

## Lógica difusa en ingeniería civil. Parte 2

*Sistemas con técnicas de lógica difusa. Mostrar el carácter difuso de las variables.*

### Sistemas con técnicas de lógica difusa

#### Componentes



El sistema se plantea en tres bloques asociados también a los procesos para usar las técnicas de lógica difusa. Son los bloques de difusión, de inferencia y de desdifusión.

Es importante saber de las entradas y salidas del sistema. Las primeras están conformadas por las variables que son tomadas en cuenta en la representación que pretende el sistema. La salida es un resultado en concreto (no difuso).

Los componentes del sistema se relacionan directamente con estas entradas y salidas.

- El primer bloque, denominado **bloque difusor**, comprende tanto tener claras las entradas, como presentar adecuadamente las variables como conjuntos difusos y sus correspondientes funciones de pertinencia. Mostrar la difusión.
- El **mecanismo de transferencia** traslada el conjunto difuso de las entradas a su correspondiente conjunto de salidas. Es importante aclarar que el nuevo conjunto también es difuso.
- Como quiera que las decisiones deben adoptarse sobre la base de conjuntos concretos (no difusos), este tercer bloque, llamado **desdifusor**, está encargado de transformar el conjunto difuso de salida a un conjunto concreto, preciso.

La descripción de estos bloques se efectúa en base a la siguiente referencia.

#### Referencia

Timothy J. Ross (University of New Mexico, USA). *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. McGraw-Hill, Inc. International Edition. 1995.

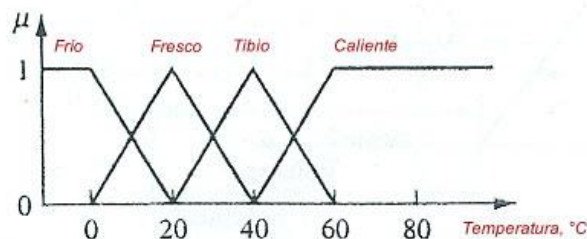
## Mostrar el carácter difuso de las variables

Muchas de las cantidades que consideramos como precisas, concretas, o determinísticas, realmente no lo son del todo. Lo usual es que lleven una cantidad importante de incertidumbre. Por ejemplo, la lectura a través de un equipo de medición, que consideramos precisa, lleva consigo las aproximaciones del propio equipo. Al hacer resaltar esta imprecisión o vaguedad, las variables pueden ser tratadas como difusas y estar representadas por sus respectivas funciones de pertenencia.

Esta etapa en el sistema de técnicas de lógica difusa, se auxilia de varios métodos que van desde lo intuitivo hasta el uso de algoritmos o de operaciones lógicas. Aquí algunos de estos métodos.

- Intuición
- Inferencia
- Ordenamiento por ranking
- Conjuntos difusos angulares
- Redes neurales
- Algoritmos genéticos
- Razonamiento inductivo
- Partición blanda
- Meta reglas
- Estadística difusa.

### Intuición



**Figura 8. Funciones de pertenencia para la variable temperatura**

En este método se utiliza la capacidad de las personas para adoptar funciones de pertinencia a partir de la comprensión del problema que se aborda, y su buen criterio. Se requiere tomar en cuenta el contexto y contar con el conocimiento semántico necesario para la representación de la variable y su distribución difusa. En la Figura 8 se ilustran diferentes funciones para la medición de la temperatura. En este caso, cada una de las variables (frío, fresco, tibio, caliente) tiene su propia función de pertenencia y su propio rango dentro del universo de valores. Por supuesto que aunque se trata de una calificación general de la

temperatura, el contexto puede acondicionar su aplicación, digamos para el caso de una investigación criogénica, o para un estudio de calderos.

Es útil llamar la atención en que las curvas se superponen. La forma de superposición así como los rangos parciales de los valores de las variables son aproximaciones efectuadas por el analista, y en muchos casos no llegan a ser fundamentales para el tipo de solución que se busca.

## Inferencia

En la inferencia se emplea conocimiento para un razonamiento deductivo. Dado un conjunto de hechos o conocimiento, se infiere una conclusión. Una de las maneras de ilustrar este método es el de las formas geométricas. Así, considérese un triángulo cuyos ángulos interiores son  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , en el orden

$$A \geq B \geq C \geq 0$$

Además, sea  $U$  el universo de los triángulos. Entonces

$$U = \{(A, B, C) | A \geq B \geq C \geq 0; A + B + C = 180^\circ\}$$

Definimos los siguientes tipos de triángulos posibles de identificar para cualquier colección de ángulos con las restricciones precedente.

I: aproximadamente un triángulo isósceles

R: aproximadamente un triángulo recto

IR: aproximadamente un triángulo isósceles y triángulo recto

E: aproximadamente un triángulo equilátero

T: otro tipo de triángulo.

Para un triángulo aproximadamente *isósceles* tenemos el siguiente algoritmo para la pertenencia, con las restricciones impuestas para  $U$ .

$$\mu_I(A, B, C) = 1 - \frac{1}{60^\circ} \min(A - B, B - C)$$

Por ejemplo, si  $A=B$  o  $B=C$ , el valor de pertenencia en el triángulo aproximadamente isósceles es  $\mu_I=1$ . Si  $A=120^\circ$ ,  $B=60^\circ$ , y  $C=0$ , entonces  $\mu_I=0$ .

Para un triángulo *recto difuso*, se tiene

$$\mu_R(A, B, C) = 1 - \frac{1}{90^\circ} |A - 90^\circ|$$

Así, cuando  $A=90^\circ$ , el valor de pertenencia es  $\mu_R=1$ , o cuando  $A=180^\circ$ , este valor se desvanece,  $\mu_R=0$ .

Para el caso de un triángulo aproximadamente *isósceles y recto*, aplica la intersección correspondiente.

$$IR = I \cap R$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned} \mu_{IR}(A, B, C) &= \min[\mu_I(A, B, C), \mu_R(A, B, C)] \\ &= 1 - \max\left[\frac{1}{60^\circ} \min(A - B, B - C), \frac{1}{90^\circ} |A - 90^\circ|\right] \end{aligned}$$

Para el caso de un triángulo aproximadamente *equilátero* se tiene

$$\mu_E(A, B, C) = 1 - \frac{1}{180^\circ} (A - C)$$

Por ejemplo, cuando  $A=B=C$  el valor de pertenencia es igual a 1. Cuando  $A=180^\circ$  el valor de pertenencia es 0.

Para el caso de *otros triángulos* (aquellos distintos a  $I$ ,  $R$ , y  $E$ ) consideramos el complemento de la unión lógica de los tres casos previos respecto a la intersección del complemento de las formas triangulares.

$$T = (\overline{I \cup R \cup E}) = \bar{I} \cap \bar{R} \cap \bar{E}$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned}\mu_T(A, B, C) &= \min\{1 - \mu_I(A, B, C), 1 - \mu_R(A, B, C), 1 - \mu_E(A, B, C)\} \\ &= \frac{1}{180^\circ} \min\{3(A - B), 3(B - C), 2|A - 90^\circ|, A - C\}\end{aligned}$$

#### ♦ Ejemplo

Defina un triángulo específico con los siguientes tres ángulos ordenados

$$\{X: A = 85^\circ \geq B = 50^\circ \geq C = 45^\circ, \text{ donde } A + B + C = 180^\circ\}$$

Al aplicar las expresiones correspondientes a los valores de pertenencia, se tiene:

$$\mu_R(x) = 0.94$$

$$\mu_I(x) = 0.916$$

$$\mu_{IR}(x) = 0.916$$

$$\mu_E(x) = 0.7$$

$$\mu_T(x) = 0.05$$

De donde se obtiene que el triángulo en cuestión tenga el mayor nivel de pertenencia entre los triángulos rectos difusos.

### Ordenamiento por ranking

La valoración de preferencias proporcionadas por un individuo, un comité, un grupo u otros métodos de opinión (sería aplicable también al método Delphi), puede utilizarse para asignar valores de pertenencia en una variable difusa. Las preferencias se determinan por comparación entre pares (como en el método de análisis jerárquico, AHP), y esto determina el orden de la pertenencia.

**Tabla 1. Ejemplo en un ordenamiento por ranking**

Color	Número de quienes prefieren					Total	%	Orden
	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul			
Rojo	--	517	525	545	661	2248	22.5	2
Naranja	483	--	841	477	576	2377	23.8	1
Amarillo	475	159	--	534	614	1782	17.8	4
Verde	455	523	466	--	643	2087	20.9	3
Azul	339	524	386	357	--	1506	1.5	5
Total						10000		

Considérese el ejemplo de preferencia entre cinco colores  $X=\{\text{rojo, naranja, amarillo, verde, azul}\}$ . En la Tabla 1 se recuentan las preferencias a las 1000 personas consultadas con los siguientes resultados, por ejemplo: 517 prefirieron el rojo al naranja, en consecuencia, 483 prefirieron el naranja al rojo. O bien, 841 prefirieron el naranja al amarillo (y así, 159 prefirieron el amarillo al naranja). Se trata de un arreglo antisimétrico. El número total de respuestas es 10000 (10 comparaciones por persona). Al normalizar la suma al total de respuestas, se puede establecer un ranking según se muestra al final de la tabla.

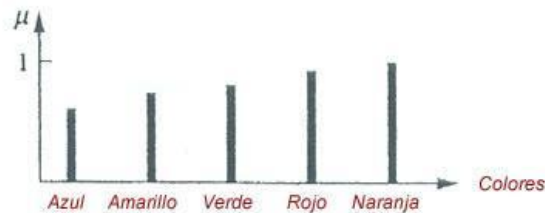


Figura 9. Función de pertenencia para el mejor color

Al utilizar la última columna de valores normalizados de la tabla, se puede graficar la función de pertenencia que se indica en la Figura 9.

## Conjuntos difusos angulares

A diferencia de un conjunto difuso estándar, un conjunto difuso angular se basa en una definición de ángulos, lo cual conduce a formas repetidas cada ciclo de  $2\pi$ . Este tipo de conjuntos se usa en descripciones cuantitativas de variables lingüísticas conocidas como valores de verdad. Las correspondientes proposiciones lógicas están asociadas a grados de verdad tal como se hace en los conjuntos difusos (así, un valor de pertenencia igual a 1 para decir que es verdadero, de 0 para aceptar que es falso, e intermedios para parcialmente verdaderos -o parcialmente falsos-).

Considérese como ejemplo que se miden muestras de agua de un manantial para valorar su contaminación a través del  $pH$  correspondiente. Las lecturas son lingüísticas, como muy básica o alcalina, parcialmente ácida, etc.

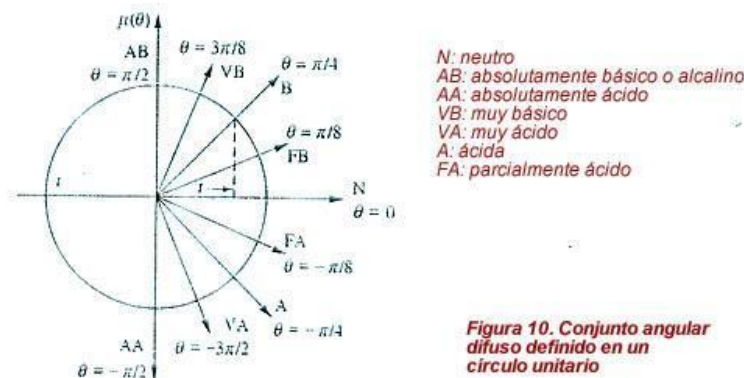


Figura 10. Conjunto angular difuso definido en un círculo unitario

---

*El pH mide la acidez o alcalinidad de una solución. Tiene valores de 0 a 14. Cerca de 7, como el agua, es neutro. Las soluciones son ácidas con valores de pH menores a 7. Son básicas o alcalinas para valores mayores a 7.*

---

La Figura 10 ilustra la representación angular para diferentes valores lingüísticos del  $pH$ . Estos valores varían con la variable angular  $\theta$ . Los valores de pertenencia se representan como

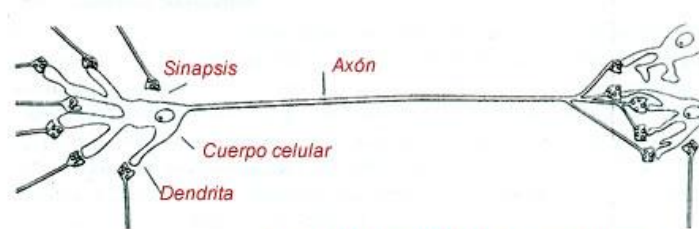
$$\mu_t(\theta) = t \operatorname{tg}(\theta)$$

Donde  $t$  es la proyección horizontal de la proyección radial.

## Redes neurales

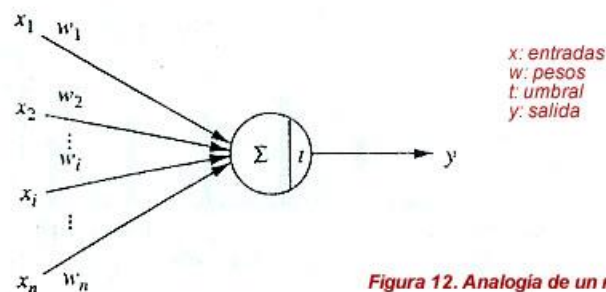
### ◆ Concepto

La forma cómo aprenden las redes neurales biológicas es aprovechada para replicarlas en redes neurales artificiales. La neurona compuesta principalmente por el cuerpo celular, el axón, las dendritas, y las conexiones sinápticas, se esquematizan en la Figura 11.



**Figura 11. Esquema de la neurona humana**

A través de impulsos vía la sinapsis, cada neurona es capaz de transmitir información a las neuronas vecinas conformando redes complejas. Estos impulsos pueden ser de excitación o inhibición, debiendo pasar un cierto umbral para el envío del mensaje.



**Figura 12. Analogía de un neutrón**

En redes neurales artificiales la analogía es la siguiente. Las variables de entrada análogas a los impulsos que llegan a una neurona se designan con  $x_i$ . Las variables  $w_i$  son los pesos asignados a cada entrada y simulan la importancia de cada entrada. El total de entradas se calcula como la sumatoria  $\sum x_i w_i$ , y se compara con un cierto umbral preestablecido  $t$ . Si la sumatoria excede al umbral, la salida  $y$  se calcula con el auxilio de una cierta función  $F$ .

$$y = F(\sum w_i x_i - t)$$

La función  $F$  más usada es la del tipo sigmoideo.

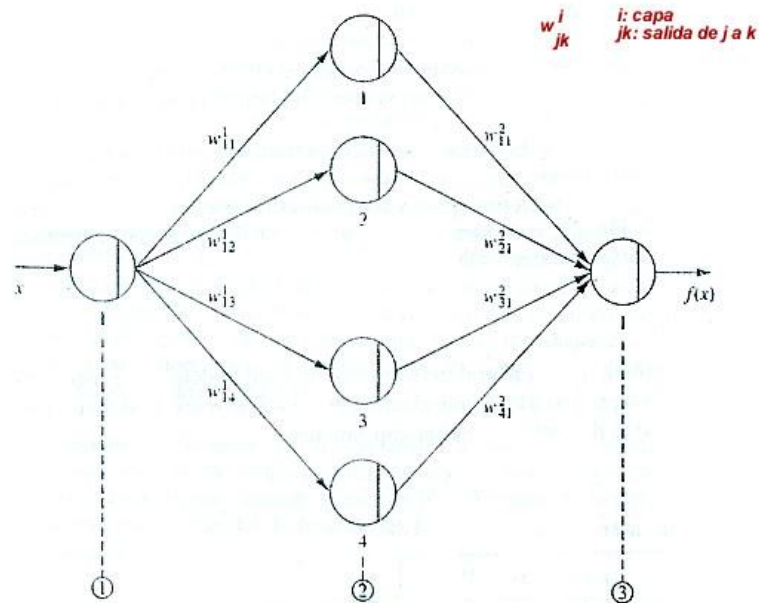


Figura 13. Red neuronal  $1 \times 4 \times 1$  de tres capas: (1) capa de entrada, (2) capa oculta, y (3) capa de salida

La Figura 13 muestra una red neuronal simple con una entrada  $x$ , y una salida  $f(x)$ . En la capa de entrada, la única neurona  $i$  envía señales a una segunda capa, llamada capa intermedia u oculta, con cuatro neuronas. Desde la segunda capa, cada neurona envía una señal a la capa de salida conformada por una sola neurona  $j$ . De ahí que en el caso de la figura, se trata de una red neuronal  $1 \times 4 \times 1$ .

Para resolver problemas con el auxilio de redes neurales se utiliza un conjunto de datos reales (tanto de entrada  $x$  como de salida  $f(x)_{real}$ ), en los siguientes términos: una parte se emplean en el entrenamiento de la red, y la otra para verificar el aprendizaje. Se asume un conjunto de pesos  $w_{ij}$ . Entonces, los datos  $x$  del conjunto de datos de entrenamiento se aplican a la red, y se obtienen las correspondientes salidas  $f(x)_{salida}$ . El error  $\delta$  se calcula para cada par de datos, como:

$$\delta = f(x)_{real} - f(x)_{salida}$$

Como en la Figura 13, este error es asociado a la capa de salida.

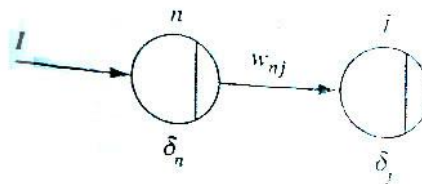


Figura 14. Distribución del error entre neuronas (proceso en reversa)

Lo que sigue es distribuir este error entre los elementos de la capa intermedia u oculta mediante un procedimiento que se conoce como *backpropagation* o propagación en reversa. Como se indica en la Figura 14:

$$\delta_n = F'(I)w_{nj}\delta_j$$

Cuando se utiliza la función sigmoideo:

$$F(I) = \frac{1}{1 + e^{-I}} \quad F'(I) = F(I)[1 - F(I)]$$

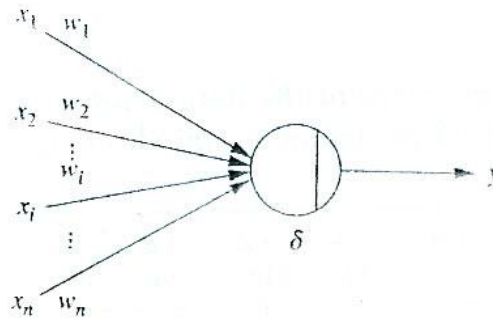


Figura 15. Elemento con un error asociado

Para un elemento con error asociado  $\delta$  los pesos correspondientes se actualizan de la siguiente manera:

$$w_i(\text{nuevo}) = w_i(\text{antiguo}) + \alpha\delta x_i$$

Donde  $\alpha$  es una constante de aprendizaje,  $\delta$  es el error asociado, y  $x_i$  es la entrada al elemento.

Con esta nueva información el proceso se repite hasta encontrar un error dentro de límites prefijados.

#### ♦ Generación de funciones de pertenencia

**Tabla 2. Ejemplo de variables que describen los puntos de datos usados como conjunto para entrenamiento**

Puntos	1	2	14
$x_1$	0.7	0.8	
$x_2$	0.8	0.2	

La Tabla 2 muestra los valores en coordenadas considerados como datos de entrada para el entrenamiento de una red. En la Figura 16a estos valores se muestran en forma gráfica como coordenadas en un problema bidimensional. Tales valores se agrupan por regiones o clases presentadas en la misma figura como  $R^1$ ,  $R^2$ , y  $R^3$ .

Considérese por ejemplo el punto 1 de coordenadas  $x_1=0.7$  y  $x_2=0.8$ . Como este punto está en la región  $R^2$ , se considera que pertenece completamente a esta región (por tanto con valor de pertenencia 1), y para las otras regiones  $R_1$  y  $R_2$  la



pertenencia será 0. Similarmente se hacen las asignaciones de pertenencia a las regiones a las cuales pertenecen los puntos.

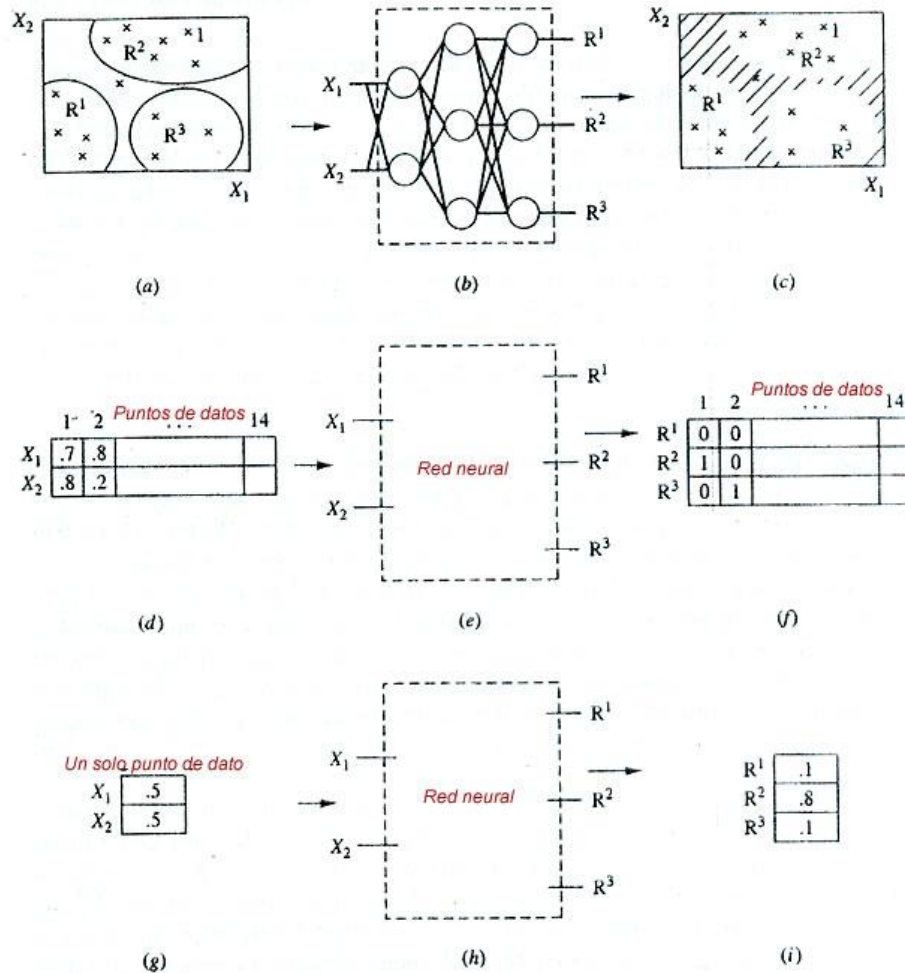


Figura 16. Ejemplo de uso de redes neurales en la asignación de valores de pertenencia

Se crea entonces una red neural como se indica en la Figura 16b (también las figuras 16e y 16h) que utiliza el punto de datos marcado como 1 y los correspondientes valores de pertenencia en las diferentes regiones. La Figura 16c representa la salida de la red neural, la cual clasifica los puntos de datos en alguna de las tres regiones. Entonces, la red neural utiliza el siguiente juego de datos (por ejemplo, los del punto 2) y los correspondientes valores de pertenencia para ser entrenados. El proceso se repite para el total del conjunto de entradas y salidas de entrenamiento, y se chequea con otro conjunto de datos disponibles para la verificación.

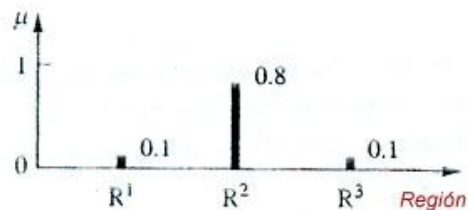


Figura 17. Función de pertenencia para los valores  $X_1=0.5$  y  $X_2=0.5$

Una vez que la red ha sido entrenada, se le puede usar para otro juego de valores como se indica en la Figura 17.