TEMA 2

OPERACIONES Y RELACIONES ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS

1.- Operaciones Unarias.

2.- Relaciones entre S.D. Operaciones conjuntistas.

3.- Normas y Conormas triangulares

4.- Funciones de negación

OPERACIONES UNARIAS

- **<u>Normalización</u>:** Convierte un conj. difuso NO normalizado en uno normalizado, dividiendo por su altura:

  $$Norm\_A(x) = A(x) / Altura(A).$$

- **<u>Concentración</u>** (*concentration*)**:** Su función de pertenencia tomará valores más pequeños, concentrándose en los valores mayores:
  - $Con\_A(x) = A^p(x)$, con $p>1$, (normalmente, $p=2$).

- **<u>Dilatación</u>** (*dilation*)**:** Efecto contrario a la concentración. 2 formas:
  - $Dil\_A(x) = A^p(x)$, con $p \in (0,1)$, (normalmente, $p=0.5$).
  - $Dil\_A(x) = 2A(x) – A^2(x)$.

- **<u>Intensificación del Contraste</u>** (*contrast intensification*)**:** Se disminuyen los valores menores a 1/2 y se aumentan los mayores

$$\mathrm{Int\_A}(x) = \begin{cases} 2^{p-1} A^{p}(x) & \text{si} \ A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2^{p-1}(1 - A(x))^{p} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **<u>Difuminación</u> (*fuzzification*): Efecto contrario al anterior:**

$$\mathrm{Fuzzy\_A}(x) = \begin{cases} \sqrt{A(x)/2} & \text{si} \ A(x) \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{(1 - A(x))/2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS

- **Igualdad** (*equality*)**:** Dos conjuntos difusos, definidos en el mismo Universo, son iguales si tienen la misma función de pertenencia: $A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall\, x \in X$
- **Inclusión** (*inclusion*)**:** Un conjunto difuso está incluido en otro si su función de pertenencia toma valores más pequeños:

  $$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), \forall\, x \in X$$

- **Inclusión Difusa:** Si el Universo es finito, podemos relajar la condición anterior para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A,B) = \frac{1}{\mathrm{Card}(A)} \left\{ \mathrm{Card}(A) - \sum_{x \in X} \max\{0, A(x) - B(x)\} \right\}$$

El cardinal tomado en sentido de Zadeh como suma de los valores de pertenencia de los elementos del conjunto.

Ejemplo:

- ***A*** = (0.2/1+ 0.3/2+ 0.8/3+ 1/4 + 0.8/5) $\Rightarrow$ **Card(*A*) = 3.1**;
- ***B*** = 0.2/2+ 0.3/3+ 0.8/4+ 1/5 + 0.1/6 $\Rightarrow$ **Card(*B*) = 2.4**;
- ***S*(*A*, *B*) =** 1/3.1 {3.1 – {0.2+0.1+0.5+0.2+0+0} } = 2.1 / 3.1 **= 0.68**;
- ***S*(*B*, *A*) =** 1/2.4 {2.4 – {0+0+0+0+0.2+0.1} } = 2.1 / 2.4 **= 0.88**;
- ***B*** está más incluido en ***A***, que ***A*** en ***B***.

OPERACIONES CONJUNTISTAS

$A(x)$, $B(x)$ son conjuntos difusos en el universo X.

Unión: $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \text{máx}\,\{A(x), B(x)\}$

Intersección: $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \text{mín}\,\{A(x), B(x)\}$

Negación (complemento): $A(x) = \neg A(x) = 1 - A(x)$

Propiedades Básicas:

Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$;

- Idempotencia: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
- Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- Condiciones Frontera o Límite: $A \cup \varnothing = A$; $A \cup X = X$;

  $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap X = A$;
- Involución (doble negación): $\neg(\neg A) = A$;
- Transitiva: $A \subset B$ y $B \subset C$, implica $A \subset C$;

• Leyes de De Morgan:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \overline{\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}}$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \overline{\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}}$$

- Propiedades Añadidas: Se deducen de las anteriores.
  - $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$;
  - Si $A \subset B$, entonces $A = A \cap B$ y $B = A \cup B$;
  - Card(A) + Card(B) = Card($A \cup B$) + Card($A \cap B$);
  - Card(A) + Card($\neg A$) = Card(X);

NORMAS Y CONORMAS TRIANGULARES

- Conceptos derivados de Menger (1942) y Schwizer y Sklar (1983), actualmente están muy desarrollados (Butnario et al., 1993).
- Establecen modelos genéricos para las operaciones de unión y intersección, las cuales deben cumplir ciertas propiedades básicas (conmutativa, asociativa, monotonicidad y condiciones frontera).
- Definiciones:
  - Norma Triangular, t-norma: Operación binaria

$$t: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

  que cumple las siguientes propiedades:

    - Conmutativa: $x \text{ t } y = y \text{ t } x$
    - Asociativa: $x \text{ t } (y \text{ t } z) = (x \text{ t } y) \text{ t } z$
    - Monotonicidad: Si $x \leq y$, y $w \leq z$ entonces

$$x \text{ t } w \leq y \text{ t } z$$

    - Condiciones Frontera: $x \text{ t } 0 = 0$, $x \text{ t } 1 = x$

– <u>Conorma Triangular</u>, t-conorma o s-norma: Op. bin.

$$s: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

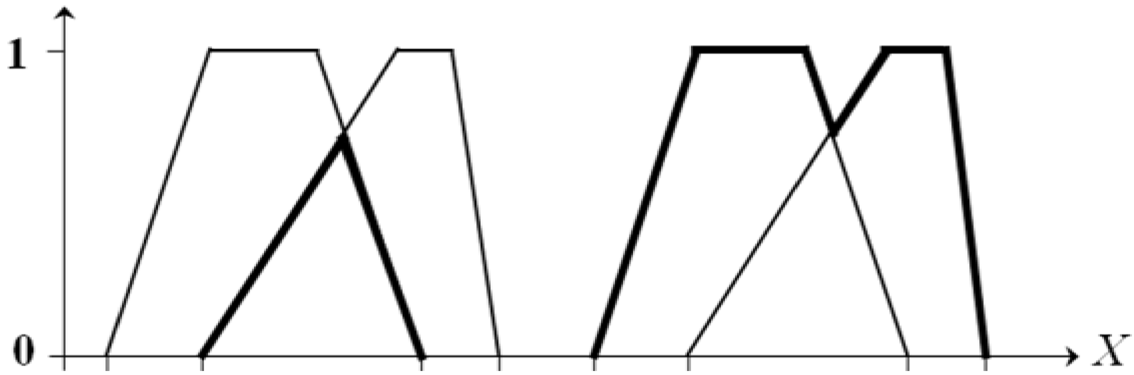
que cumple las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $x \text{ s } y = y \text{ s } x$
- Asociativa: $x \text{ s } (y \text{ s } z) = (x \text{ s } y) \text{ s } z$
- Monotonicidad: Si $x \leq y$, y $w \leq z$ entonces

$$x \text{ s } w \leq y \text{ s } z$$

- Condiciones Frontera: $x \text{ s } 0 = x$, $x \text{ s } 1 = 1$

- <u>t-norma del mínimo</u>: La función mín (∧) es una t-norma, que corresponde a la operación de intersección en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en {0,1}. Por eso, esta función es la extensión natural de la intersección en conjuntos difusos.
- <u>t-conorma o s-norma del máximo</u>: La función máx (∨) es una s-norma, que corresponde a la operación de unión en conjuntos clásicos cuyos grados de pertenencia están en {0,1}. Por eso, esta función es la extensión natural de la unión en conjuntos difusos.
- <u>Ejemplos</u>: Intersección Unión



OTRAS t-NORMAS

- 1. **Producto**: $x \cdot y$;
- 2. **Producto Drástico**: $\begin{cases} x, & \text{si } y = 1; \\ y, & \text{si } x = 1; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$
- 3. **Producto Acotado**: $\text{máx}(0, (1+p)(x+y-1) - pxy), p \geq -1$, (usual. p=0);
- $\sqrt[p]{\max(0, x^p + y^p - 1)}, \quad p > 0,$ (usualmente p=1);
- 4. **Producto de Hamacher** : $\dfrac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)}, \quad p \geq 0,$ (usual. p=0);
- 5. **Familia Yager**: $1 - \min(1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}), \quad p > 0;$
- 6. **Familia Dubois-Prade**: $xy / \text{máx}(x, y, p), \quad p \in [0,1];$
- 7. **Familia Frank**: $\log_p\left(1 + \dfrac{(p^x - 1)(p^y - 1)}{p - 1}\right), \quad p > 0, p \neq 1;$
- 8. **Producto de Einstein**: $\dfrac{xy}{1 + (1-x) + (1-y)};$
- 9. **Otras t-normas**:

$$\frac{1}{1 + \sqrt[p]{((1-x)/x)^p + ((1-y)/y)^p}}, \quad p > 0; \qquad \frac{1}{\sqrt[p]{1/x^p + 1/y^p - 1}};$$

OTRAS s-NORMAS

- 1. **Suma-Producto**: $x + y - xy;$
- 2. **Suma Drástica**: $\longrightarrow \begin{cases} x, & \text{si } y = 0; \\ y, & \text{si } x = 0; \\ 1, & \text{enotro caso;} \end{cases}$
- 3. **Suma Acotada**: $\text{mín}(1, x + y + pxy), \ \ p \geq 0;$
- 4. **Familia Sugeno**: $\text{mín}(1, x + y + p - xy), \ \ p \geq 0;$
- 5. **Familia Yager**: $\min(1, \sqrt[p]{x^p + y^p}), \ \ p > 0;$
- 6. **Familia Dubois-Prade**: $1 - \dfrac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x, 1-y, p)}, \ \ p \in [0,1];$
- 7. **Familia Frank**: $\log_p\left(1 + \dfrac{(p^{1-x} - 1)(p^{1-y} - 1)}{p - 1}\right), \ \ p > 0, p \neq 1;$

ALGUNAS PROPIEDADES

Para cada t-norma existe una s-norma dual o conjugada (y viceversa):

x s y = 1 – (1 – x) t (1 – y)   (usamos la negación original)

x t y = 1 – (1 – x) s (1 – y)

Esas son las Leyes de De Morgan de la teoría de conjuntos difusos, que en conjuntos crisp se aplican a la unión y a la intersección:

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{\overline{A} \bigcap \overline{B}}$$

$$A \bigcap B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$$

t-normas y s-normas <u>no pueden ordenarse</u> de mayor a menor.

Sin embargo, es fácil identificar la mayor y la menor t-norma y s-norma:

- Mayor t-norma : Función mínimo.
- Menor t-norma : Producto drástico.
- Mayor s-norma : Suma drástica.
- Menor s-norma : Función máximo.

- t-norma Arquimediana: Si es continua y $x \text{ t } x < x$, $\forall x \in (0,1)$.
- s-norma Arquimediana: Si es continua y $x \text{ s } x > x$, $\forall x \in (0,1)$.

NEGACIONES

Complemento o Negación de un conjunto difuso:

N: $[0,1] \rightarrow [0,1]$

cumpliendo las siguientes condiciones:

- Monotonia: N es no creciente.
- Condiciones Frontera: $N(0)=1$, $N(1)=0$;

Pueden añadirse otras propiedades, si es necesario:

- Continuidad: N es una función continua.
- Involución: $N(N(x)) = x$, para $x \in [0,1]$;

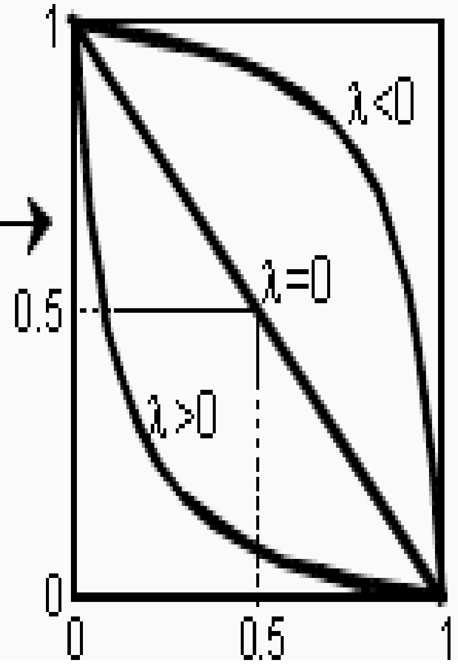
Ejemplos:

- **No involutivas:** $N(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < a; \\ 0, & \text{si } x \geq a; \end{cases}$ con $a \in [0,1]$ (Funcion umbral)

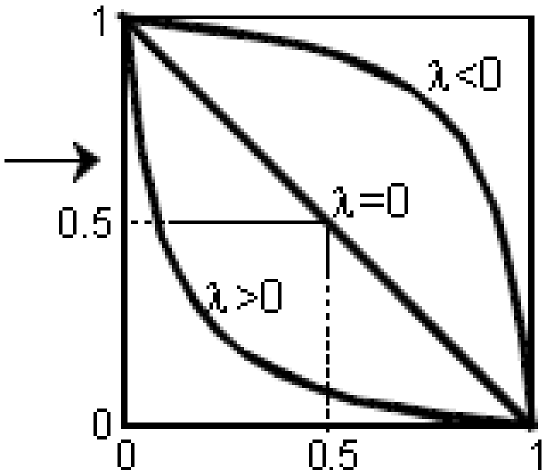
$$N(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x > 0; \end{cases}$$

- **Involutivas:** $N(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}, \quad \lambda \in (-1,\infty);$

$$N(x) = \sqrt[w]{1-x^{w}}, \quad w \in (0,\infty);$$



  – Con $\boldsymbol{\lambda = 0}$ y $\boldsymbol{w = 1}$, obtenemos la función **negación original:** $N(x) = 1 - x;$



<u>Sistema Formal de Operaciones Lógicas</u> (t, s, N): Sistema formado por una t-norma, una s-norma y una negación N, donde la t-norma y la s-norma son duales respecto N:

- x s y = $N(N(x)$ t $N(y))$;   o lo que es equivalente:
- x t y = $N(N(x)$ s $N(y))$;

- Ejemplo (el sistema formal más empleado):
- x t y = mín (x, y);
- x s y = máx (x, y);
- $N(x) = 1 – x$;