Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПО ПРЕДМЕТУ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»
ПО ТЕМЕ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ»

Лектор: Перегудин А. А.
Практик: Пашенко А. В.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР
Группа: R3241

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1 Введение

Все графики строятся программой, написанной на языке программирования python. В 1 и 2 заданиях используется библиотека sympy, в задании 3 numpy и matplotlib. По ходу отчета приводится код для каждого задания

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω. Подсчет Фурье--образа производится по формуле ниже

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Далее будет использоваться программная реализация, приведенная ниже

```
def find_fimg(f_t, lim1, lim2):
    integrand = f_t * E ** (-I * omega * t)

    result = integrate(integrand, (t, lim1, lim2))
    return coeff * result
```

Листинг 1: Программная реализация вычисления Фурье-образа с угловой частотой ω

В задании 3 используется преобразование Фурье к обыкновенной частоте ν. В общем виде формула имеет вид

$$\hat{f}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt$$

Для проверки равенства Парсеваля используется формула ниже

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2,$$

где $||f||_2$ – вторая норма заданной фукнции, $||\hat{f}||_2$ – вторая норма Фурье-образа функции f. Для нахождения нормы используются формулы, представленные ниже

$$||f(t)||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b f(t) \cdot f^*(t)\, dt}, \qquad ||\hat{f}(\omega)||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}^*(\omega)\, d\omega}$$

Далее для поиска нормы и проверки равенства Парсеваля будет по умолчанию использоваться программа, представленная ниже. Пример использования расположен на 12-14 строчках листинга

```
1  def find_norm2(f, lim1, lim2, var):
2      integrand = f * conjugate(f)
3
4      result = integrate(integrand, (var, lim1, lim2)).evalf()
5      return sqrt(result).evalf()
6
7  def find_parseval(f, fimg, lim1, lim2):
8      pleft = find_norm2(f, lim1, lim2, t)
9      pright = find_norm2(fimg, lim1, lim2, omega)
10     return pleft, pright
11
12 func = rectangular_function(1, 2)
13 pl, pr = find_parseval(func, find_fimg(func, -oo, oo), -oo, oo)
14 print(f'p_{1}: {pl} ?= {pr}')
```

Листинг 2: Программа для вычисления нормы и левой и правой стороны равенства Парсевался

Для всех интегралов и графиков есть место с общими переменными и значениями – файл static.py. Основные используемые данные приведены ниже

```
t = Symbol('t')
omega = Symbol('omega')
interval = [-oo, oo]
a_b_pars = [(1, 2), (2, 3), (3, 4)]
consts = [-1, 0.5, 1]
colors_strs = ['red', 'purple', 'blue', 'cyan']
```

Листинг 3: Основные данные из файла static.py

В этом файле программно заданы функции, графики которых приводятся по ходу отчета. Также они необходимы для нахождения их Фурье-образа

```
    def rectangular_function(a, b):
        return Piecewise((a, Abs(t) <= b), (0, Abs(t) > b))

    def triangular_function(a, b):
        return Piecewise((a - Abs(a * t / b), Abs(t) <= b), (0, Abs(t) > b))

    def cardinal_sinus(a, b):
        return a * sinc(b * t)

    def gaussian_function(a, b):
        return a * E ** (-b * t ** 2)

    def double_attenuation(a, b):
        return a * E ** (-b * Abs(t))

    def shifted_rectangular_function(a, b, shift):
        if (shift == 0):
            return rectangular_function(a, b)
        return Piecewise((a, Abs(t + shift) <= b), (0, Abs(t + shift) > b))
```

Листинг 4: Программно заданные функции для заданий 1 и 2

2 Задание 1. Вещественное

2.1 Прямоугольная функция

Рассмотрим прямоугольную функцию следующего вида

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ с выводом для прямоугольной функции имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{b} a e^{-i\omega t}\, dt + \int\limits_{b}^{-b} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} e^{-i\omega t}\, dt = \begin{bmatrix} u = -i\omega t \\ du = -i\omega dt \\ dt = -\frac{du}{i\omega} \end{bmatrix} = -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int\limits_{i\omega t}^{-i\omega t} e^{u}\, du =$$

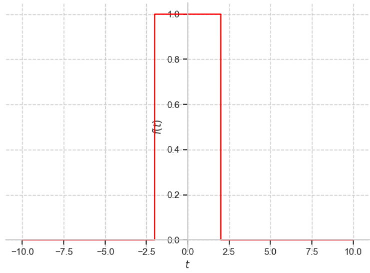
$$= -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} e^{u} \Big|_{i\omega b}^{-i\omega b} = -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}\right) = \frac{a}{\omega\sqrt{2\pi}} \left(2 \cdot \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2i}\right) = \frac{2a}{\omega\sqrt{2\pi}} \sin(b\omega) = \frac{a\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin(b\omega)$$

Для построения графиков $f(t)$ используется метод, представленный ниже. На строках 7-8 приведен пример использования – сначала задается функция, принимающая параметры a и b, после чего вызывается метод build_f_t. Далее в отчете эта программа используется по умолчанию

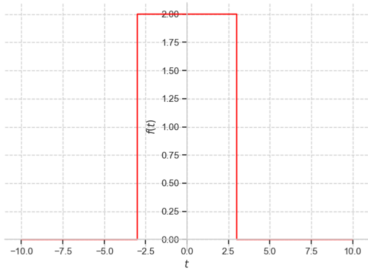
```
1     def build_f_t(f_t, clr, lbl):
2         if (lbl == None):
3             plot(f_t, line_color=clr, xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$')
4         else:
5             plot(f_t, line_color=clr, xlabel=r'$t$', ylabel=r'$f(t)$', label=lbl, legend=True)
6 
7     func = rectangular_function(1, 2)
8     build_f_t(func, 'red', None)
```

Листинг 5: Программа для построения графика $f(t)$

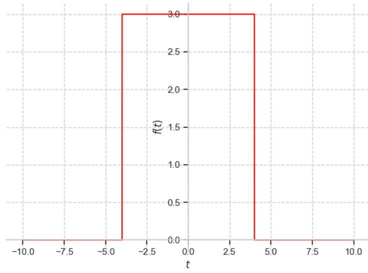
Построенные графики $f(t)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$ расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$



(b) $a = 2,\ b = 3$



(c) $a = 3,\ b = 4$

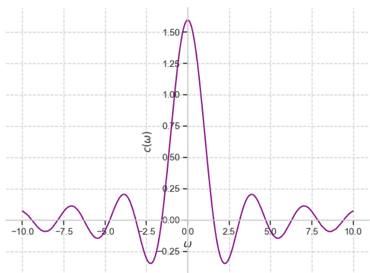
Рис. 1: Прямоугольные функции при различных значениях a и b

Рассмотрим программу. Методом find_fimg, приведенным в введении, находится Фурье-образ заданной функции. Далее методом build_fimg строится график Фурье-образа. На 10-11 строчках располагается пример использования кода

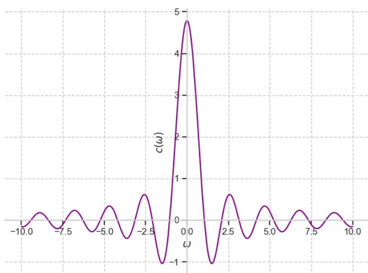
```
1  def build_fimg(fimg, clr, lbl):
2      if (lbl == None):
3          plot(fimg, line_color=clr,
4               xlabel=r'$\omega$', ylabel=r'$c(\omega)$')
5      else:
6          plot(fimg, line_color=clr,
7               xlabel=r'$\omega$', ylabel=r'$c(\omega)$',
8               label=lbl, legend=True)
9
10 rectfimg = find_fimg(rectangular_function(1, 2), -oo, oo)
11 build_fimg(rectfimg, 'purple', None)
```

Листинг 6: Программа для построения графика Фурье-образа некоторой функции $f(t)$

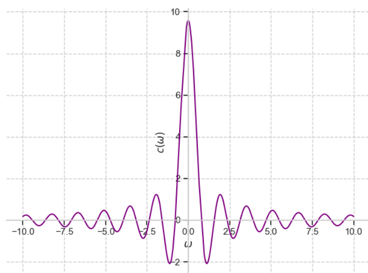
Построенные графики $\hat{f}(\omega)$ для тех же значений a и b расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$



(b) $a = 2,\ b = 3$



(c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 2: Фурье-образы прямоугольных функций при различных значениях a и b

Программа для вычисления левой и правой сторон равенства Парсеваля вывела в консоль результаты, представленные ниже

```
p_1: 2.00000000000000 ?= 2.0 + 0.e-114*I
p_2: 4.89897948556636 ?= 4.89897948556636 + 0.e-114*I
p_3: 8.48528137423857 ?= 8.48528137423857 + 0.e-114*I
```

Листинг 7: Результат выполнения программы для вычисления равенства Парсеваля

Мнимыми частями в правой части равенства Парсеваля пренебрежем вследствие их стремления к нулю. В таком случае равенство Парсеваля выполняется, что можно объяснить тем, что интеграл позволяет рассмотреть норму непрерывно на заданном промежутке, а ряд только дискретно, вследствие чего теряются какие-то члены ряда, которых не хватает для выполнения равенства Парсеваля

2.2 Треугольная функция

Рассмотрим треугольную функцию следующего вида

$$f(t) = \begin{cases} a - \left|\dfrac{at}{b}\right|, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Аналитическое выражение с выводом Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для треугольной функции имеет вид (напоминание: $a, b > 0$ по условию)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-b}^{b} \left(a - \left|\frac{at}{b}\right| \right) e^{-i\omega t}\, dt + \int\limits_{b}^{-b} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} \left(a \cdot \frac{b}{b} - \frac{a}{b}|t| \right) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{a}{b} \right) \int\limits_{-b}^{b} (|t| - b) e^{-i\omega t}\, dt = -\frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(-\int\limits_{-b}^{0} (t+b) e^{-i\omega t}\, dt + \int\limits_{0}^{b} (t-b) e^{-i\omega t}\, dt \right),$$

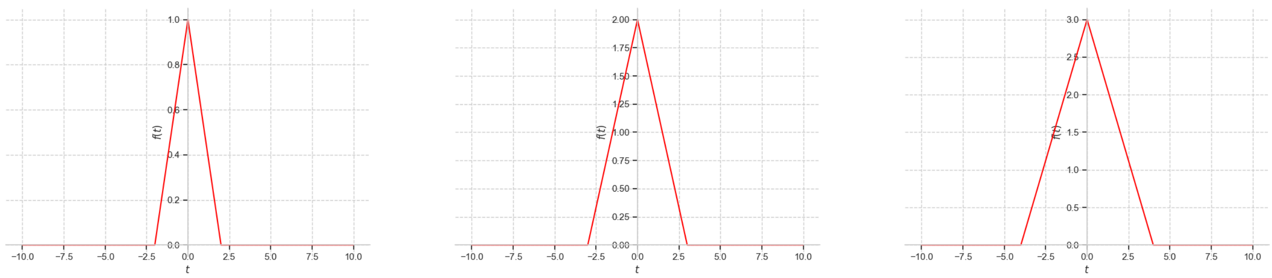
$$-\int\limits_{-b}^{0} (t+b) e^{-i\omega t}\, dt = \begin{bmatrix} u = t + b & v = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \\ du = dt & dv = e^{-i\omega t} dt \end{bmatrix} = -\left(\frac{e^{-i\omega t}(t+b)}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \Bigg|_{-b}^{0} = -\frac{b}{-i\omega} - \frac{1 - e^{i\omega t}}{\omega^2},$$

$$\int\limits_{0}^{b} (t-b) e^{-i\omega t}\, dt = [\text{аналогично}] = \left(\frac{e^{-i\omega t}(t-b)}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \Bigg|_{0}^{b} = \frac{b}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t} - 1}{\omega^2},$$

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{b}{-i\omega} - \frac{1 - e^{i\omega t}}{\omega^2} + \frac{b}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t} - 1}{\omega^2} \right) = -\frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} - 2 \right) =$$

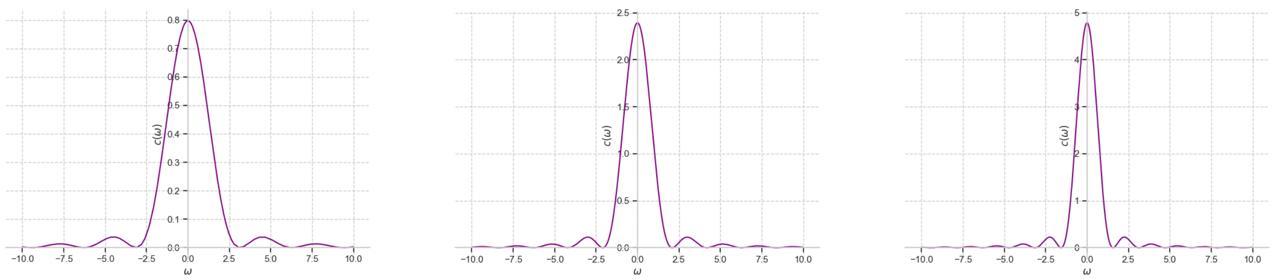
$$= -\frac{2a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - 1 \right) = -\frac{a\sqrt{2}}{b\omega^2\sqrt{\pi}} \left(\cos(b\omega) - 1 \right)$$

Построенные графики функций $f(t)$ и их Фурье-образов $\hat{f}(\omega)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$ расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 3: Треугольные функции при различных значениях a и b



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 4: Фурье-образы треугольных функций при различных значениях a и b

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
    p_1: 1.15470053837925 ?= 1.15470053837925
    p_2: 2.82842712474619 ?= 2.82842712474619
    p_3: 4.89897948556636 ?= 4.89897948556636
```

Листинг 8: Равенство Парсеваля для треугольных функций

Равенство Парсеваля выполняется для треугольной функции

2.3 Кардинальный синус

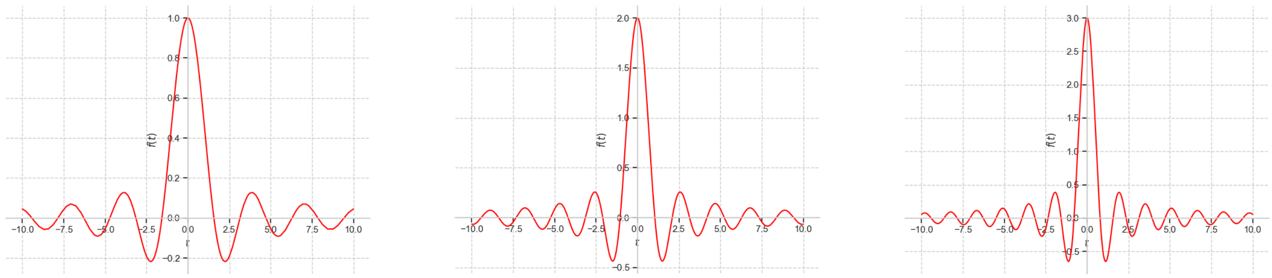
Рассмотрим кардинальный синус следующего вида

$$f(t) = a\,\mathrm{sinc}\,(bt)$$

Аналитическое выражение Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для кардинального синуса имеет вид

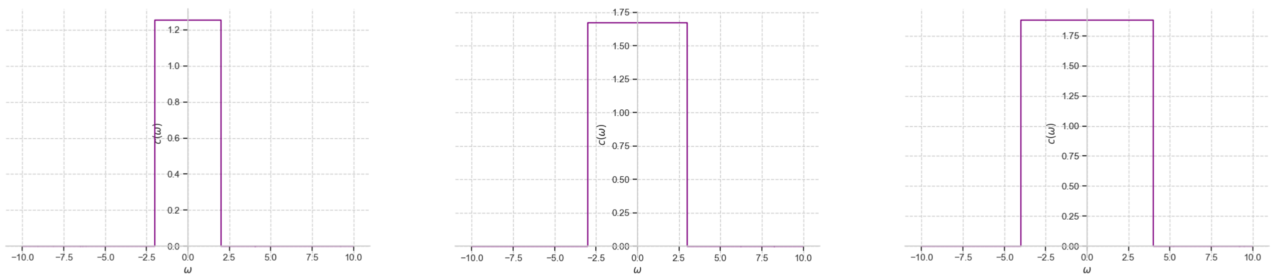
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{sinc}\,(bt) e^{-i\omega t}\,dt = \frac{a\sqrt{\pi}}{b\sqrt{2}} \left(\begin{cases} 0, & \left({}^{b}/_{\omega}\right)^2 \leq 1 \\ 1, & \left({}^{b}/_{\omega}\right)^2 > 1 \end{cases} \right)$$

Построенные графики $f(t)$ и $\hat{f}\,(\omega)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$ расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 5: Кардинальные синусы при различных значениях a и b



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 6: Фурье-образы кардинальных синусов при различных значениях a и b

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
    p_1: 1.25331412734194 ?= 1.25331412734194
    p_2: 2.04665340503514 ?= 2.04665340503514
    p_3: 2.65868076577972 ?= 2.65868076577972
```

Листинг 9: Равенство Парсеваля для кардинальных синусов

Результат программы показывает, что равенство Парсеваля выполняется для кардинального синуса

2.4 Функция Гаусса

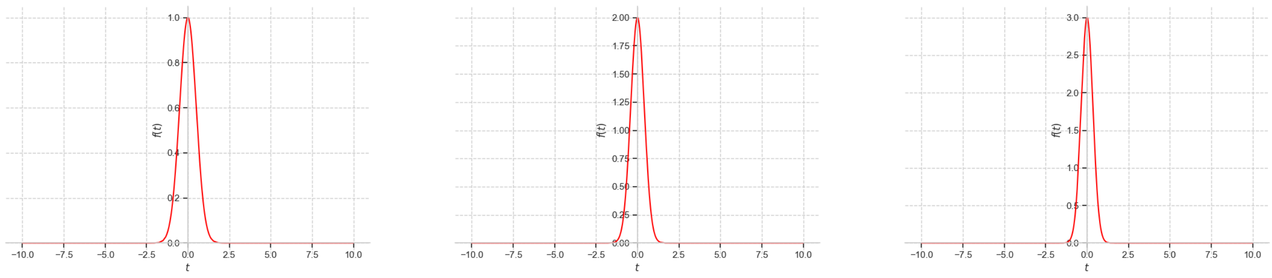
Рассмотрим фукнцию Гаусса следующего вида

$$f(t) = ae^{-bt^2}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для функции Гаусса имеет вид

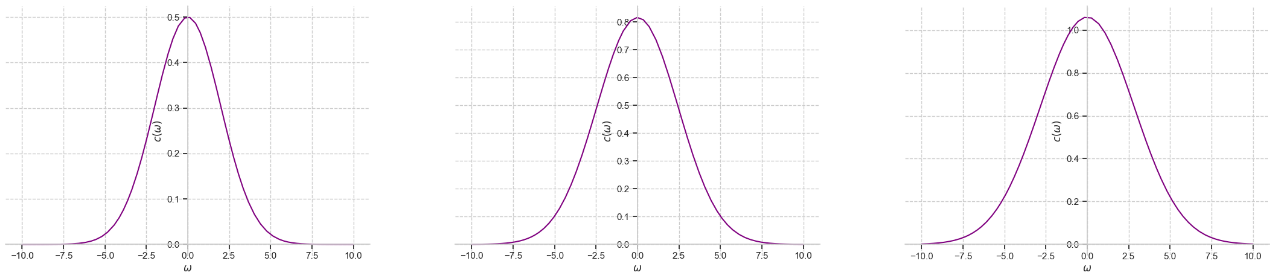
$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Построенные графики $f(t)$ и $\hat{f}(\omega)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$ расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 7: Функции Гаусса при различных значениях a и b



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 8: Фурье-образы функций Гаусса при различных значениях a и b

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
    p_1: 0.941396263776715 ?= 0.941396263776715
    p_2: 1.70129510027892 ?= 1.70129510027892
    p_3: 2.37485023062924 ?= 2.37485023062924
```

Листинг 10: Равенство Парсеваля для функции Гаусса

Результат показывает выполнение равенства Парсеваля для функции Гаусса

2.5 Двустороннее затухание

Рассмотрим двустороннее затухание следующего вида

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

Аналитическое выражение с выводом Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для двустороннего затухания имеет вид

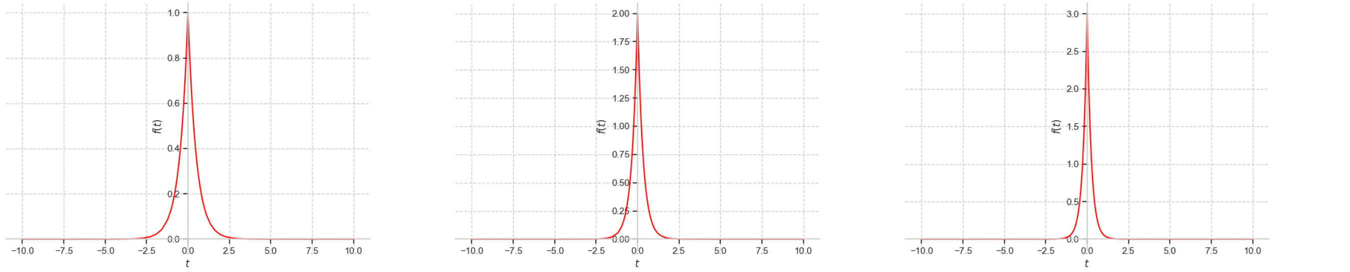
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-i\omega t}\, dt, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{bt} e^{-i\omega t}\, dt + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t}\, dt,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{bt}e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(b-i\omega)}\,dt = \begin{bmatrix} u = t(b-i\omega) \\ du = (b-i\omega)dt \\ dt = \frac{du}{b-i\omega} \end{bmatrix} = \frac{1}{b-i\omega}\int\limits_{u_1}^{u_2} e^{u}du = \frac{1}{b-i\omega}e^{t(b-i\omega)}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{b-i\omega},$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-i\omega t}\,dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t(b+i\omega)}\,dt = \left[\text{аналогично}\right] = -\frac{1}{b+i\omega}e^{-t(b+i\omega)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{b+i\omega},$$

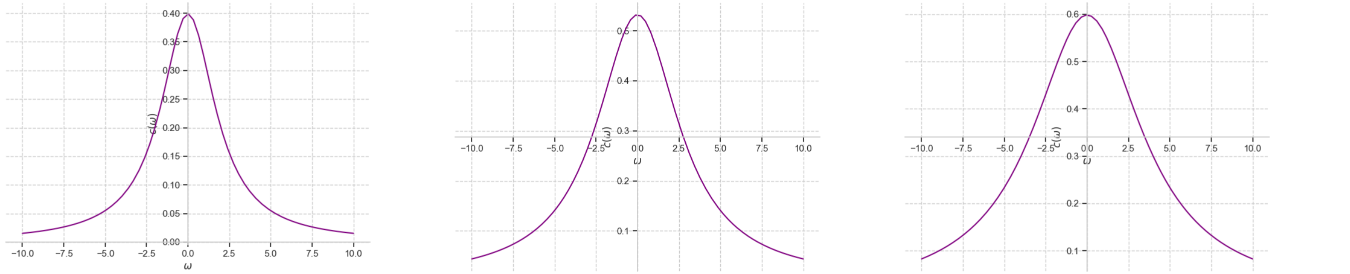
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} = \frac{b+i\omega+b-i\omega}{(b-i\omega)(b+i\omega)} = \frac{2b}{b^2+\omega^2} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2b}{b^2+\omega^2} = \frac{ab\sqrt{2}}{(b^2+\omega^2)\sqrt{\pi}}$$

Построенные графики $f(t)$ и $\hat{f}(\omega)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$ расположены ниже



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 9: Двусторонние затухания при различных значениях a и b



(a) $a = 1,\ b = 2$ (b) $a = 2,\ b = 3$ (c) $a = 3,\ b = 4$

Рис. 10: Фурье-образы двусторонних затуханий при различных значениях a и b

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
    p_1: 0.700601299282005 ?= 0.700601299282005
    p_2: 1.15326854220130 ?= 1.15326854220130
    p_3: 1.49974838192519 ?= 1.49974838192519
```

Листинг 11: Равенство Парсеваля для двустороннего затухания

Результат говорит о выполнении равенства Парсеваля для двустороннего затухания

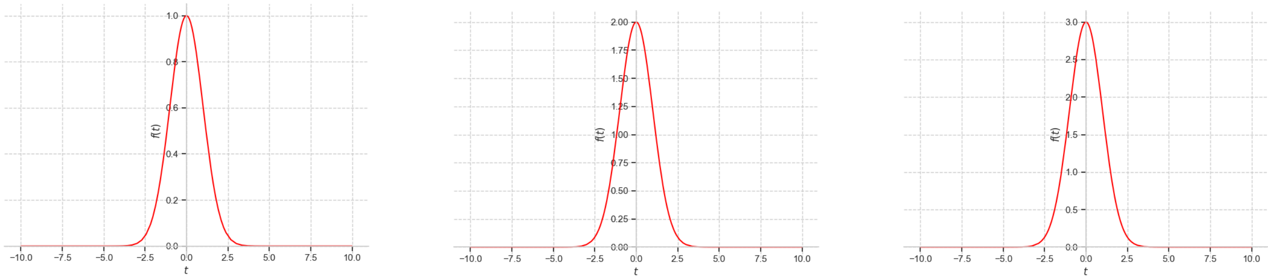
2.6 Анализ графиков и ответы на вопросы

Для функции $f(t)$ параметр a отвечает за высоту функции, а параметр b за ширину функции. Зависимость высоты от a прямая – чем больше a, тем выше тянется фукнция. Зависимость ширины от b прямая для кусочно-заданных фукнций – чем больше b, тем шире функция. Для остальных функций, рассмотренных в работе, зависимость обратная – чем больше b, тем уже функция

Для Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ параметр a отвечает за амплитуду, а параметр b за частоту. Зависимость амплитуды от a прямая – чем больше параметр a, тем больше амплитуда каждой волны. Зависимость частоты от b прямая для кусочно-заданных функций – чем больше b, тем выше частота волн. Сравнивая поведение с влиянием параметра на обычную функцию можно сказать, что оно противоположно – в данном случае график становится уже, а не шире. Для других функций зависимость от b обратная – чем больше параметр b, тем ниже частота, соответственно график становится шире

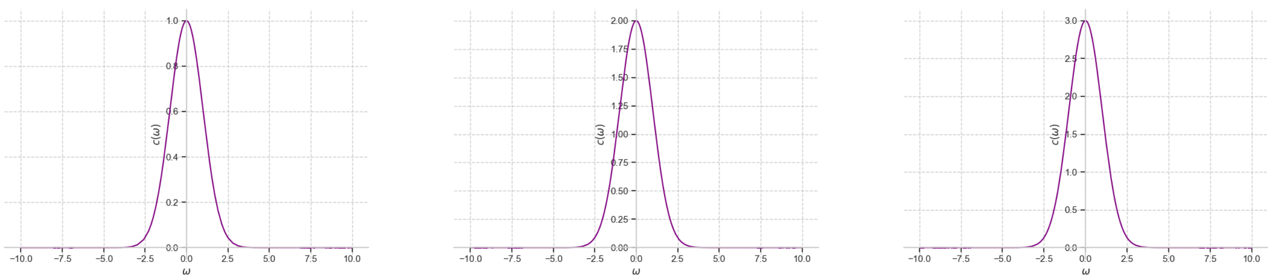
Принцип неопределенности заключается в том, что при достижении высокой точности в пространственной области снижается точность в частотной области и наоборот. Пространственная область – сигнал, который, например, получен из какого-то звука и его можно описать функцией. Частотная область – преобразование Фурье. Например, преобразование звука из пространства в частоты для ее дальнейшего исследования (например, убрать шумы). Чем точнее функция описывает звук, тем менее точно определяются частотные характеристики. Например, в данной работе этот принцип проявлялся тогда, когда из широкого "малоинформативного" графика функции получался узкий "информативный" график Фурье-образа и наоборот

Исходя из графиков функций и их Фурье-образов для каждого из пяти пунктов сделан вывод – функция Гаусса может быть равна своему Фурье-образу при определенных значениях параметров a, b, так как сам Фурье-образ является функцией Гаусса. Подбором с программным построением графиков были получены такие параметры: $a \in \mathbb{R}, b = 0.5$. Ниже приведены показательные графики



(a) $a = 1$ (b) $a = 2$ (c) $a = 3$

Рис. 11: Функции Гаусса при различных значениях a и при фиксированном $b = 0.5$



(a) $a = 1$ (b) $a = 2$ (c) $a = 3$

Рис. 12: Фурье-образы функций Гаусса при различных значениях a и при фиксированном $b = 0.5$

3 Задание 2. Комплексное

3.1 Прямоугольная функция со сдвигом

Для выполнения задания выбрана прямоугольная функция из задания 1 при зафиксированных параметрах $a = 1, b = 2$

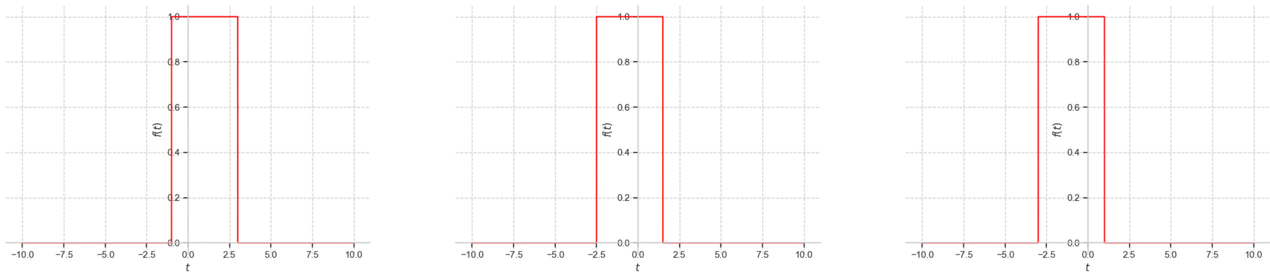
$$g(t) = f(t+c) = \begin{cases} 1, & |t+c| \le 2, \\ 0, & |t+c| > 2. \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$ для прямоугольной функции со сдвигом имеет вид

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{2} 1 \cdot e^{-i\omega(t+c)}\, dt = e^{-i\omega c} \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin(2\omega)$$

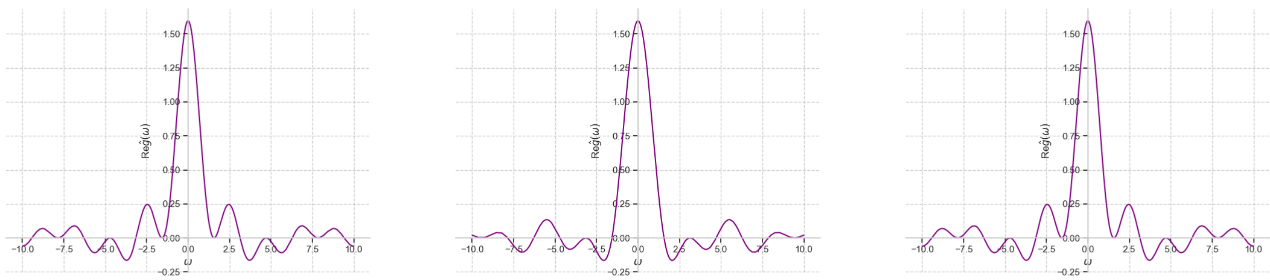
Из аналитического выражения сделан вывод, что $\hat{g}(\omega)$ повторяет $\hat{f}(\omega)$ прямоугольной фукнции с разницей в появлении множителя $e^{-i\omega c}$

Построенные графики $g(t)$, $\operatorname{Re}\hat{g}(\omega)$, $\operatorname{Im}\hat{g}(\omega)$ и $|\hat{g}(\omega)|$ для нескольких значений параметра c расположены ниже



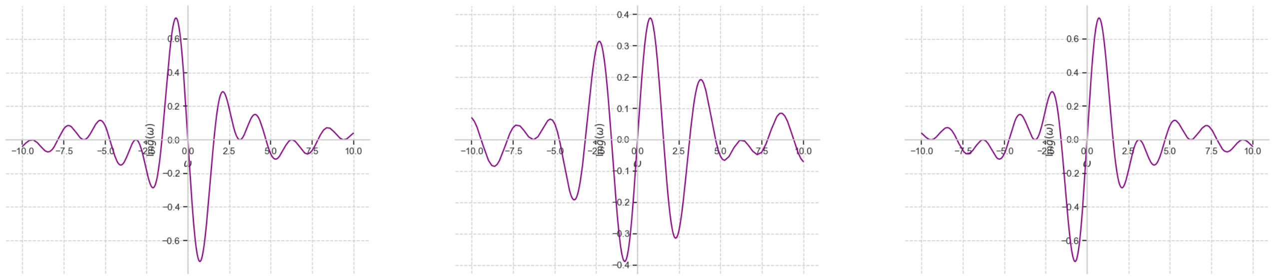
(a) $c = -1$ (b) $c = 0.5$ (c) $c = 1$

Рис. 13: Прямоугольные фукнции со смещением при различных значениях c



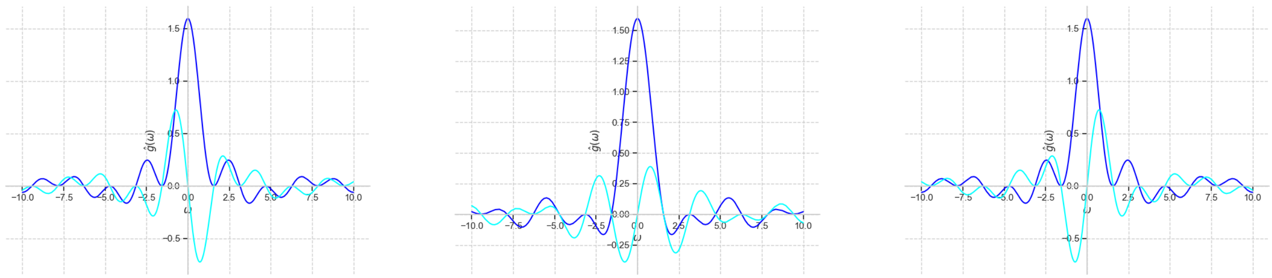
(a) $c = -1$ (b) $c = 0.5$ (c) $c = 1$

Рис. 14: Действительные части Фурье-образов прямоугольных фукнций со смещением при различных значениях параметра c



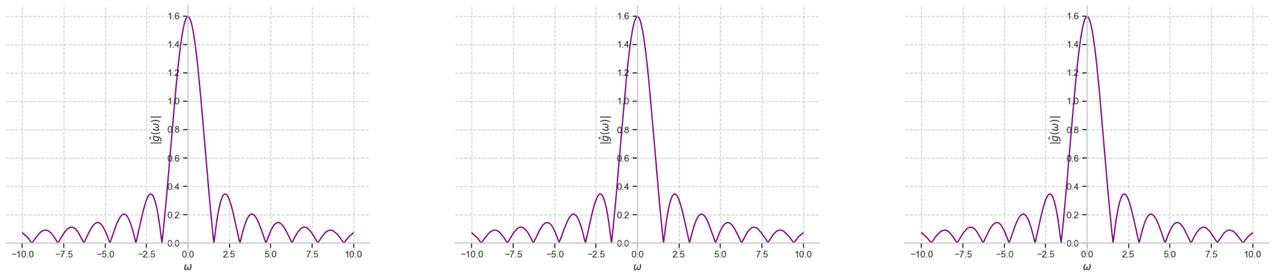
(a) $c = -1$ (b) $c = 0.5$ (c) $c = 1$

Рис. 15: Мнимые части Фурье-образов прямоугольных фукнций со смещением при различных значениях параметра c



(a) $c = -1$ (b) $c = 0.5$ (c) $c = 1$

Рис. 16: Действительные и мнимые части Фурье-образов прямоугольных фукнций со смещением при различных значениях параметра c



(a) $c = -1$ (b) $c = 0.5$ (c) $c = 1$

Рис. 17: Модули Фурье-образов прямоугольных фукнций со смещением при различных значениях параметра c

3.2 Анализ влияния параметра c на функцию и ее Фурье-образ

Параметр c двигает функцию по временной шкале: при $c > 0$ функция смещается влево, при $c < 0$ вправо. Множитель $e^{-i\omega c}$ является комплексным экспоненциальным сдвигом, который вносит фазовый сдвиг в Фурье-образ функции, который испытывают действительная и мнимая части Фурье-образа – фазовый угол каждой компоненты преобразования Фурье изменяется на величину $-\omega c$. Множитель не изменяет амплитудный спектр Фурье-образа – график модуля остается неизменным при любых значениях c

4 Задание 3. Музыкальное

Для выполнения задания с представленного гугл-диска выбран аккорд номер 26

Для считывания аудиозаписи в список используется библиотека librosa. В переменную y запишутся значения амплитуд аудиосигнала, в переменной sr будет частота дискретизации аудиосигнала, а t – список временных отсчетов в секундах, соответствующий каждой амплитуде в списке y. На строках 12-14 показан пример использования метода. Указывается путь к mp3 файлу в переменной audio_file. В переменной select_channel хранится номер нужного звукового канала – выбран первый канал. Аудиозапись длится 4 секунды, последняя из которых вырезана на 16-17 строках, так как не несет в себе важной информации, аккорд заканчивается раньше

```
1  def get_y_sr_t(audio_file: str, select_channel: int):
2      y, sr = load(audio_file)
3
4      if select_channel >= y.ndim:
5          select_channel = 0
6
7      y = y[:, select_channel] if y.ndim > 1 else y
8      t = linspace(0, len(y) / sr, len(y))
9
10     return y, sr, t
11
12 audio_file = 'fm_lab2/chord/chord26.mp3'
13 select_channel = 0
14 y, sr, t = get_y_sr_t(audio_file, select_channel)
15
16 y = y[:3 * sr]
17 t = t[:3 * sr]
```

Листинг 12: Программа для считывания аудиозаписи в список

Программа ниже построит график аудиозаписи $f(t)$. На 8-9 строках расположен пример использования

```
1 def build_audio_f_t(t, y, clr=None):
2     plt.plot(t, y, color=clr)
3     plt.xlabel(r'$t$')
4     plt.ylabel(r'$f(t)$')
5     plt.grid(True)
6     plt.show()
7
8 f_t_clr = colors_strs[0]
9 build_audio_f_t(t, y, f_t_clr)
```

Листинг 13: Программа для построения функции $f(t)$ аудиозаписи

Результат выполнения программы для считанной в список аудиозаписи

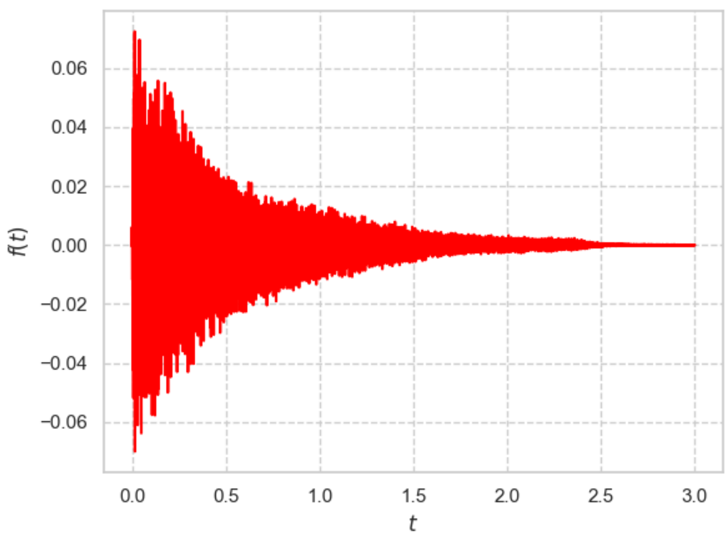


Рис. 18: График $f(t)$ аудиозаписи

С помощью численного интегрирования trapz из библиотеки numpy найден Фурье-образ $\hat{f}(\nu)$ по частотам freqs и записан в список амплитуд ampls. Пример использования расположен на 11 строке

```
1  def find_freqs_ampls(t, y, sr):
2      freqs = linspace(0, sr / 2, len(y) // 2)
3      ampls = []
4  
5      for freq in freqs:
6          int = trapz(y * exp(-1j * 2 * pi * freq * t), t)
7          ampls.append(abs(int))
8  
9      return freqs, ampls
10 
11 freqs, ampls = find_freqs_ampls(t, y, sr)
```

Листинг 14: Программа для нахождения Фурье-образа аудиозаписи

Программа ниже построит график $|\hat{f}(\nu)|$. Пример использования расположен на 16-23 строках

```
1  def build_audio_f_v(freqs, ampls, start=None, stop=None, step=None,
2                      fz1=None, fz2=None, clr=None):
3      if ((fz1 != None) and (fz2 != None)):
4          plt.figure(figsize=(fz1, fz2))
5  
6      plt.plot(freqs, ampls, color=clr)
7      plt.xlabel(r'$\nu$')
8      plt.ylabel(r'$\left|\hat{f}\left(\nu\right)\right|$')
9      plt.grid(True)
10     if ((start != None) and
11         (stop != None and stop != 0) and
12         (step != None and step != 0)):
13         plt.xticks(arange(start, stop, step))
14     plt.show()
15 
16 start = 0
17 stop = 10001
18 step = 1000
19 figsize1 = 10
20 figsize2 = 6
21 f_v_clr = colors_strs[1]
22 
23 build_audio_f_v(freqs, ampls, start=start, stop=stop, step=step,
24                 fz1=figsize1, fz2=figsize2, clr=f_v_clr)
```

Листинг 15: Программа для построения графика $|\hat{f}(\nu)|$ аудиозаписи

Построенный график $|\hat{f}(\nu)|$ расположен ниже

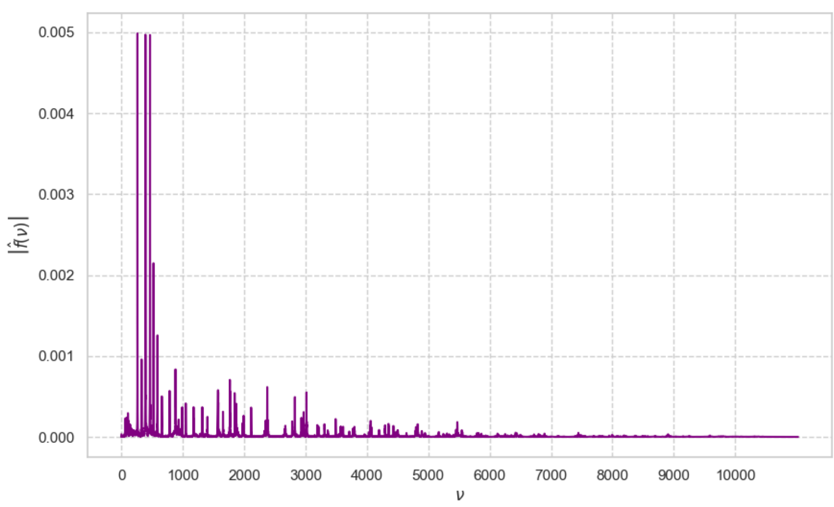


Рис. 19: График $|\hat{f}(\nu)|$ аудиозаписи

Так как на большом интервале частот трудно разобрать из каких нот состоит аккорд, нужен код для уменьшения интервала и шага без потери данных или искажения графиков

```
    r_start = 0
    r_end = 1000

    start_idx = next(idx for idx, freq in enumerate(freqs) if freq >= r_start)
    end_idx = next(idx for idx, freq in enumerate(freqs) if freq > r_end)

    r_ampls = ampls[start_idx:end_idx]
    r_freqs = freqs[start_idx:end_idx]
    r_step = 20

    build_audio_f_v(r_freqs, r_ampls, start=r_start, stop=r_end, step=r_step, fz1=figsize1,
        fz2=figsize2, clr=f_v_clr)
```

Листинг 16: Программа для изменения интервала частот и амплитуд

С помощью программы построен график $|\hat{f}(\nu)|$ на интервале частот от 0 до 1000 с шагом 200, а после на интервале от 200 до 500 с шагом 20 для точности определения нот

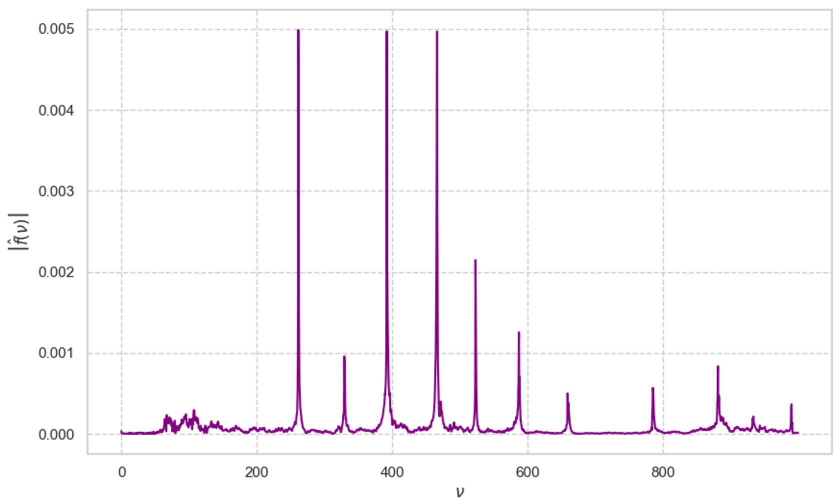


Рис. 20: График $|\hat{f}(\nu)|$ аудиозаписи на интервале частот от 0 до 1000

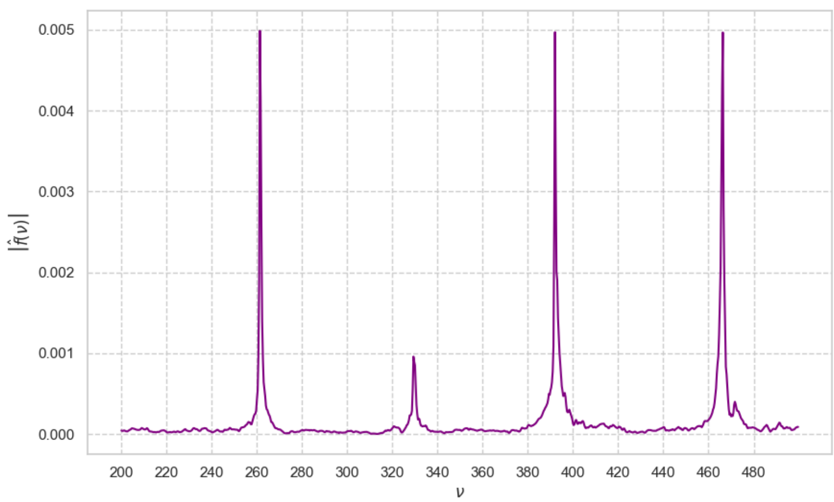


Рис. 21: График $|\hat{f}(\nu)|$ аудиозаписи на интервале частот от 200 до 500

Рассматривать необходимо самые высокие пики. Исходя из графика, построенного на уменьшенном интервале частот, определены следующие ноты: До (C), Соль (G), Ля диез (Bb). Все на первой октаве