# Introducción a las matrices y transformaciones

Una matriz es una tabla de números (o expresiones matemáticas) alineadas en filas y columnas.

- **La dimensión ($m \times n$) de una matriz** es el número de filas ($m$) por el número de columnas ($n$).
- En nuestro caso usaremos matrices $4x4$ para representar operaciones geométricas en $\mathbb{E}^3$.
- Se denomina matriz identidad ($I$) a aquella que no posee ni traslaciones, ni rotaciones ni escalados, ni proyecciones, o deformación alguna en el espacio.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Elementos de la matriz y Godot

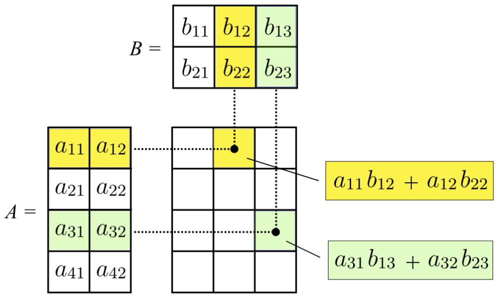
Notamos $a_{i,j}$ al valor de la matriz que se encuentra en la fila ($i$) y la columna $j$). En Godot se nota como **a.i.j**.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

- En Godot tenemos el objeto **Trasform**, que elimina la última fila de las matrices ya que siempre será el vector $(0, 0, 0, 1)$ en nuestro caso.
  - Así, una matriz $Transform$ tendrá tamaño $3 \times 4$.
  - ¡Cuidado! En realidad es una matrix $4 \times 4$ matemáticamenta hablando, pero en la práctica nos ahorramos cálculos, al eliminar la última fila, que siempre resultarán en el mismo número.

## Operando matrices

El algoritmo estándar para multiplicar matrices sigue la regla: filas de A por columnas de B y luego sumar los datos. El resultado va en la fila (para A) y columna (para B) utilizada.




¡Cuidado! La operación de multiplicación entre matrices **¡no es conmutativa!**.

## Operando vectores y matrices

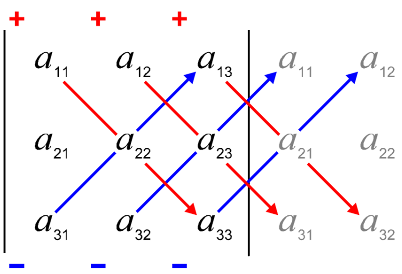
- Todo vector de posición se coloca en forma de columna y se multiplica por la derecha.

$$M \times \vec{v} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fíjate, que si eliminas el último componente del vector y la última fila de la matriz, tienes la operación que realiza Godot internamente (dado que la operación siempre resultará 1 en la última componente).

## Determinantes

En muchos casos es necesario calcular el determinante de una matriz. Para calcular el determinante de una matriz $3 \times 3$ puedes usar la regla de Sarrus:




$$\det(M) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Es muy típico eliminar la última fila y la última columna de la matriz para realizar esta operación, dado que la última columna solamente representa traslaciones y la última columna es siempre el vector $(0, 0, 0, 1)$.

## Cuaterniones (*Quaternions*)

Si tenemos tres ejes rotando en el espacio, hay un momento que los tres ejes se alinean, y entonces perdemos un grado de libertad, ver *bloqueo de cardán*.

Para evitarlo se usa otra notación matemática para representar las orientaciones y las rotaciones de objetos en tres dimensiones: los cuaterniones.

Los cuaterniones se basan en la definición de un espacio vectorial utilizando tres números complejos **i**, **j**, **k**, donde **i**$\times$**j**$=$**k** y **i**$\times$**k**$= -$**j**.

Lo que resulta en un vector de cuatro componentes, donde el cuaternión identidad ($Q_I$) se representa por los valores $\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$.

- En Godot tienes métodos para convertir tres ángulos de Éuler en un cuaternión, y a la inversa.
- En Godot puedes interpolar dos cuaterniones sin problema mediante la clase *Quat*.

## Bibliografía


- Matemáticas: matrices y transformaciones, documentación de Godot.
  - https://docs.godotengine.org/es/stable/tutorials/math/matrices_and_transforms.html
  - https://docs.godotengine.org/es/stable/classes/class_transform.html?highlight=transform#transform
- Quaternions: rotaciones avanzadas.
  - https://eater.net/quaternions