Практическая линейная алгебра
Лабораторная работа №1.
ФИО: Румянцев Алексей Александрович
Номер ИСУ: 368731 Группа: R3241 Поток: Прак. Лин. Ал. 1.3

Перед началом выполнения заданий выберем 4 числа a, b, c, d такие, чтобы ни одно из них не равнялось нулю или ± 1.

$$\exists\ M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание 1.1.

$y = 2x$, $-2x + y = 0$; Возьмем произвольные точки: $(3;2)$, $(1;4)$

Чтобы найти точки, симметричные взятым относительно прямой $y=2x$, найдем расстояние от выбранной точки до симметричной ей с помощью метода поиска проекции точки на прямую. Обозначим расстояние от точки до ее проекции на прямую за t. Тогда расстояние от точки до симметричной ей будет $2t$ в силу того, что прямая $y=2x$ в таком случае является серединным перпендикуляром.

Определим параметрическое уравнение прямой для точек $(3;2)$ и $(1;4)$

$$L_1(t_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L_2(t_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
; коэффициенты -2 и 1 взяты из ур-я $-2x + y = 0$

$$L_1(t_1) = \begin{pmatrix} -2t_1 + 3 \\ t_1 + 2 \end{pmatrix}, \quad L_2(t_2) = \begin{pmatrix} -2t_2 + 1 \\ t_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Теперь подставим x и y в ур-е $-2x + y = 0$

$$-2(-2t_1 + 3) + (t_1 + 2) = 0, \qquad -2(-2t_2 + 1) + (t_2 + 4) = 0$$
$$4t_1 - 6 + t_1 + 2 = 0 \qquad 4t_2 - 2 + t_2 + 4 = 0$$
$$5t_1 = 4 \qquad 5t_2 = -2$$
$$t_1 = 0{,}8 \qquad t_2 = -0{,}4$$

Тогда $2t_1 = 1{,}6$, $2t_2 = -0{,}8$

$$L_1(1{,}6) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1{,}6 + 3 \\ 1{,}6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} \qquad L_2(-0{,}8) = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-0{,}8) + 1 \\ -0{,}8 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

(·) $(-0{,}2; 3{,}6)$ симметрична (·) $(3;2)$

(·) $(2{,}6; 3{,}2)$ симметрична (·) $(1;4)$

Теперь составим систему уравнений, где некоторая матрица X действует на (·) $(3;2)$ и результатом будет симметричная ей (·) $(-0,2;3,6)$. Аналогично с другой точкой.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 3,6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 3,2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -0,2 \\ 3x_3 + 2x_4 = 3,6 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 2,6 \\ x_3 + 4x_4 = 3,2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{15} - \frac{2}{3}x_2 \\ x_3 = \frac{18}{15} - \frac{2}{3}x_4 \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 2,6 - 4x_2 \\ x_3 = 3,2 - 4x_4 \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases},$$

система будет существовать при равенстве $\forall x_i$ из первой системы и второй. Тогда найдем x_2 и x_4:

$$\begin{cases} -\frac{1}{15} - \frac{2}{3}x_2 = 2,6 - 4x_2 \\ \frac{18}{15} - \frac{2}{3}x_4 = 3,2 - 4x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,6 + 1/15 = 4x_2 - \frac{2}{3}x_2 \\ 3,2 - 18/15 = 4x_4 - \frac{2}{3}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{3} = \frac{10}{3}x_2 \\ 2 = \frac{10}{3}x_4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4/5 = 0,8 \\ x_4 = \frac{6}{10} = 0,6 \end{cases}.$$ Подставим в x_1 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 = -1/15 - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = -1/15 - \frac{8}{15} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5} = -0,6 \\ x_3 = 18/15 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{18}{15} - \frac{2}{5}^{\,\backslash 3} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{cases}.$$ Тогда: $$\begin{cases} x_1 = -0,6 \\ x_2 = 0,8 \\ x_3 = 0,8 \\ x_4 = 0,6 \end{cases}$$

Матрица отражения плоскости относительно прямой $y = 2x$ имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$$ Ответ.

Задание 1.2.

$y = -4x$, $4x + y = 0$; $\exists$ (·) $G = (-2;6)$, (·) $H = (-1;10)$

Построим перпендикуляры от точек к прямой $y = -4x$. Получаем прямые $GG_\perp$ и $HH_\perp$, где $G_\perp$ и $H_\perp$ – проекции точек G и H на прямую $y = -4x$. Именно на эту прямую отобразим плоскость.

Аналогично методу из задания 1.1 найдем расстояние t_1 и t_2 до прямой $y = -4x$ от выбранных точек. Но теперь нам не нужно искать симметричную точку, поэтому в $L(t)$ будем подставлять t.

$$L_1(t_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad L_2(t_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$L_1(t_1)=\begin{pmatrix}4t_1-2\\ t_1+6\end{pmatrix}, \quad L_2(t_2)=\begin{pmatrix}4t_2-1\\ t_2+10\end{pmatrix}$$

$$4(4t_1-2)+t_1+6=0 \qquad 4(4t_2-1)+t_2+10=0$$

$$17t_1=2 \qquad 17t_2=-6$$

$$t_1=\frac{2}{17} \qquad t_2=-\frac{6}{17}$$

$$L_1\left(\frac{2}{17}\right)=\begin{pmatrix}4\cdot 2/17-2\\ 2/17+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26/17\\ 104/17\end{pmatrix}, \quad L_2\left(-\frac{6}{17}\right)=\begin{pmatrix}4\cdot\left(-\frac{6}{17}\right)-1\\ -\frac{6}{17}+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{41}{17}\\ \frac{164}{17}\end{pmatrix}$$

Снова составим и решим систему уравнений, используя аналогичные размышление из задания 1.1, только теперь результатом действия будет проекция точки на прямую.

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26/17\\ 104/17\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-41/17\\ 164/17\end{pmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}-2x_1+6x_2=-26/17\\ -2x_3+6x_4=104/17\end{cases}\\ \begin{cases}-x_1+10x_2=-41/17\\ -x_3+10x_4=164/17\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x_1=\frac{13}{17}+3x_2\\ x_3=-\frac{52}{17}+3x_4\\ x_2, x_4\in\mathbb{R}\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=\frac{41}{17}+10x_2\\ x_3=-\frac{164}{17}+10x_4\\ x_2, x_4\in\mathbb{R}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{13}{17}+3x_2=\frac{41}{17}+10x_2\\ -\frac{52}{17}+3x_4=-\frac{164}{17}+10x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{13}{17}-\frac{41}{17}=10x_2-3x_2\\ -\frac{52}{17}+\frac{164}{17}=7x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{28}{17}=7x_2\\ \frac{112}{17}=7x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=-\frac{28}{119}=-\frac{4}{17}\\ x_4=\frac{16}{17}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_3=-\frac{52}{17}+3\cdot\frac{16}{17}=-\frac{4}{17}\\ x_1=\frac{13}{17}+3\cdot\left(-\frac{4}{17}\right)=\frac{13}{17}-\frac{12}{17}=\frac{1}{17}\end{cases}$$

. Тогда:

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{17}\\ x_2=-\frac{4}{17}\\ x_3=-\frac{4}{17}\\ x_4=\frac{16}{17}\end{cases}$$

Матрица отображения всей плоскости в прямую $y=-4x$ имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{17} & -\frac{4}{17}\\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17}\end{pmatrix}$$

Ответ

Любая точка плоскости под действием C будет оказываться на прямой $y=-4x$ $\rightarrow$ каждая т.1 плоскости под действием C окажется на прямой и плоскость отобразится в прямую.

Задание 1.3

$\theta = 10c = 10 \cdot 3 = 30^\circ$

Матрица поворота против часовой стрелки имеет вид:

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Тогда для поворота плоскости на 30° потребуется такая матрица поворота:

$$R = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$ Ответ

Задание 1.4

При рассмотрении симметрии относительно центра координат O любой т. $(x;y)$ будет симметрична т. $(-x;-y)$. Пусть плоскость задана в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Этот базис никак не изменяет пространство. Тогда существует только одна матрица, которая симметрирует точки относительно нуля:

Ответ $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Под действием A все т. плоскости поменяют знак - повернули плоскость симметрично.

Задание 1.5

$\theta = 10d = 10 \cdot 6 = 60^\circ$

Мы уже нашли матрицу отражения относительно прямой $y = 2x$:

$$B = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Матрицу поворота по часовой стрелке можно найти через матрицу поворота против часовой стрелки заменой всех углов на отрицательные:

$$R_+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow R_- = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$ Тогда $$R = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

По заданию сначала отражение, потом поворот. Тогда:

/продолжение см след. стр/

Сначала подействуем матрицей отражения A на некий вектор x. $Ax = x'$. Теперь подействуем матрицей поворота на x':
$Rx' = x''$. Получим $\begin{cases} Ax = x' \\ Rx' = x'' \end{cases} \Rightarrow R\cdot(Ax) = x''$, матричное умножение обладает свойством ассоциативности. Тогда:
$R(Ax) = (RA)x = RAx = Dx$. Умножим R на A и получим D:

$$D = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ + 0{,}8\sin 60^\circ & 0{,}8\cos 60^\circ + 0{,}6\sin 60^\circ \\ 0{,}6\sin 60^\circ + 0{,}8\cos 60^\circ & -0{,}8\sin 60^\circ + 0{,}6\cos 60^\circ \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}8\sin 60^\circ - \cancel{0{,}6}\cos 60^\circ & 0{,}8\cos 60^\circ + 0{,}6\sin 60^\circ \\ 0{,}6\sin 60^\circ + 0{,}8\cos 60^\circ & 0{,}6\cos 60^\circ - 0{,}8\sin 60^\circ \end{pmatrix}$$

Ответ

Задание 1.6

Имеем стандартный базис $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$). Усл: $y = 2x$ при $y = 0$, $y = -4x$ при $x = 0$, тогда оформим переход в другой базис. $\exists x = 1$, тогда $y = 2$, $y = -4$, т.е. (·) (1;2), (·) (1;−4).
Подействуем некой матрицей X на старый базисный вектор и получим новый. Аналогично со вторым базисным вектором.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{вектор } \vec{i} \text{ в старом базисе}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{вектор } \vec{i} \text{ в новом базисе}} \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{для } \vec{j}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{для } \vec{j}_{new}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ответ

Задание 1.7

Обратная матрица к некоторой матрице отображения делает обратное преобразование. Тогда найдем ξ^{-1}, чтобы под ее действием вектор возвращался в старый базис.

$$\xi^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\mathrm{I}\cdot 2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right)_{:(-6)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{array}\right)^{-\mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \xi^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$ Ответ

Задание 1.8

P.S. /…/ — комментарий

$y = 2x$, $y = -4x$. Подставим в оба уравнение $x = 1 \Rightarrow$ (·) $(1;2)$
(·) $(1;-4)$

Подействуем неким матрицей X на точку $(1;2)$ и получим (·)$(1;-4)$. Аналогичные действия для (·) $(1;-4)$ и (·) $(1;2)$. Тогда:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow$$

/то есть при действии матрица X на точку с прямой $y=2x$ получите точка с прямой $y=-4x$ и наоборот/

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x_1+2x_2=1\\ x_3+2x_4=-4\end{cases}\\ \begin{cases}x_1+(-4x_2)=1\\ x_3-4x_4=2\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x_1=1-2x_2\\ x_3=-4-2x_4\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1+4x_2\\ x_3=2+4x_4\end{cases}\end{cases}, \begin{cases}1-2x_2=1+4x_2\\ -4-2x_4=2+4x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=6x_2\\ -6=6x_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=0\\ x_4=-1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1=1-0=1\\ x_3=-4-2\cdot(-1)=-2\end{cases}, \text{Тогда } X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

Ответ

Задание 1.9

$c = 3$, $S_{кр} = 1 \longrightarrow S_{кр_{new}} = 3$. $\exists\ f = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ — матрица круга. $\det(f) = 1 = S_{кр}$

Нужно увеличить $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора так, чтобы $S_{кр} = 3 = \det(f)$. Если домножить вектора в базисе на некоторое число n, то площадь фигуры станет kn^2. В данном случае $k = 1\cdot 1 = 1$. Тогда, чтобы $S_{фигуры} = n$, нужно домножить матрицу f на $\sqrt{n}$. Следовательно:

$$\sqrt{c} = \sqrt{3}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}}_{\text{матрица масштабирования}}, \quad \det(f_{new}) = 3 = S_{кр_{new}}$$

примечание: n^2 так как масштабируем и по $\vec{i}$, и по $\vec{j}$. В случае масштабирование только по $\vec{i}$ или $\vec{j}$ получился бы эллипс.

$$f_{new} = \begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Ответ

Задание 1.10

Нужно увеличить один из базисных векторов в d раз, чтобы получили эллипс площади d (Масштабирование по одному из единичных векторов).

$S_{эл} = d = 6$, $S_{кр} = 1$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Домножим левый столбец на d, чтобы масштабировать плоскость по $\vec{i}$ вектору (оси x)

$\det(g) = 1 = S_{кр}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{i} \quad \vec{j} \end{array} \xrightarrow{\cdot 6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(g_{new}) = 6 = S_{элл}. \quad g_{new} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Ответ

Задание 1.11

Чтобы найти такое отображение, придумаем вектора и собственные числа к ним. Матрицу найдем через спектральное разложение $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ (это жорданова форма, но в этом задании не нужны присоединенные вектора, поэтому назовем спектральным разложением). Усл: вектор не может содержать „0" на месте координаты „y", $y \neq x$, т.е $k \neq 1$ и $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

$\exists\ v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда $5x_2 + y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-y_2}{5}$, $\exists\ y_2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = -2$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$. Найдем P^{-1}:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-\text{II}\cdot 5} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -52 & 1 & -5 \\ 1 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right)^{:(-52)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\frac{1}{52} & \frac{5}{52} \\ 1 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\text{I}\cdot 10} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1/52 & 5/52 \\ 1 & 0 & 5/26 & 1/26 \end{array}\right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 5/26 & 1/26 \\ -1/52 & 5/52 \end{pmatrix}$$

$$\exists\ J = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/26 & 1/26 \\ -1/52 & 5/52 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 13 & -4 \\ 13 & 10 \cdot 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 65 & -4 \\ 13 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/26 & 1/26 \\ -1/52 & 5/52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \cdot \frac{5}{26} + 4 \cdot \frac{1}{52} & 65 \cdot \frac{1}{26} - \frac{20}{52} \\ 13 \cdot 5/26 - \frac{20}{52} & \frac{13}{26} + \frac{20 \cdot 5}{52} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{327}{26} & \frac{55}{26} \\ \frac{55}{26} & \frac{63}{26} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 327/26 & 55/26 \\ 55/26 & 63/26 \end{pmatrix}$$ Ответ

Задание 1.12

Аналогичным методом как в 1.11 подберем $P \cdot J \cdot P^{-1}$. Условие задание означает, что у матрицы будет только одно собственное число и один собственный вектор, то есть второй (для базиса) будет присоединенным.

$$\exists\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 2,\ u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = A$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) - \mathrm{I}\cdot 2 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) : (-2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) - \mathrm{II}\cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix} = A.$$ Умножим все и найдем A:

$$\begin{pmatrix} 2+0 & 1+6 \\ 4+0 & 2+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+7; & 3-3{,}5 \\ -8+10; & 4\cdot 1{,}5 - 0{,}5\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ Ответ.

Задание 1.13

Матрица поворота на 90° против часовой стрелки не содержит вещественных собственных векторов, при этом сама матрица вещественная.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Ответ.

Задание 1.14

~~Необходимо найти матрицу, собственные вектора которой будут~~

Аналогичным методом из предыдущих пунктов найдем матрицу A.

$$\exists\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\exists\, J = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

/продолжение см след стр./

Nota Bene: $E^{-1} = E$, $EA = A$, $A \cdot E = A$

Я взял вектора $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, чтобы составить простой базис из собственных векторов.

Почему J имеет такой вид?

Потому, что:

$$\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}7x=7x\\7y=7y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x\\y=y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\end{cases} \Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}}$$ Ответ.

Nota Bene: „A" в данном примере - матрица масштабирования пр-ва по $\vec{i}$ и по $\vec{j}$.

Задание 1.15

$$\exists A=\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&7\\6&5\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7\\6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+42&35+35\\4+18&14+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52&70\\22&29\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&7\\6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+14&14+21\\30+10&42+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&35\\40&57\end{pmatrix}$$

Как видим, $AB\neq BA$ $\Rightarrow$ $\underline{A=\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&7\\6&5\end{pmatrix}}$ Ответ.

Задание 1.16

$$\exists A=\begin{pmatrix}-5&2\\9&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}100&0\\0&100\end{pmatrix}$$

матрица масштабирования по $\vec{i}$ и по $\vec{j}$.

$$\begin{pmatrix}-5&2\\9&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100&0\\0&100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-500&200\\900&-400\end{pmatrix}=AB,$$

$$\begin{pmatrix}100&0\\0&100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&2\\9&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-500&200\\900&-400\end{pmatrix}=BA$$

Как видим, $AB=BA$ и матрицы A B не очень похожи друг на друга.

Также можно и с обратной матрицей, $AA^{-1}=E$, $A^{-1}A=E$

$$\underline{A=\begin{pmatrix}-5&2\\9&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}100&0\\0&100\end{pmatrix}}$$ Ответ

Задание 2.1

Найдем образ и ядро отображений из пунктов 1, 2, 13, 14
Воспользуемся ~~[illegible]~~ алгоритмом Чуркина: $(A^T|E)$ (В.А. Чуркин 1991 г.)

Тогда при занулении строк получим $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & K \end{array}\right)$ 0 – нули
В – числа
А – по строкам векторы базиса образа
К – по строкам векторы базиса ядра

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $A_1^T = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$$(A_1^T|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{6}{10} & \frac{8}{10} & 1 & 0 \\ \frac{8}{10} & \frac{6}{10} & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot\frac{10}{2} \\ \cdot\frac{10}{2} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} +\mathrm{II}\cdot 3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 25 & 20 & 15 \\ 1 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} :25 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -\mathrm{I}\cdot 7 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 1 & 0 & -0{,}6 & 0{,}8 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Range}(A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Nullspace}(A_1) = \{\ \} \text{ (пуст)}$$

Ответ

2. $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17} \end{pmatrix}$, $A_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17} \end{pmatrix}$

$$(A_2^T|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17} & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 17 \\ \cdot 17 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 17 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 17 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +\mathrm{I}\cdot 4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 68 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Range}(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Nullspace}(A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 68 \\ 17 \end{pmatrix} \right\}$$

Ответ

3. $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{13}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A_{13}^T | E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ — занулеть нечего $\Rightarrow$ $Range(A_{13}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$Nullspace(A_{13}) = \{ \}$ (пуст)

Ответ

4. $A_{14} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

$(A_{14}^T | E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$ — занулеть нечего $\Rightarrow$ $Range(A_{14}) = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

$Nullspace(A_{14}) = \{ \}$ (пуст)

Ответ

Задание 2.2

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -0,6-\lambda & 0,8 \\ 0,8 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(0,6+\lambda)(0,6-\lambda) - 0,8^2 = 0$

$-0,36 + \lambda^2 - 0,64 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -0,6-1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\text{II}\cdot 2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,8 & -0,4 \end{pmatrix} :0,4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\exists x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$\begin{pmatrix} -0,6+1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,8 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\text{I}\cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :0,4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ для A_1: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1/17 & -4/17 \\ -4/17 & 16/17 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{17}-\lambda & -\frac{4}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\left(\frac{1}{17}-\lambda\right)\left(\frac{16}{17}-\lambda\right)-\left(\frac{4}{17}\right)^2 = 0$, $\cancel{\frac{16}{17^2}} - \frac{\lambda}{17} - \frac{16\lambda}{17} + \lambda^2 - \cancel{\frac{4^2}{17^2}} = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$

$\lambda = 0$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{16}{17} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 17 \\ \cdot 17 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} + I \cdot 4 \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_1 - 4x_2 = 0$ $\begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\exists x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -\frac{16}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 17 \\ \cdot 17 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - II \cdot 4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-4x_1 - x_2 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\exists x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ответ для A_2: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

---

3. $A_3 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cos 30^\circ - \lambda & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\cos 30^\circ - \lambda)^2 + \sin^2 30^\circ = 0$, $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \lambda^2 - 2\lambda\cos 30^\circ = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$, $\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0$

$D = 3 - 4 = -1$, $\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

/продолжение см след. стр/

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} -\text{II} \cdot i \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1+i^2 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 i \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ Π } x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & +\frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\text{I} \cdot i \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1+i^2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 i - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 i \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{ Π } x_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Ответ для A_3: $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

---

4. $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -1$

/ну да, можно записать так: $\lambda = -1$, $\mathrm{alg}(-1) = 2$/

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ для A_4: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$

5. $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-(1-\lambda)(1+\lambda) + 2\cdot 0 = 0$, $-1+\lambda^2+0=0$, $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} :(-2) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_2 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ :(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\mathrm{II}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_2 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ для A_8: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

---

6. $A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{327}{26} & \frac{55}{26} \\ \frac{55}{26} & \frac{63}{26} \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{327}{26}-\lambda & \frac{55}{26} \\ \frac{55}{26} & \frac{63}{26}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

! Так как матрицу задания 1.11 я придумал сам через выдуманные $v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2$ в $P\cdot J\cdot P^{-1}$, то просто заменим в то задание и возьмем оттуда собственные числа и вектора. !

$\lambda_1 = 13$, $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Ответ для A_{11}: $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 2$

---

7. $A_{12} = \begin{pmatrix} 3 & -0{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$! Аналогично пункту 6 заменим в задание 1.12 и возьмем оттуда собственный вектор, с.ч., присоед. в. !

$\lambda = 2$, $alg(2) = 2$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Ответ для A_{12}: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$, $alg(2) = 2$

8. $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$\lambda = i$

$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} -\text{II}\cdot i \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 i \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_2 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -i$

$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} +\text{I}\cdot i \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 i - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 i \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_1 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Ответ для A_{13}: $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

---

9. $A_{14} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 \\ 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda = 7$, $alg(7) = 2$

$\lambda = 7$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ для A_{14}: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$, $alg(7) = 2$

---

10. $A_{15_1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $(5-\lambda)(3-\lambda) - 14 = 0$,

$15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 14 = 0$, $\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$

$D = 64 - 4 = 60$, $\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4+\sqrt{15} \\ \lambda_2 = 4-\sqrt{15} \end{matrix}$

$\lambda_1 = 4 + \sqrt{15}$

$\begin{pmatrix} 5-(4+\sqrt{15}) & 7 \\ 2 & 3-(4+\sqrt{15}) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\sqrt{15} & 7 \\ 2 & -1-\sqrt{15} \end{pmatrix} : (1-\sqrt{15}) \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1-\sqrt{15}} \\ 2 & -1-\sqrt{15} \end{pmatrix} \sim$

$-\text{I}\cdot 2$

~~переход~~

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1-\sqrt{15}} \\ 0 & \underbrace{-1-\sqrt{15}-\frac{14}{1-\sqrt{15}}}_{\frac{-(1+\sqrt{15})(1-\sqrt{15})-14}{1-\sqrt{15}}=0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1-\sqrt{15}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7x_2}{1-\sqrt{15}} \Rightarrow \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\, x_2 = 1-\sqrt{15} \Rightarrow x_1 = -7$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1-\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4-\sqrt{15}$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{15} & 7 \\ 2 & -1+\sqrt{15} \end{pmatrix}^{:(1+\sqrt{15})} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1+\sqrt{15}} \\ 2 & -1+\sqrt{15} \end{pmatrix}_{-I\cdot 2} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1+\sqrt{15}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7x_2}{1+\sqrt{15}} \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_2 = 1+\sqrt{15} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1+\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

Ответ для A_{15_1}: $v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1-\sqrt{15} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1+\sqrt{15} \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4+\sqrt{15}$, $\lambda_2 = 4-\sqrt{15}$

$A_{15_2} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $(2-\lambda)(5-\lambda)-42=0$,

$10-2\lambda-5\lambda+\lambda^2-42=0$, $\lambda^2-7\lambda-32=0$

$D = 49+4\cdot 32 = 177$, $\lambda_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{177}}{2}$

$\lambda = \frac{7+\sqrt{177}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 2-\left(\frac{7+\sqrt{177}}{2}\right) & 7 \\ 6 & 5-\left(\frac{7+\sqrt{177}}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 2 \\ \cdot 2\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4-7-\sqrt{177} & 14 \\ 12 & 10-7-\sqrt{177} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3-\sqrt{177} & 14 \\ 12 & 3-\sqrt{177} \end{pmatrix} :(-3-\sqrt{177}) \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{-3-\sqrt{177}} \\ 12 & 3-\sqrt{177} \end{pmatrix} -\mathrm{I}\cdot 12 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{-3-\sqrt{177}} \\ 0 & \underbrace{3-\sqrt{177} - \frac{12\cdot 14}{-3-\sqrt{177}}}_{=\frac{-(3-\sqrt{177})(3+\sqrt{177})-12\cdot 14}{-3-\sqrt{177}}=0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{-3-\sqrt{177}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14}{3+\sqrt{177}} x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_2 = 3+\sqrt{177} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 3+\sqrt{177} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{7-\sqrt{177}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\left(\frac{7-\sqrt{177}}{2}\right) & 7 \\ 6 & 5-\left(\frac{7-\sqrt{177}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4-7+\sqrt{177} & 14 \\ 12 & 10-7+\sqrt{177} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3+\sqrt{177} & 14 \\ 12 & 3+\sqrt{177} \end{pmatrix} :(-3+\sqrt{177}) \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{-3+\sqrt{177}} \\ 12 & 3+\sqrt{177} \end{pmatrix} -\mathrm{I}\cdot 12 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{14}{-3+\sqrt{177}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-14x_2}{-3+\sqrt{177}} \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists\, x_2 = -3+\sqrt{177} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -3+\sqrt{177} \end{pmatrix}$$

Отвегдие A_{15_2}: $v_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 3+\sqrt{177} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -3+\sqrt{177} \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{177}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{177}}{2}$

11. $A_{16_1} = \begin{pmatrix}-5 & 2\\ 9 & -4\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}-5-\lambda & 2\\ 9 & -4-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$(-5-\lambda)(-4-\lambda)-18=0$, $(5+\lambda)(4+\lambda)-18=0$,

$20+5\lambda+4\lambda+\lambda^2-18=0$, $\lambda^2+9\lambda+2=0$

$D = 81-8 = 73$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$

$\lambda = \dfrac{-9+\sqrt{73}}{2}$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-5-\left(\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right) & 2\\ 9 & -4-\left(\frac{-9+\sqrt{73}}{2}\right)\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\cdot 2\\ \cdot 2\end{array} \sim \begin{pmatrix}-10+9-\sqrt{73} & 4\\ 18 & -8+9-\sqrt{73}\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1-\sqrt{73} & 4\\ 18 & 1-\sqrt{73}\end{pmatrix} :(-1-\sqrt{73}) \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{-1-\sqrt{73}}\\ 18 & 1-\sqrt{73}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ -\mathrm{I}\cdot 18\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{-1-\sqrt{73}}\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \dfrac{4x_2}{1+\sqrt{73}}\\ x_2 \in \mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \exists x_2 = 1+\sqrt{73} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}4\\ 1+\sqrt{73}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5-\left(\frac{-9-\sqrt{73}}{2}\right) & 2\\ 9 & -4-\left(\frac{-9-\sqrt{73}}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{array}{l}\cdot 2\\ \cdot 2\end{array} \sim \begin{pmatrix}-10+9+\sqrt{73} & 4\\ 18 & -8+9+\sqrt{73}\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1+\sqrt{73} & 4\\ 18 & 1+\sqrt{73}\end{pmatrix} :(-1+\sqrt{73}) \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{-1+\sqrt{73}}\\ 18 & 1+\sqrt{73}\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ -\mathrm{I}\cdot 18\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{-1+\sqrt{73}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1 = -\dfrac{4x_2}{-1+\sqrt{73}}\\ x_2 \in \mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \exists x_2 = -1+\sqrt{73} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}-4\\ -1+\sqrt{73}\end{pmatrix}$$

Ответ для A_{16_1}: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+\sqrt{73} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1+\sqrt{73} \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{-9+\sqrt{73}}{2}$,

$\lambda_2 = \frac{-9-\sqrt{73}}{2}$

$A_{16_2} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 100-\lambda & 0 \\ 0 & 100-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 100$

$alg(100) = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ для A_{16_2}: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 100$, $alg(100) = 2$

Задание 2.3

1). $A_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\det A_1 = -0{,}6^2 - 0{,}8^2 = -1$

Ответ для A_1: $\det A_1 = -1$

---

2). $A_2 = \begin{pmatrix} 1/17 & 4/17 \\ -4/17 & 16/17 \end{pmatrix}$, $\det A_2 = \frac{1}{17} \cdot \frac{16}{17} - \frac{4^2}{17^2} = 0$

Ответ для A_2: $\det A_2 = 0$

---

3). $A_3 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$, $\det A_3 = \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$

Ответ для A_3: $\det A_3 = 1$

---

4). $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A_4 = (-1)^2 = 1$

Ответ для A_4: $\det A_4 = 1$

---

5). $A_5 = \begin{pmatrix} 0{,}8\sin 60^\circ - 0{,}6\cos 60^\circ & 0{,}8\cos 60^\circ + 0{,}6\sin 60^\circ \\ 0{,}6\sin 60^\circ + 0{,}8\cos 60^\circ & 0{,}6\cos 60^\circ - 0{,}8\sin 60^\circ \end{pmatrix}$

$\det A_5 = (0{,}8\sin 60^\circ - 0{,}6\cos 60^\circ)(0{,}6\cos 60^\circ - 0{,}8\sin 60^\circ) +$

$- (0{,}6\sin 60^\circ + 0{,}8\cos 60^\circ)(0{,}8\cos 60^\circ + 0{,}6\sin 60^\circ) =$

$= \cancel{0{,}8\sin 60^\circ \cdot 0{,}6\cos 60^\circ} - 0{,}6^2\cos^2 60^\circ - 0{,}8^2\sin^2 60^\circ + \cancel{0{,}6 \cdot 0{,}8\cos 60^\circ \sin 60^\circ} - (\cancel{0{,}6 \cdot 0{,}8\sin 60^\circ \cos 60^\circ} +$

$+ 0{,}6^2\sin^2 60^\circ + 0{,}8^2\cos^2 60^\circ + \cancel{0{,}8 \cdot 0{,}6\cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ}) =$

$= -0{,}36\cos^2 60^\circ - 0{,}64\sin^2 60^\circ - 0{,}36\sin^2 60^\circ - 0{,}64\cos^2 60^\circ =$

$= -\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = -(\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) = -1$

Ответ для A_5: $\det A_5 = -1$

---

6). $A_9 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\det A_9 = (\sqrt{3})^2 = 3$

Ответ для A_9: $\det A_9 = 3$

---

7). $A_{10} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A_{10} = 6 \cdot 1 = 6$

Ответ для A_{10}: $\det A_{10} = 6$

Задание 2.4

Матрица является симметричной, если $A = A^T$

Матрица обязательно получается симметричной в пунктах 1.x, где x:

1, 4, 5, 9, 11, 14