Lógica difusa en ingeniería civil. Parte 3

Entre la lógica clásica y la lógica difusa. Sistemas con técnicas de lógica difusa. Extensión o mapeo.

Entre la lógica clásica y la lógica difusa

Referencia

Timothy J. Ross (University of New Mexico, USA). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. McGraw-Hill, Inc. International Edition. 1995.

Definido el universo como el espacio de toda la información disponible para el tratamiento de un problema determinado, se pueden inscribir en él algunos eventos de interés para ser estudiados. Este universo se puede representar como X en la Figura 18.

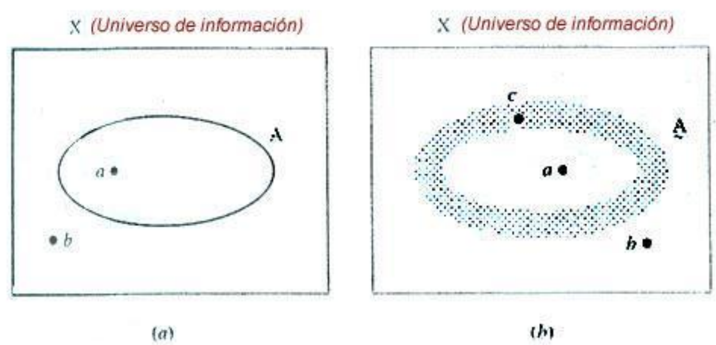

Figura 18. Diagramas de (a) conjuntos clásicos y (b) conjuntos difusos

En la Figura 18a, por ejemplo, el ***conjunto clásico*** A al interior de X, tiene una frontera definida o precisa y hay certeza de los elementos contenidos en él (como en el caso de *a* en la misma figura) o de aquellos no incluidos (como en el caso de *b* al exterior de A).

En la Figura 18b, de otra parte, la frontera del ***conjunto difuso*** A es imprecisa o ambigua. Hacia el centro, el elemento *a* es claramente un miembro integral del conjunto. También, el elemento *b* es claramente un elemento fuera del conjunto difuso. Sin embargo, la pertenencia del punto *c* en la frontera resulta ambigua. Entonces, si la *pertenencia* de un elemento es completa (como el punto *a*) es representada por el número 1, y la no pertenencia (como el punto *b*) por 0, ello conduce a que la pertenencia de un punto como *c* debe estar en el intervalo [0,1]. Así, en la medida que el punto se mueve hacia el centro (en el tramo no achurado), se incrementará su valor de pertenencia hacia 1. Y si *c* se mueve hacia afuera su valor disminuye a 0.

Conjuntos clásicos

Se define un universo de información X, a la colección de objetos que tienen características comunes. Los elementos pueden ser discretos o continuos. Un atributo útil de conjuntos y universos es la métrica conocida como cardinalidad o ***número cardinal***. El total de elementos en un universo X es llamado su número cardinal, n_x. Los universos discretos tienen un número cardenal finito, mientras que los universos continuos tienen una cardinalidad infinita.

Los ***conjuntos*** son colecciones de elementos dentro del universo, y la colección de elementos dentro de conjuntos es llamada ***subconjunto***. La colección de todos los elementos en el universo es también llamada el ***conjunto total***.

Las siguientes son notaciones comunes en conjuntos clásicos, por ejemplo para los conjuntos A y B.

$$\begin{aligned} &x \in X \Longrightarrow x \; pertenece \; a \; X \\ &x \in A \Longrightarrow x \; pertenece \; a \; A \\ &x \notin A \Longrightarrow x \; no \; pertenece \; a \; A \end{aligned}$$

También para dos conjuntos A y B del universo X.

$$\begin{aligned} &A \subset B \Longrightarrow A \; está \; totalmente \; contenido \; en \; B \; (\; si \; x \in A, entonces \; x \in B) \\ &A \subseteq B \Longrightarrow A \; está \; contenido \; en \; o \; es \; equivalente \; a \; B \\ &A = B \Longrightarrow A \subseteq B \; y \; B \subseteq A \end{aligned}$$

Se define al conjunto *nulo* Φ como aquel que no contiene elementos.

Todos los posibles conjuntos de X constituyen un conjunto especial denominado ***conjunto potencia*** P(X).

Considérese el siguiente ejemplo. El universo X contiene tres elementos *X={a,b,c}*. Entonces su número cardinal es $n_x=3$. El conjunto potencia y su cardinalidad resultan:

$$\begin{aligned} &P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \\ &n_{P(X)} = 2^{n_x} = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Obsérvese que si la cardinalidad de un universo es infinita, la del conjunto potencia es también infinita.

♦ Operaciones en conjuntos clásicos

Las operaciones básicas de dos conjuntos A y B del universo X son las siguientes.

$$\begin{aligned} &Unión && A \cup B = \{x | x \in A \; or \; x \in B\} \\ &Intersección && A \cap B = \{x | x \in A \; and \; x \in B\} \\ &Complemento && \bar{A} = \{x | x \notin A, x \in X\} \\ &Diferencia && A|B = \{x | x \in A \; and \; x \notin B\} \end{aligned}$$

♦ Propiedades de los conjuntos clásicos

Se identifican las siguientes.

$$\begin{aligned} &Conmutatividad && A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \\ &Asociatividad && A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ &Distributividad && A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ & && A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &Identidad && A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup X = X \quad A \cap X = A \\ &Transitividad && Si \; A \subseteq B \subseteq C \; entonces \; A \subseteq C \end{aligned}$$

♦ Mapeo de conjuntos clásicos a funciones

El mapeo es un importante concepto que permite relacionar formas teoréticas de conjuntos a representaciones teoréticas de funciones. En general, se usan elementos o conjuntos de un universo para mapearlos a elementos o conjuntos en otro universo.

Sean X y Y dos universos diferentes. Si un elemento *x* (en X) corresponde a un elemento *y* (en Y), se dice que X se ha mapeado en Y

$$f: X \rightarrow Y$$

El mapeo conduce a la función característica definida como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

La función expresa la *pertenencia* en el conjunto A del elemento *x* en el universo. Esta idea de la pertenencia corresponde al mapeo de un elemento *x* en el universo X a otro de dos elementos (0 o 1) en el universo Y.

Para cualquier conjunto A definido en el universo X, se define una función teorética[1] llamada un *conjunto valor*, V(A), bajo el mapeo de la función característica x. Por convención, el conjunto nulo Φ tiene asignado el valor de pertenencia 0, y el conjunto total X el valor de pertenencia 1.

> Continuando con el ejemplo de un universo con tres elementos, *X={a,b,c}*, deseamos mapear los elementos del conjunto potencia P(X), al universo Y que consiste de solamente dos elementos (los de la función característica).
>
> $$Y = \{0,1\}$$
>
> Como se indicó, los elementos del conjunto potencia son
>
> $$P(X) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\right\}$$
>
> Así, los elementos del conjunto valor V(A) correspondientes al mapeo resultan
>
> $$V\{P(X)\} = \left\{\{0,0,0\}, \{1,0,0\}, \{0,1,0\}, \{0,0,1\}, \{1,1,0\}, \{0,1,1\}, \{1,0,1\}, \{1,1,1\}\right\}$$
>
> El tercer elemento del conjunto potencia P(X) corresponde a *b*. Para este subconjunto no hay *a*, así que el 0 va en la primera posición del triplete; de ahí, sigue *b* al que le corresponde el valor 1 en la segunda posición; y como no hay *c*, le corresponde el valor 0 a la tercera posición. Se obtiene así {0,1,0}.

- **Operador máximo y mínimo**

Se define ∨ y ∧ como operadores máximo y mínimo, respectivamente. Resultan las siguientes operaciones.

$$\begin{array}{ll} \textit{Unión} & A \cup B \rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\{(\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\ \textit{Intersección} & A \cap B \rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} \\ \textit{Complemento} & \bar{A} = \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) \\ \textit{Contención} & A \subseteq B \rightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \end{array}$$

Conjuntos difusos

Un conjunto difuso es un conjunto que contiene elementos que diversos grados de pertenencia en el conjunto. Los elementos de un conjunto difuso son mapeados en un universo de *valores de pertenencia* usando una función teorética. Los elementos de esta función mapean los elementos del conjunto difuso A a un valor numerado en el intervalo 0 a 1. Si un elemento en el universo, como *x* es un miembro del conjunto difuso A, entonces el mapeo está dado por

---

[1] Basada en el conocimiento, no en la acción o en la práctica.

$$\mu_A(x) \in [0,1]$$

Tal como se indica en la Figura 19a.

- **Notación de conjuntos difusos**

La notación que utiliza la referencia es la siguiente. Para X, como un universo discreto y finito, el conjunto difuso se presenta como

$$A = \left\{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \cdots\right\} = \left\{\sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}\right\}$$

No debe entenderse la línea horizontal como una división (se trata de una separación entre la pertenencia en el numerador, con el elemento respectivo en el denominador). El signo más, +, debe entenderse como una colección de datos, al igual que el signo de sumatoria (no se trata de una suma algebraica).

Cuando el universo X es continuo e infinito, el conjunto difuso A se escribe como

$$A = \left\{\int \frac{\mu_A(x)}{x}\right\}$$

En esta notación, el signo de integral no indica una integral algebraica sino una forma de expresar la unión de una función teorética para variables continuas.

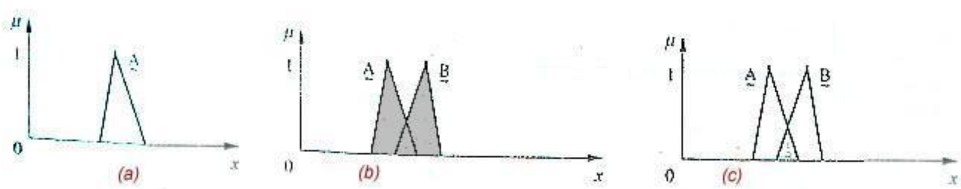

Figura 19. (a) Función de pertenencia, (b) unión de dos conjuntos, y (c) intersección de dos conjuntos

- **Operaciones de conjuntos difusos**

Considérese los conjuntos difusos A, B, y C en el universo X. También un elemento *x* en el universo. Se definen las siguientes funciones.

$$\begin{aligned}
&Unión && \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\
&Intersección && \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\
&Complemento && \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)
\end{aligned}$$

Pueden observarse las operaciones de las Figura 19b y 19c.

Cualquier conjunto difuso A en un universo X es un subconjunto de ese universo. También, el valor de pertenencia de cualquier elemento *x* en el conjunto nulo Φ es 0, y el valor de pertenencia de *x* en el universo X es 1. Note que el conjunto nulo Φ y el conjunto total no son difusos. Estas ideas se expresan como:

$$\begin{aligned}
&A \sqsubseteq X \Rightarrow \mu_A(x) \le \mu_X(x) \\
&Para\ todo\ x \in X, \mu_\emptyset(x) = 0 \\
&Para\ todo\ x \in X, \mu_X(x) = 1
\end{aligned}$$

La colección de todos los conjuntos difusos y subconjuntos difusos en X es designada como el conjunto difuso potencia P(X). Basado en el hecho de que todos los conjuntos difusos se sobreponen, es claro que la cardinalidad es infinita.

$$n_{P(X)} = \infty$$

También se cumple:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Sistemas con técnicas de lógica difusa

Componentes

El sistema se plantea en tres bloques asociados también a los procesos para usar las técnicas de lógica difusa. Son los bloques de difusión, de inferencia y de desdifusión.

Es importante saber de las entradas y salidas del sistema. Las primeras están conformadas por las variables que son tomadas en cuenta en la representación que pretende el sistema. La salida es un resultado en concreto (no difuso).

Los componentes del sistema se relacionan directamente con estas entradas y salidas.

- El primer bloque, denominado ***bloque difusor***, comprende tanto tener claras las entradas, como presentar adecuadamente las variables como conjuntos difusos y sus correspondientes funciones de pertinencia. Mostrar la difusión.
- El ***mecanismo de transferencia*** traslada el conjunto difuso de las entradas a su correspondiente conjunto de salidas. Es importante aclarar que el nuevo conjunto también es difuso. Esta característica se estudia como ***extensión o mapeo***.
- Como quiera que las decisiones deben adoptarse sobre la base de conjuntos concretos (no difusos), este tercer bloque, llamado ***desdifusor***, está encargado de transformar el conjunto difuso de salida a un conjunto concreto, preciso.

Extensión o mapeo

Principio de extensión

Una relación simple entre una variable independiente y otra dependiente corresponde a un proceso de una entrada única y una sola salida como se muestra en la Figura 20. Esta relación se expresa en la forma *y=f(x)*.

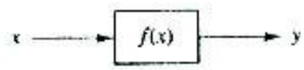

Figura 20.
Mapeo simple de una sola entrada y una sola salida

Si bien esta relación se conoce para el caso de la aritmética convencional, la inquietud es su extensión al caso de variables y conjuntos difusos.

Extensión en conjuntos difusos

Considérese dos universos X y Y, y una transformación o mapeo funcional del tipo *y=f(x)*. También consideremos en el universo X una colección de elementos *x* que integran el conjunto difuso A. La imagen del conjunto difuso A en X, bajo el mapeo *f*, será también difusa con la designación de conjunto difuso B y corresponderá al mapeo de tipo *B=f(A)*.

Las funciones de pertenencia que describen A y B son definidas en el universo del intervalo unitario [0,1] y para el caso de estos conjuntos difusos resultan:

$$\mu_B(y) = \underbrace{\bigvee}_{f(x)=y} \mu_A(x)$$

El uso de un ***vector difuso*** ayuda al cálculo de estas operaciones. Este vector difuso contiene a los valores de pertenencia. Así, si el conjunto difuso A contiene *n* elementos en el universo X:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Y el conjunto difuso B contiene *m* elementos en Y, como:

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

El arreglo de funciones de pertenencia se expresa en la siguiente forma vectorial:

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, \dots, a_n\} = \{\mu_A(x_1), \dots, \mu_A(x_n)\} = \{\mu_A(x_i)\} \quad para\ i = 1,2, \dots, n$$
$$\boldsymbol{b} = \{b_1, \dots, b_m\} = \{\mu_B(y_1), \dots, \mu_B(y_m)\} = \{\mu_B(y_j)\} \quad para\ j = 1,2, \dots, m$$

La imagen del conjunto difuso A puede ser determinado a través del uso de la operación matricial compuesta:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \circ R$$

Aquí, R es una matriz de relación difusa *nxm* del tipo:

$$R = [r_{ij}]$$

En donde se relacionan los valores x_i en los renglones, con los valores y_j en las columnas.

Transformación o mapeo difuso

El mapeo existe desde un elemento *x* en el universo X *(xϵX)* a un conjunto B en el universo Y del conjunto potencia P(Y). Tal mapeo es denominado un mapeo difuso *f*.

Si X y Y son universos finitos, el mapeo difuso puede ser descrito como una relación difusa, R, en la forma que se ilustra en el siguiente ejemplo:

> Supóngase que se tiene un mapeo difuso *f* dado por la siguiente relación difusa R:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1.4 & 1.5 & 1.6 & 1.7 & 1.8 \end{array} \; (\mathrm{m}) \\
\underset{\sim}{R} = & \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 40 \; (\mathrm{kg}) \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \end{array}
\end{array}
$$

Esta relación representa el mapeo difuso entre la longitud y la masa de artículos en prueba para el espacio. El mapeo es difuso por las incertidumbres de la masa en el espacio y las restricciones de volumen de almacenamiento. Supóngase un experimento particular cuyos requerimientos específicos de masa no han sido determinados. Para fines de planeamiento de la masa (en kg) considerada una variable difusa se considera la siguiente función de pertenencia, y de ahí su correspondiente vector difuso **a**:

$$\underset{\sim}{A} = \left\{ \frac{0.8}{40} + \frac{1}{50} + \frac{0.6}{60} + \frac{0.2}{70} + \frac{0}{80} \right\} \mathrm{kg}$$

$$\underset{\sim}{a} = \{0.8, 1, 0.6, 0.2, 0\} \mathrm{kg}.$$

La imagen **b** puede ser encontrada usando el principio de extensión o mapeo difuso

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \circ R$$

Dando como resultado

$$\underset{\sim}{b} = \{0.8, 1, 0.8, 0.6, 0.2\} \mathrm{m}$$

Este vector expresa la longitud difusa del objeto en estudio.