

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2  
ПО ПРЕДМЕТУ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»  
ПО ТЕМЕ «ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ»**

Лектор: Перегудин А. А.  
Практик: Пашенко А. В.  
Студент: Румянцев А. А.  
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР  
Группа: R3241

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Задание 1. Вещественное</b>	<b>3</b>
2.1	Прямоугольная функция . . . . .	3
2.2	Треугольная функция . . . . .	5
2.3	Кардинальный синус . . . . .	6
2.4	Функция Гаусса . . . . .	7
2.5	Двустороннее затухание . . . . .	7
2.6	Анализ графиков и ответы на вопросы . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Задание 2. Комплексное</b>	<b>10</b>
3.1	Прямоугольная функция со сдвигом . . . . .	10
3.2	Анализ влияния параметра $c$ на функцию и ее Фурье-образ . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Задание 3. Музыкальное</b>	<b>12</b>

# 1 Введение

Все графики строятся программой, написанной на языке программирования python. В 1 и 2 заданиях используется библиотека sympy, в задании 3 numpy и matplotlib. По ходу отчета приводится код для каждого задания

В заданиях 1 и 2 используется унитарное преобразование Фурье к угловой частоте  $\omega$ . Подсчет Фурье-образа производится по формуле ниже

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Далее будет использоваться программная реализация, приведенная ниже

```

1 def find_fimg(f_t, lim1, lim2):
2     integrand = f_t * E ** (-I * omega * t)
3
4     result = integrate(integrand, (t, lim1, lim2))
5     return coeff * result

```

Листинг 1: Программная реализация вычисления Фурье-образа с угловой частотой  $\omega$

В задании 3 используется преобразование Фурье к обыкновенной частоте  $\nu$ . В общем виде формула имеет вид

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Для проверки равенства Парсеваля используется формула ниже

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2,$$

где  $\|f\|_2$  – вторая норма заданной функции,  $\|\hat{f}\|_2$  – вторая норма Фурье-образа функции  $f$ . Для нахождения нормы используются формулы, представленные ниже

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t) \cdot f^*(t) dt}, \quad \|\hat{f}(\omega)\|_2 = \sqrt{\int_a^b \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}^*(\omega) d\omega}$$

Далее для поиска нормы и проверки равенства Парсеваля будет по умолчанию использоваться программа, представленная ниже. Пример использования расположен на 12-14 строчках листинга

```

1 def find_norm2(f, lim1, lim2, var):
2     integrand = f * conjugate(f)
3
4     result = integrate(integrand, (var, lim1, lim2)).evalf()
5     return sqrt(result).evalf()
6
7 def find_parseval(f, fimg, lim1, lim2):
8     pleft = find_norm2(f, lim1, lim2, t)
9     pright = find_norm2(fimg, lim1, lim2, omega)
10    return pleft, pright
11
12 func = rectangular_function(1, 2)
13 pl, pr = find_parseval(func, find_fimg(func, -oo, oo), -oo, oo)
14 print(f'p_{1}: {pl} ?= {pr}')

```

Листинг 2: Программа для вычисления нормы и левой и правой стороны равенства Парсеваля

Для всех интегралов и графиков есть место с общими переменными и значениями – файл static.py. Основные используемые данные приведены ниже

```

1 t = Symbol('t')
2 omega = Symbol('omega')
3 interval = [-oo, oo]
4 a_b_pars = [(1, 2), (2, 3), (3, 4)]
5 consts = [-1, 0.5, 1]
6 colors_strs = ['red', 'purple', 'blue', 'cyan']

```

Листинг 3: Основные данные из файла static.py

В этом файле программно заданы функции, графики которых приводятся по ходу отчета. Также они необходимы для нахождения их Фурье-образа

```

1  def rectangular_function(a, b):
2      return Piecewise((a, Abs(t) <= b), (0, Abs(t) > b))
3
4  def triangular_function(a, b):
5      return Piecewise((a - Abs(a * t / b), Abs(t) <= b), (0, Abs(t) > b))
6
7  def cardinal_sinus(a, b):
8      return a * sinc(b * t)
9
10 def gaussian_function(a, b):
11     return a * E ** (-b * t ** 2)
12
13 def double_attenuation(a, b):
14     return a * E ** (-b * Abs(t))
15
16 def shifted_rectangular_function(a, b, shift):
17     if (shift == 0):
18         return rectangular_function(a, b)
19     return Piecewise((a, Abs(t + shift) <= b), (0, Abs(t + shift) > b))

```

Листинг 4: Программно заданные функции для заданий 1 и 2

## 2 Задание 1. Вещественное

### 2.1 Прямоугольная функция

Рассмотрим прямоугольную функцию следующего вида

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  с выводом для прямоугольной функции имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt + \int_b^\infty 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt = \left[ \begin{matrix} u = -i\omega t \\ du = -i\omega dt \\ dt = -\frac{du}{i\omega} \end{matrix} \right] = -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int_{i\omega b}^{-i\omega b} e^u du = \\ &= -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} e^u \Big|_{i\omega b}^{-i\omega b} = -\frac{a}{i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}) = \frac{a}{\omega\sqrt{2\pi}} \left( 2 \cdot \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2i} \right) = \frac{2a}{\omega\sqrt{2\pi}} \sin(b\omega) = \frac{a\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin(b\omega) \end{aligned}$$

Для построения графиков  $f(t)$  используется метод, представленный ниже. На строках 15-16 приведен пример использования – сначала задается функция, принимающая параметры  $a$  и  $b$ , после чего вызывается метод `build_f_t`. Далее в отчете эта программа используется по умолчанию

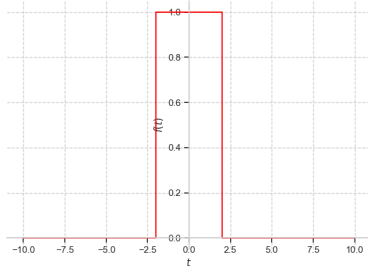
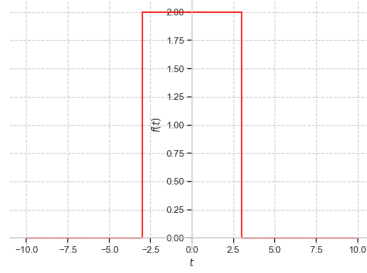
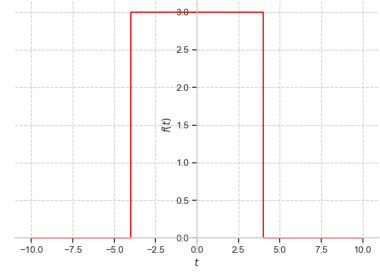
```

1  def build_f_t(f_t, clr, lbl):
2      if (lbl == None):
3          plot(f_t,
4              line_color=clr,
5              xlabel=r'$t$',
6              ylabel=r'$f(t)$')
7      else:
8          plot(f_t,
9              line_color=clr,
10             xlabel=r'$t$',
11             ylabel=r'$f(t)$',
12             label=lbl,
13             legend=True)
14
15 func = rectangular_function(1, 2)
16 build_f_t(func, 'red', None)

```

Листинг 5: Программа для построения графика  $f(t)$

Построенные графики  $f(t)$  для нескольких значений параметров  $a, b > 0$  расположены ниже

(a)  $a = 1, b = 2$ (b)  $a = 2, b = 3$ (c)  $a = 3, b = 4$ Рис. 1: Прямоугольные функции при различных значениях  $a$  и  $b$ 

Рассмотрим программу. Методом `find_fimg`, приведенным в введении, находится Фурье-образ заданной функции. Далее методом `build_fimg` строится график Фурье-образа. На 10-11 строчках располагается пример использования кода

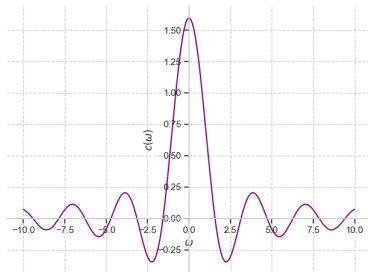
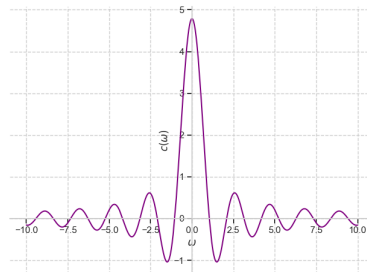
```

1  def build_fimg(fimg, clr, lbl):
2      if (lbl == None):
3          plot(fimg, line_color=clr,
4              xlabel=r'$\omega$', ylabel=r'$c(\omega)$')
5      else:
6          plot(fimg, line_color=clr,
7              xlabel=r'$\omega$', ylabel=r'$c(\omega)$',
8              label=lbl, legend=True)
9
10  rectfimg = find_fimg(rectangular_function(1, 2), -oo, oo)
11  build_fimg(rectfimg, 'purple', None)

```

Листинг 6: Программа для построения графика Фурье-образа некоторой функции  $f(t)$ 

Построенные графики  $\hat{f}(\omega)$  для тех же значений  $a$  и  $b$  расположены ниже

(a)  $a = 1, b = 2$ (b)  $a = 2, b = 3$ (c)  $a = 3, b = 4$ Рис. 2: Фурье-образы прямоугольных функций при различных значениях  $a$  и  $b$ 

Программа для вычисления левой и правой сторон равенства Парсеваля вывела в консоль результаты, представленные ниже

```

1  p_1: 2.0000000000000000 ?= 2.0 + 0.e-114*I
2  p_2: 4.89897948556636 ?= 4.89897948556636 + 0.e-114*I
3  p_3: 8.48528137423857 ?= 8.48528137423857 + 0.e-114*I

```

Листинг 7: Результат выполнения программы для вычисления равенства Парсеваля

Мнимыми частями в правой части равенства Парсеваля пренебрежем вследствие их стремления к нулю – в таком случае равенство выполняется. Это означает, что наше преобразование является унитарным – ранее мы рассматривали формулу для нахождения Фурье-образа, коэффициент унитарности в ней равен

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

## 2.2 Треугольная функция

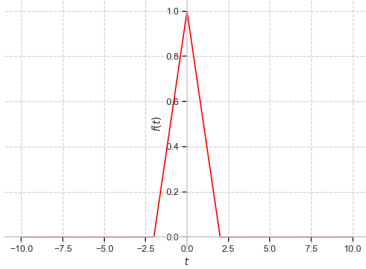
Рассмотрим треугольную функцию следующего вида

$$f(t) = \begin{cases} a - \left| \frac{at}{b} \right|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

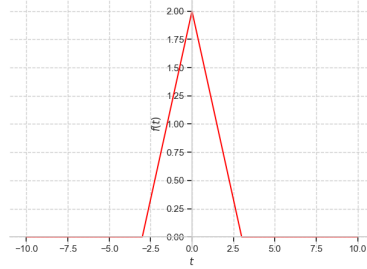
Аналитическое выражение с выводом Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  для треугольной функции имеет вид (напоминание:  $a, b > 0$  по условию)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-b}^b \left( a - \left| \frac{at}{b} \right| \right) e^{-i\omega t} dt + \int_b^{-b} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \left( a - \frac{b}{b} |t| \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( -\frac{a}{b} \right) \int_{-b}^b (|t| - b) e^{-i\omega t} dt = -\frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left( -\int_{-b}^0 (t+b) e^{-i\omega t} dt + \int_0^b (t-b) e^{-i\omega t} dt \right), \\ &-\int_{-b}^0 (t+b) e^{-i\omega t} dt = \left[ \begin{matrix} u = t+b & v = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \\ du = dt & dv = e^{-i\omega t} dt \end{matrix} \right] = -\left( \frac{e^{-i\omega t}(t+b)}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \Big|_{-b}^0 = -\frac{b}{-i\omega} - \frac{1 - e^{i\omega b}}{\omega^2}, \\ &\int_0^b (t-b) e^{-i\omega t} dt = [\text{аналогично}] = \left( \frac{e^{-i\omega t}(t-b)}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} \right) \Big|_0^b = \frac{b}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega b} - 1}{\omega^2}, \\ \hat{f}(\omega) &= -\frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{b}{-i\omega} - \frac{1 - e^{i\omega b}}{\omega^2} + \frac{b}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega b} - 1}{\omega^2} \right) = -\frac{a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega b} + e^{-i\omega b} - 2) = \\ &= -\frac{2a}{b\omega^2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{i\omega b} + e^{-i\omega b}}{2} - 1 \right) = -\frac{a\sqrt{2}}{b\omega^2\sqrt{\pi}} (\cos(b\omega) - 1) \end{aligned}$$

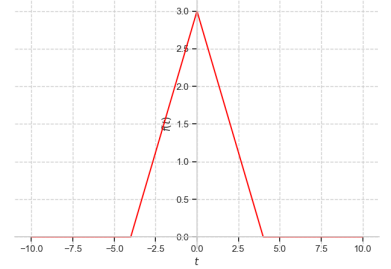
Построенные графики функций  $f(t)$  и их Фурье-образов  $\hat{f}(\omega)$  для нескольких значений параметров  $a, b > 0$  расположены ниже



(a)  $a = 1, b = 2$

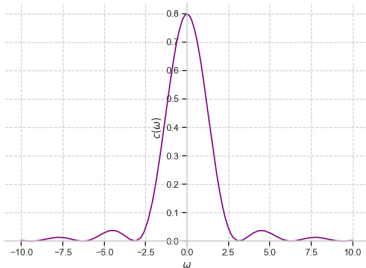


(b)  $a = 2, b = 3$

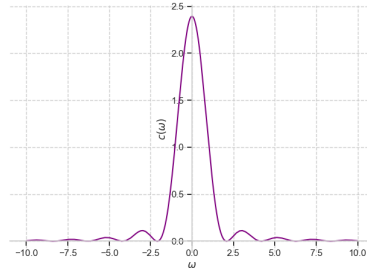


(c)  $a = 3, b = 4$

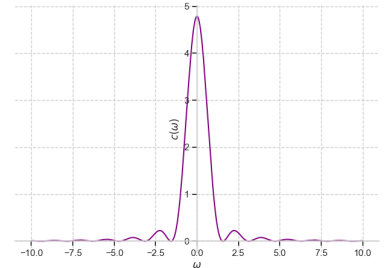
Рис. 3: Треугольные функции при различных значениях  $a$  и  $b$



(a)  $a = 1, b = 2$



(b)  $a = 2, b = 3$



(c)  $a = 3, b = 4$

Рис. 4: Фурье-образы треугольных функций при различных значениях  $a$  и  $b$

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```

1  p_1: 1.15470053837925 ?= 1.15470053837925
2  p_2: 2.82842712474619 ?= 2.82842712474619
3  p_3: 4.89897948556636 ?= 4.89897948556636

```

Листинг 8: Равенство Парсеваля для треугольных функций

Равенство Парсеваля выполняется для треугольной функции – все верно, использовали унитарное преобразование Фурье

## 2.3 Кардинальный синус

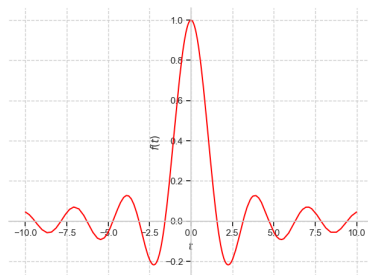
Рассмотрим кардинальный синус следующего вида

$$f(t) = a \operatorname{sinc}(bt)$$

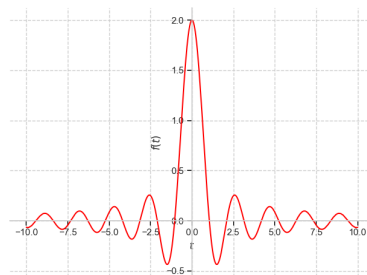
Аналитическое выражение Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  для кардинального синуса имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a \operatorname{sinc}(bt) e^{-i\omega t} dt = \frac{a\sqrt{\pi}}{b\sqrt{2}} \begin{cases} 0, & (b/\omega)^2 \leq 1 \\ 1, & (b/\omega)^2 > 1 \end{cases}$$

Построенные графики  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$  для нескольких значений параметров  $a, b > 0$  расположены ниже



(a)  $a = 1, b = 2$

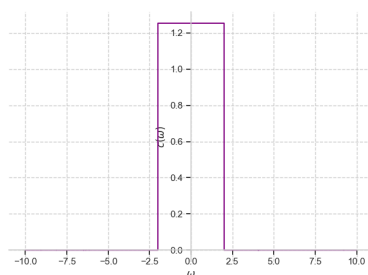


(b)  $a = 2, b = 3$

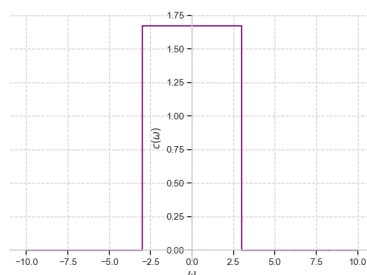


(c)  $a = 3, b = 4$

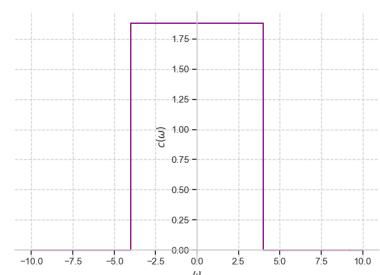
Рис. 5: Кардинальные синусы при различных значениях  $a$  и  $b$



(a)  $a = 1, b = 2$



(b)  $a = 2, b = 3$



(c)  $a = 3, b = 4$

Рис. 6: Фурье-образы кардинальных синусов при различных значениях  $a$  и  $b$

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```

1  p_1: 1.25331412734194 ?= 1.25331412734194
2  p_2: 2.04665340503514 ?= 2.04665340503514
3  p_3: 2.65868076577972 ?= 2.65868076577972

```

Листинг 9: Равенство Парсеваля для кардинальных синусов

Результат программы показывает, что равенство Парсеваля выполняется для кардинального синуса

## 2.4 Функция Гаусса

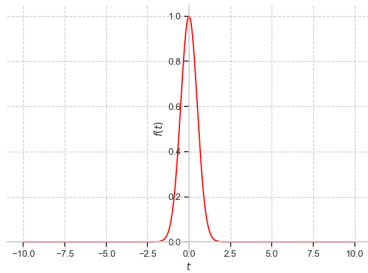
Рассмотрим функцию Гаусса следующего вида

$$f(t) = ae^{-bt^2}$$

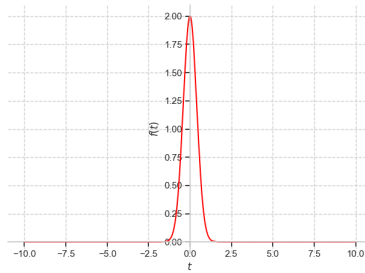
Аналитическое выражение Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  для функции Гаусса имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

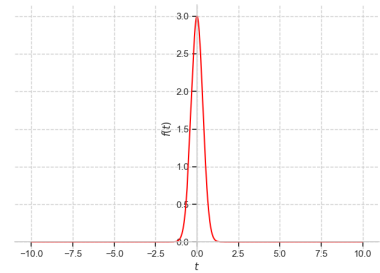
Построенные графики  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$  для нескольких значений параметров  $a, b > 0$  расположены ниже



(a)  $a = 1, b = 2$

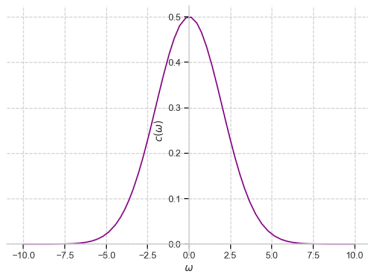


(b)  $a = 2, b = 3$

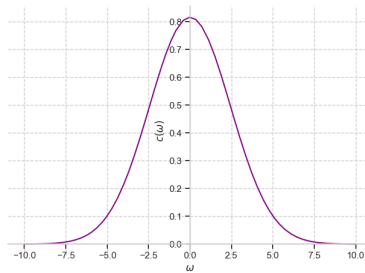


(c)  $a = 3, b = 4$

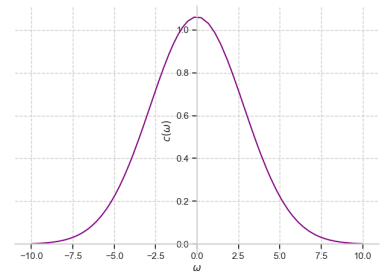
Рис. 7: Функции Гаусса при различных значениях  $a$  и  $b$



(a)  $a = 1, b = 2$



(b)  $a = 2, b = 3$



(c)  $a = 3, b = 4$

Рис. 8: Фурье-образы функций Гаусса при различных значениях  $a$  и  $b$

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
1 p_1: 0.941396263776715 ?= 0.941396263776715
2 p_2: 1.70129510027892 ?= 1.70129510027892
3 p_3: 2.37485023062924 ?= 2.37485023062924
```

Листинг 10: Равенство Парсеваля для функции Гаусса

Результат показывает выполнение равенства Парсеваля для функции Гаусса

## 2.5 Двустороннее затухание

Рассмотрим двустороннее затухание следующего вида

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

Аналитическое выражение с выводом Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  для двустороннего затухания имеет вид

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt,$$

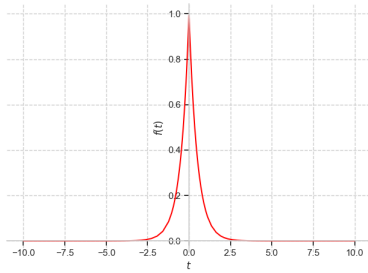


$$\int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(b-i\omega)} dt = \left[ \begin{array}{l} u = t(b-i\omega) \\ du = (b-i\omega)dt \\ dt = \frac{du}{b-i\omega} \end{array} \right] = \frac{1}{b-i\omega} \int_{u_1}^{u_2} e^u du = \frac{1}{b-i\omega} e^{t(b-i\omega)} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{b-i\omega},$$

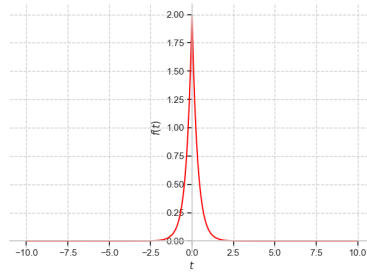
$$\int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(b+i\omega)} dt = [\text{аналогично}] = -\frac{1}{b+i\omega} e^{-t(b+i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{b+i\omega},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} = \frac{b+i\omega + b-i\omega}{(b-i\omega)(b+i\omega)} = \frac{2b}{b^2 + \omega^2} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2 + \omega^2} = \frac{ab\sqrt{2}}{(b^2 + \omega^2)\sqrt{\pi}}$$

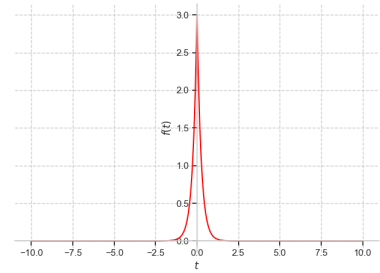
Построенные графики  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$  для нескольких значений параметров  $a, b > 0$  расположены ниже



(a)  $a = 1, b = 2$

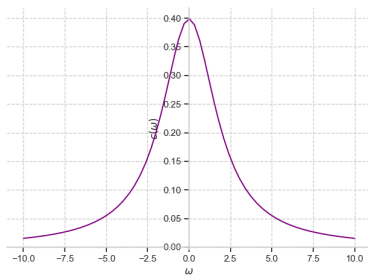


(b)  $a = 2, b = 3$

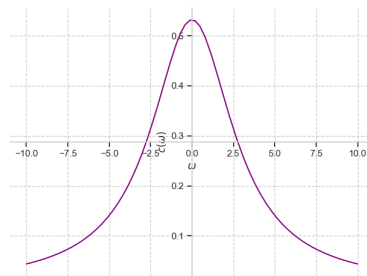


(c)  $a = 3, b = 4$

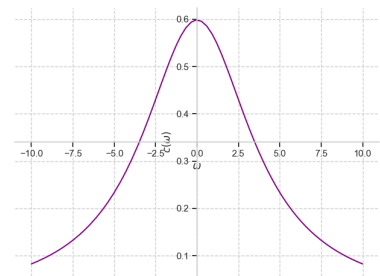
Рис. 9: Двусторонние затухания при различных значениях  $a$  и  $b$



(a)  $a = 1, b = 2$



(b)  $a = 2, b = 3$



(c)  $a = 3, b = 4$

Рис. 10: Фурье-образы двусторонних затуханий при различных значениях  $a$  и  $b$

Проверим программой выполнение равенства Парсеваля

```
1 p_1: 0.700601299282005 ?= 0.700601299282005
2 p_2: 1.15326854220130 ?= 1.15326854220130
3 p_3: 1.49974838192519 ?= 1.49974838192519
```

Листинг 11: Равенство Парсеваля для двустороннего затухания

Результат говорит о выполнении равенства Парсеваля для двустороннего затухания

## 2.6 Анализ графиков и ответы на вопросы

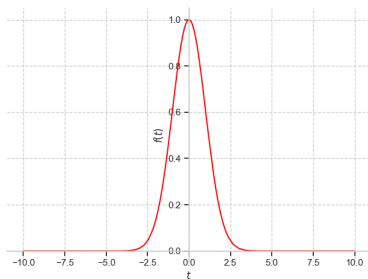
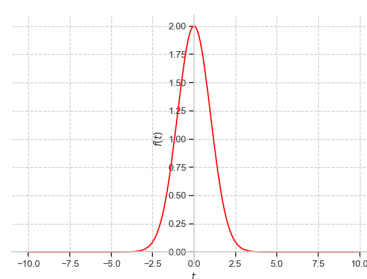
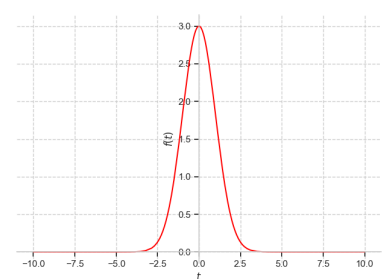
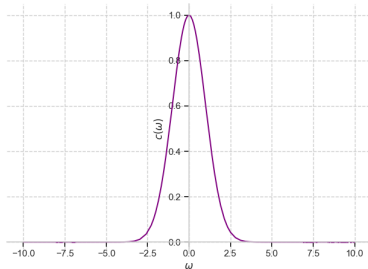
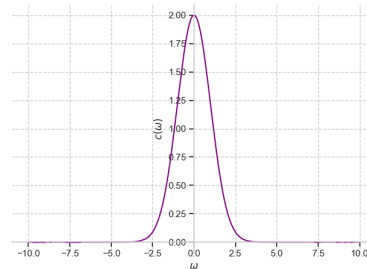
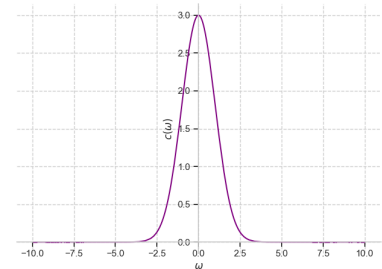
Для функции  $f(t)$  параметр  $a$  отвечает за высоту функции, а параметр  $b$  за ширину функции. Зависимость высоты от  $a$  прямая – чем больше  $a$ , тем выше тянется функция. Зависимость ширины от  $b$  прямая для кусочно-заданных функций – чем больше  $b$ , тем шире функция. Для остальных функций, рассмотренных в работе, зависимость обратная – чем больше  $b$ , тем уже функция.

Для Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$  параметр  $a$  отвечает за амплитуду, а параметр  $b$  за частоту. Зависимость амплитуды от  $a$  прямая – чем больше параметр  $a$ , тем больше амплитуда каждой волны. Зависимость частоты от  $b$  прямая для кусочно-заданных функций – чем больше  $b$ , тем выше частота волн. Сравнивая поведение с влиянием параметра на обычную функцию можно сказать, что оно противоположно – в данном

случае график становится уже, а не шире. Для других функций зависимость от  $b$  обратная – чем больше параметр  $b$ , тем ниже частота, соответственно график становится шире

Принцип неопределенности заключается в том, что при достижении высокой точности в пространственной области снижается точность в частотной области и наоборот. Пространственная область – сигнал, который, например, получен из какого-то звука и его можно описать функцией. Частотная область – преобразование Фурье. Например, преобразование звука из пространства в частоты для ее дальнейшего исследования (например, убрать шумы). Чем точнее функция описывает звук, тем менее точно определяются частотные характеристики. Например, в данной работе этот принцип проявлялся тогда, когда из широкого "малоинформативного" графика функции получался узкий "информативный" график Фурье-образа и наоборот

Исходя из графиков функций и их Фурье-образов для каждого из пяти пунктов сделан вывод – функция Гаусса может быть равна своему Фурье-образу при определенных значениях параметров  $a, b$ , так как сам Фурье-образ является функцией Гаусса. Подбором с программным построением графиков были получены такие параметры:  $a \in \mathbb{R}, b = 0.5$ . Ниже приведены показательные графики

(a)  $a = 1$ (b)  $a = 2$ (c)  $a = 3$ Рис. 11: Функции Гаусса при различных значениях  $a$  и при фиксированном  $b = 0.5$ (a)  $a = 1$ (b)  $a = 2$ (c)  $a = 3$ Рис. 12: Фурье-образы функций Гаусса при различных значениях  $a$  и при фиксированном  $b = 0.5$

### 3 Задание 2. Комплексное

#### 3.1 Прямоугольная функция со сдвигом

Для выполнения задания выбрана прямоугольная функция из задания 1 при зафиксированных параметрах  $a = 1, b = 2$

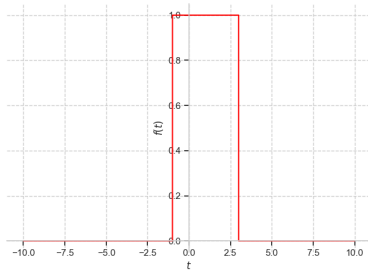
$$g(t) = f(t + c) = \begin{cases} 1, & |t + c| \leq 2, \\ 0, & |t + c| > 2. \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа  $\hat{g}(\omega)$  для прямоугольной функции со сдвигом имеет вид

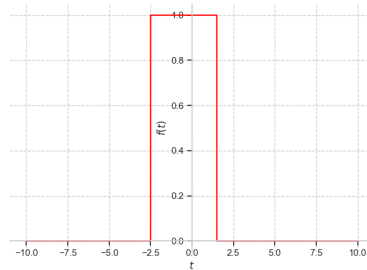
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 1 \cdot e^{-i\omega(t+c)} dt = e^{-i\omega c} \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin(2\omega)$$

Из аналитического выражения сделан вывод, что  $\hat{g}(\omega)$  повторяет  $\hat{f}(\omega)$  прямоугольной функции с разницей в появлении множителя  $e^{-i\omega c}$

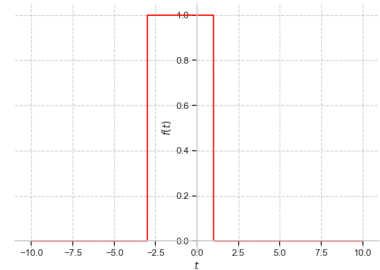
Построенные графики  $g(t)$ ,  $\operatorname{Re} \hat{g}(\omega)$ ,  $\operatorname{Im} \hat{g}(\omega)$  и  $|\hat{g}(\omega)|$  для нескольких значений параметра  $c$  расположены ниже



(a)  $c = -1$

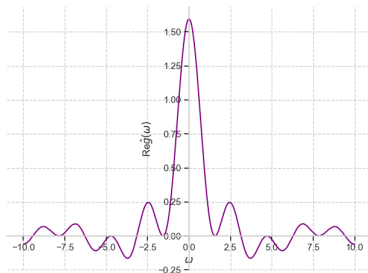


(b)  $c = 0.5$

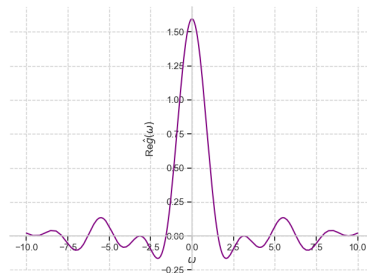


(c)  $c = 1$

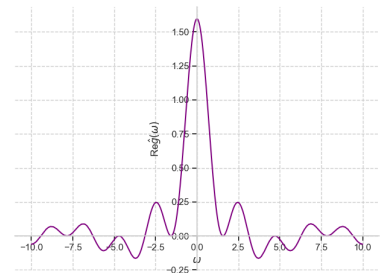
Рис. 13: Прямоугольные функции со смещением при различных значениях  $c$



(a)  $c = -1$



(b)  $c = 0.5$



(c)  $c = 1$

Рис. 14: Действительные части Фурье-образов прямоугольных функций со смещением при различных значениях параметра  $c$

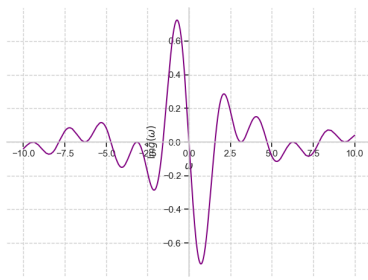
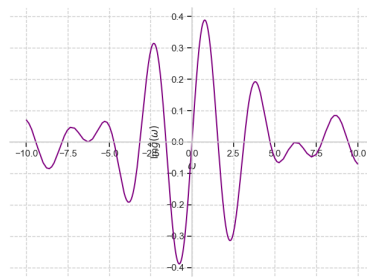
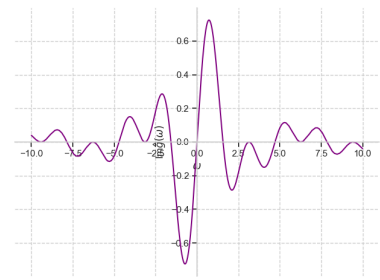
(a)  $c = -1$ (b)  $c = 0.5$ (c)  $c = 1$ 

Рис. 15: Мнимые части Фурье-образов прямоугольных функций со смещением при различных значениях параметра  $c$

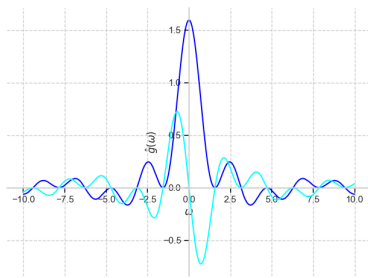
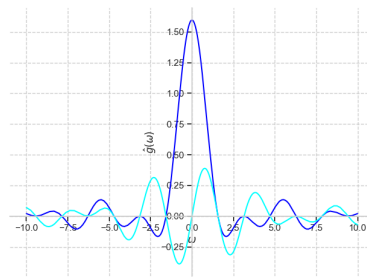
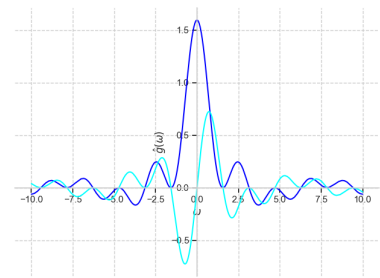
(a)  $c = -1$ (b)  $c = 0.5$ (c)  $c = 1$ 

Рис. 16: Действительные и мнимые части Фурье-образов прямоугольных функций со смещением при различных значениях параметра  $c$

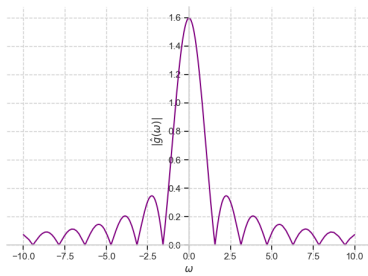
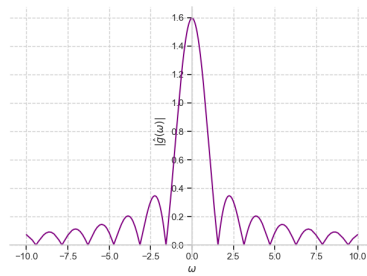
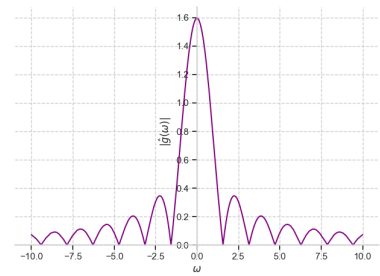
(a)  $c = -1$ (b)  $c = 0.5$ (c)  $c = 1$ 

Рис. 17: Модули Фурье-образов прямоугольных функций со смещением при различных значениях параметра  $c$

### 3.2 Анализ влияния параметра $c$ на функцию и ее Фурье-образ

Параметр  $c$  двигает функцию по временной шкале: при  $c > 0$  функция смещается влево, при  $c < 0$  вправо. Множитель  $e^{-i\omega c}$  является комплексным экспоненциальным сдвигом, который вносит фазовый сдвиг в Фурье-образ функции, который испытывают действительная и мнимая части Фурье-образа – фазовый угол каждой компоненты преобразования Фурье изменяется на величину  $-\omega c$ . Множитель не изменяет амплитудный спектр Фурье-образа – график модуля остается неизменным при любых значениях  $c$

## 4 Задание 3. Музыкальное

Для выполнения задания с представленного [гугл-диска](#) выбран аккорд номер 26

Для считывания аудиозаписи в список используется библиотека `librosa`. В переменную `y` запишутся значения амплитуд аудиосигнала, в переменной `sr` будет частота дискретизации аудиосигнала, а `t` – список временных отсчетов в секундах, соответствующий каждой амплитуде в списке `y`. На строках 12-14 показан пример использования метода. Указывается путь к `mp3` файлу в переменной `audio_file`. В переменной `select_channel` хранится номер нужного звукового канала – выбран первый канал. Аудиозапись длится 4 секунды, последняя из которых вырезана на 16-17 строках, так как не несет в себе важной информации, аккорд заканчивается раньше

```

1  def get_y_sr_t(audio_file: str, select_channel: int):
2      y, sr = load(audio_file)
3
4      if select_channel >= y.ndim:
5          select_channel = 0
6
7      y = y[:, select_channel] if y.ndim > 1 else y
8      t = linspace(0, len(y) / sr, len(y))
9
10     return y, sr, t
11
12     audio_file = 'fm_lab2/chord/chord26.mp3'
13     select_channel = 0
14     y, sr, t = get_y_sr_t(audio_file, select_channel)
15
16     y = y[:3 * sr]
17     t = t[:3 * sr]
```

Листинг 12: Программа для считывания аудиозаписи в список

Программа ниже построит график аудиозаписи  $f(t)$ . На 8-9 строках расположен пример использования

```

1  def build_audio_f_t(t, y, clr=None):
2      plt.plot(t, y, color=clr)
3      plt.xlabel(r'$t$')
4      plt.ylabel(r'$f(t)$')
5      plt.grid(True)
6      plt.show()
7
8      f_t_clr = colors_strs[0]
9      build_audio_f_t(t, y, f_t_clr)
```

Листинг 13: Программа для построения функции  $f(t)$  аудиозаписи

Результат выполнения программы для считанной в список аудиозаписи

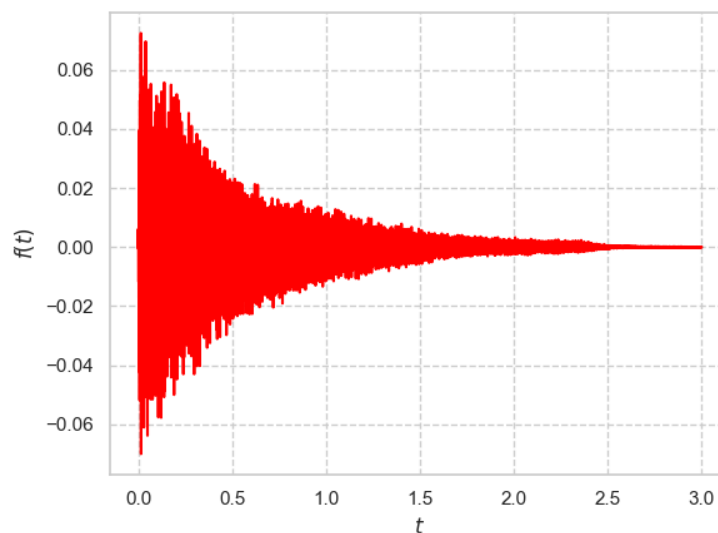


Рис. 18: График  $f(t)$  аудиозаписи

С помощью численного интегрирования `trapz` из библиотеки `numpy` найден Фурье-образ  $\hat{f}(\nu)$  по частотам `freqs` и записан в список амплитуд `ampls`. Пример использования расположен на 11 строке

```

1  def find_freqs_ampls(t, y, sr):
2      freqs = linspace(0, sr / 2, len(y) // 2)
3      ampls = []
4
5      for freq in freqs:
6          int = trapz(y * exp(-1j * 2 * pi * freq * t), t)
7          ampls.append(abs(int))
8
9      return freqs, ampls
10
11 freqs, ampls = find_freqs_ampls(t, y, sr)

```

Листинг 14: Программа для нахождения Фурье-образа аудиозаписи

Программа ниже построит график  $|\hat{f}(\nu)|$ . Пример использования расположен на 16-23 строках

```

1  def build_audio_f_v(freqs, ampls, start=None, stop=None, step=None,
2                      fz1=None, fz2=None, clr=None):
3      if ((fz1 != None) and (fz2 != None)):
4          plt.figure(figsize=(fz1, fz2))
5
6          plt.plot(freqs, ampls, color=clr)
7          plt.xlabel(r'$\nu$')
8          plt.ylabel(r'$|\hat{f}(\nu)|$')
9          plt.grid(True)
10         if ((start != None) and
11             (stop != None and stop != 0) and
12             (step != None and step != 0)):
13             plt.xticks(arange(start, stop, step))
14         plt.show()
15
16     start = 0
17     stop = 10001
18     step = 1000
19     figsize1 = 10
20     figsize2 = 6
21     f_v_clr = colors_strs[1]
22
23     build_audio_f_v(freqs, ampls, start=start, stop=stop, step=step,
24                     fz1=figsize1, fz2=figsize2, clr=f_v_clr)

```

Листинг 15: Программа для построения графика  $|\hat{f}(\nu)|$  аудиозаписи

Построенный график  $|\hat{f}(\nu)|$  расположен ниже

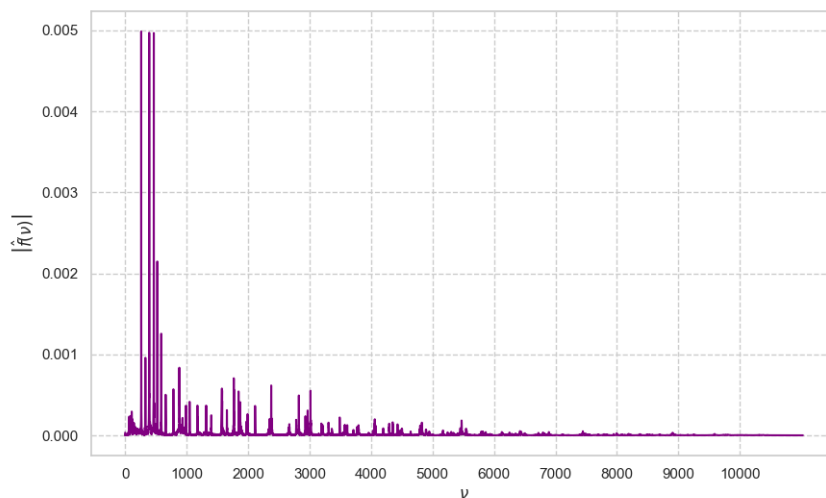


Рис. 19: График  $|\hat{f}(\nu)|$  аудиозаписи

Так как на большом интервале частот трудно разобрать из каких нот состоит аккорд, нужен код для уменьшения интервала и шага без потери данных или искажения графиков

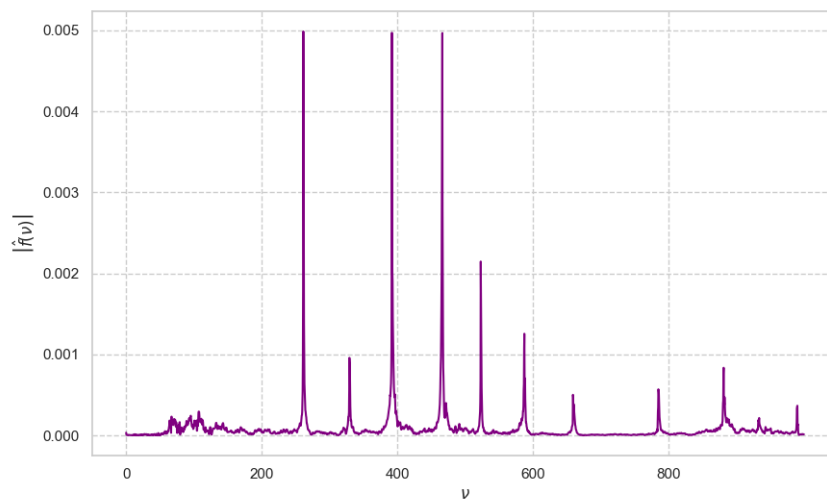
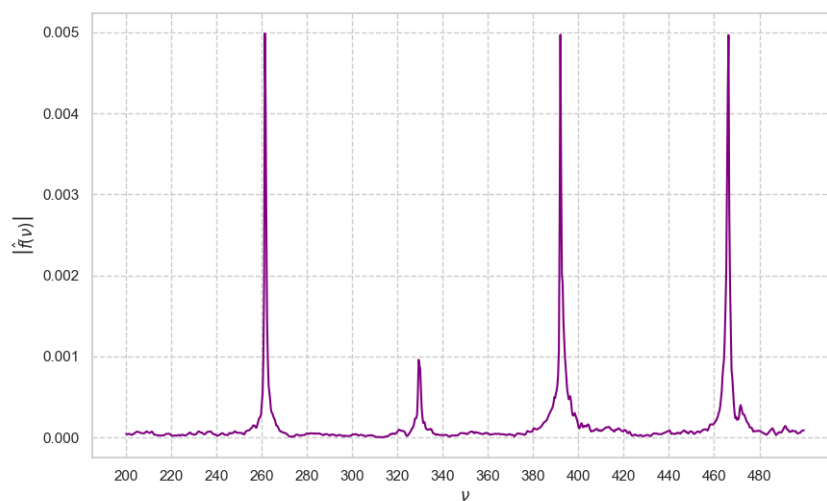
```

1  r_start = 0
2  r_end = 1000
3
4  start_idx = next(idx for idx, freq in enumerate(freqs) if freq >= r_start)
5  end_idx = next(idx for idx, freq in enumerate(freqs) if freq > r_end)
6
7  r_ampls = ampls[start_idx:end_idx]
8  r_freqs = freqs[start_idx:end_idx]
9  r_step = 20
10
11 build_audio_f_v(r_freqs, r_ampls, start=r_start, stop=r_end, step=r_step, fz1=figsize1,
    fz2=figsize2, clr=f_v_clr)

```

Листинг 16: Программа для изменения интервала частот и амплитуд

С помощью программы построен график  $|\hat{f}(\nu)|$  на интервале частот от 0 до 1000 с шагом 200, а после на интервале от 200 до 500 с шагом 20 для точности определения нот

Рис. 20: График  $|\hat{f}(\nu)|$  аудиозаписи на интервале частот от 0 до 1000Рис. 21: График  $|\hat{f}(\nu)|$  аудиозаписи на интервале частот от 200 до 500

Рассматривать необходимо самые высокие пики. Исходя из графика, построенного на уменьшенном интервале частот, определены следующие ноты: До (C), Соль (G), Ля диэз (Bb). Все на первой октаве