



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5
ПРЕДМЕТ «ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ»
ТЕМА «СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО»

Лектор: Перегудин А. А.
Практик: Пашенко А. В.
Студент: Румянцев А. А.
Поток: ЧАСТ.МЕТ. 1.3

Факультет: СУиР
Группа: R3241

Санкт-Петербург
2024

Содержание

1	Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье	2
1.1	Истинный Фурье-образ	2
1.2	Численное интегрирование	2
1.3	Использование DFT	4
1.4	Выводы о trapz и fft	4
1.5	Приближение непрерывного с помощью DFT	5

1 Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

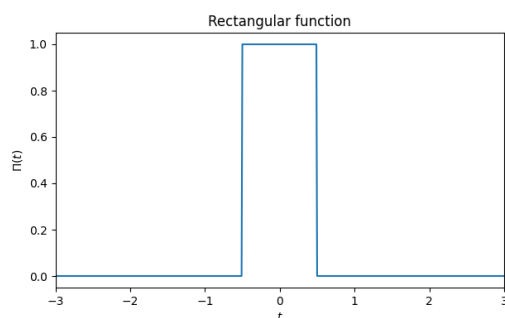
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$$

1.1 Истинный Фурье-образ

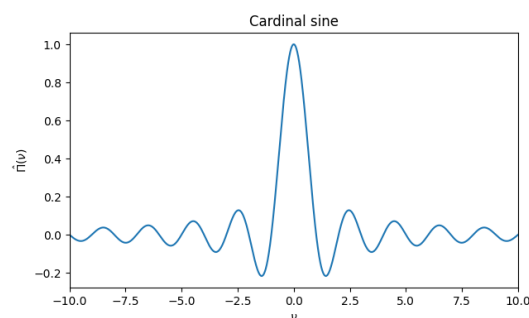
Найдем аналитическое выражение для Фурье-образа прямоугольной функции

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \nu t} dt = -\frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\nu)$$

Построим графики $\Pi(t)$ и $\hat{\Pi}(\nu)$



(a) Прямоугольная функция



(b) Кардинальный синус

Рис. 1: Исходный сигнал и его Фурье-образ

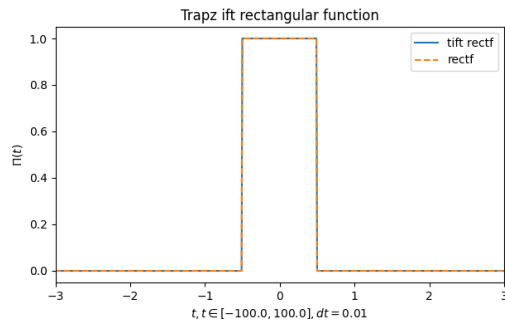
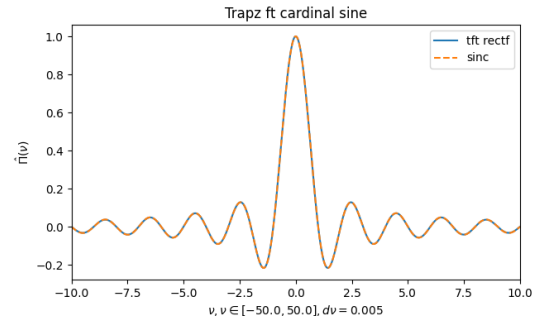
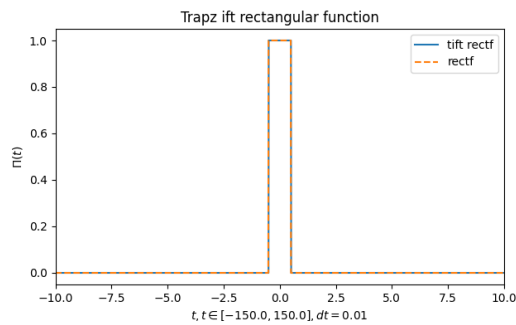
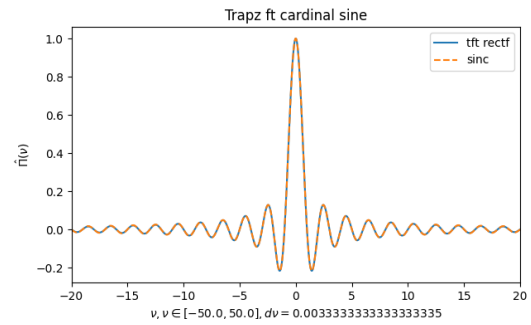
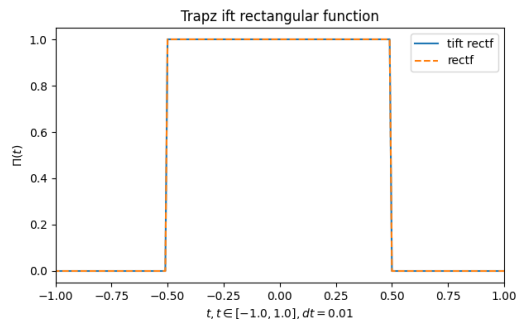
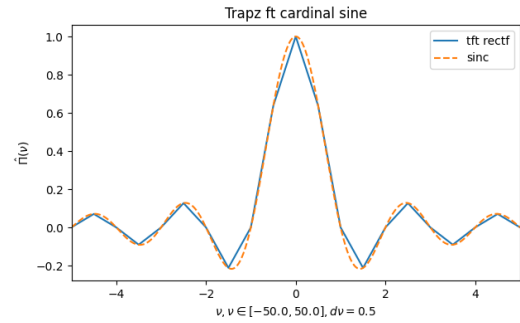
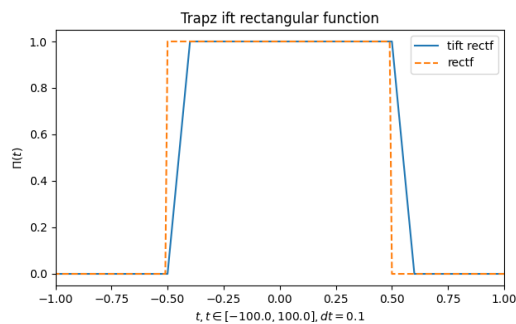
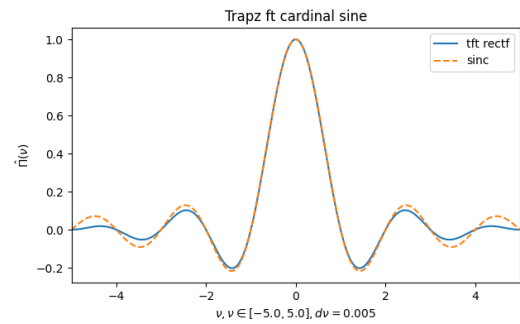
1.2 Численное интегрирование

Зададим функцию $\Pi(t)$ в Python. Найдем ее Фурье-образ с помощью численного интегрирования (функция `trapz`). Вновь используя численное интегрирование, выполним обратное преобразование Фурье от найденного Фурье-образа с целью восстановить исходную функцию. Схематично наши действия будут выглядеть так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{trapz}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{trapz}} \Pi(t)$$

Построим график найденной функции $\hat{\Pi}(\nu)$ и восстановленной функции $\Pi(t)$. Сравним результат с истинной функцией и Фурье-образом. Исследуем влияние величины шага интегрирования и размера промежутка, по которому вычисляется интеграл, на результат. Сделаем выводы о точности и быстродействии метода.

Далее приведены соответствующие графики. Оранжевым цветом выделены оригинальные функции, синим – найденные через преобразования. Каждый график подписан сверху. Под временной шкалой также указаны рассматриваемый промежуток времени или частот и шаг дискретизации во временной или частотной областях.

(a) $\Pi(t)$, восстановленная **trapez**(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной **trapez** $\Pi(t)$ Рис. 2: Интеграл по всей области определения функции от -100 до 100 (a) $\Pi(t)$, восстановленная **trapez**(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной **trapez** $\Pi(t)$ Рис. 3: Интеграл на увеличенном промежутке от -150 до 150 (a) $\Pi(t)$, восстановленная **trapez**(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной **trapez** $\Pi(t)$ Рис. 4: Интеграл на уменьшенном промежутке от -1 до 1 (a) $\Pi(t)$, восстановленная **trapez**(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной **trapez** $\Pi(t)$ Рис. 5: Увеличение шага интегрирования $dt = 0.1$, интеграл аналогично рис. 2

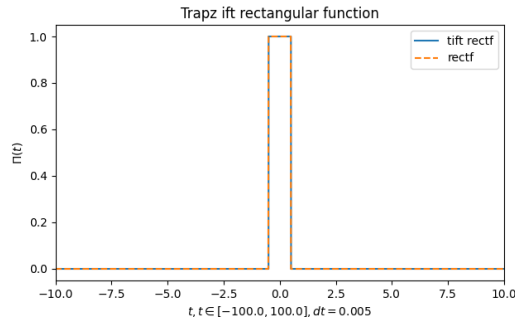
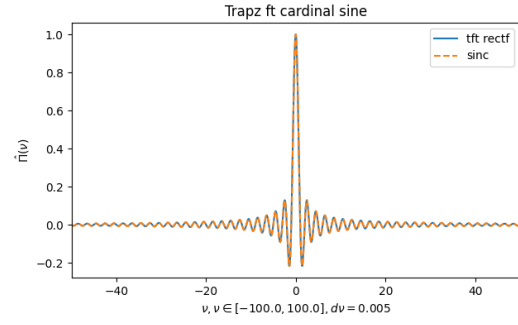
(a) $\Pi(t)$, восстановленная `trapz`(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной `trapz` $\Pi(t)$

Рис. 6: Уменьшение шага интегрирования $dt = 0.005$, интеграл аналогично рис. 2

1.3 Использование DFT

Найдем Фурье-образ функции $\Pi(t)$ с помощью дискретного преобразования Фурье (конструкция `fftshift(fft())`), используя его так, чтобы преобразование было унитарным. Выполним обратное преобразование от найденного Фурье-образа с помощью обратного дискретного преобразования (конструкция `ifft(ifftshift())`). Схематично наши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{fftshift}(\text{fft}())} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{ifft}(\text{ifftshift}())} \Pi(t)$$

Для того, чтобы преобразование было унитарным, необходимо домножить ряд дискретного преобразования Фурье на коэффициент $1 \div \sqrt{N}$. Аналогично для обратного преобразования Фурье. Таким образом, формулы DFT и IDFT будут иметь вид:

$$\mathcal{F}_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}_m e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$$

Далее приведены сравнительные графики найденной $\hat{\Pi}(\nu)$ и восстановленной $\Pi(t)$ функций с исходными. Цвета и обозначения аналогичны предыдущему пункту.

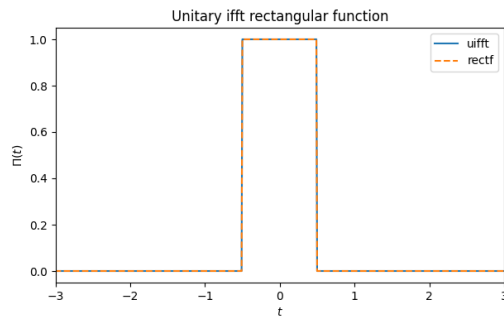
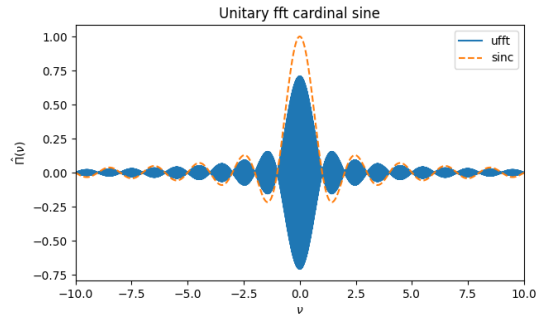
(a) $\Pi(t)$, восстановленная `uifft`(b) $\hat{\Pi}(t)$ восстановленной `uifft` $\Pi(t)$

Рис. 7: Унитарное быстрое преобразование Фурье `uifft`

1.4 Выводы о `trapz` и `fft`

объяснить

1.5 Приближение непрерывного с помощью DFT