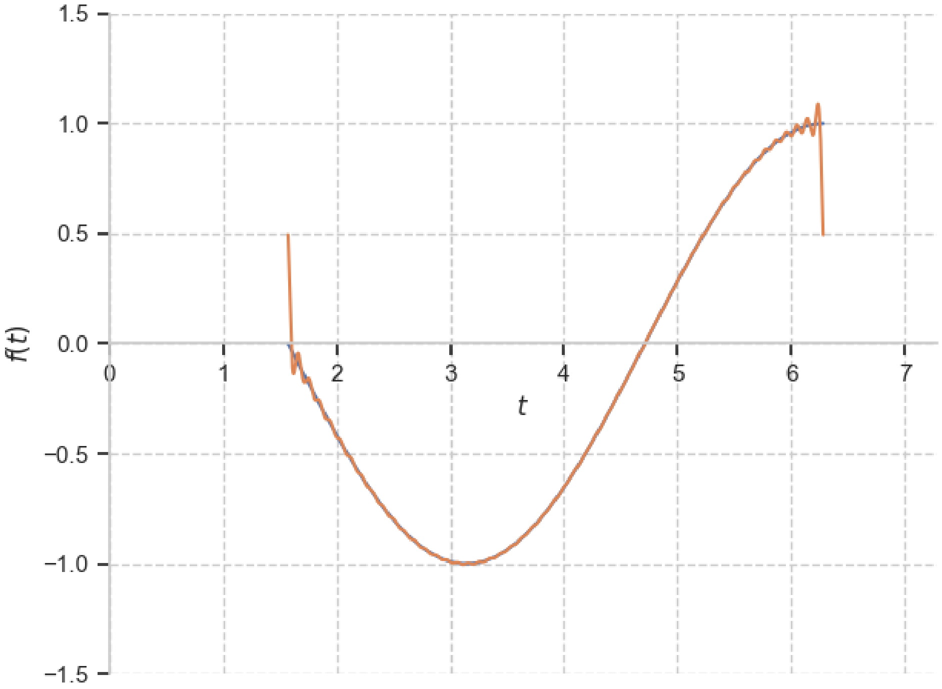

Рис. 21: График $F_N(t)$ чётной периодической функции при N=50

Рис. 22: График $G_N(t)$ чётной периодической функции при N=50

Исходя из полученных графиков можно сделать вывод, что приводить и графики $F_N(t)$, и графики $G_N(t)$ в работе избыточно, так как они одинаковы, в чем мы убедились еще тогда, когда строили квадратную волну. Поэтому далее в отчете я буду приводить только графики $F_N(t)$. Тем не менее, графики $G_N(t)$ у меня построены на каждую функцию в пяти экземплярах

Так как функция $f(t)$ чётная, то в частичных суммах ряда Фурье преобладают косинусы, поэтому графики очень похожи. Если рассматривать функцию $f(t)$ с периодом 2π, например на промежутке $[0.5\pi, 2.5\pi]$, то графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ будут совпадать с графиком $f(t)$, так как все b_n занулятся

Для проверки равенства Парсеваля для одной функции на одном интервале я написал упрощенную версию кода:

```python
def calc_parseval_coeffs(N, start, end, f):
    coeffs = 0
    gap_len = end - start
    for n in range(-N, N + 1):
        c_n = calc_c_n(n, start, end, gap_len, f)

        coeffs += sp.re(c_n) ** 2 + sp.im(c_n) ** 2

    return coeffs
def calc_parseval_square_func(start, end, f):
    integrand = f * sp.conjugate(f)

    result = sp.integrate(integrand, (t, start, end))

    gap_len = end - start
    return (1 / gap_len) * result
```

Пример использования упрощенной версии кода:

```python
def find_parseval(N):
    coeffs_sum = calcs.calc_parseval_coeffs(N, gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func)
    sqf_res = calcs.calc_parseval_square_func(gaps[0][0], gaps[-1][1], even_periodic_func(t))

    print(f'coeffs_sum={coeffs_sum.evalf()}')
    print(f'sqf_res={sqf_res.evalf()}')
find_parseval(N)
```

Результат выполнения кода для N=10

```
coeffs_sum=0.495154186636485    sqf_res=0.500000000000000
```

Результат выполнения кода для N=25

```
coeffs_sum=0.498011845838439    sqf_res=0.500000000000000
```

Результат выполнения кода для N=50

```
coeffs_sum=0.498996631466442    sqf_res=0.500000000000000
```

Результат выполнения кода для N=100

```
coeffs_sum=0.499495890594569    sqf_res=0.500000000000000
```

Сумма коэффициентов приближается к вычисленному значению интеграла, следовательно наблюдаем стремление к равенству Парсеваля

1.3 Нечётная периодическая функция

Зададим следующую чётную периодическую функцию:

$$f(t) = \sin(t)$$

Для построения графика $f(t)$ будем использовать следующий код:

```
    f_t = odd_periodic_func(t)

def build_f_t():
    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(-1.5, 1.5), xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
```

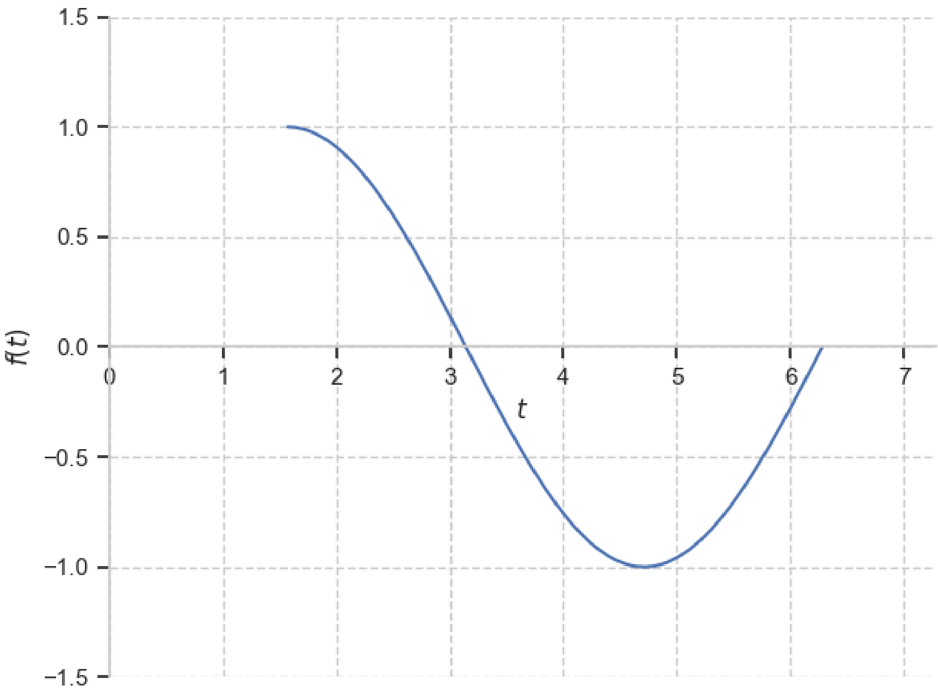

Рис. 23: График $f(t)$ нечётной периодической функции

Формулы для вычисления a_n, a_0, b_n, c_n будут иметь вид:

$$a_n = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t)\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = \frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t)\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = \frac{2\left((4n-3)\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi(9-16n^2)}$$

$$c_n = \frac{2}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t)e^{-\frac{4i}{3}nt}\,dt = -\frac{2}{\pi(16n^2-9)}\left(3\left(i\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)+4n\left(i\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt = -\frac{4}{3\pi}\cos(t)\Big|_{0.5\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Теперь составим $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$F_N(t) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2\left((4n-3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi(9-16n^2)}\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)+$$

$$+\frac{2\left((4n-3)\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)-(4n+3)\left(\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)}{\pi(9-16n^2)}\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)$$

$$G_N=\sum_{n=-N}^{N}-\frac{2e^{\frac{4i}{3}nt}}{\pi(16n^2-9)}\left(3\left(i\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)-\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)\right)+4n\left(i\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\right)$$

С помощью написанной ранее программы вычислим значения коэффициентов при N=3

```
a_3=0.0282942121052258
b_3=0.113176848420903
c_3=0.0141471060526129 - 0.0565884242104517*I
```

Построим графики $F_N(t)$, используя упрощенный код для нахождения частичной суммы ряда Фурье. Функция $F_N(t)$ нарисована оранжевым цветом поверх заданной функции $f(t)$

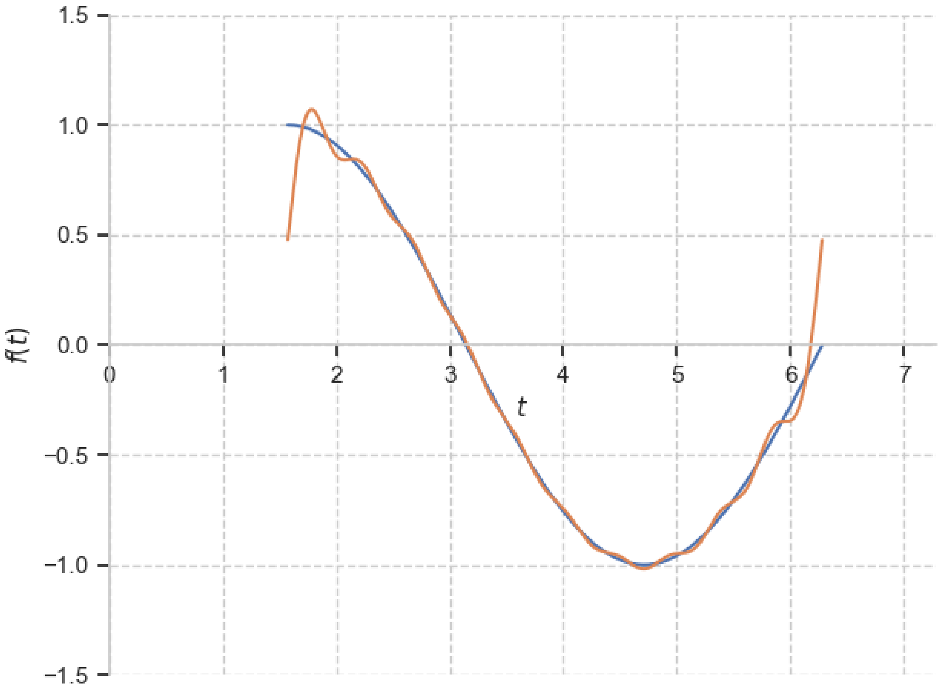

Рис. 24: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=10

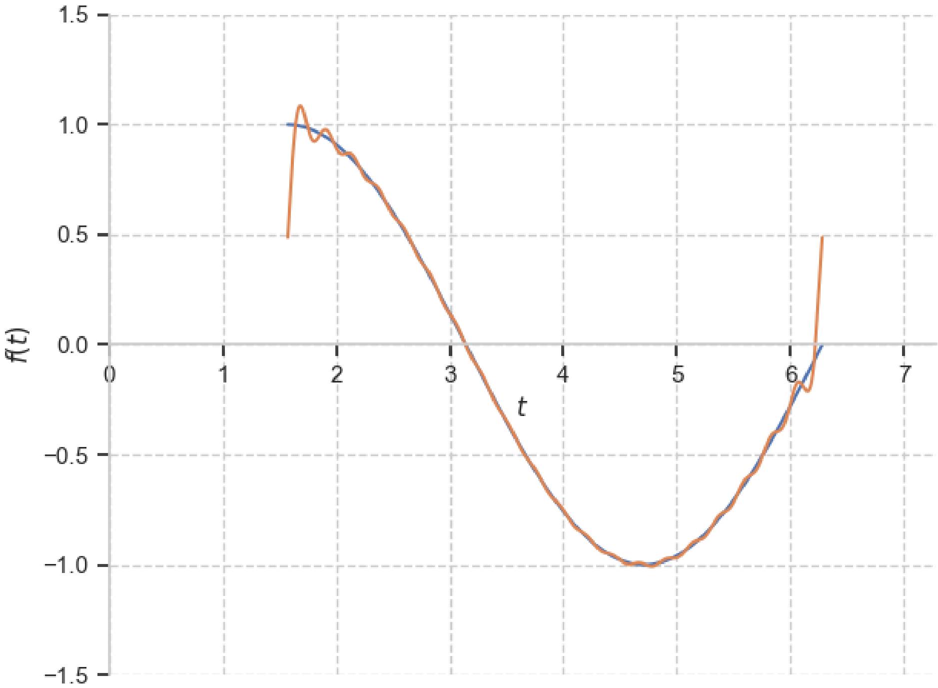

Рис. 25: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=20

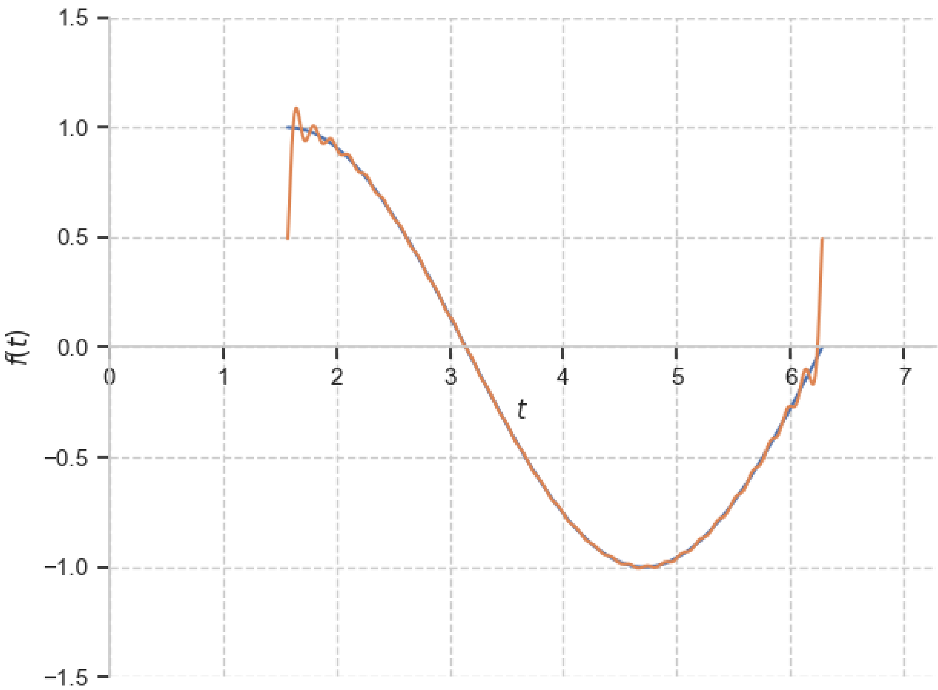

Рис. 26: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=30

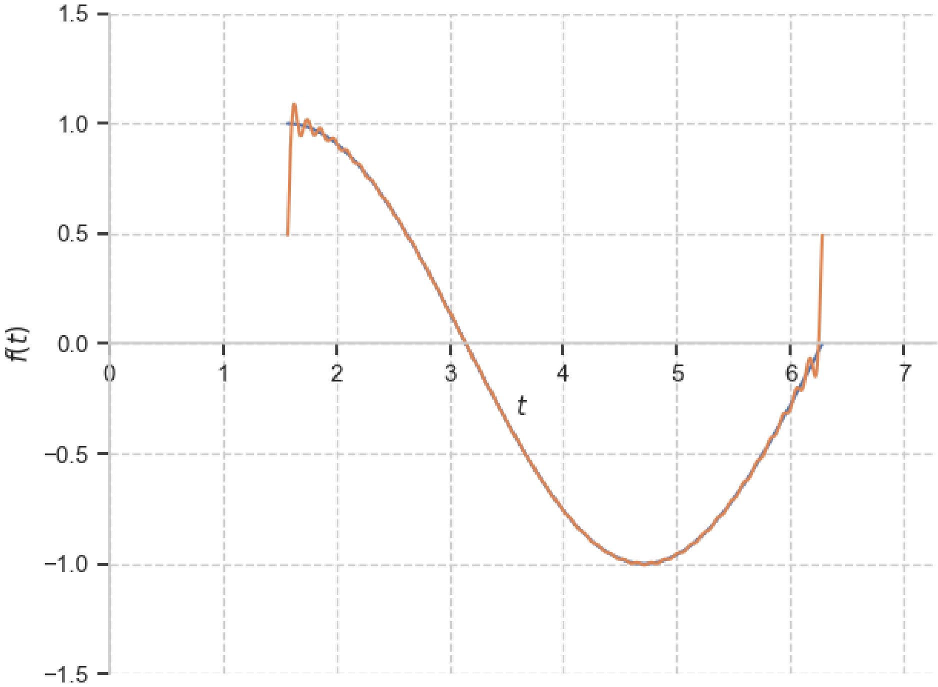

Рис. 27: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=40

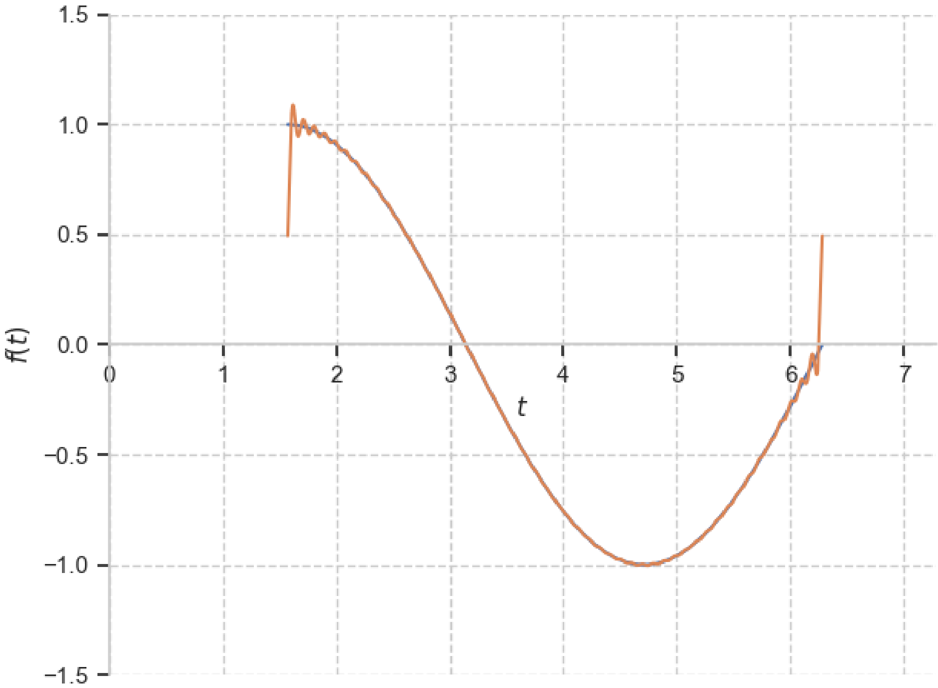

Рис. 28: График $F_N(t)$ нечётной периодической функции при N=50

Наблюдаем такой же успех в аппроксимации функции, как и с графиком чётной периодической функции, так как в сумме ряда Фурье преобладают синусы. Если бы период был 2π, то графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ совпадали с $f(t)$, так как все a_n занулились

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля. Результат для N=10:

```
coeffs_sum=0.495154186636485     sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=25:

```
coeffs_sum=0.498011845838439     sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=50:

```
coeffs_sum=0.498996631466442     sqf_res=0.500000000000000
```

Результат для N=100:

```
coeffs_sum=0.499495890594569     sqf_res=0.500000000000000
```

С увеличением N сумма коэффициентов приближается к результату интеграла, значит существует стремление к равенству Парсеваля

1.4 Ни чётная, ни нечётная периодическая функция

Зададим следующую ни чётную, ни нечётную периодическую функцию:

$$f(t) = \cos(t) + t$$

Используя следующий код построим график функции $f(t)$:

```
f_t = not_even_or_odd_periodic_func(t)

def build_f_t():
    sp.plot((f_t, (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            axis_center=(0, 0), xlim=(0, gap_end_val + 1),
            ylim=(0, gap_end_val + 2), xlabel=r'$t$',
            ylabel=r'$f(t)$')
build_f_t()
```

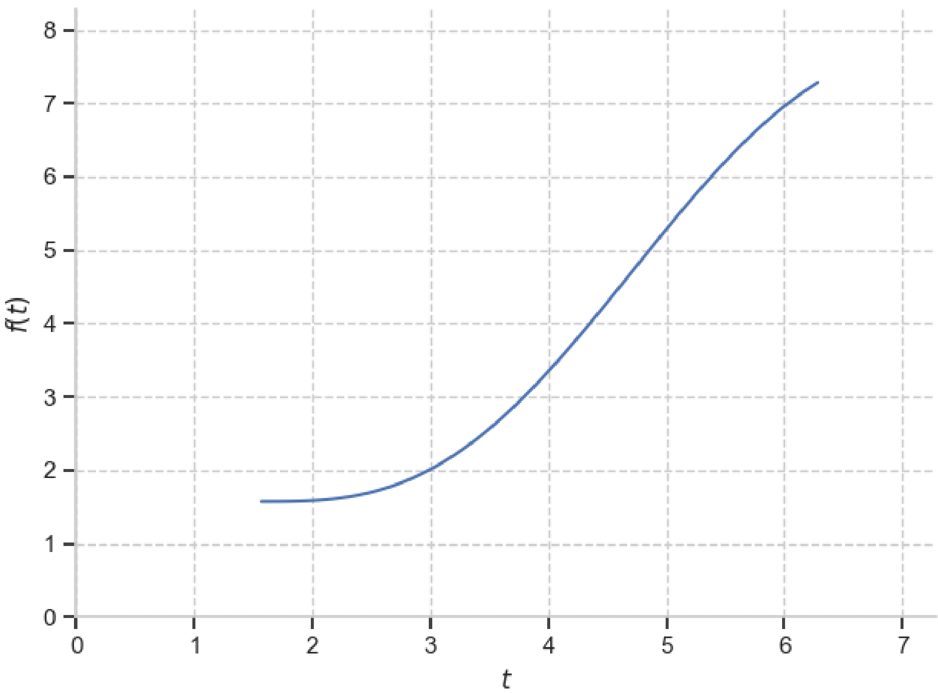

Рис. 29: График $f(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции

Найдем формулы для вычисления коэффициентов a_n, a_0, b_n, c_n и запишем $F_N(t)$ и $G_N(t)$:

$$a_n = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}(\cos(t)+t)\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = \frac{1}{4\pi n^2\left(16n^2-9\right)}\left(\left(32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$+\left(24n^2-32n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(128\pi n^3-72\pi n\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(48n^2-27\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)$$

$$\left.+\left(18\pi n-32\pi n^3\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(27-48n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}(\cos(t)+t)\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)dt = -\frac{1}{4\pi n^2\left(16n^2-9\right)}\left(\left(32n^3-24n^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$+\left(32n^3-24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(-32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(27-48n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(128\pi n^3-72\pi n\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+$$

$$\left.+\left(48n^2-27\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(18\pi n-32\pi n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

$$c_n = \frac{2}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}(\cos(t)+t)\,e^{-\frac{4i}{3}nt}\,dt = \frac{1}{4\pi n^2\left(16n^2-9\right)}\left(\left(32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(24in^2-32in^3\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$+\left(32n^3+24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(-32in^3-24in^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(24n^2-32n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+$$

$$+\left(24in^2-32in^3\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32in^3+24in^2\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+$$

$$+\left(128\pi n^3+48in^2-72\pi n-27i\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(-128i\pi n^3+48n^2+72i\pi n-27\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+$$

$$\left.+\left(-32\pi n^3-48in^2+18\pi n+27i\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32i\pi n^3-48n^2-18i\pi n+27\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{4}{3\pi}\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}(\cos(t)+t)\;dt = \frac{4}{3\pi}\left(\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}\cos(t)\,dt+\int\limits_{0.5\pi}^{2\pi}t\,dt\right) = \frac{4}{3\pi}\left(\sin(t)+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{0.5\pi}^{2\pi} = \frac{15\pi^2-8}{6\pi}$$

$$F_N(t) = \frac{15\pi^2-8}{12\pi}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4\pi n^2\left(16n^2-9\right)}\left(\left(\left(32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\right.\right.$$

$$+\left(24n^2-32n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(128\pi n^3-72\pi n\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+$$

$$\left.+\left(48n^2-27\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(18\pi n-32\pi n^3\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(27-48n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\cos\left(\frac{4}{3}nt\right)+$$

$$-\left(\left(32n^3-24n^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(32n^3-24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$+\left(-32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(27-48n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(128\pi n^3-72\pi n\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+$$

$$\left.\left.+\left(48n^2-27\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(18\pi n-32\pi n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{4}{3}nt\right)\right)$$

$$G_N = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{4\pi n^2\left(16n^2-9\right)}\left(\left(32n^3-24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(24in^2-32in^3\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\right.$$

$$+\left(32n^3+24n^2\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(-32in^3-24in^2\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(24n^2-32n^3\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+$$

$$+\left(24in^2-32in^3\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32n^3+24n^2\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32in^3+24in^2\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+$$

$$+\left(128\pi n^3+48in^2-72\pi n-27i\right)\sin\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+\left(-128i\pi n^3+48n^2+72i\pi n-27\right)\cos\left(\frac{8\pi n}{3}\right)+$$

$$\left.+\left(-32\pi n^3-48in^2+18\pi n+27i\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\left(32i\pi n^3-48n^2-18i\pi n+27\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)e^{\frac{4i}{3}nt}$$

Вычислим программно значения коэффициентов при N=3:

```
a_3=0.0282942121052258
b_3=-0.613176848420903
c_3=0.0141471060526129 + 0.306588424210452*I
```

Построим графики $F_N(t)$ для различных значений N. Примеры использования кода были приведены ранее, здесь также используется упрощенный алгоритм для одной функции на одном интервале. Оранжевым цветом нарисована $F_N(t)$ поверх функции $f(t)$

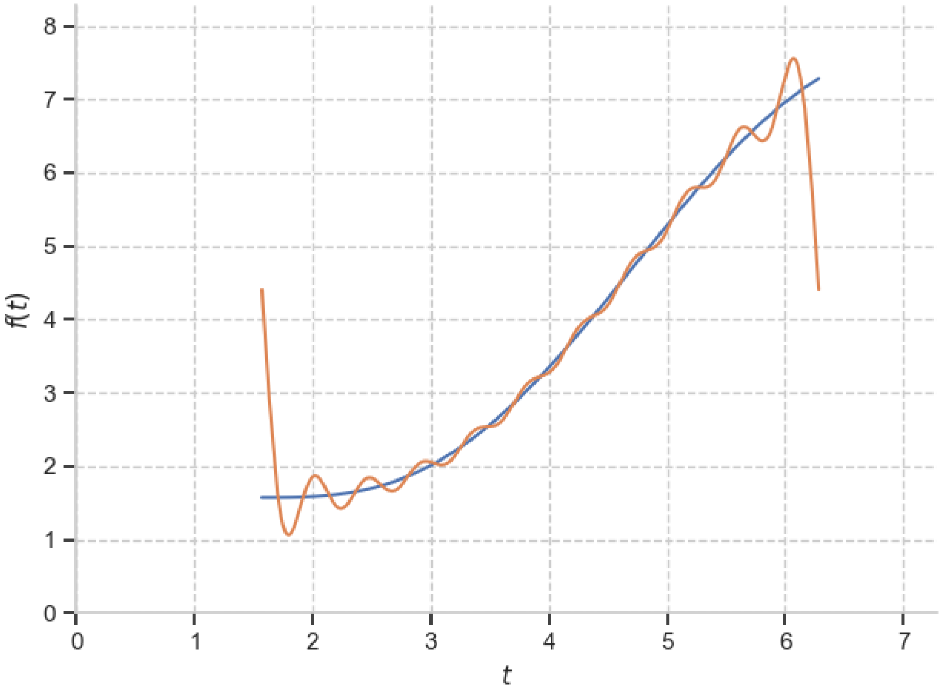

Рис. 30: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при N=10

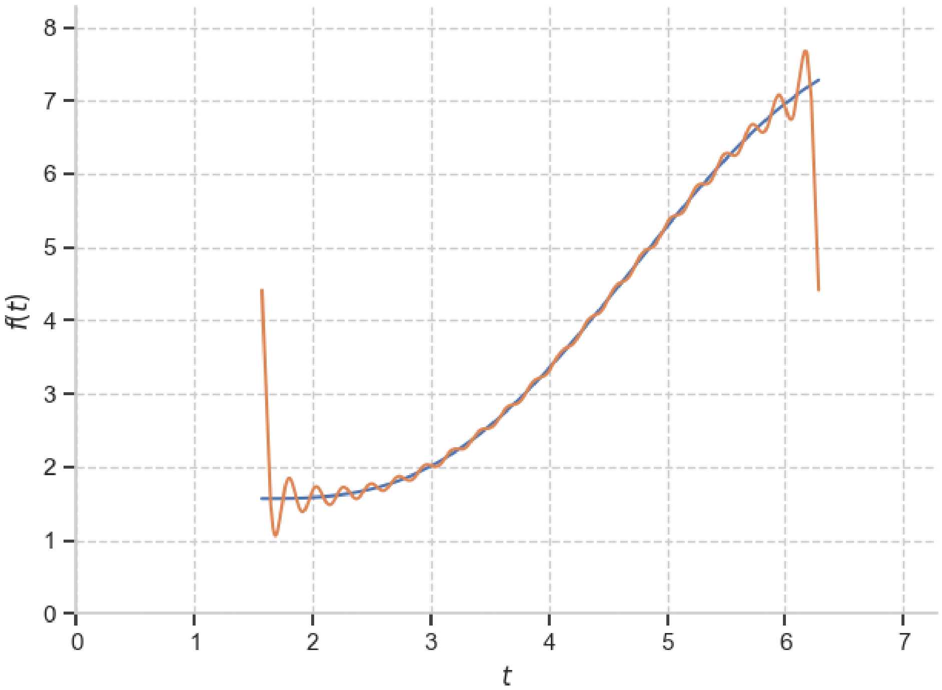

Рис. 31: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при N=20

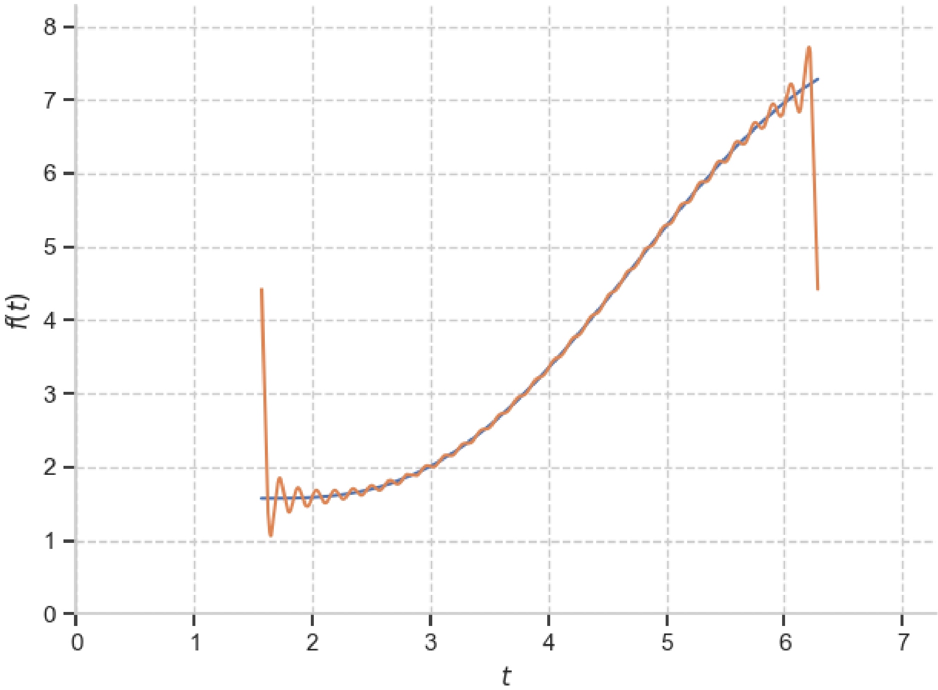

Рис. 32: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при N=30

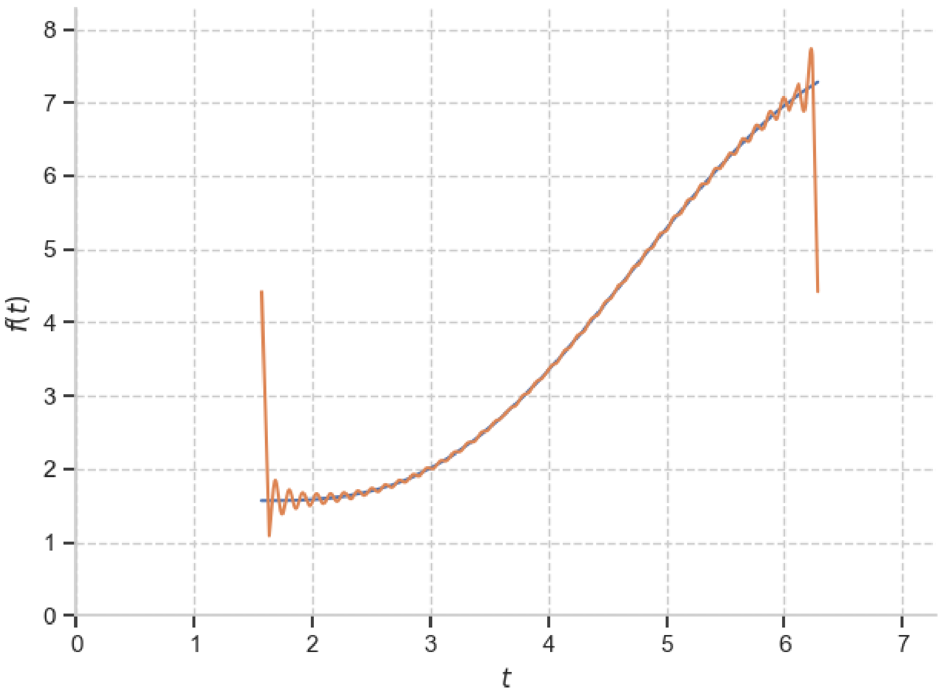

Рис. 33: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при N=40

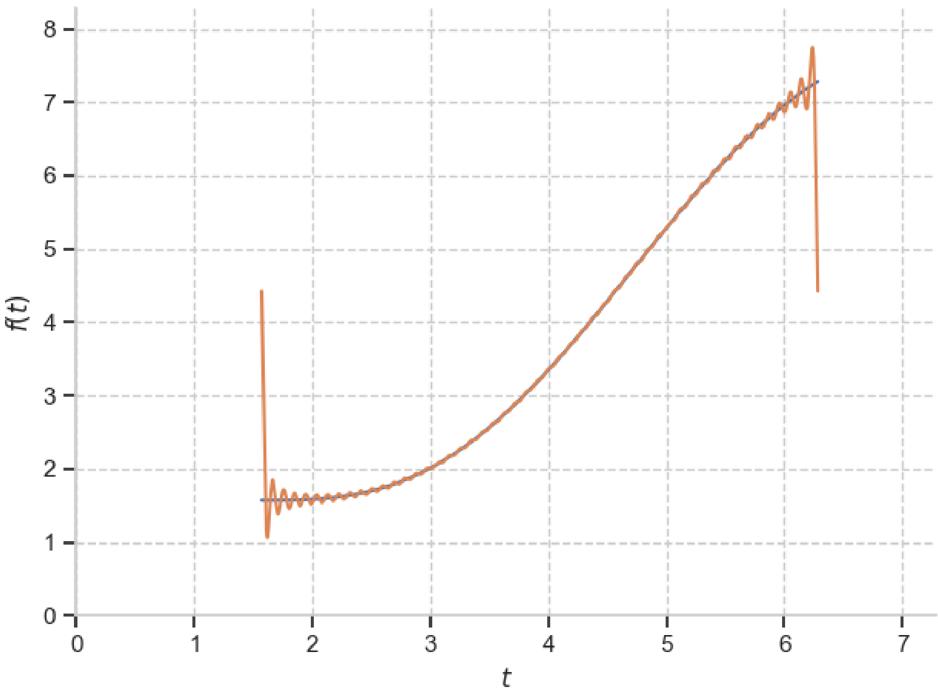

Рис. 34: График $F_N(t)$ ни чётной, ни нечётной периодической функции при N=50

Снова наблюдаем как ряд Фурье хорошо описывает заданную функцию. В данном случае в сумме ряда Фурье достаточно и синусов и косинусов, что позволяет описать ни чётную, ни нечётную функцию. Преобладание синусов приведет к графику, похожему на синусоиду, а косинусов на косинусоиду

Проверим выполнение равенства Парсеваля при N=10, 25, 50, 100 соответственно:

```
coeffs_sum=17.3721304758656
coeffs_sum=17.4647269560923
coeffs_sum=17.4968192131263
coeffs_sum=17.5131052270956
sqf_res=17.5295542168181
```

При N≥100 сумма коэффициентов близка к значению интеграла функции, следовательно сумма коэффициентов стремится к равенству Парсеваля

2 Комплексная функция

2.1 Комплекснозначная функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$

Зададим числа R, $T > 0$. Пусть $R = 2$, $T = 2\pi$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 4 - 8t/\pi, & t \in [\pi/4, 3\pi/4), \\ -2, & t \in [3\pi/4, 5\pi/4), \\ -12 + 8t/\pi, & t \in [5\pi/4, 7\pi/4), \end{cases} \qquad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 8t/\pi, & t \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 2, & t \in [\pi/4, 3\pi/4), \\ 8 - 8t/\pi, & t \in [3\pi/4, 5\pi/4), \\ -2, & t \in [5\pi/4, 7\pi/4), \end{cases}$$

Прежде чем строить график $f(t)$ на языке программирования python с использованием библиотеки sympy, познакомимся с файлом static.py для задания 2:

```python
import sympy as sp

R = 2
T = 2 * sp.pi

pN = 25
N = 3
N_1 = 1
N_2 = 2
N_3 = 3
N_4 = 10

t = sp.Symbol('t')

point_common = T / 8

point_1 = -point_common
point_1_val = float(point_1.evalf())

point_2 = point_common
point_2_val = float(point_2.evalf())

point_3 = 3 * point_common
point_3_val = float(point_3.evalf())

point_4 = 5 * point_common
point_4_val = float(point_4.evalf())

point_5 = 7 * point_common
point_5_val = float(point_5.evalf())

gap_1 = [point_1, point_2]
gap_2 = [point_2, point_3]
gap_3 = [point_3, point_4]
gap_4 = [point_4, point_5]
gaps = [gap_1, gap_2, gap_3, gap_4]

gap_len = gap_4[1] - gap_1[0]
gap_len_val = float(gap_len.evalf())

# can not compare expressions with a
# variable like "t" so bad code here
def gap_1_cfunc(t):
    return R + (8 * R * t / T) * 1j

def gap_2_cfunc(t):
    return 2 * R - (8 * R * t / T) + R * 1j

def gap_3_cfunc(t):
    return -R + (4 * R - (8 * R * t / T)) * 1j

def gap_4_cfunc(t):
    return -6 * R + (8 * R * t / T) - R * 1j
```

Аналогично принципу из задания 1 из этого файла будут импортироваться все необходимые данные для работы с рядом Фурье и построения графиков. Я задал функции, объединив действительные и мнимые части на одинаковых интервалах по типу $z = a + ib$ и упростил выражения

Пример кода для построения параметрического графика комплекснозначной функции:

```python
f_c_1, f_c_2, f_c_3, f_c_4 = gap_1_cfunc(t), gap_2_cfunc(t), gap_3_cfunc(t), gap_4_cfunc(t)
def build_f_t():
    sp.plot_parametric((sp.re(f_c_1), sp.im(f_c_1), (t, gaps[0][0], gaps[0][1])),
                       (sp.re(f_c_2), sp.im(f_c_2), (t, gaps[1][0], gaps[1][1])),
                       (sp.re(f_c_3), sp.im(f_c_3), (t, gaps[2][0], gaps[2][1])),
                       (sp.re(f_c_4), sp.im(f_c_4), (t, gaps[3][0], gaps[3][1])),
                       xlabel=r'Re$(t)$', ylabel=r'Im$(t)$')
```

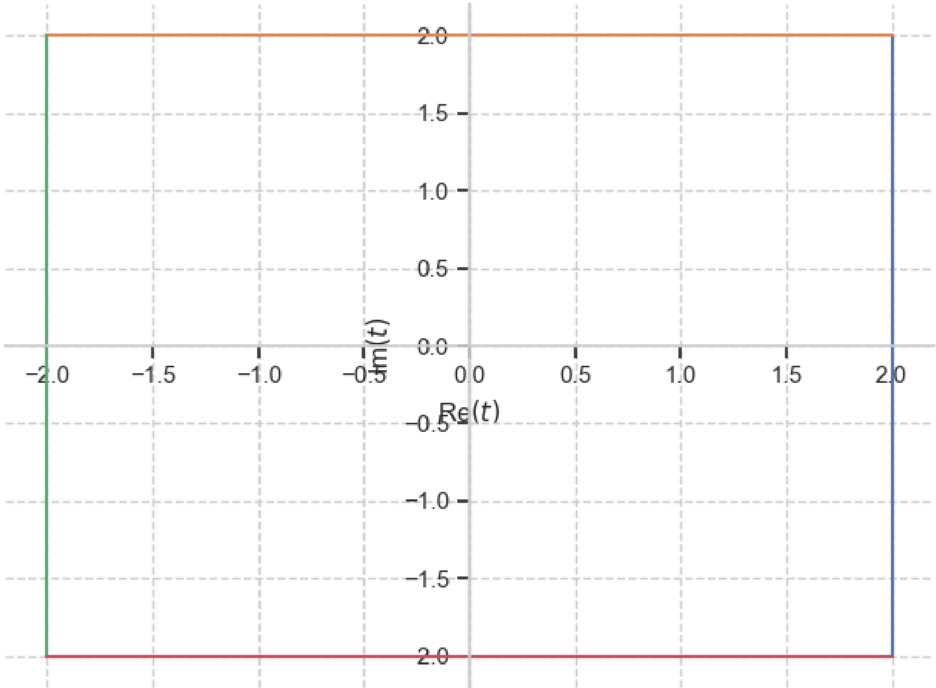

Рис. 35: Параметрический график $f(t)$ комплекснозначной функции

Запишем коэффициент c_n:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_h^{h+T} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt + \right.$$
$$\left.\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt + \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(-14+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt\right)$$

Рассмотрим отдельно интеграл функции $2+{}^{8t}/_{\pi}$ на промежутке $[-{}^{\pi}/_{4}, {}^{\pi}/_{4})$:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt = \begin{bmatrix} u = 2+{}^{8t}/_{\pi} & v = \int e^{-int}\,dt \\ du = {}^{8}/_{\pi}\,dt & dv = e^{-int}\,dt \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$v = \int e^{-int}\,dt = \begin{bmatrix} x = -int \\ dx = -in\,dt \\ dt = {}^{i}/_{n}\,dx \end{bmatrix} = \frac{i}{n}\int e^x\,dx = \frac{i}{n}e^x = \frac{i}{n}e^{-int}, \tag{2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \Rightarrow (1) = \frac{i}{n}\left(2+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{8i}{\pi n}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-int}\,dt, \tag{3}$$

$$\frac{i}{n}\left(2+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{i}{n}\left(\left(2+\frac{8\cdot{}^{\pi}/_{4}}{\pi}\right)e^{-\frac{\pi}{4}in} - \left(2+\frac{8\cdot(-{}^{\pi}/_{4})}{\pi}\right)e^{\frac{\pi}{4}in}\right) = \frac{4i}{n}e^{-\frac{\pi}{4}in}, \tag{4}$$

$$-\frac{8i}{\pi n}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-int}\,dt = -\frac{8i}{\pi n}\cdot\frac{i}{n}e^{-int}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi n^2}e^{-int}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi n^2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in} - e^{\frac{\pi}{4}in}\right), \tag{5}$$

$$(1)=(4)+(5)=\frac{4i}{n}e^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{8}{\pi n^2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)=\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)\right) \tag{6}$$

Остальные интегралы решаются аналогичным способом, поэтому я приведу неполное решение для них:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt=\frac{i}{n}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{8}{\pi n^2}e^{-int}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}in}-e^{-\frac{\pi}{4}in}\right)\right)$$

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt=\frac{i}{n}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}-\frac{8}{\pi n^2}e^{-int}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=-\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{5\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{5\pi}{4}in}-e^{-\frac{3\pi}{4}in}\right)\right)$$

$$\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(-14+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\,dt=\frac{i}{n}\left(-14+\frac{8t}{\pi}\right)e^{-int}\Bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}+\frac{8}{\pi n^2}e^{-int}\Bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}=\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{5\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)\right)$$

Суммируем все вычисленные интегралы и упростим выражение:

$$\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)\right)-\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}in}-e^{-\frac{\pi}{4}in}\right)\right)-\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{5\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{5\pi}{4}in}-e^{-\frac{3\pi}{4}in}\right)\right)+$$
$$+\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{5\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)\right)=\frac{4}{n}\left(ie^{-\frac{\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)-ie^{-\frac{\pi}{4}in}-\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}in}-e^{-\frac{\pi}{4}in}\right)+\right.$$
$$\left.-ie^{-\frac{5\pi}{4}in}-\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{5\pi}{4}in}-e^{-\frac{3\pi}{4}in}\right)+ie^{-\frac{5\pi}{4}in}+\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)\right)=\frac{4}{n}\cdot\frac{2}{\pi n}\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}-e^{-\frac{3\pi}{4}in}+e^{-\frac{\pi}{4}in}+\right.$$
$$\left.-e^{-\frac{5\pi}{4}in}+e^{-\frac{3\pi}{4}in}+e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)=\frac{8}{\pi n^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)+e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)$$

Тогда коэффициент c_n будет иметь вид:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8}{\pi n^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)+e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)=\frac{4}{(\pi n)^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)+e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)$$

Получим следующий ряд Фурье $G_N(t)$:

$$G_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{4e^{int}}{(\pi n)^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{4}in}-e^{-\frac{5\pi}{4}in}\right)+e^{-\frac{7\pi}{4}in}-e^{\frac{\pi}{4}in}\right)$$

Вычислим коэффициенты c_0, c_1, c_2:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2+\frac{8t}{\pi}\right)dt+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)dt+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(6-\frac{8t}{\pi}\right)dt+\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(-14+\frac{8t}{\pi}\right)dt\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\left(2t+\frac{8t^2}{2\pi}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\right.$$
$$\left.+\left(6t-\frac{8t^2}{2\pi}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\left(6t-\frac{8t^2}{2\pi}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+\left(-14t+\frac{8t^2}{2\pi}\right)\Bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\right)=\frac{1}{2\pi}(\pi+\pi-\pi-\pi)=0$$
$$c_1=\frac{4}{\pi^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{5\pi}{4}i}\right)+e^{-\frac{7\pi}{4}i}-e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\frac{8}{\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)$$
$$c_2=\frac{1}{\pi^2}\left(2\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}-e^{-\frac{5\pi}{2}i}\right)+e^{-\frac{7\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)=0$$

Воспользуемся ранее написанной программой и вычислим c_3:

```
c_3=-1.24943987955415e-17 + 8.74607915687906e-17*I
```

Далее построим параметрические графики $G_N(t)$ для N=1, 2, 3, 10. $G_N(t)$ нарисована фиолетовым цветом поверх параметрического графика $f(t)$

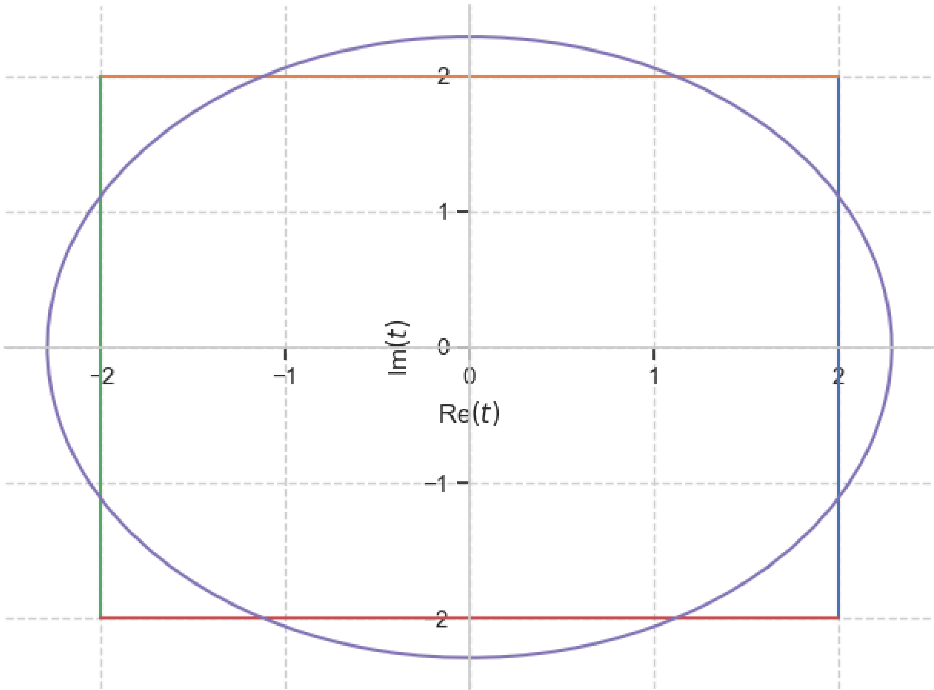

Рис. 36: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=1

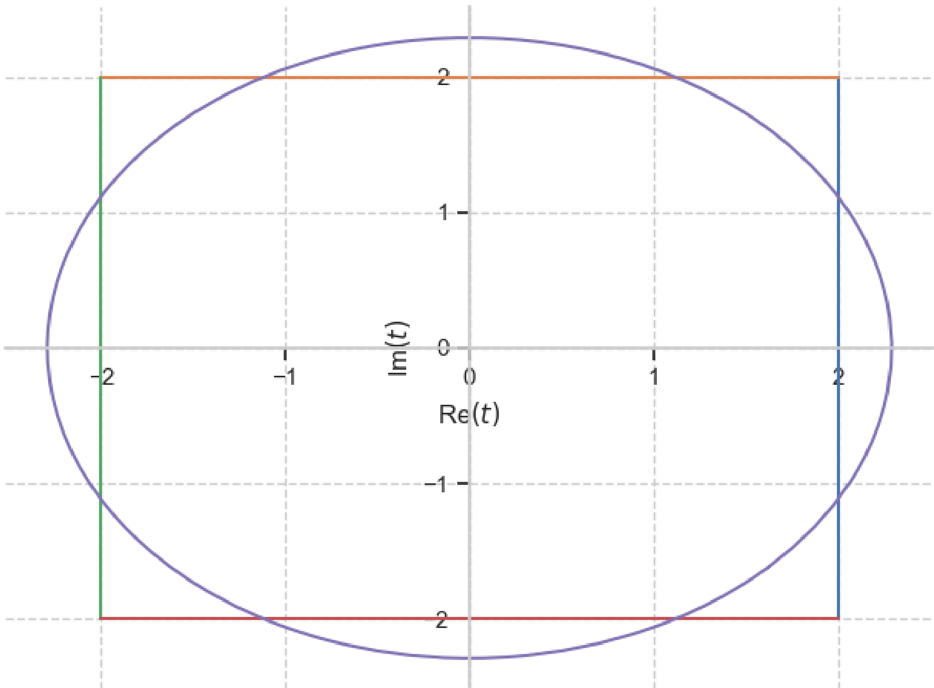

Рис. 37: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=2

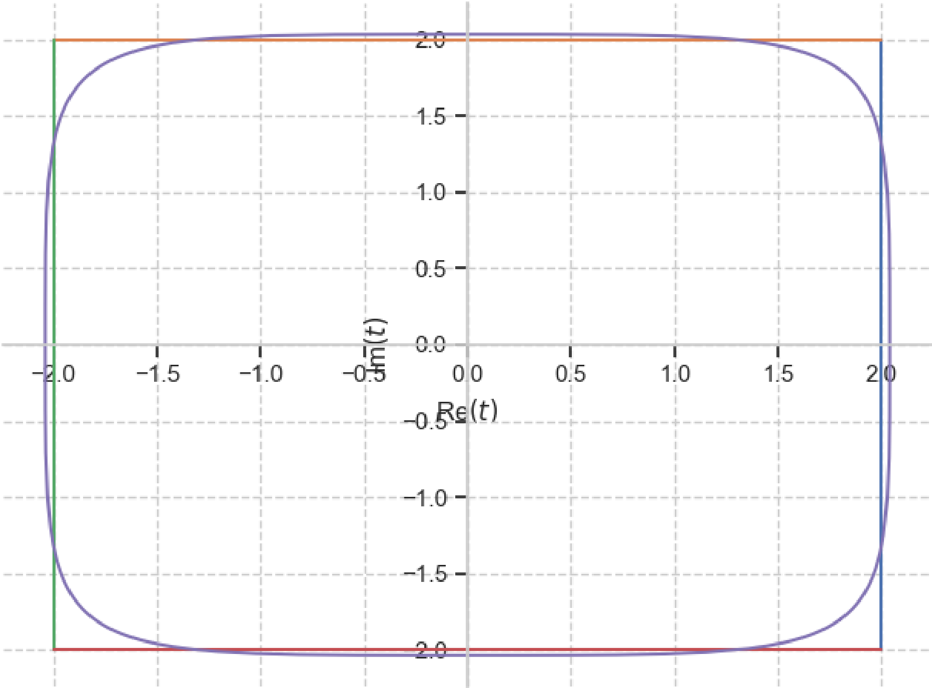

Рис. 38: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=3

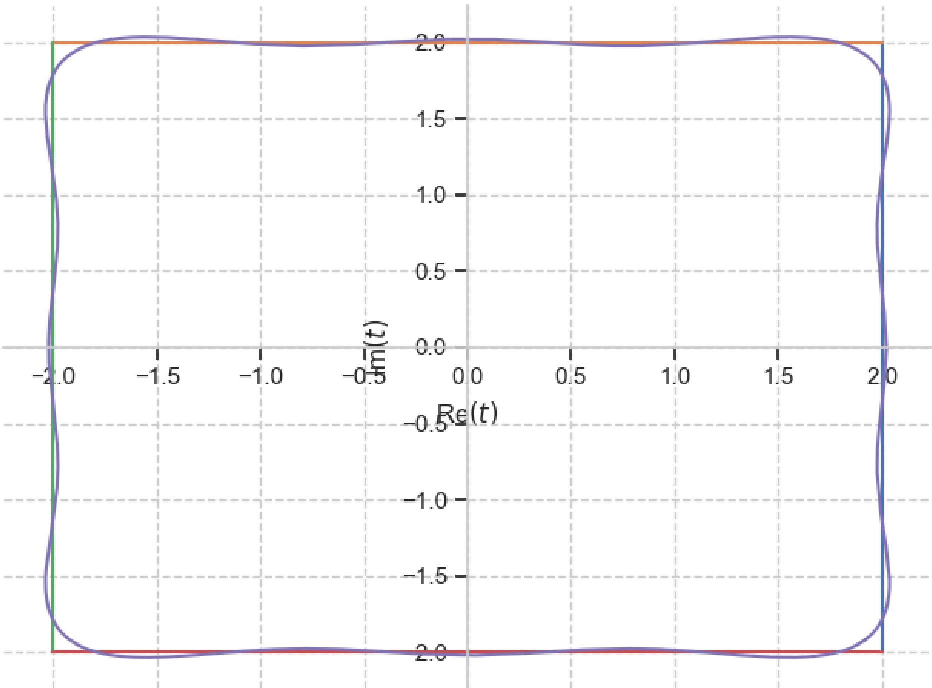

Рис. 39: График $G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=10

Как видим, при N<3 график $G_N(t)$ напоминает эллипс, а при N$\geq$ 3 стремится к квадрату, то есть к функции $f(t)$

Далее построим графики $\operatorname{Re} f(t)$, $\operatorname{Im} f(t)$ и графики $\operatorname{Re} G_N(t)$, $\operatorname{Im} G_N(t)$ для N=1, 2, 3, 10. Пример кода для построения графика $\operatorname{Re} G_N(t)$:

```python
funcs = [gap_1_cfunc, gap_2_cfunc, gap_3_cfunc, gap_4_cfunc]
def build_Re_G_N(N):
    G_N = calc_G_N_generic(N, gaps, funcs)
    sp.plot((sp.re(G_N), (t, gaps[0][0], gaps[-1][1])),
            xlabel=r'$t$', ylabel=r'Re$(G_{N}(t))$')
build_Re_G_N(N_1)
```

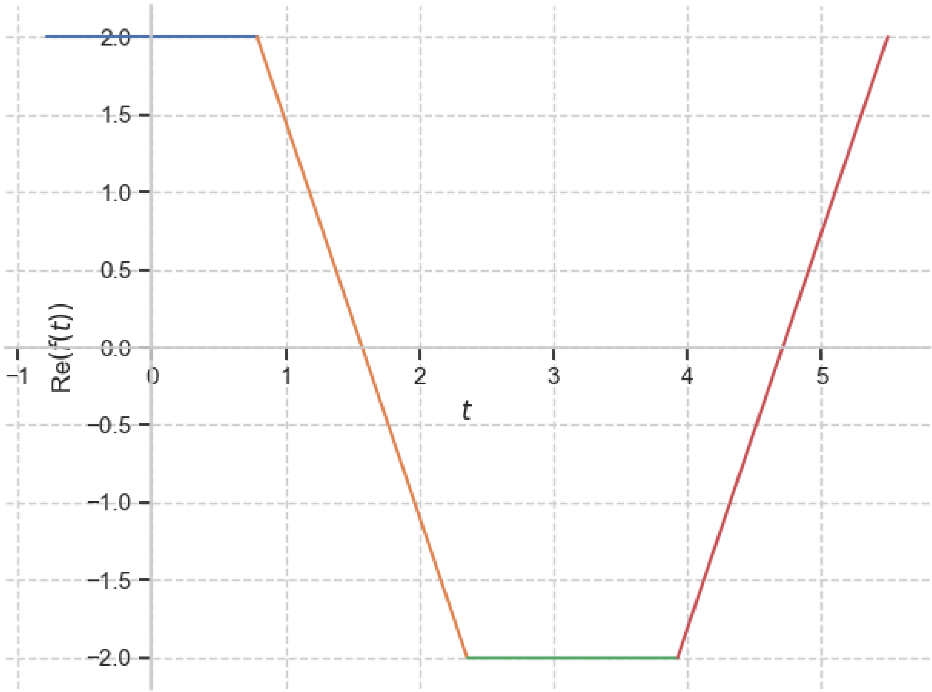

Рис. 40: График $\mathrm{Re}\, f(t)$ комплекснозначной функции

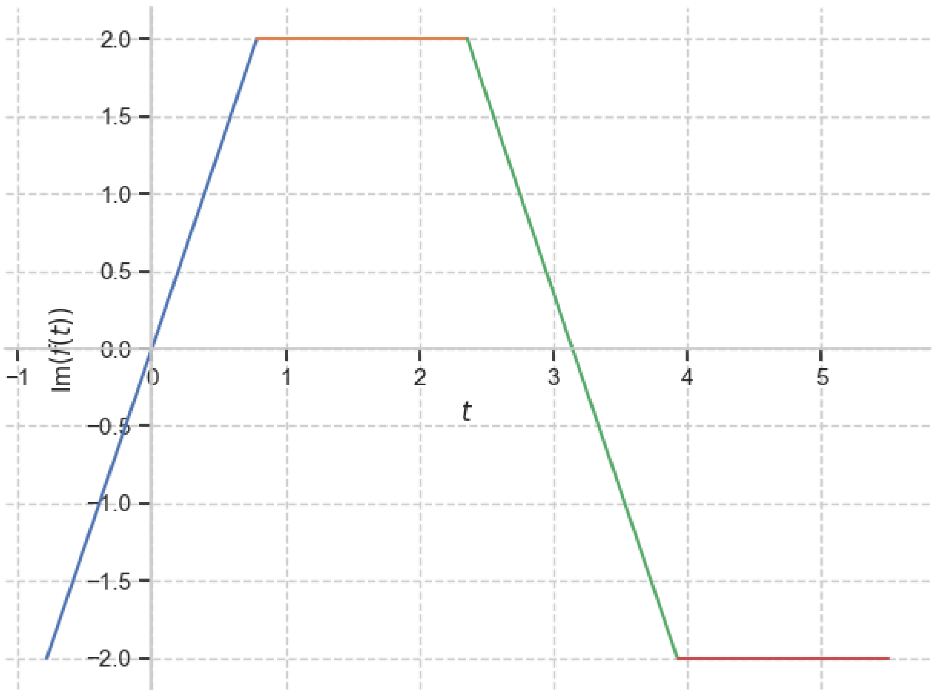

Рис. 41: График $\mathrm{Im}\, f(t)$ комплексноначной функции

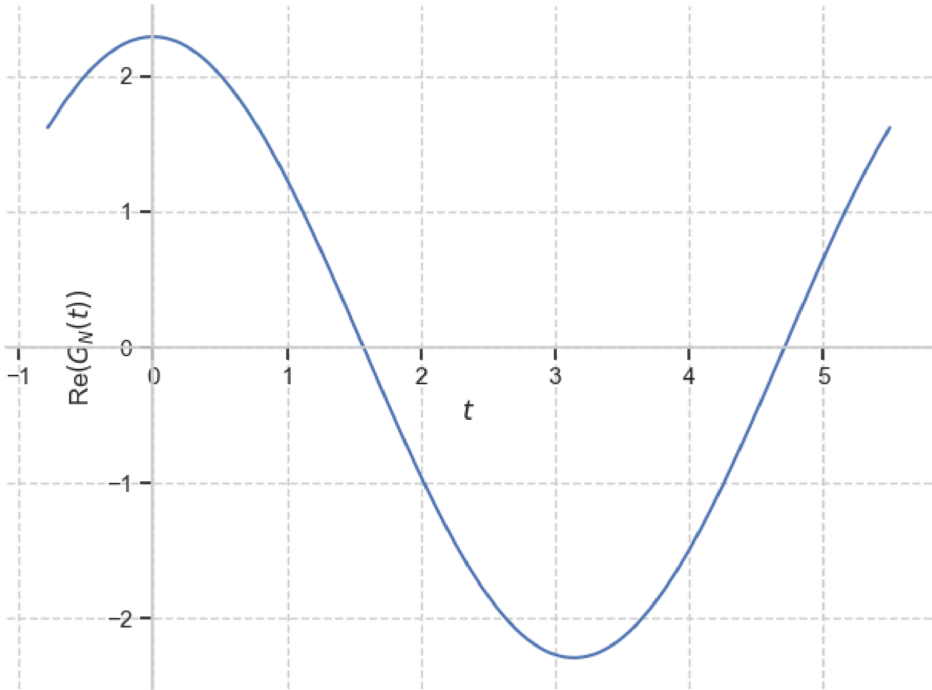

Рис. 42: График $\operatorname{Re} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=1

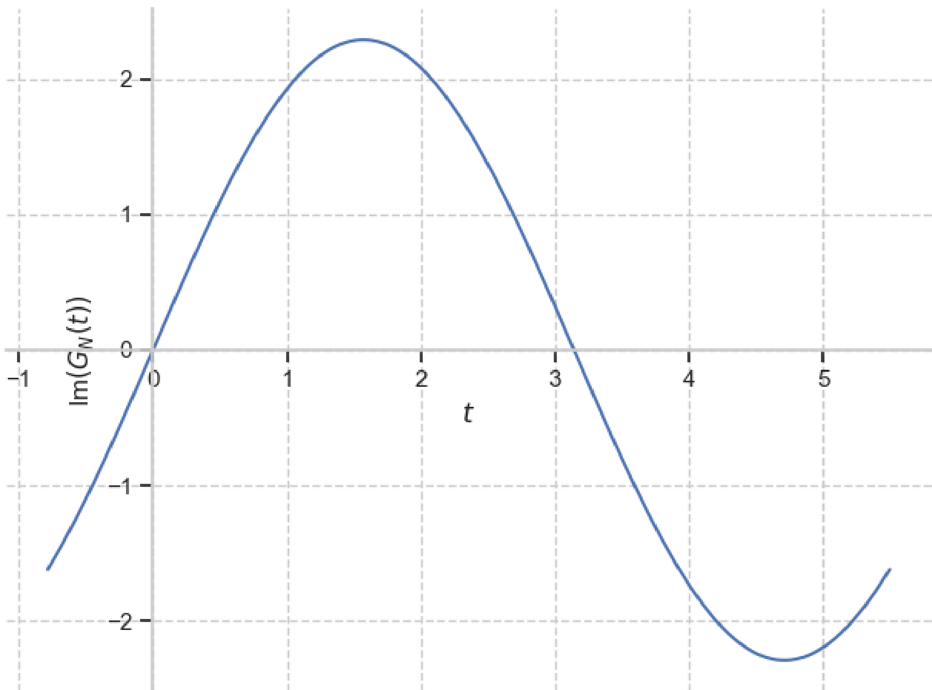

Рис. 43: График $\operatorname{Im} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=1

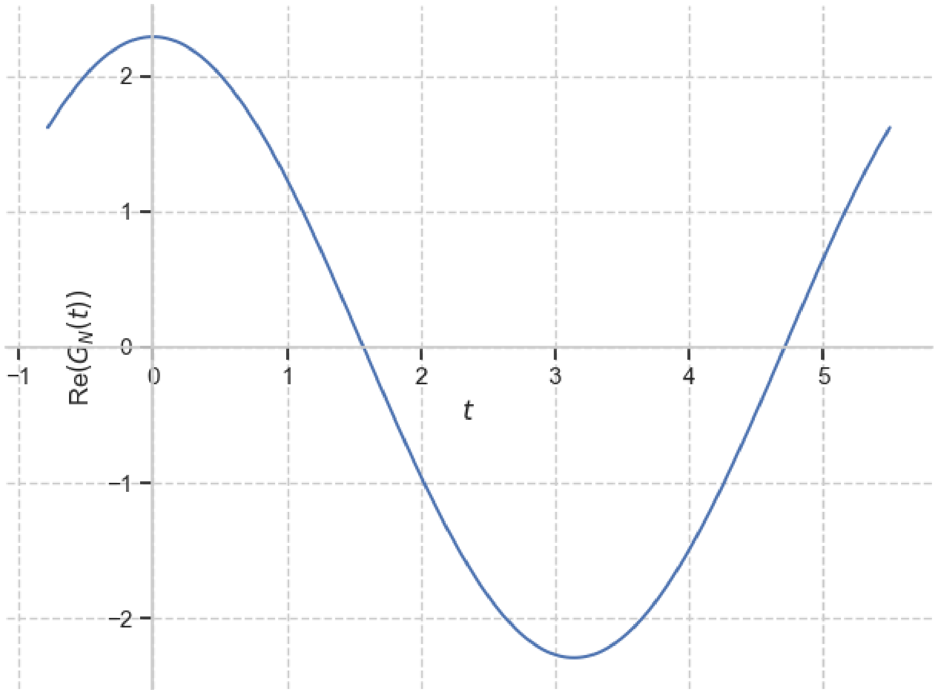

Рис. 44: График $\operatorname{Re} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=2

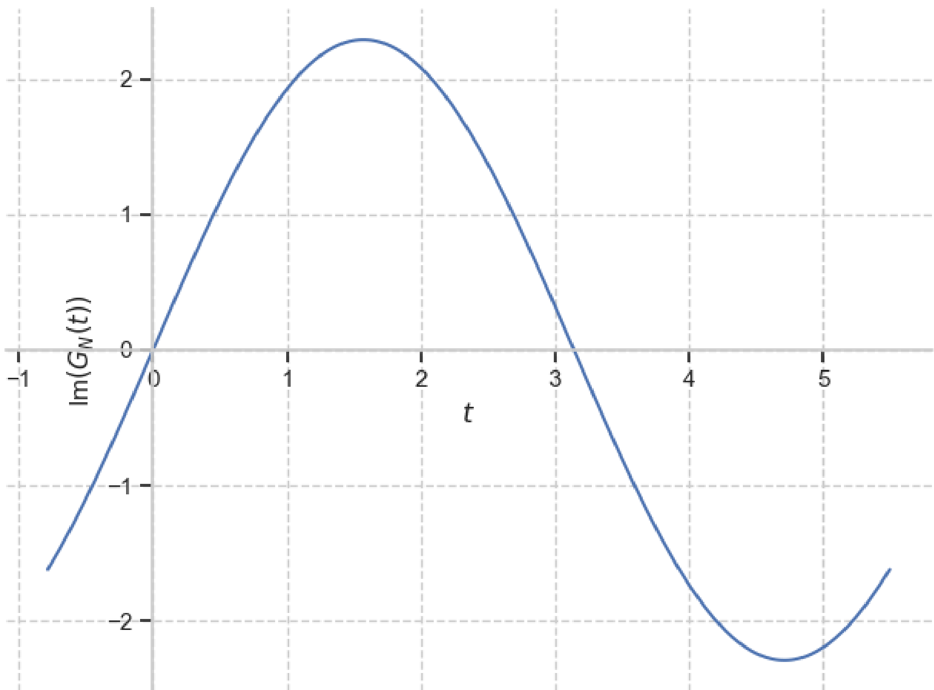

Рис. 45: График $\operatorname{Im} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=2

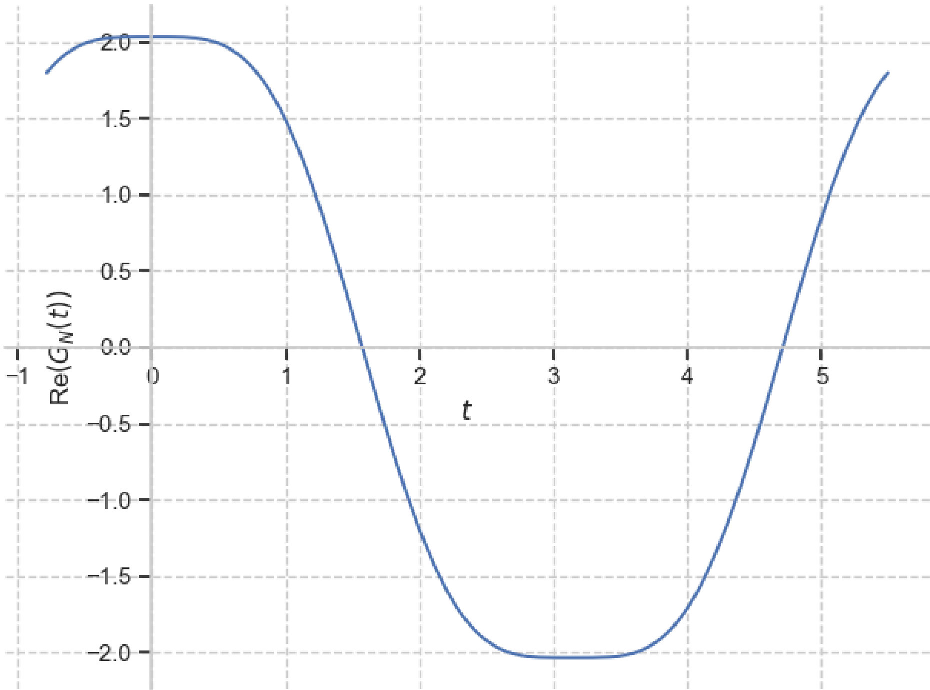

Рис. 46: График $\operatorname{Re} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=3

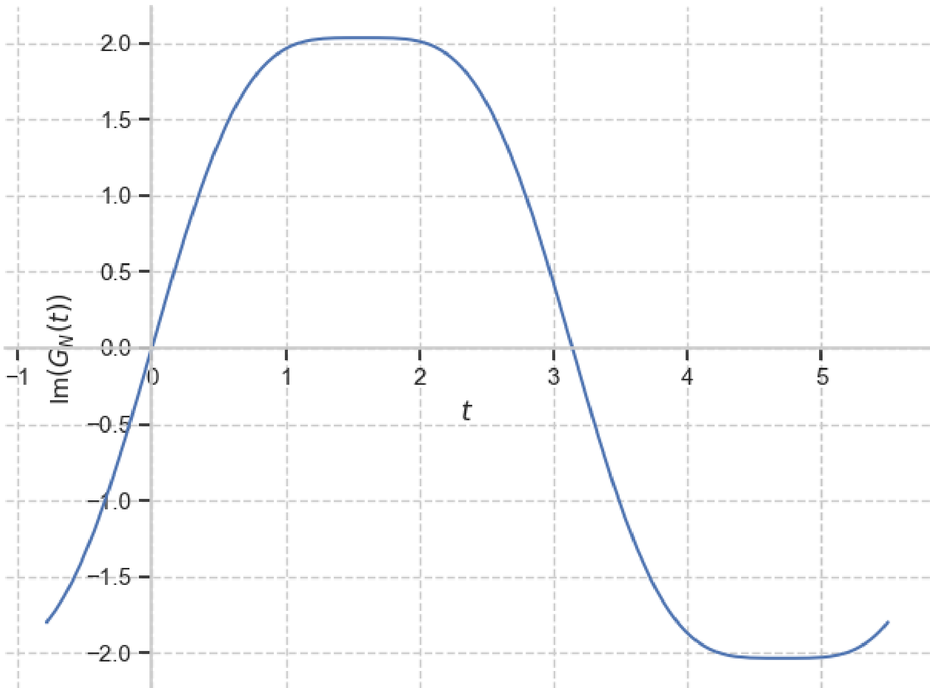

Рис. 47: График $\operatorname{Im} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=3

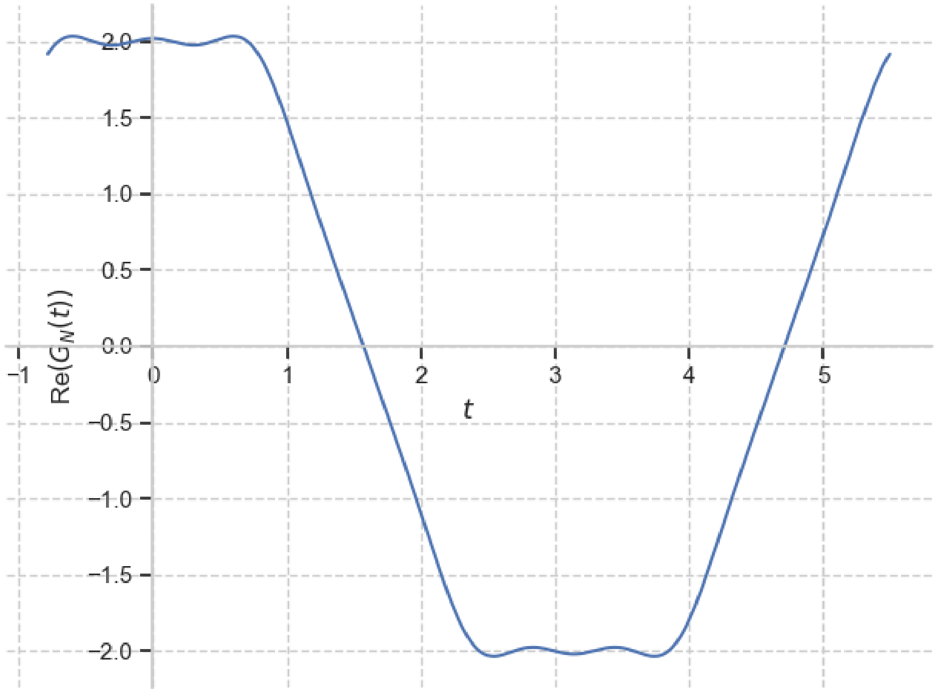

Рис. 48: График $\operatorname{Re} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=10

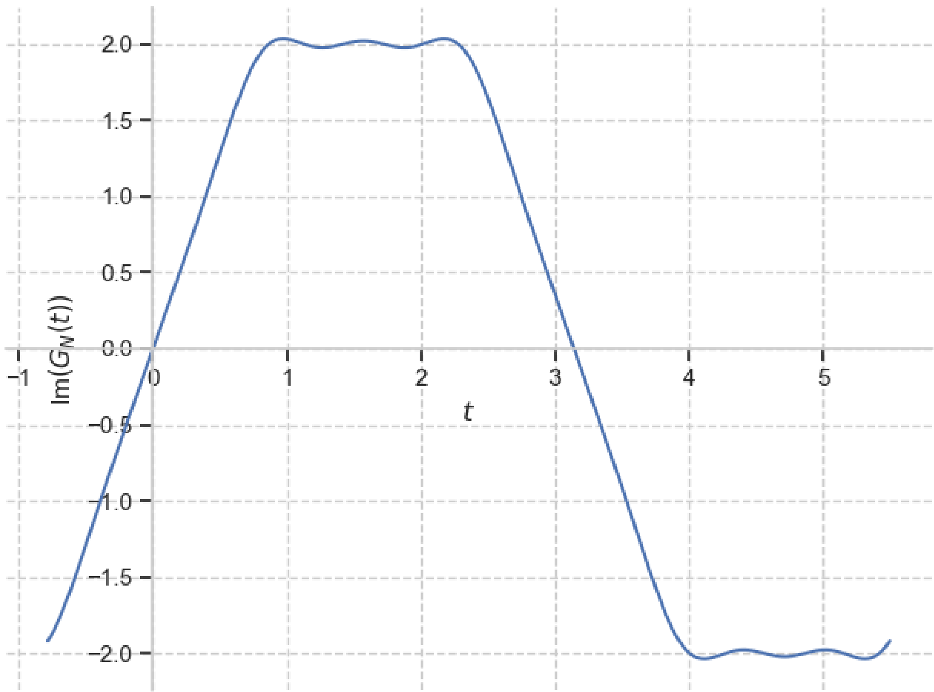

Рис. 49: График $\operatorname{Im} G_N(t)$ комплекснозначной функции при N=10

Видим, как при увеличении N график $\operatorname{Re} G_N(t)$ стремится к $\operatorname{Re} f(t)$, а $\operatorname{Im} G_N(t)$ к $\operatorname{Im} f(t)$. График функции $\operatorname{Re} f(t)$ и графики функции $\operatorname{Re} G_N(t)$ симметричны относительно оси ординат, что означает, что мы видим чётную функцию. Значит график функции $\operatorname{Re} G_N(t)$ так или иначе является графиком суммы косинусов. График функции $\operatorname{Im} f(t)$ и графики функции $\operatorname{Im} G_N(t)$ симметричны относительно начала координат, то есть представляют собой нечётную функцию, значит так или иначе график функции $\operatorname{Im} G_N(t)$ является графиком суммы синусов

Проверим равенство Парсеваля тем же кодом, что и ранее. Результат при N=10:

```
coeffs_sum=5.33247424348813    sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=25:

```
coeffs_sum=5.33328363761286    sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=50:

```
coeffs_sum=5.33332633068821    sqf_res=5.33333333333332
```

Результат при N=100:

```
coeffs_sum=5.33333245747799    sqf_res=5.33333333333332
```

Видим, что сумма коэффициентов стремится к равенству Парсеваля, но в чистом виде оно не выполняется

3 Вывод

В ходе выполнения работы я расширил свои знания о ряде Фурье, научился строить графики ряда Фурье, проанализировал построенные графики, познакомился с равенством Парсеваля и проверил его выполнение для каждой функции