

Задача II.19

```
In[28]:= Style[TemplateApply[StringTemplate[
    "Мы знаем, что  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$ , где  $\lambda_{\max}$  – это собственное значение матрицы  $A^T A$ ",
    {ToString[TraditionalForm[Subscript[Norm["A"], 2] == Sqrt[Subscript["λ", "max"]]]],
     ToString[TraditionalForm[Subscript["λ", "max"]]]],
    ToString[TraditionalForm[Superscript["A", "T"]]]], FontSize → 18]
```

Мы знаем, что $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$, где λ_{\max} – это собственное значение матрицы $A^T A$

```
In[24]:= Style[TemplateApply[StringTemplate["Также, воспользуемся свойством  $\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$ ",
    {ToString[TraditionalForm[Subscript[Norm[Superscript["(zI - A)", -1]], 2] ≥ Superscript["ε", -1]]],
    ToString[TraditionalForm[Superscript["ε", -1]]], FontSize → 18]
```

Также, воспользуемся свойством $\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$

Исходная матрица

```
In[40]:= A = {{0, 1}, {0, 0}};
A // MatrixForm
```

Out[41]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введём новую матрицу M

```
In[42]:= M = Inverse[z * IdentityMatrix[2] - A];
M // MatrixForm
```

Out[43]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Считаем норму матрицы M

```
In[46]:= MtM = ConjugateTranspose[M].M;
MtM // MatrixForm // Simplify
```

Out[47]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z \text{ Conjugate}[z]} & \frac{1}{z^2 \text{ Conjugate}[z]} \\ \frac{1}{z \text{ Conjugate}[z]^2} & \frac{1+z \text{ Conjugate}[z]}{z^2 \text{ Conjugate}[z]^2} \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения

In[49]:= **ev = Eigenvalues[MtM]**

$$\text{Out[49]= } \left\{ \frac{1 + 2 z \text{Conjugate}[z] - \sqrt{1 + 4 z \text{Conjugate}[z]}}{2 z^2 \text{Conjugate}[z]^2}, \frac{1 + 2 z \text{Conjugate}[z] + \sqrt{1 + 4 z \text{Conjugate}[z]}}{2 z^2 \text{Conjugate}[z]^2} \right\}$$

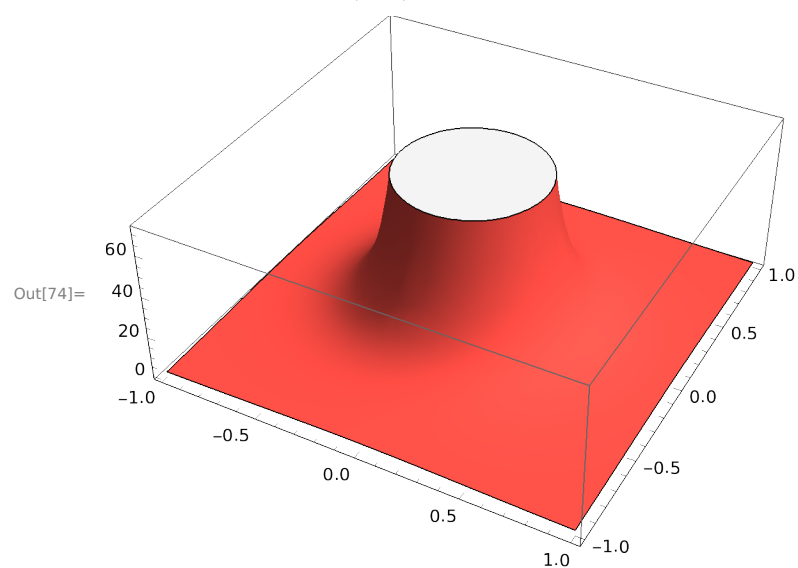
Найдём максимальное собственное значение

In[52]:= **mev = ev[[2]]**

$$\text{Out[52]= } \frac{1 + 2 z \text{Conjugate}[z] + \sqrt{1 + 4 z \text{Conjugate}[z]}}{2 z^2 \text{Conjugate}[z]^2}$$

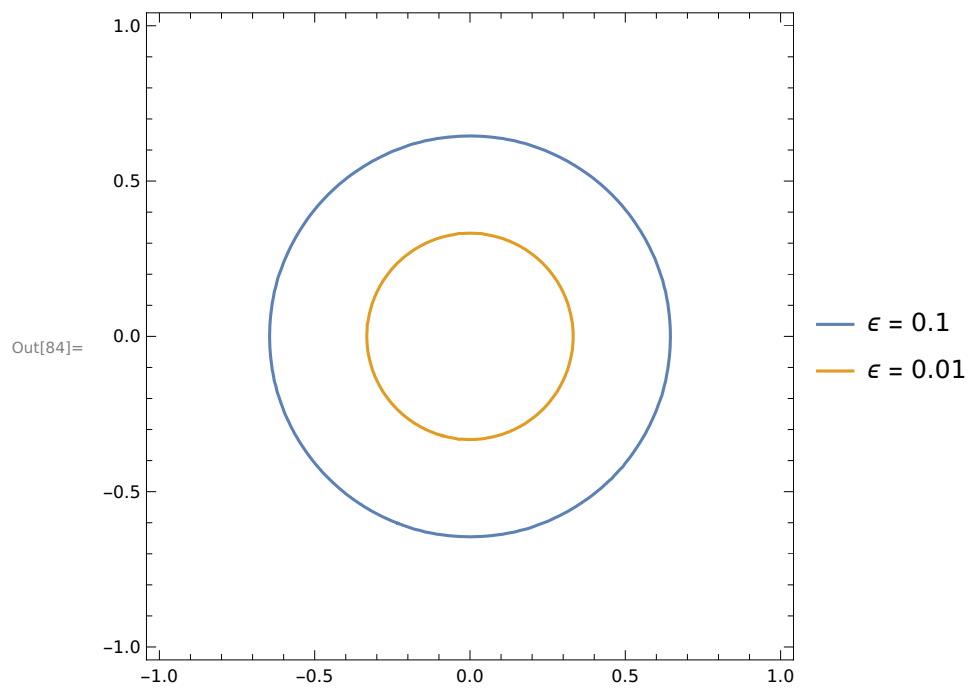
Визуализируем график собственного значения при различных z

In[74]:= **ComplexPlot3D[mev, {z, 1}]**



Построим границу при $\epsilon = 0.1$ и $\epsilon = 0.01$

```
In[84]:= ComplexContourPlot[{mev == 0.1^-1, mev == 0.01^-1},  
  {z, 1}, PlotLegends -> {" $\epsilon = 0.1$ ", " $\epsilon = 0.01$ "}]
```



Вывод: берём внутренние значения круга