Series Temporales

Tratamiento Inteligente de Datos
Master Universitario en Ingeniería Informática

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Gabriel Navarro (*gnavarro@ugr.es*, *gnavarro@decsai.ugr.es*)

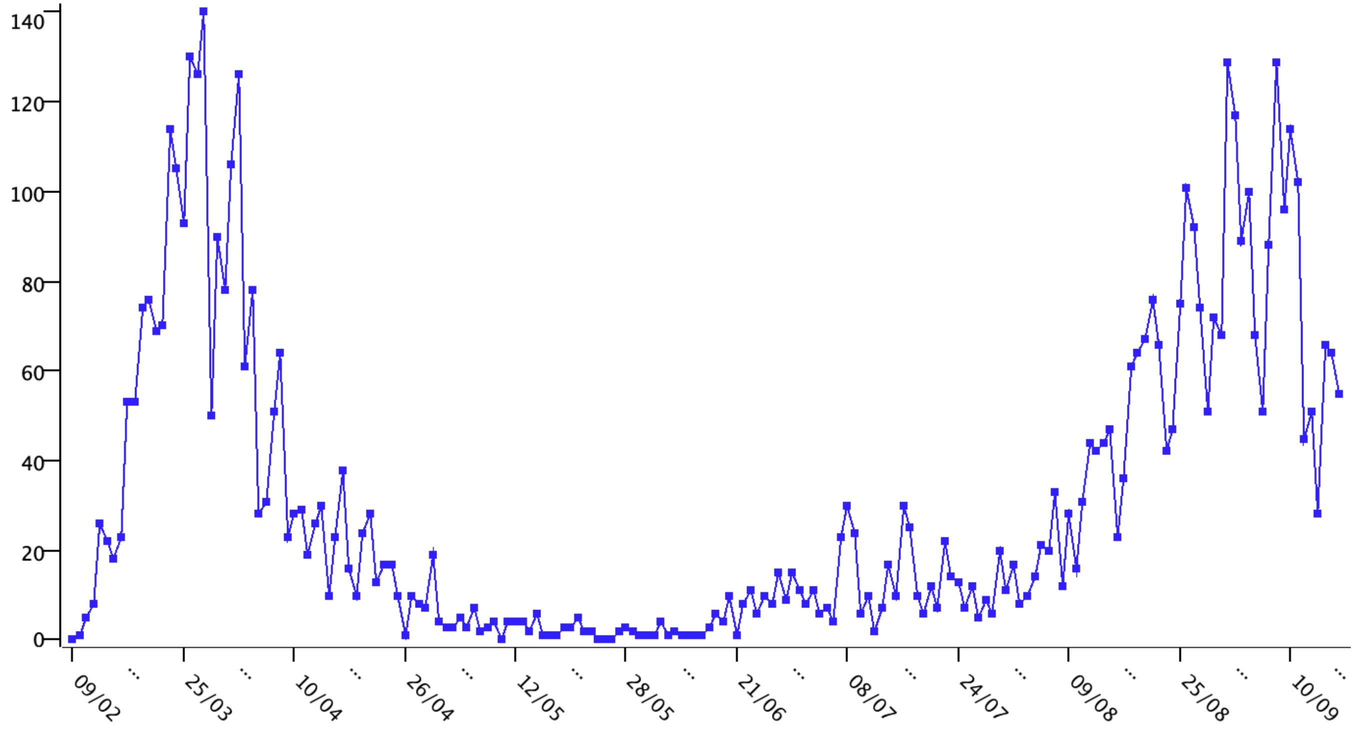
Objetivos

- Entender el concepto de serie temporal, sus aplicaciones y representaciones más comunes
- Conocer el modelo clásico de descomposición aditivo determinista de una serie temporal
- Conocer y saber aplicar algunos métodos de suavizado/alisado de series temporales como son las medias móviles y alisados exponenciales
- Conocer modelos mas avanzados como AR, MA, ARMA y ARIMA

Índice

Concepto de serie temporal

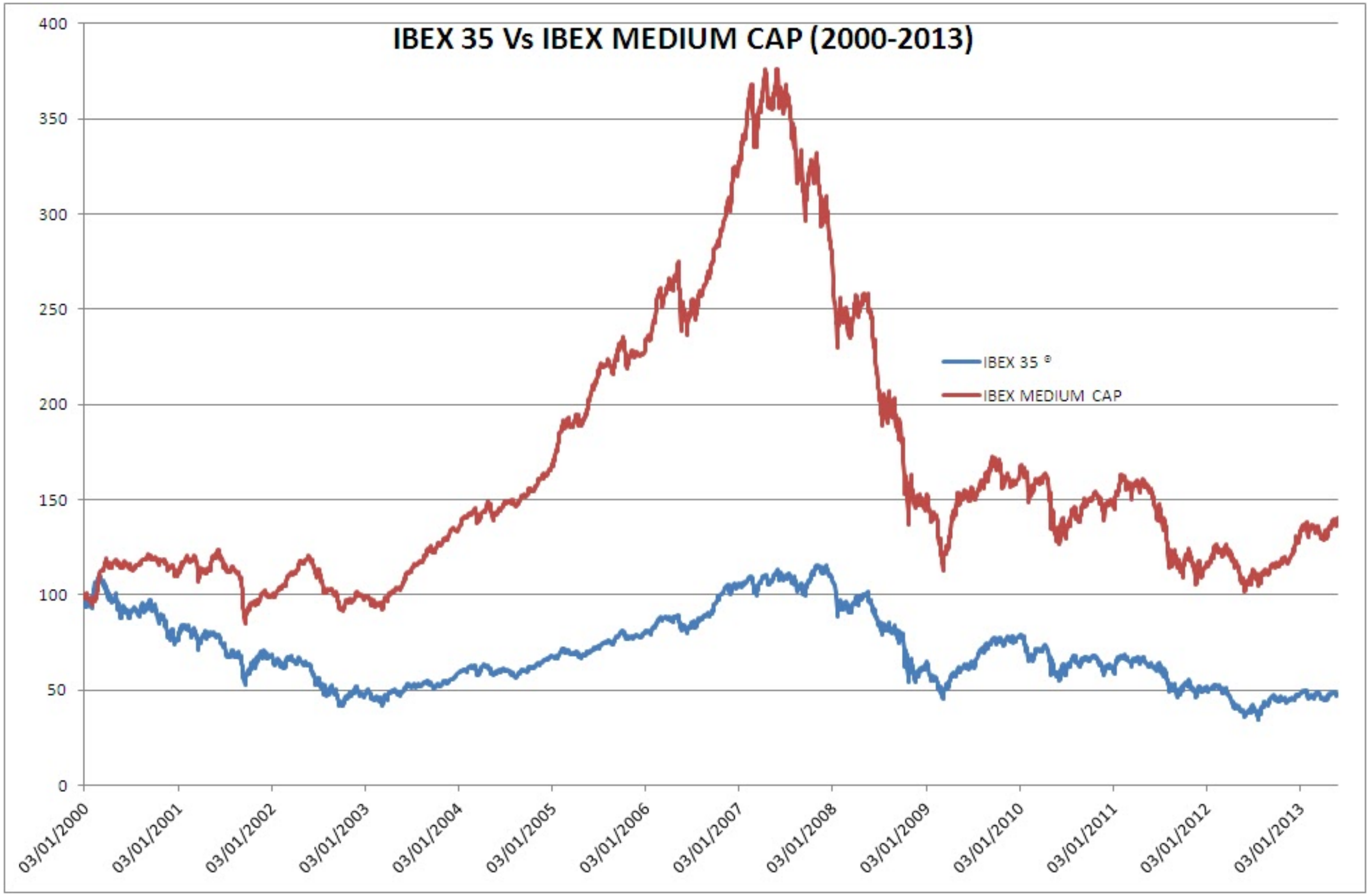
En su sentido más general, una serie temporal es una secuencia de valores que cambian con el tiempo



PCR positivas en la provincia de Granada por fecha de diagnostico

Concepto de serie temporal

En su sentido más general, una serie temporal es una secuencia de valores que cambian con el tiempo



Concepto de serie temporal

Preguntas evidentes:

- ❑ ¿Para qué se utiliza esto?
- ❑ ¿Qué buscamos con su estudio?

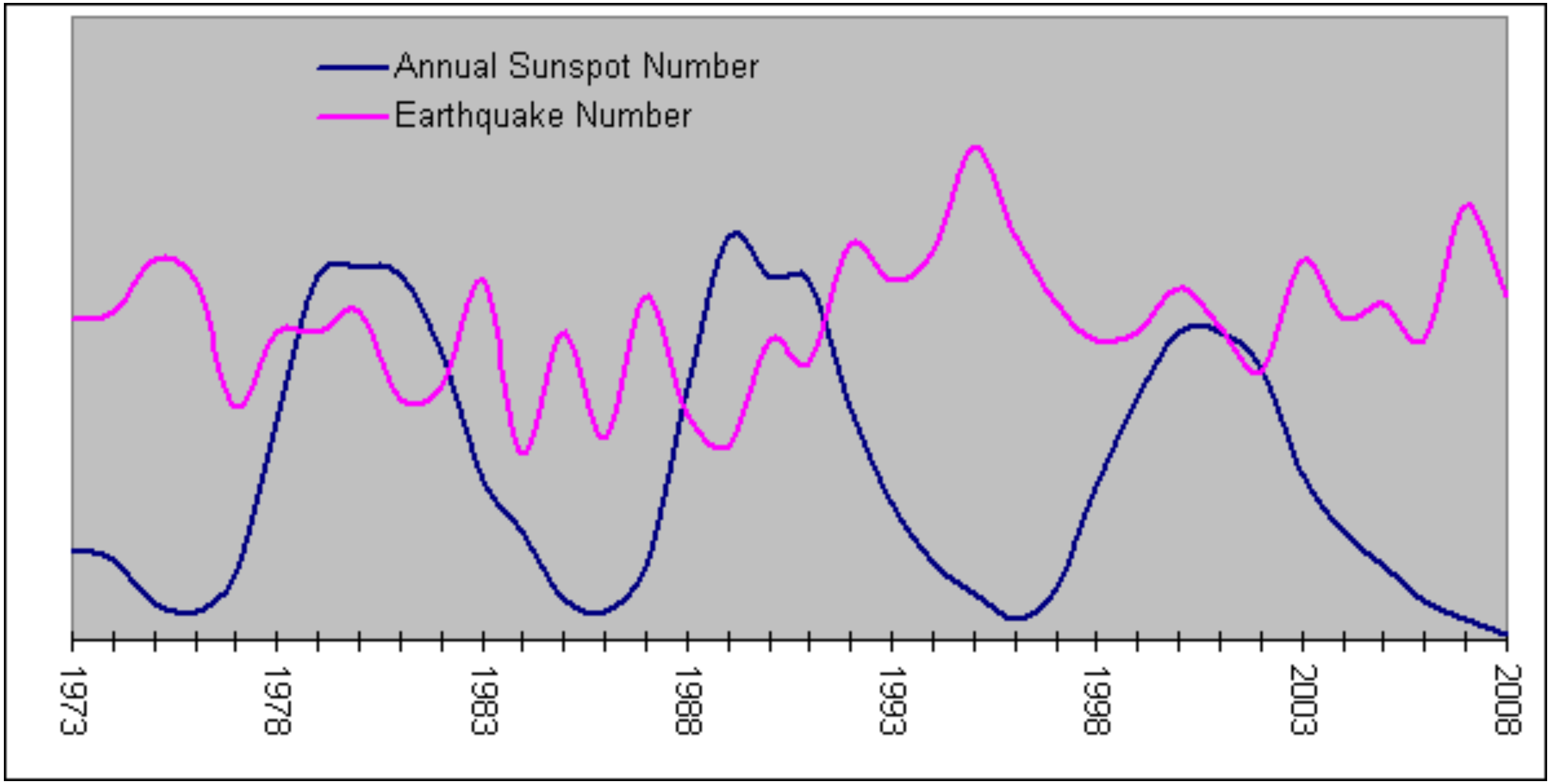
Respuesta:

- ❑ Para predecir valores futuros
- ❑ Predecir tendencias (aumenta de valor, disminuyen)
- ❑ Para encontrar datos faltantes (missing values)

Es una tarea predictiva

Concepto de serie temporal

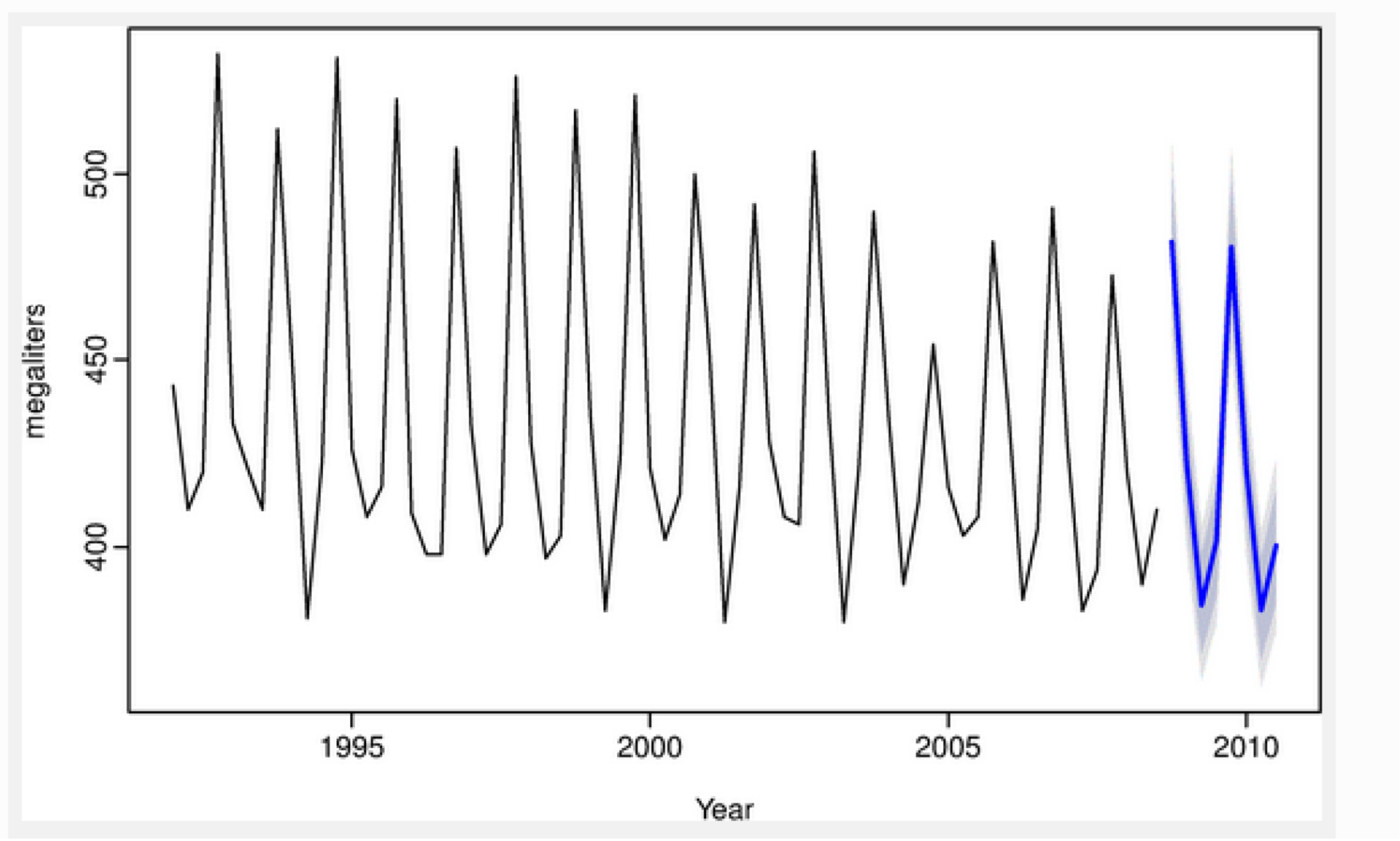
- Para predecir valores futuros



¿Qué actividad sísmica habrá en 2015?

Concepto de serie temporal

- Para predecir valores futuros



Predicción del consumo de cerveza

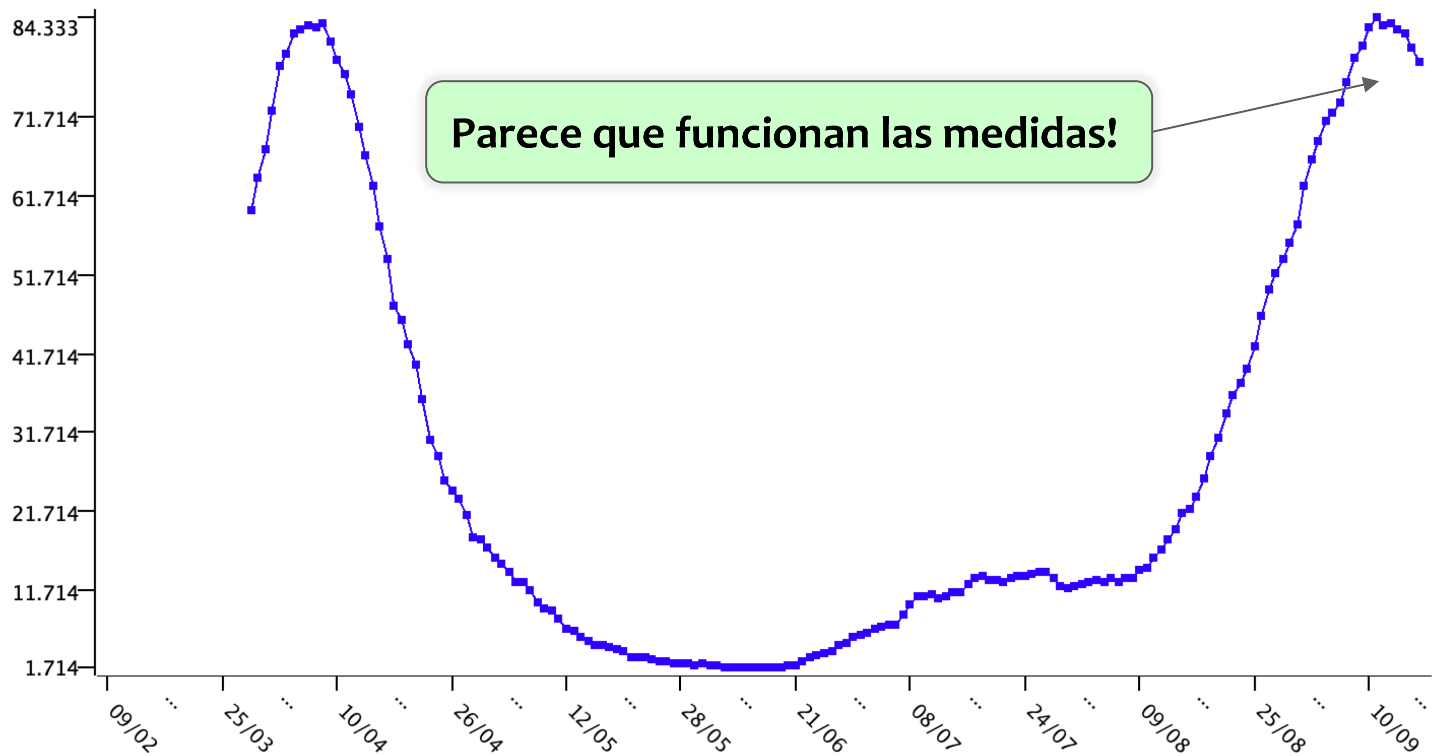
Concepto de serie temporal

- Predecir tendencias (aumenta de valor, disminuye)

Parece interesante comprar acciones de esta empresa

Concepto de serie temporal

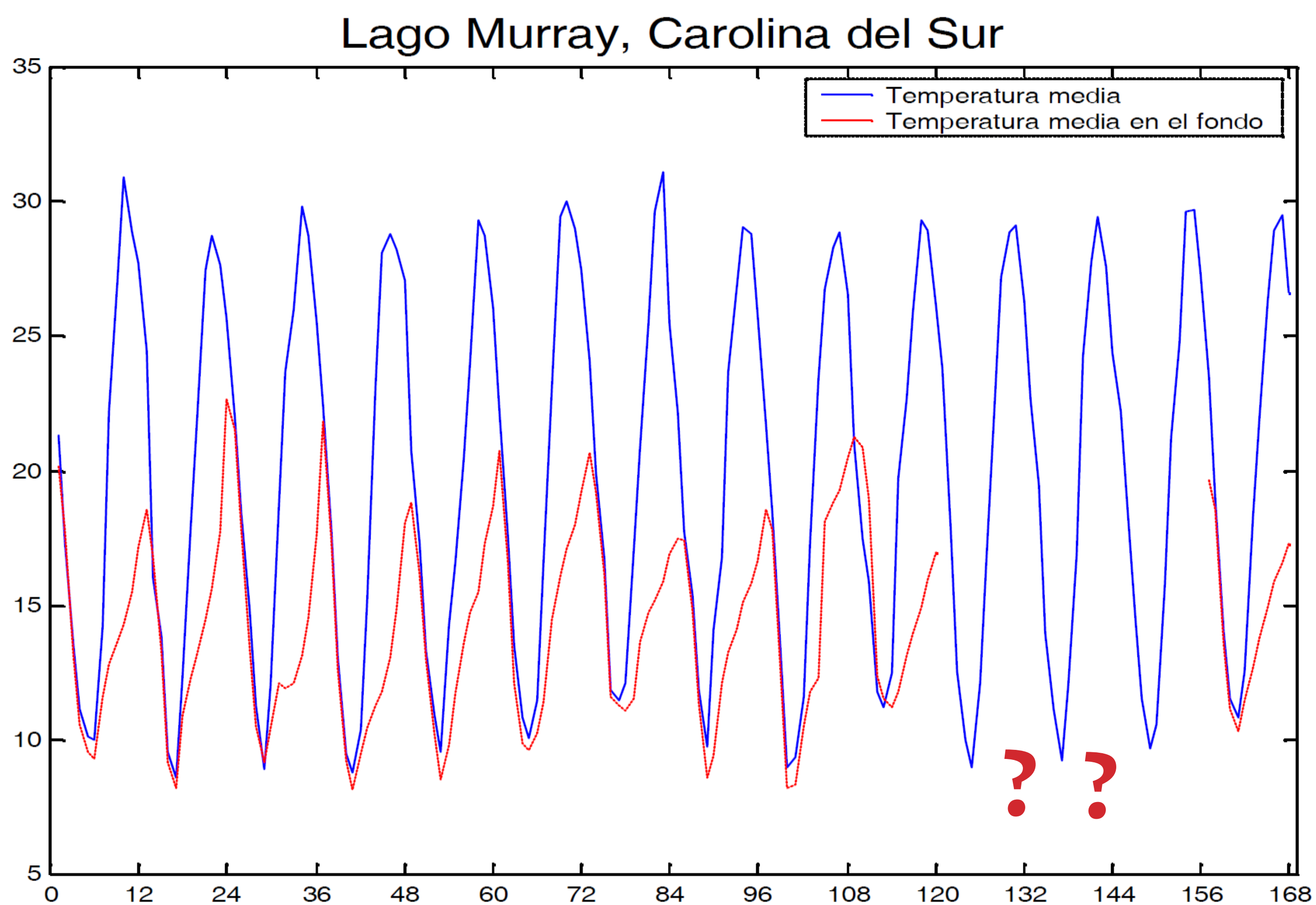
- Predecir tendencias (aumenta de valor, disminuye)



PCR positivas (media móvil 21 días) en la provincia de Granada por fecha de diagnostico

Concepto de serie temporal

- Para encontrar datos faltantes (missing values)



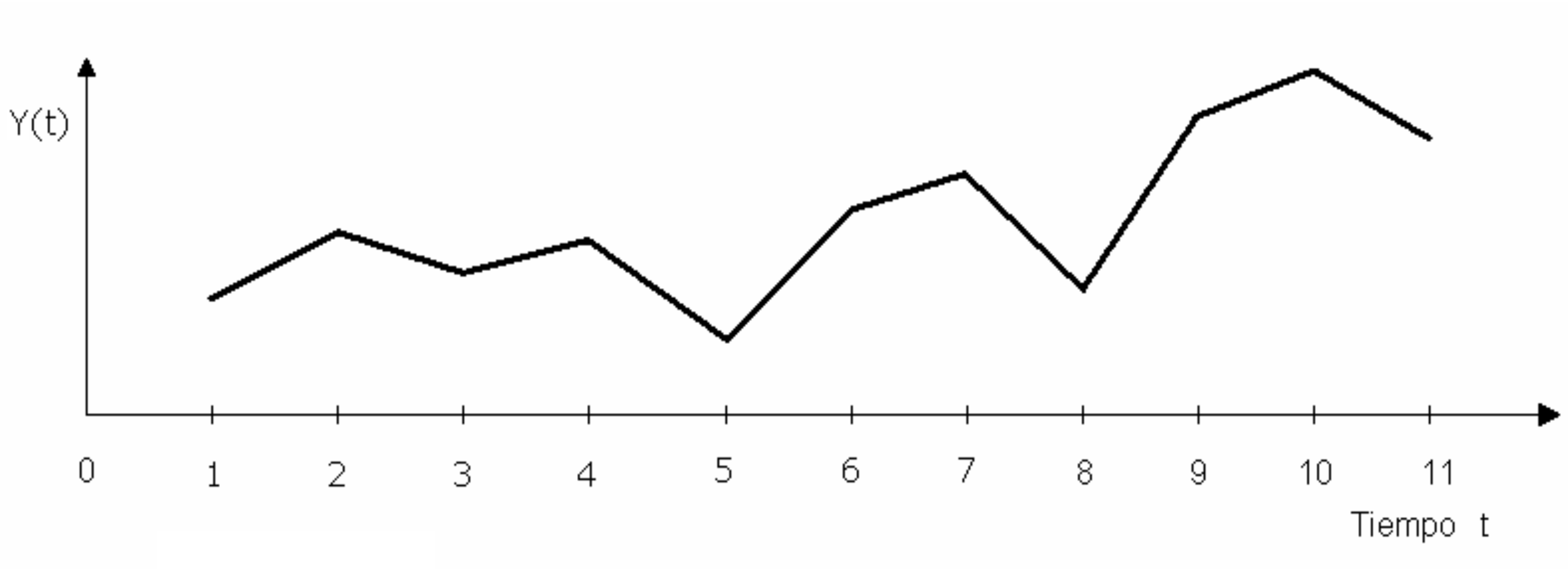
Concepto de serie temporal

Más ejemplos de aplicación

- Economía. producto interior bruto anual, tasa de inflación, tasa de desempleo,...
- Demografía. nacimientos anuales, mortalidad, tasa de dependencia,...
- Meteorología. temperaturas máximas, medias o mínimas, precipitaciones diarias,...
- Medio ambiente. concentración media mensual de nitratos en agua, alcalinidad media anual del suelo, emisiones anuales de CO_2,...
- ...

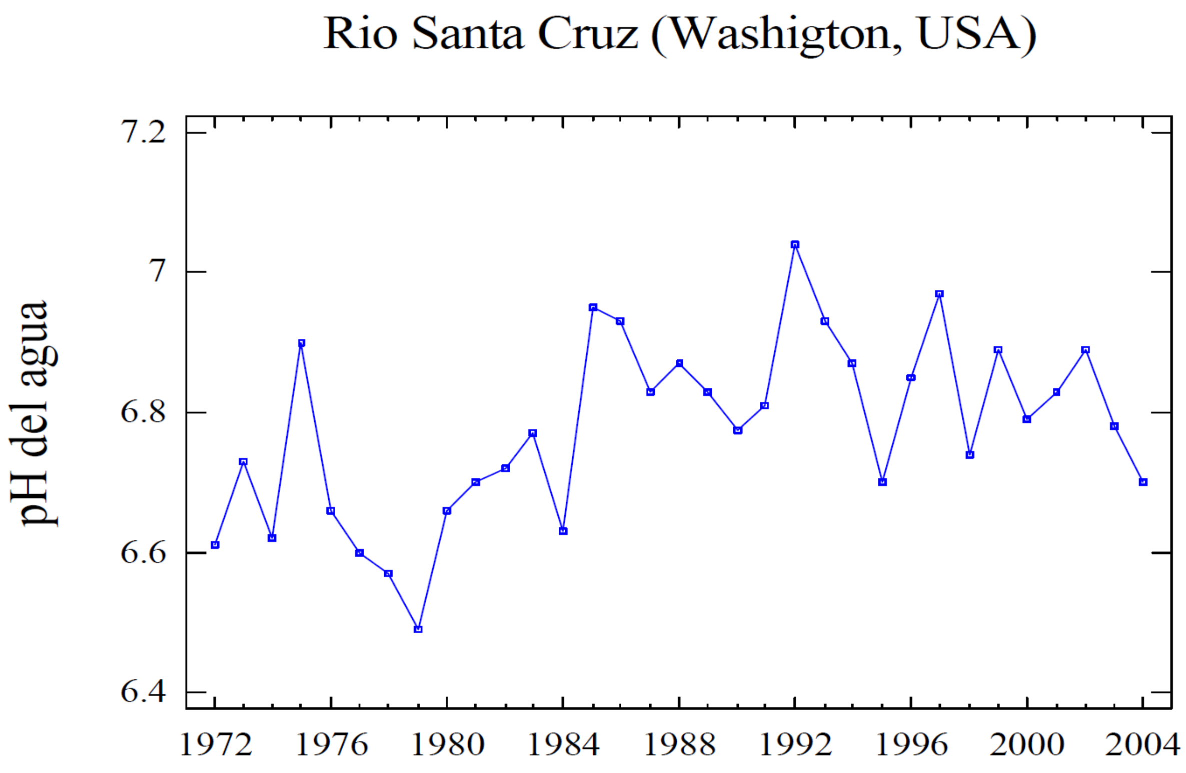
Concepto de serie temporal

Por muy simple que parezca, un paso importante en el análisis de series de tiempo consiste en realizar su gráfica



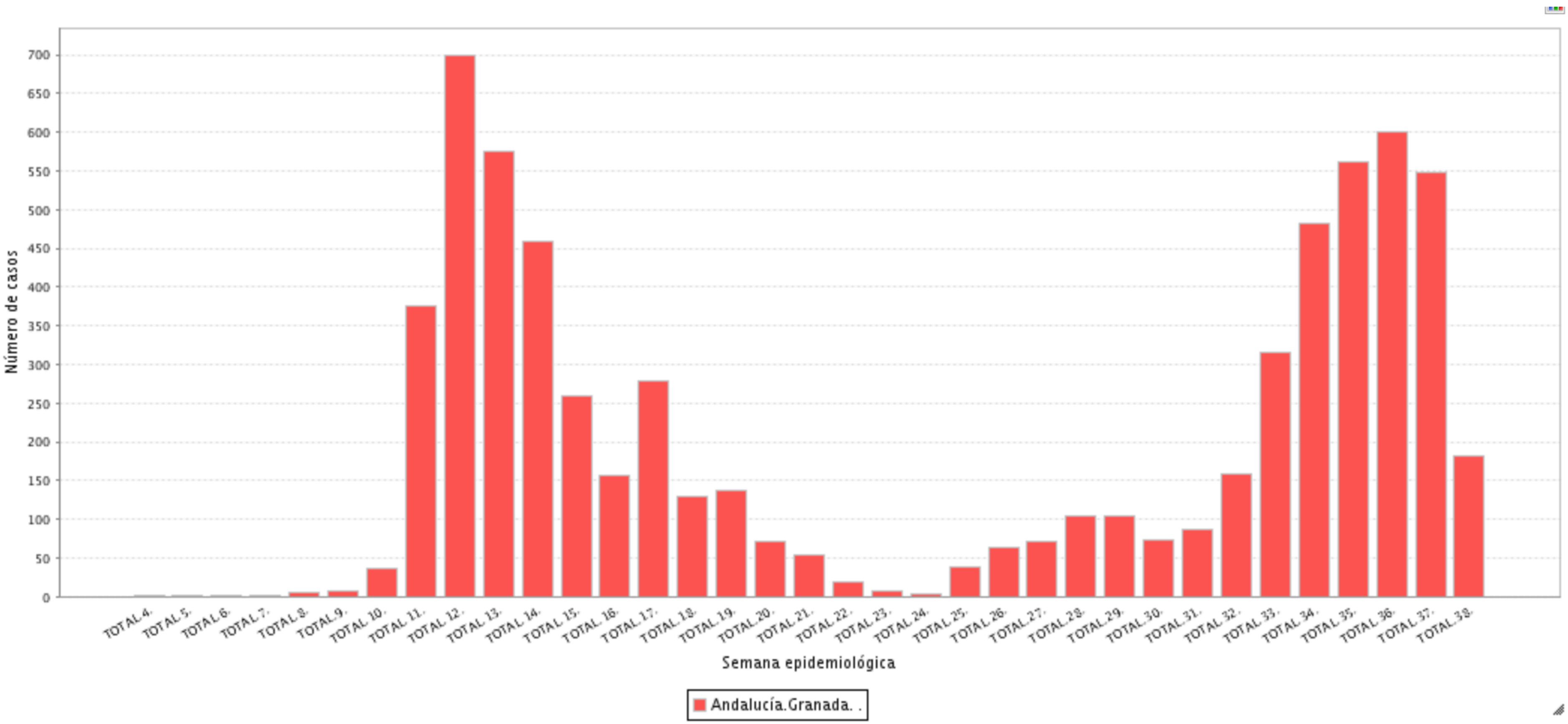
Representación

Normalmente, se representa la serie con el valor de la serie en el eje de ordenadas y los tiempos en el eje de abscisas



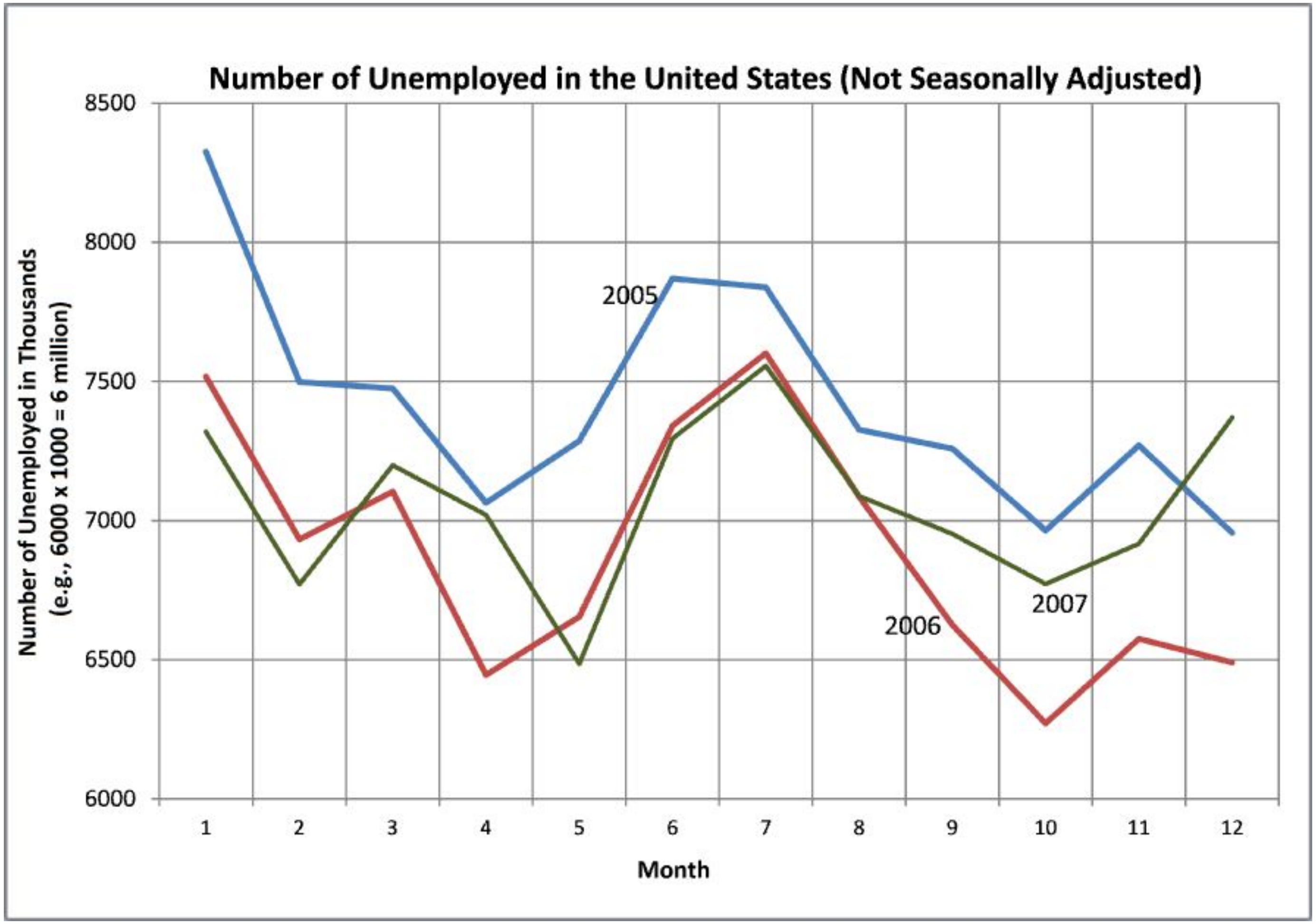
Representación

Otros, gráficos por periodos de observación



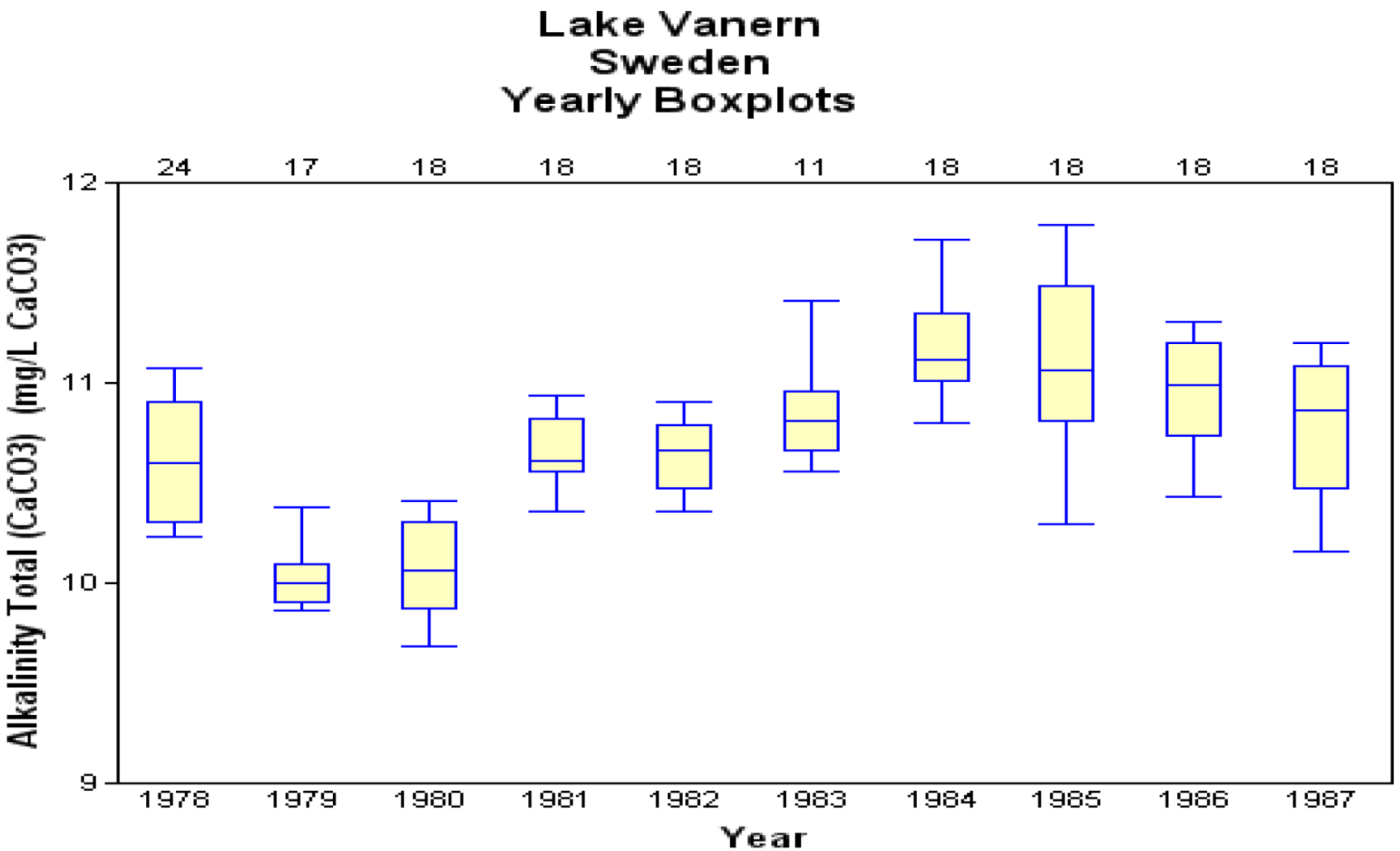
Representación

Otros, gráficos por periodos de observación plurianuales



Representación

Otros, boxplot anual



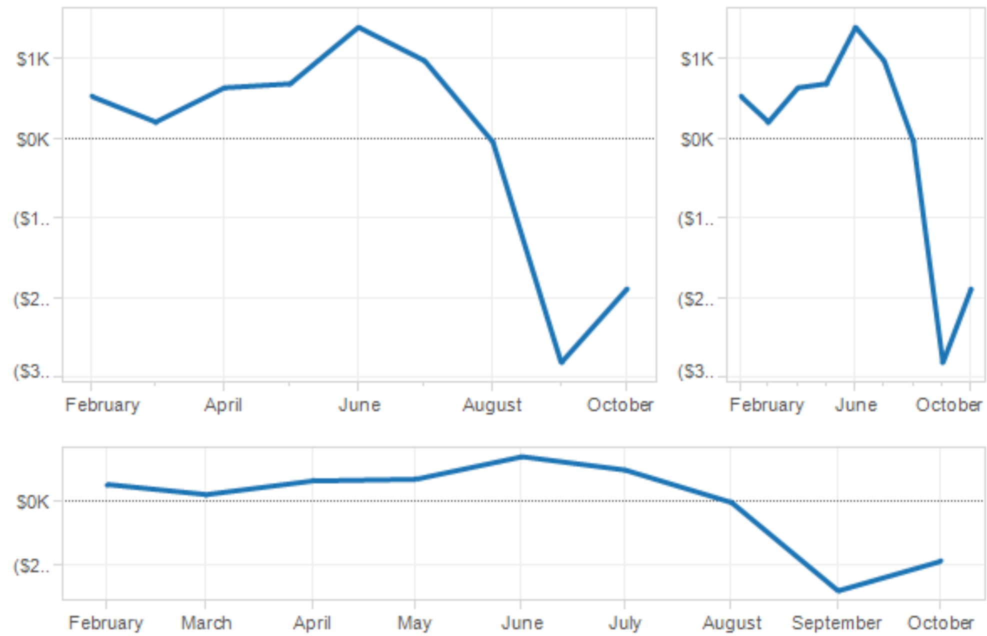
Representación

Otros, diagramas de velas (velas japonesas)

Representación

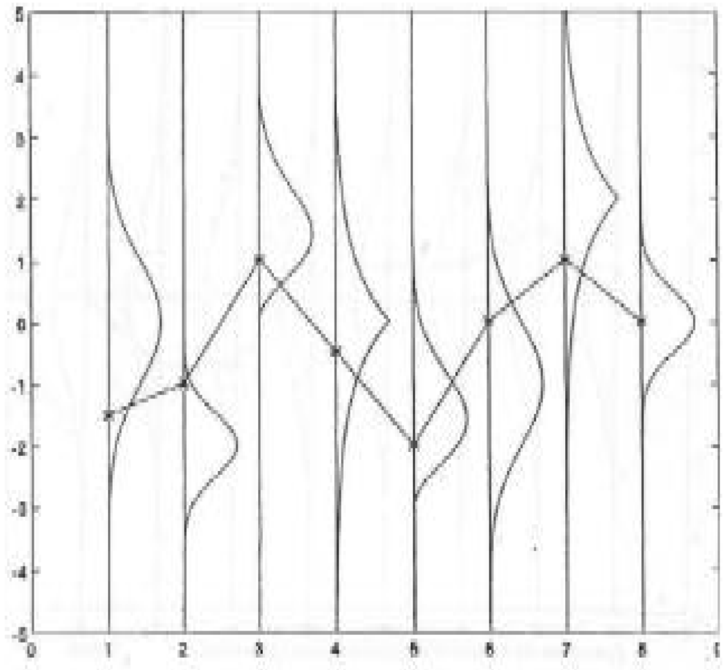
Para realizar un buen análisis puede ser necesario realizar manipulaciones de la serie para observar correctamente sus propiedades en la gráfica

- ❑ Escala logarítmica
- ❑ Aspect ratio
- ❑ Heterocedasticidad
- ❑ …



Tipos concretos de series

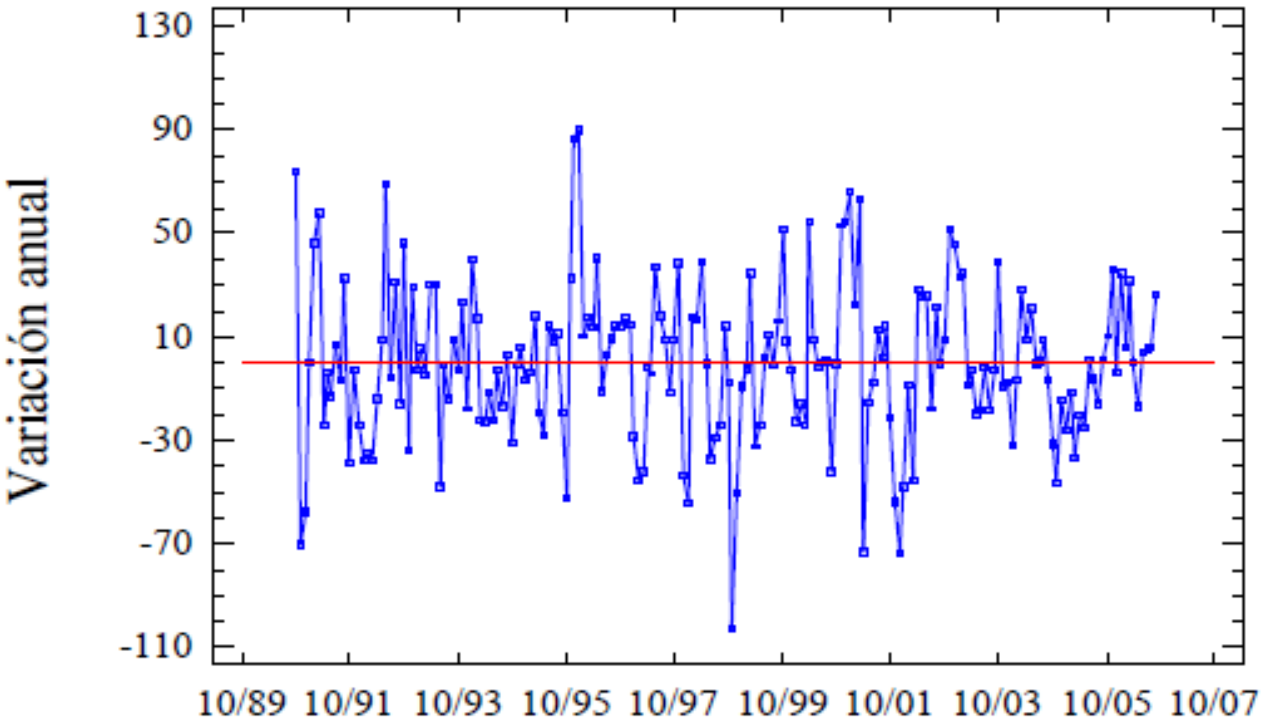
Una serie temporal es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo. Estas observaciones provienen de una distribución que puede ser diferente en cada instante del tiempo



En general, no somos capaces de tratar cualquier tipo de serie temporal, ya que en cada instante tenemos una variable con distinta distribución de la que sólo observamos un dato. Ignoramos mucho y tenemos poca información

Tipos concretos de series

Una serie es estacionaria si la media y la varianza se mantienen constantes a lo largo del tiempo



Tipos concretos de series

¿Por qué es bueno que las series sean estacionarias?

- Con series estacionarias podemos obtener predicciones fácilmente
- Como la media es constante, podemos estimarla con todos los datos, y utilizar este valor para predecir una nueva observación
- También se pueden obtener intervalos de predicción (confianza) para las predicciones asumiendo que X_t sigue una distribución conocida, por ejemplo, normal

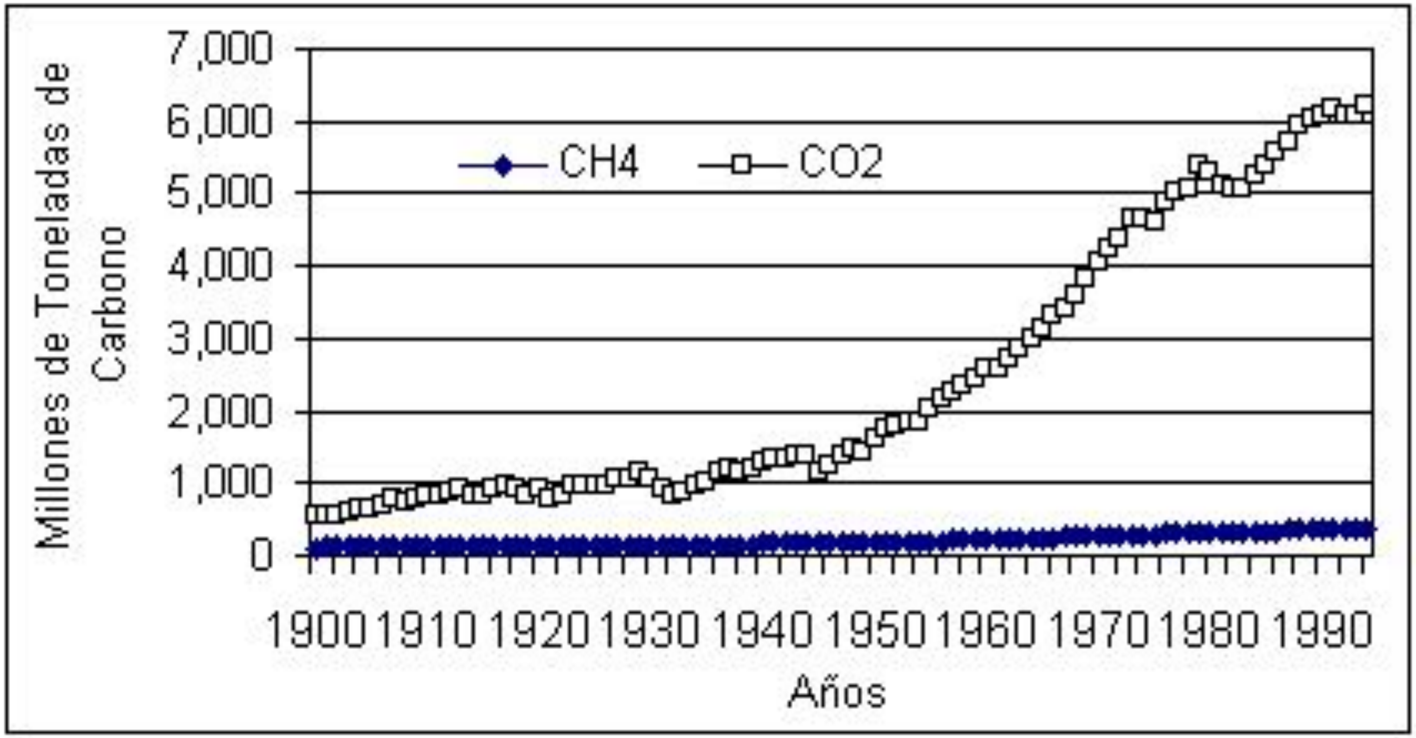
Tipos concretos de series

El problema es que no todas son estacionarias

- Series no estacionarias pueden mostrar cambios de varianza
- Series no estacionarias pueden mostrar una tendencia, es decir que la media crece o baja a lo largo del tiempo
- Además, pueden presentar efectos estacionales, es decir que el comportamiento de la serie es parecido en ciertos tiempos periódicos en el tiempo

Tipos concretos de series

No hay estacionalidad. Hay una tendencia



Modelo clásico aditivo

Establece que una serie temporal se descompone como

$$Y_t = T_t + Z_t + E_t + R_t$$

Tendencia

Función monótona
- Mide comportamiento a largo plazo

Estacionalidad

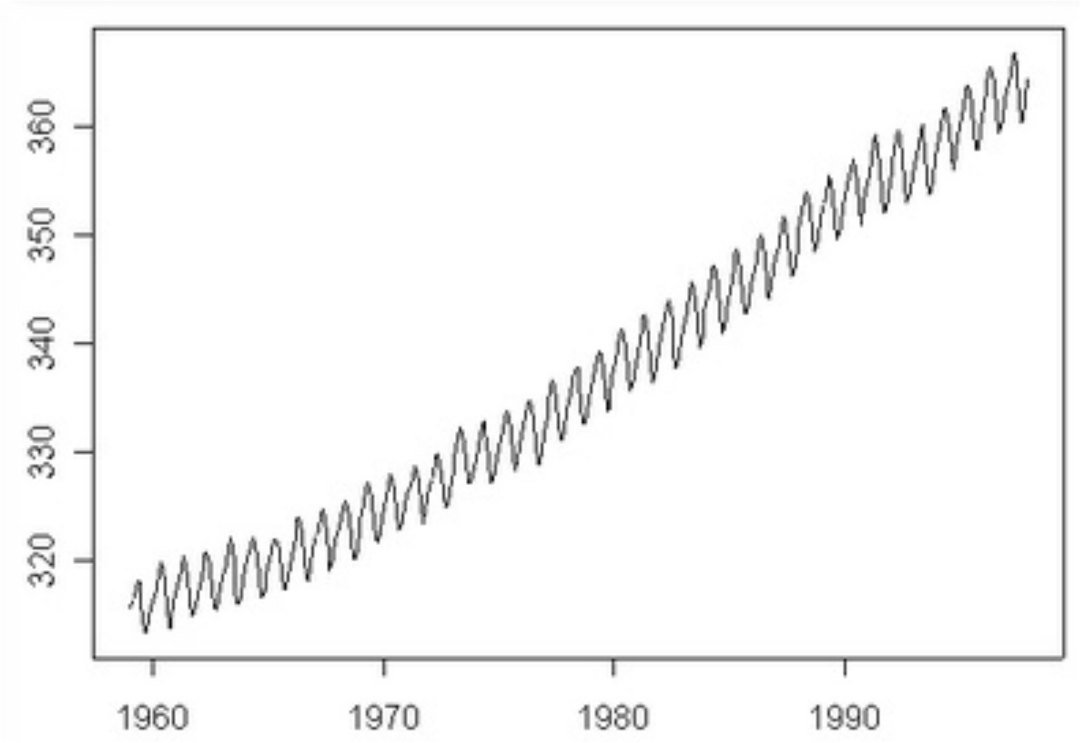
Fluctuaciones cíclicas:
- Corto plazo
- Largo plazo

Ruido

Variable aleatoria:
- Mide comportamiento irregular
- Media cero

También se consideran modelos con menos componentes

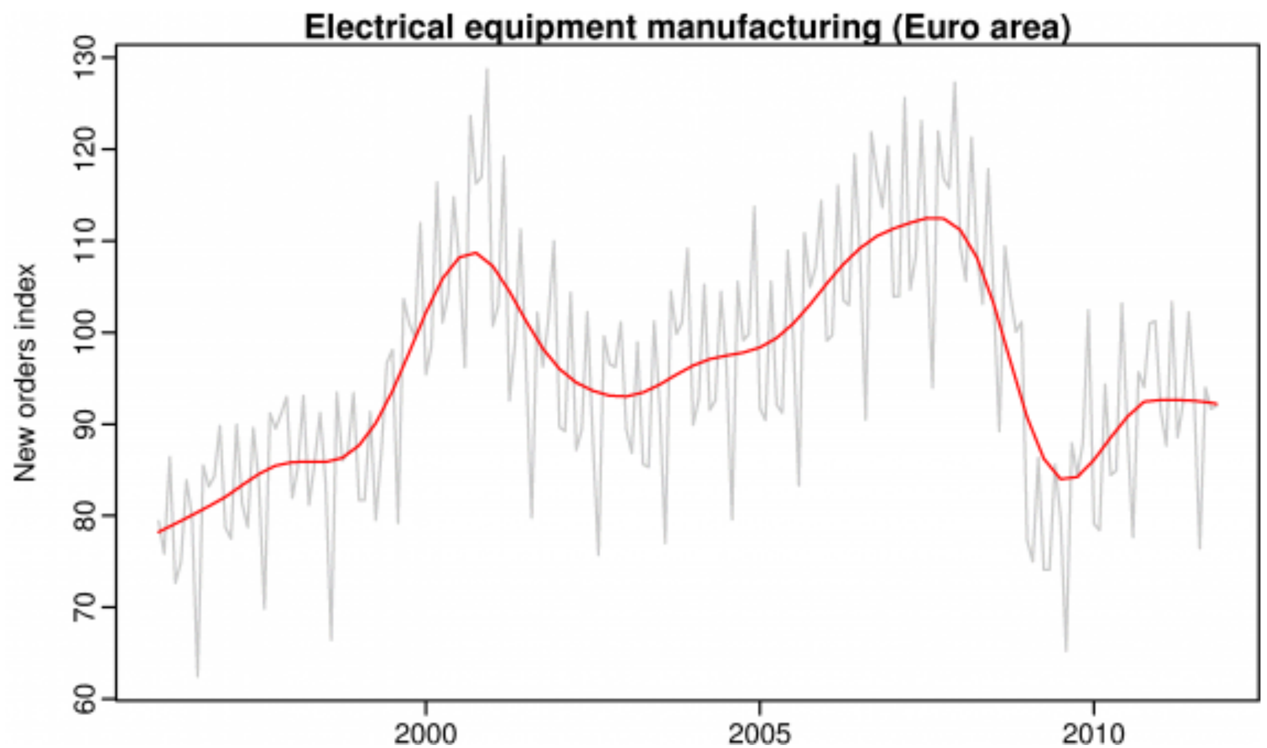
Modelo clásico aditivo



Serie con tendencia ascendente

Modelo clásico aditivo

Una serie temporal puede no tener una tendencia a largo plazo (en el sentido estricto de ser una función monótona)



Modelo clásico aditivo

Establece que una serie temporal se descompone como

$$Y_t = T_t + Z_t + E_t + R_t$$

Tendencia

Función monótona
- Mide comportamiento a largo plazo

Estacionalidad

Fluctuaciones cíclicas:
- Corto plazo
- Largo plazo

Ruido

Variable aleatoria:
- Mide comportamiento irregular
- Media cero

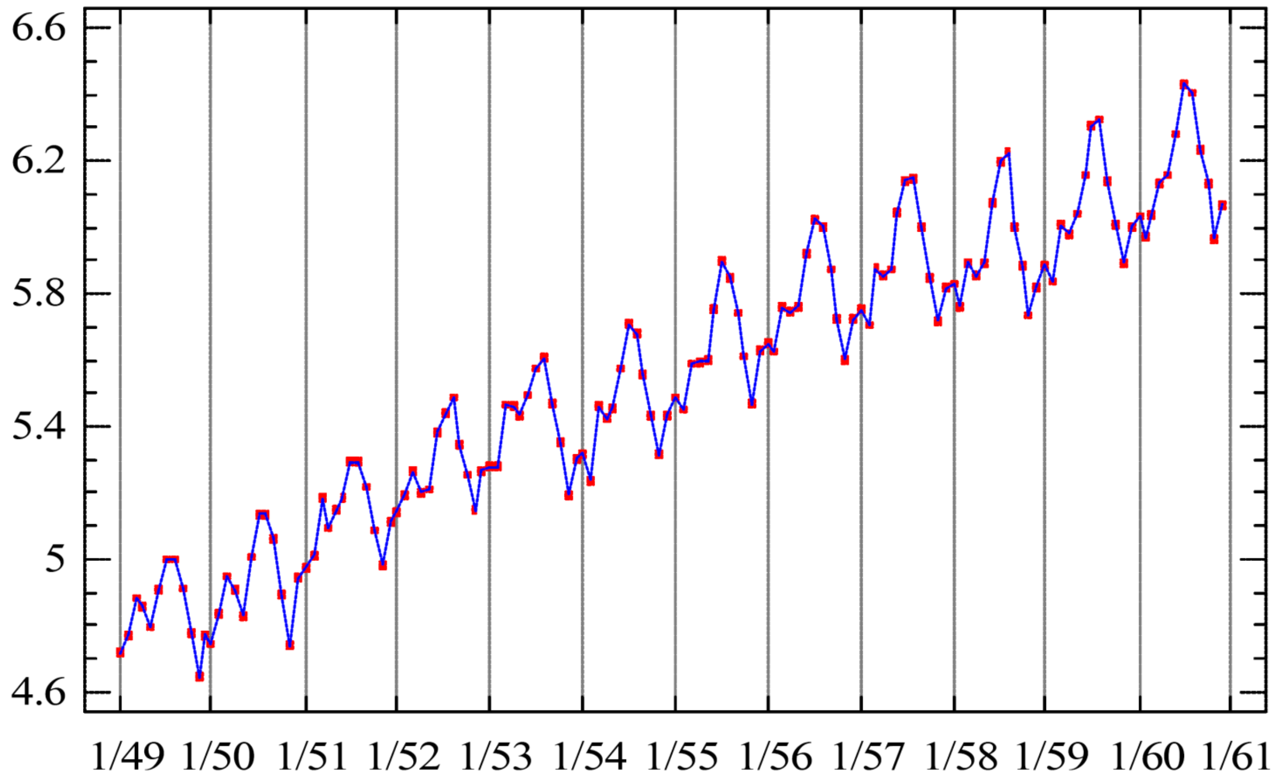
También se consideran modelos con menos componentes

Modelo clásico aditivo

La variación estacional representa un movimiento *periódico* de la serie de tiempo

- Se suele distinguir entre componentes cíclicas y estacionarias
  - Estacionarias. Ocurren con períodos identificables, como la estacionalidad del empleo, o de la venta de ciertos productos, cuyo período es un año
  - Cíclicas. Se suele referir a ciclos grandes, cuyo período no es atribuible a alguna causa. Por ejemplo, fenómenos climáticos, que tienen ciclos que duran varios años

Modelo clásico aditivo



Serie temporal con estacionalidad y tendencia ascendente

Modelo clásico aditivo

Establece que una serie temporal se descompone como

$$Y_t = T_t + Z_t + E_t + R_t$$

Tendencia

Función monótona
- Mide comportamiento a largo plazo

Estacionalidad

Fluctuaciones cíclicas:
- Corto plazo
- Largo plazo

Ruido

Variable aleatoria:
- Mide comportamiento irregular
- Media cero

También se consideran modelos con menos componentes

Modelo clásico aditivo

La componente cíclica se suele sumar a la tendencia para definir el comportamiento a largo plazo de la serie, por lo que se suele simplificar el modelo

$$Y_t = T_t + E_t + R_t$$

Tendencia-ciclicidad

Estacionalidad

Ruido

Modelo clásico aditivo

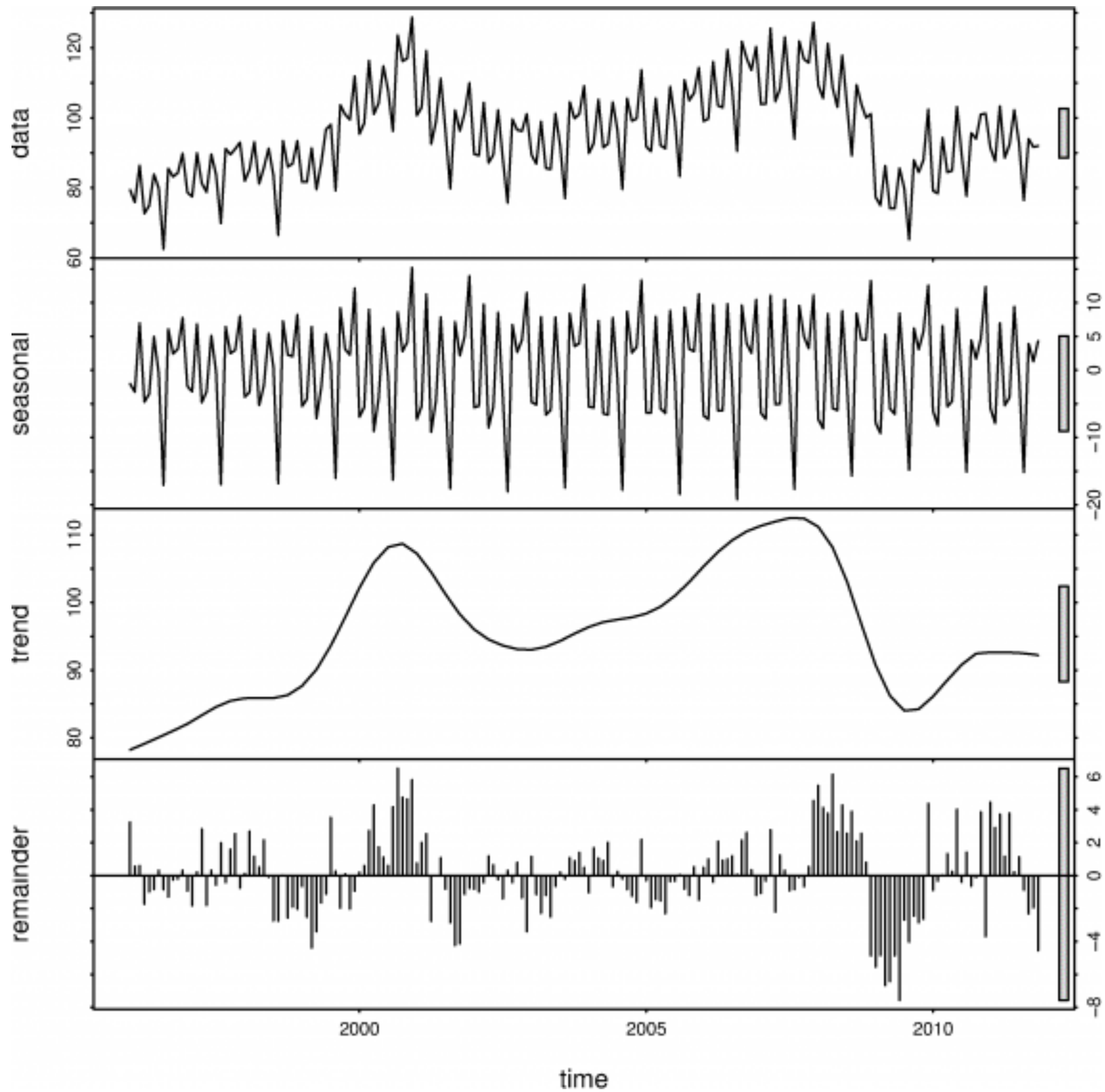
Algoritmo clásico para calcular las componentes:

1. Estimar la tendencia-ciclicidad T_t
2. Calcular la serie temporal sin tendencia

$$\widetilde{Y}_t = Y_t - T_t = E_t + R_t$$

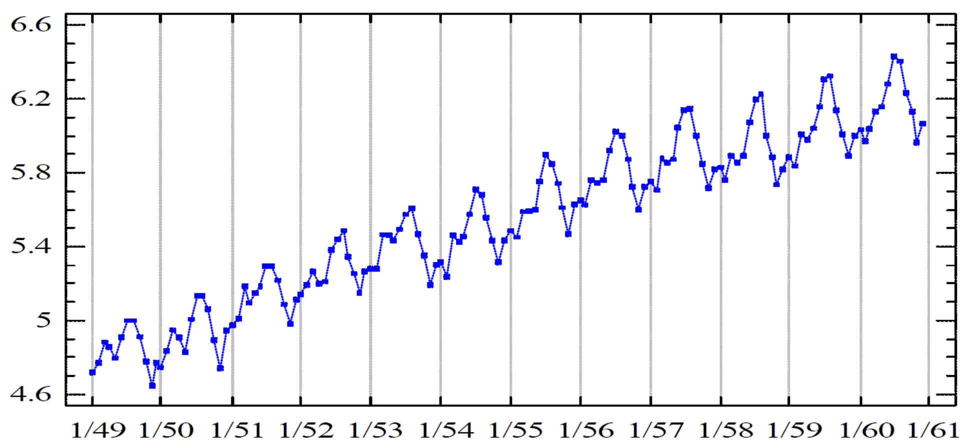
1. Estimar la estacionalidad de $\widetilde{Y}_t$
2. Calcular el ruido $R_t = \widetilde{Y}_t - E_t$

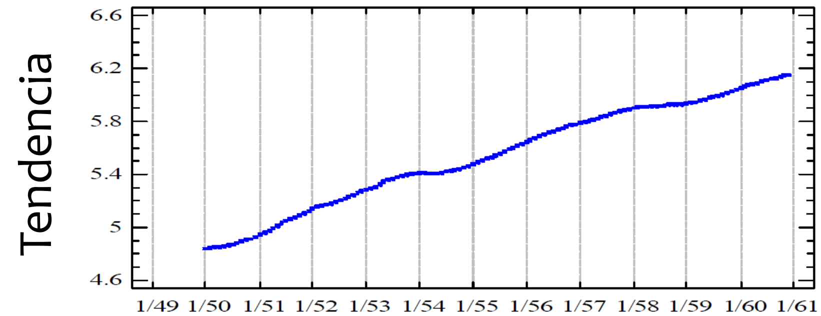
Modelo clásico aditivo

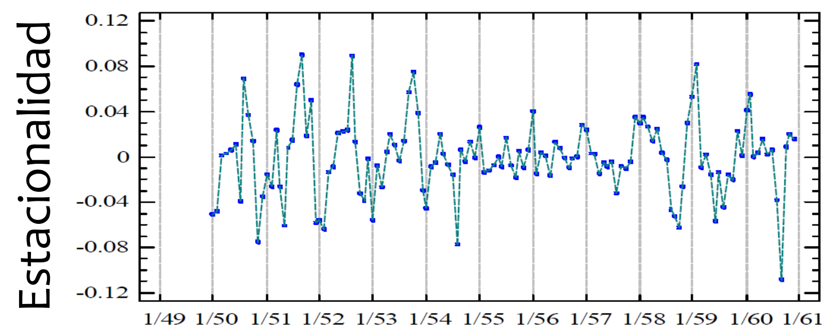


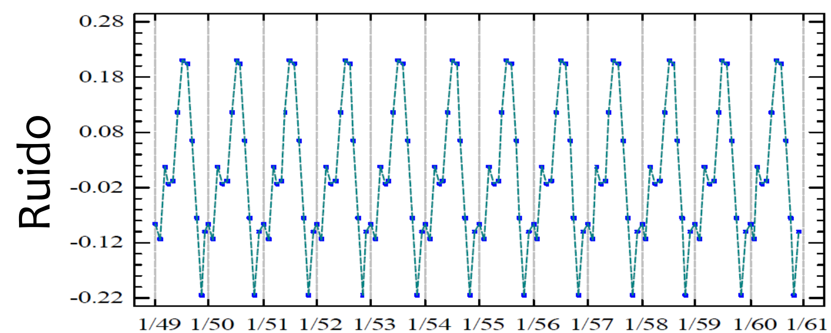
Modelo clásico aditivo

Datos









Modelo clásico aditivo

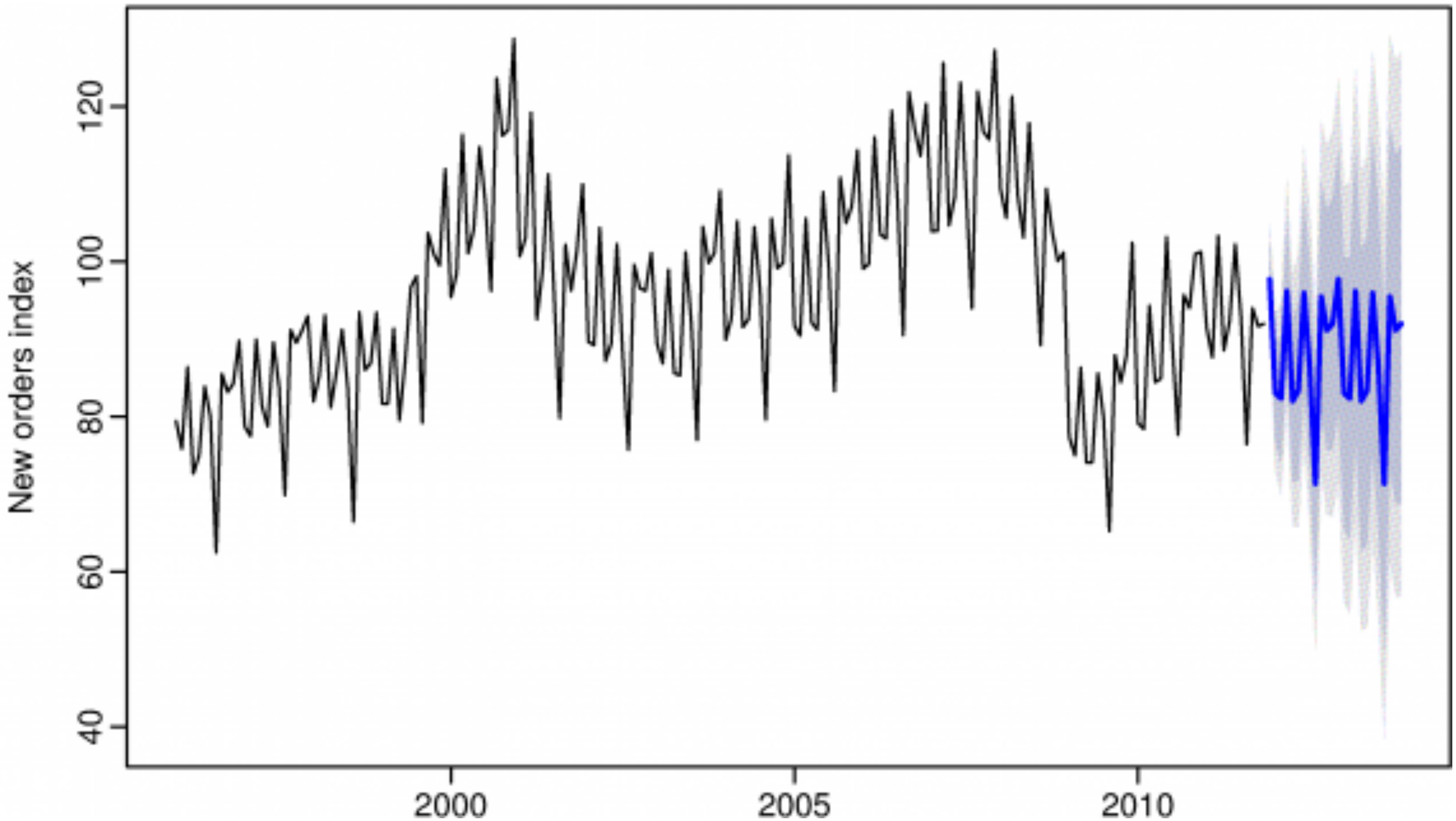
Una vez que hemos obtenido la descomposición de la serie temporal

$$Y_t = T_t + E_t + R_t$$

podemos obtener predicciones de los valores futuros dándoles valores para t + 1, t + 2, . . . , t + h de las componentes de la serie

Modelo aditivo clásico

Nuestra predicción para el futuro



Modelo clásico aditivo

Aunque las predicciones pueden fallar… ☹

Cotización de Sacyr

Análisis de la tendencia

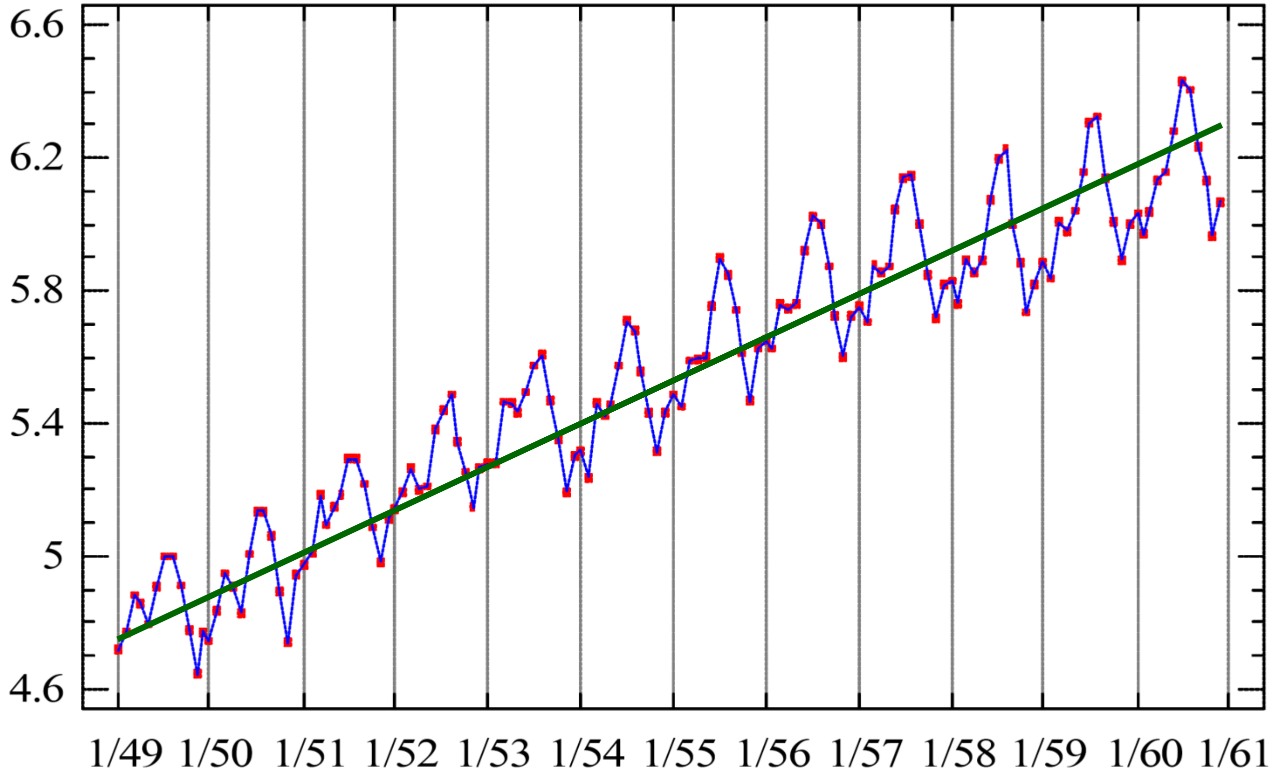
comportamiento suave de la serie a largo plazo (poca variación con el tiempo)

Cálculo de la tendencia de una serie temporal

- Regresión
  - Se selecciona un tipo de función y se ajustan los puntos de la serie temporal
- Medias móviles
  - Se calcula la media de varios valores anteriores y posteriores

Regresión

Consiste en aproximar la serie temporal mediante técnicas de regresión estándar

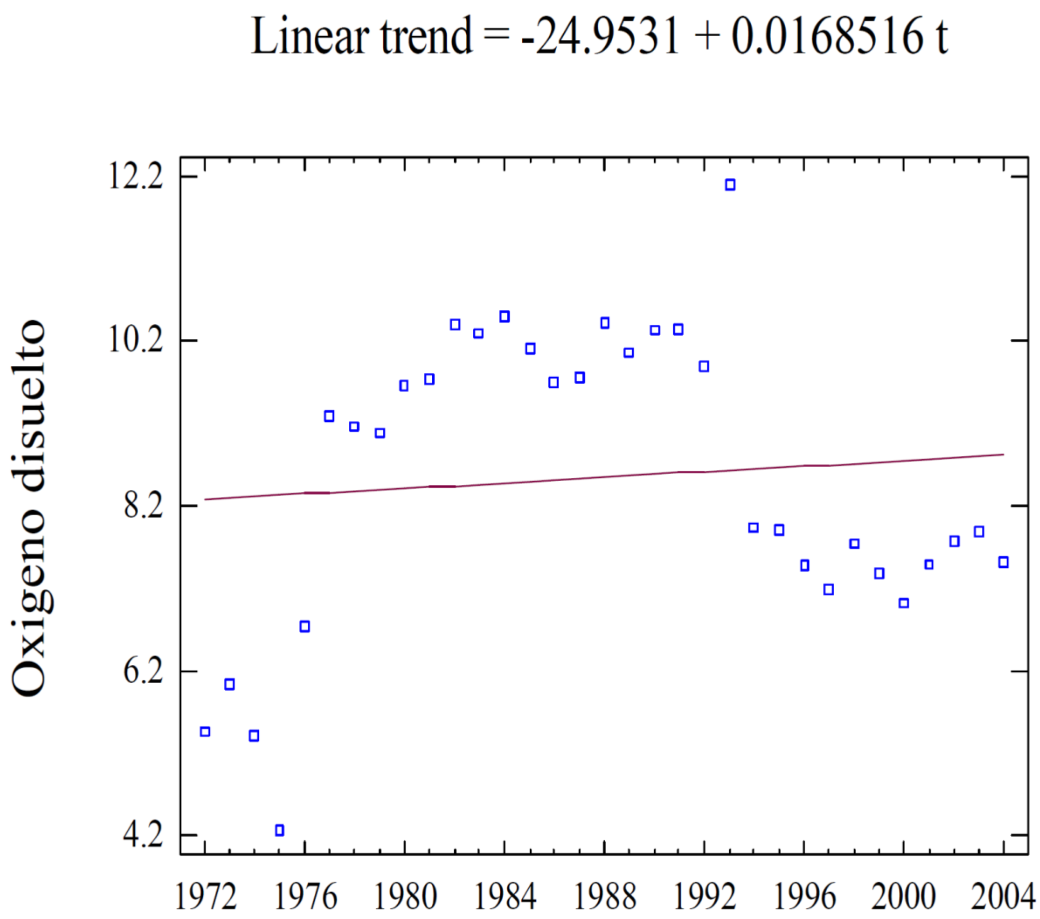


Tendencia creciente lineal

Regresión

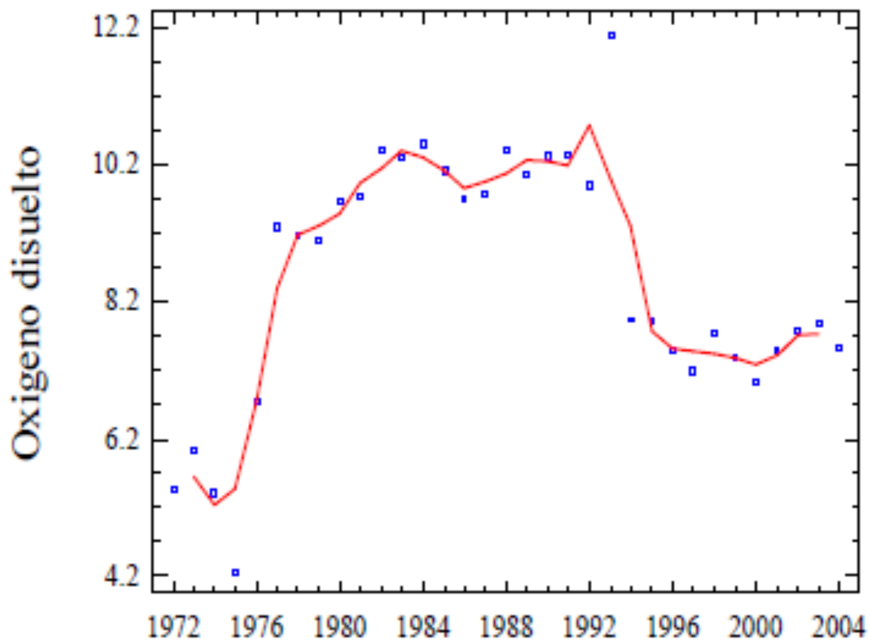
Consiste en aproximar la serie temporal mediante técnicas de regresión estándar

No siempre parece conveniente una regresión lineal



Regresión

Puede existir el problema de encontrar una función que se adecúe a los valores (y que sepamos realizar la regresión)



Una manera de encontrar una tendencia-ciclo de la serie son las medias móviles

Media móvil

Consiste en obtener valores promedio de los valores de la serie temporal, suaviza las fluctuaciones de plazos cortos, resaltando así las tendencias

$$Y_t^* = \frac{1}{r+s+1} \sum_{k=-r}^{s} Y_{t+k}$$

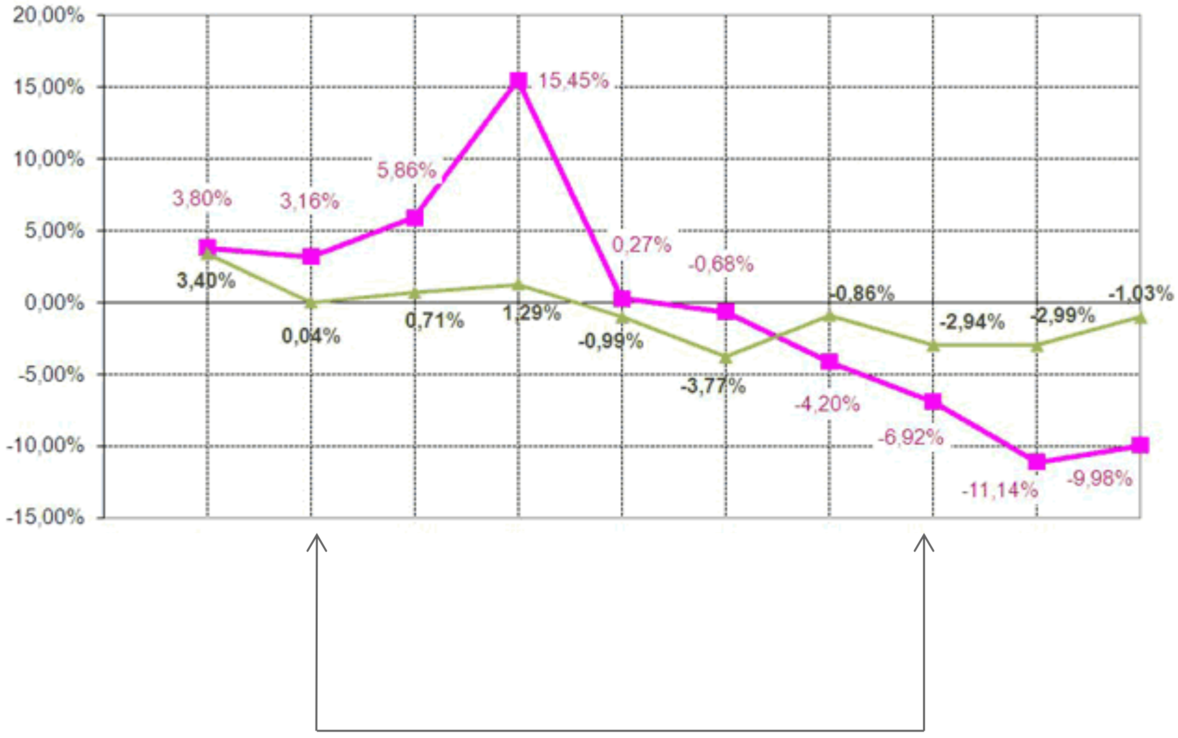
Es la media de los valores de la serie entre el momento t-r y el momento t+s

Una vez calculado uno, el siguiente es sencillo

$$Y_{t+1}^* = Y_t^* + \frac{1}{r+s+1}\left(Y_{t+s+1} - Y_{t-r}\right)$$

Media móvil

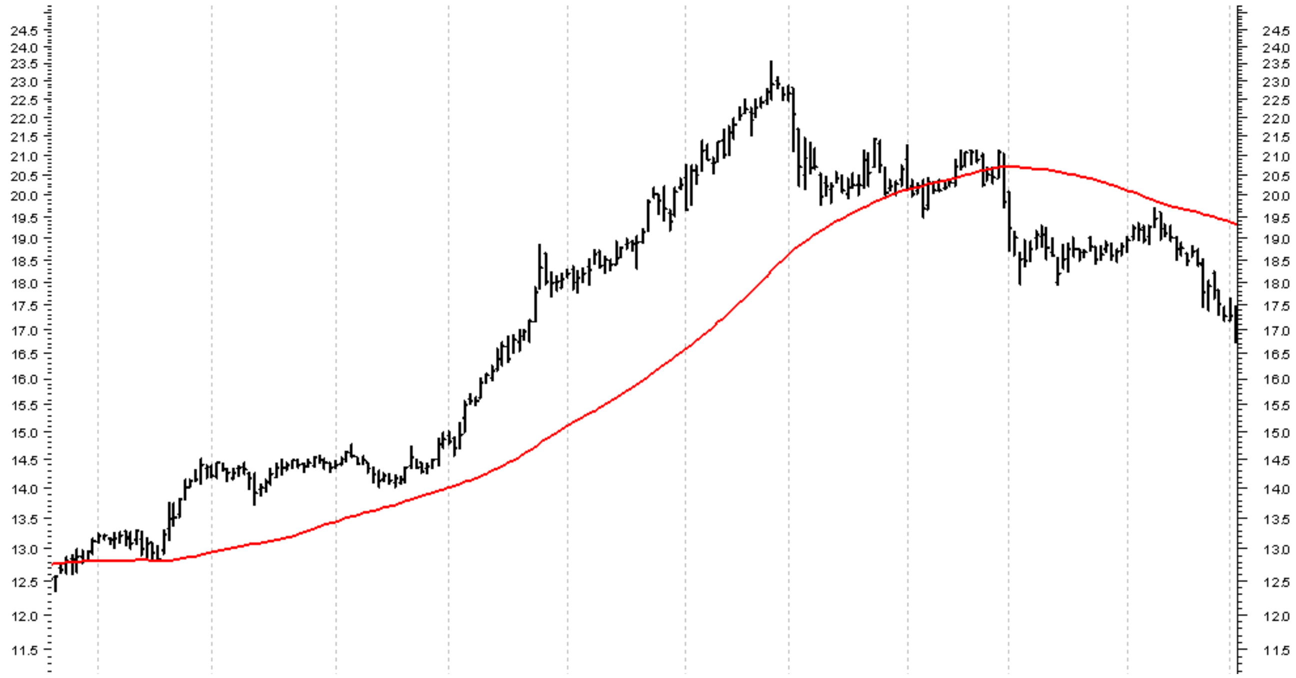
Obviamente, no es posible calcular la media móvil de todo el rango temporal de la serie



Para la media con r=1 y s=2

Media móvil

Las medias móviles suavizan las fluctuaciones en plazos cortos



Cuantos más valores consideremos menos afectarán las irregularidades aleatorias

Media móvil

El corte de la serie temporal con alguna media móvil se suele interpretar como un cambio de tendencia

Media móvil

- Media móvil simple (SMA, simple moving average)

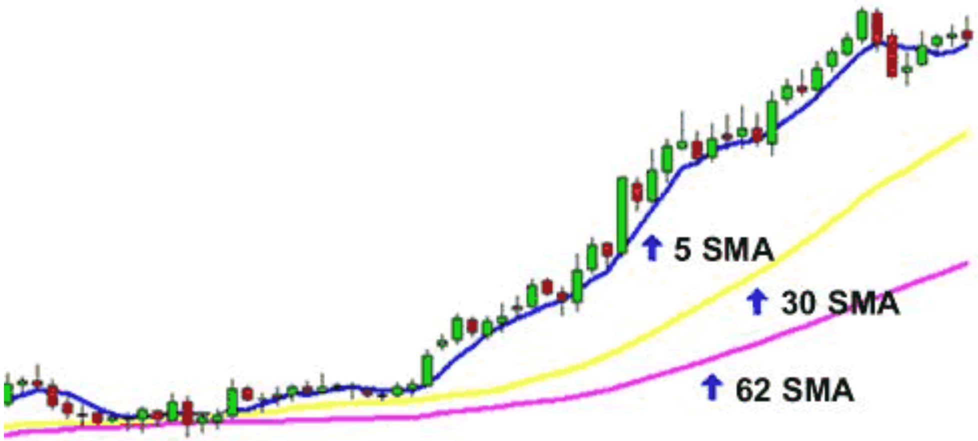
Consiste en considerar solamente los valores anteriores

$$Y_t^* = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} Y_{t-k}$$

- Cuanto más valores se consideren, más se tiene en cuenta la evolución histórica de la serie
- También, la gráfica de la media móvil se suaviza más y reacciona más lentamente ante el cambio
- Normalmente, se consideran varias media móviles en el análisis

Media móvil

- Media móvil simple (SMA, simple moving average)

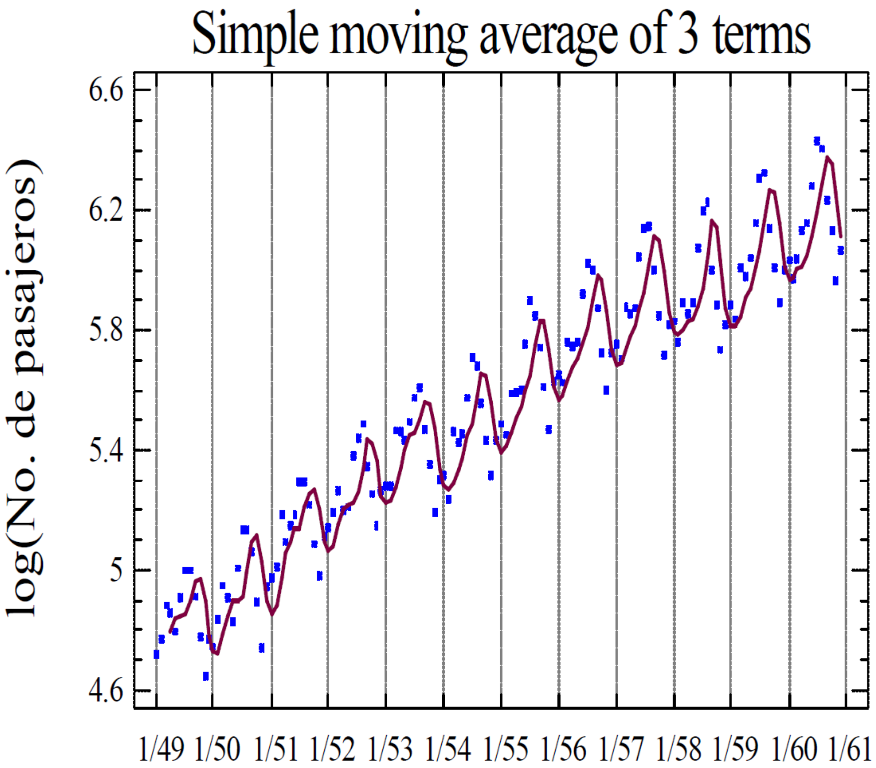


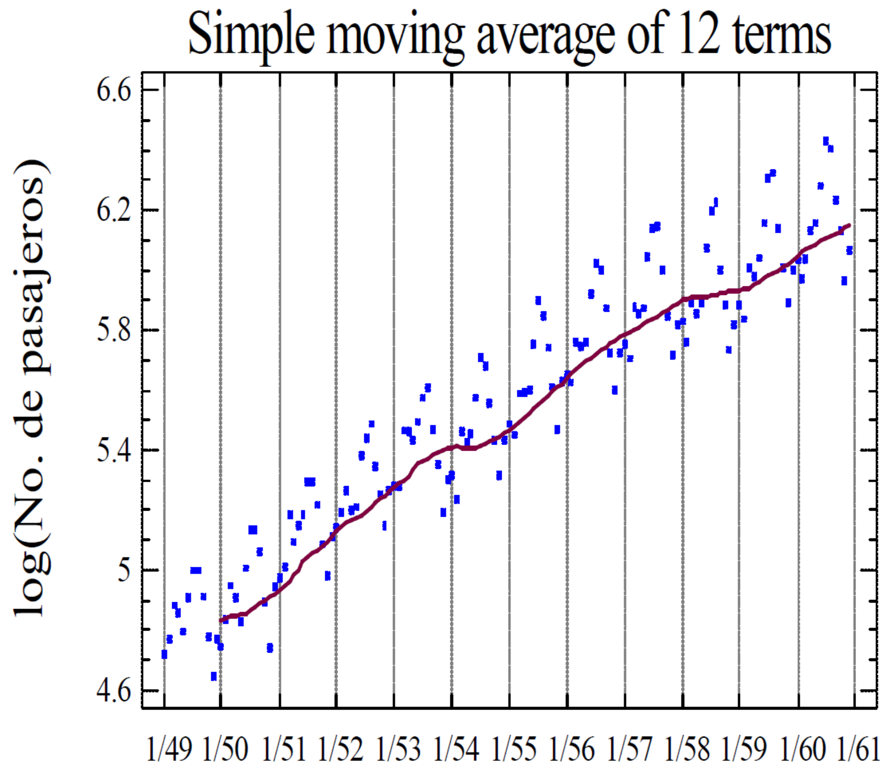
En el análisis de valores bursátiles

Tendencia a corto plazo, entre 5 y 20
Tendencia a medio plazo, entre 20 y 70
Tendencia a largo plazo, entre 70 y 200

Media móvil

- Media móvil simple (SMA, simple moving average)





Aplicación media móvil simple

Bandas de Bollinger

- Se aplican en el análisis técnico en los valores bursátiles
- Construcción:
  - Se calcula una media móvil simple (20 valores, normalmente)
  - Se trasladan al sumarle/restarle 2 veces la desviación típica

Aplicación media móvil simple

Bandas de Bollinger

- Toque de la gráfica con la línea superior indica sobrecompra (señal de venta)
- Toque de la gráfica con la línea inferior indica sobreventa (señal de compra)

Media móvil

- Media móvil centrada

Consiste en considerar el mismo número de valores anteriores y posteriores

$$Y_t^* = \frac{1}{2r+1} \sum_{k=-r}^{r} Y_{t+k}$$

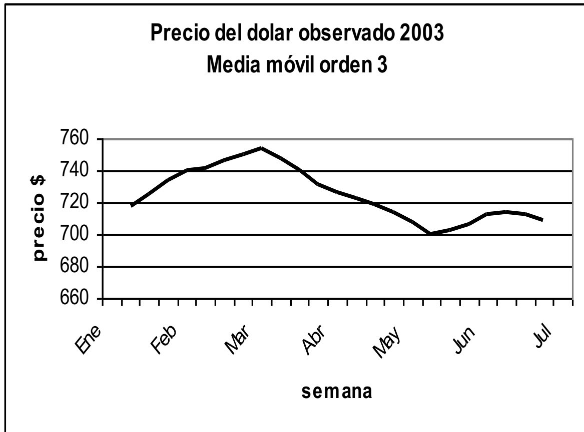
- Se le puede asignar mayor fiabilidad, ya que considera valores pasados y futuros
- Pero no se puede calcular en el momento actual…

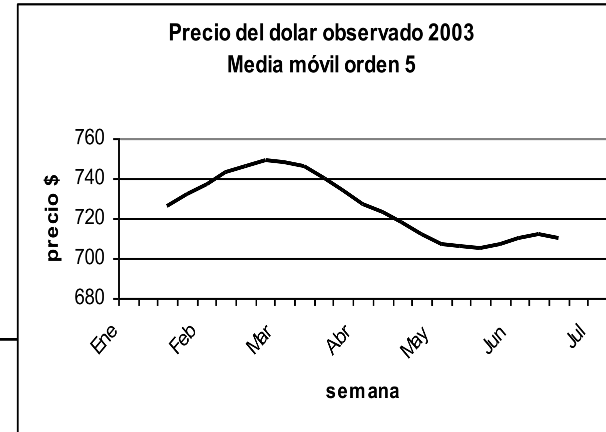
Media móvil

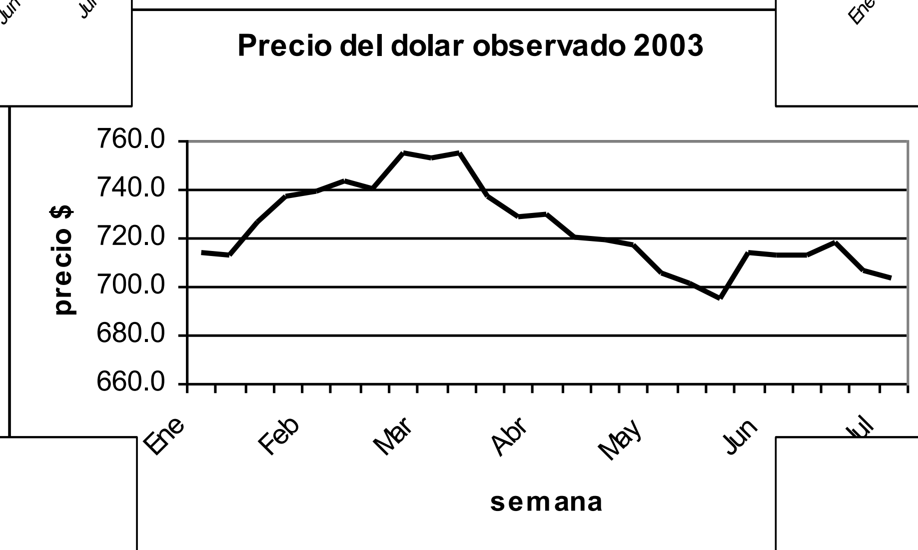
Precio del dólar observado, días miércoles, enero a junio año 2003. Fuente: Banco Central de Chile.

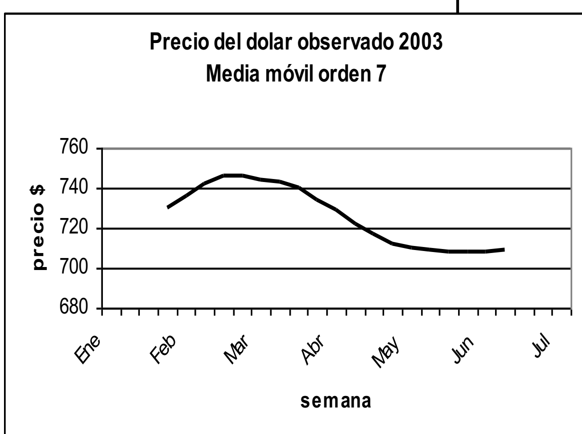
mes	precio	k=3	k=5	k=7	k=9
Ene	713.4				
	712.6	717.5			
	726.6	725.4	725.7		
	737.1	734.2	731.6	730.3	
Feb	738.9	739.7	737.2	736.2	735.5
	743.1	740.7	742.9	742.0	740.1
	740.2	746.2	746.0	746.0	742.8
	755.3	749.4	749.2	745.9	743.0
Mar	752.8	754.3	747.9	744.4	742.2
	754.8	748.0	745.5	742.5	740.1
	736.5	739.9	740.4	739.6	737.4
	728.3	731.5	733.9	734.4	734.7
Abr	729.8	726.0	726.6	729.2	729.2
	720.0	722.8	722.6	722.1	723.4
	718.7	718.4	718.0	717.1	716.7
	716.5	713.5	712.3	712.2	714.2
May	705.3	707.7	707.2	709.9	712.4
	701.2	700.2	706.2	708.8	710.5
	694.2	703.1	705.3	708.0	710.2
	713.7	706.7	706.9	708.2	708.8
Jun	712.2	713.0	710.1	708.2	707.3
	713.0	714.2	712.5	708.5	
	717.4	712.1	710.3		
	706.0	708.8			
Jul	703.1				

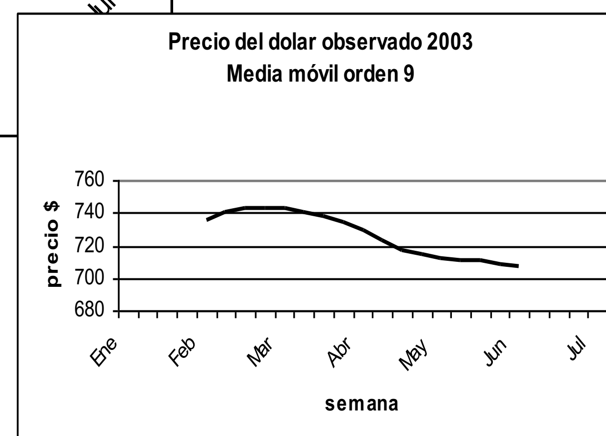
Media móvil


Precio del dolar observado 2003
Media móvil orden 3
760
740
720
700
680
660
precio $
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
semana


Precio del dolar observado 2003
Media móvil orden 5
760
740
720
700
680
precio $
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
semana


Precio del dolar observado 2003
760.0
740.0
720.0
700.0
680.0
660.0
precio $
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
semana


Precio del dolar observado 2003
Media móvil orden 7
760
740
720
700
680
precio $
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
semana

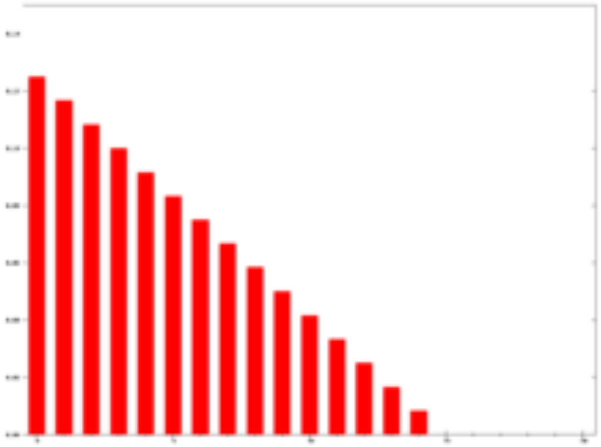

Precio del dolar observado 2003
Media móvil orden 9
760
740
720
700
680
precio $
Ene
Feb
Mar
Abr
May
Jun
Jul
semana

Media móvil

- Media móvil ponderada (WMA, weighted moving average)

Consiste en asignar pesos a los valores con los que se realiza la media móvil (normalmente, disminuye según nos alejamos del momento central)

$$Y_t^* = \sum_{k=-r}^{s} a_k Y_{t+k} \text{ con } \sum_{k=-r}^{s} a_k = 1$$



Un ejemplo de pesaje lineal para la media móvil simple

Media móvil

Limitaciones de las medias móviles:

- Problemáticas en los extremos de las series de datos (dada la anchura de la ventana, no se pueden extender hasta el final de la serie, que suele ser lo más interesante)
- No se pueden definir fuera de la serie temporal, por lo que no se pueden utilizar para realizar predicciones
  - Para valores bursátiles, la media móvil es un indicador retardado…

Análisis de la estacionalidad

Para estimarla la estacionalidad se debe:

- Conocer el período
- Tener datos de varios períodos consecutivos
  - Por ejemplo, datos mensuales, estacionalidad de un año

Entonces se consideran

- las medias de cada tramo en el periodo
- y se supone que ese valor se repite en todos los periodos

Análisis de la estacionalidad

		Años					
		1	2	$\cdots$	n	Medias	S
	enero	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	$\bar{x}_{1\bullet}$	S_1
	febrero	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	$\bar{x}_{2\bullet}$	S_2
Meses	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	noviembre	$x_{11\,1}$	$x_{11\,2}$	$\cdots$	$x_{11\,n}$	$\bar{x}_{11\bullet}$	S_{11}
	diciembre	$x_{12\,1}$	$x_{12\,2}$	$\cdots$	$x_{12\,n}$	$\bar{x}_{12\bullet}$	S_{12}
	Medias	$\bar{x}_{\bullet 1}$	$\bar{x}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\bar{x}_{\bullet n}$	$\bar{x}_{\bullet\bullet}$	

Coeficientes estacionales

- $S_i = \overline{x}_{i\bullet}$
- $S_i = \overline{x}_{i\bullet} - \overline{x}_{\bullet\bullet}$ si queremos la media cero

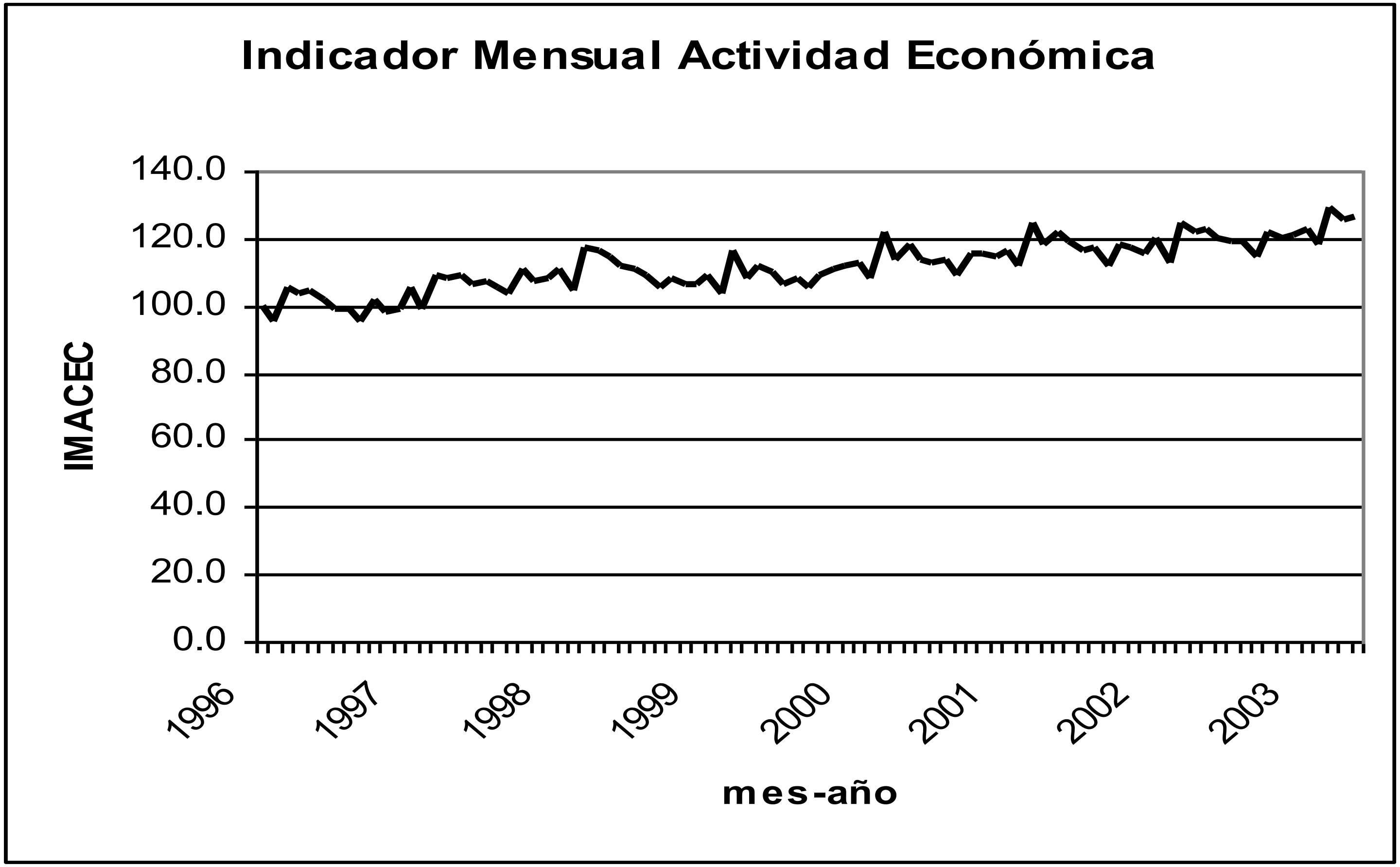
Asumimos que $S_i = S_{i+12} = S_{i+24} = \cdots$

Ejemplo

Indicador Mensual de Actividad Económica (IMACEC)

	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Enero	99.6	105.0	110.8	109.2	112.6	116.4	119.7	122.6
Febrero	94.9	98.6	104.3	103.7	107.6	111.8	113.0	118.3
Marzo	105.4	109.1	117.5	116.4	121.2	124.3	124.4	128.8
Abril	103.4	108.1	116.1	108.0	113.8	118.0	122.0	125.3
Mayo	104.2	109.2	114.4	111.2	117.9	121.7	123.0	126.1
Junio	101.3	106.5	111.9	110.0	113.1	119.1	120.1	
Julio	98.7	107.1	110.9	106.4	112.3	116.0	118.9	
Agosto	98.7	105.6	109.0	108.1	113.4	116.9	119.1	
Septiembre	94.8	103.8	105.4	105.7	108.6	111.4	114.6	
Octubre	102.0	110.9	107.7	109.2	115.4	118.4	121.7	
Noviembre	98.0	106.8	106.1	110.7	114.9	117.3	119.9	
Diciembre	99.2	108.4	106.5	111.9	114.4	115.7	120.9	

Ejemplo

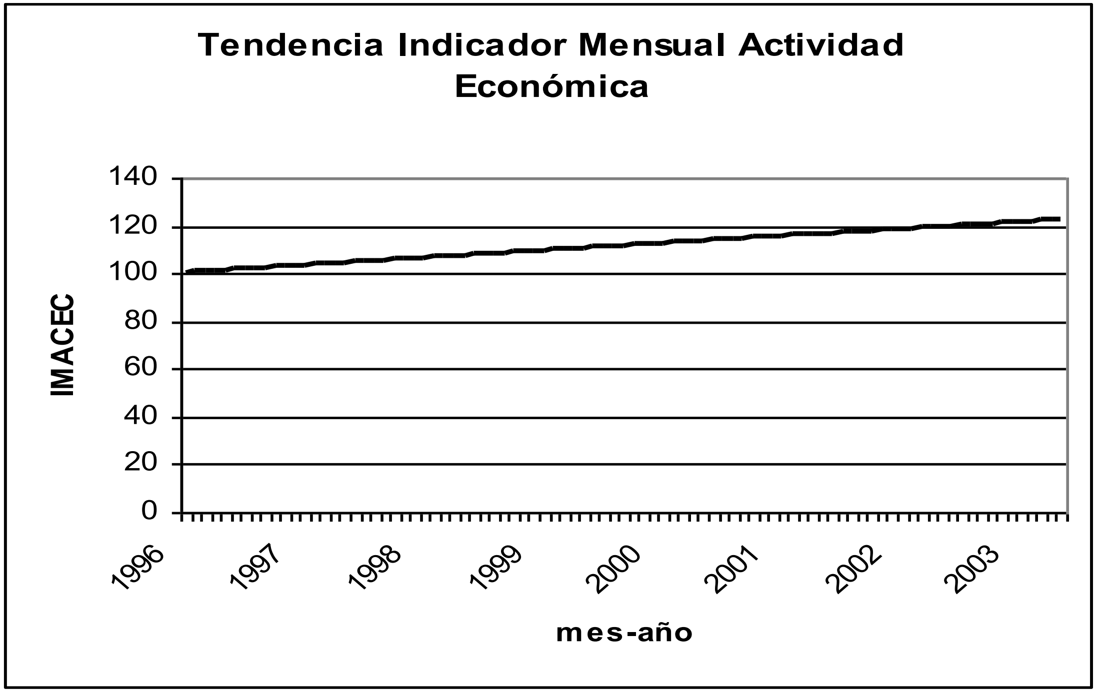


Indicador Mensual Actividad Económica
IMACEC
140.0
120.0
100.0
80.0
60.0
40.0
20.0
0.0
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
mes-año

Ejemplo

Se estima la tendencia por regresión lineal

$$T_t = 100.3 + 0.253t$$

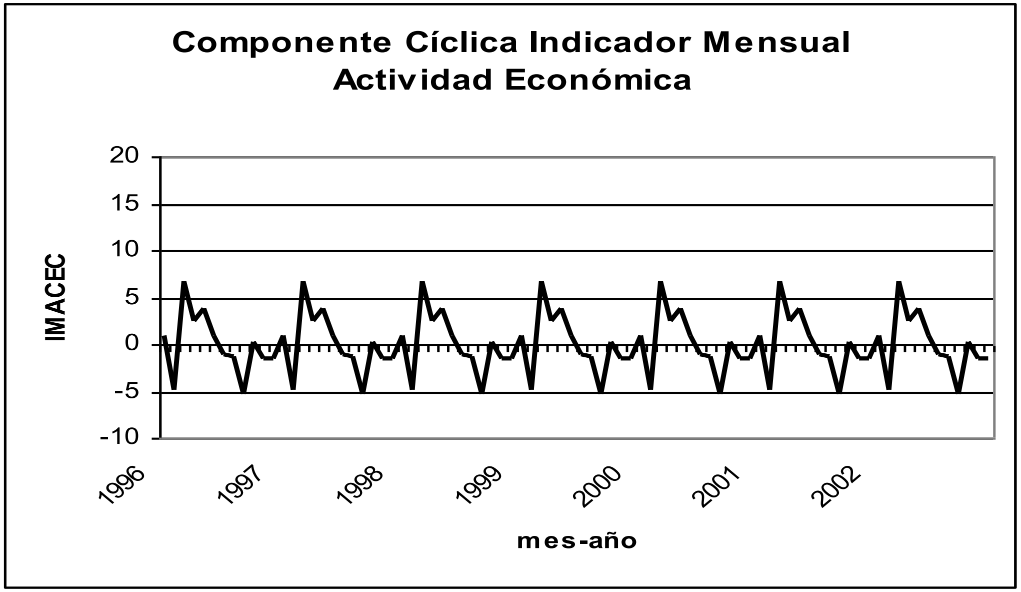


$$r^2 = 0.74$$

Ejemplo

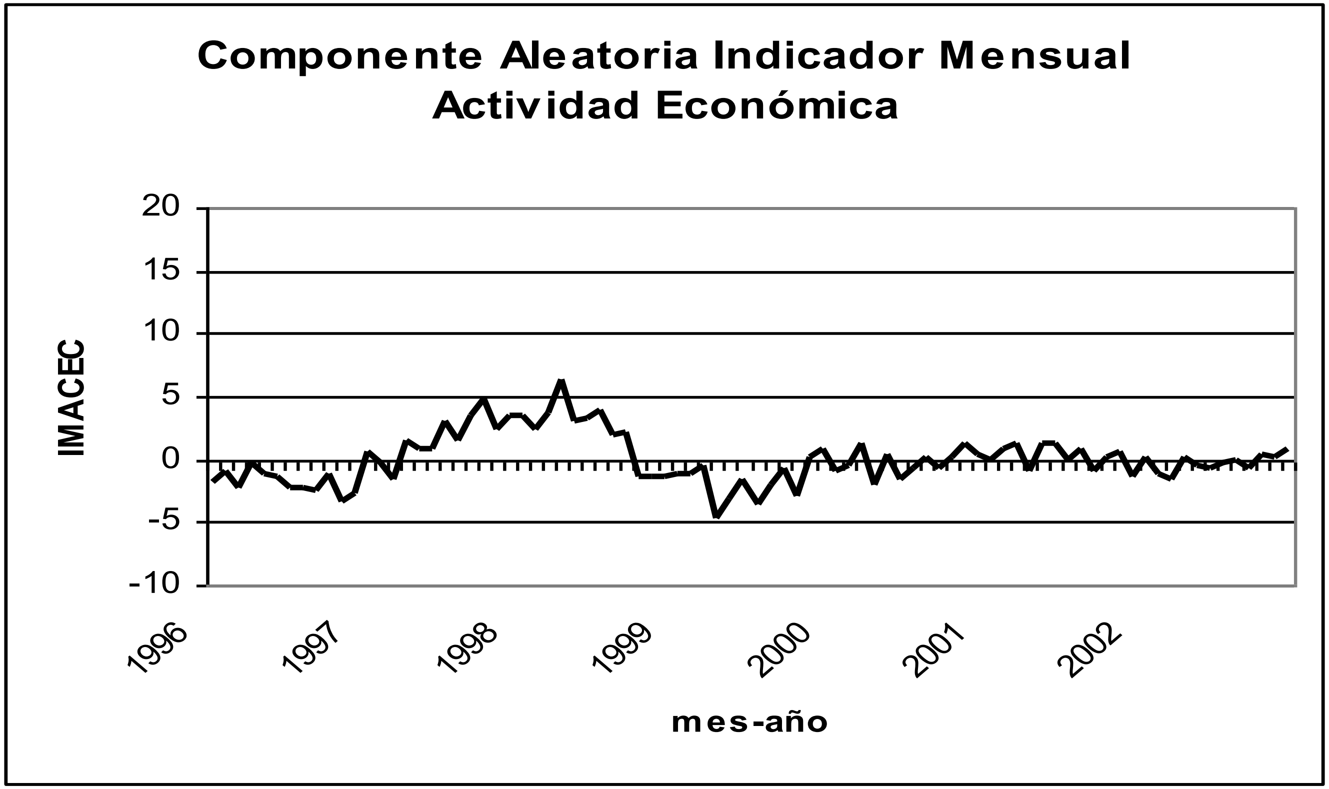
- Restamos la tendencia a la serie temporal
- Calculamos promedios para cada mes

Mes	Prom.
Enero	0.8
Febrero	-4.9
Marzo	6.7
Abril	2.4
Mayo	3.8
Junio	0.8
Julio	-1.2
Agosto	-1.3
Septiembre	-5.4
Octubre	0.2
Noviembre	-1.7
Diciembre	-1.5



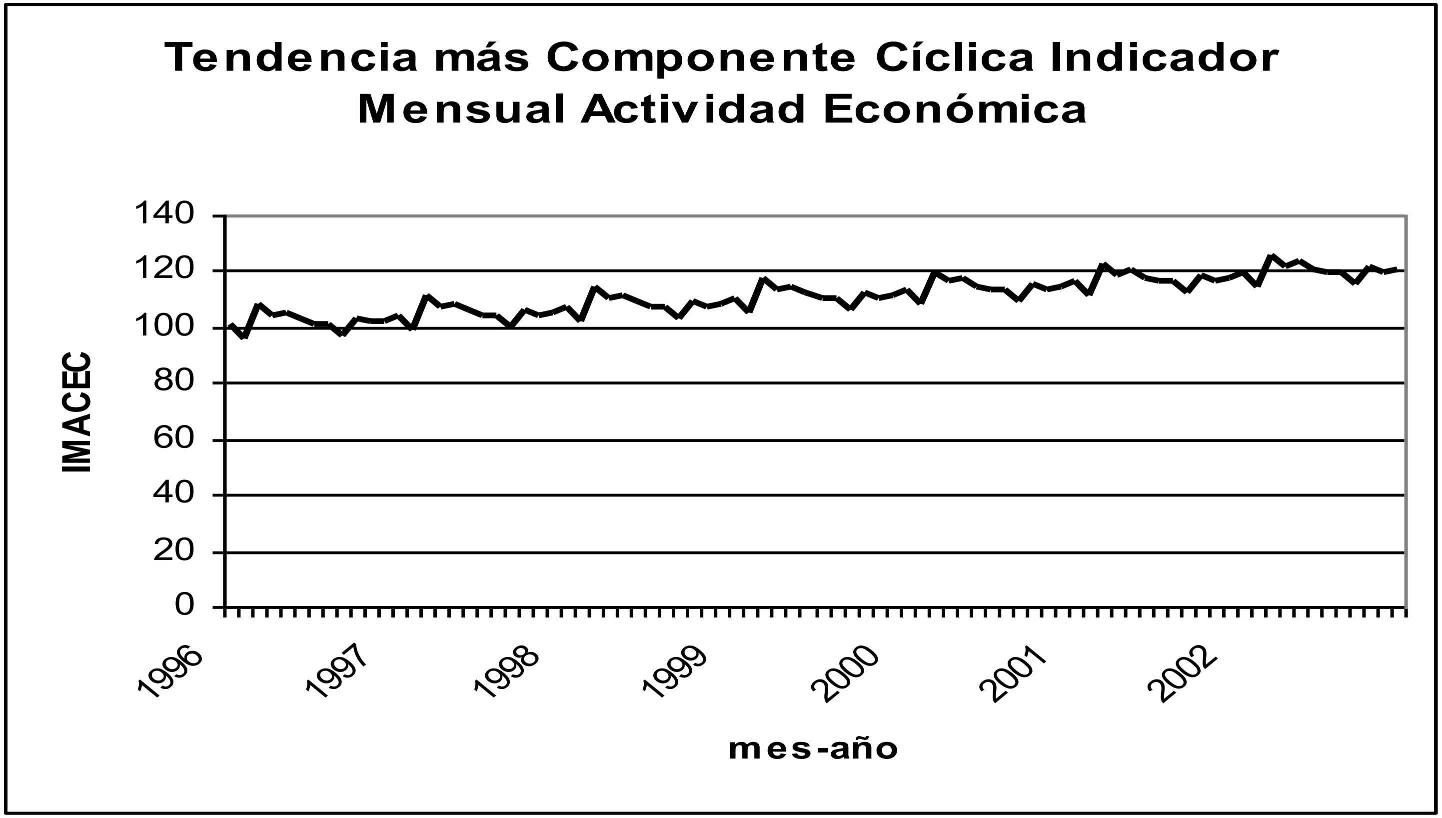
Ejemplo

- Obtenemos el error al restar tendencia y estacionalidad



Ejemplo

- La serie sin considerar la componente aleatoria



Suavizado/Alisado exponencial

Exponential smoothing

Otra alternativa para predecir valores

- Se basan en modelos paramétricos deterministas que se ajustan a la evolución de la serie
- Las observaciones más recientes tienen más peso en la predicción que las más alejadas
- Se resuelven por métodos recursivos
- Pueden ser poco realistas para explicar la evolución de la serie

Suavizado/Alisado exponencial

Exponential smoothing

- Suavizado exponencial simple
  - para series sin tendencia ni estacionalidad
- Suavizado exponencial doble
  - para series con tendencia pero no estacionalidad
- Suavizado exponencial triple
  - para series con tendencia y estacionalidad

Suavizado exponencial simple

También llamado,

Media móvil exponencial (EMA, exponential moving average)

Consiste en calcular un suavizado lineal sobre los valores de la serie temporal

$$S_t = \begin{cases} Y_1 & \text{si } t = 1 \\ \alpha Y_t + (1-\alpha) S_{t-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

El parámetro es un valor entre 0 y 1

- cuanto mayor sea, menos se tienen en cuenta los valores pasados (=menos se suaviza)
- Se suele tomar del tipo 2/(n+1), donde n es el periodo a tener en cuenta

Suavizado exponencial simple

Media móvil exponencial (EMA, exponential moving average)

Suavizado exponencial simple

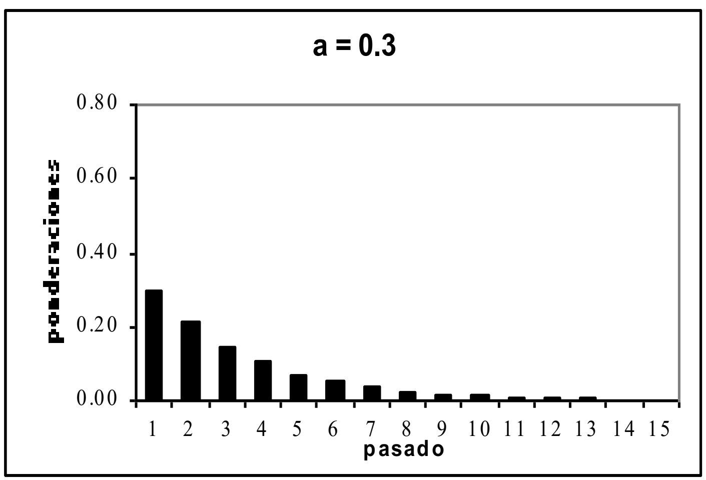
Media móvil exponencial (EMA, exponential moving average)

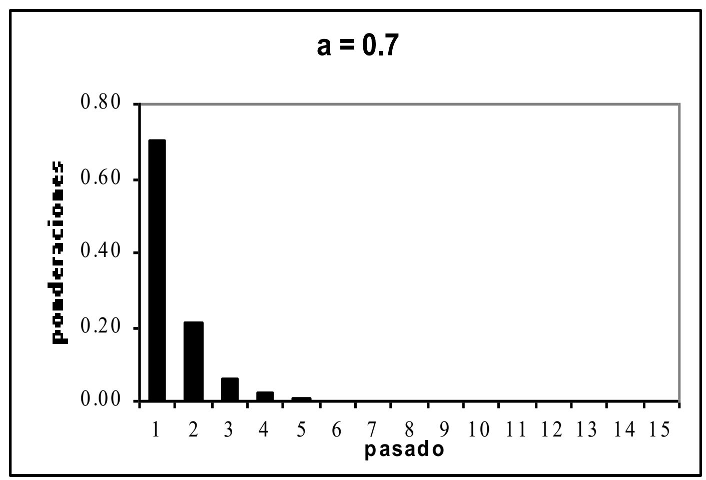
Se llama exponencial porque se cumple:

$$S_t = aY_t + a(1-a)Y_{t-1} + a(1-a)^2 Y_{t-2} + \cdots + a(1-a)^n Y_{t-n}$$

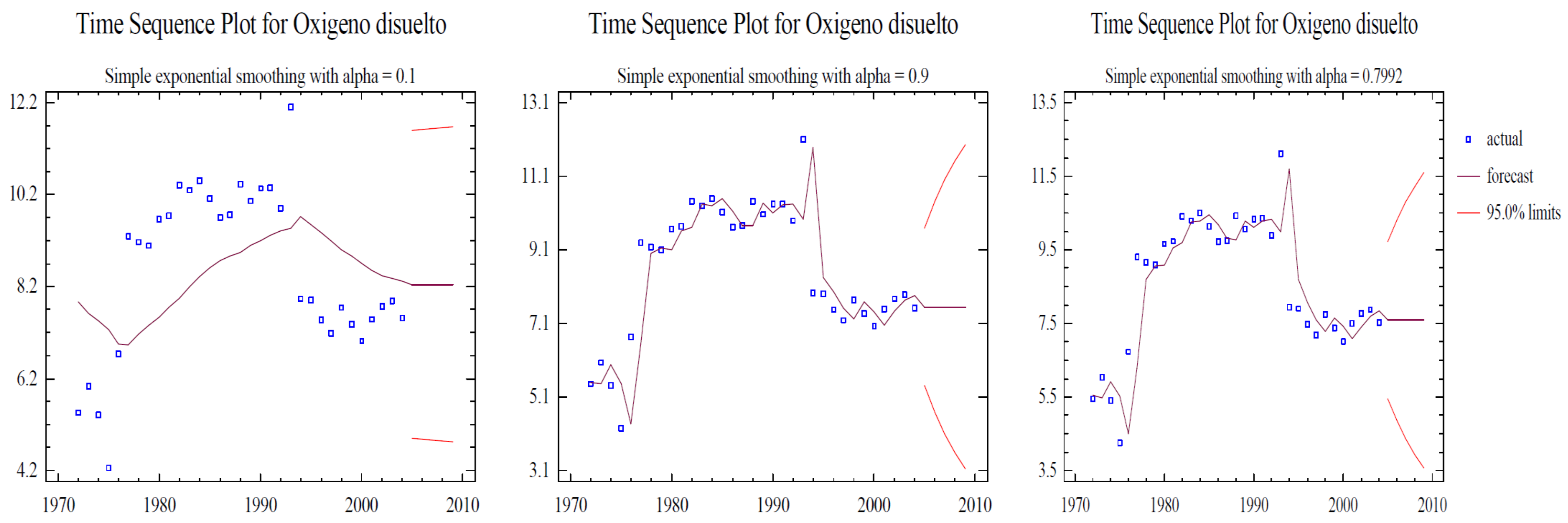
$$= \sum_{i=0}^{n} a(1-a)^i Y_{t-i}$$

Se puede observar aquí el efecto de disminuir el parámetro





Suavizado exponencial simple



Suavizado exponencial simple

"Uso" en predicción:

- Tampoco es demasiado útil
- Si extendemos el suavizado más allá del final de los datos disponibles (tiempo T), la predicción es extremadamente simple

$$S_{T+k} = S_T$$

- Al igual que la media móvil, ante la presencia de tendencias, la señal suavizada tiende a ir retrasada con respecto a los datos originales salvo que utilicemos un valor de α cercano a 1

Suavizado exponencial de Holt (doble)

- Se emplea para series con tendencia lineal y sin estacionalidad
- Utiliza dos parámetros: doble

$$\begin{cases} S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) \\ B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} \\ S_1 = Y_1, S_2 = Y_2, B_1 = 0, B_2 = Y_2 - Y_1 \end{cases}$$

Tendencia suavizada

- Retiene información acerca de la tendencia
- Para predicción

$$S_{T+k} = S_T + hB_T$$

Alisado exponencial de Holt-Winters (triple)

- Se emplea para series con tendencia y estacionalidad
- Se utilizan tres parámetros: triple

$$\begin{cases} S_t = \alpha \frac{Y_t}{E_{t-s}} + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) \\ B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} \\ E_t = \delta \frac{Y_t}{S_t} + (1-\delta)E_{t-s} \end{cases}$$

Forma multiplicativa

- Tiene en cuenta la componente estacional
- El periodo observado es s
- Para predicciones

$$S_{T+k} = (S_T + kB_T)S_{T-s+k}$$

Forma multiplicativa

Alisado exponencial de Holt-Winters (triple)

- Se emplea para series con tendencia y estacionalidad
- Se utilizan tres parámetros

$$\begin{cases} S_t = \alpha(Y_t - E_{t-s}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + B_{t-1}) \\ B_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)B_{t-1} \\ E_t = \delta(Y_t - S_t) + (1-\delta)E_{t-s} \end{cases}$$

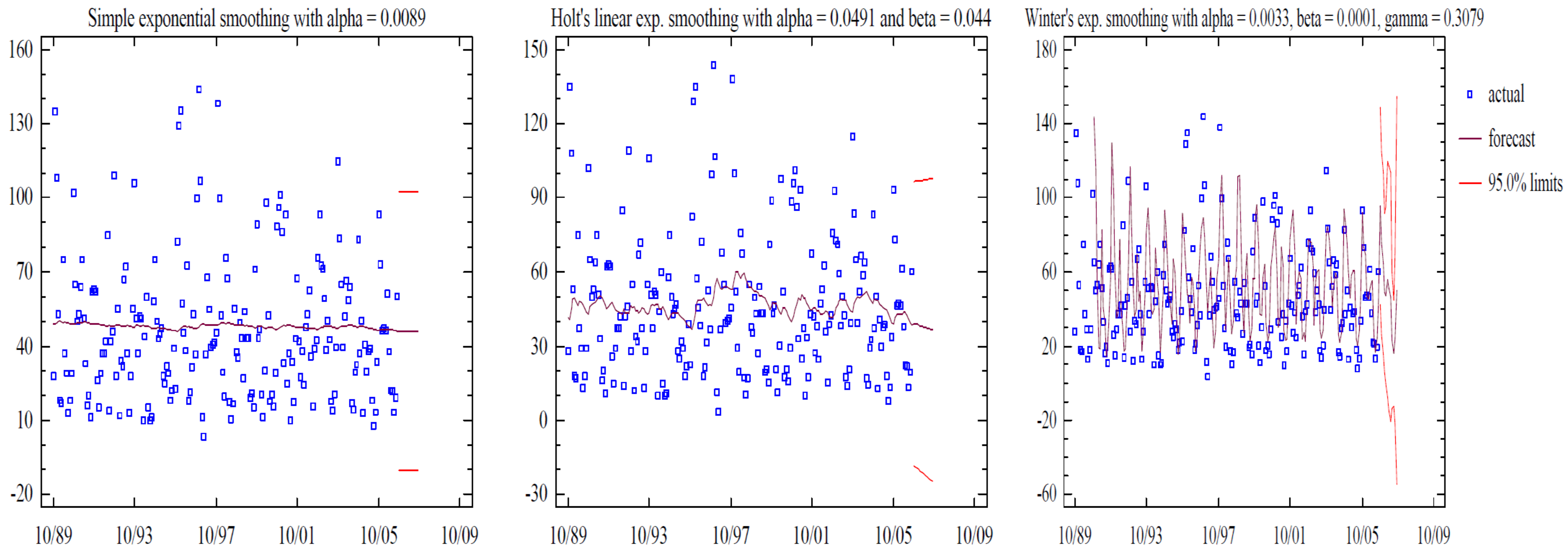
Forma aditiva

- Tiene en cuenta la componente estacional
- El periodo observado es s
- Para predicciones

$$S_{T+k} = S_T + kB_T + S_{T-s+k}$$

Forma aditiva

Suavizado exponencial



Modelos AR

Los modelos AutoRegresivos establecen que los valores de la serie temporal se obtienen como combinación lineal (más un error) de los valores anteriores

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_n Y_{t-n} + \epsilon_t$$

Coeficientes

Error

Ruido blanco
$N(0,\sigma^2)$

Se denotan por AR(n), donde n es el número de términos anteriores que se utilizan

Modelos AR

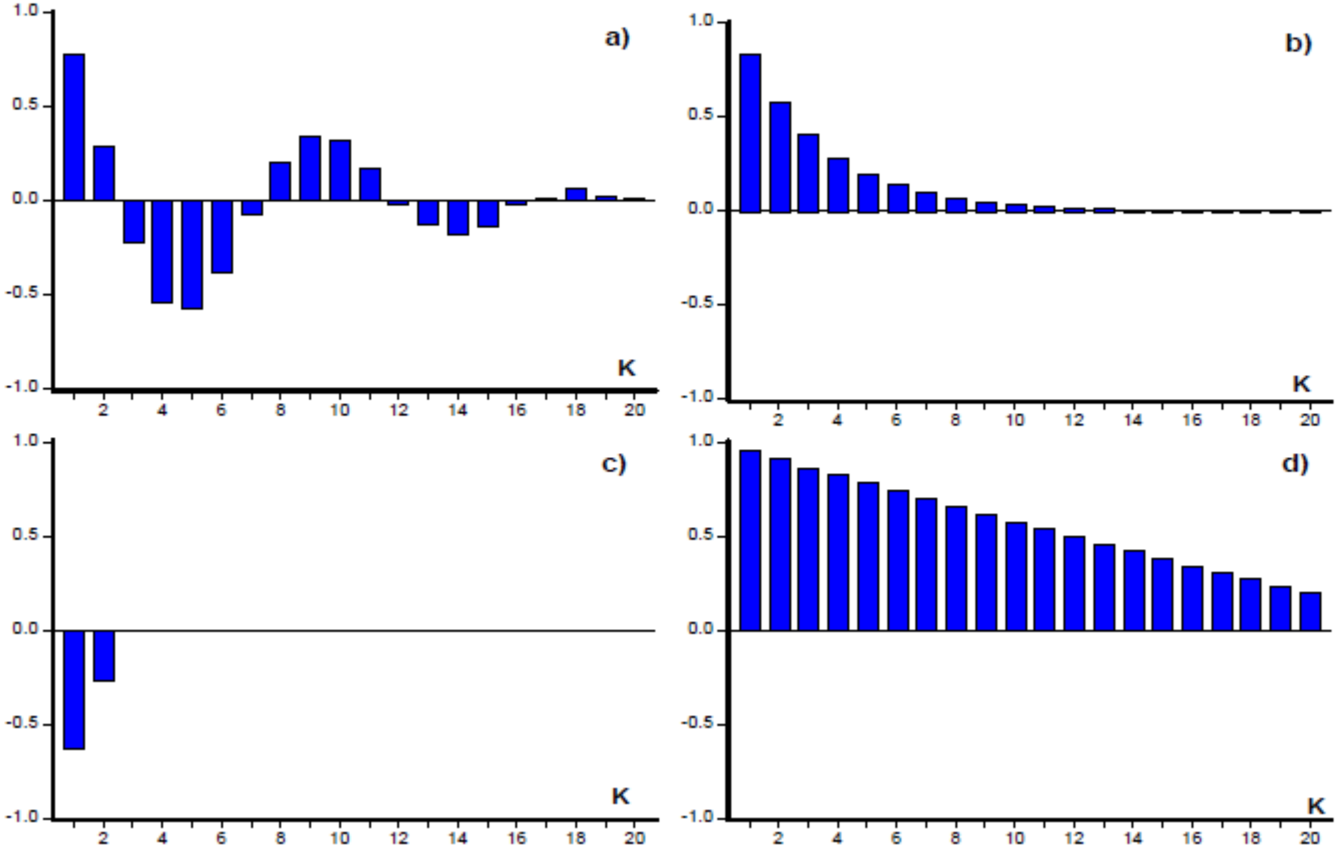
- Estos modelos se aplican a series estacionarias
- Para el cálculo de coeficientes utilizaremos los coeficientes de autocorrelación

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - \overline{Y})(Y_{t+k} - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{T} (Y_t - \overline{Y})^2}$$

donde $\overline{Y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_t$

Modelos AR

La función de autocorrelación es el valor del coeficiente de autocorrelación para los distintos valores k



Modelos AR

Los coeficientes se obtienen como solución del sistema

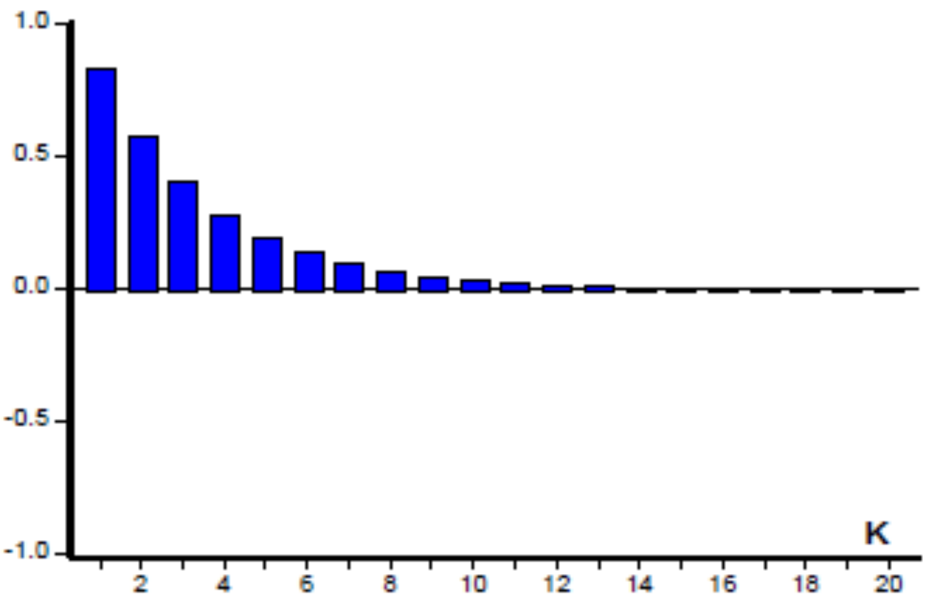
$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_n \rho_{n-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n \rho_{n-2} \\
&\vdots \\
\rho_n &= \phi_1 \rho_{n-1} + \phi_2 \rho_{n-2} + \cdots + \phi_n
\end{aligned}
$$

Modelo AR(1)

La serie se modela de la forma

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

- En este caso $\phi_1 = \rho_1$
- De hecho, $\rho_k = \phi^k$



Otros

- MA
  - Modelos de medias móviles (Moving Average model)

$$Y_t = a_0 - a_1\epsilon_1 - \cdots a_n\epsilon_n$$

- ARMA
  - Modelos Autorregresivo de Medias Móviles

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + a_0 - a_1\epsilon_1 - \cdots a_q\epsilon_q$$

- ARIMA
  - Modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles

Bibliografía

- https://www.otexts.org/fpp

Algunas transparencias y gráficos tomados de:

- http://elvex.ugr.es/idbis/dm/