«Ум, слава, власть... Алексей Перегудин — Король линала... сумел покорить эти вершины! Слова, сказанные им перед выдачей четвертой лабы, заставили множество смельчаков со всего СУиРа отправиться бороздить всемирную паутину. "Мои ответы на задания? Берите, раз они вам так нужны... Попробуйте их найти! Я оставил все ответы этого мира там!" И наступила... Великая эра лин-гениев!»

ONE LINAL

Университет ИТМО

Практическая линейная алгебра

Лабораторная работа №4

Автор: Румянцев Алексей Александрович

Номер ИСУ: 368731

Группа: R3241

Поток: Прак. Лин. Ал. 1.3

Преподаватель: Перегудин Алексей Алексеевич

Задание 1

Перед выполнением пунктов первого задания возьмем два неколлинеарных вектора $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, не лежащих на координатных осях:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Пункт 1

Непрерывная динамическая система является асимптотически устойчивой, когда $\forall x_0 \in \mathbb{R}: \lim\limits_{t\to\infty}\big(x(t)\big) = 0$. При возведении экспоненты в матрицу At предел будет равен нулю при отрицательных значениях собственных чисел $\lambda_{1,2}$, так как в знаменателе окажется экспонента в бесконечной степени, а сверху будет некоторое число

Придумаем матрицу собственных чисел J ($\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -3$), исходя из вышенаписанных рассуждений, а также запишем матрицы P и P^{-1}, составленных из векторов v_1, v_2:

$$J = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Вычислим матрицу A с помощью спектрального разложения PJP^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63 & 140 \\ -24 & 53 \end{bmatrix}$$

Условие $x(t) \in Span\{v_i\}, t \geq 0$ означает, что все результаты $x(t)$ при не отрицательных значениях t будут двигаться вдоль собственного вектора v_i

Рассмотрим $x(0) = v_1$, тогда $x(t) = e^{At}v_1$. Теперь вычислим $x(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-14e^{4t} + 15}{e^{7t}} & \dfrac{35e^{4t} - 35}{e^{7t}} \\ \dfrac{-6e^{4t} + 6}{e^{7t}} & \dfrac{15e^{4t} - 14}{e^{7t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{e^{7t}} \\ \dfrac{2}{e^{7t}} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим пределы полученного $x(t)$:

$$\lim_{t\to\infty}\big(x_1(t)\big) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{5}{e^{7t}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{5}{\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\big(x_2(t)\big) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{e^{7t}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{\infty}\right) = 0$$

Как видим, пределы равны нулю. Аналогичные действия можно применить ко второму собственному вектору:

$$x(0) = v_2 \Rightarrow x(t) = e^{At}v_1 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} \frac{7}{e^{3t}} \\ \frac{3}{e^{3t}} \end{bmatrix}$$

Очевидно, что пределы в данном случае тоже будут равны нулю. Как мы видим, условие асимптотической устойчивости выполняется. Также выполняется условие пункта – при разных значениях t при $x(0) = v_1$ будем получать $x(t)$ такой, что он будет лежать на v_1. Аналогично с вектором v_2

Итак, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -63 & 140 \\ -24 & 53 \end{bmatrix}$$

<u>Пункт 2</u>

Система является неустойчивой, то есть неограниченной, когда хотя бы одно из собственных значений матрицы A положительно. Так как по условию матрица A не имеет двух неколлинеарных собственных векторов, то нам потребуется присоединенный вектор. Проще говоря, поставим 1-у на 1-й строке и 2-го столбца матрицы J, которую зададим с $\lambda = 7 > 0$ (каждое собственное число имеет минимум один собственный вектор, мы не можем взять разные собственные числа для этого случая):

$$J = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Матрицы P и P^{-1} не меняют своего вида. Выполним матричное умножение и получим необходимую матрицу A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 25 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 25 \\ -4 & 17 \end{bmatrix}$$

<u>Пункт 3</u>

Чтобы при $x(0) = v_1$: $\lim_{t\to\infty}\big(x(t)\big) = 0$, необходимо, чтобы $\lambda_{v_1} < 0$. То есть выполнение условия асимптотической устойчивости. При этом, чтобы система была неустойчивой, необходимо $\lambda_{v_2} > 0$. Тогда, пусть матрица J ($\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 5$) имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу A тем же произведением PJP^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -160 & 385 \\ -66 & 159 \end{bmatrix}$$

Проверим выполнение $x(0) = v_1$: $\lim_{t\to\infty}\big(x(t)\big) = 0$:

$$x(t) = e^{At}v_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-14e^{11t} + 15}{e^{6t}} & \dfrac{35e^{11t} - 35}{e^{6t}} \\ \dfrac{-6e^{11t} + 6}{e^{6t}} & \dfrac{15e^{11t} - 14}{e^{6t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{e^{6t}} \\ \dfrac{2}{e^{6t}} \end{bmatrix}$$

Очевидно, что если мы вычислим предел от полученного $x(t)$, то в знаменателе будет бесконечность. Тогда, аналогично пункту 1 пределы будут равны 0 – условие выполняется

Проверим, что система неограниченна. Вычислим предел для $x(t) = e^{At}v_2$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-14e^{11t} + 15}{e^{6t}} & \dfrac{35e^{11t} - 35}{e^{6t}} \\ \dfrac{-6e^{11t} + 6}{e^{6t}} & \dfrac{15e^{11t} - 14}{e^{6t}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\big(x_1(t)\big) = \lim_{t\to\infty}(7e^{5t}) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\big(x_2(t)\big) = \lim_{t\to\infty}(3e^{5t}) = \infty$$

Как видим, пределы равны бесконечности, а значит система неограниченна

<u>Пункт 4</u>

Для начала найдем два собственных комплексно-сопряженных вектора u_1 и u_2, используя $v_1 \pm v_2 i$:

$$u_1 = v_1 + v_2 i = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} 5 + 7i \\ 2 + 3i \end{bmatrix}$$

$$u_2 = v_1 - v_2 i = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} 5 - 7i \\ 2 - 3i \end{bmatrix}$$

В комплексных числах мнимая часть отвечает за sin и cos, а действительная за устойчивость системы. Поэтому возьмем такое собственное комплексное число в матрице J, что его действительная часть будет отрицательной ($\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$). Так как матрица размерности 2×2, то у нас может быть только одно комплексное число и сопряженное к нему. Также запишем матрицы P и P^{-1}, составленных из комплексных собственных векторов:

$$J = \begin{bmatrix} -2+3i & 0 \\ 0 & -2-3i \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 5+7i & 5-7i \\ 2+3i & 2-3i \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3+2i}{2} & \frac{-7-5i}{2} \\ \frac{3-2i}{2} & \frac{-7+5i}{2} \end{bmatrix}$$

Воспользуемся трюком с третьей практики – запишем J в вещественном виде так, чтобы на главной диагонали осталась действительная часть, а на побочной мнимые части комплексного числа. В матрице P возьмем левый столбец и запишем вещественную матрицу P так, чтобы в левом столбце оказались действительные части из комплексных чисел в левом столбце изначальной P, а в правом столбце значения мнимых частей из того же столбца оригинальной P. Тогда, имеем матрицы J, P, P^{-1} в вещественном представлении:

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

В итоге матрицы P и P^{-1} не изменились. Найдем матрицу A тем же произведением PJP^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95 & 222 \\ -39 & 91 \end{bmatrix}$$

Проверим, получится ли то же самое при произведении соответствующих комплексных матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 5+7i & 5-7i \\ 2+3i & 2-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+3i & 0 \\ 0 & -2-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3+2i}{2} & \frac{-7-5i}{2} \\ \frac{3-2i}{2} & \frac{-7+5i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -95 & 222 \\ -39 & 91 \end{bmatrix}$$

Получили ту же вещественную матрицу A. Тогда матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -95 & 222 \\ -39 & 91 \end{bmatrix}$$

Пункт 5

Проведем аналогичные пункту 5 рассуждения. Система является неустойчивой, когда действительная часть комплексных собственных чисел положительна. Возьмем те же собственные числа, но положительные по действительной части. Сразу же приведем к вещественному виду и перемножим необходимые матрицы для нахождения матрицы A (матрицы P и P^{-1} не изменились. $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$):

$$J = \begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -91 & 222 \\ -39 & 95 \end{bmatrix}$$

Таким образом, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -91 & 222 \\ -39 & 95 \end{bmatrix}$$

<u>Пункт 6</u>

Мы уже успели поменять знак действительной части комплексного числа в предыдущих двух пунктах. А что, если она будет равна нулю? – останутся только sin и cos, то есть движение будет периодическим, а значит система не будет являться ни неустойчивой, ни асимптотически устойчивой. Тогда проведем аналогичные действия как в предыдущих пунктах для нахождения матрицы A, взяв $\lambda_{1,2} = \pm 6i$:

$$J = \begin{bmatrix} 6i & 0 \\ 0 & -6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -184 & 444 \\ -78 & 186 \end{bmatrix}$$

При перемножении соответствующих комплексных матриц получим то же самое. Таким образом, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -184 & 444 \\ -78 & 186 \end{bmatrix}$$

Задание 2

Возьмем за начальные условия вектора v_1, v_2 из первого задания и $v_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

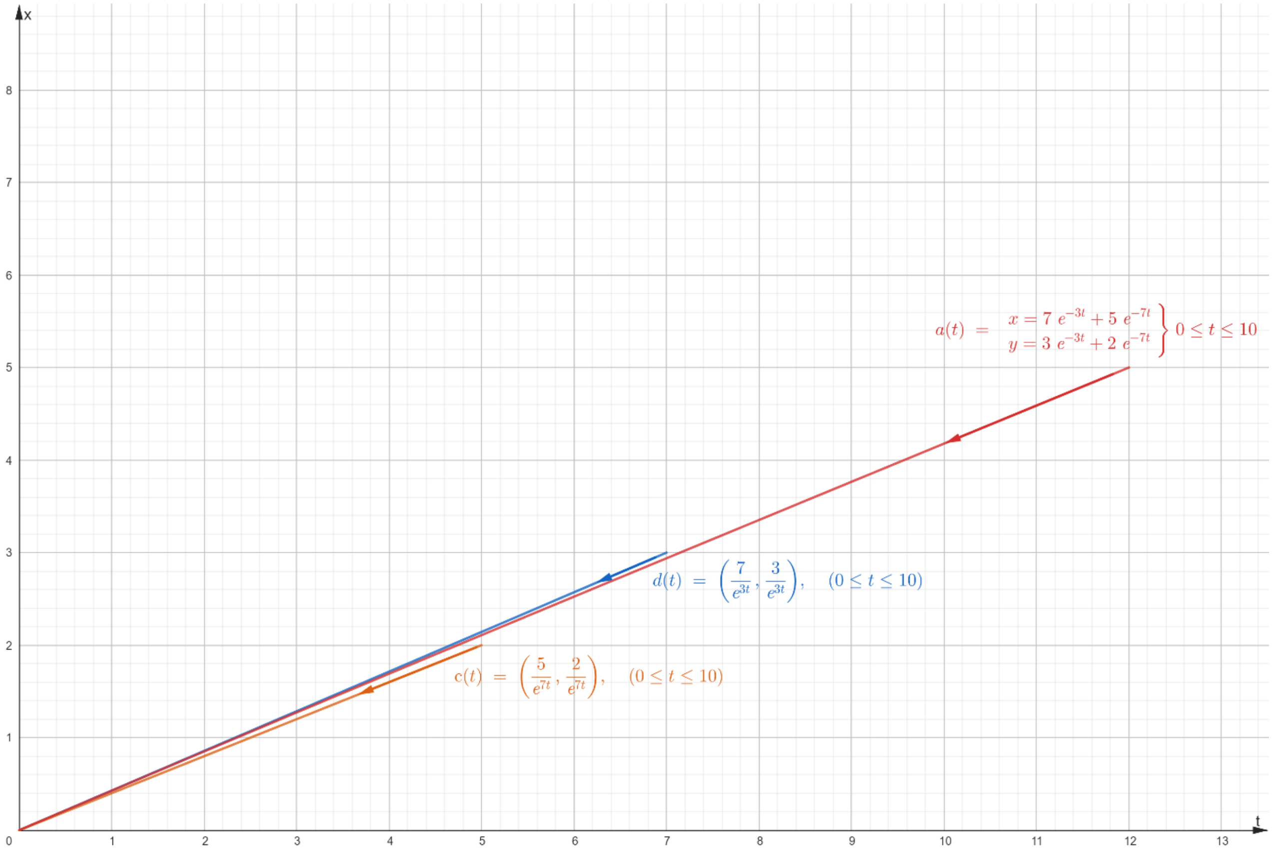
<u>Пункт 1</u>

Зададим движение системы как линейную комбинацию двух собственных векторов, умноженных на соответствующую экспоненту. Также появятся коэффициенты a и b, за которые отвечают начальные условия, которые мы задали ранее

$$x(t) = e^{-7t}\begin{bmatrix}5a\\2a\end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix}7b\\3b\end{bmatrix}$$

При начальном условии v_1 получится, что $a = 1$, $b = 0$, то есть остается только изначальный вектор $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ (линейная комбинация дает v_1), умноженный на соответствующую e^{-7t}. При начальном условии v_2 аналогичными размышлениями получим $a = 0$, $b = 1$. При начальном условии v_3 получим $a = 1, b = 1$

Теперь построим соответствующие графики на одной плоскости



Каждый график направлен к нулю – система асимптотически устойчива

<u>Пункт 2</u>

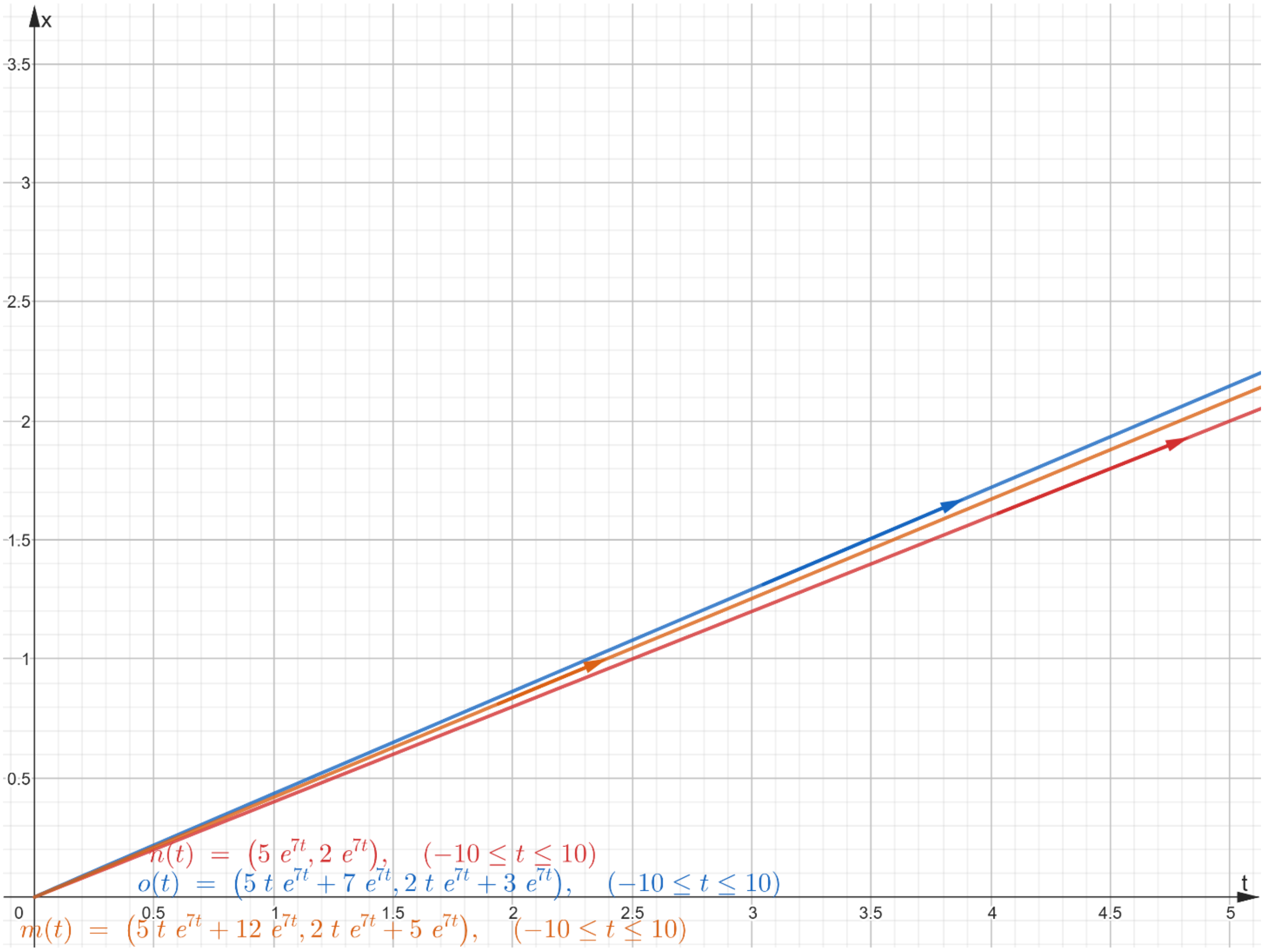
Воспользуемся $x(t) = e^{At}v_i$, тогда:

$$x_1(t) = e^{At}v_1 = \begin{bmatrix}5e^{7t}\\2e^{7t}\end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{At}v_2 = \begin{bmatrix}5te^{7t} + 7e^{7t}\\2te^{7t} + 3e^{7t}\end{bmatrix}$$

$$x_3(t) = e^{At}v_3 = \begin{bmatrix} 5te^{7t} + 12e^{7t} \\ 2te^{7t} + 5e^{7t} \end{bmatrix}$$

Теперь построим соответствующие графики на одной плоскости:



Каждый график устремляется в бесконечность – система неустойчива

Пункт 3

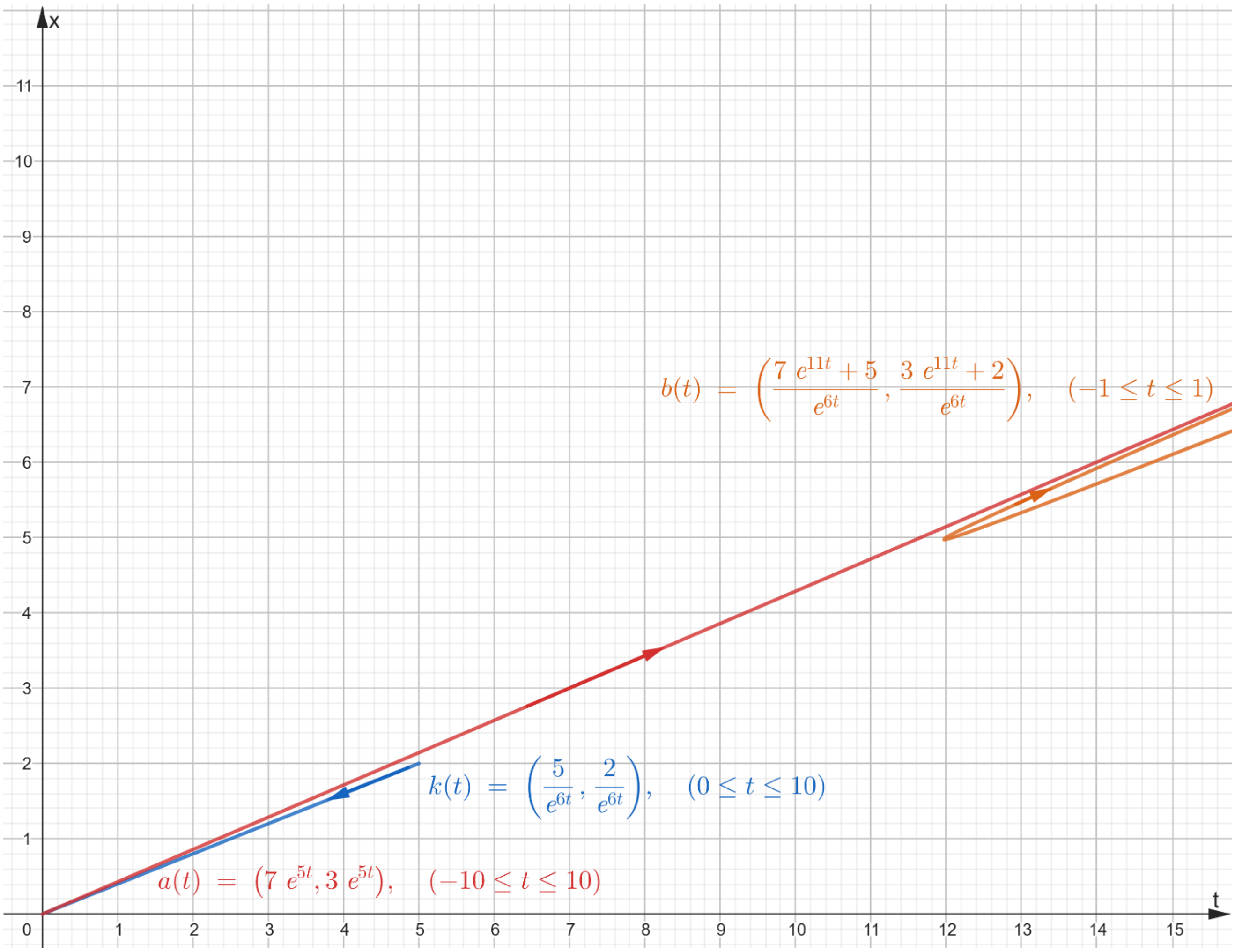
Аналогичным способом из пункта 2 найдем $x(t)$ для каждого из начальных условий:

$$x_1(t) = e^{At}v_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{e^{6t}} \\ \dfrac{2}{e^{6t}} \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{At}v_2 = \begin{bmatrix} 7e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$x_3(t) = e^{At}v_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{7e^{11t} + 5}{e^{6t}} \\ \dfrac{3e^{11t} + 2}{e^{6t}} \end{bmatrix}$$

Теперь построим соответствующие графики на одной плоскости:



Как видим, красный и оранжевый графики устремляются в бесконечность (однако, оранжевый сначала стремится к нулю) – система неустойчива. При этом синий график устремляется в ноль, что соответствует заданному условию

<u>Пункт 4</u>

На этом моменте геогебра уже не смогла. Земля ей декартовыми координатами, храни ее король линала за помощь с предыдущими пунктами

Энивей, найдем $x(t)$, однако сделаем это другим способом. Из лекции мы знаем, что:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e^{at}\cos(bt) + b_1 e^{at}\sin(bt) \\ a_2 e^{at}\cos(bt) + b_2 e^{at}\sin(bt) \end{bmatrix}$$

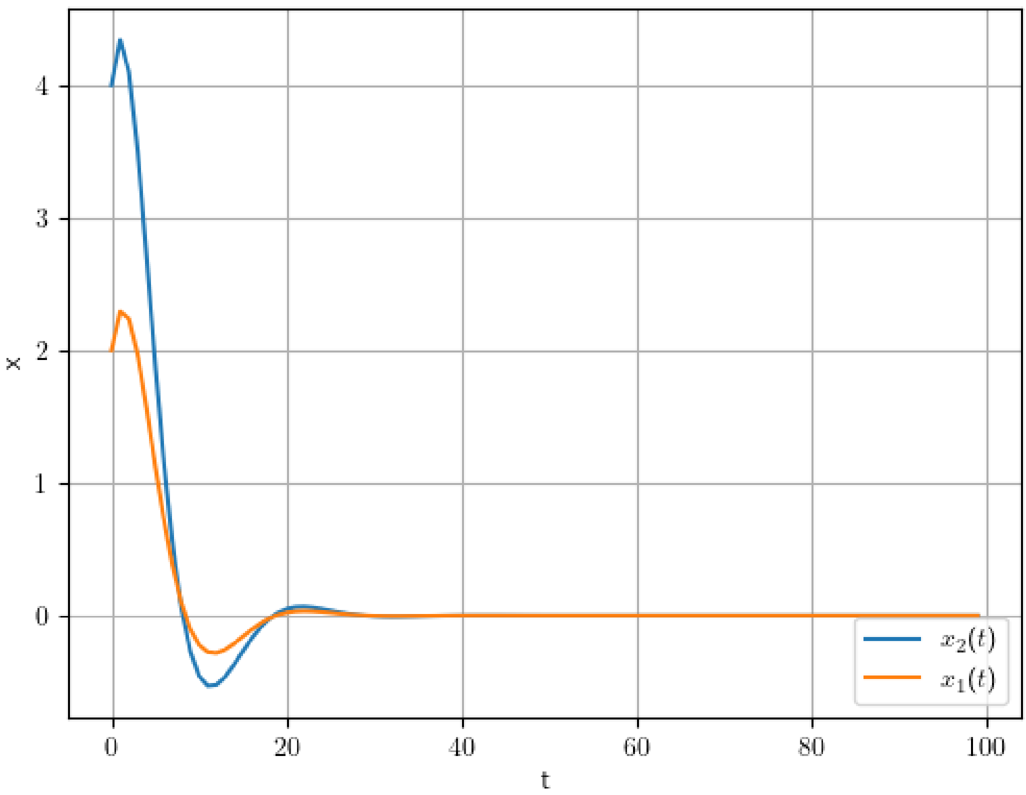
Где a_i и b_i – некоторые коэффициенты, два из которых являются независимыми, задающиеся начальными условиями. a – действительная часть комплексного числа, а b – значение мнимой части, т. е. $z = a \pm ib$

Так как в задании вроде никто не говорил, что нельзя внутри пункта *@override* начальные условия, заданные вне пункта, то подставим другие начальные условия в a_i и b_i, чтобы график получился красивее (а не просто, например, прямая, которая на самом деле закорючка, согнувшаяся слишком сильно. Как никак лабораторная работа, профессиональное исследование, ошибаться – это норма). Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $b_1 = 3$, $b_2 = 5$. z мы уже знаем, $z = -2 \pm 3b \Rightarrow a = -2,\ b = 3$. Теперь запишем значения в $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ выше и захардкодим графики в питоне, используя *matplotlib*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams["text.usetex"] = True

t = np.linspace(0, 10, 100)
x1_t = 2 * np.power(np.e, -2 * t) * np.cos(3 * t) + 3 * np.power(np.e, -2 * t) * np.sin(3 * t)
x2_t = 4 * np.power(np.e, -2 * t) * np.cos(3 * t) + 5 * np.power(np.e, -2 * t) * np.sin(3 * t)

plt.plot(x2_t, label=r"$x_{2}$($t$)")
plt.plot(x1_t, label=r"$x_{1}$($t$)")
plt.plot(x2_t, x1_t, label=r"$x_{2}$($x_{1}$)")
plt.grid()
plt.legend(loc="lower right")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x")
plt.show()
```

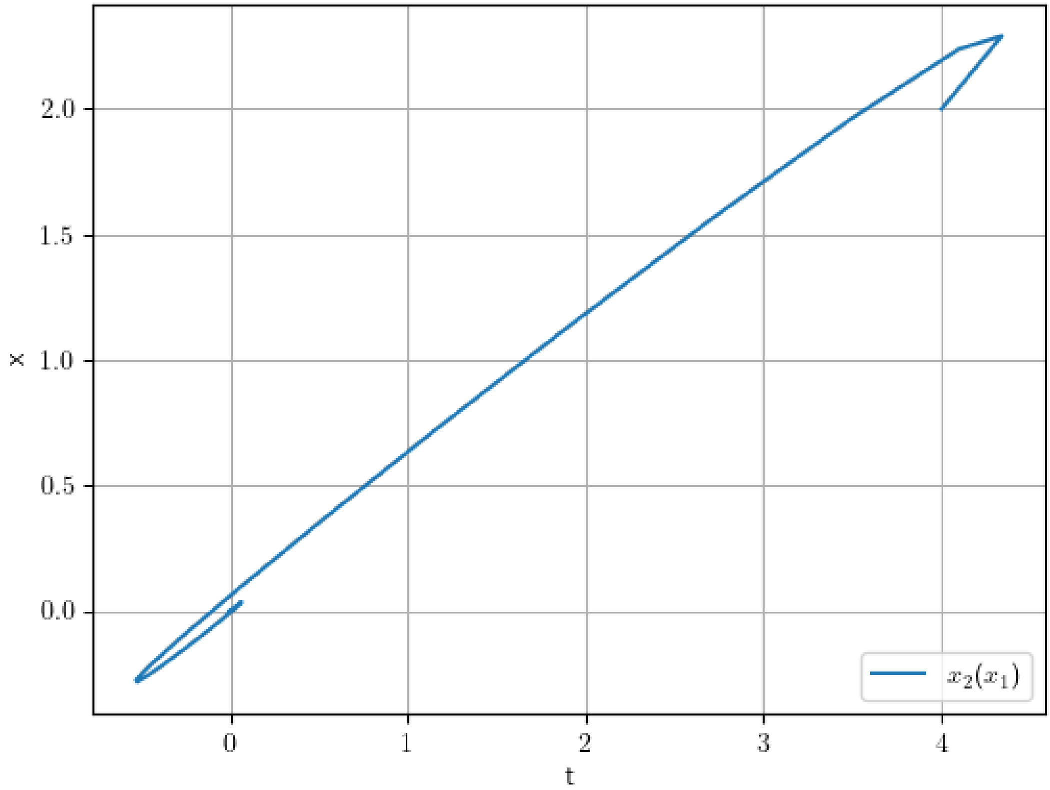
(Высшие силы не сумели поместить график на этой страничке)

Имеем графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на одной плоскости:



(упс снова большой пребольшой отступ. этот текст дабы вы не заскучали перелистывая)

И график $x_1(x_2)$:

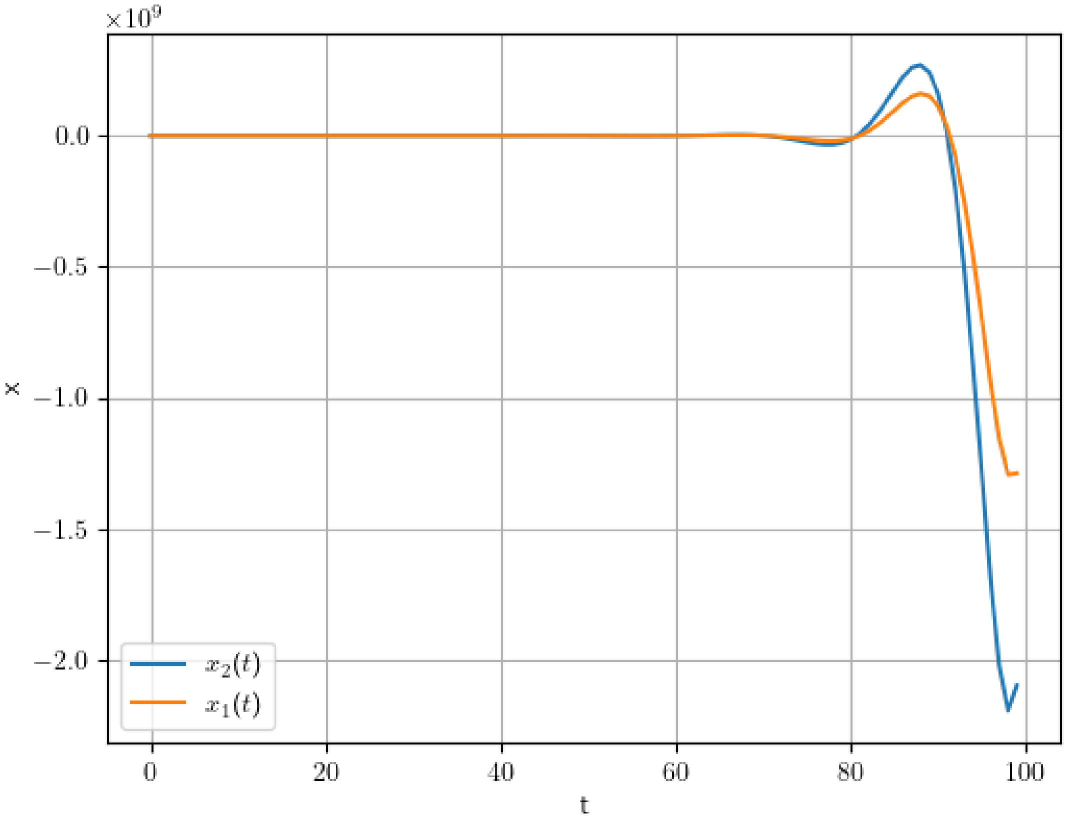


Пункт 5

Действуем аналогично предыдущему пункту – коэффициенты те же, логика та же, только теперь $z = 2 \pm 3b$. В коде просто поменяем значение степени экспонент, поэтому копировать еще раз сюда нет необходимости

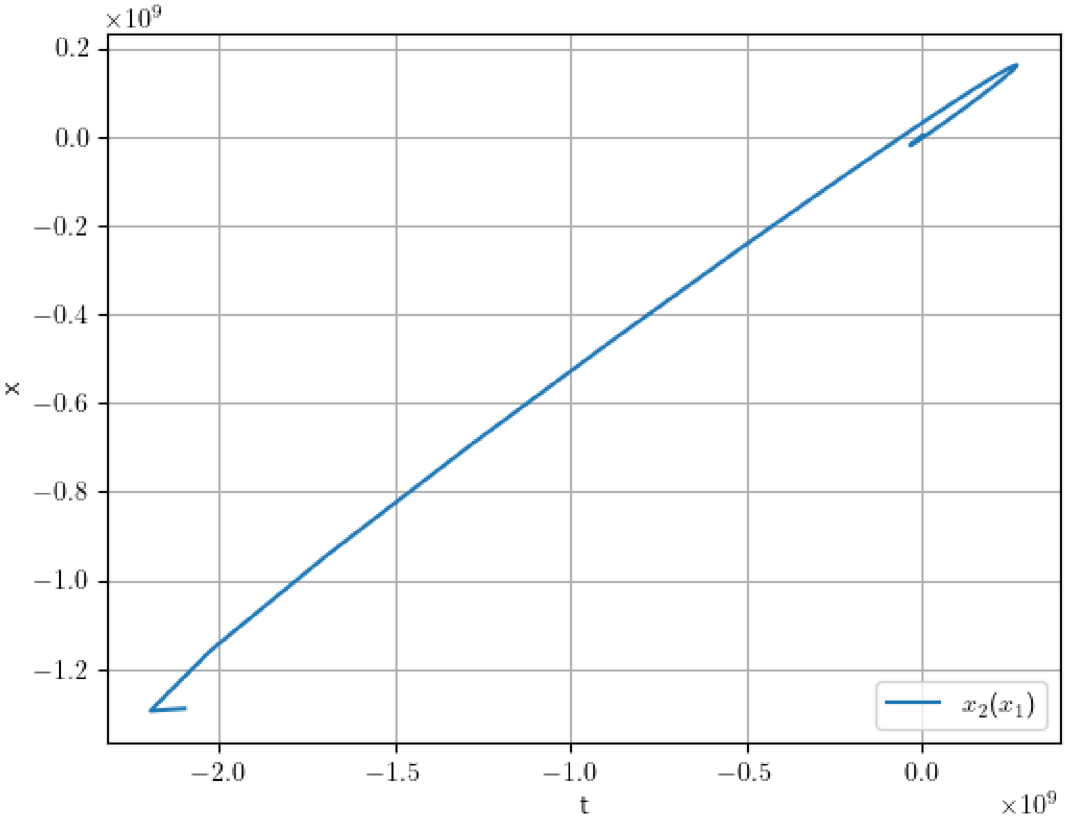
(empty.world)

Получим следующие графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на одной плоскости:



(искусственно повышаем количество страниц)

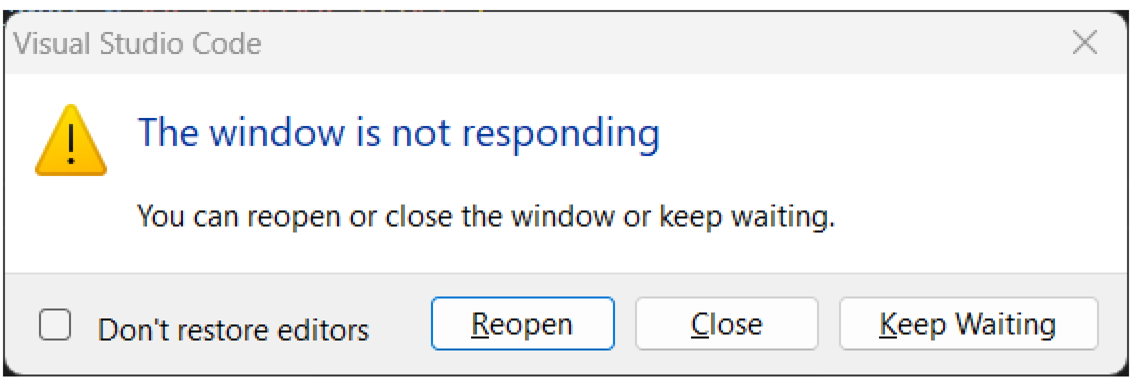
Имеем график $x_1(x_2)$:



<u>Пункт 6</u>

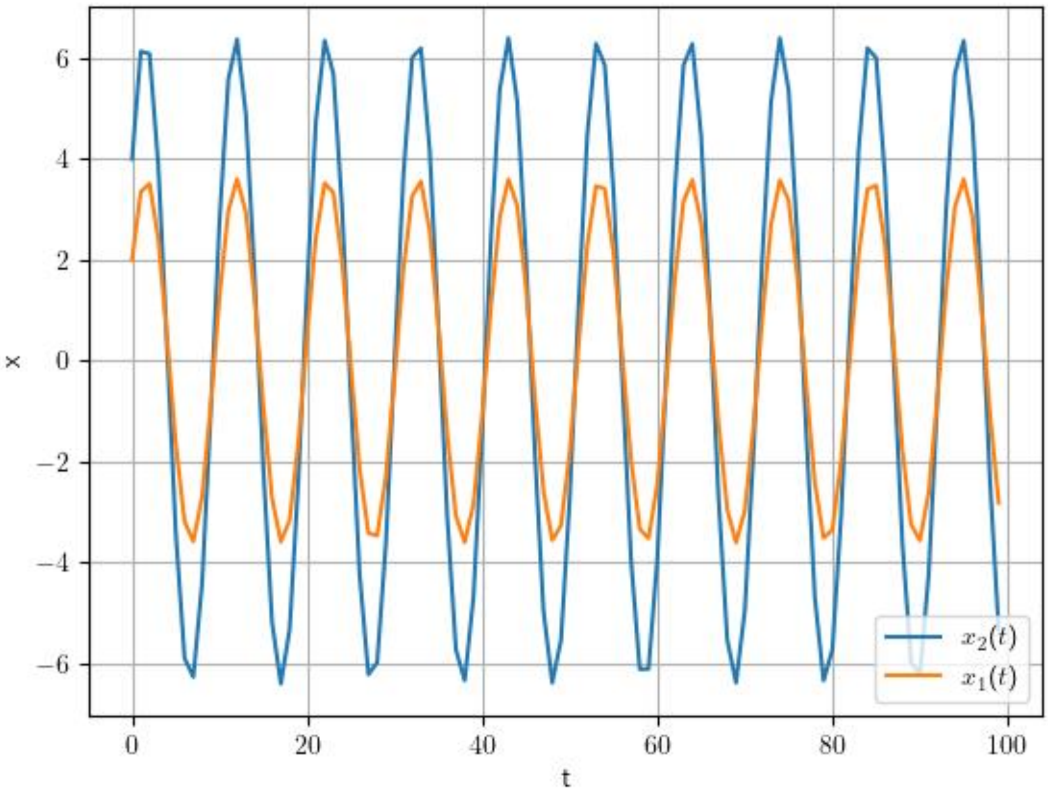
Размышления аналогично предыдущим двум пунктам, только теперь $z = 0 \pm 6i$. Код все также мало изменился, поэтому копия не нужна

Получим следующие графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на одной плоскости:

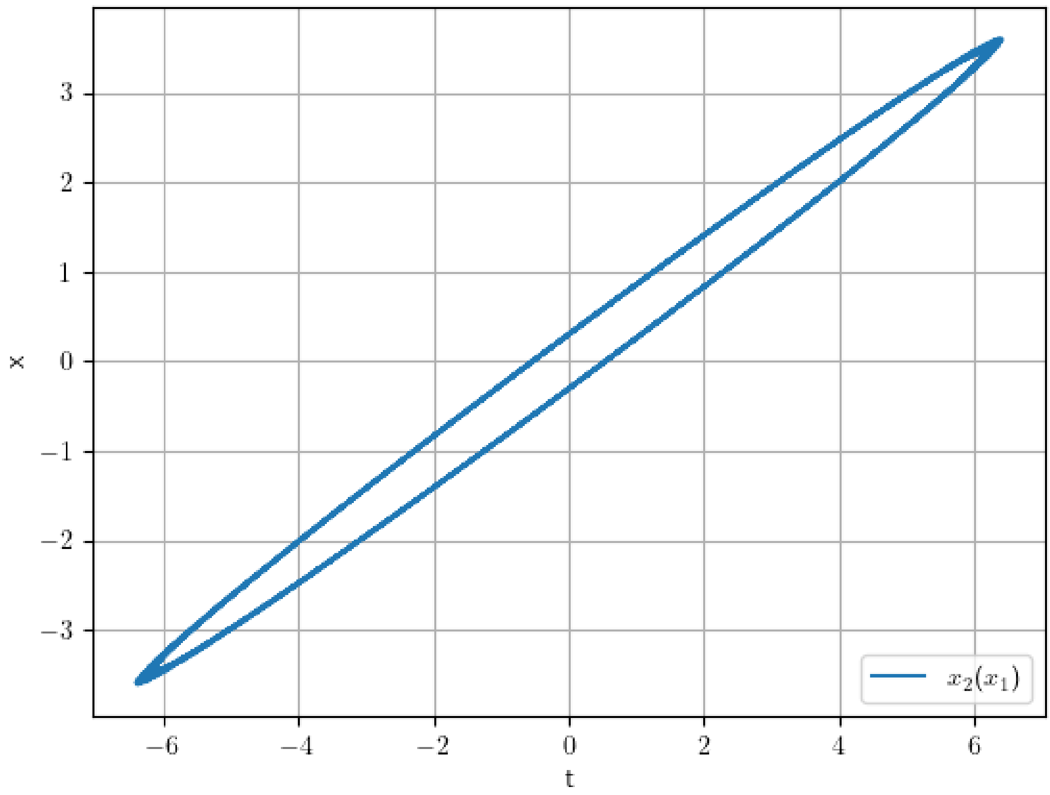


О, а это так вот мой ноутбук умер, строя эти графики. А ведь он даже не плохой

$x_1(t)$ и $x_2(t)$:



Имеем график $x_1(x_2)$:



Задание 3

Так как каких-либо особенных условий, кроме не диагонального результата для составления матриц задано не было, подробные комментарии в последующих пунктах будут опущены. Собственные вектора, как и матрицы P и P^{-1} возьмем из первого задания

<u>Пункт 1</u>

Сделаем второй вектор присоединенным, тогда при перемножении матриц у нас не будет получаться диагональная:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & 95 \\ -16 & 39 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -39 & 95 \\ -16 & 39 \end{bmatrix}$$

Пункт 2

Представим матрицу J в вещественном виде и по аналогичному перемножению матриц найдем матрицу A:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & 37\sqrt{2} \\ -\frac{13\sqrt{2}}{2} & 15\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Если мы перемножим соответствующие комплексные матрицы, то получим ту же матрицу с вещественными числами

Таким образом, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & 37\sqrt{2} \\ -\frac{13\sqrt{2}}{2} & 15\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Пункт 3

Все действия аналогично пункту 2

$$J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 74 \\ -13 & 31 \end{bmatrix}$$

Комплексное перемножение даст тот же результат

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -31 & 74 \\ -13 & 31 \end{bmatrix}$$

Пункт 4

Все действия аналогично пункту 2. Комплексное перемножение также совпадает

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15\sqrt{2} & 37\sqrt{2} \\ -\frac{13\sqrt{2}}{2} & 16\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -15\sqrt{2} & 37\sqrt{2} \\ -\frac{13\sqrt{2}}{2} & 16\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Пункт 5

Сделаем второй собственный вектор присоединенным

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 25 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 25 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Для следующих трех пунктов возьмем $0 < c = 0.5 < 1$. Все действия также аналогичны соответствующим предыдущим пунктам

Пункт 6

$$J = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{21}{2} & 25 \\ -4 & \frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{21}{2} & 25 \\ -4 & \frac{19}{2} \end{bmatrix}$$

Пункт 7

$$J = \begin{bmatrix} 0.5i & 0 \\ 0 & -0.5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{31}{2} & 37 \\ -\frac{13}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{31}{2} & 37 \\ -\frac{13}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix}$$

Пункт 8

$$J = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{2} & 25 \\ -4 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{19}{2} & 25 \\ -4 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

Для следующих трех пунктов возьмем $d = 2 > 1$. Рассуждения аналогичны соответствующим предыдущим пунктам

Пункт 9

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 25 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 25 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Пункт 10

$$J = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62 & 148 \\ -26 & 62 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -62 & 148 \\ -26 & 62 \end{bmatrix}$$

Пункт 11

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 25 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 25 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Пункт 12

Чтобы произведение матриц не обращалось в 0, сделаем второй собственный вектор присоединенным

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Задание 4

ы)

13.11.2023, на часах 2:49. Кажется, времени не хватит. Всем спасибо за просмотр, ставьте лайки, подписывайтесь, жмайте колокольчик_) воООооОот, всем бб всем гг