



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5**  
**ПРЕДМЕТ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»**  
**ТЕМА «СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО»**

Лектор: Перегудин А. А.  
Практик: Пашенко А. В.  
Студент: Румянцев А. А.  
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР  
Группа: R3241

Санкт-Петербург  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье</b>	<b>2</b>
1.1	Истинный Фурье-образ . . . . .	2
1.2	Численное интегрирование . . . . .	2
1.3	Использование DFT . . . . .	4
1.4	Выводы о trapz и fft . . . . .	4
1.5	Приближение непрерывного с помощью DFT . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Задание 2. Сэмплирование</b>	<b>5</b>
2.1	Сэмплирование синусов . . . . .	5
2.2	Сэмплирование sinus cardinalis . . . . .	7

# 1 Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим прямоугольную функцию  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

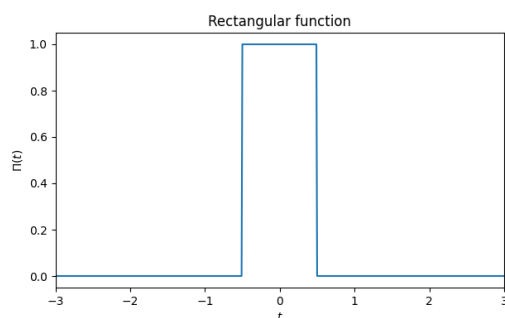
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$$

## 1.1 Истинный Фурье-образ

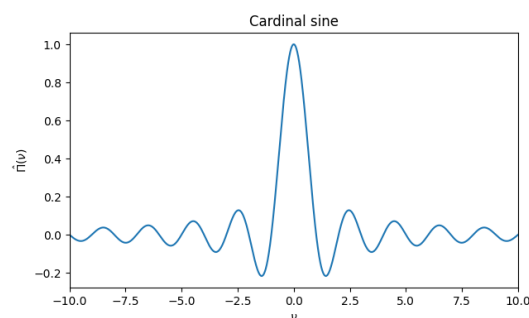
Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа прямоугольной функции

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\nu)$$

Построим графики  $\Pi(t)$  и  $\hat{\Pi}(\nu)$



(а) Прямоугольная функция



(b) Кардинальный синус

Рис. 1: Исходный сигнал и его Фурье-образ

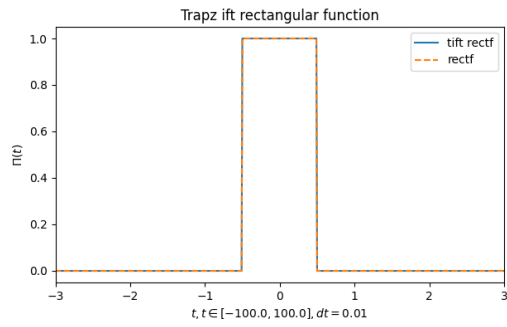
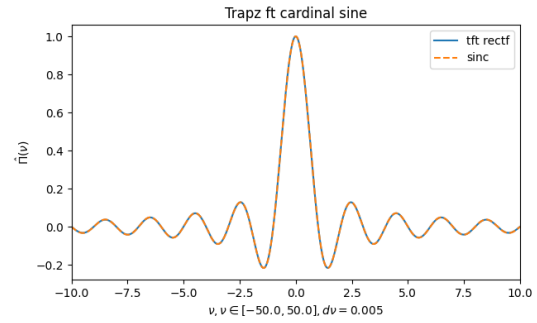
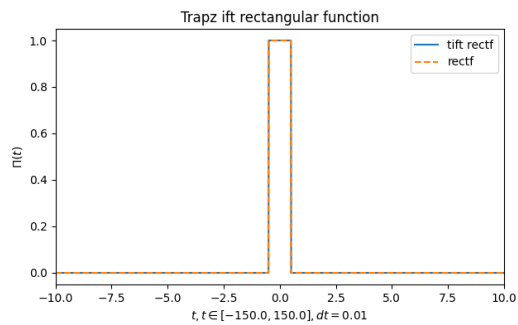
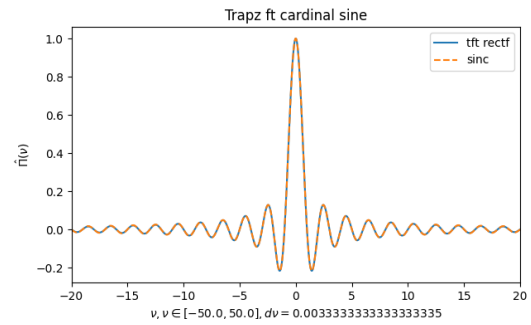
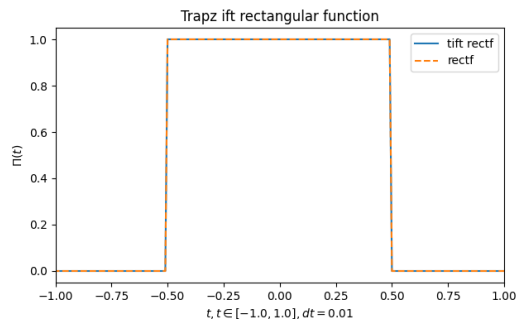
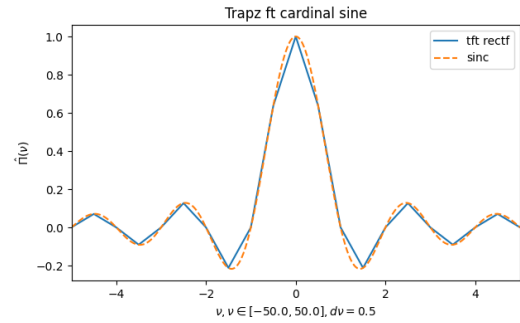
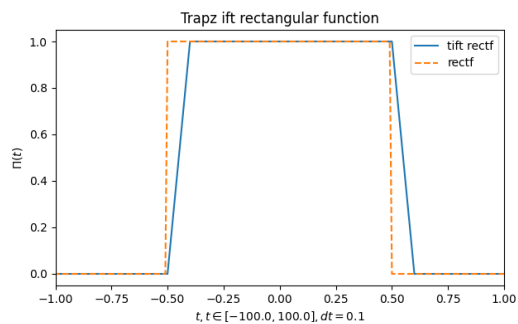
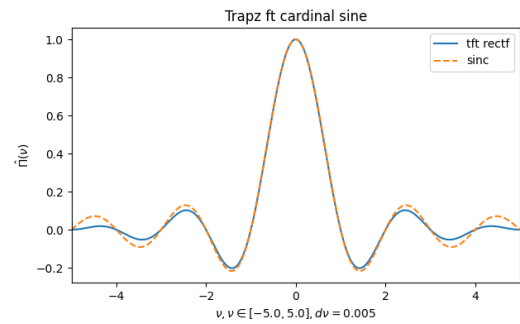
## 1.2 Численное интегрирование

Зададим функцию  $\Pi(t)$  в Python. Найдем ее Фурье-образ с помощью численного интегрирования (функция `trapz`). Вновь используя численное интегрирование, выполним обратное преобразование Фурье от найденного Фурье-образа с целью восстановить исходную функцию. Схематично наши действия будут выглядеть так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{trapz}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{trapz}} \Pi(t)$$

Построим график найденной функции  $\hat{\Pi}(\nu)$  и *восстановленной* функции  $\Pi(t)$ . Сравним результат с истинной функцией и Фурье-образом. Исследуем влияние величины шага интегрирования и размера промежутка, по которому вычисляется интеграл, на результат. Сделаем выводы о точности и быстродействии метода.

Далее приведены соответствующие графики. Оранжевым цветом выделены оригинальные функции, синим – найденные через преобразования. Каждый график подписан сверху. Под временной шкалой также указаны рассматриваемый промежуток времени или частот и шаг дискретизации во временной или частотной областях.

(a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **trapez**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **trapez**  $\Pi(t)$ Рис. 2: Интеграл по всей области определения функции от  $-100$  до  $100$ (a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **trapez**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **trapez**  $\Pi(t)$ Рис. 3: Интеграл на увеличенном промежутке от  $-150$  до  $150$ (a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **trapez**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **trapez**  $\Pi(t)$ Рис. 4: Интеграл на уменьшенном промежутке от  $-1$  до  $1$ (a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **trapez**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **trapez**  $\Pi(t)$ Рис. 5: Увеличение шага интегрирования  $dt = 0.1$ , интеграл аналогично рис. 2

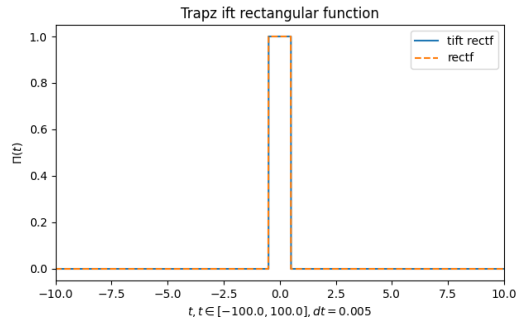
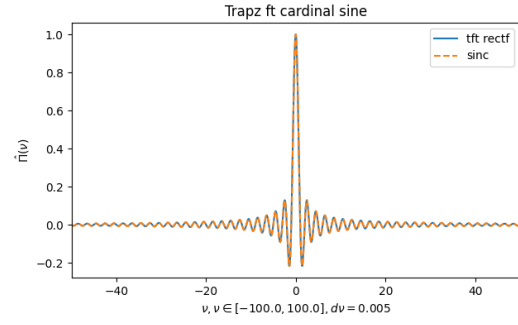
(a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **trapz**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **trapz**  $\Pi(t)$ 

Рис. 6: Уменьшение шага интегрирования  $dt = 0.005$ , интеграл аналогично рис. 2

### 1.3 Использование DFT

Найдем Фурье-образ функции  $\Pi(t)$  с помощью дискретного преобразования Фурье (конструкция `fftshift(fft())`), используя его так, чтобы преобразование было унитарным. Выполним обратное преобразование от найденного Фурье-образа с помощью обратного дискретного преобразования (конструкция `ifft(ifftshift())`). Схематично наши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{fftshift}(\text{fft}())} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{ifft}(\text{ifftshift}())} \Pi(t)$$

Для того, чтобы преобразование было унитарным, необходимо домножить ряд дискретного преобразования Фурье на коэффициент  $1 \div \sqrt{N}$ . Аналогично для обратного преобразования Фурье. Таким образом, формулы DFT и IDFT будут иметь вид:

$$\mathcal{F}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}_m e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$$

Далее приведены сравнительные графики найденной  $\hat{\Pi}(\nu)$  и восстановленной  $\Pi(t)$  функций с исходными. Цвета и обозначения аналогичны предыдущему пункту.

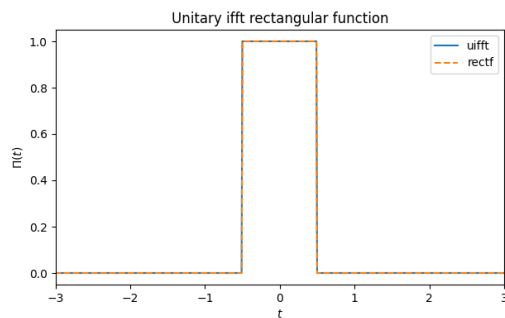
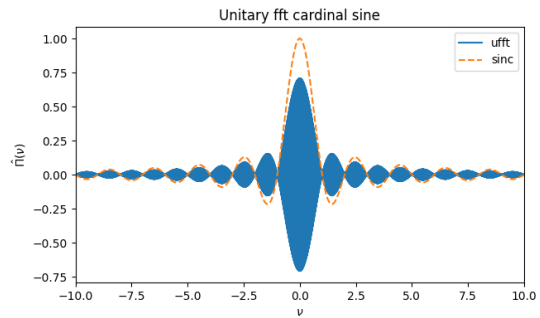
(a)  $\Pi(t)$ , восстановленная **uifft**(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной **uifft**  $\Pi(t)$ 

Рис. 7: Унитарное быстрое преобразование Фурье **uifft**

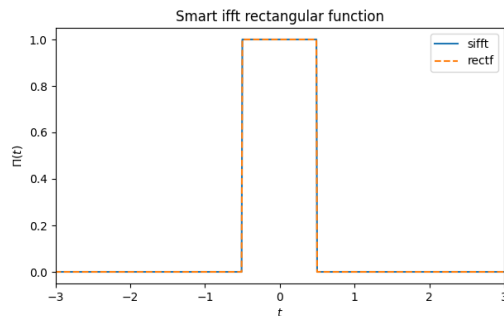
### 1.4 Выводы о **trapz** и **fft**

объяснить

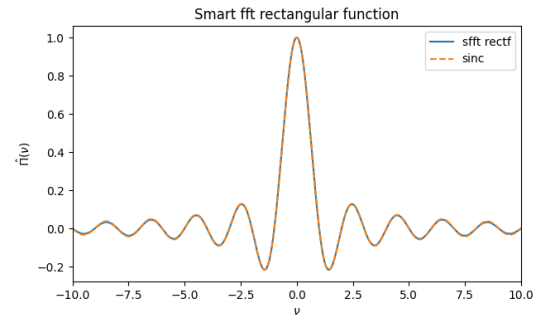
## 1.5 Приближение непрерывного с помощью DFT

Чтобы исправить ситуацию, попробуем совместить достоинства обоих подходов: точность и быстродействие. Найдем способ получить правильный Фурье-образ, соответствующий непрерывному преобразованию Фурье, используя функцию `fft` и не прибегая к численному интегрированию. Найдем способ восстановить исходный сигнал по полученному Фурье-образу – тоже с помощью `fft`. Схема нашего успеха:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{умное использование fft}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{умное использование ifft}} \Pi(t)$$



(a)  $\Pi(t)$ , восстановленная `sfft`



(b)  $\hat{\Pi}(t)$  восстановленной `sfft`  $\Pi(t)$

Рис. 8: Умное использование быстрого преобразования Фурье `sfft`

## 2 Задание 2. Сэмплирование

В этом задании будем исследовать теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова на двух примерах.

### 2.1 Сэмплирование синусов

Зададим параметры  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 3$ ,  $\omega_2 = 4$ ,  $\varphi_1 = \pi \div 5$ ,  $\varphi_2 = \pi \div 6$  и рассмотрим функцию

$$y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Зададим в `Python` массивы времени `t` и значений `y`. Выберем малый шаг дискретизации  $dt = 10^{-4}$  для имитирования непрерывной функции. Построим график полученной функции.

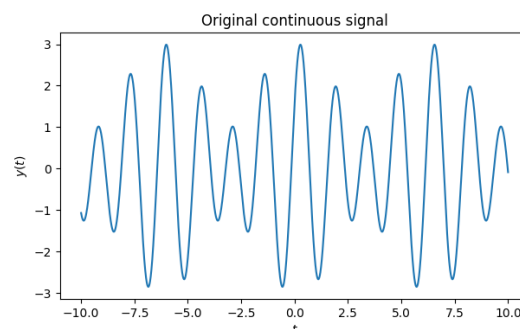


Рис. 9: График непрерывного сигнала

Теперь зададим сэмплированный вариант указанной функции: рассмотрим разреженный вариант массива времени и соответствующий ему массив значений. Сначала рассмотрим большой шаг  $dt = 0.2$ . Построим дискретный график поверх непрерывного.

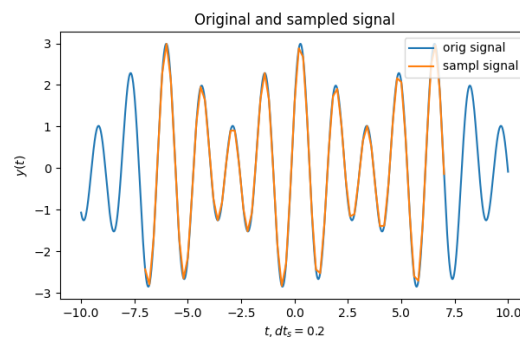


Рис. 10: График сэмплированного сигнала поверх непрерывного

Применим интерполяционную формулу из лекции к сэмплированным данным с целью восстановить непрерывную функцию.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \cdot \text{sinc}(2B(t - t_n)), \quad t_n = \frac{n}{2B}$$

В результате получатся новые массивы времени и значений – той же размерности, что и исходные.

Построим график восстановленной функции поверх исходной.

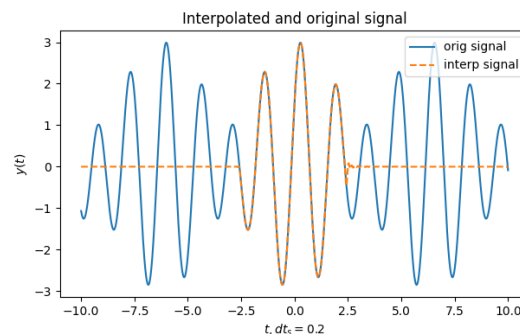
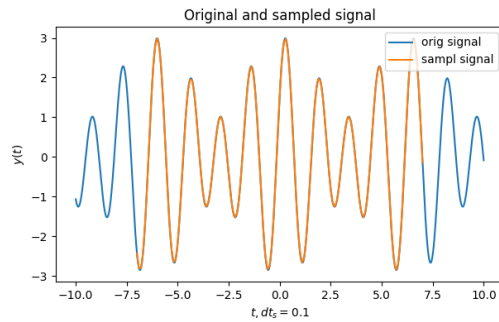
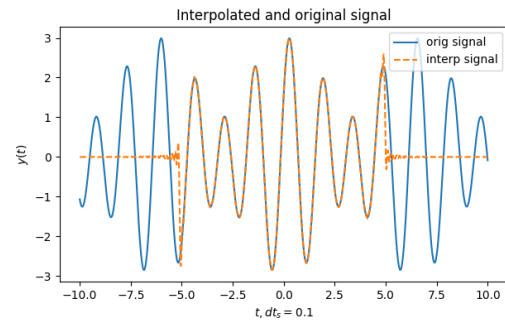


Рис. 11: График интерполированного сигнала поверх непрерывного

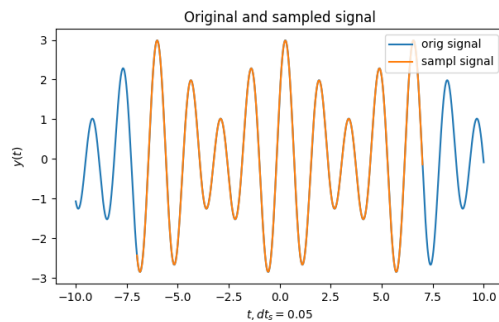
Далее исследуем влияние шага дискретизации на вид восстановленной функции и соотнесем свои результаты с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова. Синим цветом выделены исходные сигналы, оранжевым – сэмплированные и восстановленные. Под шкалой времени на каждом графике указан шаг дискретизации сэмплирования  $dt_s$ .



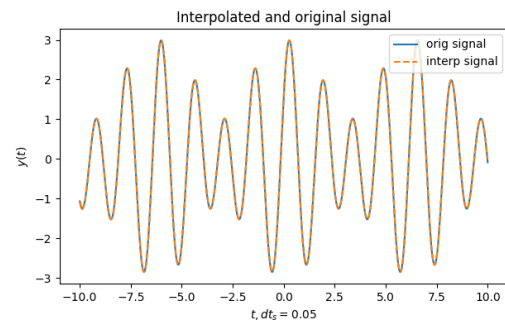
(a) Сэмплированный поверх непрерывного



(b) Интерполированный поверх непр-ого

Рис. 12: Уменьшение шага дискретизации  $dt = 0.1$ 

(a) Сэмплированный поверх непр-ого



(b) Интерполированный поверх непр-ого

Рис. 13: Уменьшение шага дискретизации  $dt = 0.05$ 

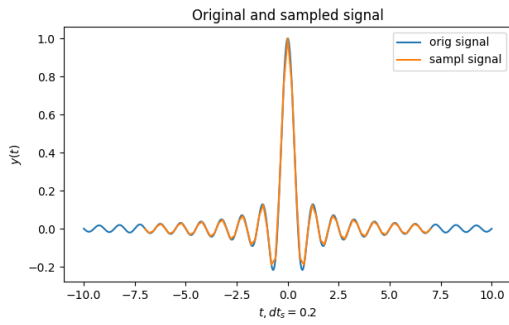
## 2.2 Сэмплирование sinus cardinalis

Зададим параметр  $b = 2$  и рассмотрим функцию

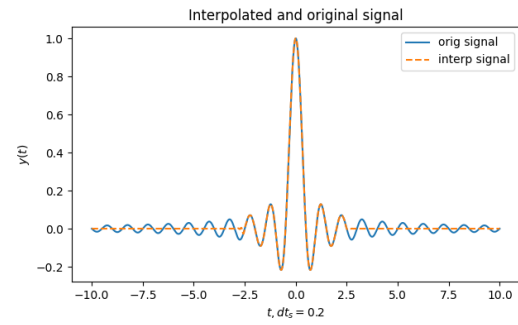
$$y(t) = \text{sinc}(bt) = \text{sinc}(2t)$$

Выполним все шаги из предыдущего пункта. Дополнительно для каждой величины шага дискретизации построим Фурье-образ исходного и восстановленного сигналов. Дадим объяснение увиденному, сделаем выводы.

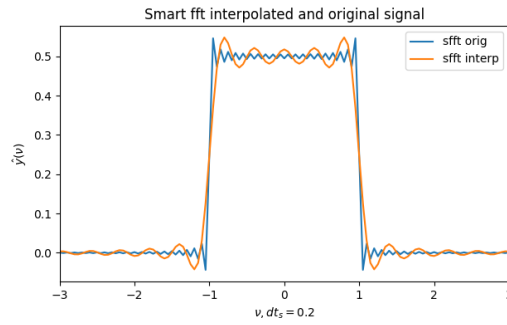




(a) Сэмплированный поверх непр-ого

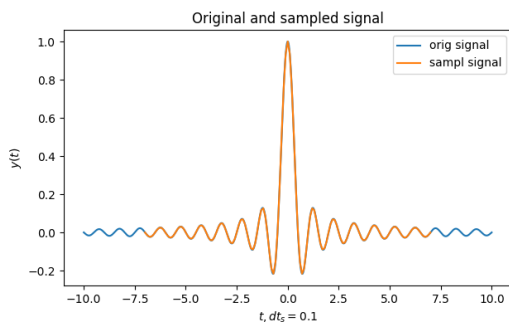


(b) Интерполированный поверх непр-ого

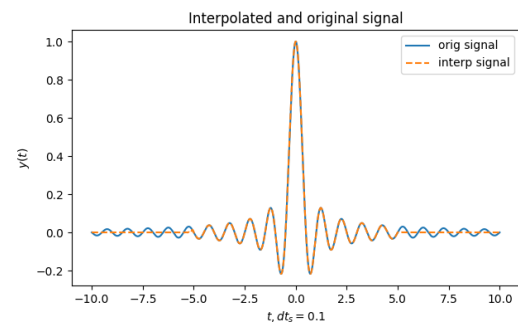


(c) Фурье-образ

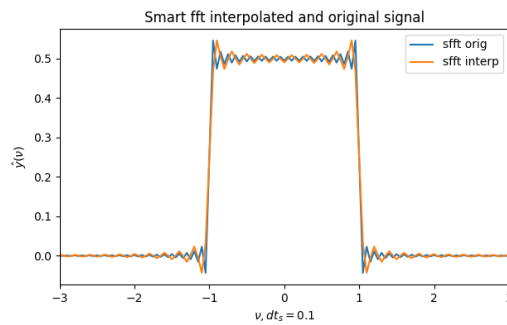
Рис. 14: Подпись



(a) Сэмплированный поверх непр-ого

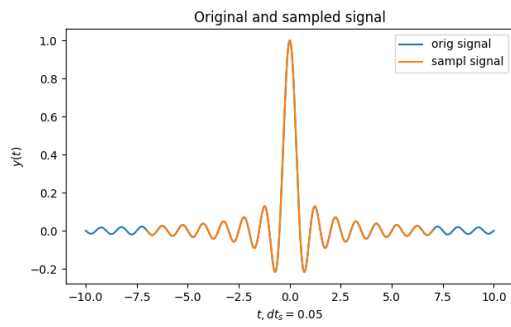


(b) Интерполированный поверх непр-ого

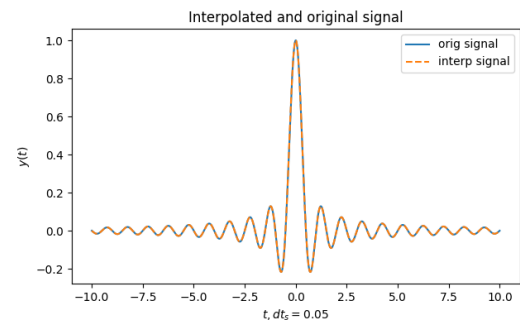


(c) Фурье-образ

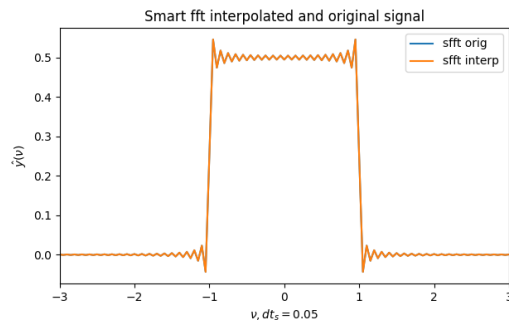
Рис. 15: Подпись



(a) Сэмплированный поверх непр-ого



(b) Интерполированный поверх непр-ого



(c) Фурье-образ

Рис. 16: Подпись