



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

BARCELONATECH

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,  
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

---

Grau en enginyeria en tecnologies aeroespacials  
**Mecànica del vol**

---

**Projecte 1**  
**Dinàmica de reentrada atmosfèrica**

---

**Autors:**

David Morante Torra  
Alexis Leon Delgado  
Juan Garrido Moreno

**Professor:**

Miquel Sureda Anfres

# Índex

<b>1 Introducció</b>	<b>3</b>
<b>2 Estudi analític del problema</b>	<b>4</b>
2.1 Estudi de la dinàmica del vehicle . . . . .	4
2.1.1 Cas 1: dispositiu balístic . . . . .	5
2.1.2 Cas 2: dispositiu sustentador . . . . .	6
2.2 Càlcul de propietats termofísiques . . . . .	7
2.2.1 Model atmosfèric . . . . .	7
2.2.2 Propietats d'estancament . . . . .	9
2.3 Equacions complementàries . . . . .	9
<b>3 Mètode Runge-Kutta per a la resolució numèrica d'equacions diferencials</b>	<b>11</b>
3.1 Descripció teòrica . . . . .	11
3.2 Estructura de l'algorisme . . . . .	11
<b>4 Resultats i gràfiques: reentrada balística genèrica</b>	<b>12</b>
4.1 Velocitat . . . . .	13
4.2 Desacceleració . . . . .	13
4.3 Pressió dinàmica . . . . .	14
4.4 Número de Mach . . . . .	14
4.5 Número de Reynolds . . . . .	14
4.6 Pressió d'estancament . . . . .	15
4.7 Entalpia d'estancament . . . . .	15
4.8 Flux de calor al punt d'estancament . . . . .	15
4.9 Temps de reentrada . . . . .	15
4.10 Abast . . . . .	16
4.11 Energia dinàmica . . . . .	16
<b>5 Resultats i gràfiques: reentrada balística (càpsula Mercury)</b>	<b>17</b>
5.1 Velocitat . . . . .	18
5.2 Temps d'entrada . . . . .	18
5.3 Abast . . . . .	18
5.4 Desacceleració . . . . .	18
5.5 Número de Mach . . . . .	19
<b>6 Resultats i gràfiques: reentrada sustentadora</b>	<b>20</b>
6.1 Velocitat . . . . .	21
6.2 Temps de reentrada . . . . .	21
6.3 Abast . . . . .	21
6.4 Desacceleració . . . . .	21
6.5 Pressió dinàmica . . . . .	22
6.6 Número de Mach . . . . .	22
6.7 Número de Reynolds . . . . .	22
6.8 Pressió d'estancament . . . . .	22
6.9 Entalpia d'estancament . . . . .	23
6.10 Flux de calor al punt d'estancament . . . . .	23
6.11 Energia dinàmica . . . . .	23
<b>7 Conclusions</b>	<b>24</b>
<b>Annexos</b>	<b>26</b>
Annex 1: Evolució de propietats termofísiques amb l'alçada . . . . .	26
Annex 2: Evolució de l'angle $\gamma$ amb l'alçada . . . . .	29

## 1 Introducció

Quan un vehicle aeroespacial es troba en la fase d'aproximació a la Terra, per a persones desenteses en aquest món, poden arribar a pensar que aquest viatge espacial ja ha acabat i que l'arribada a la Terra es farà en qüestió de minuts. No obstant, aquesta última fase coneguda com la reentrada ha suposat durant anys, un veritable maldecap per als científics i enginyers destinats a assegurar la integritat de la nau. És d'aquesta manera, que l'estudi de la mecànica del vol ha sigut primordial per entendre la física del problema i a partir d'aquí poder dissenyar vehicles aptes per volar en aquestes condicions tan extremes.

Els dos principals problemes a resoldre durant la reentrada són el control de les desacceleracions i la reducció de la transferència de calor produïda pel xoc de la nau a grans velocitats amb les partícules d'aire. Un cop identificats dos dels principals problemes, s'entén la necessitat d'estudiar diferents variables com la desacceleració o el flux de calor en el punt d'estancament durant la reentrada. Durant el treball, s'han hagut de replicar les gràfiques resultants d'un projecte d'anàlisi general de la trajectòria de reentrada, dut a terme per Adams [1], el qual comparava els diferents dissenys de vehicles, que a grans trets, es poden dividir en dos grans grups: els dispositius balístics i els dispositius sustentadors.

La realització de les gràfiques s'ha fet a partir de les equacions diferencials proporcionades. No obstant, si es vol entendre el significat físic de la evolució del vehicle durant la reentrada és necessari arribar a la seva demostració a partir dels conceptes apresos a l'assignatura. És aquí, on es descobreix que per tal de dur a terme l'anàlisi dels dos grans grups de naus, cal que que l'estudi es realitzi per separat, ja que la mecànica de vol en els dos casos és diferent.

Ha sigut en aquest punt quan ha calgut aplicar l'ús de la programació per tal de poder donar amb la solució del problema. El mètode numèric de resolució d'equacions diferencials anomenat Runge-Kutta, el qual és aplicable a sistemes, i que nosaltres hem implementat en Matlab, ha servit per trobar l'evolució de la nau durant tota la reentrada. Aquest tipus de trajectòria queda totalment definida un cop coneixes l'alçada, la velocitat i l'abast en el temps. A partir d'aquí, s'han calculat tota la resta de variables i dades que faciliten la comprensió de la mecànica de vol d'aquest tipus de vehicle.

Finalment, cal fer l'anàlisi de la mecànica del vol mitjançant totes les informacions extretes anteriorment. A primera vista, poden semblar masses dades per poder tindre en compte, tot i que si, s'analitzen amb calma, ens n'adonem que totes tenen sentit entre sí. I, que un canvi sobtat d'una magnitud s'explica per la variació d'una altra magnitud, sempre acord amb les equacions de govern del vehicle. És aquí quan veiem que tot això ens porta de nou a la qüestió inicial. Mitjançant aquest anàlisi de dades, és a partir d'on els enginyers han arribat a entendre el problema, i a continuació, han trobat les solucions necessàries per fer-ho possible.

## 2 Estudi analític del problema

### 2.1 Estudi de la dinàmica del vehicle

D'acord a la metodologia d'obtenció de les equacions de govern d'un vehicle aeroespacial en moviment, en aquest apartat es demostrarà la deducció del sistema d'equacions diferencials corresponent. En especial, l'estudi comprendrà únicament el moviment del centre de gravetat com a partícula, i no es considerarà la rotació del vehicle com a sòlid rígid entorn a aquest punt.

Les hipòtesis addicionals aplicades seran les de “vol” (o en cas del vehicle balístic, “caiguda”) simètric contingut en pla vertical, fet que implica:

$$\beta_w = 0 \quad Q_a \cong 0 \quad \dot{y}' = 0$$

On  $\beta_w$  és l'angle de lliscament del vent,  $Q_a$  és la força aerodinàmica lateral i  $\dot{y}'$  és la velocitat normal al pla on es troba continguda la trajectòria. La Figura 1 mostra esquemàticament una posició generalitzada del vehicle a l'aire.

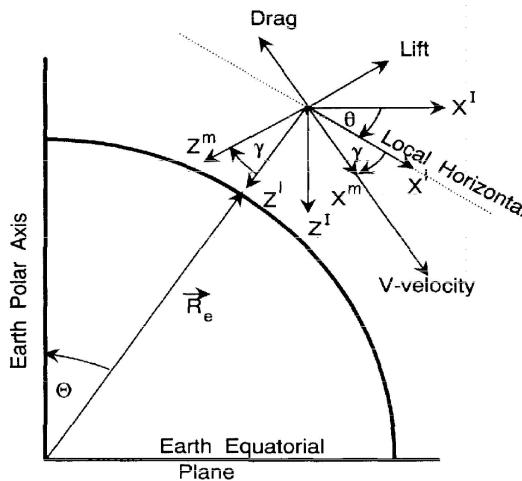


Figura 1: Esquema gràfic del problema. Crèdits: [[1]]

És essencial tenir en compte que el vehicle recorrerà llargues distàncies en un temps reduït, de forma que es tracta d'una actuació integral, en la qual les propietats termofísiques (e.g. pressió, temperatura...) dependran de l'alçada instantània.

En addició, i degut a tractar-se d'una reentrada des d'una alçada inicial elevada, l'acceleració gravitacional tampoc es pot considerar constant i s'avaluarà d'acord a la següent llei:

$$g = g_e \left( \frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \quad (1)$$

Per últim, les condicions del problema obliguen a emprar vehicles amb geometries fusiformes esveltes el màxim possible. És així que existeix un paràmetre de major influència sobre el control de recorregut de vol, i en conseqüència el que caracteritza el disseny de forma primària: coeficient balístic  $\beta$ . Aquest es defineix d'acord a la següent expressió:

$$\beta = \frac{W}{C_D A} \quad (2)$$

On  $W$  és el pes del dispositiu,  $C_D$  és el coeficient de resistència i  $A$  és l'àrea de referència d'acord a la definició del  $C_D$ . És essencial remarcar que no es tracta d'un coeficient adimensional, i que les seves unitats són de força entre superfície. Tot i que tots els càlculs han estat elaborats sota el sistema internacional d'unitats, degut a la procedència de [1], els valors de  $\beta$  s'expressaran amb les seves unitats en sistema imperial o anglosaxó:  $\text{lb}_f/\text{ft}^2$ .

### 2.1.1 Cas 1: dispositiu balístic

Un dispositiu balístic es caracteritza per l'existència d'una única força aerodinàmica: la resistència o *drag* durant la seva entrada atmosfèrica.

Per tant, al plantejar les seves equacions dinàmiques en eixos vent, es tindran les següents expressions

$$\text{Per a la direcció } x': -D + W \sin(\gamma) = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \quad (3)$$

$$\text{Per a la direcció } z': W \cos(\gamma) = \frac{W}{g} \left[ V \frac{d\gamma}{dt} + V \frac{d\theta}{dt} \right] \quad (4)$$

Observi's com, a la segona expressió s'ha aplicat la derivada en base mòbil. A més,  $D$  es pot expressar a partir del  $C_D$ :

$$D = QSC_D$$

on  $Q$  es correspon a la pressió dinàmica.

A continuació es planteja l'equació cinemàtica en eixos d'horitzó local associada a la component  $h = -z$ .

$$\frac{dh}{dt} = -V \sin(\gamma) \quad (5)$$

Observi's com  $\gamma$  s'ha pres positiu en sentit horari d'acord a l'esquema 1.

En comptes de definir una equació per a  $\dot{x}'$ , s'introduirà el concepte de rang  $r$ , el qual representa la projecció normal de la trajectòria sobre la superfície de la Terra (suposant el planeta com a perfectament circular). La seva evolució en funció del temps és la següent:

$$\frac{dr}{dt} = R_e \frac{d\theta}{dt} = R_e \frac{V \cos(\gamma)}{R_e + h} \quad (6)$$

Observant novament la Figura 1, és possible notificar com l'angle  $\theta$  és el complementari a la latitud.

En particular, es desitja que tot el sistema d'equacions diferencials prengui com a variable independent  $h$ , de forma que caldrà adaptar les expressions (3), (4) i (6). Per fer-ho s'aplicarà la següent metodologia que comprèn la regla de la cadena de la derivada:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

Aïllant de l'expressió (3) l'acceleració i introduint el paràmetre  $\beta$ :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{gQ}{\beta} + g \sin \gamma \quad (7)$$

Aplicant la tècnica anteriorment mencionada, que implica la introducció de l'expressió (5) inversa s'obté que:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{g \left[ \frac{Q}{\beta} - \sin(\gamma) \right]}{V \sin(\gamma)} \quad (8)$$

Obtenint així l'expressió amb la forma desitjada.

A continuació, de l'expressió (4) s'aïlla l'acceleració angular:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\cos(\gamma) \left[ g - \frac{V^2}{R_e + h} \right]}{V} \quad (9)$$

Seguint el procediment anterior:

$$\frac{d\gamma}{dh} = \frac{\cos(\gamma) \left[ -g + \frac{V^2}{R_e + h} \right]}{V^2 \sin(\gamma)} \quad (9)$$

Per últim, s'analitzarà l'expressió 6, sobre la qual és possible l'aplicació de la diferenciació en cadena sense cap pas previ:

$$\frac{dr}{dh} = \frac{-R_e \cos(\gamma)}{(R_e + h) \sin(\gamma)} \quad (10)$$

Finalment, amb les equacions (8), (9), la inversa de l'equació (5) i la (10), s'obté el següent sistema d'equacions:

### Sistema d'equacions de govern per a entrada amb dispositiu balístic

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dh} &= \frac{g \left[ \frac{Q}{\beta} - \sin(\gamma) \right]}{V \sin(\gamma)} \\ \frac{d\gamma}{dh} &= \frac{\cos(\gamma) \left[ -g + \frac{V^2}{R_e + h} \right]}{V^2 \sin(\gamma)} \\ \frac{dt}{dh} &= \frac{-1}{V \sin(\gamma)} \\ \frac{dr}{dh} &= \frac{-R_e \cos(\gamma)}{(R_e + h) \sin(\gamma)} \end{aligned}$$

Observi's com es tracta d'un sistema de 4 equacions amb 5 incògnites (1 grau de llibertat matemàtic), essent aquestes  $t$ ,  $V$ ,  $\gamma$ ,  $r$  i  $\beta$ . Per al cas que es tractarà en seccions posteriors, el disseny del vehicle es troba fix, i en conseqüència  $\beta$  també, raó per la qual el sistema es trobarà tancat (0 graus de llibertats reals).

Es destaca addicionalment com la  $t$  esdevé variable dependent al prendre  $h$  com la independent.

#### 2.1.2 Cas 2: dispositiu sustentador

Per al cas d'un dispositiu sustentador, la força aerodinàmica característica és la sustentació o *lift*, la qual és perpendicular a l'eix  $x$  vent (i en conseqüència, a la trajectòria). No obstant, la resistència també existeix, i el nou paràmetre primari de disseny és la ràtio sustentació vers resistència, també anomenada eficiència aerodinàmica  $E_m$ :

$$E_m = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

Les noves equacions dinàmiques en eixos vent:

$$\text{Per a la direcció } x': \quad -D + W \sin(\gamma) = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$\text{Per a la direcció } z': \quad -L + W \cos(\gamma) = \frac{W}{g} \left[ V \frac{d\gamma}{dt} + V \frac{d\theta}{dt} \right]$$

On  $L$ , al igual que la resistència, es pot expressar a partir del  $C_D$ :

$$L = QSC_L$$

Per últim, com a equacions cinemàtiques es prendran les expressions (5) i (6).

A diferència del cas anterior, la variable independent serà el temps  $t$  en aquest cas, raó per la qual només serà necessari simplificar les expressions associades. L'equació dinàmica en direcció  $x'$  és idèntica al cas anterior i no es repetirà el procediment.

Per a l'equació en  $z'$ , primer s'aïlla l'acceleració tal que:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{gQSC_L}{W} + g \sin \gamma$$

Per introduir el paràmetre  $\beta$  es multiplica i divideix el primer terme del *Right-Hand Side* per  $C_D$ , assolint la següent expressió:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-\frac{Qg}{\beta} \frac{C_L}{C_D} + \cos(\gamma) \left[ g - \frac{V^2}{R_e + h} \right]}{V}$$

Agrupant l'expressió anterior amb les equacions (7), (5) i (6) s'obté el sistema d'equacions corresponent:

#### Sistema d'equacions de govern per a entrada amb dispositiu sustentador

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= g \left[ \frac{-Q}{\beta} + \sin(\gamma) \right] \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{-\frac{Qg}{\beta} \frac{L}{D} + \cos(\gamma) \left[ g - \frac{V^2}{R_e + h} \right]}{V} \\ \frac{dh}{dt} &= -V \sin(\gamma) \\ \frac{dr}{dt} &= R_e \frac{d\theta}{dt} = \frac{R_e V \cos(\gamma)}{R_e + h}\end{aligned}$$

Novament el sistema consta de 4 equacions i les incògnites són 6:  $h$ ,  $V$ ,  $\gamma$ ,  $r$ ,  $\beta$  i el quocient  $L/D$  (*Lift-To-Drag ratio*), raó per la qual els graus de llibertat matemàtics són 2. No obstant, en l'estudi particular d'un cas real, el paràmetre  $\beta$  i la relació  $L/D$  seran dades, de forma que els graus de llibertats reals seran 0 i el sistema es trobarà tancat. Cal enfatitzar també com la variable independent en aquest cas és la  $t$ .

## 2.2 Càlcul de propietats termofísiques

### 2.2.1 Model atmosfèric

De cara al càlcul de les propietats termofísiques que caracteritzen l'atmosfera, s'emprarà el model *U.S. Standard Atmosphere 1976* [4], tal i com s'utilitza a l'article [1] en el qual es basa el present projecte. L'esmentat model es basa en la diferenciació de les capes atmosfèriques mitjançant altures geopotencials en comptes d'altures geomètriques pròpies d'altres models com l'ISA. En general, el principal avantatge de l'ús de termes geopotencials és la reducció del nombre de variables a l'hora de realitzar la integració, obtenint així unes equacions diferencials amb integrals exactes que donen lloc a funcions de temperatura i pressió lineals amb l'altitud.

En aquest cas, tenint en compte que l'altitud dels vehicles a estudiar no sobrepassen els 80 km, es farà ús exclusivament de les primeres 7 capes atmosfèriques identificades pel subíndex  $b = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ . Cadascuna d'aquestes capes es troba caracteritzada per un gradient de temperatura  $L_{M,b}$ , una temperatura molecular base  $T_{M,b}$  i una altitud geopotencial base  $H_b$ , on es dona inici a la corresponent capa.

### Gravetat

Pel que fa a la gravetat en funció de l'altitud geomètrica  $Z$ , la seva expressió és tal que:

$$g = g_0 \left( \frac{r_0}{r_0 + Z} \right)^2$$

on  $g_0$  és la gravetat a nivell del mar i  $r_0$  és el radi de la terra.

### Altitud geopotencial

L'altitud geopotencial  $H$ , definida com el geopotencial de qualsevol punt respecte el nivell del mar (zero potencial), es regeix per la següent equació:

$$H = \Gamma \left( \frac{r_0 Z}{r_0 + Z} \right); \quad \text{on: } \Gamma = \frac{g'_0}{g_0} = 1 \text{ m}'/\text{m}$$

Mencionar que  $g'_0$  és la gravetat geopotencial a nivell del mar, el valor de la qual és equivalent a  $g_0$ .

## Temperatura

En quant a la temperatura es refereix, l'expressió que la defineix a nivell molecular és:

$$T_M = T_{M,b} + L_{M,b}(H - H_b)$$

A partir d'aquesta dada es determina la temperatura cinètica  $T$ , de manera que tenint en compte que la massa molecular  $M$  de l'aire és constant per altituds  $Z < 80 \text{ km}$  i igual a  $M_0$  (M a nivell del mar), s'obté que:

$$T_M = T \frac{M_0}{M} = T$$

## Pressió

En termes de pressió, degut a que l'atmosfera terrestre presenta trams on existeix un gradient de temperatura  $L_{M,b}$  constant i no nul, i uns altres on la temperatura roman invariable, existeixen dues expressions pel càlcul de la pressió:

$$P = P_b \left[ \frac{T_{M,b}}{T_{M,b} + L_{M,b}(H - H_b)} \right]^{\frac{g'_0 M_0}{R^* L_{M,b}}} ; \quad \text{si } L_{M,b} \neq 0$$

$$P = P_b \cdot \exp \left[ \frac{-g'_0 \cdot M_0(H - H_b)}{R^* T_{M,b}} \right] ; \quad \text{si } L_{M,b} = 0$$

Essent la segona equació pel cas de gradient nul, i on  $P_b$  i  $R^*$  es corresponen a la pressió base de cada capa i a la constant universal dels gasos ideals, respectivament.

## Densitat

Tenint en consideració el caràcter perfecte de l'aire, s'obté que la densitat segons l'altitud es pot definir segons:

$$\rho = \frac{P M_0}{R^* T_M}$$

## Viscositat

La fórmula que defineix el valor de la viscositat dinàmica és:

$$\mu = \frac{\beta_{viscosa} \cdot T^{3/2}}{T + S}$$

On  $S$  rep el nom de la constant de Sutherland i  $\beta$  és també una constant, els valors de les quals són els següents:

$$\beta_{viscosa} = 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{1/2})$$

$$S = 110,4 \text{ K}$$

## Velocitat del so

Finalment, l'expressió que regeix el comportament de la velocitat del so és:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_{aire} R^* T_M}{M_0}}$$

## 2.2.2 Propietats d'estancament

### Pressió d'estancament (*stagnation point pressure*)

La pressió d'estancament o total és una propietat intensiva del fluid i pot ser un indicatiu del nivell d'energització d'aquest. En comparativa amb la pressió dinàmica, és alhora un indicador del nivell de compressió del flux, degut a que reduccions de densitat provoquen la substracció d'energia de pressió.

A l'hora de determinar la pressió d'estancament s'ha de tenir en compte el règim del flux. En el cas que el fluid es trobi en règim subsònic es faús de l'expressió de la pressió per flux isentròpic, tal que:

$$P_t = P \left[ 1 + \frac{\gamma_{aire} - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma_{aire}}{\gamma_{aire} - 1}}$$

No obstant, si es disposa d'un Mach  $M \geq 1$  s'ha de considerar la contribució a la pressió per part de l'ona de xoc normal que s'origina, el valor de la qual s'obté fent ús de la compressió isentròpica.

$$P_{shock} = P \left[ 1 + \frac{2\gamma_{aire}}{\gamma_{aire} + 1} (M^2 - 1) \right]$$

A partir d'aquest paràmetre es determina la pressió d'estancament per règim sònic i supersònic mitjançant l'equació d'Hugoniot:

$$P_t = P_{shock} \left[ 1 + \frac{\gamma_{aire} - 1}{2} \frac{1 + \frac{\gamma_{aire} - 1}{2} M^2}{\frac{\gamma_{aire} M^2 - \frac{\gamma_{aire} - 1}{2}}{\gamma_{aire} - 1}} \right]^{\frac{\gamma_{aire}}{\gamma_{aire} - 1}}$$

### Entalpia d'estancament (*stagnation point enthalpy*)

L'entalpia d'estancament és una propietat que es relaciona directament amb la densitat d'energia total del fluid. Aquesta ve donada per la següent expressió:

$$h_t = C_p T + \frac{1}{2} V^2 \quad (11)$$

On la llei de la calor específica a pressió constant ( $C_p$ ) de l'aire ha estat obtinguda de [6]:

$$C_p = 1034,9 - 2,849 \cdot 10^{-1} T + 7,817 \cdot 10^{-4} T^2 - 4,971 \cdot 10^{-7} T^3 + 1,007 \cdot 10^{-10} T^4$$

### Flux de calor pel punt d'estancament (*stagnation point heat transfer*)

Com ja s'ha esmentat abans, el punt d'estancament és aquella zona on la velocitat és cero. D'aquesta manera, s'entén el flux de calor en aquest punt com la substracció d'energia necessària per aconseguir que el flux s'arribi a frenar completament. Aquesta energia, és proporcional a la densitat i al cub de la velocitat.

Aquest flux de calor es regeix per la correlació empírica de Sutton-Graves, vàlida en cas de flux laminar, on  $C$  és una constant de valor  $C = 1,83 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{1/2}/\text{m}$  pel cas de l'atmosfera terrestre i  $R_N$  és el radi de l'ogiva del vehicle, de valor 0,3048 m (1 ft):

$$\dot{q}_{t, SG} = -C \sqrt{\frac{\rho}{R_N}} V^3 \quad (12)$$

El signe negatiu té el seu origen en que el sentit positiu de la transferència de calor s'ha pres normal a la superfície del vehicle, de dins cap enfora.

## 2.3 Equacions complementàries

### Desacceleració

D'acord a l'aplicació de l'equació dinàmica en direcció  $x$  vent (3), s'obté la següent expressió per a la desacceleració.

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 g}{2\beta} + g \sin \gamma \quad (13)$$

## Pressió dinàmica

La pressió dinàmica és una propietat de flux que representa la densitat d'energia cinètica que conté el flux. La seva expressió matemàtica més habitual és la següent:

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

No obstant, pel cas de flux compressible pot resultar més còmode treballar en funció del nombre de Mach, de forma que s'emprarà la següent relació, la qual és totalment equivalent:

$$Q = \frac{1}{2} \gamma_{aire} P M^2$$

## Energia dinàmica (*dynamic energy*)

L'energia dinàmica es una propietat que representa de forma directa i clara la quantitat d'energia cinètica de l'aire incident. Físicament, la pressió dinàmica ja inclou el significat físic de densitat d'energia cinètica, però multiplicar per  $V$  proporciona les unitats d'energia al numerador, facilitant la seva interpretació.

D'acord a aquesta definició, l'expressió associada és:

$$e_d = QV \quad (14)$$

## Coeficients adimensionals

D'una banda, el número de Reynolds és un coeficient adimensional que il·lustra la proporció entre les forces inercials i les viscoses. Es defineix com:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

On  $L$  és una longitud característica o de referència de l'objecte estudiat.

En quant al número de Mach, aquest representa la relació entre les forces inercials i les de pressió. És alhora un indicatiu del nivell de compressibilitat del fluid, de forma que si el coeficient creix en valor, el descens en la densitat esdevindrà més significatiu. La seva expressió associada és tal que:

$$M = \frac{V}{a}$$

essent  $a$  la velocitat del so.

### 3 Mètode Runge-Kutta per a la resolució numèrica d'equacions diferencials

#### 3.1 Descripció teòrica

Per tal de resoldre el sistema d'equacions diferencials anteriorment demostrades, s'ha emprat el mètode Runge-Kutta per a la resolució numèrica de sistemes. Aquest mètode basa el seu funcionament sobre una discretització en intervals d'una variable independent, i obté l'evolució de les variables dependents a partir d'una metodologia explícita: és a dir, l'estat  $i + 1$  del sistema es determina exclusivament a partir de l'estat  $i$ . Per aquest motiu, no requereix cap *solver* d'equacions addicional degut a que l'evolució del sistema esdevé únicament dependent de l'increment de la variable independent, així com de l'estat  $i$ , essent ambdós sempre coneguts.

El mètode aplicat en aquest cas presenta una aproximació de l'error acumulat de quart ordre, sinònim de que una reducció de l'increment de la variable independent a la meitat es tradueix en una reducció de l'error a un setzè del valor anterior. En aquest estudi, la variable dependent ha variat del cas balístic al sustentador, essent l'altura en la primera i el temps en la segona. En addició, el signe de l'increment ha variat, ja que l'altura s'avalua de forma decreixent, mentre que el temps és sempre creixent.

La implementació de l'algorisme de resolució s'ha dut a terme en MatLab mitjançant estructures de bucle *for* degut a l'eficiència que suposa a l'hora de recórrer tot el domini continu discretitzat de la variable independent, de forma que a cada iteració seqüencial del *for* es determinen els valors de les variables dependents en l'estat  $i + 1$ . El bucle en qüestió acaba quan es determina l'estat del sistema associat a l'últim valor del rang discretitzat de la variable independent.

#### 3.2 Estructura de l'algorisme

A continuació, s'explica de forma ordenada el procediment que realitza l'algorisme implementat:

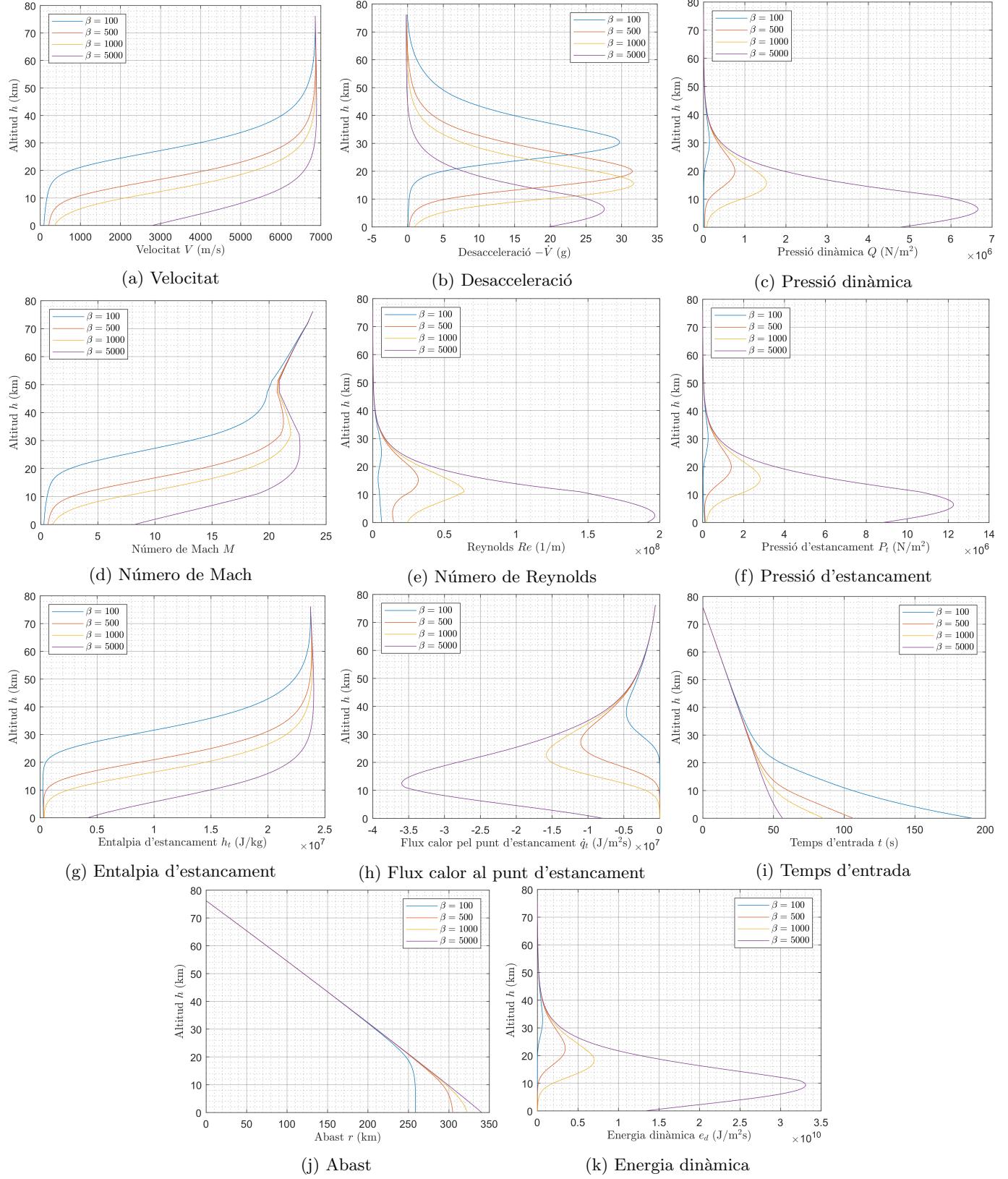
1. Definició de dades
  - 1.1. Dades físiques: constants associades a l'evolució atmosfèrica, dades inicials de la trajectòria.
  - 1.2. Dades numèriques: interval de la variable independent  $\Delta H^1$ , nombre d'intervals  $N$ .
2. Càlculs previs
  - 2.1. Generació de matrius d'emmagatzematge de dades.
  - 2.2. Càlcul de propietats termofísiques en funció de l'alçada.
  - 2.3. Definició d'equacions diferencials.
3. Resolució del següent estat desconegut  $H[i + 1] = H[i] + \Delta H$ 
  - 3.1. Càlcul de coeficients  $k_1[i]$ ,  $k_2[i]$ ,  $k_3[i]$  i  $k_4[i]$  per a cada equació diferencial.
  - 3.2. Obtenció de les incògnites associades a l'estat desconegut.
$$\varphi[i + 1] = \varphi[i] + \frac{\Delta H}{6} (k_1[i] + 2k_2[i] + 2k_3[i] + k_4[i])$$
- 3.3. És  $i < (N - 1)?^2$ 
  - Sí. Llavors s'imposa  $\varphi[i] = \varphi[i + 1]$  i es torna al pas 3.1.
  - No. S'avança al pas 4.
4. Càlculs finals i impressió de resultats.
5. Fi.

<sup>1</sup> $H$  representa una variable genèrica independent i  $\varphi$  representa una variable genèrica dependent.

<sup>2</sup>El bucle s'atura a  $N - 1$  perquè sempre es calcula l'estat posterior.

## 4 Resultats i gràfiques: reentrada balística genèrica

Figura 2: Trajectòria de la reentrada balística terrestre.



Les gràfiques de la Figura 2 han estat obtingudes a partir d'unes dades inicials corresponents a una reentrada balística genèrica, on  $h = 76,2$  km (250 kft),  $V = 6858,0$  m/s (22,5 kft/s) i  $\gamma = 12^\circ$ . Llavors, s'ha estudiat l'efecte que té en la reentrada la variació del coeficient balístic. Concretament, han estat quatre casos diferents:  $\beta_1 = 100 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ ,  $\beta_2 = 500 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ ,  $\beta_3 = 1000 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$  i  $\beta_4 = 5000 \text{ lb}_f/\text{ft}^2$ .

## 4.1 Velocitat

El vehicle balístic inicia la seva reentrada a una velocitat lleugerament inferior als 7000 m/s i durant un tram clarament diferenciat, la velocitat es manté constant. La durada en altitud d'aquesta etapa és dependent del coeficient  $\beta$ : el coeficient de valor  $\beta = 100$  presenta velocitat constant durant els primers 10 km, el mínim de tots, mentre que la corba associada a  $\beta = 5000$  manté la velocitat durant els primers 40 km del descens.

El tram de velocitat constant precedeix una intensa desacceleració de tendència aproximadament rectilínia i de pendent de valor  $-500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{km}}$ , molt similar per a les quatre corbes. No obstant, i degut a la diferent llargada del tram de  $V$  constant, l'etapa de frenada es dona al llarg de diferents altituds en funció del valor de  $\beta$ . En específic, majors valors del coeficient balístic  $\beta$  impliquen un inici de la reducció de la velocitat de forma més tardana, és a dir, el vehicle no comença a desaccelerar fins altituds més reduïdes.

En addició, el paràmetre  $\beta$  condiciona també la velocitat amb la que el dispositiu arriba a terra: si bé per als tres valors de  $\beta$  menors s'arriba a la superfície amb velocitat subsònica, per al valor més gran la velocitat és hipersònica.

L'evolució de la velocitat durant la reentrada està directament lligada a la desacceleració, explicada en el següent apartat. Per tant, si s'entén la variació de l'acceleració durant el trajecte, s'entindrà el que passa amb la velocitat.

## 4.2 Desacceleració

Si s'estudia el caràcter general d'aquesta gràfica es pot observar que, de forma general, a major coeficient balístic, major desacceleració màxima i que aquesta es dona a menor altitud. Tot i això, cal esmentar el cas de major coeficient balístic, on el màxim es dona a menor altitud que la resta però en aquest cas la desacceleració és la menor de totes.

A l'hora d'entendre la física que explica l'evolució de la desacceleració, pot ser útil per començar l'anàlisi tenir en compte l'expressió (13), demostrada prèviament. Primer de tot, amb l'ajuda de les gràfiques obtingudes, es pot apreciar que no es un disbarat menysprear el terme de la gravetat. Aquest és d'un ordre de magnitud menor que la desacceleració proporcionada per la fricció. D'aquesta manera, es pot observar que la desacceleració màxima es donarà quan el terme  $V^2\rho$  sigui màxim.

Pel que fa la densitat, es coneix que aquesta disminueix amb l'alçada. Per tant, es pot veure que els resultats obtinguts concorden, ja que fins a que no s'arriba al valor màxim de desacceleració, ja bastant a prop de la superfície terrestre, aquesta és creixent en tot moment. Aquest fet s'explica fàcilment degut a que la força que desaccelera el dispositiu anirà augmentant a l'hora que el dispositiu perd alçada i viatja cada cop per capes de l'atmosfera més denses, que provoquen més fricció.

Per l'altra banda, si ara s'analitza el comportament de la velocitat, s'entindrà la diferència de comportament entre els dispositius amb coeficient balístic distints, ja que l'efecte de la densitat és igual per a tots. L'alçada on es dona el màxim està directament lligada amb el coeficient de fregament, ja que si la força de fricció és major el dispositiu frenarà més ràpidament, donant el màxim de desacceleració a més alçada. És així, que els dispositius amb major  $\beta$  tindran el màxim a menor altitud, degut a que el  $C_D$  és inversament proporcional segons l'expressió (2).

L'últim aspecte a analitzar és el valor màxim de desacceleració entre els diferents dispositius. En el gràfic es pot observar que augmenta en aquells dispositius amb major coeficient balístic. Això es deu a que en els dispositius amb menor  $C_D$ , i per tant amb major  $\beta$ , es veuran menys frenats fent que arribin a les zones de densitat més elevada a una velocitat major, provocant desacceleracions superiors. Concretament, les corbes de  $\beta = 500$  i  $\beta = 1000$  presenten acceleracions màximes lleugerament superiors a 31g. En addició, les dues corbes restants presenten valors de pic superiors als 25g.

### 4.3 Pressió dinàmica

La pressió dinàmica,  $Q = \frac{1}{2}\rho V^2$ , serà màxima al igual que la desacceleració quan  $V^2\rho$  sigui màxim.

La progressió de les 4 corbes distingeix dos trams característics per a cadascuna. En primera instància,  $Q$  augmenta de forma similar a la densitat a mesura que el dispositiu descendeix fins als 40 km ja que en aquest rang d'alçades la velocitat és constant a efectes pràctics. A més, tot i que el terme de la velocitat és quadràtic, i aquesta pren durant aquest tram els majors valors al llarg de tota la trajectòria, com que la densitat és gairebé nul·la, el seu efecte és clarament dominant, provocant que la  $Q$  sigui de valor molt reduït.

A partir dels 40 km la pressió dinàmica ascendeix, ja que també ho fa la densitat, i la velocitat no decreix significativament. Tal i com ja s'ha comentat, l'altura de màxima pressió dinàmica coincideix amb l'altura de màxima desacceleració degut a que ambdues presenten una dependència majoritària de  $V^2\rho$ . Un cop ja s'ha superat aquest màxim, la pressió dinàmica es veu disminuïda dràsticament degut al pic de desacceleració, el qual frena bruscament el dispositiu.

### 4.4 Número de Mach

Segons la definició del Mach,  $M = V/a$ , les variables d'aquest són la temperatura i la velocitat. On la velocitat serà el factor governant ja que la temperatura, tot i variar amb l'alçada, l'ordre de magnitud no varia, de forma que la seva influència és secundària.

Tot i això, en els primers quilòmetres de la reentrada, on la velocitat de descens és quasi bé constant (veure Figura 3a), el Mach es veu molt més afectat pels canvis de temperatura. Això es pot observar en la Figura 3d on, tot i que la velocitat es manté quasi constant durant els primers 25 km del descens, el Mach es redueix de forma aproximadament lineal de 24 a 21 perquè la temperatura s'incrementa (veure Figura 7).

A continuació, i durant un petit tram, el Mach roman constant degut a que el gradient de temperatura esdevé nul. Posteriorment, i com que la temperatura passa a descendir, el Mach creix. Aquest últim efecte és més visible en les corbes de valors de  $\beta$  superiors, on el tram de velocitat constant és més llarg.

De forma general i per a altures elevades, es pot comprovar de forma molt clara com l'evolució de la temperatura influencia (de manera lleugera) l'evolució del Mach.

A continuació, el nombre de Mach cau 16 unitats al llarg d'un tram lineal que abasta dels 40 km als 20 km. La nau passa de desplaçar-se en un règim hipersònic “alt” a fer-ho en un supersònic que deriva en un subsònic entorn els 18 km.

### 4.5 Número de Reynolds

Per a dur a terme aquest anàlisi, s'ha estudiat el Reynolds entre la longitud característica degut al desconeixement d'aquesta dada. Tot i això, com aquest valor és constant, la relació entre l'alçada i el número de Reynolds és la mateixa per a qualsevol valor de longitud característica. El ràtio entre les forces inercials i les forces viscoses, és directament proporcional de la densitat i la velocitat i inversament proporcional a la viscositat dinàmica.

Al igual que amb la pressió dinàmica, com el Reynolds també és directament proporcional a la densitat, el seu valor és quasi bé nul degut a que per sobre dels 40 km d'alçada la densitat és molt baixa (vegeu la gràfica 9). A continuació, el valor del Reynolds comença augmentar de la mateixa manera que ho fa la densitat fins que arriba a l'altitud on el dispositiu comença a frenar bruscament. A partir d'allà, el Reynolds torna a veure's disminuït. És remarcable com aquesta progressió és qualitativament similar a la de la desacceleració i la de la progressió dinàmica, degut a que les tres propietats depenen de  $\rho V$ .

Si ara s'estudia la diferència entre els dispositius amb diferent valor de  $\beta$ , es troba que en el cas de major coeficient balístic, a la zona d'impacte amb la terra, s'arriba amb un Reynolds clarament superior a la resta. Això es pot explicar, sabent que degut a que aquest dispositiu arriba amb una velocitat clarament superior. Finalment, esmentar que la viscositat dinàmica té canvis menys bruscos que la densitat pel que fa al tram analitzat, la qual cosa fa que les seves variacions no es vegin reflectides amb claredat en les gràfiques del Reynolds.

## 4.6 Pressió d'estancament

La pressió d'estancament és la pressió d'un fluid el qual s'ha portat al repòs mitjançant un procés isentròpic. A l'hora de calcular aquest valor per a cada punt de la reentrada cal tindre en compte si la velocitat del dispositiu és superior o no a la del so, ja que aquesta es computa de forma diferent en cada cas.

Tot i les dues expressions diferents que existeixen, la pressió d'estancament depèn en els dos casos del número de Mach, de la pressió estàtica i de la relació de calors, que durant tota la reentrada és considerada constant. El valor de la pressió d'estancament en quasi tot el descens és proper a 0, però entre els 10 i 20 km d'alçada, aquesta pateix un pic. Aquest pic ve donat a que des del començament de la reentrada fins a aquestes altituds, el valor de la pressió estàtica és menyspreable (segons la gràfica 8). Llavors, quan aquesta augmenta, la pressió d'estancament també ho fa. Finalment, la pressió d'estancament torna a disminuir quan la velocitat dels dispositius balístics, i per tant també el Mach, es redueix bruscament.

Per concloure, ara que ja es coneix tant la pressió dinàmica com la pressió d'estancament, es pot saber quantitativament el nivell de compressió del fluid durant el trajecte. Se sap que si el ràtio de la pressió dinàmica entre la pressió d'estancament augmenta, el fluid té es troba més comprimit. Per tant, en el cas d'estudi, on aquest ràtio es manté constant durant tota la reentrada, aquest nivell de compressió és pràcticament constant fins que el dispositiu arriba a la superfície terrestre.

## 4.7 Entalpia d'estancament

Es recorda que l'entalpia quantifica de forma total l'energia que conté un fluid. Analitzant les variables de la seva expressió (11), es veu la dependència lineal amb la temperatura i la dependència quadràtica amb la velocitat. Per tant, el terme governant serà aquesta última variable degut a ser d'ordre superior. En conseqüència, és possible afirmar que el contribuent principal a l'entalpia d'estancament és l'energia cinètica, de forma que la progressió de la primera serà la mateixa que la de la segona.

És d'aquesta manera, que a la gràfica 3g es pot observar que relació entre velocitat i alçada té la mateixa forma que la relació entre l'entalpia d'estancament i l'alçada. A part, cal recordar que com la temperatura no presenta canvis sobtats en el seu ordre de magnitud degut a que els gradients no són exageradament grans, l'entalpia no es veurà quasi afectada en aquest aspecte.

## 4.8 Flux de calor al punt d'estancament

D'acord a l'expressió (12), la transferència d'energia calorífica és proporcional a la densitat i al cub de la velocitat. Llavors, com la densitat tendeix a zero entre les altituds compreses entre els 40 i els 80 km, tot i tenir una dependència de menor ordre que la velocitat, el flux es veu clarament influenciat per la magnitud d'aquesta propietat termofísica, esdevenint també molt proper a zero. Conseqüentment, el flux de calor al punt d'estancament és maximitzat a les zones on el dispositiu encara no s'ha vist altament frenat i la densitat ja és propera a la densitat a nivell del mar.

D'aquesta manera, el pic més gran es donarà amb el dispositiu amb major coeficient balístic, ja que com s'ha comentat abans arriba a zones més denses amb major velocitat. Finalment, el flux torna ràpidament a valors propers a zero degut a la gran desacceleració que pateixen els diferents dispositius a prop de la superfície terrestre.

El caràcter negatiu d'aquest flux de calor al punt d'estancament es deu al criteri pres com a positiu, el qual és de l'interior a l'exterior de la nau. No obstant, com el calor es troba entrant al volum de control que conforma la nau, aquest és negatiu.

## 4.9 Temps de reentrada

El temps que es triga a fer la reentrada va lligat directament a quina alçada es dona la desacceleració màxima. Això es deu a que quan abans es doni aquest pic de desacceleració, el dispositiu recorrerà més quilòmetres de descens a una velocitat menor i conseqüentment la reentrada serà més llarga.

És d'aquesta manera, i en base a la Figura 3b, que els dispositius amb major  $\beta$ , i per tant, menor  $C_D$  trigaran menys temps, ja que com s'ha explicat abans en aquests dispositius s'endarrereix pic de desacceleració

màxima. A nivell quantitatiu, per a  $\beta = 100$  es requereixen 180 s per arribar a la superfície terrestre, mentre que amb  $\beta = 5000$  es requereixen només 56 s, suposant menys d'una tercera part del valor anterior.

## 4.10 Abast

D'acord a l'expressió (6), emprada per al càlcul de la variació de l'abast amb l'altura, l'angle de descens  $\gamma$  és la variable decisiva: concretament, si  $\gamma$  pren un valor petit, per a una petita alçada descendida l'abast recorregut serà elevat. Pel que fa als diferents dispositius no hi ha cap diferència en l'abast durant els primers quilòmetres de descens. La progressió és lineal amb un guany de 45 km d'abast per cada 10 km descendits.

A partir dels 20 km d'altitud, els dispositius amb menor coeficient balístic comencen a perdre velocitat horitzontal, i la component dominant esdevé la vertical. Aquest fet queda perfectament definit en la gràfica del angle de descens respecte l'altitud (Figura 13). A més a més, en la gràfica anterior es pot veure el cas més extrem: el dispositiu amb  $\beta = 100$ , on arriba un moment que aquest només té velocitat vertical degut a que arriba a la superfície amb  $\gamma \approx 90^\circ$ . Per afegirò, aquest dispositiu s'ha vist t'han desaccelerat durant tota la reentrada que arriba un moment on adquireix la velocitat de descens límit en el fluid. Això es pot observar clarament en la gràfica 3b, on a l'últim tram no hi ha desacceleració, característica que defineix la velocitat límit de descens.

La diferència d'abast entre els dos dispositius de major i menor coeficient balístic és 80 km. D'aquesta manera, es pot concloure, que amb major  $\beta$ , l'abast augmenta i la pèrdua de linealitat es realitza més a prop del terra.

## 4.11 Energia dinàmica

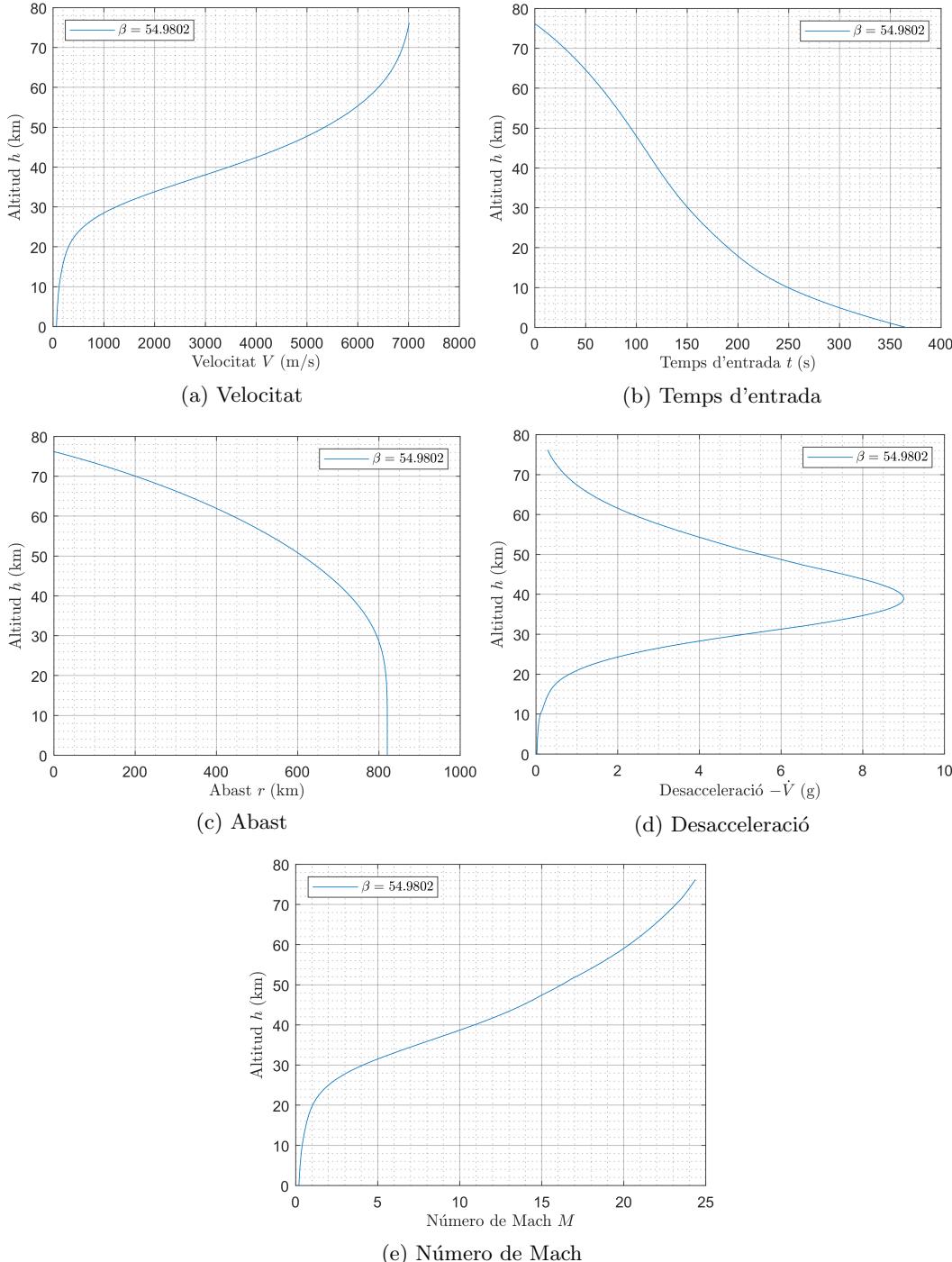
Aquest paràmetre està associat a l'energia cinètica del flux ja que la seva expressió és la pressió dinàmica per la velocitat d'acord a l'equació (14). Per aquest motiu, s'observa una evolució en forma molt similar a la de la pressió dinàmica (veure Figura 3c).

Novament existeix un màxim, el qual augmenta a major valor de coeficient balístic, ja que el dispositiu descendeix a més velocitat durant un interval d'altures més ampli (requereix d'aprofundir més en l'atmosfera per veure's desaccelerat). A més a més, com existeix una dependència directa amb la densitat degut a que la energia dinàmica és proporcional a la pressió dinàmica, el pic del dispositiu amb  $\beta = 5000$  és més pronunciat en relació als altres pics que les gràfiques anteriors.

## 5 Resultats i gràfiques: reentrada balística (càpsula Mercury)

Tenint en compte les dades inicials de la càpsula en la seva reentrada, corresponents a  $h = 76,2 \text{ km}$  (250 kft)<sup>3</sup>,  $V = 7010,4 \text{ m/s}$  (23 kft/s) i  $\gamma = 1,5^\circ$ , s'obtenen les següents gràfiques que caracteritzen la reentrada.

Figura 4: Reentrada balística terrestre de la càpsula Mercury "Friendship 7"



<sup>3</sup>Cal mencionar que en l'article original s'indica que l'altitud inicial és de 250 kft, encara que el valor observat en les gràfiques és  $\sim 275$  kft. La decisió presa ha estat utilitzar el primer dels valors mencionats, resultant en unes gràfiques amb pràcticament cap diferència observable respecte les originals de l'article.

## 5.1 Velocitat

En primera instància, es procedeix a l'anàlisi de la gràfica 4a corresponent a l'altitud enfront de la velocitat. Tal i com es pot observar, la velocitat de la càpsula es va reduint progressivament des d'uns 7 km/s inicials. Aquest inici de la reentrada on el comportament de la velocitat és no lineal i convex es veu marcada per una creixent desacceleració que provoca que inicialment la velocitat no varii el seu valor en gran mesura. Això succeix en l'interval comprès entre els 76,2 – 60 km, resultant en velocitats de  $7,0 \sim 6,4$  km/s i amb una pendent de 27 km d'altitud/km/s de velocitat. És a dir, en aquest tram el vehicle encara no ha començat a experimentar grans efectes de la fricció de l'atmosfera, donat que la seva densitat encara és molt petita.

Posteriorment, la velocitat es redueix dràsticament fins els 0,5 km/s en el rang d'altituds de 60 a 25 km, donat la gran importància del drag experimentat per la càpsula, que es pot justificar pel pic de desacceleració en aquesta zona donat l'elevat terme  $\rho V^2$  de l'equació (13).

Finalment, el vehicle redueix la seva velocitat fins un valor quasi bé nul, això té lloc a l'interval entre  $25 \sim 0$  km, on la velocitat passa dels 0,5 als 0 km/s. Aquest fet és lògicament degut a que el vehicle ja ha reduït prèviament la seva velocitat quasi en la seva totalitat, i en aquestes zones de reduïda altitud el vehicle ja no ha de desaccelerar pràcticament.

## 5.2 Temps d'entrada

Pel que fa al temps transcorregut durant la reentrada (gràfica 4b), s'observa que en els moments inicials del descens ( $0 \sim 150$  s), la càpsula disminueix la seva altitud amb una rapidesa considerable donat l'elevat pendent negatiu de la corba, fet que implica una gran velocitat vertical de descens. Aquest fet es deu en part, com ja s'ha comentat abans, a la baixa densitat de les altes capes de l'atmosfera, que provoquen que el drag que experimenta la càpsula sigui insignificant i, per tant, disminueixi la seva altitud ràpidament.

A partir dels primers 150 s inicials, la corba d'altitud vers temps presenta un punt d'inflexió, que indica el començament de l'etapa on la nau Mercury experimenta la màxima desacceleració. Això es veu reflectit en el pendent de la corba, el qual disminueix considerablement, és a dir, la velocitat vertical de descens es redueix dràsticament.

## 5.3 Abast

En quant al rang es refereix, es recorda que aquest consisteix en la projecció de la distància recorreguda per la càpsula sobre la superfície circular de la Terra que interseca amb el pla vertical on es situa la trajectòria de l'esmentada nau.

Es visualitza a la gràfica 4c que en la primera part de la corba, compresa entre l'inici de la reentrada a 76,2 km d'altitud fins aproximadament els  $40 \sim 30$  km, la càpsula segueix una trajectòria no lineal i amb un pendent reduït (entorn  $0,050 \sim 0,058$  km d'altitud/km d'abast), sinònim d'una trajectòria on predomina el "planeig". Aquest fet comporta que la nau recorri una gran distància sobre la superfície terrestre donada la seva elevada velocitat hipersònica enfront del descens vertical experimentat. Més concretament, l'abast assolit durant aquest tram es situa sobre els 800 km enfront la 20 vegades més petita altura recorreguda.

Un cop la càpsula ha assolit una altitud d'uns 30 km, la tendència observada en l'abast es veu modificada, tendint així a una etapa on la distància abastada sobre la superfície és pràcticament negligible en comparació amb la distància vertical recorreguda. Això es deu a la reduïda i decreixent velocitat, amb prou feines supersònica, de la que disposa la càpsula en aquesta etapa, de manera que es produeix una caiguda amb un angle  $\gamma$  que tendeix a  $90^\circ$ , tal i com es mostra a la gràfica 14.

## 5.4 Desacceleració

En aquest cas, segons la gràfica 4d, la desacceleració que pateix la càpsula en la part alta de la seva trajectòria és pràcticament nul·la degut a la baixa densitat de l'aire, de manera que el terme  $\rho V^2$ , que caracteritza la desacceleració segons l'equació (13), és relativament petit en comparació amb els valors obtinguts posteriorment.

Així mateix, durant el posterior descens la desacceleració va incrementant-se a mesura que la densitat del aire augmenta, sinònim d'un major drag. D'aquesta manera, la desacceleració resultant té un pic d'uns  $9\ g$  entorn els 40 km d'altitud. És en aquest precís instant on el ja mencionat terme  $\rho V^2$  és màxim, i conseqüentment, hi ha el pic de desacceleració.

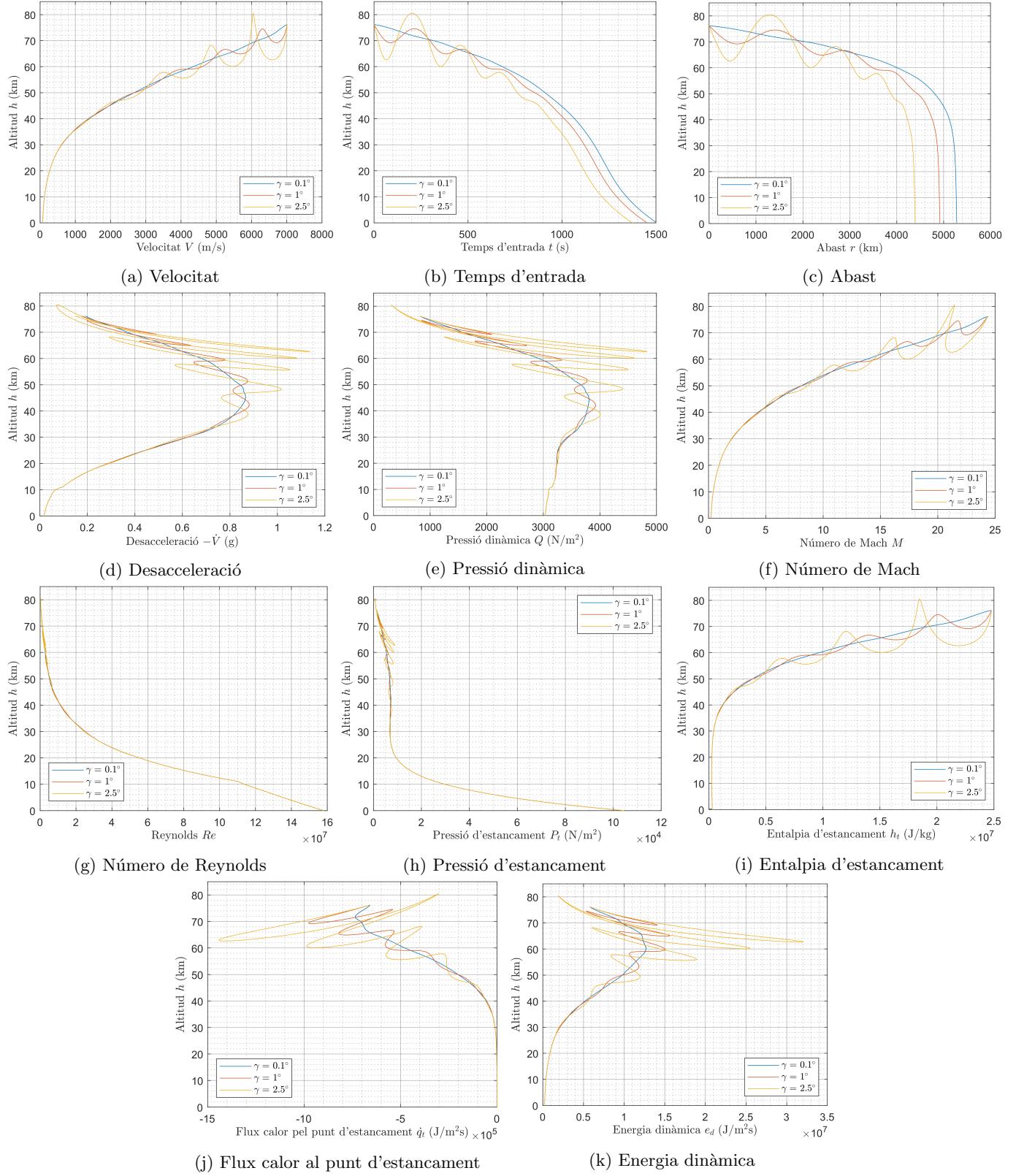
Finalment, durant els últims 40 km de descens, la desacceleració torna a adoptar una tendència decreixent donat que la disminució de la velocitat pren més importància que l'augment de la densitat.

## 5.5 Número de Mach

El comportament del número de Mach enfront de l'altitud, il·lustrat en la gràfica 4e, es troba en consonància amb els resultats obtinguts per la velocitat. És així que l'efecte de la temperatura no és massa significatiu, de manera que la relació entre el Mach i l'alçada és quasi bé igual a la relació entre la velocitat i l'altitud.

## 6 Resultats i gràfiques: reentrada sustentadora

Figura 5: Trajectòria de la reentrada sustentadora terrestre del Space Shuttle.



Les gràfiques de la Figura 5 simulen la reentrada atmosfèrica del Space Shuttle. Les dades inicials aplicades han estat les següents:  $h = 76,2 \text{ km}$  (250 kft) i  $V = 7010,4 \text{ m/s}$  (23 kft/s). En aquest cas l'angle de descens  $\gamma$  pren tres valors diferents:  $\gamma_1 = 0,1^\circ$ ,  $\gamma_2 = 1^\circ$  i  $\gamma_3 = 2,5^\circ$ .

## 6.1 Velocitat

D'acord amb la Figura 6a, per una reentrada amb un angle  $\gamma = 0,1^\circ$  el descens és de tendència lineal amb la velocitat entre els 76 km i els 45 km. A partir d'aquesta altura s'inicia un increment progressiu de pendent fins a arribar al terra, sinònim de que la frenada del vehicle és més intensa al rang més pròxim al terra.

Per a un angle  $\gamma = 1^\circ$ , l'altura presenta oscil·lacions entorn de la corba de  $\gamma = 0,1^\circ$ . Aquesta evolució implica que durant la progressiva pèrdua de velocitat la nau perd altura per, a continuació, guanyar-ne de més. Amb el descens en alçada, les oscil·lacions s'esmorteixen, de forma que a partir dels 50 km d'alçada la progressió és pràcticament la mateixa al cas de  $\gamma = 0,1^\circ$ .

Per a un angle  $\gamma = 2,5^\circ$ , les fluctuacions d'alçada vers la velocitat són més pronunciades: concretament, els polsos on la nau perd alçada són més amples en velocitat, mentre que els pics de guany d'altitud són més estrets en  $V$ . De forma anàloga al cas anterior, les oscil·lacions decreixen en amplitud al créixer l'altura, assolint-se la convergència amb les altres corbes per a 40 km, aproximadament. Des d'aquest valor fins al terra la progressió és idèntica als altres dos casos.

El motiu pel qual les oscil·lacions remeten en amplitud amb els descens de  $V$  és perquè aquestes tenen origen en la dinàmica del sistema, en la qual  $V$  participa a les forces aerodinàmiques. Com que existeix una força sustentadora la combinació variacions en  $\gamma$  i en  $V$  provoca el guany d'altura observat. En l'Annex 2, la Figura 15 mostra l'evolució caòtica que se segueix l'angle de descens amb el descens.

## 6.2 Temps de reentrada

Observant la gràfica per a la progressió de l'altitud respecte del temps d'entrada, s'observen novament les oscil·lacions d'alçada, les quals novament s'apaguen amb el temps. Comparant les corbes per als angles  $\gamma = 1,0^\circ$  i  $\gamma = 2,5^\circ$ , s'observa com existeix un lleuger desfasament temporal entre les oscil·lacions d'ambdues. A més, s'estreu de forma directa que un angle d'incidència inicial superior condueix a un menor temps d'entrada, existint una diferència de 170 s entre el major i el menor valor de  $\gamma$ , i amb un valor total màxim de 1500 s per a  $\gamma = 2,5^\circ$ .

## 6.3 Abast

L'abast mostra un comportament qualitatiu semblant per als tres valors analitzats de  $\gamma$ : per a reduccions d'altura properes a l'altura inicial, el guany en abast és pronunciat i presenta una tendència lineal. Es podria dir, doncs, que aquesta etapa consisteix en un "planeig". Aquest comportament s'argumenta degut a que els màxims valors en mòdul de velocitat es troben a l'inici de la trajectòria, de forma que la distància recorreguda sobre la superfície de la Terra serà major.

A partir dels 60 km d'alçada la tendència lineal es trenca, i a partir dels 40 km la progressió de l'abast esdevé pròxima a vertical, fet que simbolitza que la velocitat d'avanç "horitzontal" (tangencial respecte del centre de la Terra) és molt petita en relació al comportament a l'inici de la trajectòria.

## 6.4 Desacceleració

La gràfica de la desacceleració mostra com les tres corbes presenten a qualsevol altura valors de desacceleració positius, sinònim de que la nau es troba en una frenada constant al llarg de la trajectòria.

A nivell de forma, la entrada amb  $\gamma = 0,1^\circ$  presenta una evolució suavitzada amb un màxim ubicat entorn 45 km i de valor 0.86 g, xifra dos ordres de 10 inferior a l'observada per a l'entrada balística. Per a  $\gamma = 1,0^\circ$  la progressió presenta oscil·lacions sobre la corba de la  $\gamma$  anterior. De forma anàloga a les evolucions de velocitat o de l'abast, l'amplitud decreix amb l'alçada. Per a  $\gamma = 2,5^\circ$ , les oscil·lacions són especialment pronunciades, arribant a un màxim de 1.1 g i a un mínim de 0.08 g abans d'haver assolit els 60 km.

En comparació amb la progressió observada per al cas d'entrada balística, els valors observats són substancialment inferiors, alhora que no existeix un pic tan pronunciat com s'ha donat abans. L'absència d'aquest últim condirà a que les progressions d'altres variables presentin una progressió més monòtona, tal i com ho fa la velocitat, si obvem les oscil·lacions.

## 6.5 Pressió dinàmica

La evolució de la pressió dinàmica a nivell qualitatiu és molt similar a la corba de desacceleració, especialment per a altures superiors a 40 km. La raó és que ambdues expressions depenen del quadrat de la velocitat, motiu pel qual, a més d'arroseggar les variacions, les amplifiquen.

En aquest cas, la corba de  $\gamma = 2.5^\circ$  s'inicia entorn de  $312 \text{ N/m}^2$ , mentre que les corbes de  $\gamma = 1.0^\circ$  i  $\gamma = 0.1^\circ$  s'inicien a un valor de  $1000 \text{ N/m}^2$ . Aquestes dues presenten un màxim relatiu i absolut entorn a 45 km, mentre que la corba de major  $\gamma$  presenta un màxim a 63 km degut a les pronunciades oscil·lacions que pateix.

Nogensmenys, el comportament del descens a partir dels 30 km és similar i segueix una tendència a un valor no nul, fet que simbolitza que la nau arriba a la superfície terrestre amb una velocitat no nul·la.

## 6.6 Número de Mach

Degut a que la funció del nombre de Mach és directament dependent de la velocitat, raó per la qual ambdues gràfiques han de ser similars en forma. Novament es repeteixen les oscil·lacions entorn l'altura inicial, i un cop més són atenuades amb el descens, de forma que, a partir dels 40 km fins al terra, les corbes per als 3 valors de  $\gamma$  són gairebé coincidents.

Un petit detall a destacar és la forma de les oscil·lacions, presentant en aquest cas una certa inclinació cap a la dreta. Aquest comportament és degut a la dependència del nombre de Mach de la inversa de l'arrel de la temperatura. És la variació d'aquesta última la causant d'aquesta inclinació de les oscil·lacions. Nogensmenys, l'afectació és petita degut a que l'ordre de magnitud de la temperatura es manté, de forma que les alteracions en valor no són realment significatives.

A nivell de valors, des de l'inici fins als 40 km els valors del nombre de Mach són de l'ordre de les desenes, iniciant-se en 25, i implicant un comportament de flux hipersònic "alt", motiu pel qual, com es veurà en endavant, el flux de calor serà anormalment elevat. Entorn els 55 km s'entra en el rang de vol hipersònic, comprès entre 5 i 10, i a partir dels 40 km els valors es troben al rang de supersònic. Finalment, s'assoleix el règim subsònic a partir dels 40 km.

Aquesta gràfica és una evident mostra de que, tot i incorporar la capacitat de sustentació al vehicle, és necessari implementar un disseny eminentment orientat a suportar condicions de vol supersòniques extremes.

## 6.7 Número de Reynolds

La progressió del nombre de Reynolds presenta un increment amb el descens altitudinal. Es recorda que la dependència és proporcional a la velocitat i a la densitat, i inversament proporcional a la viscositat dinàmica. El comportament qualitatiu és compartit per la Figura 9 de l'annex 1, la qual representa la densitat vers l'altura. Això representa que la disminució de la velocitat amb l'alçada es veu compensada per les variacions irregulars amb l'alçada de la viscositat dinàmica. En conseqüència, la variable dominant seria la densitat.

A nivell de valors, es parteix de  $5 \cdot 10^5$  i s'arriba a terra amb una xifra pròxima a  $1.6 \cdot 10^7$ . Aquest rang de valors indica un comportament de la capa límit que es genera entorn del vehicle.

## 6.8 Pressió d'estancament

La pressió d'estancament, en comparativa amb la pressió dinàmica, permet avaluar el nivell de compressibilitat del flux. Mentre que la pressió dinàmica creix dels 1000 als  $3000 \text{ N/m}^2$  entre els 80 i els 40 km, la pressió d'estancament ho fa però de forma molt subtil, mantenint-se relativament constant en l'ordre dels milers de  $\text{N/m}^2$ . Per aquest motiu, entre el rang mencionat d'altures el nivell compressibilitat del flux s'incrementa, ja que extreu energia de pressió.

A partir dels 40 km, la pressió dinàmica comença a disminuir en valor, mentre que la pressió d'estancament manté la seva tendència constant fins a iniciar un pronunciat creixement a partir dels 20 km, indicant de forma conseqüent que els efectes de compressibilitat haurien perdut influència. Observi's a la Figura 6f com, per a alçades inferiors a 20 km, el Mach decreix de 1, mostrant la pèrdua d'influència de la compressió.

## 6.9 Entalpia d'estancament

Com s'ha comentat prèviament, l'entalpia d'estancament és indicativa de l'energització del flux. Degut a que en la seva definició matemàtica d'acord a l'expressió (11) apareix un terme quadràtic amb la velocitat, és lògic que s'arrosseguin novament les oscil·lacions en l'altura ja aparegudes anteriorment. D'altra banda, la calor específica de l'aire és aproximadament constant amb l'altura, i com que les fluctuacions de temperatura amb l'alçada no provoquen variacions significatives en l'ordre de magnitud, és el terme de velocitat el dominant per diferència. Concretament, la influència és tal, que a nivell de forma, la corba de l'entalpia d'estancament és pràcticament idèntica a la de velocitat.

## 6.10 Flux de calor al punt d'estancament

Respecte a la transferència de calor i d'acord a l'expressió de Sutton i Graves (12), la qual depèn cúbicament de la velocitat, el tram més crític per a l'aïllament tèrmic el que comprèn des de l'inici fins als 50 km. Per al cas de  $\gamma = 0.1^\circ$  el màxim flux de calor és de  $0.7 \text{ MW/m}^2$ . Per al cas de  $\gamma = 1.0^\circ$  el flux màxim assolit arriba a  $1 \text{ MW/m}^2$ , i per a  $1.4 \text{ MW/m}^2$  el flux de calor s'arriba a  $1.4 \text{ MW/m}^2$ . Aquests dos últims valors són substancialment elevats respecte del menor degut a les oscil·lacions existents en la velocitat.

Es recorda també que el signe negatiu present a les abscisses de la Figura 6j és indicatiu únicament del sentit en el qual es produeix la transferència de calor: en aquest cas l'aturament del fluid fins al repòs (d'acord a la definició de punt d'estancament) provoca un ascens en la temperatura del fluid, originant un gradient tèrmic entre l'exterior que ocasiona la conducció de la calor. Degut a que el flux de calor és molt intens, és requereix un sistema altament aïllant per assegurar la seguretat a la cabina.

## 6.11 Energia dinàmica

L'energia dinàmica és un paràmetre associat a l'energia del flux, i degut a que existeix una dependència cúbica amb la velocitat, és predictable que les oscil·lacions que s'observaran per al valor major de  $\gamma$  seran d'una amplitud considerablement àmplia en relació amb la corba de menor  $\gamma$ . La Figura 6k mostra el comportament comentat.

Es recorda també com l'energia dinàmica depèn de la pressió dinàmica, i en conseqüència de la densitat, motiu pel la progressió recorda en forma a la de Q (veure Figura 6e). Concretament, la corba associada a  $\gamma = 0.1^\circ$  presenta un màxim absolut i relatiu per a una altura de 60 km. Per als altres dos valors de  $\gamma$ , i degut a la presència d'oscil·lacions, la presència d'aquesta forma característica és menys apreciable.

## 7 Conclusions

L'estudi del comportament de les variables que intervenen en la trajectòria de la reentrada de vehicles balístics i sustentadors permet efectuar un anàlisi general de les exigències tecnològiques de la missió en base a les particularitats que s'exposen a continuació.

En quant al cas balístic, s'ha portat a terme un anàlisi de dos reentrades, una de caire general i una altra particularitzada per la càpsula Mercury. En el primer cas, l'estudi de les variables per diferents valors del coeficient balístic ha demostrat que un major valor implica que el vehicle viatja amb velocitats més uniformes durant les altes capes de l'atmosfera caracteritzades per una baixa densitat i en conseqüència, un reduït drag. No obstant, el fet de disposar d'un major  $\beta$  també implica que el màxim de desacceleració que experimenta el vehicle es produeix per altures més reduïdes, bàsicament pel fet que aquest es més fuselat i es veu menys afectat per la fricció, el que provoca que arribi a les capes més denses de la zona més baixa i hagi de reduir més dràsticament la seva velocitat. Conseqüentment, un major coeficient balístic mostra que el rang abastat pel vehicle es major i el temps de reentrada és menor.

Pel que fa a la càpsula Mercury, s'observa que aquesta mostra un comportament de les seves variables en consonància amb el cas de menor coeficient balístic tractat per la reentrada balística general. Realitzant una comparació en quant a valors es refereix, és lògic que la màxima desacceleració obtinguda per la càpsula Mercury, d'uns 9 g per  $\beta = 100$ , sigui unes 3 vegades inferior a la determinada pel cas de  $\beta = 100$ . Òbviament, la càpsula Mercury també proporciona un menor rang i major temps d'entrada, entre d'altres, donat el seu major coeficient balístic.

En referència a l'anàlisi de la reentrada sustentadora del Space Shuttle, cal destacar la important presència d'oscil·lacions que es propaguen de forma extensiva (i en ocasions perillosa) sobre les altres paràmetres de rellevància. Observi's com existeix una molt elevada sensibilitat a les variacions de  $\gamma$ . El motiu es deu a que, al existir una força de sustentació normal a la trajectòria, variacions molt subtils en l'angle de descens poden generar augmentos en el mòdul del *lift* que desemboquin en augmentos en altura, interrompent el descens, i en el pitjor dels casos, retornant el vehicle a l'exterior de l'atmosfera.

No obstant, en cas d'assolir un valor de  $\gamma$  petit, un dels avantatges més important és la substancial reducció en la desacceleració que pateix el vehicle, passant de valors màxims d'entorn a 20 g per a l'entrada balística a valors d'entorn a la unitat per a l'entrada sustentador. Això suposa un important avanç, tant a nivell estructural degut a la reducció de càrregues, com a nivell de seguretat per a la tripulació, degut a que l'acceleració que suporten és molt menor.

Un altre aspecte on s'assoleix una parcial millora és a nivell del flux de calor al punt d'estancament: per a l'entrada balística s'assoleixen valors de  $35 \text{ MW/m}^2$ , mentre que a l'entrada sustentadora s'assoleixen valors de  $\dot{q}$  d'entorn la unitat. Tot i que el flux de calor és més intens, no suposa una millora absoluta degut a que el temps de descens s'incrementa en un ordre de 10, de forma que la energia calorífica total transferida pot esdevenir major, obligant a la implementació d'un mecanisme més eficaç de protecció i dissipació tèrmica.

Es comprova, doncs, com l'entrada balística, si bé és substancialment més ràpida, de forma que és possible la incorporació de protecció tèrmica ablativa, posa més en risc la integritat de la tripulació degut a que els valors d'acceleració són considerablement elevats. La reentrada sustentadora suposa una solució eficaç a aquest últim problema, però el temps de vol és superior, i en conseqüència el sistema d'aïllament tèrmic ha de ser perfeccionat d'acord a les noves condicions.

## Referències

- [1] Adams, J. C. (2003). *Atmospheric Re-Entry*. Arnold Engineering Development Center.
- [2] Federal Aviation Administration. (2018). *Returning from Space: Re-entry*. Disponible on-line a [https://www.faa.gov/about/office\\_org/headquarters\\_offices/avs/offices/aam/cami/library/online\\_libraries/aerospace\\_medicine/tutorial/media/III.4.1.7\\_Returning\\_from\\_Space.pdf](https://www.faa.gov/about/office_org/headquarters_offices/avs/offices/aam/cami/library/online_libraries/aerospace_medicine/tutorial/media/III.4.1.7_Returning_from_Space.pdf)
- [3] Gallais, P. (2007) *Atmospheric Re-Entry Vehicle Mechanics*. Berlín, Alemanya. Springer.
- [4] NASA, National Oceanic & Air Force. (1976). *U.S. Standard Atmosphere, 1976*. Washington, DC, United States. Disponible on-line a <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539.pdf>
- [5] Haire, E., Roche, M., Lubich, C. (1989) *Lecture Notes in Mathematics 1409: The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Berlín, Alemanya. Springer.
- [6] Heat and Mass Transfer Technological Center (CTTC)-UPC. (2020). *Formulae for the resolution of fluid dynamics and heat and mass transfer problems*. Terrassa.
- [7] Clancy, L. J. (1975) *Aerodynamics*. Pitman Publishing.

## Annexos

### Annex 1: Evolució de propietats termofísiques amb l'alçada

En base a [4] i a les expressions determinades a la secció 2.2, s'han elaborat les següents gràfiques que il·lustren l'evolució amb l'alçada de certes propietats termofísiques d'utilitat per a l'anàlisi de resultats.

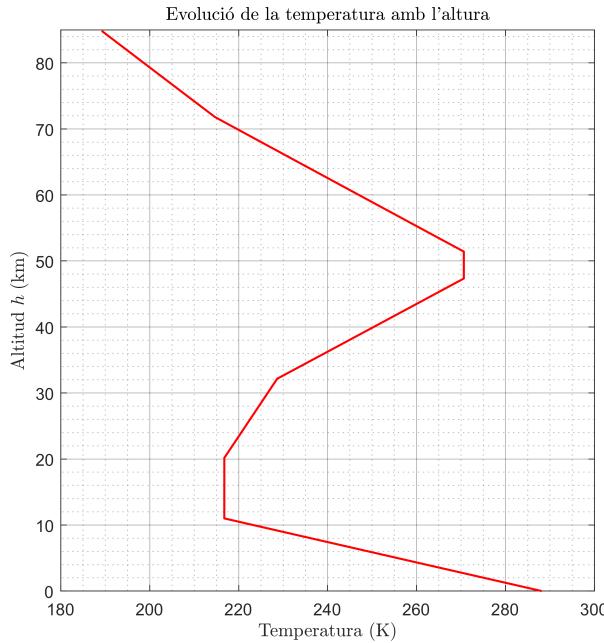


Figura 7: Evolució de la temperatura amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

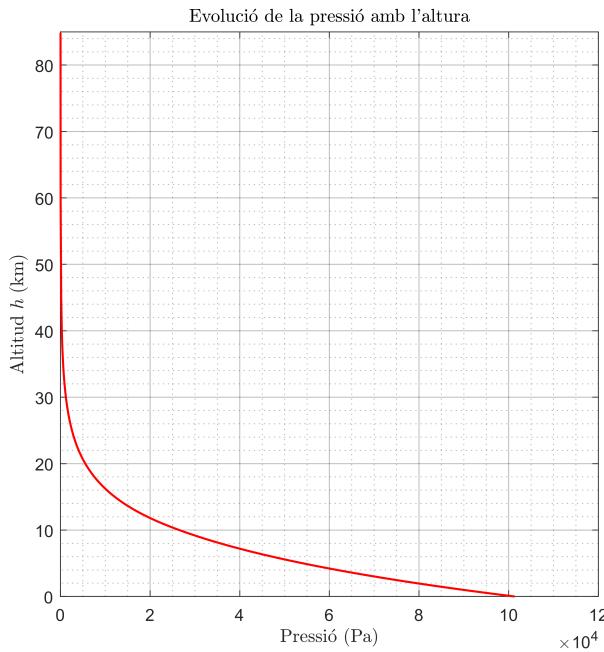


Figura 8: Evolució de la pressió amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

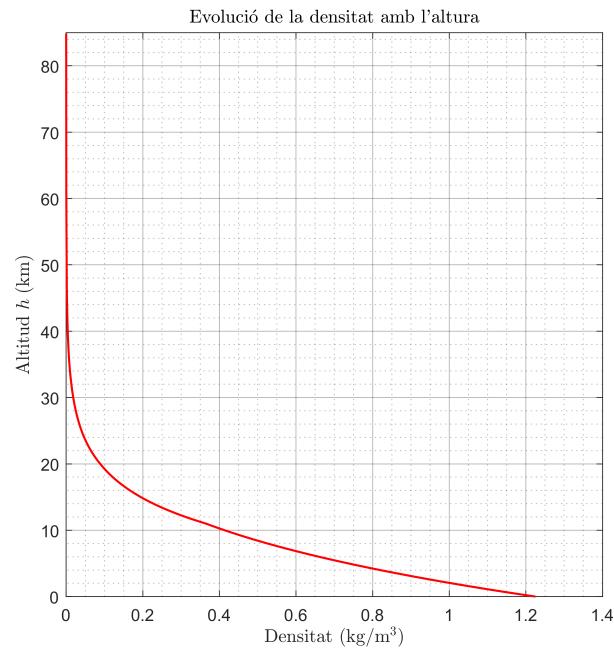


Figura 9: Evolució de la densitat amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

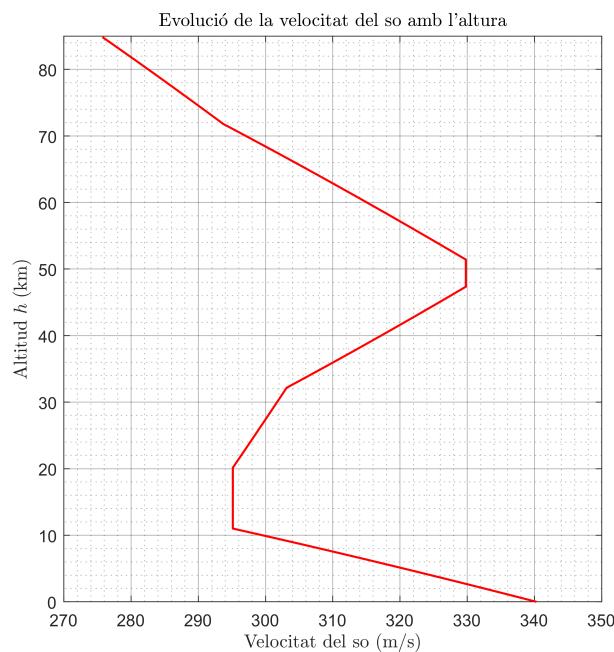


Figura 10: Evolució de la velocitat del so amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

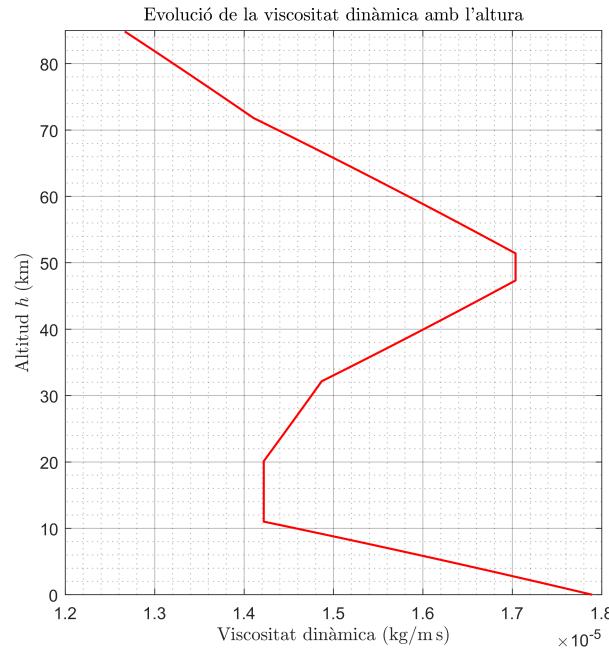


Figura 11: Evolució de la viscositat dinàmica amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

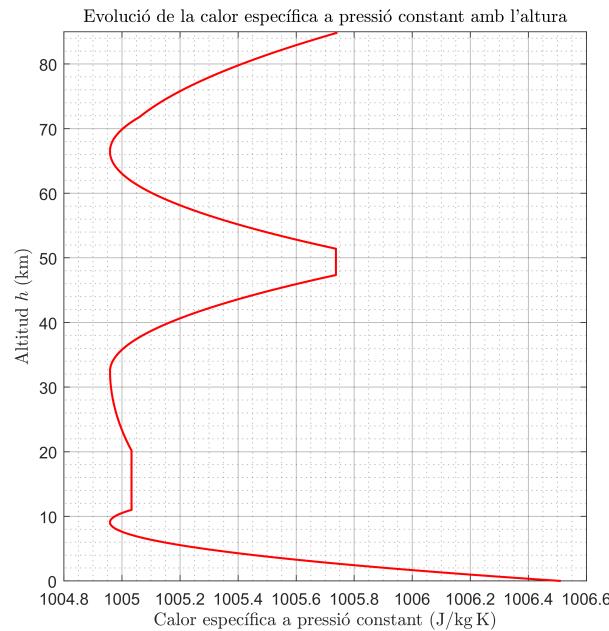


Figura 12: Evolució de la calor específica a pressió constant amb l'altura d'acord d'atmosfera estàndard U.S. 1976.

## Annex 2: Evolució de l'angle $\gamma$ amb l'alçada

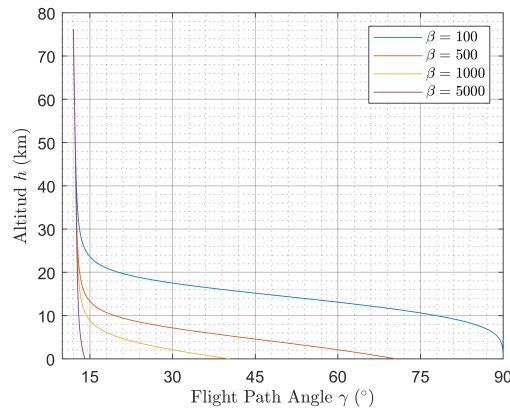


Figura 13: Evolució de l'angle  $\gamma$  amb l'alçada (reentrada balística)

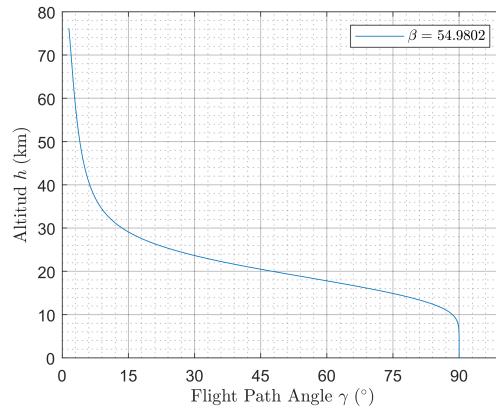


Figura 14: Evolució de l'angle  $\gamma$  amb l'alçada (reentrada balística, càpsula Mercury)

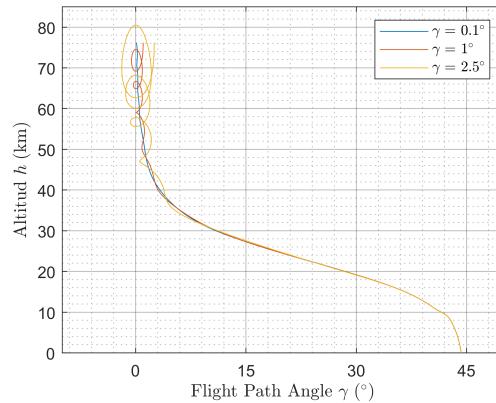


Figura 15: Evolució de l'angle  $\gamma$  amb l'alçada (reentrada sustentadora)