

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA
NÍVEL MESTRADO

Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para
Estudos de Transitórios Eletromagnéticos

Alécio Barreto Fernandes

Campina Grande - Paraíba - Brasil
Agosto de 1996

©Alécio Barreto Fernandes, 1996

Alécio Barreto Fernandes

Linhas de Transmissão: Modelo Otimizado para Estudos de Transitórios Eletromagnéticos

*Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da
Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção
do Grau de Mestre.*

Área de Concentração: Processamento da Energia

Washington Luíz Araújo Neves, Ph.D.
Orientador

Campina Grande - Paraíba - Brasil
Agosto de 1996

©Alécio Barreto Fernandes, 1996

Resumo

Na simulação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão, o método das ondas viajantes no domínio do tempo produz um modelo dependente da frequência para linhas de transmissão que é compatível diretamente com os algoritmos existentes em programas de propósitos gerais, como o EMTP (Electromagnetic Transients Program). Nestes programas, linhas polifásicas são desacopladas através da transformação modal, e cada modo é analisado como uma linha monofásica. No domínio da frequência, o circuito equivalente de cada terminal consiste da impedância característica, $Z_c(\omega)$, em paralelo com uma fonte de corrente. A fonte de corrente é uma função do fator de propagação $A(\omega)$. Em programas do tipo EMTP, $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$ e $A(\omega)$ são aproximados por funções racionais através do método de ajuste assintótico. Estas funções racionais são facilmente convertidas para o domínio do tempo sem a necessidade de utilizar a Transformada de Fourier. No entanto, as funções aproximadas usualmente possuem um número elevado de zeros e pólos.

Neste trabalho, apresenta-se uma revisão de modelos de linhas de transmissão aéreas com parâmetros dependentes da frequência. Um procedimento de otimização é utilizado para o ajustar as funções racionais à $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$. Mostra-se que o número de zeros e pólos das funções racionais aproximadas pode ser consideravelmente menor que aqueles obtidos utilizando o método de ajuste assintótico,

com praticamente a mesma precisão. Simulações no domínio do tempo são realizadas para linhas de transmissão monofásica e trifásica. Uma redução considerável do esforço computacional é obtida na simulação de transitórios eletromagnéticos no domínio do tempo, se o procedimento de otimização for utilizado para obter as funções racionais.

Abstract

When simulating electromagnetic transients on transmission lines, the time domain travelling wave method has the advantage that the resulting frequency dependent transmission line model is directly compatible with the solution algorithm of existing general purpose programs, such as the EMTP (Electromagnetic Transients Program). In such programs, multiphase lines are first decoupled through modal transformation matrices, so that each mode can be analyzed as a single-phase line. In the frequency domain, the equivalent circuit at each terminal comprises the characteristic impedance, $Z_c(\omega)$, in parallel with a current source. The current source is a function of the propagation factor $A(\omega)$. In the EMTP, $Y_c(\omega) = [Z_c(\omega)]^{-1}$ and $A(\omega)$ are approximated by rational functions using the asymptotic fitting technique. These rational functions are easily converted to time domain with no need to use Fourier transforms. However, the approximated functions usually have a large number of zeroes and poles.

In this work, an overview of overhead frequency dependent transmission line models, is presented. An optimization procedure is used to fit rational functions to $Y_c(\omega)$ and $A(\omega)$. It is shown that the number of poles and zeroes of the fitted functions can be considerably smaller than those obtained by using the asymptotic procedure, with nearly the same accuracy. Time domain electromagnetic transients simulations are

carried out for single and three-phase transmission lines. If the optimization procedure is used to find the rational functions, a considerable reduction in computer time is achieved when performing electromagnetic transient simulations in the time domain.

*“ Bem aventurado o homem que encontra
sabedoria, e o homem que adquire conhecimento,
pois ela é mais proveitosa do que a prata e dá
mais lucro que o ouro.”*

Provérbios 3:13-14

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, fiel e soberano em seus propósitos;

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro;

À COPELE, pela oportunidade;

Ao Prof. Washington Luíz Araújo Neves, pela orientação, amizade, apreço, temperança e companheirismo;

Ao Prof. S. R. Naidu, pela amizade, apoio e incentivo;

Aos Profs. Edson Guedes, Ricardo Loreiro, João Genoilton Carvalho e Paulo de Tarso, pela amizade e apoio;

Ao Prof. Benedito Guimarães Aguiar Neto, meu primeiro incentivador e orientador no meio acadêmico;

Aos funcionários do Laboratório de Alta Tensão: Francisco, Selma, Adalberto, Dona Lourdes e Della-Bianca;

Aos funcionários da COPELE: Ângela e Pedro;

Aos amigos: Luís Carlos, Eduardo e Adail.

A minha família, que sempre acreditou nos meus ideais e cuja existência torna meus sonhos mais preciosos;

Aos amigos, com os quais sempre posso contar.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	viii
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xvii
Capítulo 1 - Introdução	01
1.1 Descrição do problema	01
1.2 Delimitação do Tema	05
1.3 Objetivos	07
Capítulo 2 - Fundamentos Teóricos	08
2.1 Linhas de Transmissão: Equações de ondas	08
2.2 Linhas de Transmissão: Cálculo de Parâmetros Considerando os Efeitos da Frequência	13
2.3 Parâmetros Constantes com a Frequência versus Parâmetros Dependentes da Frequência	18
Capítulo 3 - Revisão Bibliográfica: Modelos Computacionais	25
3.1 Considerações Gerais	25
3.2 Modelo de Budner	28
3.3 Modelo de Snelson, Meyer e Dommel	29

3.4 Modelo de J. Marti	31
Capítulo 4 - Modelagem de Linhas de Transmissão no Domínio do	
Tempo	39
4.1 Determinação das Condições Transitórias de um Sistema no Domínio do	
Tempo	40
Capítulo 5 - Modelo Implementado	42
5.1 Modelagem de Dados	43
5.2 Método de Aproximação Não-Linear	44
5.2.1 Admitância Característica	44
5.2.2 Fator de Propagação	44
5.2.3 Algoritmo Implementado	45
Capítulo 6 - Apresentação e Análise dos Resultados	48
6.1 Linha de Transmissão Monofásica	48
6.1.1 Simulação Digital	57
6.2 Linha de Transmissão Trifásica	60
6.2.1 Simulação Digital	78
6.3 Convergência no Método Não-Linear	85
6.4 Escolha de Passo de Tempo Δt	89
6.5 Considerações Finais	93
Capítulo 7 - Conclusões	96
Referências Bibliográficas	99
Apêndice A - Cálculo da Impedância Série - Método de Carson	99

Apêndice B - Cálculo da Impedância Série - Método de Deri, Tevan, Semlyen e Castanheira	99
Apêndice C - Cálculo da Admitância Shunt	99
Apêndice D - Eliminação dos Cabos Pára-Raios	99
Apêndice E - Eliminação dos Condutores Geminados	99
Apêndice F - Convolução Recursiva	99
Apêndice G - Sistemas Físicos Passivos: Propriedades de $P(s)$	99
Apêndice H - Método de Ajuste Não-Linear	99

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Sistema elétrico básico de potência.

Figura 2.1 - Circuito equivalente para um elemento de uma linha monofásica.

Figura 2.2 - Linha de transmissão trifásica com quatro condutores por fase e cabo pára-raios.

Figura 2.3 - Resistências próprias dos condutores a, b e c versus frequência.

Figura 2.4 - Resistências “mútuas” versus frequência.

Figura 2.5 - Indutâncias próprias dos condutores a, b e c versus frequência.

Figura 2.6 - Indutâncias mútuas versus frequência.

Figura 2.7 - Energização da linha de transmissão da Figura 2.2, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal trifásica. Parâmetros constantes versus parâmetros dependentes da frequência.

Figura 2.8 - Energização da linha de transmissão da Figura 2.2, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases. Parâmetros constantes versus parâmetros dependentes da frequência.

Figura 2.9 - Falta fase-terra no terminal receptor na fase “a” com as demais fases em aberto. Parâmetros constantes versus parâmetros dependentes da frequência.

Figura 3.1 - Linha de transmissão no domínio modal.

Figura 3.2 - Circuito equivalente para uma linha de transmissão sem perdas.

Figura 3.3 - Linha de Transmissão no Modelo de Budner.

Figura 3.4 - Circuito Equivalente para a linha de transmissão, no domínio da frequência, segundo Meyer e Dommel.

Figura 3.5 - Linha de Transmissão sem perdas.

Figura 3.6 - Linha de Transmissão no modelo de Snelson, Meyer e Dommel.

Figura 3.7 - Linha de Transmissão na formulação de J. Martí.

Figura 3.8 - Circuito equivalente para a linha de transmissão, no domínio da frequência, segundo J. Martí.

Figura 3.9 - Equivalente RC para simular $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo.

Figura 3.10 - Circuito equivalente para sintetizar $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo.

Figura 3.11 - Método de ajuste assintótico.

Figura 5.1 - Divisão em escala logarítmica da faixa de frequência da função $F(\omega)$.

Figura 6.1 - Linha monofásica com retorno pela terra.

Figura 6.2 - Admitância característica, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

Figura 6.3 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para a admitância característica.

Figura 6.4 - Fase da admitância característica, ajuste assintótico e ajuste não-linear

Figura 6.5 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear para a fase da admitância característica.

Figura 6.6 - Fator de propagação, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

Figura 6.7 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o fator de propagação.

Figura 6.8 - Fase do fator de propagação, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

Figura 6.9 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear para a fase do fator de propagação.

Figura 6.10 - Erro percentual versus número de pólos para $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.11 - Erro percentual versus número de pólos para $A(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.12 -Energização da linha da Figura 6.1, em aberto por uma fonte senoidal.

Condição transitória no terminal receptor.

Figura 6.13 - Energização da linha da Figura 6.1, em aberto por um degrau de tensão.

Condição transitória no terminal receptor.

Figura 6.14 - Linha de transmissão trifásica, não-transposta, com quatro condutores por fase e um cabo pára-raios.

Figura 6.15 - Erro percentual versus número de pólos para o modo zero de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.16 - Erro percentual versus número de pólos para o modo positivo de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.17 - Erro percentual versus número de pólos para o modo negativo de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.18 - Erro percentual versus número de pólos para o modo zero de $A(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.19 - Erro percentual versus número de pólos para o modo positivo de $A(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.20 - Erro percentual versus número de pólos para o modo negativo de $A(\omega)$ no método não-linear.

Figura 6.21 - Modo zero de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.22 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo zero de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.23 - Fase para o modo zero de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.24 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo zero de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.25 - Modo positivo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.26 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo positivo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.27 - Fase para o modo positivo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.28 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo positivo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.29 - Modo negativo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.30 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo negativo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.31 - Fase para o modo negativo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.32 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo negativo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.33 - Modo zero de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.34 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo zero de $A(\omega)$.

Figura 6.35 - Fase para o modo zero de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.36 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo zero de $A(\omega)$.

Figura 6.37 - Modo positivo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.38 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo positivo de $A(\omega)$.

Figura 6.39 - Fase para o modo positivo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.40 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo positivo de $A(\omega)$.

Figura 6.41 - Modo negativo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.42 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o modo negativo de $A(\omega)$.

Figura 6.43 - Fase para o modo negativo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

Figura 6.44 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo negativo de $A(\omega)$.

Figura 6.45 - Energização da linha da Figura 6.14, em aberto, por uma fonte senoidal trifásica.

Figura 6.46 - Energização da linha da Figura 6.14, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases.

Figura 6.47 - Falta fase-terra na fase “a” da linha da Figura 6.14, com as demais fases em aberto.

Figura 6.48 - Performance do método não-linear para o modo zero de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.49 - Performance do método não-linear para o modo positivo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.50 - Performance do método não-linear para o modo negativo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.51 - Performance do método não-linear para o modo zero de $A(\omega)$.

Figura 6.52 - Performance do método não-linear para o modo positivo de $A(\omega)$.

Figura 6.53 - Performance do método não-linear para o modo negativo de $A(\omega)$.

Figura 6.54 - Condição transitória no terminal receptor na fase “a” para energização da linha de transmissão da Figura 6.14, por um degrau de tensão nas três fases, para $\Delta t = 20\mu s$, $40\mu s$ e $60\mu s$. Resultados obtidos fazendo uso do método assintótico.

Figura 6.55 - Condição transitória no terminal receptor na fase “a” para energização da linha de transmissão da Figura 6.14, por um degrau de tensão nas três fases, para $\Delta t = 20\mu s$, $40\mu s$ e $60\mu s$. Resultados obtidos fazendo uso do método não-linear.

Figura A.1 - Disposição dos condutores “i” e “k”.

Figura E.1 - Arranjo simétrico com $N = 8$ subcondutores individuais.

Figura H.1 - Diagrama de blocos do algoritmo implementado.

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 - Dados da linha de transmissão da Figura 2.2.

Tabela 4.1 - Relacionamento entre as grandezas no domínio do tempo e da frequência.

Tabela 6.1 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.1.

Tabela 6.2 - Resultados obtidos com os métodos de ajuste assintótico e não-linear.

Tabela 6.3 - Esforço computacional - Tempo de simulação por passo de tempo.

Tabela 6.4 - Esforço computacional - Tempo total de processamento.

Tabela 6.5 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.14.

Tabela 6.6 - Ordem dos polinômios aproximados e erros máximos para a admitância característica e o fator de propagação da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14.

Tabela 6.7 - Esforço computacional - Tempo de simulação por passo de tempo.

Tabela 6.8 - Esforço computacional - Tempo total de processamento.

Tabela 6.9 - Passo de tempo, Δt , e respectiva frequência de Nyquist.

Tabela 6.10 - Tempos de propagação para os modos da linha de transmissão da Figura 6.14.

Tabela 6.11 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.56.

Tabela 6.12 - Ordem dos polinômios aproximados e erros máximos para a admitância característica e o fator de propagação da linha de transmissão trifásica da Figura 6.56.

Capítulo 1

Introdução.

1.1 Descrição do Problema.

O projeto e o planejamento de um sistema elétrico de potência requerem a execução de uma série de estudos como:

- Análise de curto-circuito;
- Análise de fluxo de carga;
- Análise de estabilidade;
- Análise de transitórios eletromagnéticos.

Embora os sistemas elétricos de potência operem em regime permanente durante grande parte do tempo, devem ser projetados para suportar solicitações extremas, denominadas de sobretensões.

Sobretensão é toda tensão acima do valor nominal que possa por em perigo a integridade de equipamentos e o funcionamento de um sistema elétrico. As sobretensões são geradas pelo próprio sistema (sobretensões internas - surtos de manobra), ou devido a efeitos externos, como descargas atmosféricas.

A confiabilidade de um sistema elétrico de potência é condicionada à ocorrência de surtos e à probabilidade de ruptura do isolamento.

Com base no sistema da Figura 1.1, façamos uma análise qualitativa a respeito de algumas possíveis origens de sobretensões.

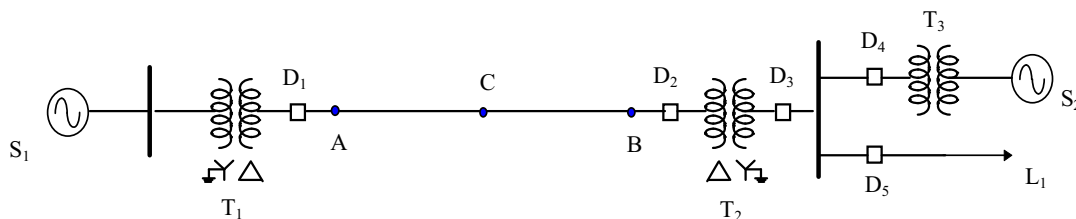


Figura 1.1 - Sistema elétrico básico de potência.

Na linha de transmissão, entre *A* e *B*, segundo a IEC (International Electrical Commission), as tensões entre fase e neutro não devem exceder 5% dos seus valores nominais, quando em regime permanente (PORTELA, 1983). No entanto, existem situações, não raras, em que os níveis de tensão são muito superiores aos valores nominais.

1) Consideremos que todos os disjuntores da Figura 1.1, inicialmente estejam abertos. Energizemos a linha através do fechamento do disjuntor *D*₁. Imediatamente após o fechamento do disjuntor, têm-se a propagação de ondas de tensão e corrente de *A* em direção ao terminal *B*. Ao chegarem em *B* estas ondas encontram uma descontinuidade (circuito aberto) e são refletidas na direção do terminal *A* onde sofrem nova reflexão. As ondas viajantes são gradativamente amortecidas pela resistência da linha. Reflexões sucessivas ocorrem até que a magnitude das ondas viajantes sejam nulas. A tensão e corrente em qualquer ponto da linha são obtidas através da superposição da onda incidente e todas as ondas refletidas. Se a linha fosse monofásica a tensão no terminal *B* poderia atingir até duas vezes a tensão do sistema. Porém com um sistema polifásico, devido ao acoplamento entre fases, podem ocorrer tensões ainda maiores.

2) Admitamos agora que o sistema esteja operando normalmente e subitamente ocorra uma descarga atmosférica em uma das fases da linha no ponto C . A descarga pode ser vista como uma injeção de corrente em C , originando a propagação de dois pares de ondas de tensão e corrente viajando na direção dos terminais A e B . Estas ondas serão amortecidas pela resistência da linha e serão refletidas ao chegarem aos terminais. Desta forma, as magnitudes das sobretensões no sistema podem ser bastante elevadas.

3) Admitamos, que por algum motivo, ocorra uma rejeição de carga (abertura do disjuntor D_5). A redução brusca da carga indutiva, que passa a ser capacitiva (linha em aberto) provoca um aumento da tensão no barramento onde antes estava conectada a carga (efeito Ferranti). Com a perda da carga, a velocidade do gerador aumenta, provocando a elevação da tensão em seus terminais. Os níveis de sobretensão do sistema dependerão dos parâmetros da linha, das máquinas e dos sistemas de regulação de tensão e velocidade. O sistema de controle do gerador atuará com o intuito de trazer a velocidade e a tensão do gerador para seus valores normais. No entanto, a tensão no barramento receptor da linha pode ser significativamente maior que a do gerador, mesmo com o gerador na velocidade síncrona.

4) Consideremos que ocorra um curto-circuito em C , entre uma fase e a terra. As tensões em qualquer das fases do sistema, dependem da tensão em C no momento anterior ao defeito e das impedâncias de sequência zero, positiva e negativa. Em geral, durante a falha, as tensões fase-terra das demais fases, são superiores às tensões fase-terra na ausência do defeito.

Por tudo isso, no projeto e análise de sistemas elétricos de potência, normalmente, precisamos determinar: a magnitude, forma, frequência e duração das

sobretensões, e adaptar as características de suportabilidade do isolamento aos esforços que possivelmente serão submetidos.

Entretanto, os limites econômicos terminam por se pronunciarem antes dos limites técnicos. A possibilidade de falhas sempre existe, e quando forem inevitáveis, devem ser confinadas de forma a causar o menor distúrbio na operação e o mínimo em danos aos elementos do sistema.

O comportamento dinâmico de um sistema elétrico pode ser descrito por equações diferenciais. Devido ao alto grau de complexidade dos sistemas reais, se torna praticamente impossível uma solução analítica para a análise do comportamento dinâmico. Até mesmo através de métodos computacionais (simulação digital), tal problema não é simples. Uma das dificuldades, consiste em modelar os diversos elementos que compõem o sistema. Neste aspecto, a modelagem de linhas de transmissão merece uma atenção especial, por se fazer presente em todos os sistemas de transmissão. Pela natureza distribuída de seus parâmetros e sua dependência com a frequência (HUMPAGE, 1982; MARTI et al, 1985; COSTA Jr., 1995), requer uma modelagem que a represente satisfatoriamente, sob os critérios de precisão da investigação em particular.

A faixa de frequência associada a cada condição transitória (segundo relatório elaborado por um grupo de trabalho do CIGRÉ (1990)), pode variar de 0,1 Hz a 50 MHz, dependendo das características do sistema e da causa primária da condição transitória. Nesta faixa de frequência, a resistência e a indutância das linhas de transmissão variam significativamente devido às características de retorno pela terra, efeito pelicular e ao acoplamento mútuo existente entre as fases. A capacitância por sua

vez é função da geometria da linha, sendo aproximadamente constante com a frequência (GALLOWAY et al, 1964; DOMMEL, 1992).

Uma modelagem de linhas de transmissão a parâmetros constantes, embora mais simples, pode não apresentar resultados realistas, em alguns casos (MARTI, 1982). Por outro lado, se os efeitos da frequência são considerados, o esforço computacional pode ser significativo.

1.2 Delimitação do Tema.

Como modelar, de forma satisfatória, linhas de transmissão para a simulação de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos de potência?

Esta questão tem sido alvo de estudos extensivos, resultando em uma gama de modelos, os quais podem ser classificados em dois grandes grupos, de acordo com a técnica de solução utilizada: modelos no domínio da frequência e modelos no domínio do tempo.

(a) Modelos no domínio da frequência: com modelos desta classe, a resposta do sistema de transmissão é calculada no domínio da frequência. A solução no domínio do tempo é então determinada utilizando transformações inversas, como a transformada rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform) por exemplo (HAMMING, 1986; MARTI et al, 1990).

(b) Modelos no domínio do tempo: com modelos desta classe, a solução é determinada para cada passo de tempo Δt prefixado. Partindo-se das condições iniciais em $t=0$, as tensões em cada nó do sistema em análise são determinadas em $t=\Delta t$, $2.\Delta t$, $3.\Delta t$, ..., até o tempo máximo de simulação $t_{máx}$. No processo de cálculo das tensões e correntes em cada terminal, é necessário conhecer as tensões e correntes até um certo

tempo anterior, isto é, em $t=t-\Delta t$, $t-2.\Delta t$, $t-3.\Delta t$, ... $t-\tau$ (sendo τ o tempo de propagação de ondas ou tempo de trânsito da linha). Desta forma, precisa-se conhecer a história do sistema. Mudanças súbitas na configuração do sistema (como defeitos, abertura e fechamento de disjuntores, etc.) e a modelagem de elementos não lineares, podem ser considerados mais facilmente. Neste grupo, três tipos de modelos merecem atenção:

- (b-1) Modelos a parâmetros concentrados: a linha de transmissão é representada por elementos concentrados (usualmente por uma conexão cascata de seções π) calculados em uma única frequência. A validade destes modelos se restringe a linhas relativamente curtas e, em geral, suas respostas em frequência são precisas unicamente nas vizinhanças da frequência na qual seus parâmetros foram calculados.
- (b-2) Modelos a parâmetros distribuídos constantes com a frequência: nestes modelos, os parâmetros da linha são considerados distribuídos mas independentes da frequência. Os parâmetros da linha são calculados em uma única frequência, por exemplo 60 Hz. Como consequência, na determinação das condições transitórias, os efeitos das possíveis componentes de frequência das ondas viajantes, sobre os parâmetros da linha são desprezados.
- (b-3) Modelos a parâmetros distribuídos dependentes da frequência: a solução é determinada no domínio modal (NAIDU, 1985; DOMMEL, 1992). A dependência com a frequência e a natureza distribuída dos parâmetros da linha de transmissão são levados em consideração.

1.3 Objetivos.

Este trabalho têm por objetivos:

1. Estudar formas de otimizar a modelagem de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência, objetivando a redução do esforço computacional em programas de cálculo de transitórios eletromagnéticos;
2. Validar o modelo ótimo desenvolvido na etapa 1 e avaliar sua eficiência. Para tanto, os casos estudados empregando-o serão repetidos utilizando-se o MICROTRAN^{®1} (MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION, 1992). Os resultados obtidos em ambos os casos serão comparados.

¹O MICROTRAN[®] é um dos vários programas computacionais existentes para cálculo de transitórios eletromagnéticos.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1 Linhas de Transmissão: Equações de Ondas.

Para determinarmos as equações que governam as linhas de transmissão, consideremos o caso simples de um circuito monofásico com um condutor e retorno pela terra.

As equações da linha podem ser escritas a partir do circuito equivalente de um elemento incremental desta linha, como mostrado na Figura 2.1, onde:

r - Resistência em Ω/km ;

g - Condutância de dispersão em Ω^{-1}/km ;

l - Indutância em H/km ;

c - Capacitância em F/km .

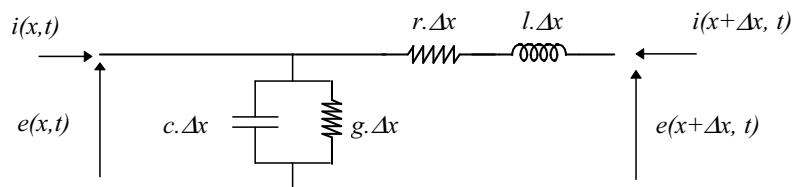


Figura 2.1 - Circuito equivalente para um elemento de uma linha monofásica.

Desta forma, a corrente na linha pode ser obtida por:

$$i(x + \Delta x, t) = i(x, t) - g \cdot \Delta x \cdot e(x, t) - c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} \quad \text{ou,}$$

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -g \cdot e(x, t) - c \cdot \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} \quad .$$

Quando, $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot e + c \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.1)$$

De forma análoga, a queda de tensão na linha pode ser obtida por:

$$e(x, t) - e(x + \Delta x, t) = r \cdot \Delta x \cdot i(x + \Delta x, t) + l \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad \text{ou,}$$

$$\frac{e(x, t) - e(x + \Delta x, t)}{\Delta x} = r \cdot i(x + \Delta x, t) + l \cdot \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad .$$

Quando, $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.2)$$

Para uma linha de transmissão polifásica, os elementos das equações (2.1) e (2.2) são substituídos por matrizes, e assim, as tensões e correntes são relacionadas pelas seguintes equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial [e]}{\partial x} &= [L'] \cdot \frac{\partial [i]}{\partial t} + [R'] \cdot [i] \\ -\frac{\partial [i]}{\partial x} &= [C'] \cdot \frac{\partial [e]}{\partial t} + [G'] \cdot [e] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Onde $[R']$, $[L']$, $[G']$ e $[C']$ são matrizes de resistência, indutância, condutância e capacitância, por unidade de comprimento, da linha.

No domínio da frequência tem-se:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial[E]}{\partial x} &= \{[R'] + j\omega[L']\} \cdot [I] = [Z'] \cdot [I] \\
-\frac{\partial[I]}{\partial x} &= \{[G'] + j\omega[C']\} \cdot [E] = [Y'] \cdot [E]
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Onde $[E]$ e $[I]$ são os vetores de tensão e corrente no domínio da frequência.

A matriz $[Z'] = [R'] + j\omega[L']$ é denominada de matriz *impedância série* da linha, sendo complexa e simétrica.

A matriz $[Y'] = [G'] + j\omega[C']$ é denominada de matriz *admitância shunt* da linha, sendo também complexa e simétrica.

Diferenciando novamente as equações (2.4) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[E]}{\partial x^2} &= -[Z'] \cdot \frac{\partial[I]}{\partial x} \\
\frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} &= -[Y'] \cdot \frac{\partial[E]}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

Substituindo as equações (2.4) em (2.5), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[E]}{\partial x^2} &= [Z'] \cdot [Y'] \cdot [E] \\
\frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} &= [Y'] \cdot [Z'] \cdot [I]
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Tanto $[Z']$ como $[Y']$ são simétricas, desta forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[E]}{\partial x^2} &= [P] \cdot [E] \\
\frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} &= [P]^T \cdot [I]
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Onde: $[P] = [Z'] \cdot [Y']$ e $[P]^T = [Y'] \cdot [Z']$.

A principal dificuldade em se resolver as equações (2.7) está no acoplamento mútuo entre os condutores da linha de transmissão. Visando contornar esta dificuldade, pode-se transformar as correntes e tensões de fase da linha em correntes e

tensões modais, de modo que as matrizes não-diagonais de fase se tornam matrizes diagonais modais (NAIDU, 1985; BRANDÃO FARIA, 1988; DOMMEL, 1992).

As equações no domínio modal são independentes e portanto, podem ser resolvidas separadamente, como se fossem linhas monofásicas.

As equações modais correspondentes à (2.6) e (2.7), são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 [V]}{\partial x^2} &= [\gamma^2] \cdot [V] \\ \frac{\partial^2 [J]}{\partial x^2} &= [\gamma^2] \cdot [J]\end{aligned}\tag{2.8}$$

Os elementos da matriz diagonal $[\gamma^2]$ são aos autovalores de $[P]$. As matrizes $[V]$ e $[J]$ são as tensões e correntes no domínio modal, respectivamente (DOMMEL, 1992).

As matrizes diagonalizantes de $[P]$ e $[P]^T$ serão denominadas de $[T_v]$ e $[T_i]$, respectivamente, e possuem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}[\gamma^2] &= [T_v]^{-1} \cdot [Z' \cdot Y'] \cdot [T_v] = [T_v]^{-1} \cdot [P] \cdot [T_v] \\ [\gamma^2] &= [T_i]^{-1} \cdot [Y' \cdot Z'] \cdot [T_i] = [T_i]^{-1} \cdot [P]^T \cdot [T_i]\end{aligned}\tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.8), temos:

$$\begin{aligned}[E] &= [T_v] \cdot [V] \\ [I] &= [T_i] \cdot [J]\end{aligned}\tag{2.10}$$

Onde: $[T_v]$ = matriz cujas colunas são os autovetores de $[P]$;

$[T_i]$ = matriz cujas colunas são os autovetores de $[P]^T$.

As matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$ se relacionam pela seguinte expressão:

$$[T_v]^{-1} = [T_i]^T$$

Aplicando a transformação modal às matrizes $[Z']$ e $[Y']$, obtemos as matrizes impedância e admitância modais, dadas por:

$$\begin{aligned} [Z'_{\text{mod}}] &= [T_v]^{-1} \cdot [Z'] \cdot [T_i] \\ [Y'_{\text{mod}}] &= [T_i]^{-1} \cdot [Y'] \cdot [T_v] \end{aligned} \quad (2.11)$$

WEDEPOHL (1963), mostra que um dos modos resultantes da transformação está associado com o retorno pela terra, enquanto que os outros modos são praticamente independentes das características do retorno pela terra e são denominados de modos aéreos. Na notação adotada neste trabalho, para linhas trifásicas, o subscrito “0” ou “zero” identifica o modo de retorno pela terra e os subscritos “1” ou “pos” e “2” ou “neg” denotam os modos aéreos, positivo e negativo, respectivamente.

Desta forma, para uma linha trifásica, teremos:

$$\begin{aligned} [Z'_{\text{mod}}] &= \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \\ [Y'_{\text{mod}}] &= \begin{bmatrix} Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & Y_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Os parâmetros modais $[Z'_{\text{mod}}]$ e $[Y'_{\text{mod}}]$, são funções dos parâmetros da linha de transmissão no domínio de fases, $[Z']$ e $[Y']$, respectivamente. Desta forma, $[Z'_{\text{mod}}]$ e $[Y'_{\text{mod}}]$ possuem dependência com a frequência.

Em geral, as matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$ são complexas e seus elementos dependentes da frequência² (DOMMEL, 1992).

²Em três situações particulares, no caso de uma linha monofásica com retorno pela terra, no caso de uma linha bifásica na qual os condutores são idênticos e se encontram à mesma altura acima do solo, e no caso de uma linha trifásica perfeitamente transposta, as matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$ são reais e constantes com a frequência (MAGNUSSON, 1977).

Além da dependência com a frequência, outra dificuldade no processo de transformação do domínio de fases para o modal, diz respeito à síntese das matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$, pois estas matrizes de autovetores não são unicamente definidas, muito embora a matriz de autovalores $[\gamma^2]$ o seja. Esta liberdade na localização dos autovetores no plano complexo, pode resultar em sérios problemas numéricos (HEDMAN, 1965; NAREDO, 1987; BRANDÃO FARIA, 1988; DOMMEL, 1992) no processo de síntese das matrizes $[T_v]$ e $[T_i]$.

2.2 Linhas de Transmissão: Cálculo de Parâmetros Considerando os Efeitos da Frequência.

Reescrevendo a equação (2.4), considerando a dependência dos parâmetros com a frequência, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}[E] &= \{[R'(\omega)] + j\omega[L'(\omega)]\} \cdot [I] = [Z'(\omega)] \cdot [I] \\ -\frac{\partial}{\partial x}[I] &= \{[G'] + j\omega[C']\} \cdot [E] = [Y'(\omega)] \cdot [E] \end{aligned} \quad (2.13)$$

A resistência da linha de transmissão $[R'(\omega)]$, é resultado da resistência intrínseca dos condutores mais a contribuição da resistência do retorno pelo solo, ambas dependem da frequência. A indutância da linha de transmissão $[L'(\omega)]$ é dependente da frequência, sendo resultado da contribuição da indutância dos próprios condutores, do retorno pela terra e da indutância mútua entre fases.

Para a matriz $[Y'(\omega)]$, a matriz de condutância $[G']$ é geralmente desprezada no caso de linhas de transmissão aéreas (DOMMEL, 1992). Desta forma a matriz admitância será: $[Y'(\omega)] = j\omega[C']$.

Fórmulas para o cálculo de $[Z'(\omega)]$, levando-se em consideração a frequência, foram desenvolvidas por CARSON (1926) (Apêndice A). Uma formulação, mais recente, para o cálculo da impedância série foi desenvolvida por DERI et al (1981) (Apêndice B).

Os elementos da matriz admitância $[Y'(\omega)]$, podem ser calculados a partir da geometria da linha, das configurações das torres e dos condutores, assumindo-se as hipóteses:

- (a) O ar é livre de perdas e a terra está no potencial zero;
- (b) Os raios dos condutores são significativamente menores que as distâncias que os separam.

Ambas as hipóteses são aceitáveis para linhas aéreas de transmissão. Sendo assim a matriz capacitância da linha $[C']$ é função unicamente da geometria da linha e por sua vez constante com a frequência.

O procedimento para o cálculo de $[Y'(\omega)]$ é descrito no Apêndice C.

Para ilustrar a dependência dos parâmetros de uma linha de transmissão com a frequência, consideremos uma linha de transmissão trifásica, com quatro condutores geminados por fase e um cabo pára-raios, como ilustrado na Figura 2.2 (HUMPAGE, 1982; COSTA Jr., 1995).

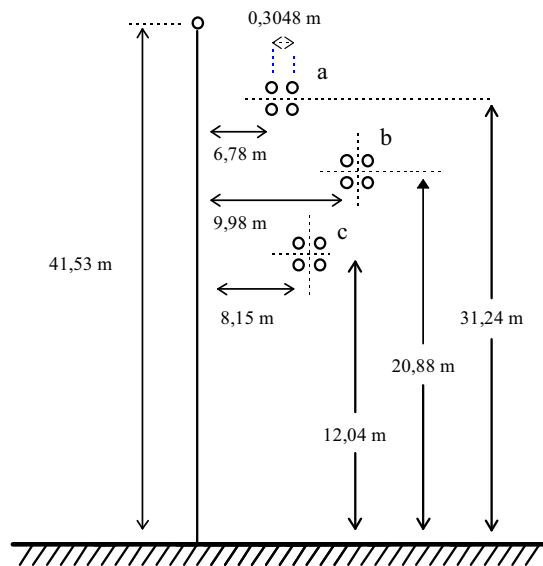


Figura 2.2 - Linha de transmissão trifásica com quatro condutores por fase e um cabo pára-raios.

Os dados da linha da Figura 2.2 são listados na Tabela 2.1.

Número de Circuitos	1
Número de condutores por fase	4
Número de cabos pára-raios	1
Simetria de posição dos condutores	Nenhuma
Resistividade dos condutores das fase	32 nΩ.m
Resistividade do cabo pára-raios	26,9 nΩ.m
Diâmetro dos filamentos que compõem os condutores das fases	3,2 mm
Diâmetro dos filamentos que compõem o cabo para-raios	3,2 mm
Diâmetro Médio Geométrico do conjunto de 4 cabos de cada fase	30,94 cm
Diâmetro externo dos condutores e do cabo pára-raios	28,6 mm
Número de filamentos efetivos nos cabos das fases	54
Número de filamentos efetivos no cabo pára-raios	54
Resistividade do solo	20,0 Ω.m
Comprimento da linha de transmissão	160,0 km

Tabela 2.1 - Dados da linha de transmissão da Figura 2.2.

Para o cálculo da matriz impedância série $[Z']$ da linha de transmissão em estudo, o autor desenvolveu um programa computacional utilizando a formulação descrita no Apêndice B.

A matriz $[Z']$ foi calculada para a faixa de 10^2 a 10^5 rad/s. Desta forma os resultados obtidos podem ser comparados aos apresentados na literatura

(HUMPAGE, 1982, COSTA Jr., 1995) para a mesma linha de transmissão tomada como exemplo.

A partir dos elementos da matriz $[Z']$, obtemos os gráficos das Figuras 2.3 e 2.4 para as resistências e das Figuras 2.5 e 2.6 para as indutâncias, por unidade de comprimento, com relação à frequência.

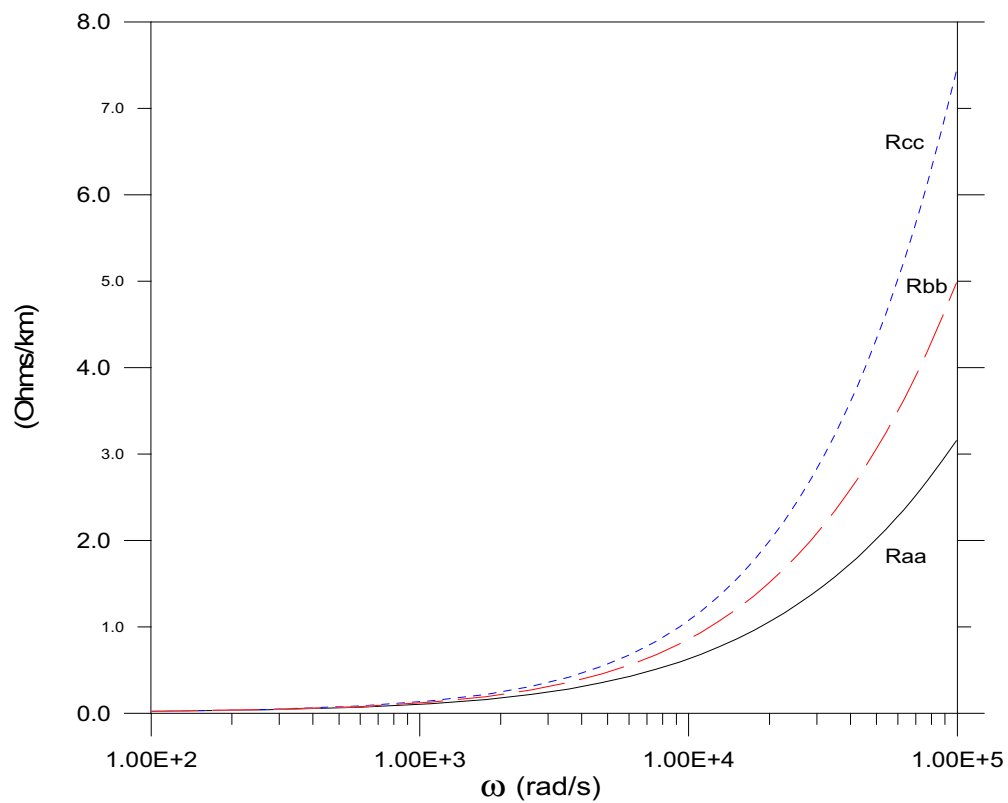


Figura 2.3 - Resistências Próprias dos condutores a, b e c versus frequência.

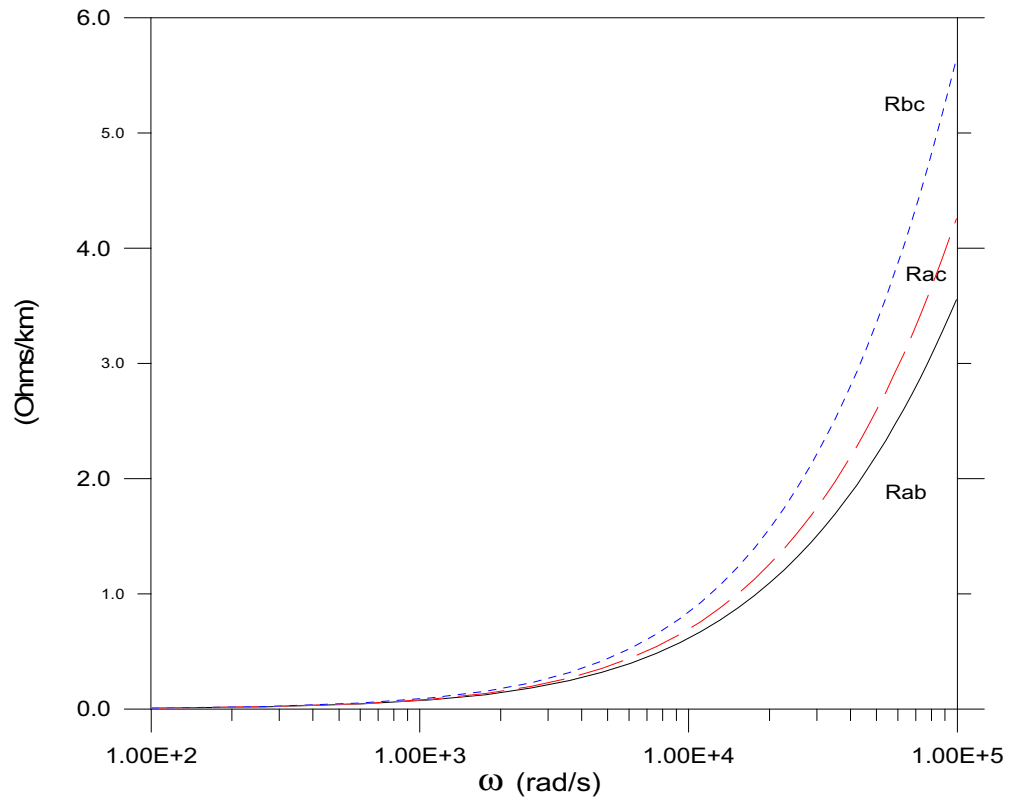


Figura 2.4 - Resistências “Mútuas” versus frequência.

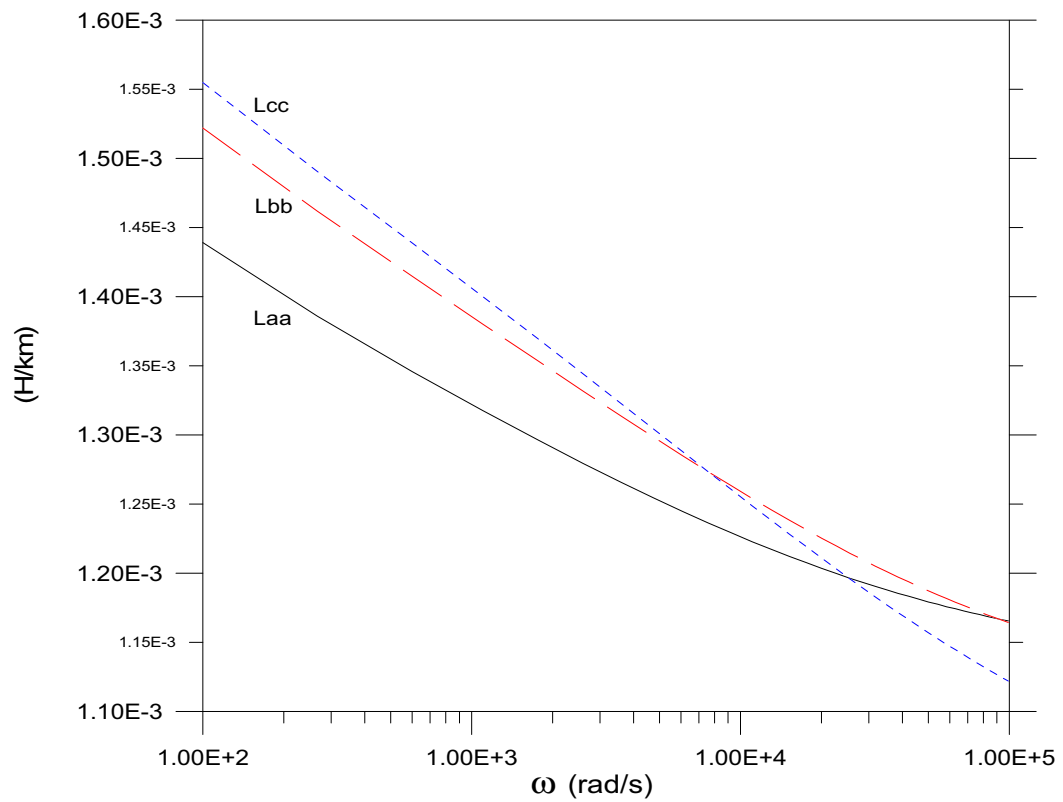


Figura 2.5 - Indutâncias Próprias dos condutores a, b e c versus frequência.

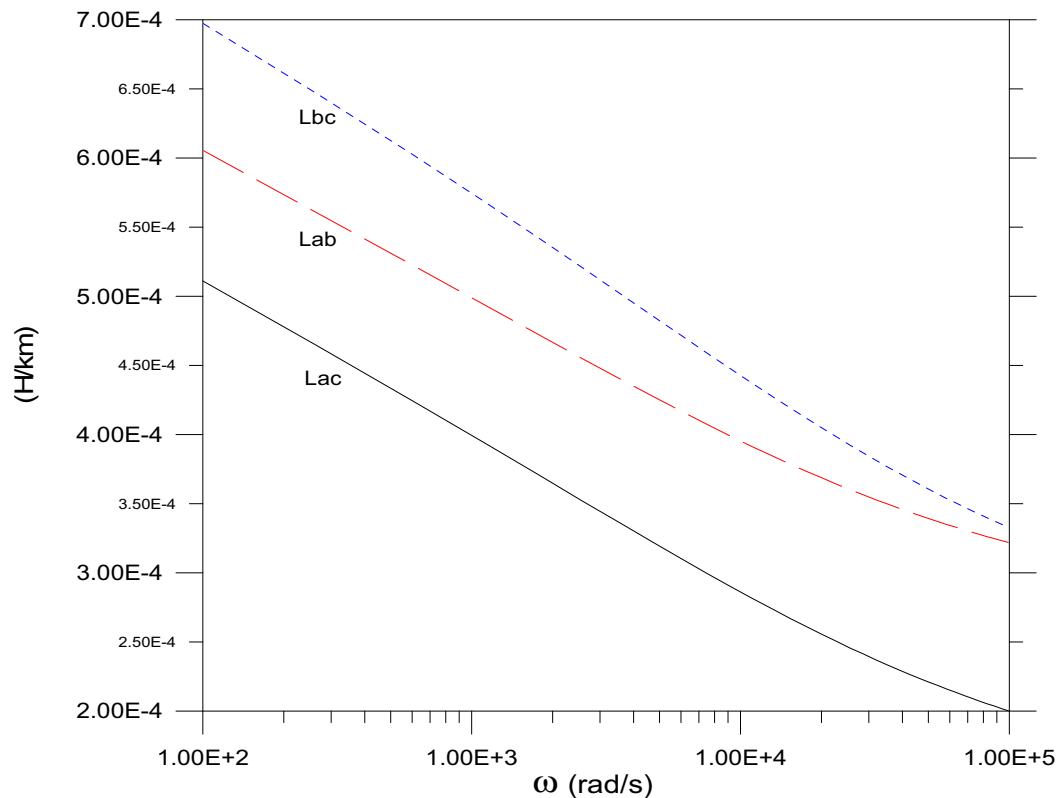


Figura 2.6 - Indutâncias Mútuas versus frequência.

Nas Figuras 2.3 a 2.6, pode-se observar o efeito da frequência sobre os parâmetros da linha de transmissão da Figura 2.2. Deve-se salientar a significativa faixa de variação nos valores das resistências.

2.3 Parâmetros Constantes com a Frequência *versus* Parâmetros Dependentes da Frequência.

Visando ilustrar como pode ser relevante ou não a consideração da dependência dos parâmetros da linha com a frequência, simulou-se três condições transitórias distintas para a linha de transmissão da Figura 2.2, para os dois casos descritos a seguir:

Caso 1: Linha de transmissão trifásica perfeitamente transposta com parâmetros distribuídos constantes com a frequência (calculados em 60 Hz);

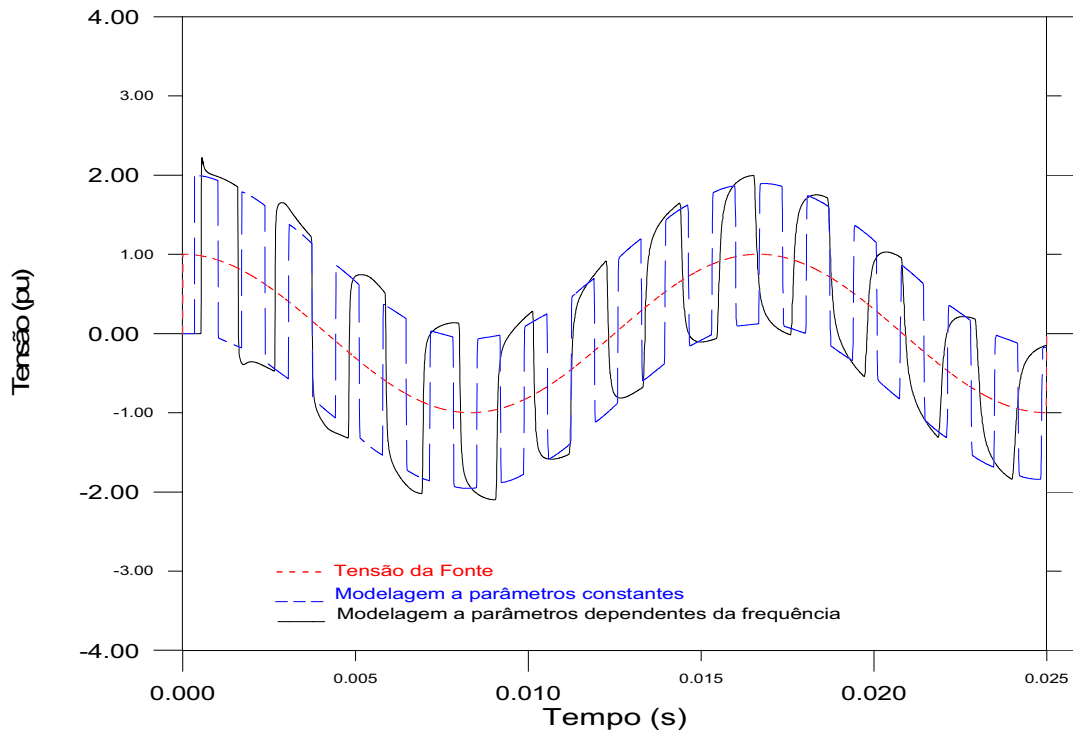
Caso 2: Linha de transmissão trifásica perfeitamente transposta com parâmetros distribuídos dependentes da frequência.

Para cada um dos casos citados, simulou-se:

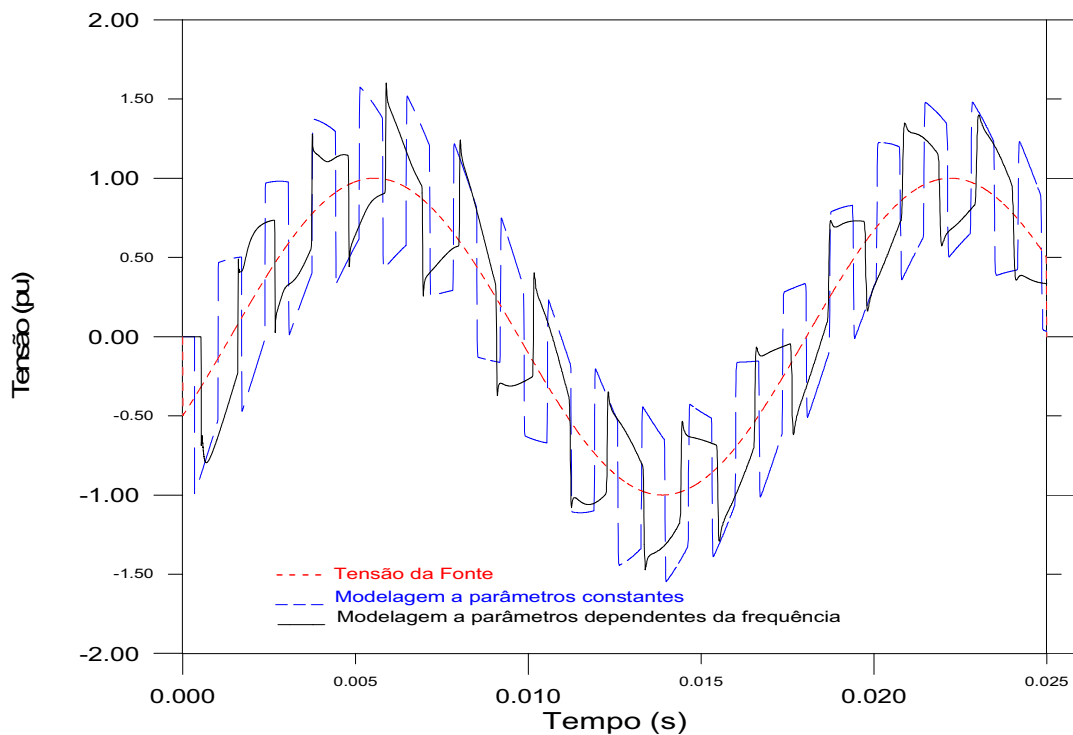
- 1) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por uma fonte senoidal trifásica;
- 2) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por um degrau de tensão nas três fases;
- 3) A ocorrência de um defeito fase-terra no terminal receptor em uma das fases com as outras duas fases em aberto. O curto-circuito é simulado através de uma resistência de $0.001 \, \Omega$, no ponto do defeito para a terra.

Na simulação descrita, utilizou-se o programa MICROTRAN[®] (MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION, 1992). No cálculo dos parâmetros da linha a parâmetros constantes utilizou-se o programa MTLIN[™] e para a modelagem da linha a parâmetros dependentes da frequência, utilizou-se o programa FDDATA[™]. O programa MTLIN[™] é um programa que faz parte do pacote MICROTRAN[®], que calcula os parâmetros de uma linha de transmissão aérea a partir das características dos condutores e da geometria da linha. O programa FDDATA[™], que também faz parte do pacote MICROTRAN[®], produz um modelo dependente da frequência para linhas de transmissão aéreas a partir dos mesmos dados que o programa MTLIN[™].

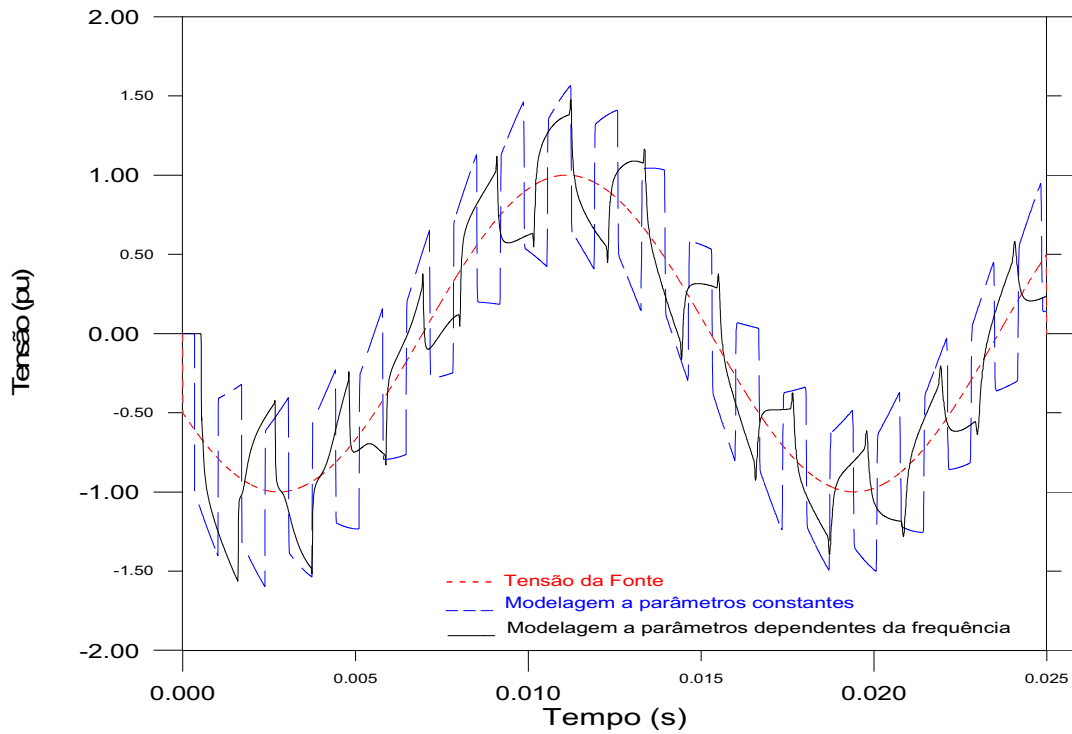
Os resultados das simulações realizadas para os dois casos em consideração são apresentados a seguir. Nas referidas simulações, utilizou-se um passo de tempo, $\Delta t = 1 \mu s$.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase a.

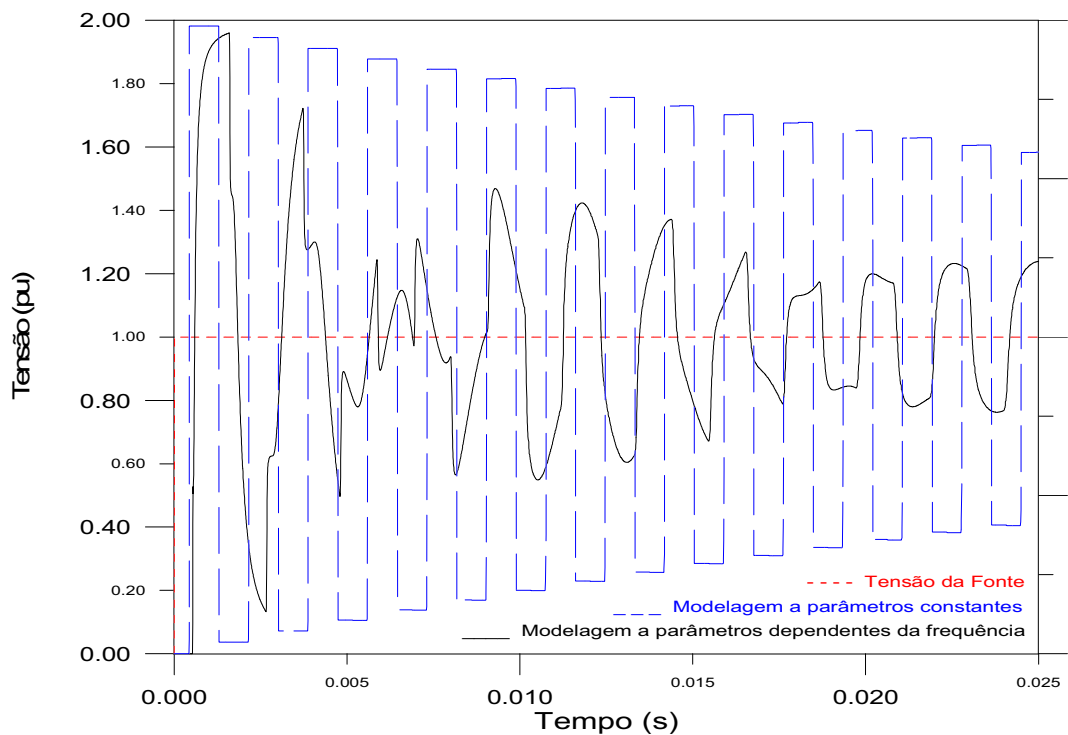


(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.

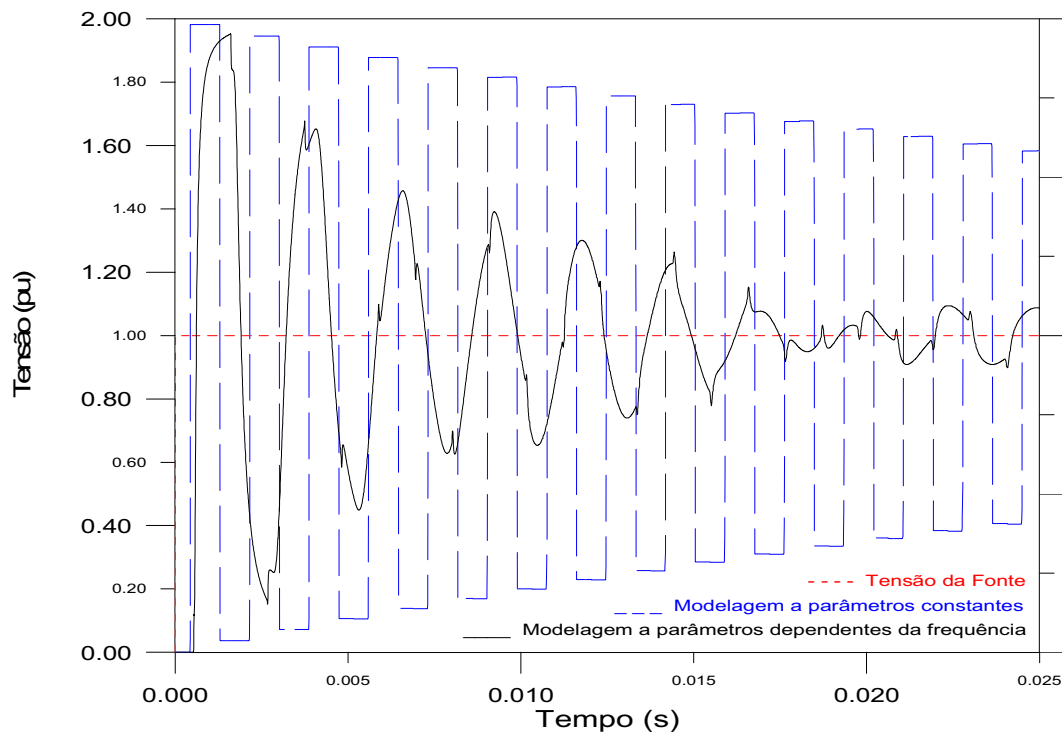


(c) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

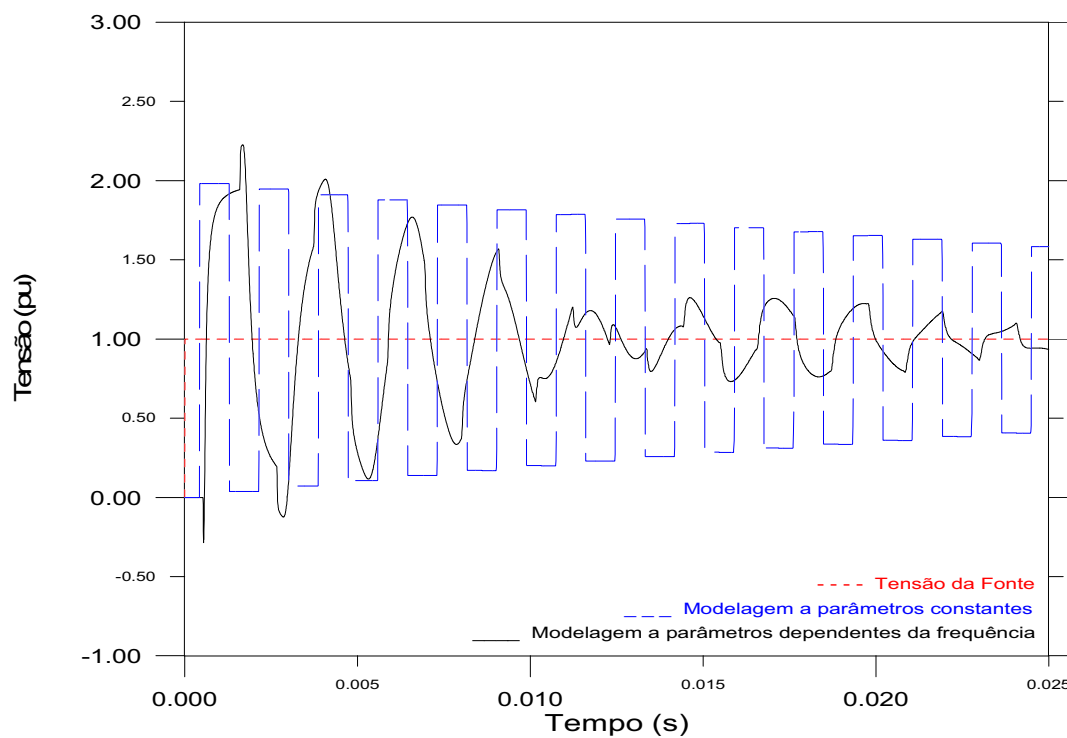
Figura 2.7 - Energização da linha de transmissão da Figura 2.2, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal trifásica. Parâmetros constantes *versus* Parâmetros dependentes da frequência.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase a.

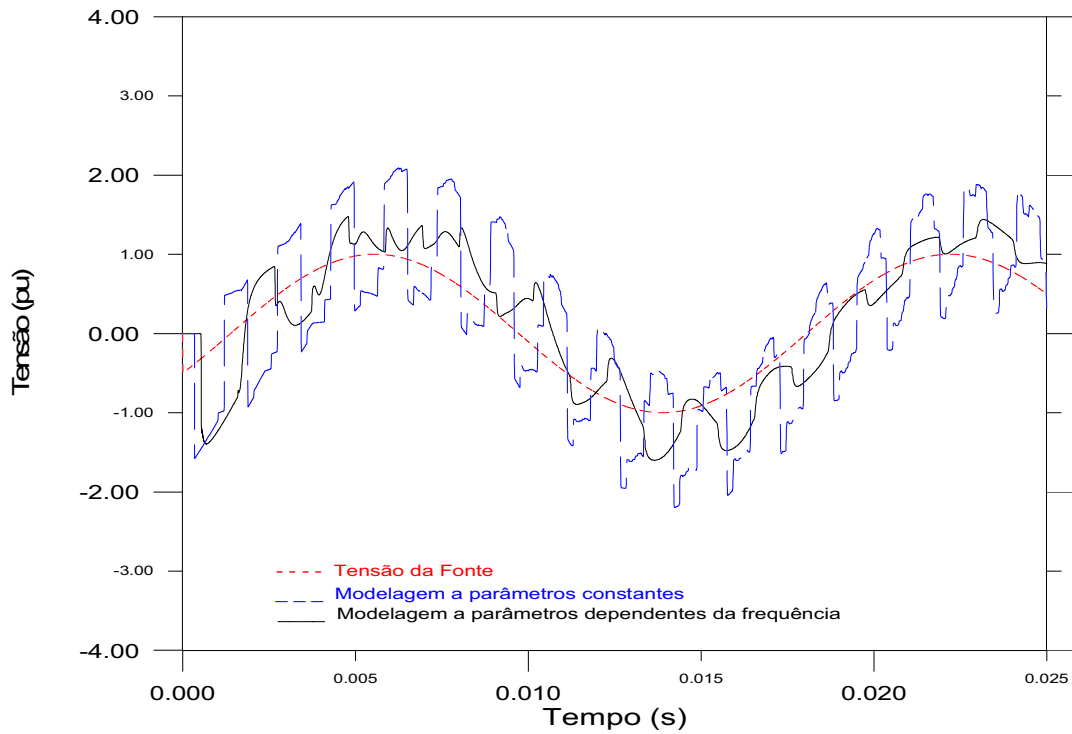


(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.

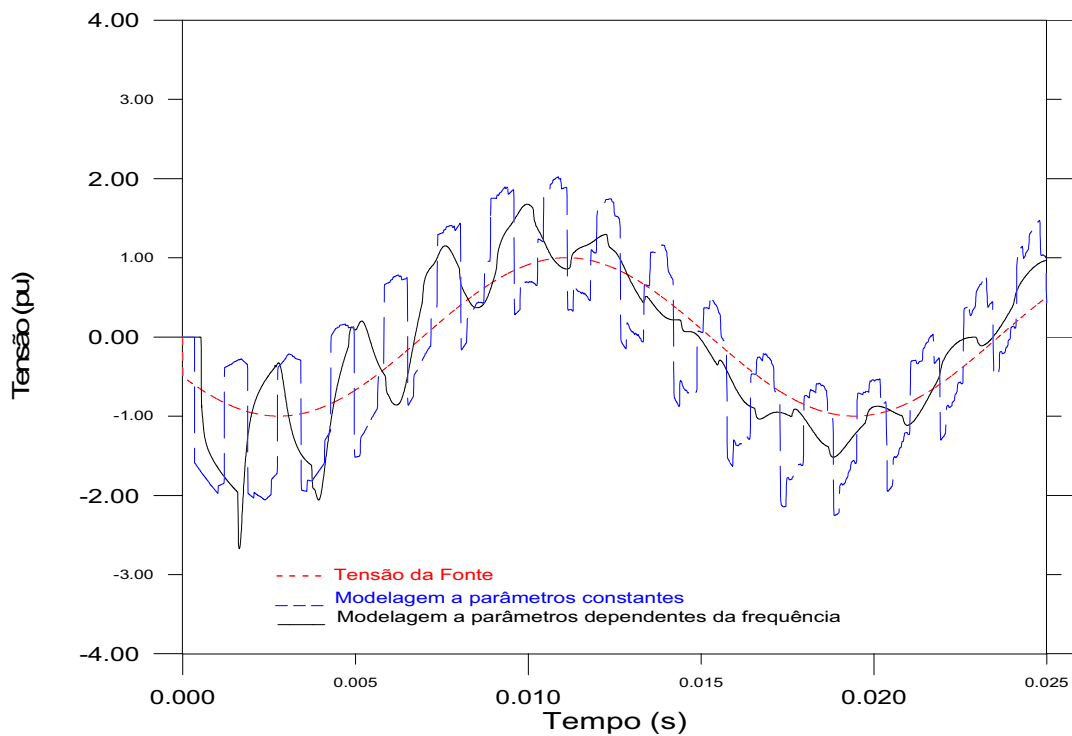


(c) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

Figura 2.8 - Energização da linha de transmissão da Figura 2.2, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases. Parâmetros constantes *versus* Parâmetros dependentes da frequência.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.



(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

Figura 2.9 - Defeito fase-terra no terminal receptor na fase “a”, com as demais fases em aberto: Parâmetros constantes *versus* Parâmetros dependentes da frequência.

Em alguns casos (Figuras 2.8 e 2.9) a representação a parâmetros constantes produz distorções nas formas de ondas e picos de magnitude exagerada.

Em situações reais, as formas de onda de tensão seriam fortemente amortecidas devido a presença de resistores de pré-inserção de disjuntores.

Estudos comparativos entre resultados de campo (linha de transmissão real) e resultados obtidos através de simulações, revelam que quando a natureza distribuída dos parâmetros e sua dependência com a frequência são considerados, os resultados das simulações se aproximam com melhor precisão dos resultados obtidos em campo (MARTI, 1982; NAIDU, 1982; DOMMEL, 1992).

Dos resultados apresentados, podemos constatar como em algumas situações, a diferença nos resultados obtidos para os dois modelos de linha de transmissão, é significativa.

Uma vez comprovada a importância de se levar em consideração a dependência dos parâmetros de uma linha de transmissão com a frequência, no próximo capítulo apresentamos uma breve revisão bibliográfica de modelos de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica - Modelos Computacionais

Ao longo dos anos, vários modelos computacionais foram propostos visando representar linhas de transmissão a parâmetros distribuídos e dependentes da frequência, para a simulação de transitórios eletromagnéticos no domínio do tempo. Estes modelos foram desenvolvidos no sentido de obter um modelo ótimo quanto aos critérios de precisão e esforço computacional (NAIDU & LIMA, 1985; MARTI et al, 1985; MORENO, 1991; DOMMEL, 1992).

Neste capítulo apresentaremos um breve histórico da modelagem de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência.

3.1 Considerações Gerais.

Consideremos a linha de transmissão monofásica, no domínio modal, da Figura 3.1.



Figura 3.1 - Linha de transmissão no domínio modal.

Para a linha da Figura 3.1, as equações de propagação de ondas (2.8), no domínio da frequência, podem ser reescritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= Z'_{\text{mod}} \cdot Y'_{\text{mod}} \cdot V \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} &= Y'_{\text{mod}} \cdot Z'_{\text{mod}} \cdot J\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para uma linha polifásica, V e J são tensões e correntes modais respectivamente, e $Z'_{\text{mod}}(\omega)$, $Y'_{\text{mod}}(\omega)$ são dados pelas equações (2.11).

As soluções das equações (3.1), são dadas como uma soma de duas ondas viajantes que se propagam em direções opostas, denominadas de onda progressiva e regressiva, na forma da equação (3.2).

$$\begin{aligned}V &= V_{fk} \cdot e^{-\gamma \cdot x} + V_{bk} \cdot e^{+\gamma \cdot x} \\ J &= \frac{1}{Z_c} \cdot V_{fk} \cdot e^{-\gamma \cdot x} - \frac{1}{Z_c} \cdot V_{bk} \cdot e^{+\gamma \cdot x}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Onde, $\gamma = \sqrt{Z'_{\text{mod}} \cdot Y'_{\text{mod}}}$, constante de propagação;

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z'_{\text{mod}}}{Y'_{\text{mod}}}}, \text{ impedância característica;}$$

x = distância de um ponto na linha ao terminal k ;

d = comprimento da linha de transmissão.

Tomando apenas a onda progressiva de tensão, que se propaga do terminal k para o terminal m , na equação (3.2), temos:

$$V_f(x) = V_{fk} \cdot e^{-\gamma \cdot x}, \text{ onde, } V_{fk} = V_f(x)|_{x=0}$$

Ou seja, a tensão em um ponto x da linha é dada pelo produto da tensão no terminal de origem ($x = 0$) e um termo exponencial, que depende da constante de propagação e da distância x . No terminal m , teremos:

$$V_f(x) \Big|_{x=d} = V_{fk} \cdot e^{-\gamma \cdot d} \quad (3.3)$$

O termo exponencial da equação (3.3) é denominado de fator de propagação ou função de transferência da linha de transmissão, sendo definido como:

$$A = e^{-\gamma \cdot d} \quad (3.4)$$

Podemos combinar as equações (3.2), obtendo:

$$\begin{aligned} V + Z_c \cdot J &= 2 \cdot V_{fk} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ V - Z_c \cdot J &= 2 \cdot V_{bk} \cdot e^{+\gamma \cdot x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

DOMMEL (1969) utilizou as equações (3.5) para chegar ao circuito equivalente da Figura 3.2, para cada modo de uma linha de transmissão sem perdas ($[R']=[G']=0$ na equação (2.4)), no domínio do tempo.

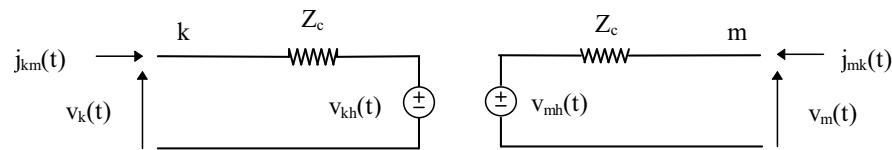


Figura 3.2 - Circuito equivalente para uma linha de transmissão sem perdas.

Onde:

$$\begin{aligned} v_k(t) - Z_c \cdot j_{km}(t) &= v_m(t - \tau) + Z_c \cdot j_{mk}(t - \tau) \\ v_m(t) - Z_c \cdot j_{mk}(t) &= v_k(t - \tau) + Z_c \cdot j_{km}(t - \tau) \\ v_{kh}(t) &= v_m(t - \tau) + Z_c \cdot j_{mk}(t - \tau) \\ v_{mh}(t) &= v_k(t - \tau) + Z_c \cdot j_{km}(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sendo: τ o tempo de trânsito da linha, $Z_c = \sqrt{L'/C'}$ e $\gamma = j\omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} = j\omega \cdot (\tau/d)$.

3.2 Modelo de Budner.

Um dos primeiros modelos considerando a dependência com a frequência dos parâmetros da linha para a solução de transitórios no domínio do tempo, foi proposto por BUDNER (1970).

Budner, trata a linha de transmissão como um quadripolo, Figura 3.3.

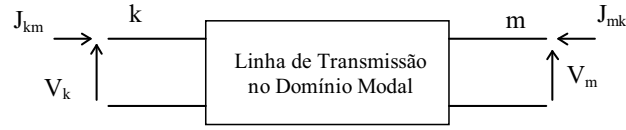


Figura 3.3 - Linha de Transmissão no Modelo de Budner.

Desta forma, as equações (3.2) podem ser reescritas em termos dos parâmetros do quadripolo, tensões e correntes, como:

$$\begin{aligned} [J_{km}(\omega)] &= [Y_{kk}(\omega)] \cdot [V_k(\omega)] + [Y_{km}(\omega)] \cdot [V_m(\omega)] \\ [J_{mk}(\omega)] &= [Y_{mk}(\omega)] \cdot [V_k(\omega)] + [Y_{mm}(\omega)] \cdot [V_m(\omega)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier para as equações (3.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} [j_{km}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [y_{kk}(t-u)] \cdot [v_k(u)] + [y_{km}(t-u)] \cdot [v_m(u)] \} \cdot du \\ [j_{mk}(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{ [y_{mk}(t-u)] \cdot [v_k(u)] + [y_{mm}(t-u)] \cdot [v_m(u)] \} \cdot du \end{aligned} \quad (3.8)$$

As integrais (3.8) são integrais de convolução.

Em (3.7), $[Y_{kk}(\omega)] = [J_{km}(\omega)]$, quando $[V_k(\omega)] = 1$ e $[V_m(\omega)] = 0$.

Assim, $[y_{kk}(t)]$ é numericamente igual a corrente $[j_{km}(t)]$, quando é aplicado um impulso unitário $\delta(t)$ no terminal k , como o terminal m curto-circuitado.

De forma similar, $[Y_{km}(\omega)] = [J_{km}(\omega)]$, quando $[V_m(\omega)] = 1$ e $[V_k(\omega)] = 0$. Portanto, $[y_{km}(t)]$ é numericamente igual a corrente $[j_{km}(t)]$, quando é aplicado um impulso de tensão unitário $\delta(t)$ no terminal m , com o terminal k curto-circuitado.

Deve-se observar que devido à linha ser bilateral, $[Y_{kk}(\omega)] = [Y_{mm}(\omega)]$ e $[Y_{km}(\omega)] = [Y_{mk}(\omega)]$.

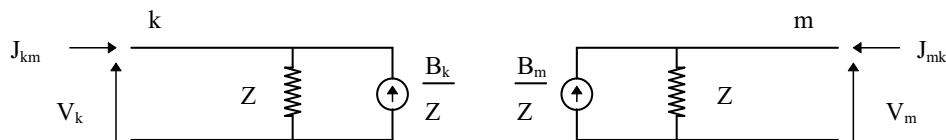
As matrizes $[y_{kk}(t)]$ e $[y_{km}(t)]$ são denominadas de funções de peso, no domínio do tempo e contêm todas as informações sobre a resposta da linha ao fenômeno da propagação de ondas.

No esquema computacional de Budner, calcula-se $[Y_{kk}(\omega)]$ e $[Y_{km}(\omega)]$ em todo o espectro de frequência. Obtém-se então as transformadas inversas das matrizes $[Y_{kk}(\omega)]$ e $[Y_{km}(\omega)]$.

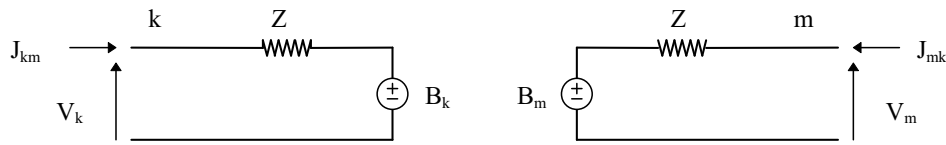
O modelo proposto por Budner apresenta limitações devido as dificuldades em se resolver as integrais de convolução (3.8), e a necessidade de se calcular as funções de peso $[y_{kk}(t)]$ e $[y_{km}(t)]$ utilizando transformadas inversas, o que se constitui em sua maior desvantagem.

3.3 Modelo de Snelson, Meyer e Dommel.

SNELSON (1972) propôs uma mudança de variáveis a partir das equações de BUDNER (1970), que resultou no circuito equivalente sugerido por MEYER & DOMMEL (1974), da Figura 3.4.



(a) Equivalente Norton.



(b) Equivalente Thévenin.

Figura 3.4 - Circuito equivalente para a linha de transmissão, no domínio da frequência, segundo Meyer e Dommel.

O parâmetro Z , na Figura 3.4, é denominado de impedância de surto da linha no instante da aplicação de um impulso aos seus terminais, sendo definido como:

$$Z = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{Z_c(\omega)\} = \sqrt{\frac{L'_\infty}{C'}} \quad (3.9)$$

Os elementos da matriz Z são reais e portanto podem ser tratados como resistências puras.

Do circuito da Figura 3.4, temos:

$$\begin{aligned} B_k(\omega) &= V_k(\omega) - Z \cdot J_{km}(\omega) \\ B_m(\omega) &= V_m(\omega) - Z \cdot J_{mk}(\omega) \end{aligned} \quad (3.10)$$

De forma análoga a (3.6), no domínio da frequência, temos:

$$\begin{aligned} B_k(\omega) &= (V_m(\omega) + Z \cdot J_{mk}(\omega)) \cdot e^{-\gamma(\omega) \cdot d} \\ B_m(\omega) &= (V_k(\omega) + Z \cdot J_{km}(\omega)) \cdot e^{-\gamma(\omega) \cdot d} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Deve-se observar que em (3.11) $\gamma(\omega)$ não é mais um complexo puro, como no caso de uma linha sem perdas.

Desta forma, as informações relativas aos efeitos da frequência sobre os parâmetros, bem como a caracterização da linha face ao fenômeno de ondas viajantes, são concentradas nas fontes de corrente, ou de tensão, do circuito equivalente. No entanto, ainda se faz necessário o uso de transformações inversas para a transição frequência-tempo.

3.4 Modelo de J. Marti.

Os modelos propostos por DOMMEL (1969) para linhas de transmissão sem perdas, por SNELSON (1972), MEYER & DOMMEL (1974) para linhas de transmissão a parâmetros dependentes da frequência, apresentam algumas similaridades.

O fator de propagação para a linha de transmissão sem perdas, pode ser interpretado fisicamente como a relação entre as tensões do terminal receptor e da fonte da Figura 3.5.

$$\frac{V_o}{V_i} = A(\omega) = e^{-j \cdot \omega \cdot \tau}$$

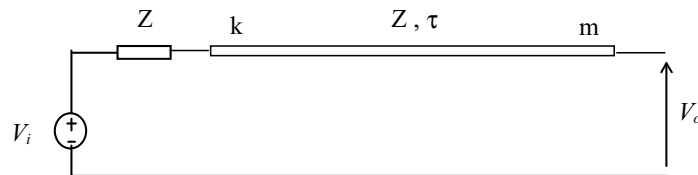


Figura 3.5 - Linha de transmissão sem perdas.

A tensão no terminal receptor é igual a tensão da fonte deslocada no tempo de τ segundos.

No modelo de Snelson, Meyer e Dommel, quando se considera as perdas e os efeitos da frequência, como na linha de transmissão da Figura 3.6, temos: reflexões no terminal k devido a $Z \neq Z_c$ e atenuações nas ondas viajantes devido a inclusão das perdas.

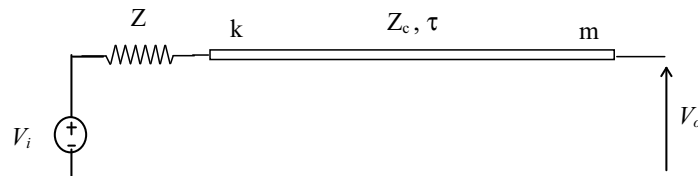


Figura 3.6 - Linha de transmissão no modelo de Snelson, Meyer e Dommel.

A partir do modelo de Snelson, Meyer e Dommel, o que J. MARTI (1982) propôs foi a substituição da impedância de surto na Figura 3.6, pela impedância

característica da linha, $Z_c(\omega)$, dada por: $Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{Z'_{\text{mod}}(\omega)}{Y'_{\text{mod}}(\omega)}}$.

Com esta simples substituição, elimina-se o efeito das reflexões sucessivas, de modo que do circuito da Figura 3.6, obtemos o circuito da Figura 3.7.

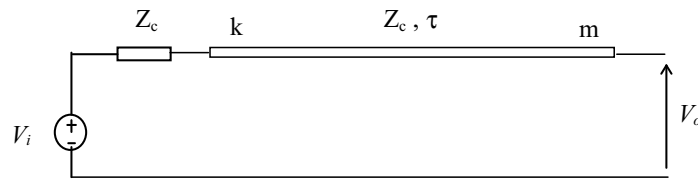
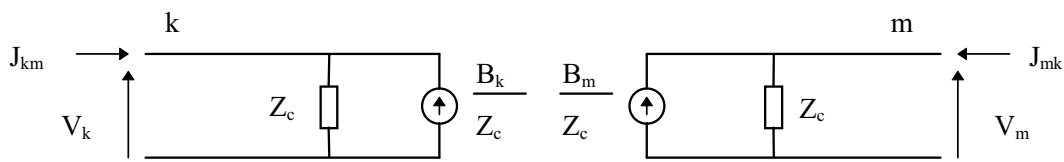


Figura 3.7 - Linha de transmissão na formulação de J. Marti.

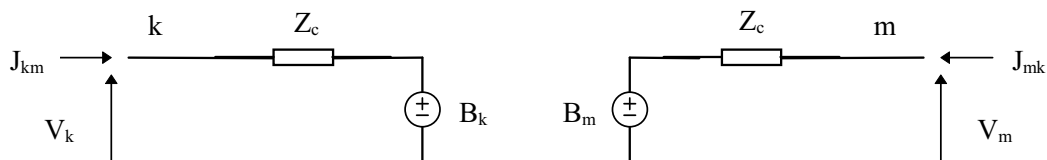
Como $Z_c(\omega)$ é a impedância característica da linha, não haverá reflexões no terminal k . O fator de propagação pode também ser interpretado como a relação:

$$\frac{V_o}{V_i} = A(\omega) = e^{-\gamma(\omega)d}, \text{ como no caso da linha sem perdas.}$$

O circuito equivalente para a linha de transmissão, é o apresentado na Figura 3.8.



(a) Equivalente Norton.



(b) Equivalente Thévenin.

Figura 3.8 - Circuito equivalente para a linha de transmissão, no domínio da frequência, segundo J. Marti.

Neste modelo, a impedância característica contém as informações acerca do comportamento dos parâmetros da linha com relação à frequência, enquanto que as fontes de corrente, ou tensão, caracterizam o fenômeno de ondas viajantes.

Faz-se necessário, no entanto, representar a linha no domínio do tempo, uma vez que a determinação das condições transitórias se dá no tempo.

J. MARTI (1982), propôs uma forma alternativa de realizar a transição frequência-tempo, sem recorrer às transformações inversas. Esta talvez seja a maior vantagem deste modelo.

A idéia básica, para realizar a transição, consiste em expressar $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$ de forma que a transformação possa ser realizada diretamente. Com este intuito, J. Marti propõe obter funções polinomiais racionais aproximadas para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, do tipo:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = G \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdots (s + p_m)} \quad (3.12)$$

Que por sua vez, pode ser expandida na forma de uma soma de frações parciais,

$$\begin{aligned} P(s) &= k_\infty + \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{k_m}{(s + p_m)}, \text{ para } n = m \\ P(s) &= \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{k_m}{(s + p_m)}, \text{ para } n < m \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como $Z_c(\omega)$ corresponde a resposta de um sistema físico passivo que tende para um valor constante quando $\omega \rightarrow \infty$, o número de zeros deve igual ao número de pólos, ou seja, $n = m$ na equação (3.12). Todos os pólos e zeros são negativos, reais e com multiplicidade um (ver Apêndice G). Desta forma, cada modo da impedância característica, $Z_c(\omega)$, pode ser aproximada por uma conexão série-paralela

de blocos RC . Assim, o circuito da Figura 3.8(b) se torna o circuito equivalente da Figura 3.9.

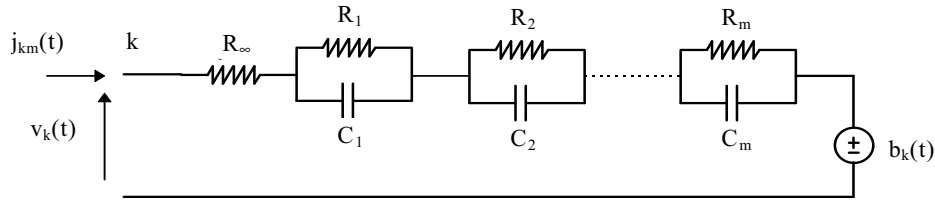


Figura 3.9 - Equivalente RC para simular $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo.

Assim, a impedância característica aproximada, no plano s , com $s = j\omega$, será dada por:

$$Z_{aprox}(s) = R_{\infty} + \frac{1/C_1}{\left(s + 1/R_1 \cdot C_1\right)} + \frac{1/C_2}{\left(s + 1/R_2 \cdot C_2\right)} + \dots + \frac{1/C_m}{\left(s + 1/R_m \cdot C_m\right)} \quad (3.14)$$

Procedendo desta forma, a impedância característica, dependente da frequência, é então sintetizada por um circuito a parâmetros constantes no domínio do tempo.

Pode-se então aplicar a regra trapezoidal de integração, ou outro método de integração numérica, para as capacitâncias e reduzir o circuito equivalente da Figura 3.9 ao circuito da Figura 3.10.

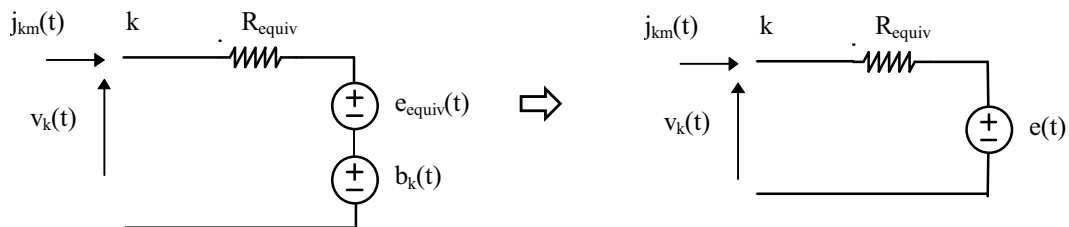


Figura 3.10 - Circuito equivalente para sintetizar $Z_c(\omega)$ no domínio do tempo.

Por fim, a linha dependente da frequência é representada por uma resistência constante, R_{equiv} , em série com uma fonte de tensão $e(t)$. Comparando o circuito da Figura 3.10 ao circuito da Figura 3.2, concluímos que uma linha de transmissão a parâmetros dependentes da frequência pode ser reduzida a um circuito equivalente similar ao circuito equivalente para uma linha de transmissão sem perdas.

No circuito da Figura 3.10, $e(t) = (b_k(t) + e_{equiv}(t))$, e

$$b_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f_m(t-u) \cdot a(u)\} \cdot du, \quad (3.15)$$

Onde: $f_m(t) = v_m(t) + Z_{c-approx} \cdot j_{mk}(t)$.

Desta forma, para determinarmos $b_k(t)$, temos de obter $a(t)$, fazendo a transição de $A(\omega)$ para o domínio do tempo. Com este objetivo, $A(\omega)$ é aproximado por uma função racional.

A função racional que aproxima $A(\omega)$ tem a forma:

$$A_{approx}(s) = P(s) \cdot e^{-s \cdot \tau_{min}} \quad (3.16)$$

Onde, τ_{min} é o tempo de trânsito da componente de frequência mais elevada.

A função $P(s)$ tem a forma da equação (3.10). Como $A(\omega)$ tende para zero quando $\omega \rightarrow \infty$, o número de zeros deve ser menor que o número de pólos, ou seja, $n < m$ na equação (3.12). Todos os pólos e zeros são negativos, reais e com multiplicidade um (MARTI, 1982).

Com $n < m$, consideremos duas situações distintas:

1) $m = (n+1)$: Neste caso a função polinomial racional aproximada terá um pólo a mais que o número de zeros. Isto ocorre quando $P(s)$, da equação (3.12), apresenta uma fase sempre menor que 90° para toda a faixa de frequência;

2) $m = (n + 2)$: Neste caso a função polinomial racional aproximada terá dois pólos a mais que o número de zeros. Isto ocorre quando $P(s)$, da equação (3.12), apresenta uma fase maior que 90° em algum ponto da faixa de frequência.

Com $n < m$, a função racional (3.16), pode ser expandida como uma soma de frações parciais,

$$A_{\text{aprox}}(s) = \left\{ \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_m}{s + p_m} \right\} \cdot e^{-s \cdot \tau_{\min}} \quad (3.17)$$

Retornando ao domínio do tempo, a função aproximada para $a_{\text{aprox}}(t)$, será dada por:

$$a_{\text{aprox}}(t) = \left\{ k_1 \cdot e^{-p_1(t - \tau_{\min})} + k_2 \cdot e^{-p_2(t - \tau_{\min})} + \dots + k_m \cdot e^{-p_m(t - \tau_{\min})} \right\} \cdot u(t - \tau_{\min}) \quad (3.18)$$

SEMLYEN & DABULEANU (1975), SEMLYEN & ROTH (1977) e SEMLYEM (1981), observaram que na resolução de integrais de convolução tendo a forma da equação (3.18), o processo pode ser acelerado significativamente através da técnica da convolução recursiva. Se observarmos a contribuição do termo exponencial $k_i \cdot e^{-p_i \cdot (t - \tau_{\min})}$,

$$s_i(t) = \int_{\tau_{\min}}^{+\infty} g(t - u) \cdot k_i \cdot e^{-p_i \cdot (t - \tau_{\min})} \cdot du \quad (3.19)$$

Então, $s_i(t)$ pode ser diretamente obtido do valor de $s_i(t - \Delta t)$, conhecido do passo de tempo anterior, com apenas três multiplicações e três adições,

$$s_i(t) = c_1 \cdot s_i(t - \Delta t) + c_2 \cdot g(t - \tau_{\min}) + c_3 \cdot g(t - \tau_{\min} - \Delta t), \quad (3.20)$$

como apresentado no Apêndice F.

O sucesso da modelagem de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência, no modelo proposto por J. Marti, depende da qualidade das aproximações racionais para $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$.

J. Marti faz uso do procedimento assintótico de Bode para obter aproximações para as funções $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$ (MARTI, 1982; DOMMEL, 1992). Uma vez que as funções racionais possuem zeros no semiplano esquerdo do plano complexo, as correspondentes funções de fase podem ser determinadas por suas magnitudes.

O princípio básico do algoritmo de Bode, consiste em traçar a curva aproximada através de segmentos de reta. Estes segmentos são horizontais ou com uma inclinação múltipla de 20 dB/Década (Figura 3.11). Os pontos de mudança da inclinação definem os pólos e zeros da função racional aproximada. A aproximação racional para $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$ é assim construída passo à passo: a cada zero adicionado (em $\omega = z_i$), a inclinação da curva assintótica é aumentada em 20 dB , ou decrescida em 20 dB a cada pólo adicionado (em $\omega = p_i$).

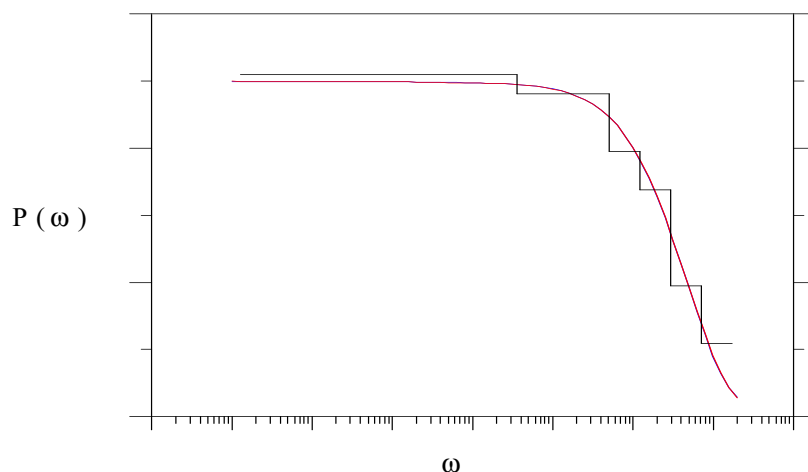


Figura 3.11 - Método de ajuste assintótico.

Durante o processo de ajuste, os pólos e zeros da função racional aproximada são sucessivamente alocados visando aproximar o comportamento da

função racional às funções $A(\omega)$ e $Z_c(\omega)$, ou $Y_c(\omega)$, para toda a faixa de frequência considerada. Como consequência do processo assintótico, é necessário um número elevado de pólos e zeros para o polinômio aproximado.

L. MARTI (1983) obteve aproximações de baixa ordem fazendo uso do método de ajuste assintótico, no entanto, para tal, reduziu consideravelmente a faixa de frequência e a precisão das aproximações.

Neste trabalho, apresentaremos um método de ajuste que permite obter funções aproximadas de baixa ordem, para uma extensa faixa de frequência com boa precisão.

Capítulo 4

Modelagem de Linhas de Transmissão no Domínio do Tempo

Uma vez determinado o comportamento da impedância série modal, $Z'_{mod}(\omega)$, e da admitância shunt, $Y'_{mod}(\omega)$, como função da frequência, para uma dada linha de transmissão, esta pode ser completamente caracterizada, no domínio da frequência, por dois parâmetros apenas:

$$Z_c(\omega) = [Y_c(\omega)]^{-1} = \sqrt{\frac{Z'_{mod}(\omega)}{Y'_{mod}(\omega)}} \quad (4.1)$$

$$A(\omega) = e^{-\gamma \cdot d} \quad (4.2)$$

Onde:

$Z_c(\omega)$ - Impedância Característica;

$Y_c(\omega)$ - Admitância Característica;

$A(\omega)$ - Fator de Propagação ou Função de Transferência;

$\gamma(\omega) = \sqrt{Z'_{mod}(\omega) \cdot Y'_{mod}(\omega)}$ - Constante de Propagação;

d - Comprimento da linha de transmissão;

$Z'_{mod}(\omega)$ - Impedância série modal;

$Y'_{mod}(\omega)$ - Admitância shunt modal;

A questão agora reside em como obter um modelo para representar a linha de transmissão no domínio do tempo a partir de $Z_c(\omega)$ e $A(\omega)$.

Determinando $Z_c(\omega)$, temos determinado $Y_c(\omega)$, uma vez que: $Z_c(\omega) = [Y_c(\omega)]^{-1}$. Por isso, deste ponto em diante, trataremos apenas de $Y_c(\omega)$.

4.1 Determinação das Condições Transitórias de um Sistema no Domínio do Tempo.

Sintetizada a função aproximada, correspondentes a $Y_c(\omega)$, no domínio do tempo, e $a_{aprox}(t)$, a linha de transmissão em questão se encontra completamente caracterizada no domínio do tempo. Nestas funções aproximadas, se encontram todas as informações relativas ao fenômeno de propagação de ondas viajantes e ao comportamento dos parâmetros da linha de transmissão com relação à frequência.

No domínio do tempo, as condições transitórias de um sistema são determinadas em passos de tempo Δt , pré-fixado. Partindo-se das condições iniciais em $t=0$, as tensões e as correntes em cada nó do sistema em análise são determinadas para cada $t=\Delta t, 2.\Delta t, 3.\Delta t, \dots$, até o tempo máximo de simulação, t_{max} .

O primeiro passo para determinar as condições transitórias de um dado sistema em um programa de cálculo de transitórios no domínio do tempo, é determinar um modelo discreto no tempo para cada um dos seus elementos.

No caso específico do MICROTRAN[®], as funções polinomiais racionais aproximadas, $Y_{aprox}(\omega)$ e $A_{aprox}(\omega)$, escritas como uma soma de frações parciais, constituem-se nos únicos parâmetros de entrada, para uma linha de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência.

A forma das funções a serem aproximadas dependem da linha em particular, do seu comprimento e do modo. O sucesso da modelagem depende da qualidade das aproximações racionais para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$.

Outro aspecto importante diz respeito ao esforço computacional gasto na determinação das condições transitórias do sistema em análise. A modelagem a parâmetros dependentes da frequência é mais dispendiosa que a parâmetros constantes pela necessidade de se realizar uma quantidade bem superior de cálculos para determinação das tensões e correntes nas extremidades da linha. Esta adição de esforço computacional, por sua vez, está diretamente relacionada ao número de termos das funções $Y_{aprox}(\omega)$ e $A_{aprox}(\omega)$ escritas como uma soma de frações parciais, que dependem do número de zeros e pólos necessários para aproximar as funções racionais com um erro mínimo.

Desta forma, uma solução de compromisso entre a precisão da aproximação e número de zeros e pólos, deve ser encontrada visando balancear dois aspectos: esforço computacional e precisão. O dispêndio computacional não deve ser excessivo, no entanto, a precisão das aproximações deve ser tal que não comprometa a precisão dos resultados.

No próximo capítulo, é apresentado o método implementado com os objetivos discutidos acima.

Capítulo 5

Modelo Implementado

Como discutido anteriormente, a ordem das funções polinomiais racionais resultantes do processo de aproximação para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, definirão:

- 1) A precisão e, conseqüentemente, a validade dos resultados;
- 2) O esforço computacional na determinação das condições transitórias do sistema em análise.

Por isso, o processo de ajuste torna-se um aspecto de especial importância, visto que a ordem dos polinômios racionais resultantes da aproximação, bem como sua precisão, serão definidas pelo método empregado.

A questão consiste em:

- 1) Determinar um método de ajuste que possa fornecer aproximações suficientemente precisas sem a necessidade de um número elevado de zeros e pólos para os polinômios racionais aproximados;
- 2) Implementar tal método de forma prática através de recursos razoáveis (esforço computacional, hardware mínimo, etc.).

Diferentes métodos são mencionados na literatura de síntese de redes para a determinação de $P(s)$ (VALKENBURG, 1960; CHEN, 1964; LANCZOS, 1988; PRESS et al, 1992).

Neste capítulo, abordaremos a questão da modelagem de dados, em seguida apresentaremos o método de ajuste implementado para obtenção das funções $Y_{aprox}(\omega)$ e $A_{aprox}(\omega)$.

5.1 Modelagem de Dados.

Tendo um conjunto de dados, frequentemente se deseja condensar ou resumir, tais dados, ajustando-os a um modelo. A preocupação básica é normalmente minimizar uma função erro que quantifique a “distância” entre uma solução aproximada e a solução real. Uma ferramenta bastante utilizada na determinação desta solução aproximada é o método dos mínimos quadrados (PRESS et al, 1992), e um critério de grande utilização, para quantificar a “distância” entre as soluções, é definido como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - y(x_i; a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (5.1)$$

Onde, y_i = i-ésimo ponto do conjunto de N dados ao qual se deseja modelar;

x_i = i-ésimo valor da variável do conjunto de dados (tempo, frequência, etc.)

$y(x_i; a_1, \dots, a_M)$ = i-ésimo ponto do modelo, com M parâmetros a_k , que se deseja determinar;

σ_i = desvio padrão do i-ésimo ponto do conjunto de dados;

χ^2 = função erro a ser minimizada.

5.2 Método de Aproximação Não-Linear.

O método de aproximação não-linear foi implementado em dois módulos distintos, um para o ajuste da admitância característica e outro para o fator de propagação.

5.2.1 Admitância Característica.

Deseja-se determinar uma função polinomial racional $P(s)$, no plano s , com $s = j\omega$, da forma:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot \dots \cdot (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot \dots \cdot (s + p_m)} \quad (5.2)$$

que se aproxime, com erro mínimo de uma dada função $F(s)$.

Como os zeros e pólos de $P(s)$ devem estar no semiplano negativo, precisamos conhecer apenas $|F(s)|$ para que possamos determinar $P(s)$ (Apêndice G).

A admitância característica, $Y_c(s)$, é aproximada por uma função de fase mínima. De (5.2), considerando $s=j\omega$, obtemos,

$$|P(\omega)|^2 = H^2 \cdot \frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (A_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1) \cdot (B_2 \cdot \omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (B_n \cdot \omega^2 + 1)} \quad (5.3)$$

O objetivo é determinar os parâmetros H , A_i e B_i da equação (5.3).

5.2.2 Fator de Propagação.

Deseja-se determinar uma função polinomial racional $P(s)$, no plano s , com $s = j\omega$, na forma da equação (5.2).

O fator de propagação, $A(s)$, pode ser escrito como:

$$A(s) = P(s) \cdot e^{-s \cdot \tau_{min}} \quad (5.4)$$

Com $s = j\omega$, $A(s)$ tende para zero quando $\omega \rightarrow \infty$, assim o número de zeros deve ser menor que o número de pólos, ou seja, $m > n$ na equação (5.2), e a parte real dos pólos devem estar localizadas no semiplano esquerdo do plano complexo. Como discutido anteriormente, m pode ser igual a $(n+1)$ ou $(n+2)$, para a aproximação polinomial na forma da equação (5.2). Consideremos inicialmente $m=(n+1)$.

Na equação (5.4) podemos escrever $P(s)$, para $s=j\omega$, da seguinte forma,

$$|P(\omega)|^2 = H^2 \cdot \left(\frac{(A_1 \cdot \omega^2 + 1)}{(B_1 \cdot \omega^2 + 1)} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{(A_n \cdot \omega^2 + 1)}{(B_n \cdot \omega^2 + 1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{(B_m \cdot \omega^2 + 1)} \right) \quad (5.5)$$

O objetivo, portanto, é determinar os parâmetros H , A_i e B_i da equação (5.5).

5.2.3 Algoritmo Implementado.

A distinção entre $P(s)$ para a admitância característica e o fator de propagação é apenas relativo ao número de pólos e zeros da função polinomial (5.3) e (5.5). Por isso, o algoritmo implementado segue a mesma sequência de eventos, diferindo apenas na definição dos polinômios racionais aproximados.

Uma função racional na forma (5.2) reproduz uma curva que oscila entre seus zeros e pólos. Para uma função monotonicamente crescente, $z_i < p_i$, para $i=1, 2, \dots, n$. Ou seja, cada zero é alocado antes de um pólo. Para uma função monotonicamente decrescente, $z_i > p_i$, para $i=1, 2, \dots, n$. Ou seja, cada zero é alocado depois de um pólo.

O algoritmo implementado em FORTRAN é descrito a seguir.

1) Divide-se a faixa de frequência em escala logarítmica, iniciando da menor frequência, ω_{min} , até a máxima frequência, ω_{max} , em intervalos $\Delta\omega$, como mostrado na Figura 5.1.

O número de intervalos depende da faixa de frequência e da ordem de $P(\omega)$, na forma das equações (5.3) e (5.5). A ordem de $P(\omega)$ é fornecida pelo usuário.

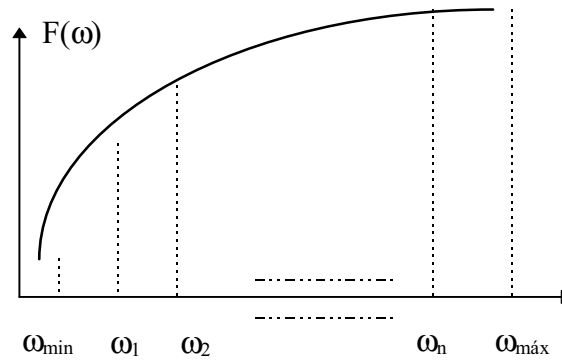


Figura 5.1 - Divisão em escala logarítmica da faixa de frequência da função $F(\omega)$.

- 2) A partir da divisão acima, estima-se os valores iniciais para as variáveis, no centro de cada intervalo da escala logarítmica: Para $Y_c(\omega)$, os zeros estimados têm valor pouco menor que o pólo subsequente. Para $A(\omega)$, os zeros estimados têm valor pouco maior que o pólo ao qual se segue.
- 3) Inicializadas as variáveis, determina-se $\chi^2(\mathbf{a})$, para os valores iniciais dos parâmetros A_i , B_i e H , (vetor \mathbf{a}), através do método de Levenberg-Marquardt (PRESS et al, 1992), descrito no Apêndice H. Neste ponto, precisa-se conhecer a forma da função a ser aproximada e o seu Jacobiano.
- 4) Inicia-se o processo iterativo, onde determina-se os parâmetros A_i , B_i e H , (vetor \mathbf{a}), que minimizem a função $\chi^2(\mathbf{a})$.

Ao final do processo, temos determinado os parâmetros A_i , B_i e H , (vetor \mathbf{a}), das equações (5.3) e (5.5), de modo que $\chi^2(\mathbf{a})$ é mínimo.

No capítulo a seguir, apresentaremos e discutiremos os resultados obtidos com o método implementado.

Capítulo 6

Apresentação e Análise dos Resultados

Neste Capítulo apresentaremos os resultados obtidos com o método apresentado no Capítulo 5. Para tornar possível uma análise dos referidos resultados, faremos algumas comparações entre o método de ajuste assintótico (MARTI, 1982; DOMMEL, 1992) e o método implementado pelo autor, para dois casos distintos:

- 1) Linha monofásica com um único condutor com retorno pela terra;
- 2) Linha trifásica não transposta, com quatro condutores geminados por fase e um cabo pára-raio.

6.1 Linha de Transmissão Monofásica.

Consideremos a linha monofásica com retorno pela terra da Figura 6.1.

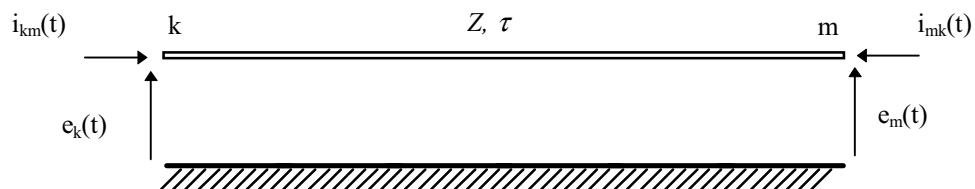


Figura 6.1 - Linha monofásica com retorno pela terra.

Os dados da linha da Figura 6.1 são listados na Tabela 6.1.

Número de Circuitos	1
Número de condutores por fase	1
Resistividade do condutor da fase	32 nΩ.m
Diâmetro externo do condutor	28,6 mm
Altura do condutor ao solo	12,04 m
Resistividade do solo	20,0 Ω.m
Comprimento da linha	160,0 km

Tabela 6.1 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.1.

Fazendo uso do FDDATATM (MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION, 1992) calculou-se $Y_c(\omega)$ para a faixa de frequência de 10^{-2} a 10^6 Hz, e determinou-se $A(\omega)$ de 10^{-2} a 10^5 Hz. Esta faixa de frequência é determinada de acordo com os seguintes critérios:

- 1) Calcula-se $Y_c(\omega)$ para a faixa de frequência especificada pelo usuário;
- 2) Calcula-se $A(\omega)$ para a faixa de frequência especificada pelo usuário ou até que o módulo de $A(\omega)$ seja menor que 5% do seu valor máximo.

De posse dos valores dos módulos e fases de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, realizamos o ajuste assintótico com o FDDATATM e com o método descrito no Capítulo 5 (Método de ajuste não-linear).

Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

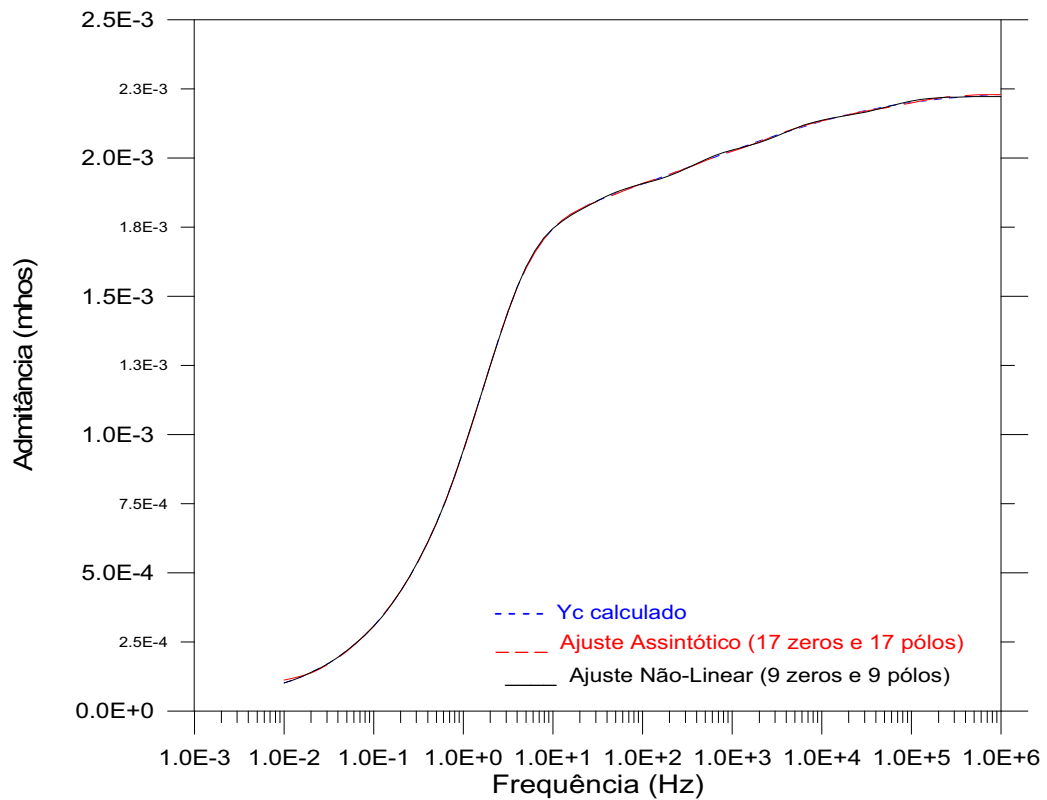


Figura 6.2 - Admitância característica, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

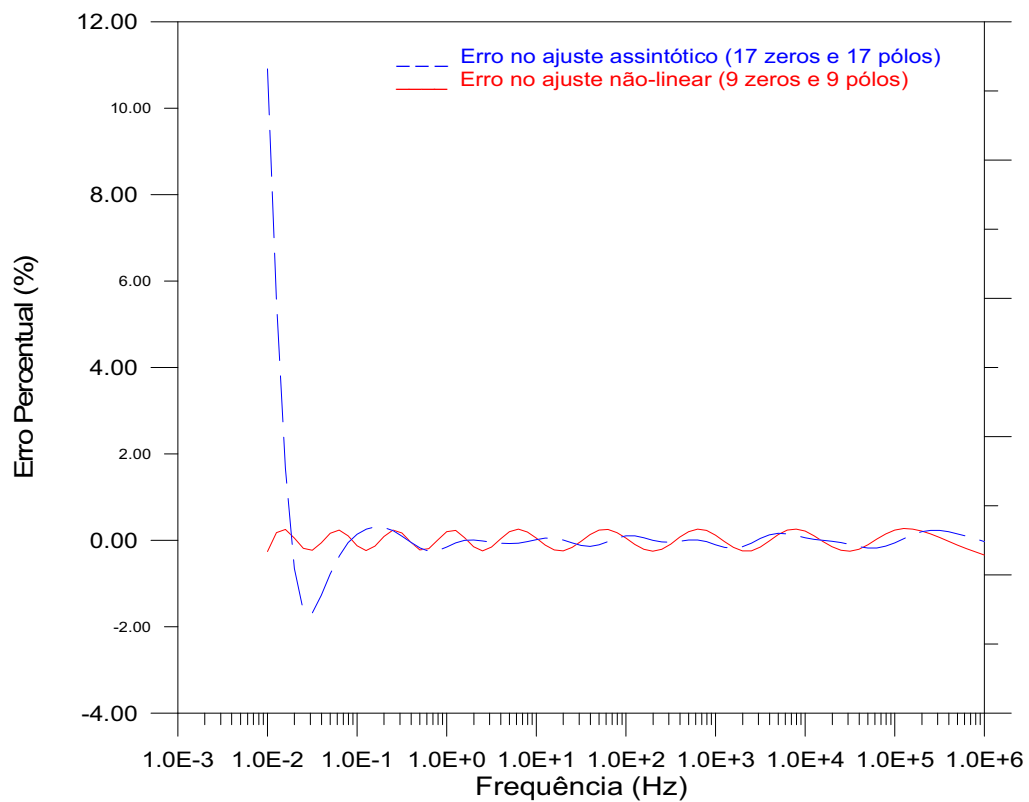


Figura 6.3 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para a admitância característica.

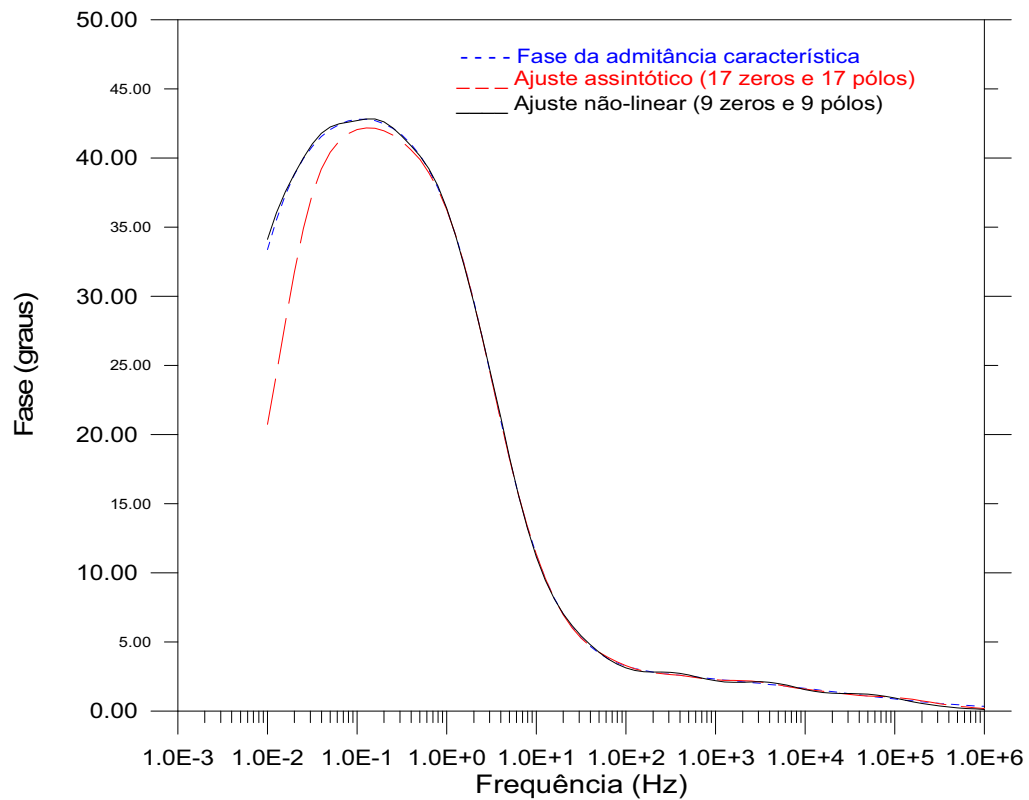


Figura 6.4 - Fase da admitância característica, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

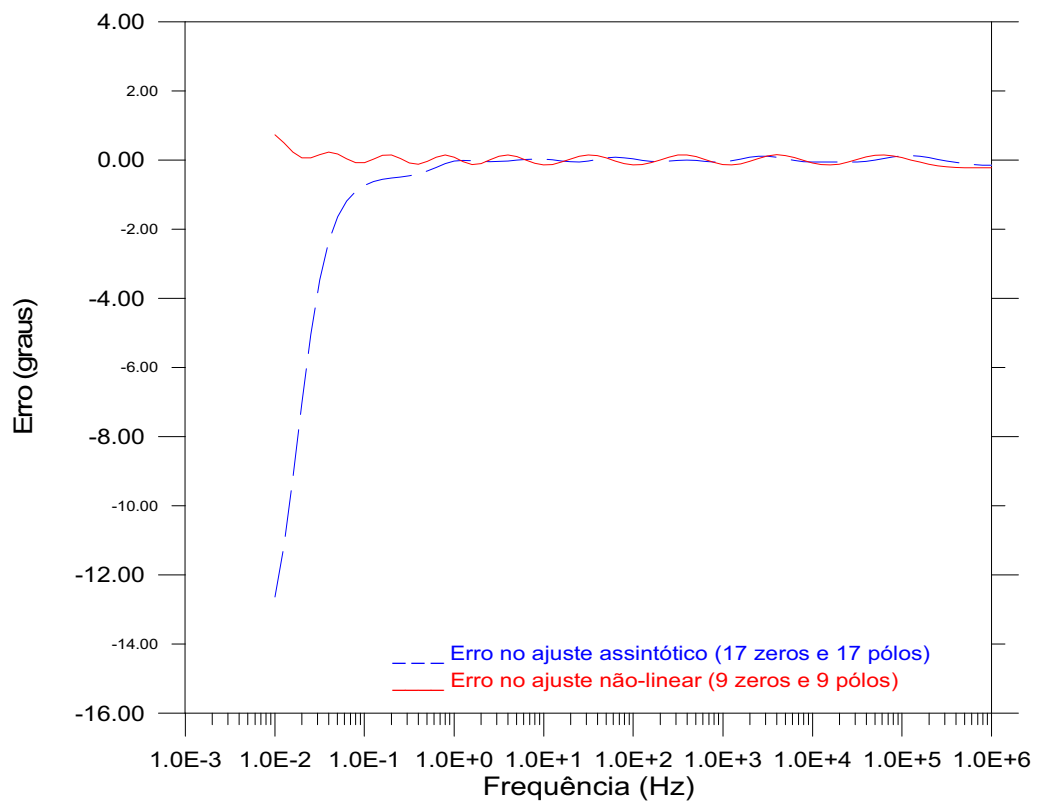


Figura 6.5 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear para a fase da admitância característica.

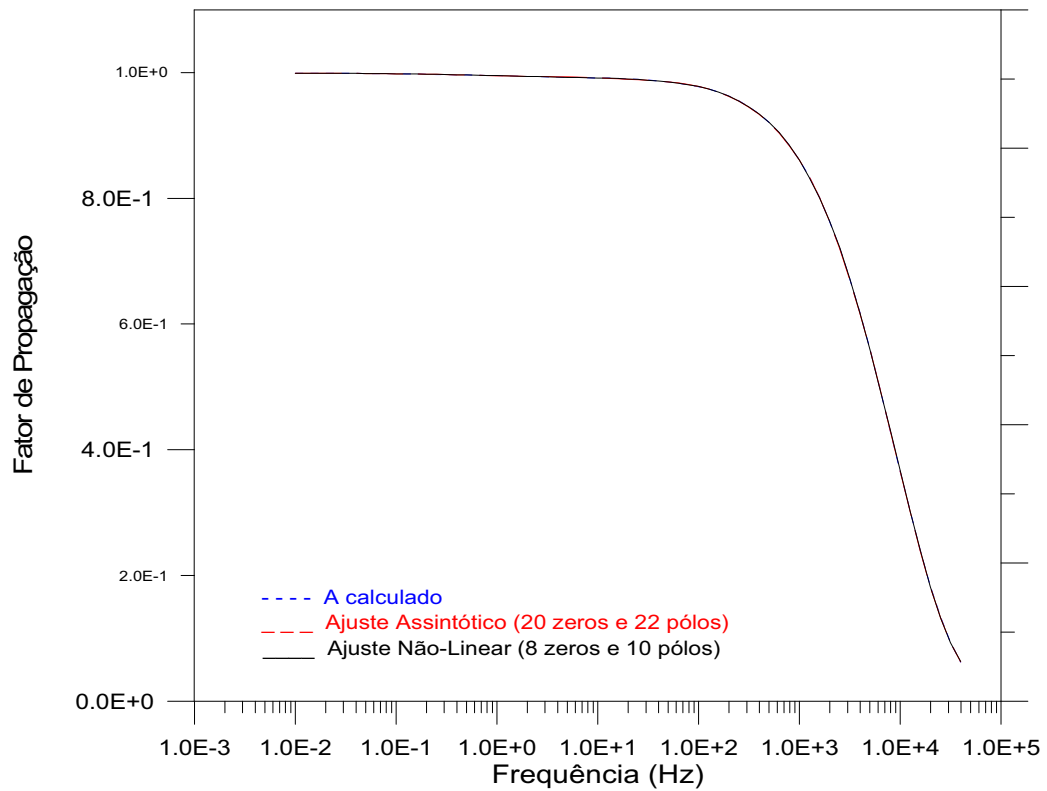


Figura 6.6 - Fator de propagação, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

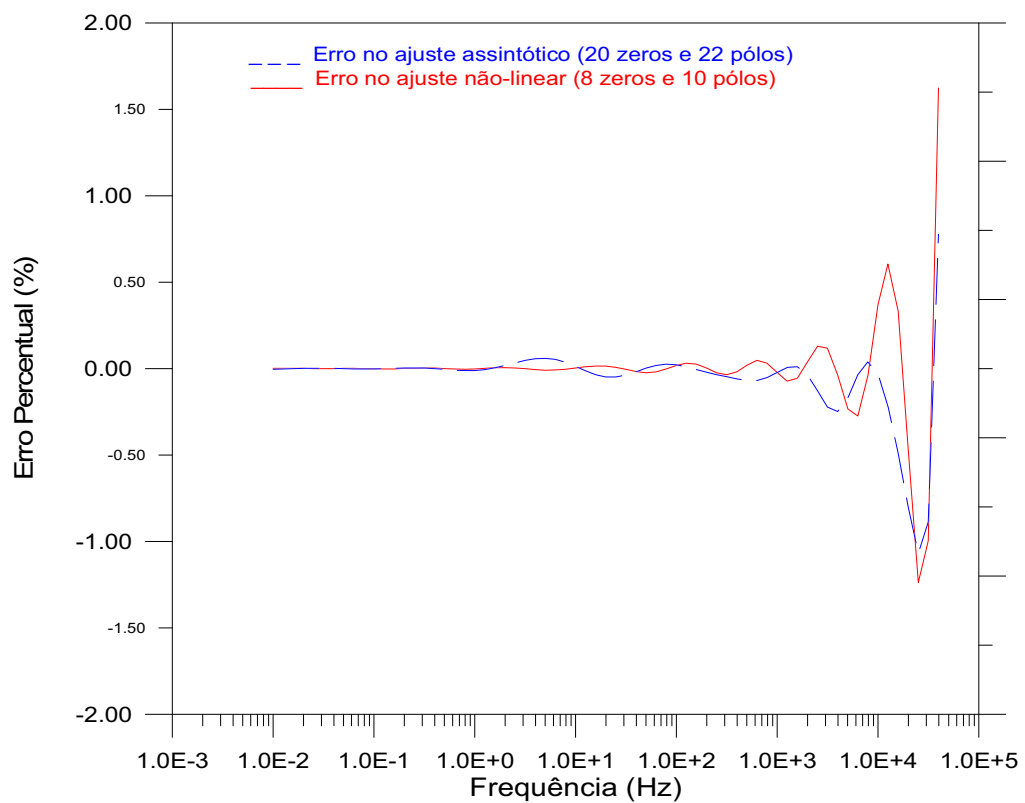


Figura 6.7 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear para o fator de propagação.

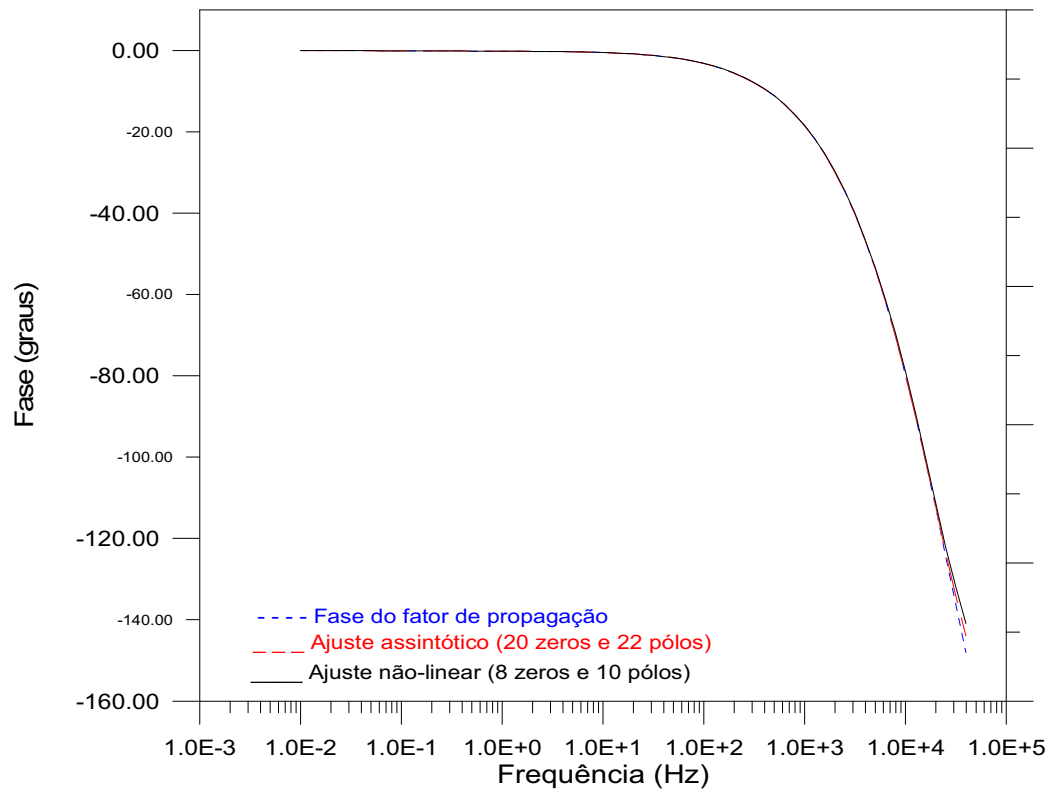


Figura 6.8 - Fase do fator de propagação, ajuste assintótico e ajuste não-linear.

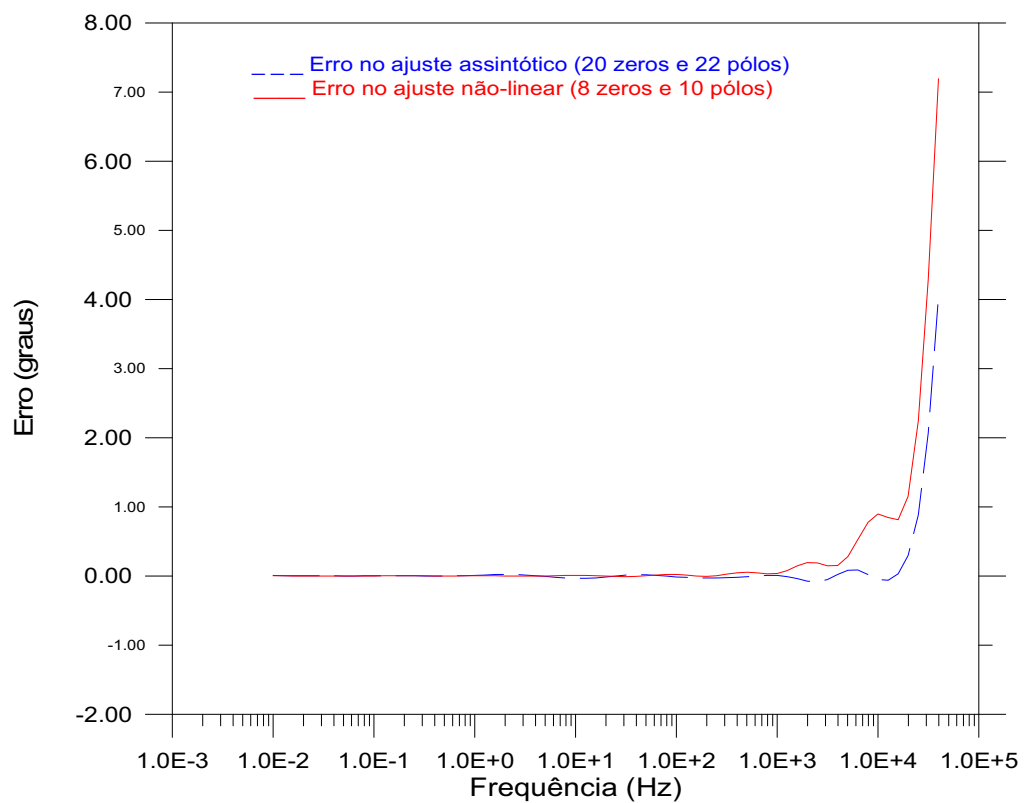


Figura 6.9 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear para a fase do fator de propagação.

O método assintótico apresenta erros locais elevados, como pode ser observado nas Figuras 6.3, 6.5, 6.7 e 6.9. Das Figuras 6.3 e 6.5, pode-se notar que o método não-linear apresenta um erro mais distribuído ao longo de toda a faixa de frequência.

Um critério deve ser utilizado para avaliar a precisão da aproximação como um todo, e não com base em pontos isolados.

Um critério que pode retratar melhor a precisão das aproximações, para toda a faixa de frequência do ajuste, é o *erro percentual acumulado*, $E_{ac}(\%)$, definido como sendo a soma dos valores absolutos dos erros percentuais entre a função original e sua aproximação ponto à ponto, para toda a faixa de frequência do ajuste, ou seja,

$$E_{ac}(\%) = \sum_{i=1}^{npt} \left| \frac{F(\omega_i) - F_{aprox}(\omega_i)}{F(\omega_i)} \right| \cdot 100\% \quad (6.1)$$

Onde, npt é número de pontos.

Para a linha de transmissão da Figura 6.1, obtivemos os valores do erro percentual acumulado listados na Tabela 6.2.

	Método de ajuste assintótico				Método de ajuste não-linear			
	Número de zeros	Número de pólos	$E_{ac}(\%)$	Erro Máximo	Número de zeros	Número de pólos	$E_{ac}(\%)$	Erro Máximo
$Y_c(\omega)$	17	17	31,49%	10,91%	09	09	13,42%	0,34%
$A(\omega)$	20	22	6,27%	1,07%	08	10	7,09%	1,62%

Tabela 6.2 - Resultados obtidos com os métodos de ajuste assintótico e não-linear.

Do apresentado na Tabela 6.2 e das Figuras 6.2 a 6.9, podemos tecer os seguintes comentários:

1) No método de ajuste não-linear, os valores obtidos, para o erro percentual acumulado, no ajuste da admitância característica é inferior ao mesmo erro no método assintótico, enquanto que para o fator de propagação, o erro percentual acumulado é um pouco superior.

2) A ordem das aproximações (o número de zeros, grau do numerador e o número de pólos, grau do denominador) obtidas com o método não-linear é significativamente menor que no método assintótico, apresentando uma precisão melhor ou similar.

Uma questão que pode surgir neste ponto é: como se comporta o erro percentual com a ordem das aproximações (o número de zeros e pólos)?

As Figuras 6.10 e 6.11 ilustram o comportamento da precisão versus a ordem dos polinômios aproximados, obtida com o método de ajuste não-linear.

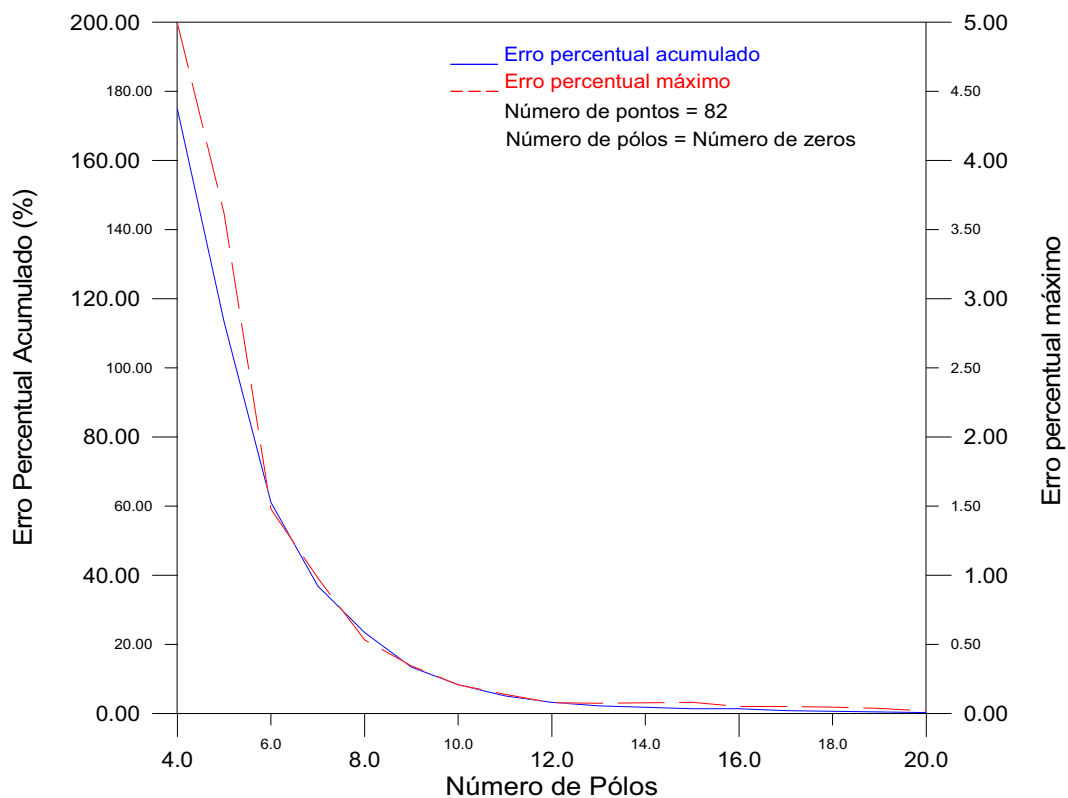


Figura 6.10 - Erro percentual versus número de pólos para $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

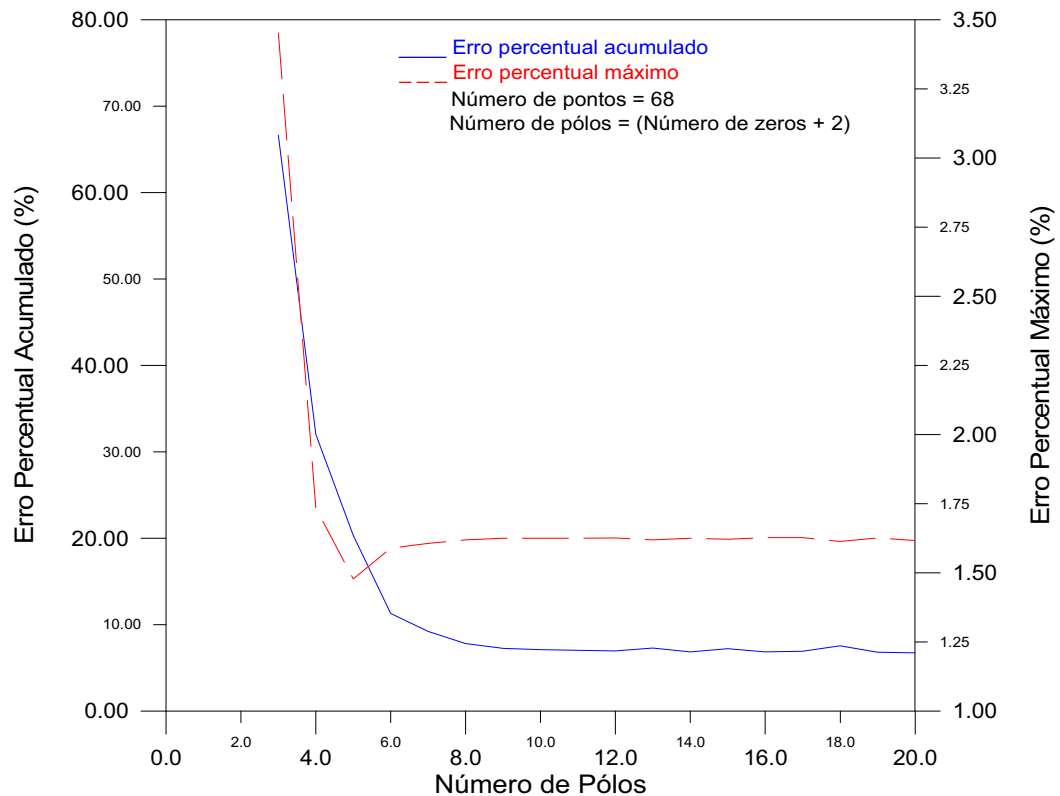


Figura 6.11 - Erro percentual versus número de pólos para $A(\omega)$ no método não-linear.

Observando as Figuras 6.10 e 6.11, verificamos que o erro percentual acumulado tende para um valor absoluto de pequena magnitude à medida que cresce a ordem dos polinômio racional aproximado para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$. Um comportamento similar é observado para erro percentual máximo.

Das Figuras 6.10 e 6.11 pode-se concluir que nos aspectos precisão e ordem dos polinômios aproximados, o método não-linear apresentou um melhor desempenho quando comparado ao método assintótico para a linha de transmissão em estudo.

6.1.2 Simulação Digital.

Modelamos a linha de transmissão da Figura 6.1 utilizando dois métodos distintos: o método assintótico (FDDATATM) e o método não-linear, implementado pelo autor e apresentado no Capítulo 5.

Com os resultados da modelagem, simulamos, para a referida linha de transmissão, duas condições transitórias distintas:

- 1) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por uma fonte senoidal de tensão;
- 2) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por um degrau de tensão.

Na simulação utilizou-se o programa MICROTRAN[®].

Os resultados obtidos para os dois casos em consideração, apresentados nas Figuras 6.14 e 6.15, são praticamente idênticos. Nas simulações, utilizou-se um passo de tempo, $\Delta t = 1\mu s$ e as matrizes de transformação modais calculadas em 1,2 kHz..

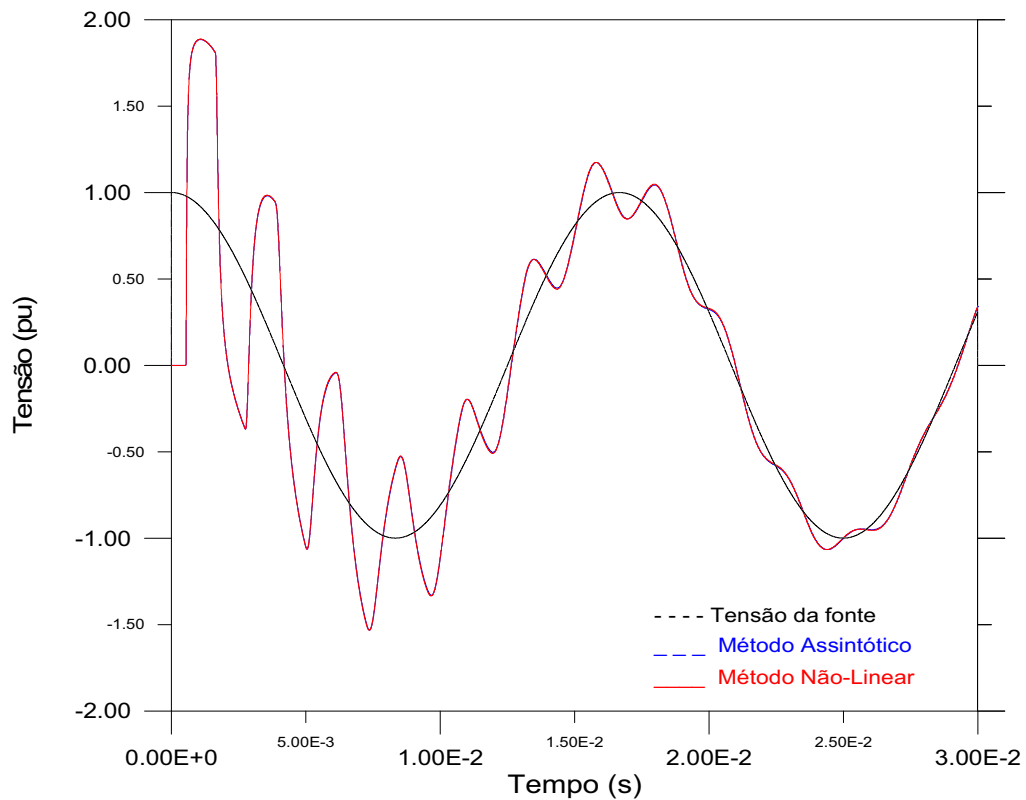


Figura 6.12 - Energização da linha da Figura 6.1, em aberto, por uma fonte senoidal. Condição transitória no terminal receptor .

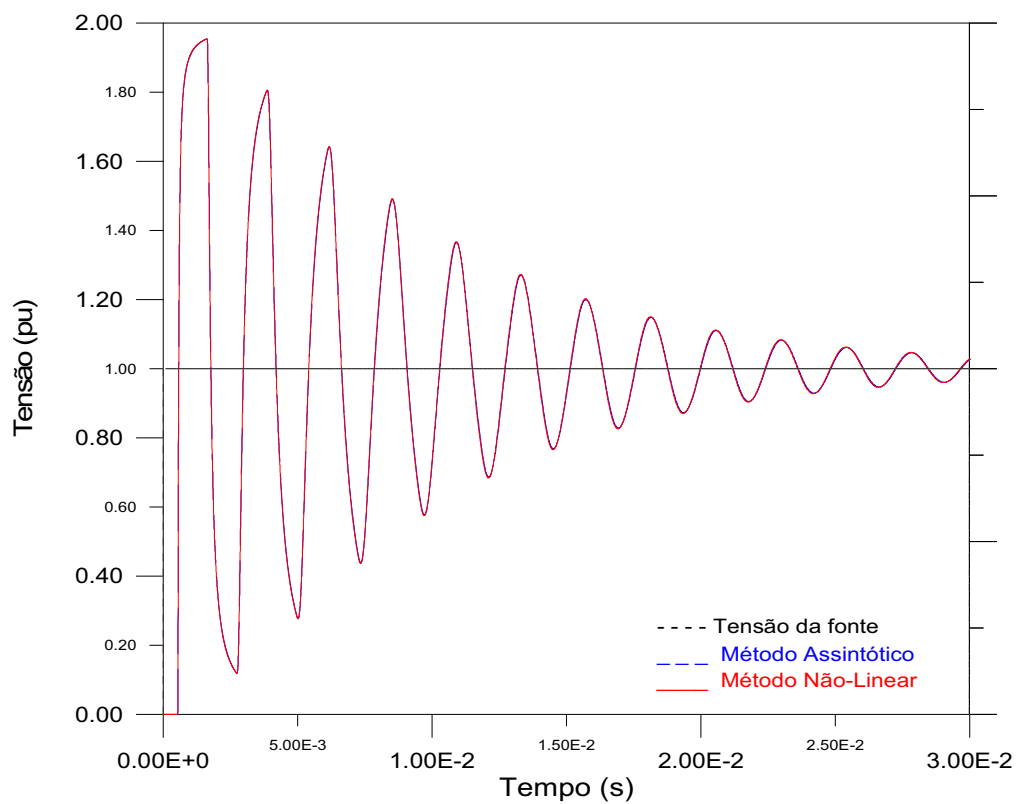


Figura 6.13 - Energização da linha da Figura 6.1, em aberto, por um degrau de tensão. Condição transitória no terminal receptor.

O esforço computacional, traduzido em tempo de processamento, para os dois casos considerados, fazendo uso dos modelos dependentes da frequência, é apresentado nas Tabelas 6.3 e 6.4. O tempo de processamento fazendo uso de um modelo a parâmetros constantes com a frequência, também é apresentado nas Tabelas 6.3 e 6.4.

Energização	Tempo de simulação / Número de passos de tempo		
	Modelo a Parâmetros Constantes	Modelo Obtido com o Método assintótico	Modelo Obtido com o Método não-linear
Fonte senoidal	21,0 / 30000 = 0,700 ms	35,0 / 30000 = 1,17 ms	30,0 / 30000 = 0,987 ms
Degrau de tensão	20,0 / 30000 = 0,667 ms	33,0 / 30000 = 1,11 ms	29,0 / 30000 = 0,980 ms

Tabela 6.3 - Esforço computacional - Tempo de simulação por passo de tempo.

Energização	Tempo total de processamento		
	Modelo a Parâmetros Constantes	Modelo Obtido com o Método assintótico	Modelo Obtido com o Método não-linear
Fonte senoidal	21,0 s	35,0 s	30,0 s
Degrau de tensão	20,0 s	33,0 s	29,0 s

Tabela 6.4 - Esforço computacional - Tempo total de processamento.

Do apresentado na Tabela 6.4, podemos observar que:

1) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.1, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal, com relação ao modelo a parâmetros constantes, o acréscimo no tempo total de processamento foi de 66,67% para o modelo obtido com o método assintótico e 42,85% para o modelo obtido com o método de ajuste não linear.

2) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.1, em aberto, por um degraú de tensão, com relação ao modelo a parâmetros constantes, o acréscimo no tempo total de processamento foi de 65,00% para o modelo obtido com o método assintótico e 45,00% para o modelo obtido com o método de ajuste não linear.

Comparando o esforço computacional decorrente da utilização dos modelos obtidos com o método de ajuste assintótico e o método de ajuste não-linear, observamos que:

1) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.1, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal, obtivemos uma redução no esforço computacional de 15,64% em cada passo de tempo Δt (Tabela 6.3). No tempo total de processamento a redução foi de 14,29% (Tabela 6.4).

2) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.1, em aberto, por um degrau de tensão, obtivemos uma redução no esforço computacional de 11,71% em cada passo de tempo Δt (Tabela 6.3). No tempo total de processamento foi de 12,12% (Tabela 6.4).

Como esperado, obtivemos uma redução no esforço computacional, utilizando o modelo de baixa ordem fornecido pelo método de ajuste não-linear implementado.

Faz-se necessário, também, comentar sobre o tempo gasto na obtenção das funções racionais aproximadas para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$. Esta é a fase de pré-processamento. Nesta fase, tanto no FDDATA™ como no método de ajuste não-linear, é gasto um esforço computacional considerável. Em termos comparativos, o esforço computacional é bem superior no método não-linear.

Neste aspecto deve-se observar que, dada uma linha de transmissão na qual se deseja determinar as condições transitórias para várias situações distintas (como por exemplo, energização em aberto, simulações de faltas assimétricas, etc.), faz-se necessário modelar a linha uma única vez, para simular inúmeras possibilidades de ocorrência de transitórios no sistema. Por isso, um esforço computacional adicional na fase de pré-processamento, que proporcione uma redução do mesmo na simulação das condições transitórias do sistema no domínio do tempo, é justificável.

6.2 Linha de Transmissão Trifásica.

Consideremos a linha de transmissão trifásica, não-transposta, com quatro condutores geminados por fase e um cabo pára-raio, da Figura 6.14.

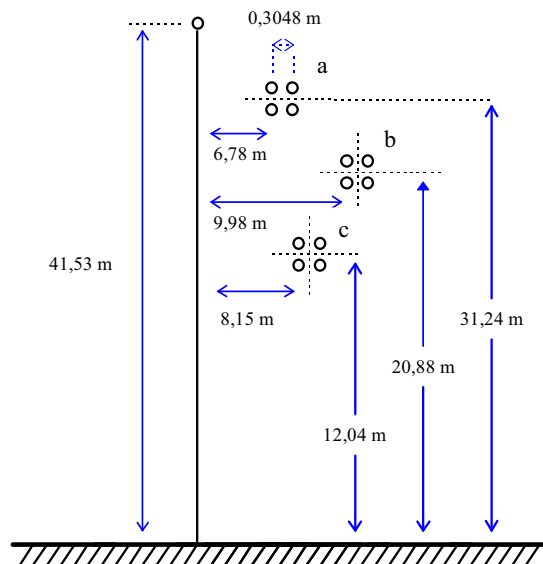


Figura 6.14 - Linha de transmissão trifásica, não-transposta, com quatro condutores por fase e um cabo pára-raios.

Os dados da linha da Figura 6.14 são listados na Tabela 6.5.

Número de Circuitos	1
Número de condutores por fase	4
Número de cabos pára-raios	1
Simetria de posição dos condutores	Nenhuma
Resistividade dos condutores das fase	32 nΩ.m
Resistividade do cabo pára-raios	26,9 nΩ.m
Diâmetro Médio Geométrico do conjunto de 4 cabos de cada fase	30,94 cm
Diâmetro externo dos condutores e do cabo pára-raios	28,6 mm
Resistividade do solo	20,0 Ω.m
Comprimento da linha	160,0 km

Tabela 6.5 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.14.

Fazendo uso do FDDATA™, calculou-se os modos zero, positivo e negativo de $Y_c(\omega)$ para a faixa de frequência de 10^{-2} Hz a 10^6 Hz, o modo zero de $A(\omega)$ para a faixa de 10^{-2} Hz a 10^5 Hz e os modos positivo e negativo de $A(\omega)$ para a faixa de

10^{-2} Hz a 10^6 Hz, de acordo com os critérios, já citados, do FDDATA™ para o processo de ajuste.

Com os valores de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, realizou-se o ajuste assintótico com o FDDATA™.

Visando obter um modelo otimizado, baseado nos critérios de precisão e ordem dos polinômios aproximados, para a linha de transmissão da Figura 6.14, através do método de ajuste não-linear implementado (Capítulo 5), realizou-se o ajuste para um número variado de zeros e pólos dos polinômios racionais aproximados.

O comportamento obtido para o erro percentual acumulado e para o erro percentual máximo versus a ordem dos polinômios aproximados, para cada modo, é apresentado nas Figuras 6.15 a 6.20.

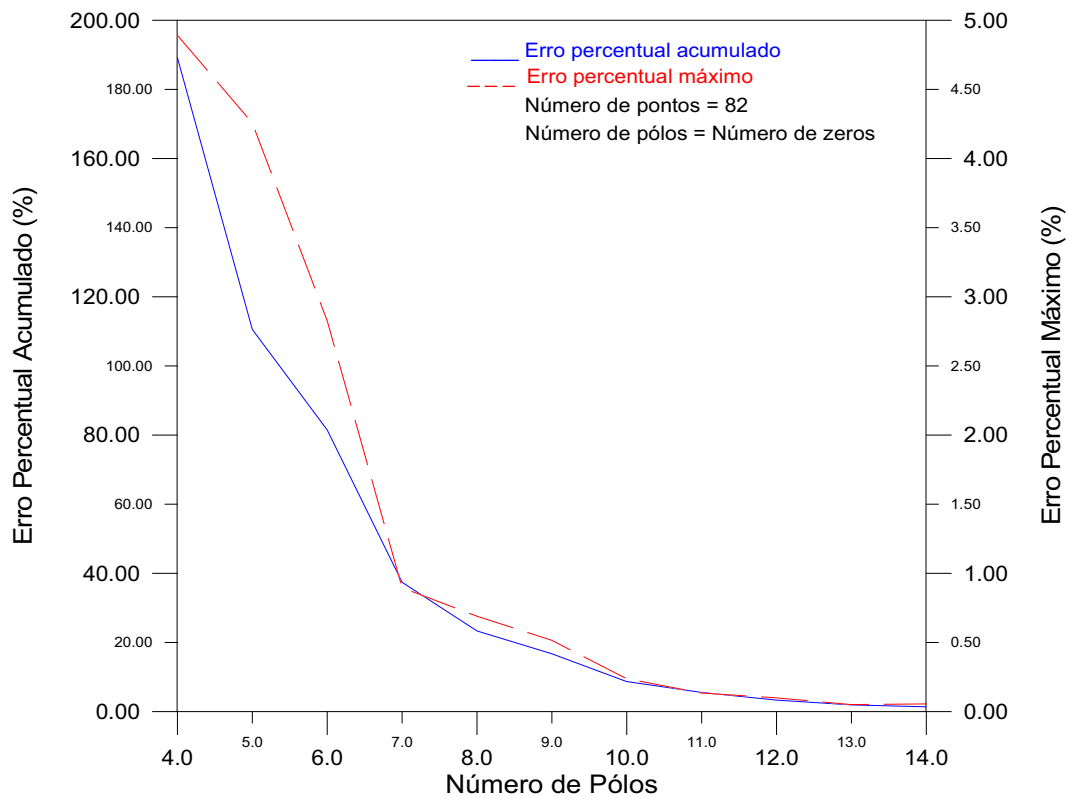


Figura 6.15- Erro percentual versus número de pólos para o modo zero de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

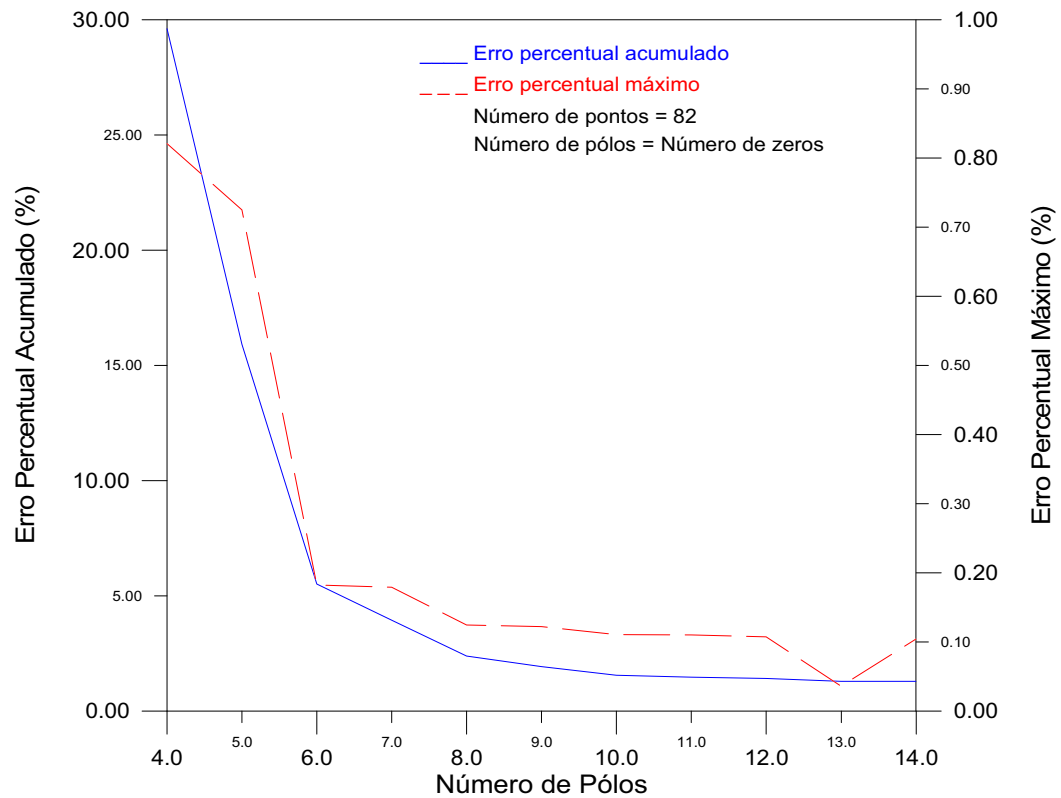


Figura 6.16- Erro percentual versus número de pólos para o modo positivo de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

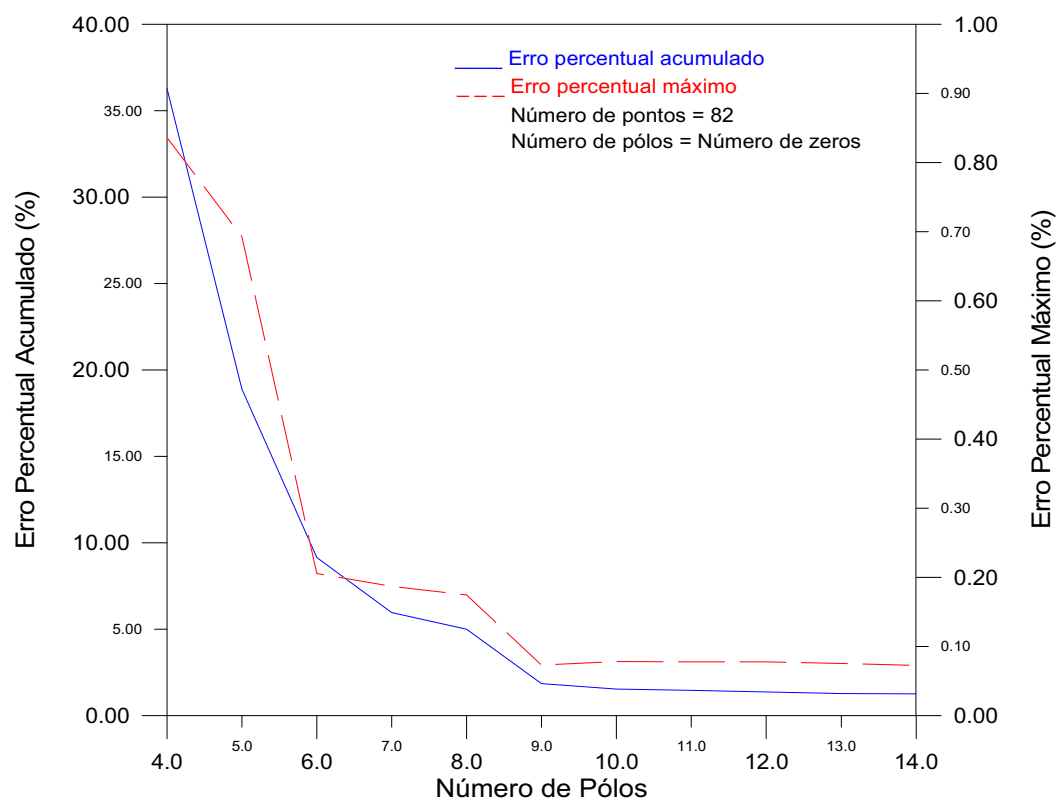


Figura 6.17- Erro percentual versus número de pólos para o modo negativo de $Y_c(\omega)$ no método não-linear.

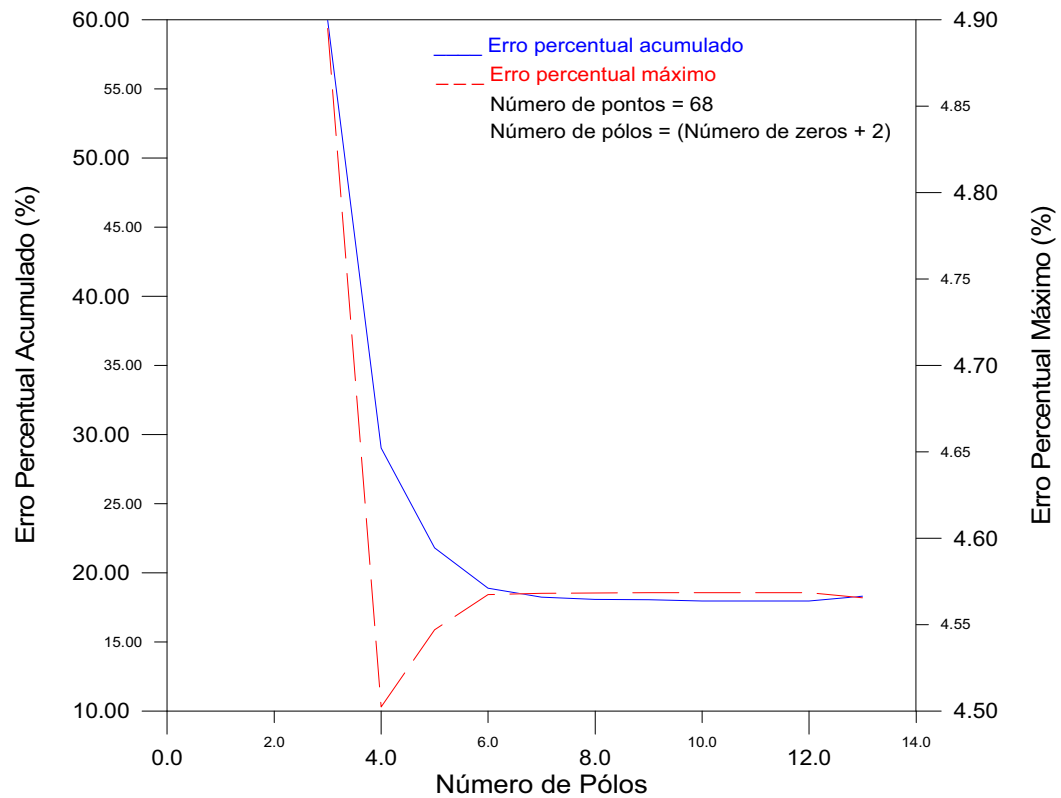


Figura 6.18- Erro percentual versus número de pólos para o modo zero de $A(a)$ no método não-linear.

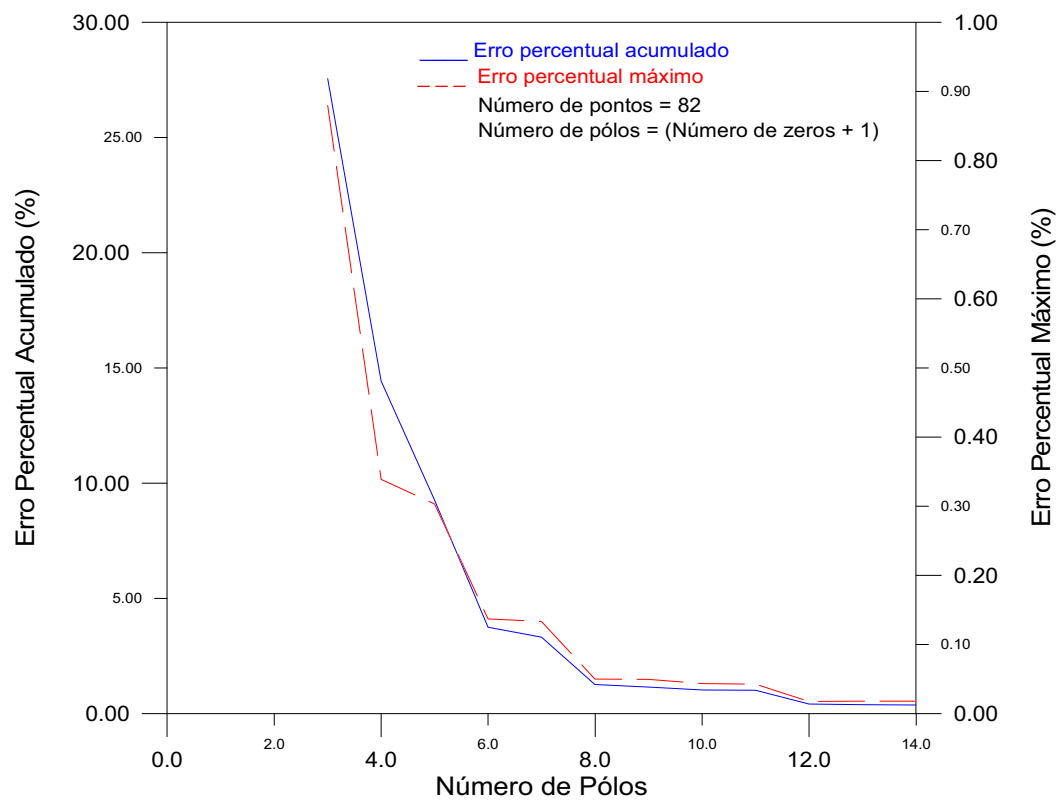


Figura 6.19 - Erro percentual versus número de pólos para o modo positivo de $A(a)$ no método não-linear.

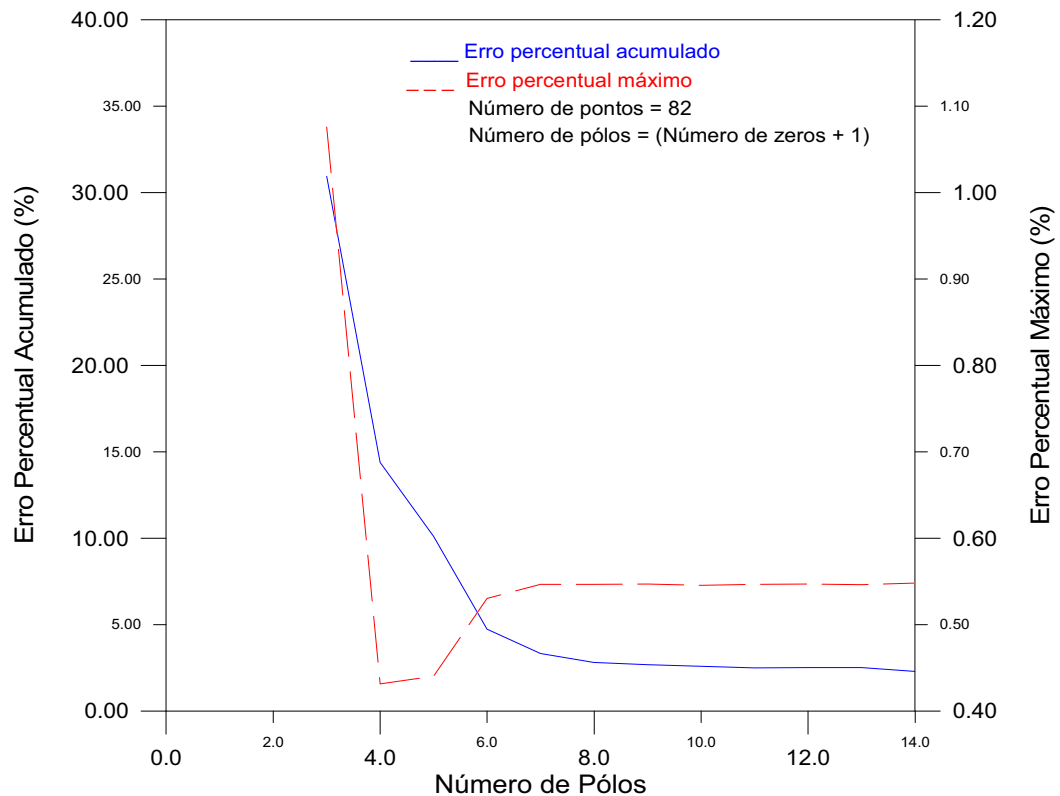


Figura 6.20 - Erro percentual versus número de pólos para o modo negativo de $A(\omega)$ no método não-linear.

Observando as Figuras 6.15 a 6.17, verificamos que o erro percentual acumulado e o erro percentual máximo tendem para valores constantes de pequena magnitude, para $Y_c(\omega)$, à medida que cresce as ordens dos polinômios racionais aproximados.

Para os modos zero, positivo e negativo de $A(\omega)$, o erro percentual acumulado e o erro percentual máximo se comportam de forma análoga (Figuras 6.18, 6.19 e 6.20).

O objetivo é obter um modelo otimizado de forma a representar a linha de transmissão com uma ordem mínima para o polinômio racional aproximado de forma que a precisão seja tal que forneça resultados de simulações no domínio de tempo, confiáveis.

Uma decisão de compromisso, entre a precisão e a ordem das aproximações, deve ser tomada, de forma a se obter tal modelo otimizado tendo em vista a confiabilidade dos resultados e o esforço computacional.

A título de comparação, realizamos o ajuste pelo método assintótico através do FDDATA™. Analizando as Figuras 6.15 a 6.20, decidimos por aceitar alguns valores como ótimos, dentro do contexto da discussão. Os valores tidos como ótimos para a ordem das aproximações dos modos de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, são listados na Tabela 6.6.

		Método de ajuste assintótico			Método de ajuste não-linear		
		Número de zeros	Número de pólos	Erro Máximo	Número de zeros	Número de pólos	Erro Máximo
$Y_c(\omega)$	modo zero	19	19	10,96 %	10	10	0,23 %
	modo positivo	13	13	10,17 %	08	08	0,18 %
	modo negativo	14	14	10,67 %	09	09	0,07 %
$A(\omega)$	modo zero	24	26	5,67 %	04	06	4,57 %
	modo positivo	20	21	8,95 %	05	06	0,14 %
	modo negativo	24	25	3,57 %	05	06	0,53 %

Tabela 6.6 - Valores otimizados para a ordem dos polinômios aproximados para a admitância característica e o fator de propagação da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14.

As aproximações obtidas com o método assintótico no FDDATA™ e com o método de ajuste não-linear, são apresentadas a seguir.

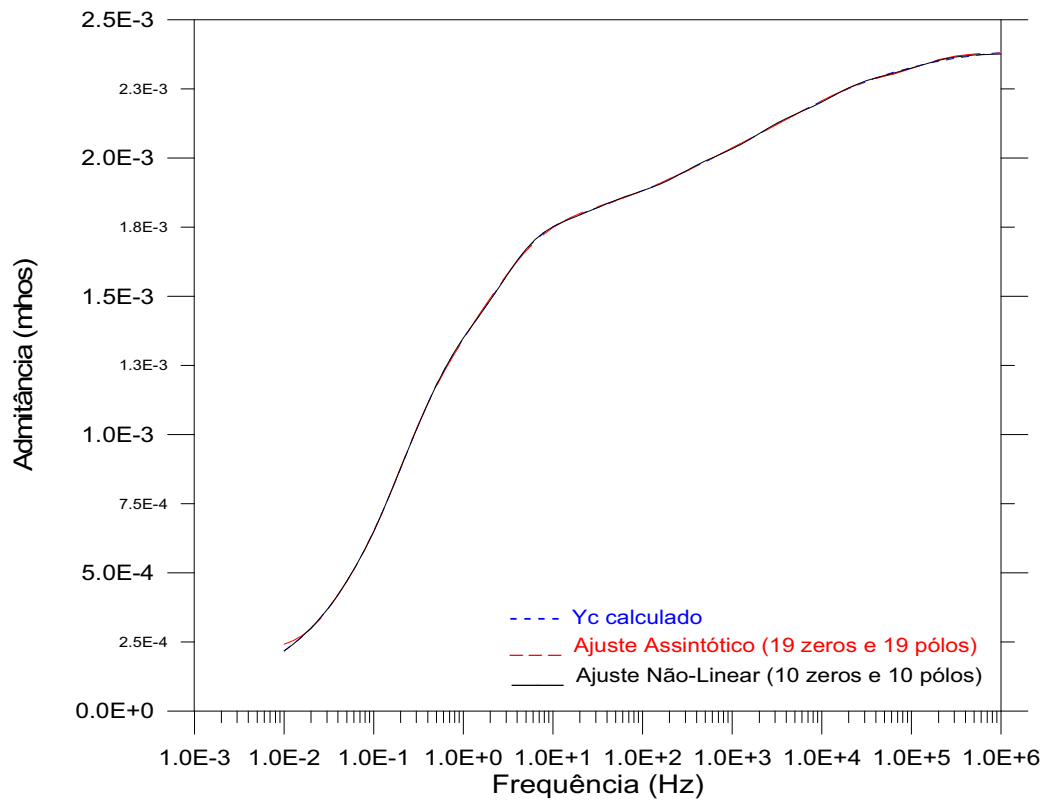


Figura 6.21 - Modo zero de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

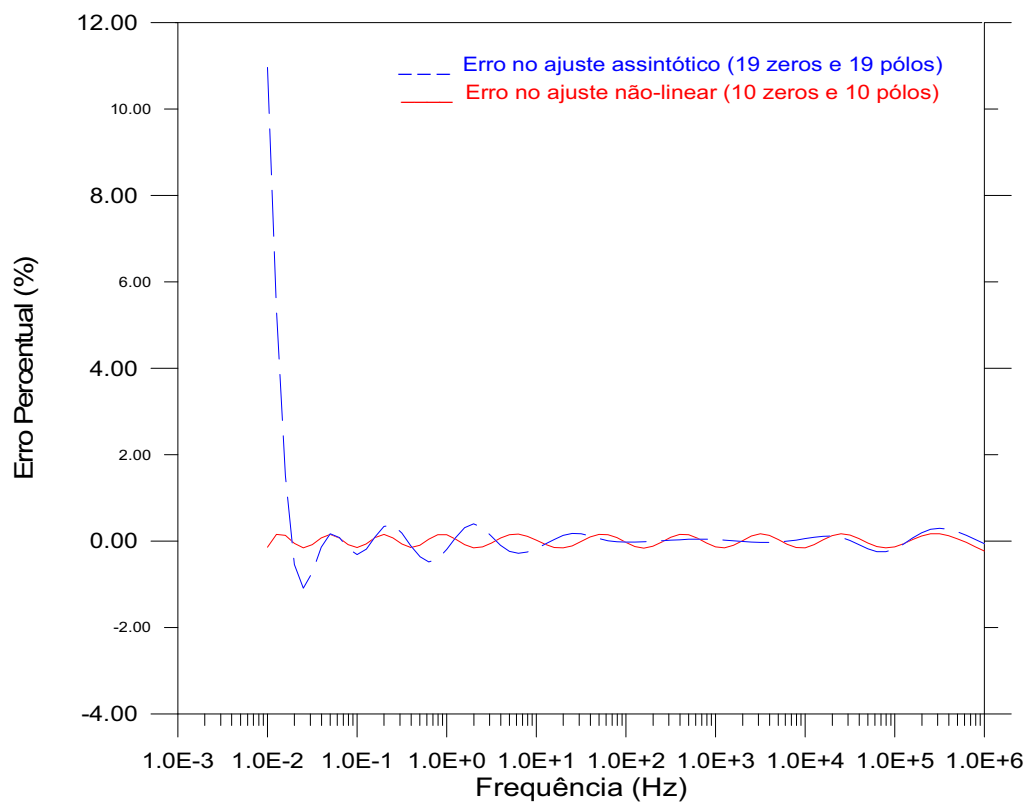


Figura 6.22 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo zero de $Y_c(\omega)$.

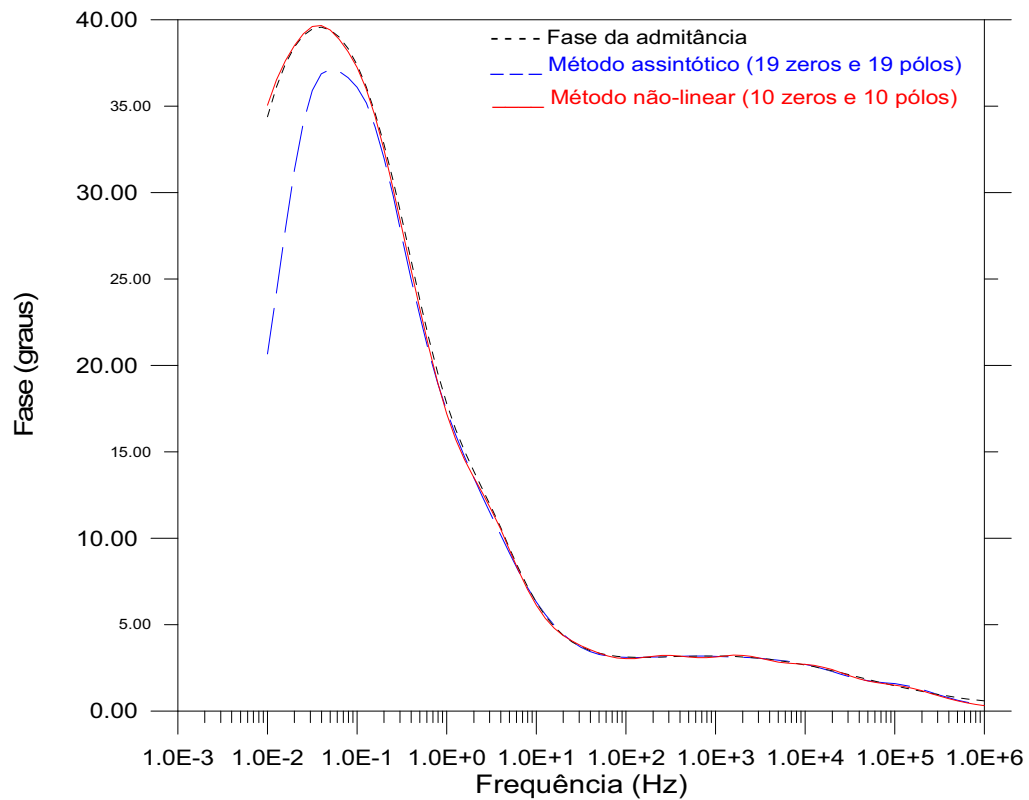


Figura 6.23 - Fase para o modo zero de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

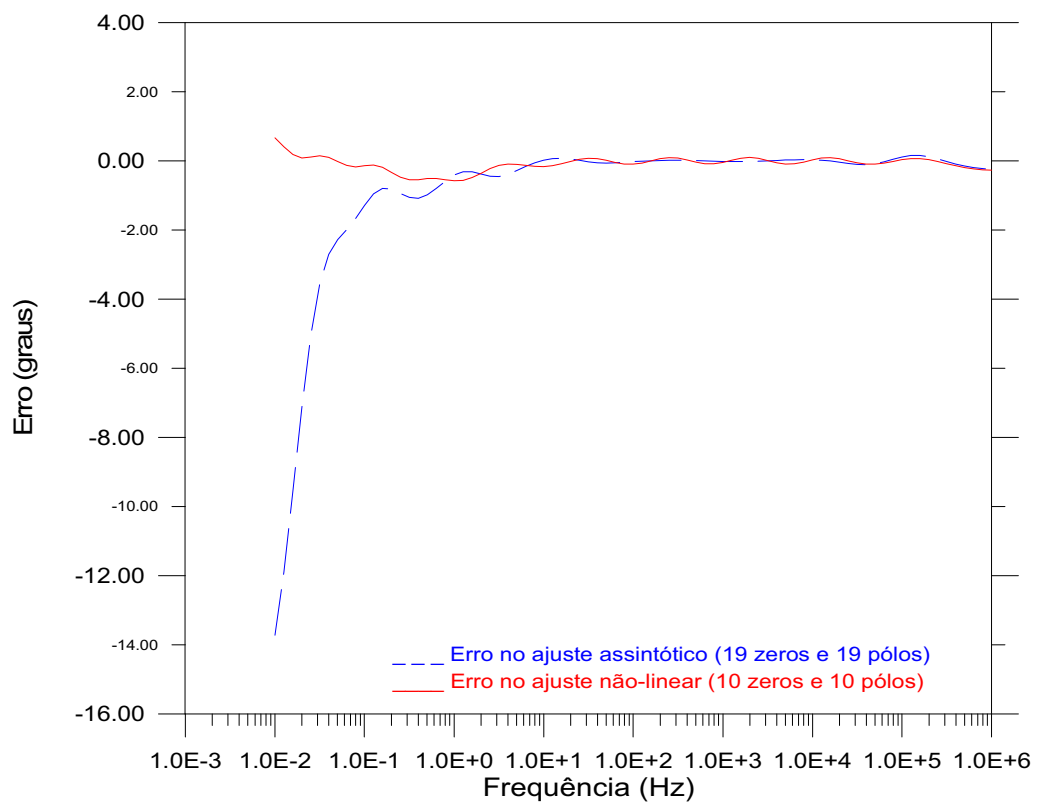


Figura 6.24 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo zero de $Y_c(\omega)$.

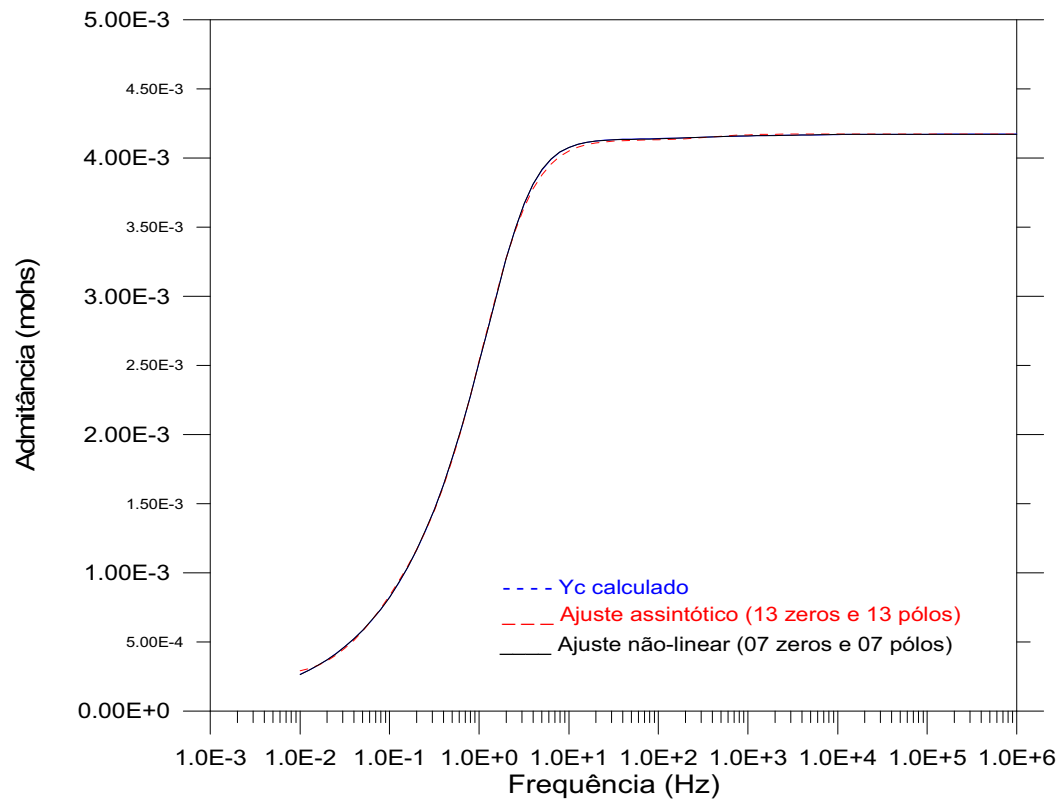


Figura 6.25 - Modo positivo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

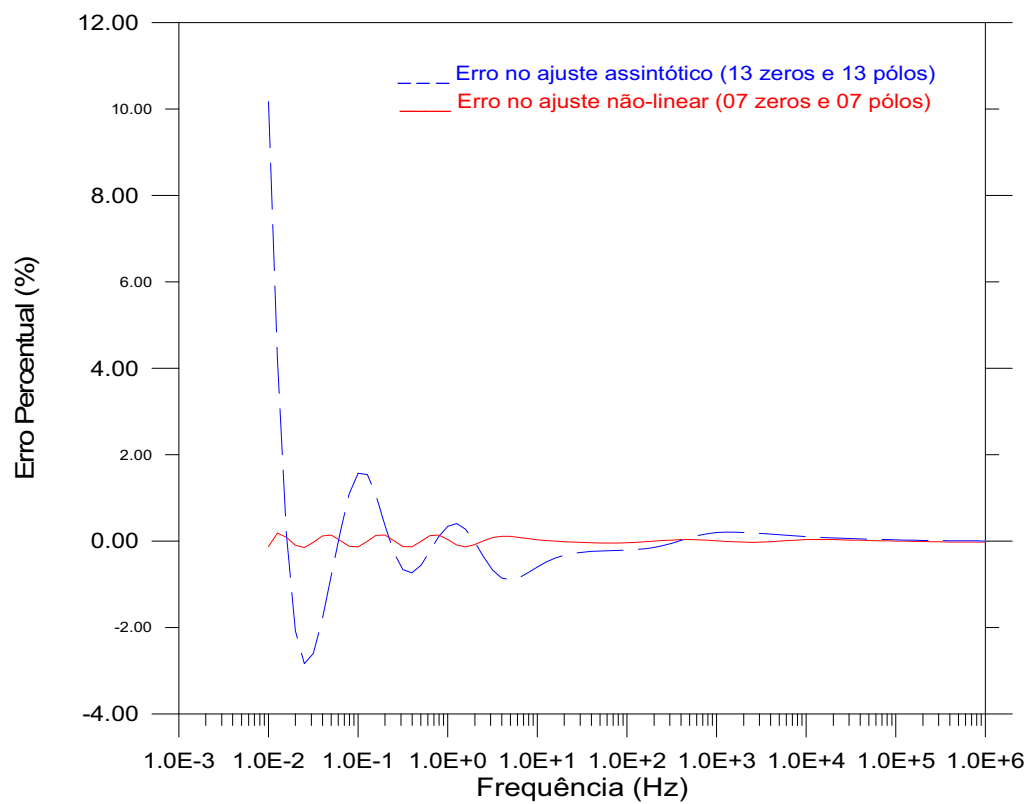


Figura 6.26 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo positivo de $Y_c(\omega)$.

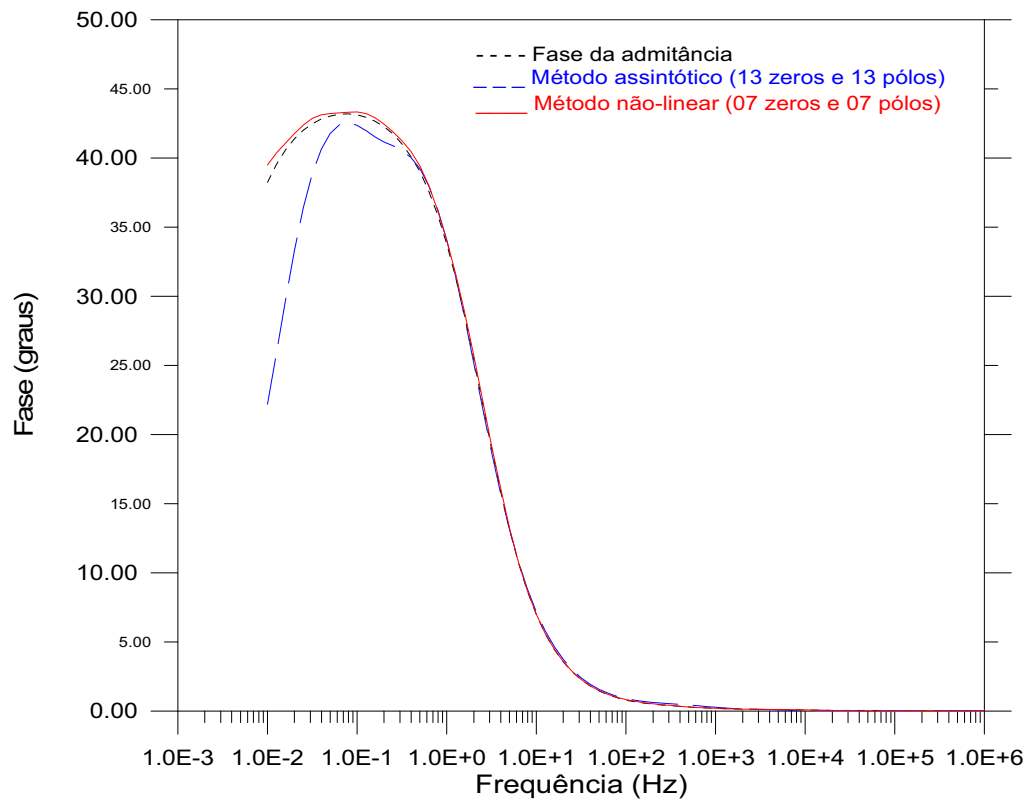


Figura 6.27 - Fase para o modo positivo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

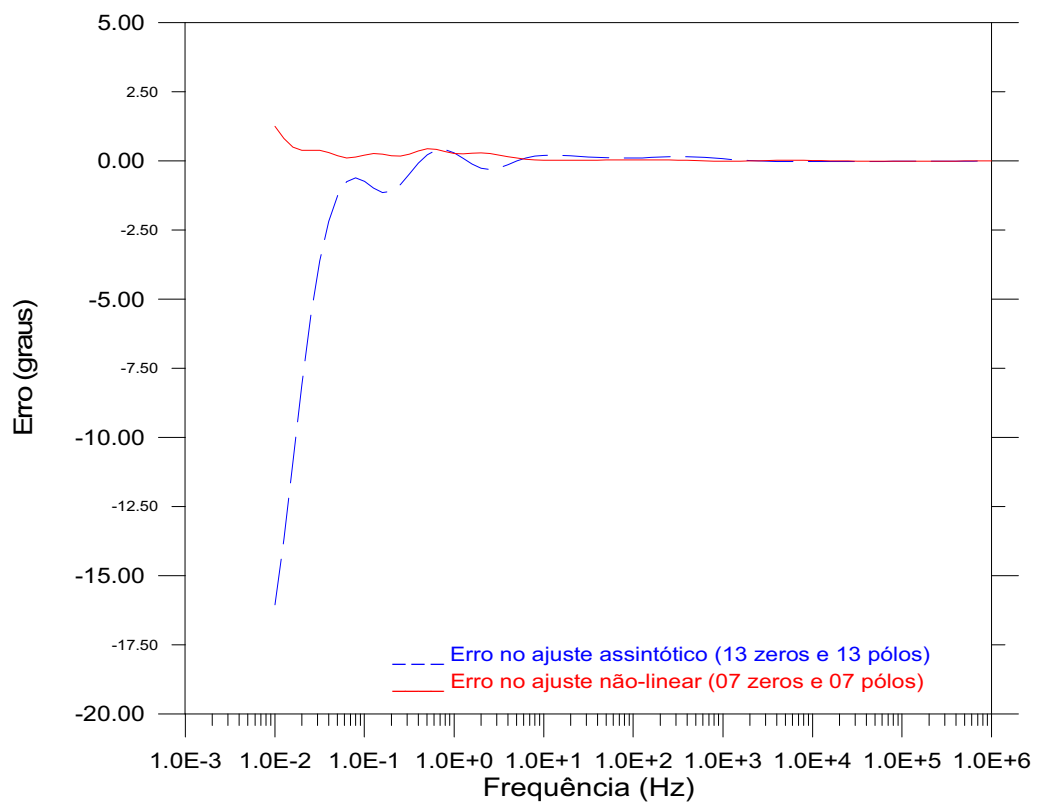


Figura 6.28 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo positivo de $Y_c(\omega)$.

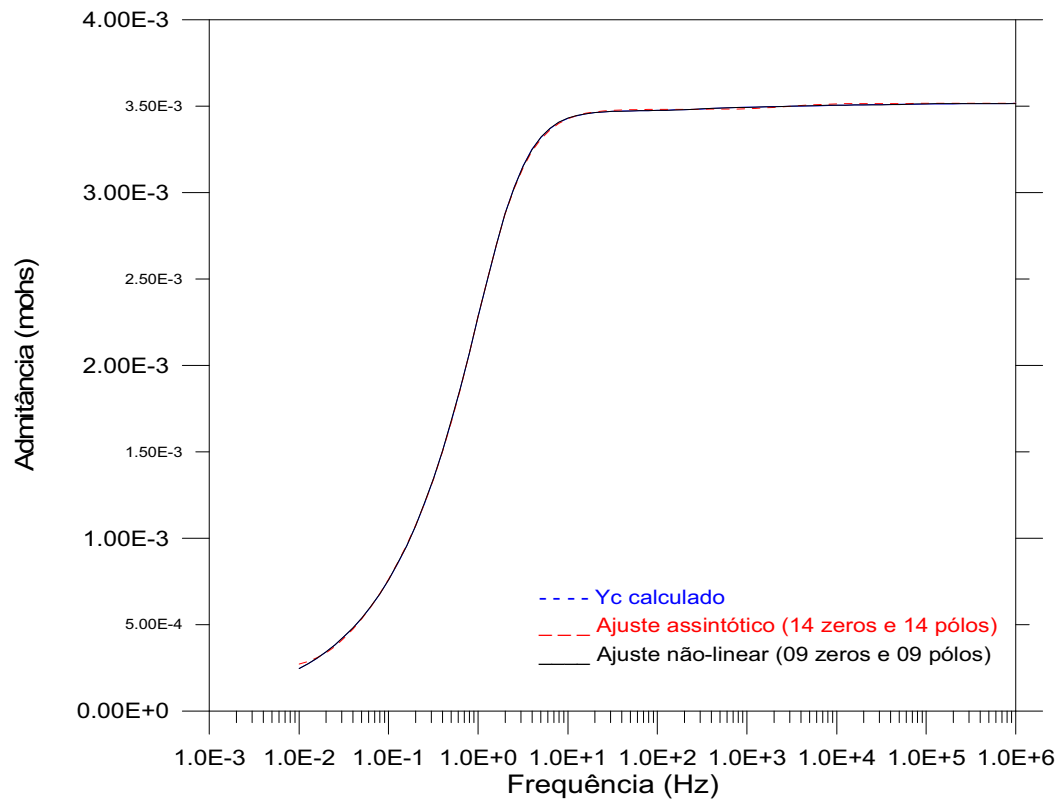


Figura 6.29 - Modo negativo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

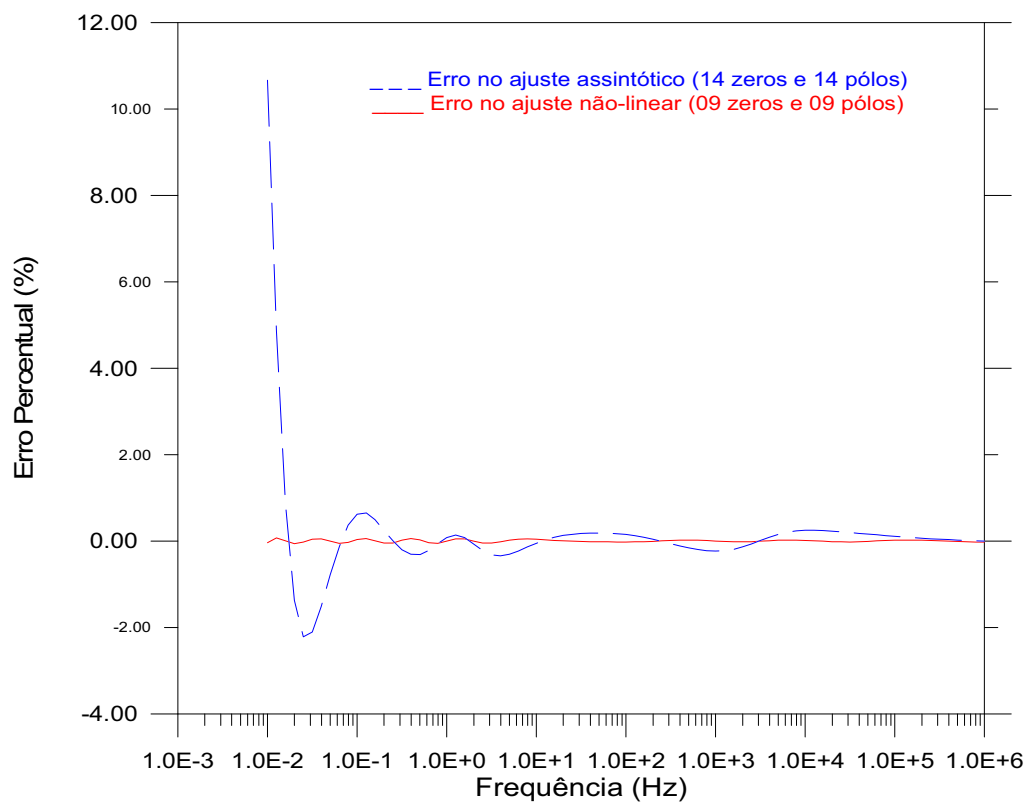


Figura 6.30 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo negativo de $Y_c(\omega)$.

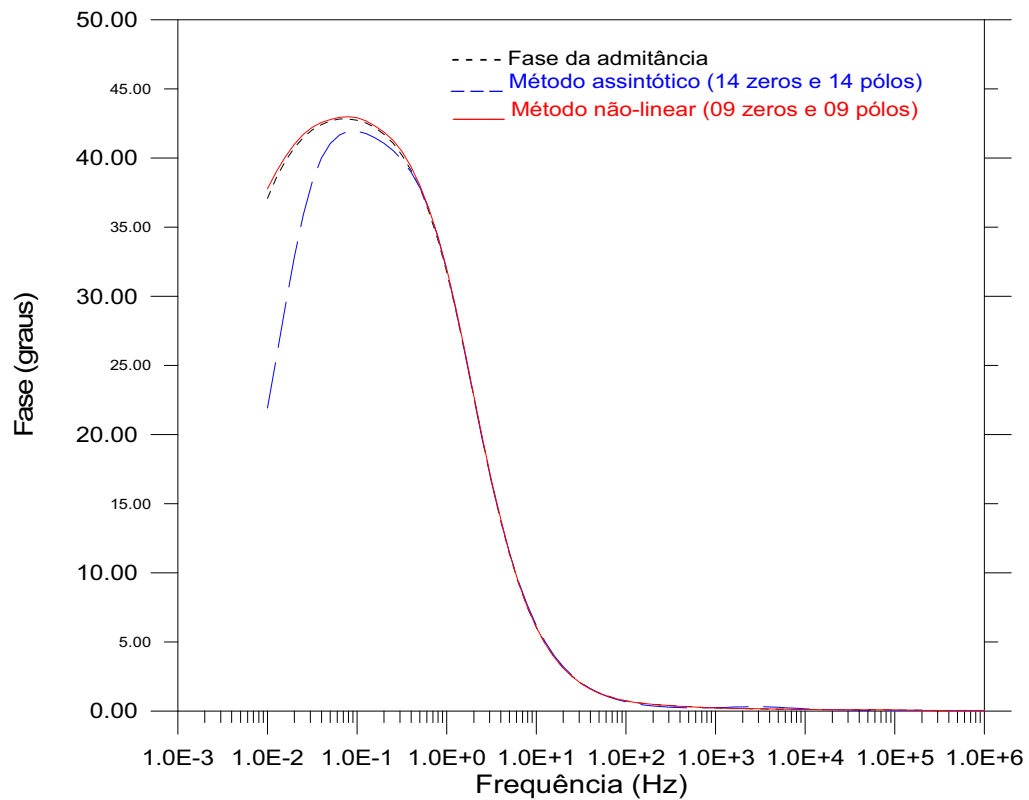


Figura 6.31 - Fase para o modo negativo de $Y_c(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

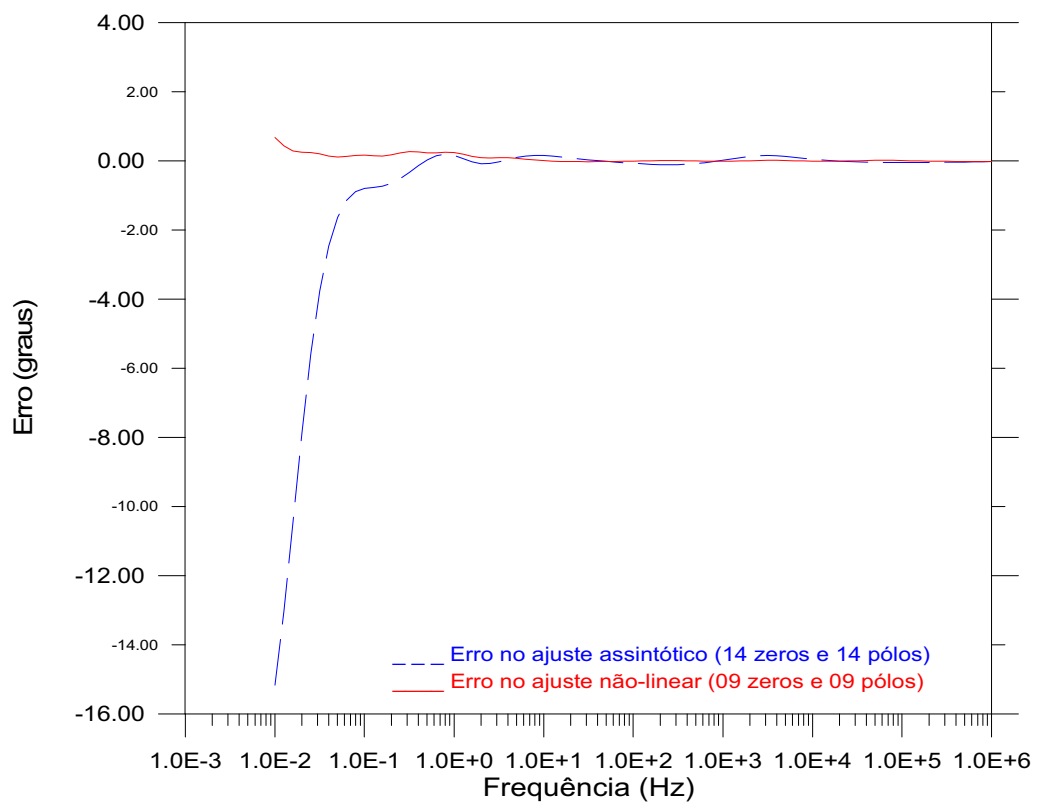
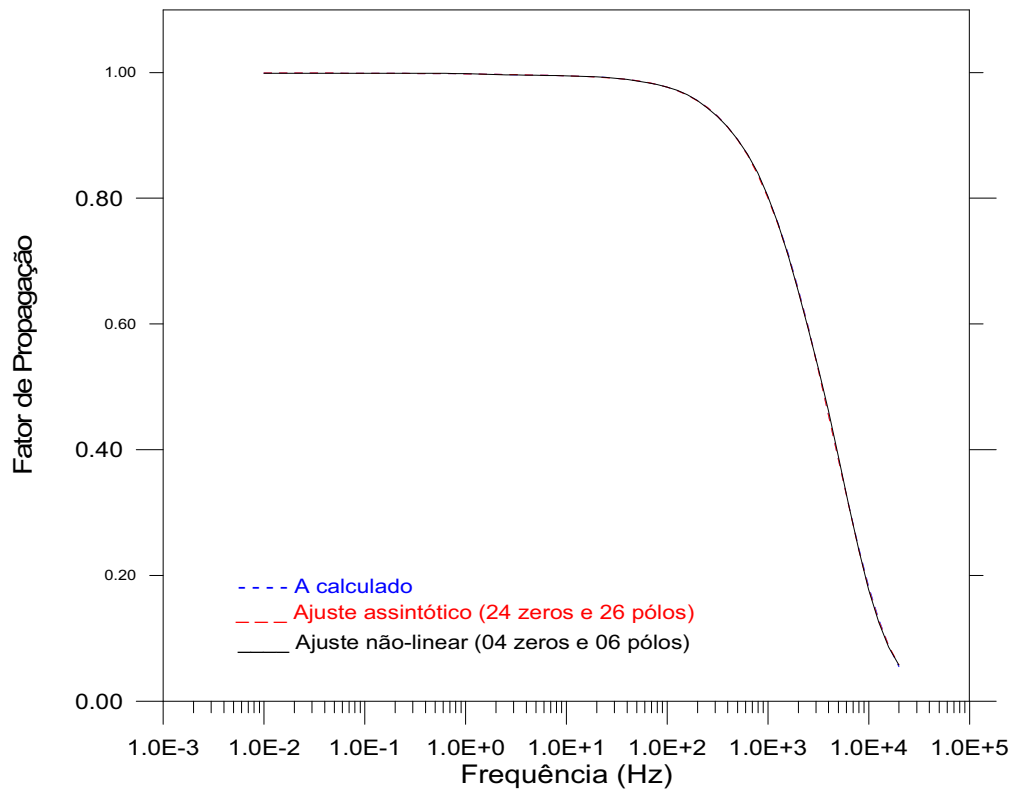
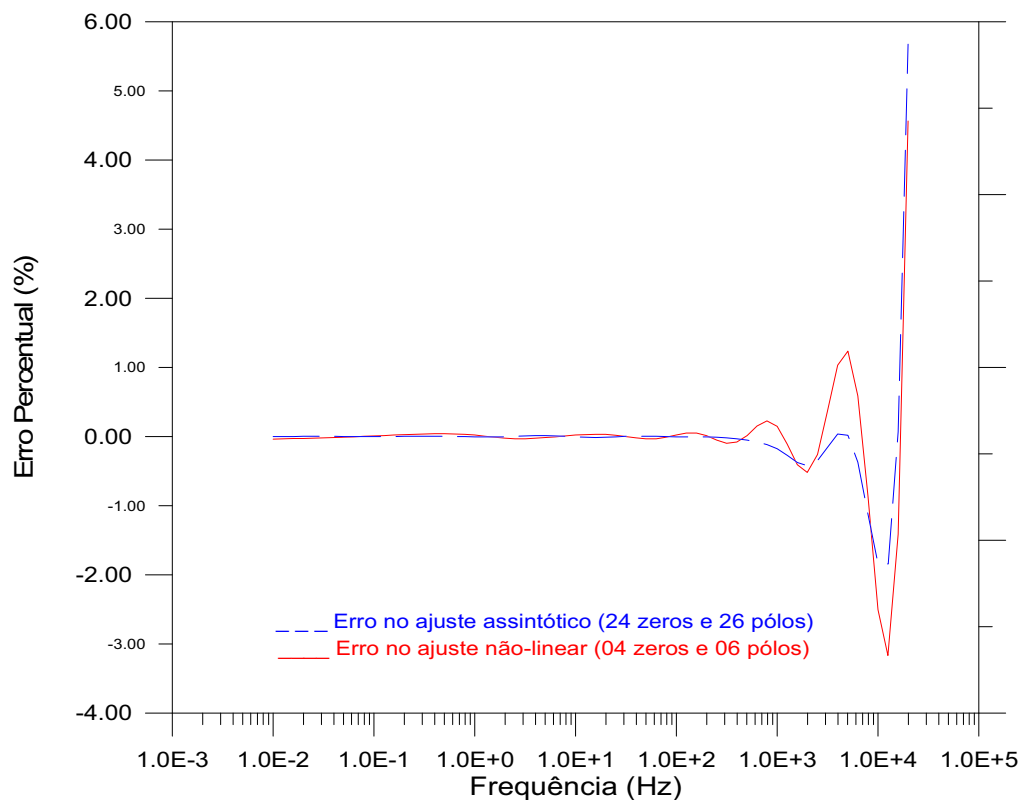


Figura 6.32 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo negativo de $Y_c(\omega)$.

Figura 6.33 - Modo zero de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.Figura 6.34 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo zero de $A(\omega)$.

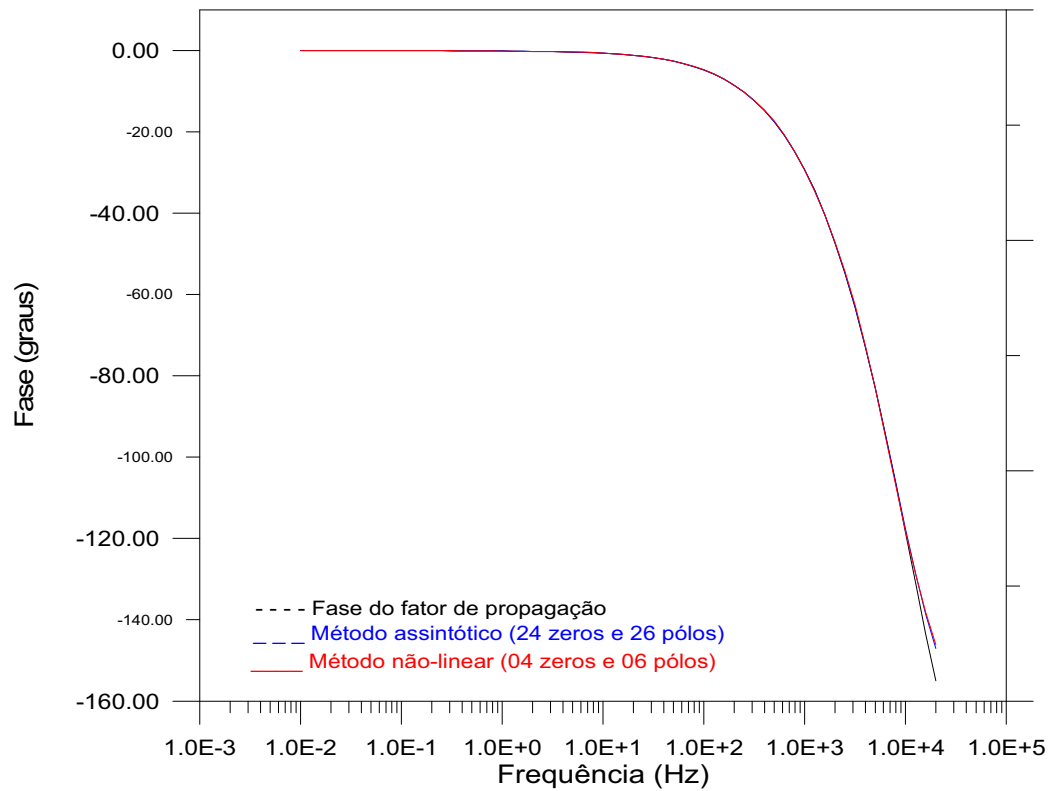


Figura 6.35 - Fase para o modo zero de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

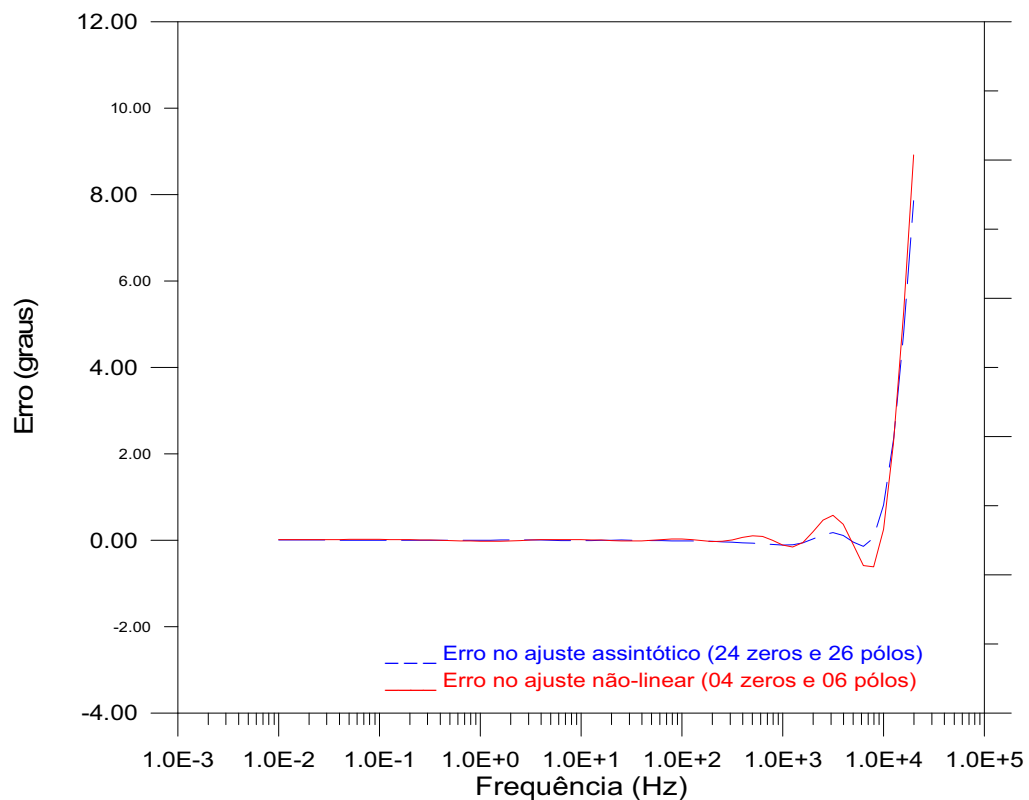


Figura 6.36 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo zero de $A(\omega)$.

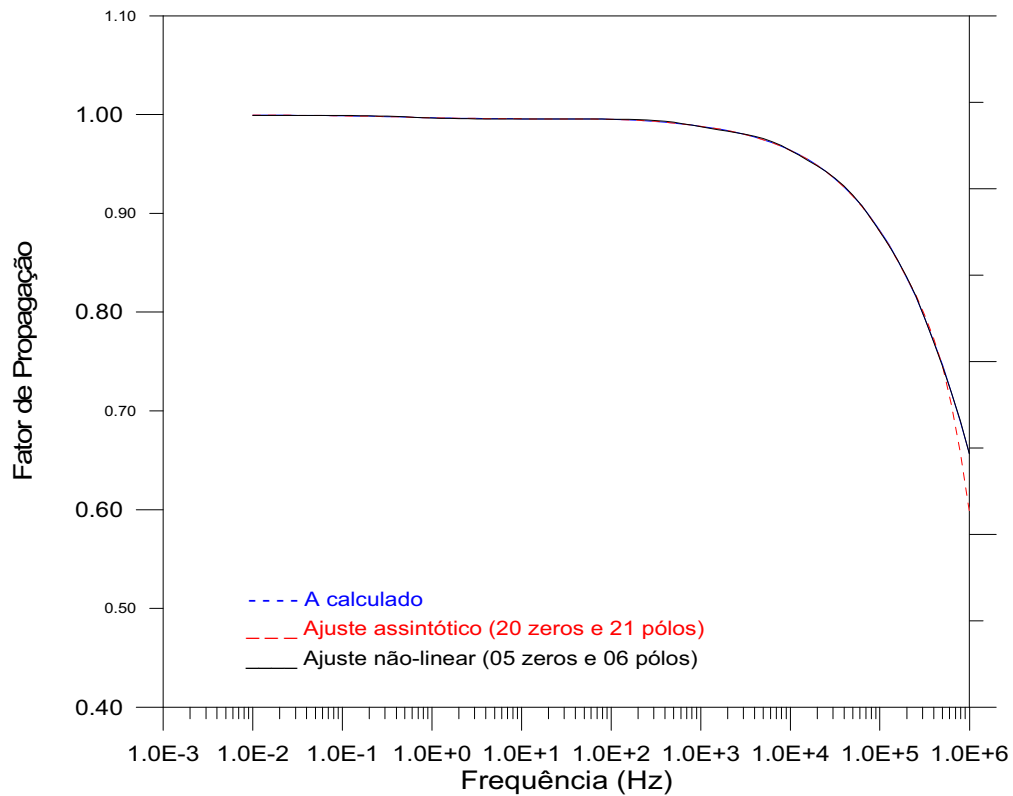


Figura 6.37 - Modo positivo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

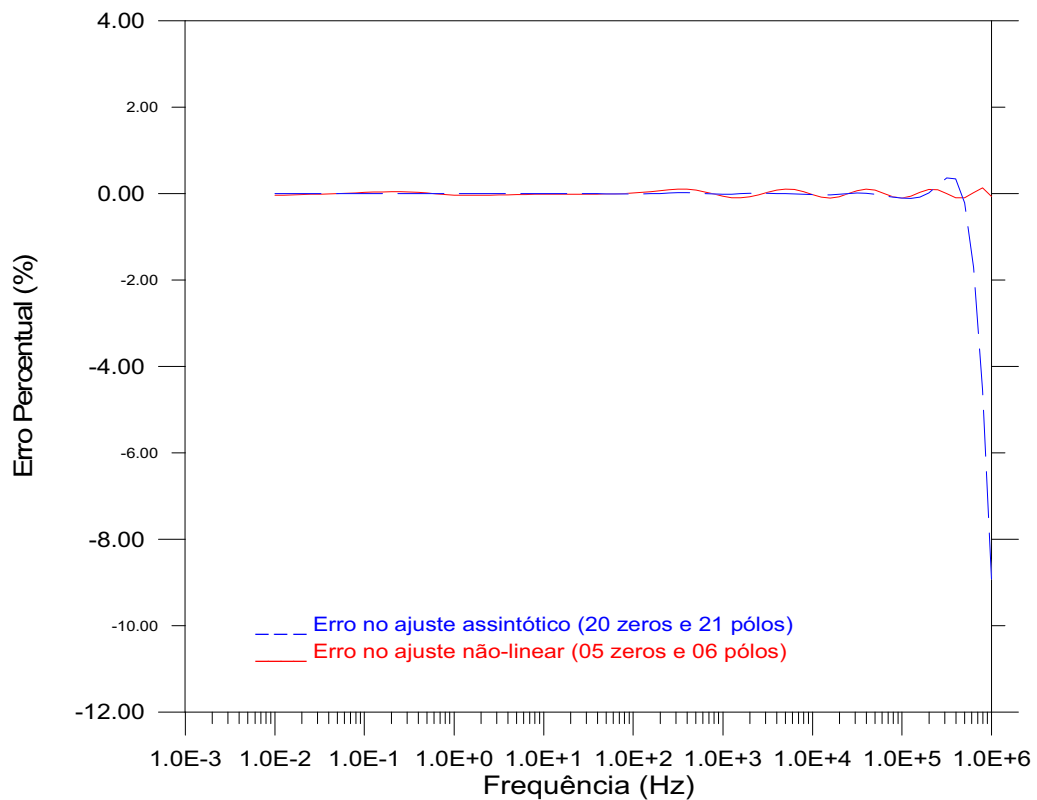


Figura 6.38 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo positivo de $A(\omega)$.

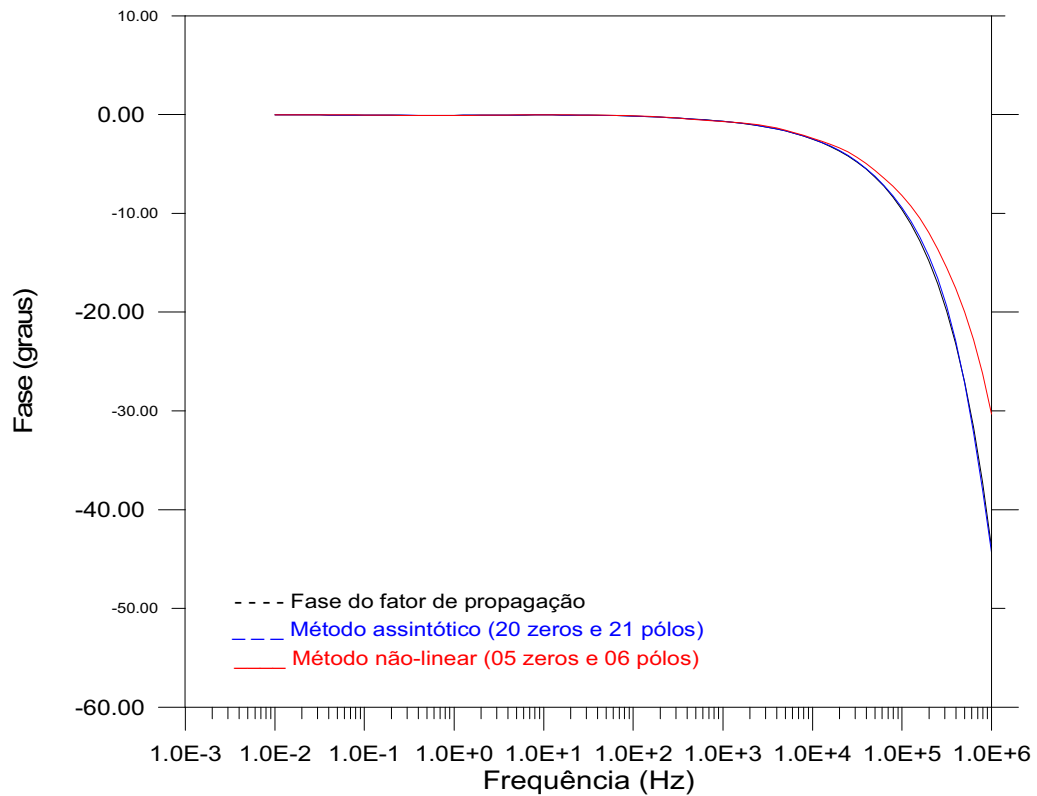


Figura 6.39 - Fase para o modo positivo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

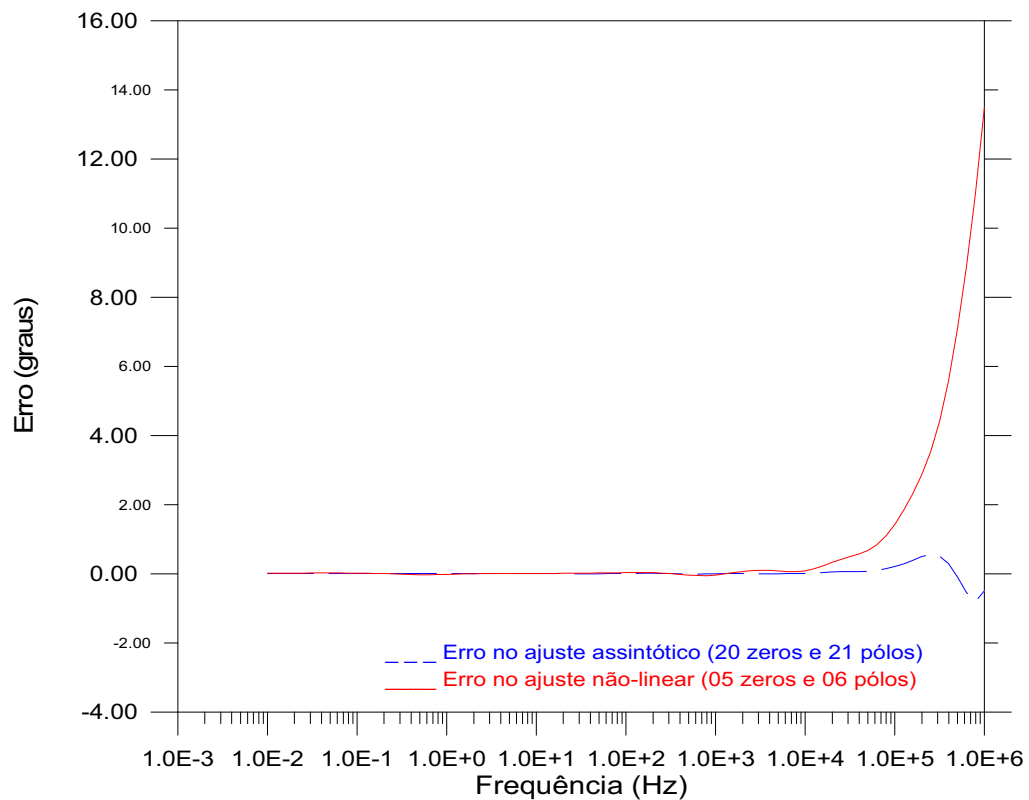


Figura 6.40 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo positivo de $A(\omega)$.

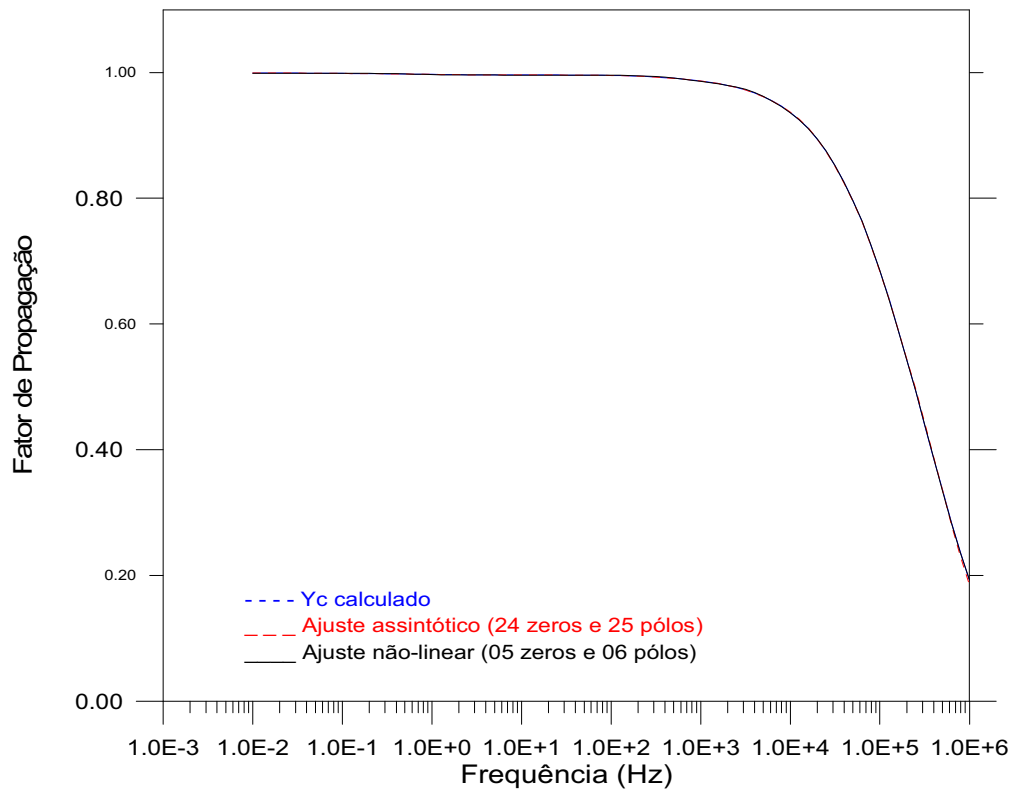


Figura 6.41 - Modo negativo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

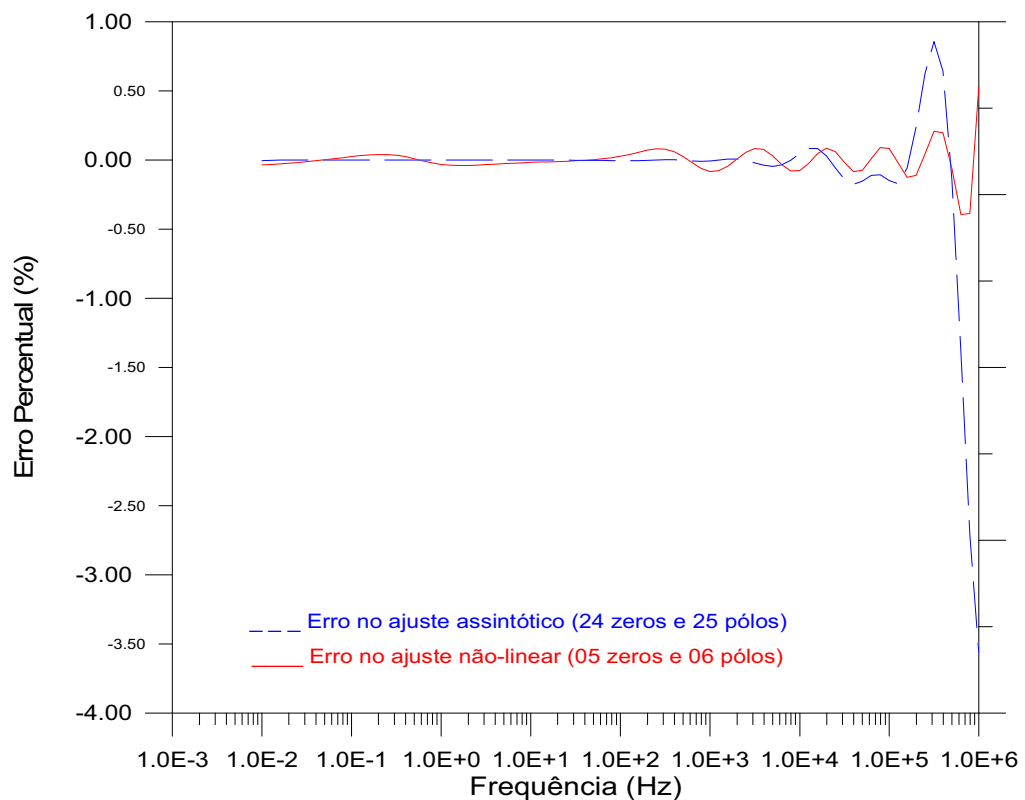


Figura 6.42 - Erro percentual nos ajustes assintótico e não-linear, para o modo negativo de $A(\omega)$.

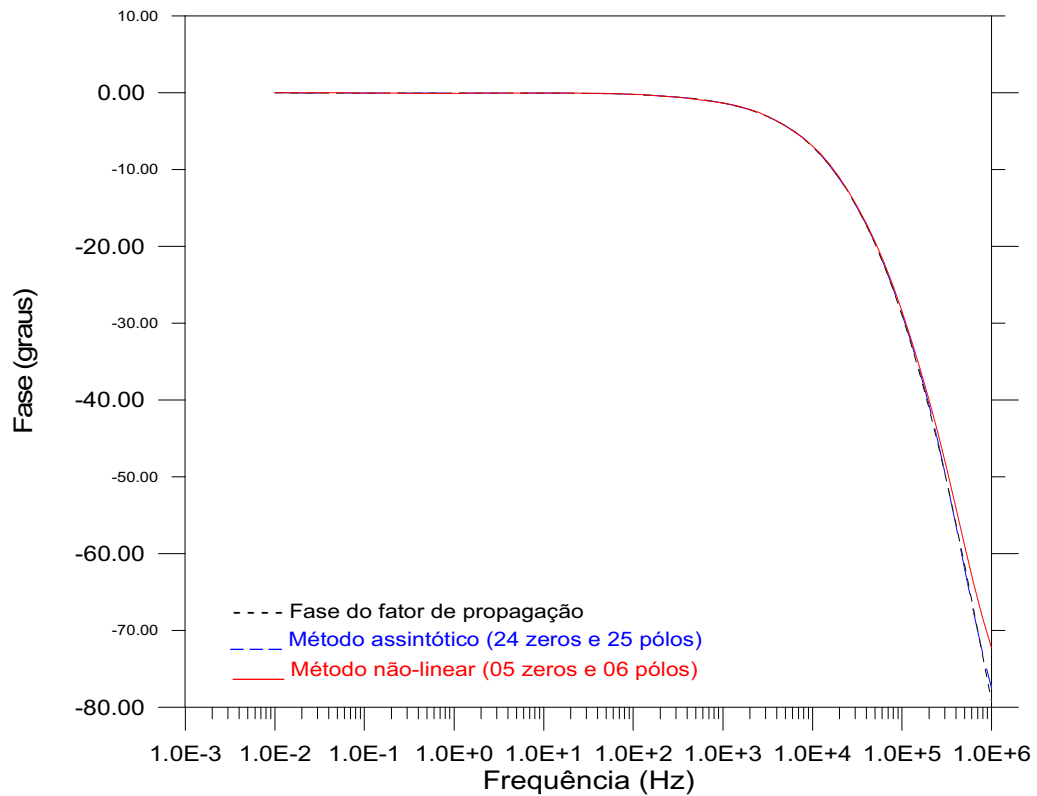


Figura 6.43 - Fase para o modo negativo de $A(\omega)$ e ajustes assintótico e não-linear.

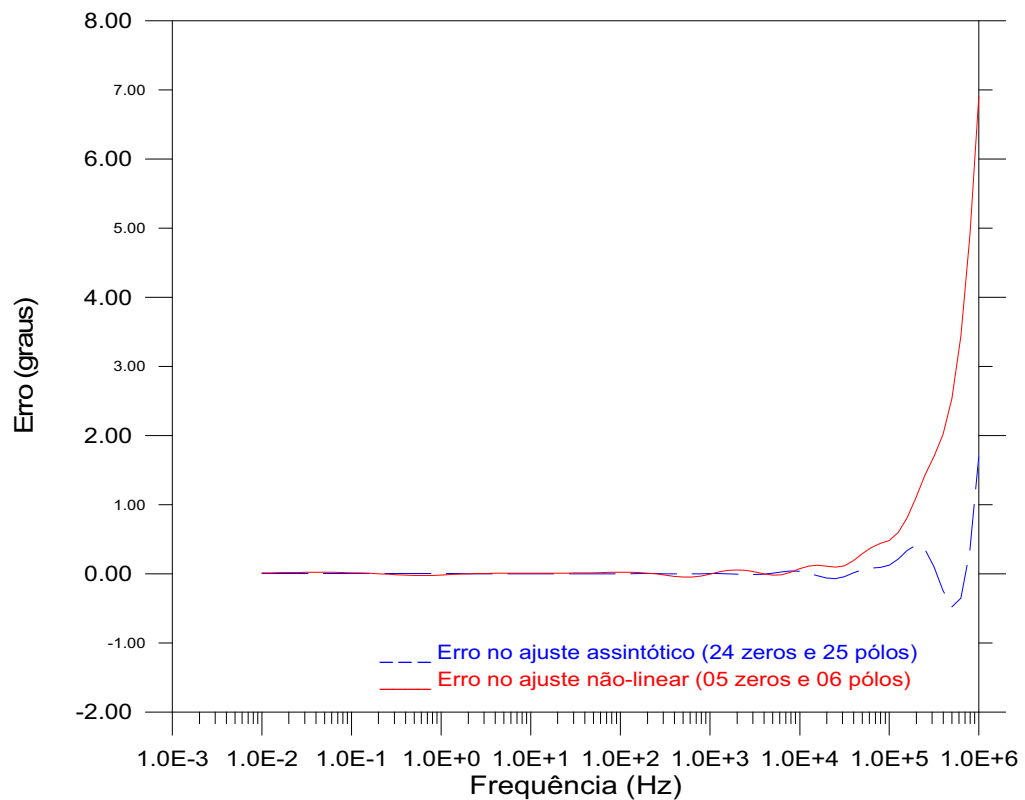


Figura 6.44 - Erro nos ajustes assintótico e não-linear, para a fase do modo negativo de $A(\omega)$.

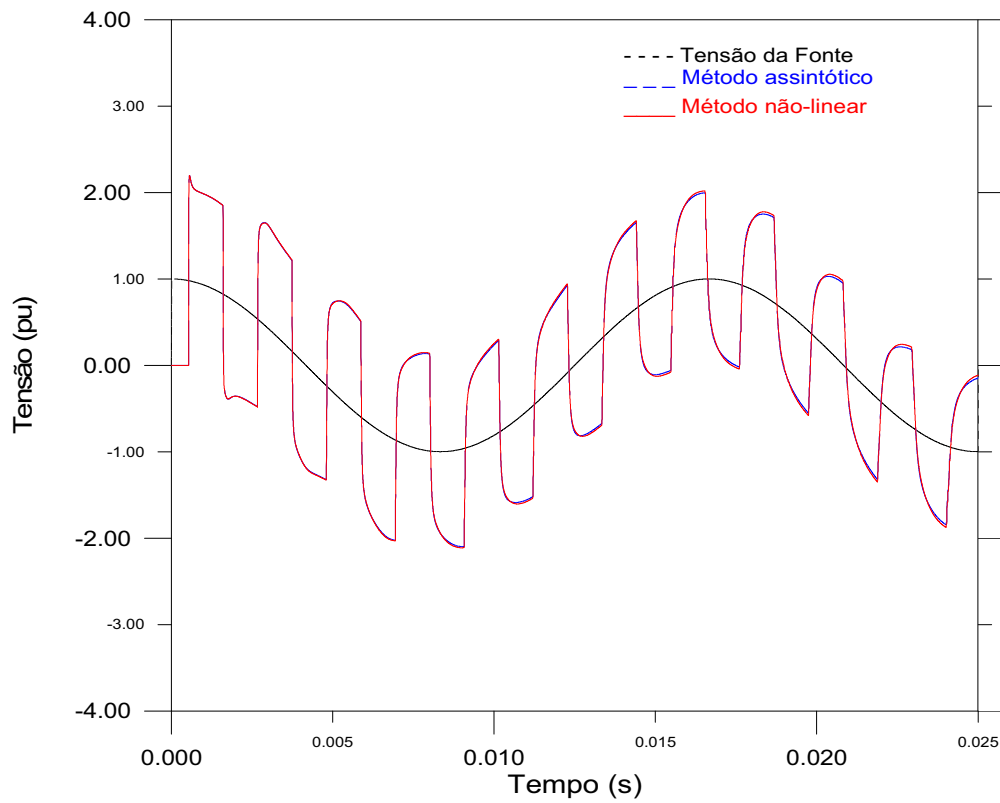
Das Figuras 6.21 a 6.44, podemos observar que com o método de ajuste não-linear obtém-se um ajuste bem mais preciso que o obtido com o método assintótico, (FDDATATM) com um número de zeros e pólos significativamente menor. Com isso, espera-se obter uma redução no esforço computacional em simulações no domínio do tempo.

6.2.1 Simulação Digital.

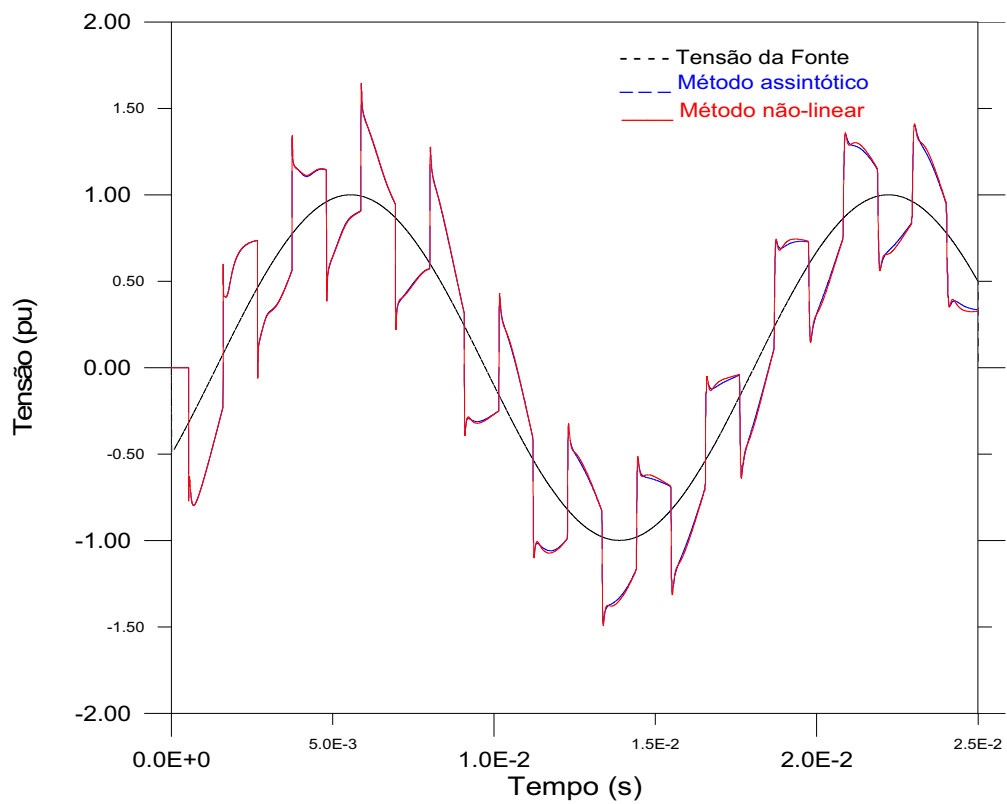
Para a linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, simulamos três condições transitórias distintas:

- 1) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por uma fonte de tensão senoidal trifásica;
- 2) A energização da linha, com o terminal receptor em aberto, por um degrau de tensão nas três fases;
- 3) A ocorrência de um defeito fase-terra no terminal receptor em uma das fases com as outras duas fases em aberto. A condição de defeito se dá na energização da linha por uma fonte senoidal, sendo simulada por uma resistência de $0,001 \, \Omega$ da fase para a terra.

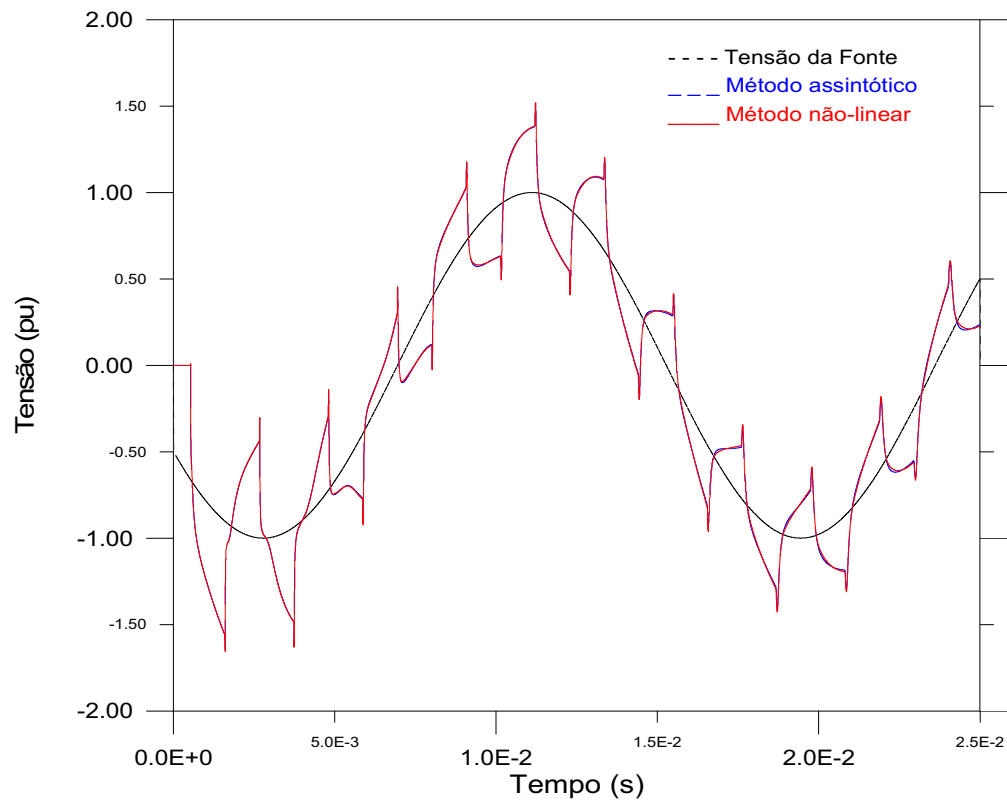
Na simulação utilizou-se o programa MICROTRAN[®]. Os dados para a modelagem da linha a parâmetros dependentes da frequência, foram fornecidos pelo programa FDDATATM e pelo método de ajuste não-linear (Capítulo 5). Os resultados das simulações realizadas para os casos em consideração são apresentados a seguir. Nas referidas simulações, utilizou-se um passo de tempo, $\Delta t = 1\mu s$, e as matrizes de transformação modais calculadas na frequência de $1,2 \, kHz$.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase a.

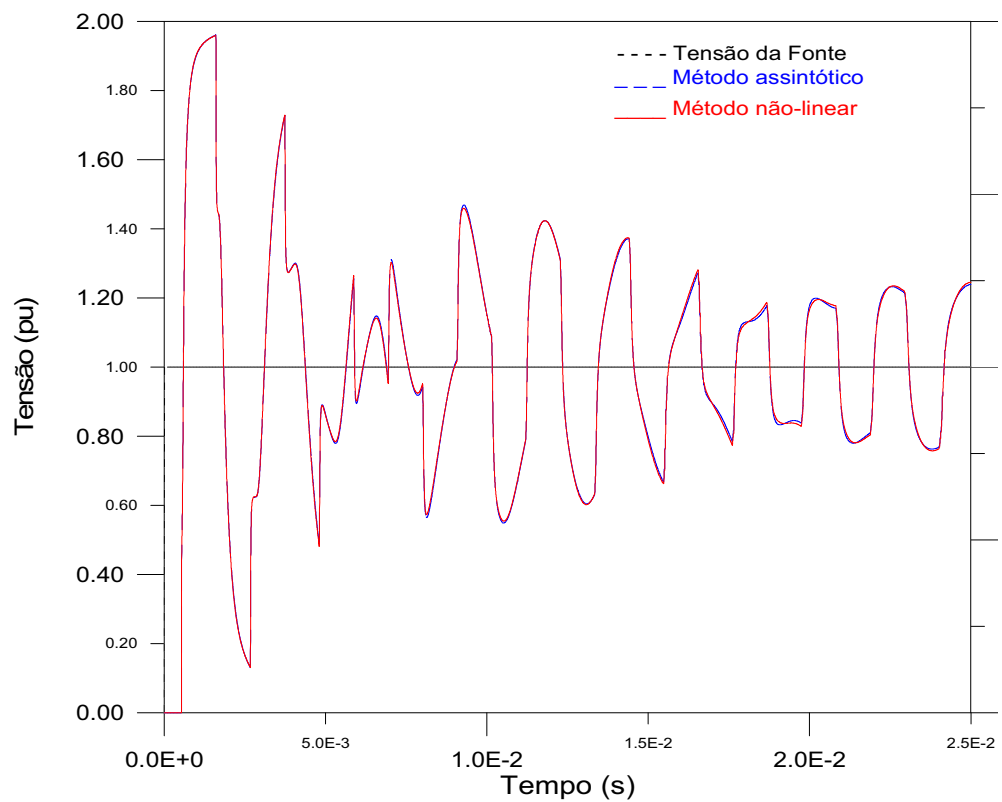


(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.

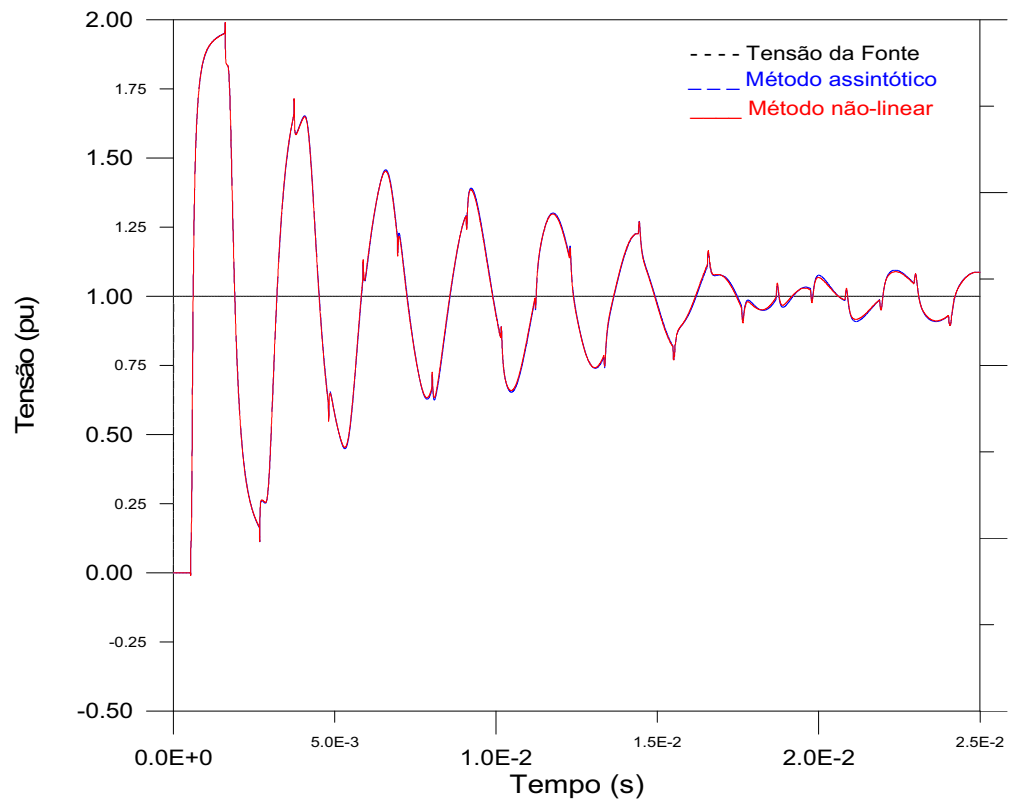


(c) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

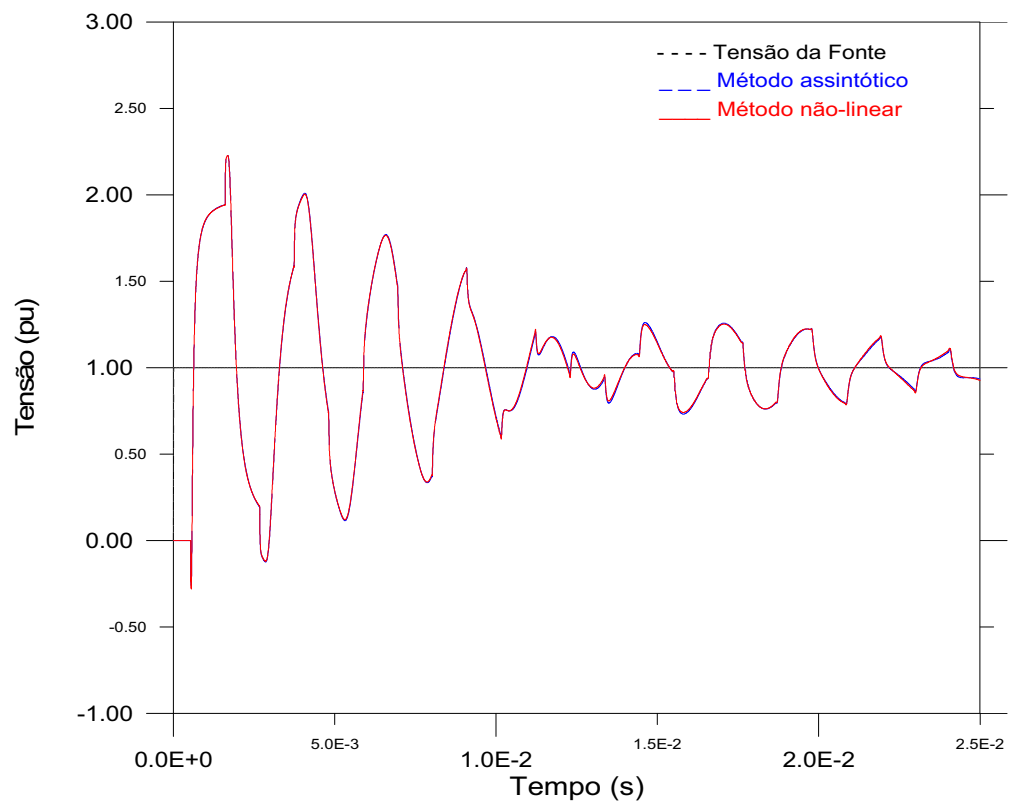
Figura 6.45 - Energização da linha da Figura 6.14, em aberto, por uma fonte senoidal trifásica.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase a.

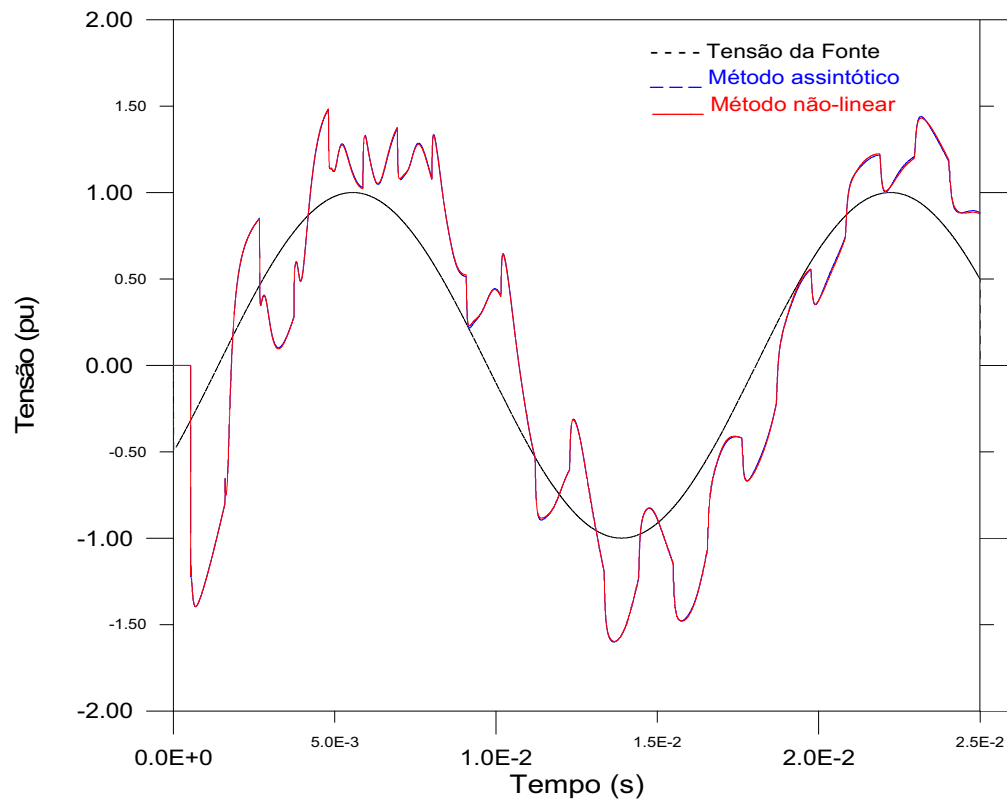


(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.

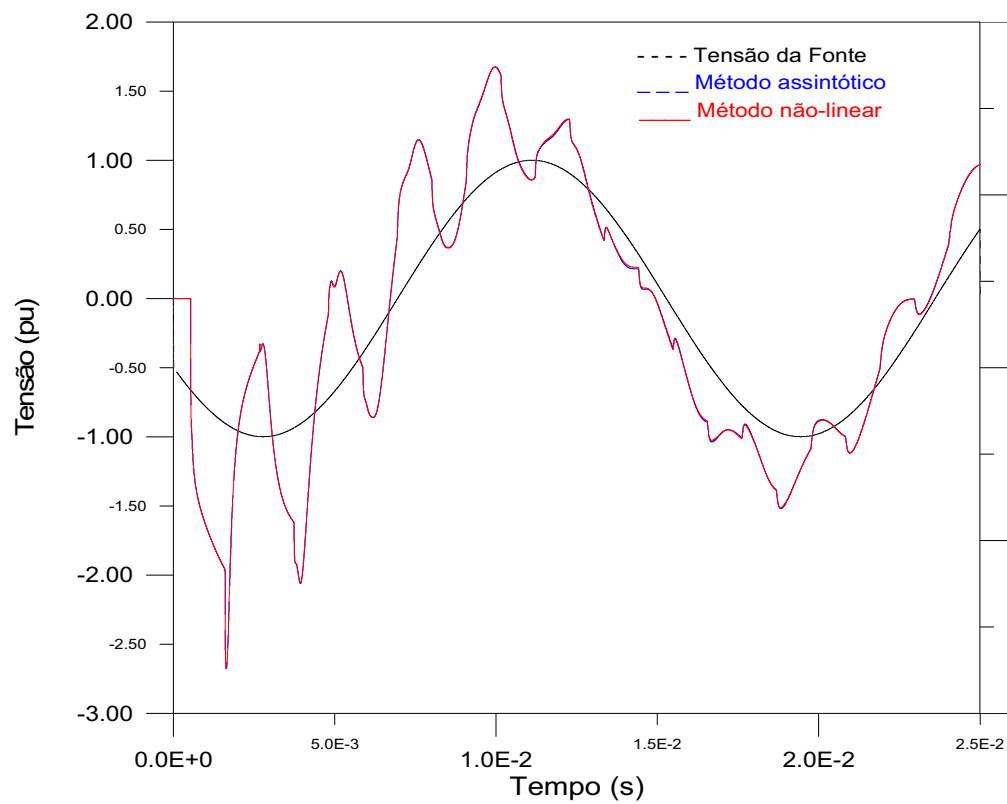


(c) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

Figura 6.46 - Energização da linha da Figura 6.14, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases.



(a) Condição transitória no terminal receptor, Fase b.



(b) Condição transitória no terminal receptor, Fase c.

Figura 6.47 - Defeito fase-terra na fase “a” da linha da Figura 6.14, com as demais fases em aberto.

O próximo aspecto a ser investigado diz respeito ao esforço computacional decorrente da utilização dos modelos obtidos com os métodos de ajuste em estudo. As Tabelas 6.7 e 6.8 apresentam o esforço computacional, traduzido na forma de tempo de processamento, resultante das simulações no tempo para cada modelo a parâmetros dependentes da frequência, confrontando-os com o tempo de processamento obtido com um modelo a parâmetros constantes com a frequência.

	Tempo de simulação / Número de passos de tempo		
	Modelo a Parâmetros Constantes	Modelo Obtido com o Método assintótico	Modelo Obtido com o Método não-linear
Energização: Fonte senoidal	30,0 / 25000 = 1,20 ms	55,0 / 25000 = 2,19 ms	44,0 / 25000 = 1,74 ms
Energização: Degrau de tensão	29,0 / 25000 = 1,16 ms	53,0 / 25000 = 2,13 ms	46,0 / 25000 = 1,83 ms
Defeito fase-terra	33,0 / 25000 = 1,32 ms	56,0 / 25000 = 2,25 ms	46,0 / 25000 = 1,83 ms

Tabela 6.7 - Esforço computacional - Tempo de simulação por passo de tempo.

	Tempo Total de Processamento		
	Modelo a Parâmetros Constantes	Modelo Obtido com o Método assintótico	Modelo Obtido com o Método não-linear
Energização: Fonte senoidal	30,0 s	55,0 s	44,0 s
Energização: Degrau de tensão	29,0 s	53,0 s	46,0 s
Defeito fase-terra	33,0 s	56,0 s	46,0 s

Tabela 6.8- Esforço computacional - Tempo total de processamento.

Do apresentado na Tabela 6.8, podemos observar que:

1) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.14, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal trifásica, com relação ao modelo a parâmetros constantes, o acréscimo no tempo total de processamento foi de 83,33% para o modelo obtido com o método assintótico e 46,67% para o modelo obtido com o método de ajuste não linear.

2) Para a energização da linha de transmissão da Figura 6.14, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases, com relação ao modelo a parâmetros constantes,

o acréscimo no tempo total de processamento foi de 82,75% para o modelo obtido com o método assintótico e 58,62% para o modelo obtido com o método de ajuste não linear.

3) Para a simulação de um defeito na fase a do terminal receptor da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, com as demais fases em aberto, com relação ao modelo a parâmetros constantes, o acréscimo no tempo total de processamento foi de 69,69% para o modelo obtido com o método assintótico e 39,39% para o modelo obtido com o método de ajuste não linear.

Comparando o esforço computacional decorrente da utilização dos modelos obtidos com o método de ajuste assintótico e o método de ajuste não-linear, observamos que:

1) Para a energização da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, em aberto, por uma fonte de tensão senoidal trifásica, obtivemos uma redução no esforço computacional de 20,5% em cada passo de tempo Δt (Tabela 6.7). No tempo total de processamento a redução foi de 20,0% (Tabela 6.8);

2) Para a energização da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, em aberto, por um degrau de tensão nas três fases, obtivemos uma redução no esforço computacional de 14,1% em cada passo de tempo Δt (Tabela 6.7). No tempo total de processamento a redução foi de 13,2% (Tabela 6.8);

3) Para a simulação de um defeito na fase a do terminal receptor da linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, com as demais fases em aberto, obtivemos uma redução no esforço computacional de 18,7% em cada passo de tempo Δt (Tabela 6.7). No tempo total de processamento a redução foi de 17,9% (Tabela 6.8).

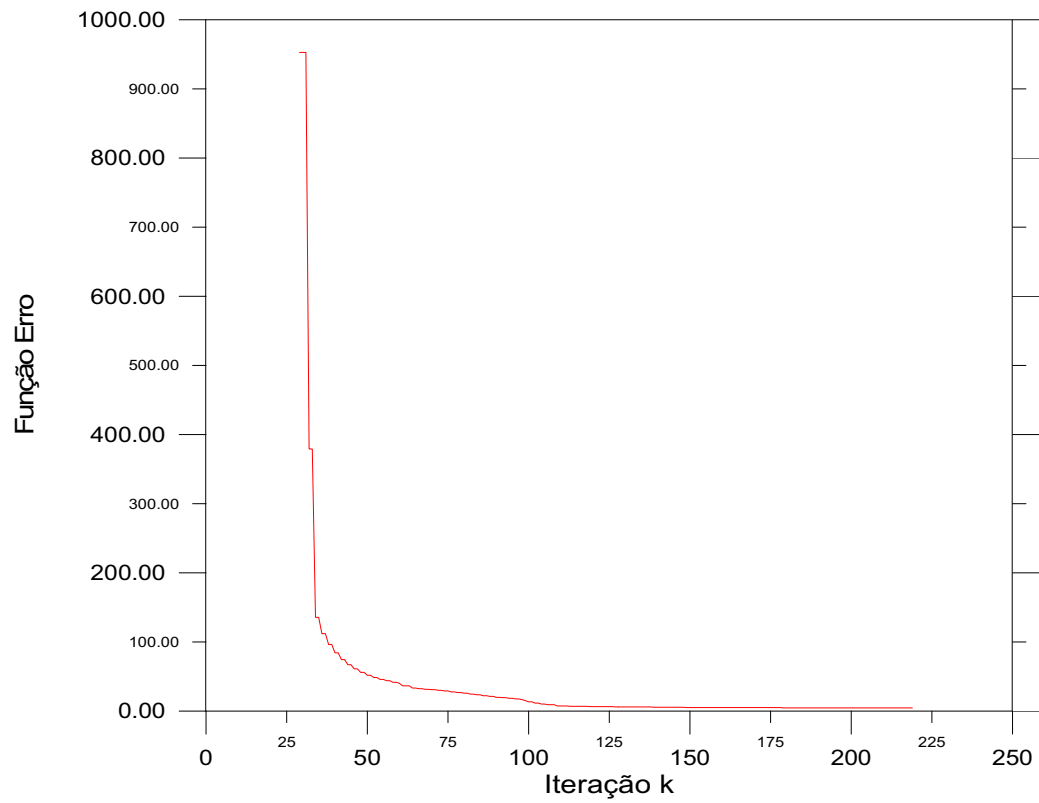
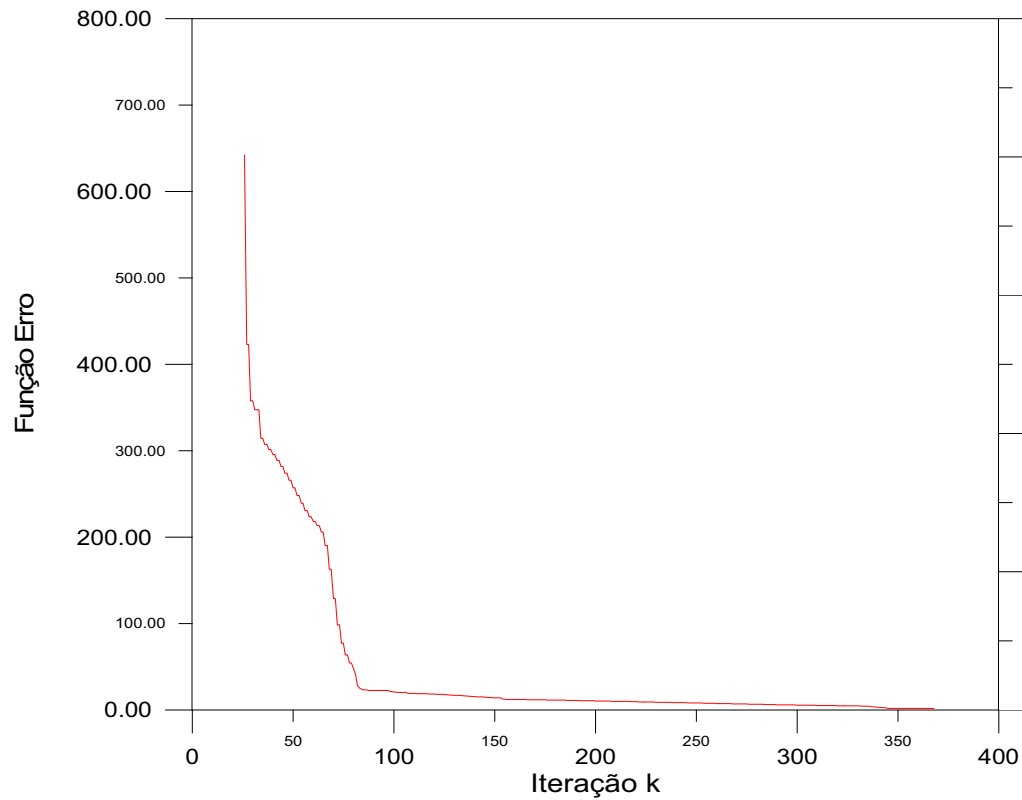
Como esperado, reduziu-se o esforço computacional, utilizando um modelo de baixa ordem, para a linha de transmissão, fornecido pelo método de ajuste não-linear implementado.

6.3 Convergência no Método Não-Linear.

Um critério importante, em um método não-linear, é a convergência. A convergência, por sua vez, é função de alguns parâmetros básicos, como: estimativas iniciais para os valores das variáveis; método de convergência; critério de parada; comportamento das funções a serem determinadas; etc..

No caso específico do método não-linear implementado (Capítulo 5), uma análise do comportamento da função que deseja-se minimizar χ^2 , ao longo do processo, pode fornecer subsídios para caracterizarmos o referido método quanto ao critério da convergência.

Nas Figuras 6.48 à 6.53, é apresentado o comportamento da *função erro* (função a ser minimizada e critério de parada no processo iterativo) versus a *k-ésima* iteração, para cada modo de $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$ dados na Tabela 6.6.

Figura 6.48 - Desempenho do método não-linear para o modo zero de $Y_c(a)$.Figura 6.49 - Desempenho do método não-linear para o modo positivo de $Y_c(a)$.

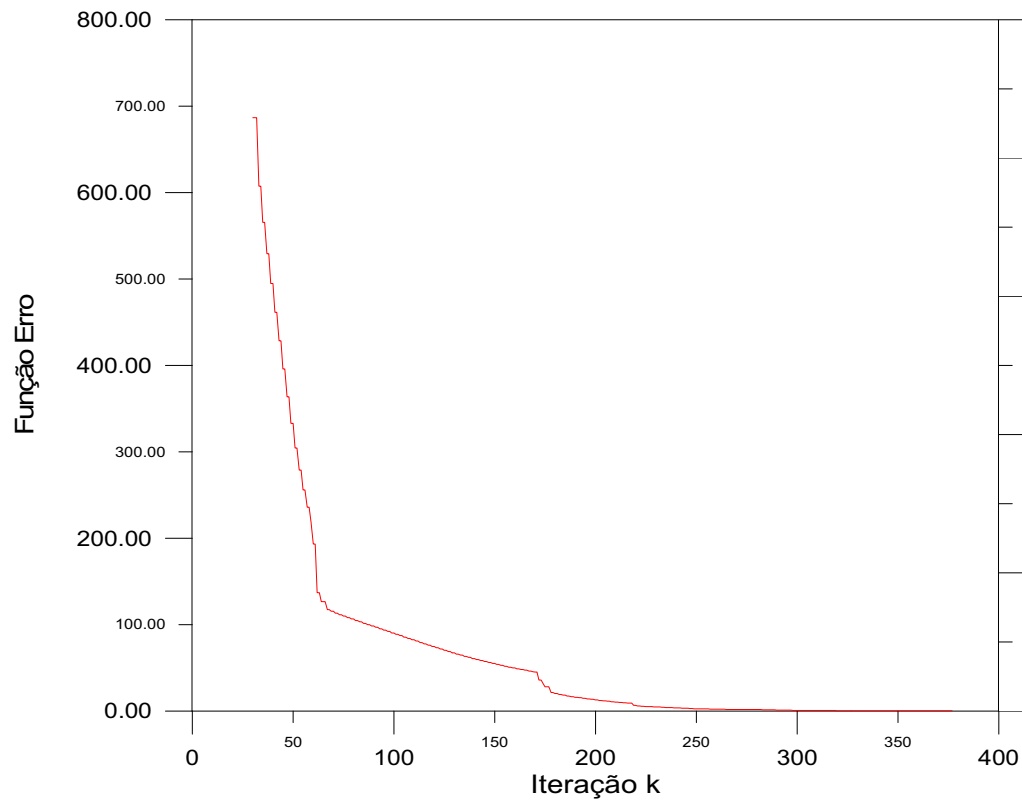


Figura 6.50 - Desempenho do método não-linear para o modo negativo de $Y_c(\omega)$.

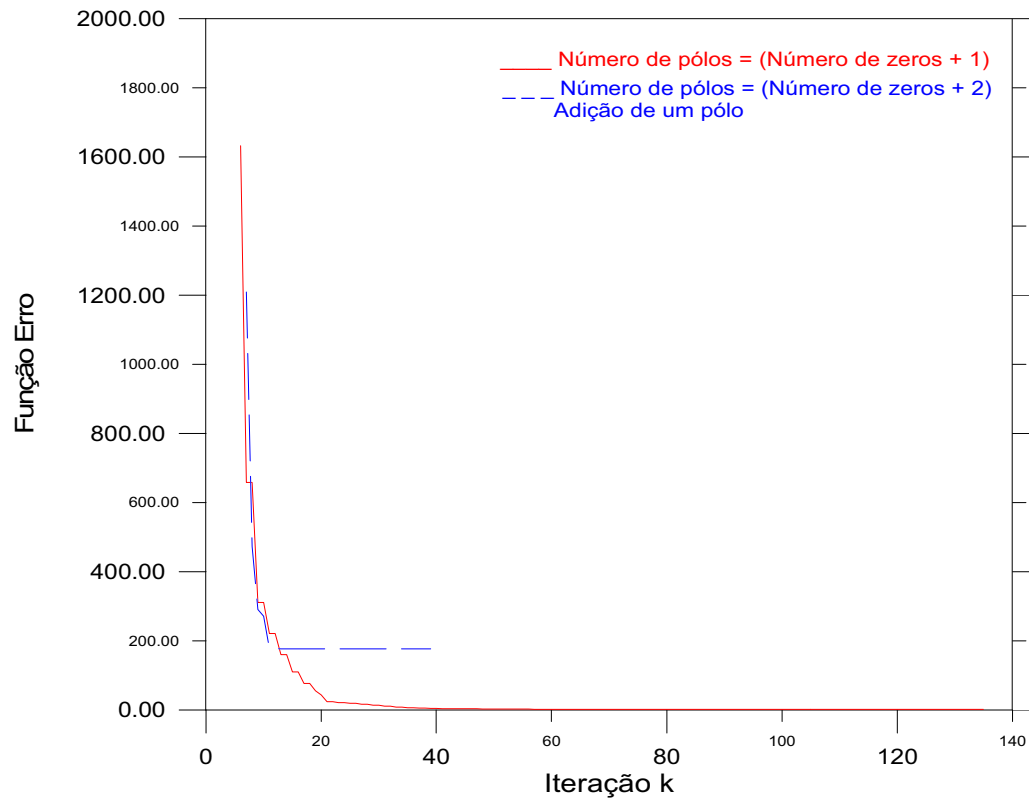
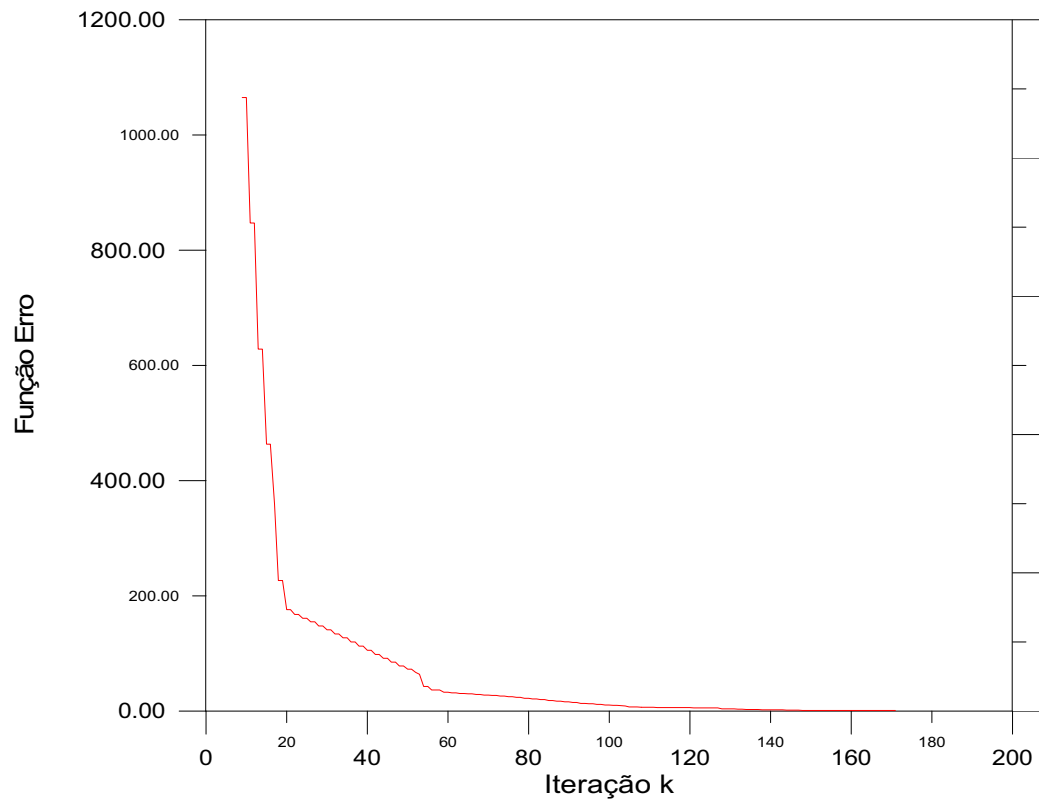
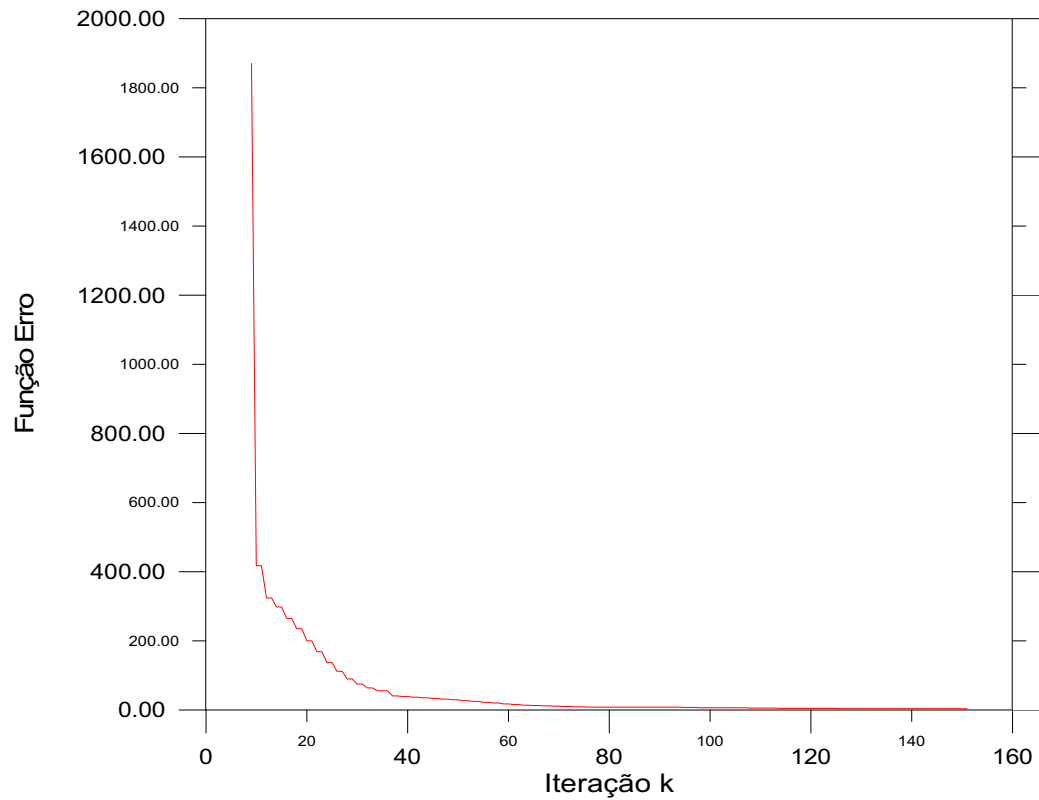


Figura 6.51 - Desempenho do método não-linear para o modo zero de $A(\omega)$.

Figura 6.52 - Desempenho do método não-linear para o modo positivo de $A(\omega)$.Figura 6.53 - Desempenho do método não-linear para o modo negativo de $A(\omega)$.

Na Figura 6.51 observa-se o desempenho do método não-linear para o modo zero de $A(\omega)$ em duas curvas distintas. Neste caso, fez-se necessário alocar dois pólos a mais que zeros para a função racional aproximada. O procedimento é similar ao caso onde o número de pólos é igual ao número de zeros mais um, no entanto, ao final do processo (curva em vermelho) inseri-se mais um pólo e repete-se o processo iterativo (curva em azul). Com este procedimento atingiu-se o melhor desempenho no processo de ajuste para este caso.

Pode-se observar, das Figuras 6.48 a 6.53, que o método implementado converge rapidamente para um valor mínimo de χ^2 (*função erro*).

Mesmo quando os valores atribuídos inicialmente às variáveis, estão “distantes” da solução aproximada, o método converge (Figuras 6.48 a 6.53). Em todos os casos estudados, e apresentados, o método convergiu para uma solução aproximada, para os critérios de precisão adotados. Pode-se, assim, verificar que o processo iterativo converge para os propósitos desta aplicação em particular.

6.4 A Escolha do Passo de Tempo Δt .

Em programas de cálculo de transitórios eletromagnéticos no domínio do tempo, a solução é obtida em pontos discretos no tempo e por isso, existe um limite teórico com respeito a maior componente de frequência dos sinais transitórios, que pode ser considerada. Esta frequência limite, ou frequência de Nyquist é dada por [4]:

$$f_{Nyq} = \frac{0,5}{\Delta t} \text{ (Hz)} \quad (6.2)$$

Com Δt em segundos.

A Tabela 6.9 relaciona o passo de tempo Δt com a frequência de Nyquist.

Passo de Tempo, Δt	Frequência de Nyquist
$1 \mu s$	500 kHz
$5 \mu s$	100 kHz
$10 \mu s$	50 kHz
$20 \mu s$	25 kHz
$40 \mu s$	$12,5 \text{ kHz}$
$60 \mu s$	$8,33 \text{ kHz}$

Tabela 6.9 - Passo de tempo, Δt , e respectiva frequência de Nyquist.

Se optarmos por um passo de tempo de $1 \mu s$, podemos estar usando um passo de tempo muito pequeno e assim, decorrendo em um esforço computacional adicional desnecessário. Por outro lado, optando por um passo de tempo de $60 \mu s$, podemos estar comprometendo a confiabilidade dos resultados em detrimento de uma redução no esforço computacional.

Por tudo isso, a escolha do passo de tempo Δt , se constitui em um parâmetro que deve ser escolhido baseando-se em algum critério, sobretudo quando se está considerando os efeitos da frequência sobre os parâmetros dos componentes do sistema.

Em termos do tempo de computação, necessário para a simulação de um sistema, há sempre consideráveis incentivos ao uso do maior passo de tempo possível, sem no entanto, comprometimento à precisão requerida para a solução.

A questão que surge então é: Como escolher um passo de tempo Δt , que reduza o tempo de computação sem comprometer a precisão dos resultados?

Para a linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, tomamos o caso mais crítico com relação à presença de componentes de frequência elevadas, a energização por um degrau de tensão nas três fases.

Comparando as simulações, observamos não haver diferenças perceptíveis quando variamos o passo de tempo de $1 \mu s$ a $10 \mu s$. Alguma diferença foi

observada quando variamos o passo de tempo de $20\ \mu\text{s}$ a $60\ \mu\text{s}$. A comparação entre os resultados das simulações para $\Delta t = 20\ \mu\text{s}$, $40\ \mu\text{s}$ e $60\ \mu\text{s}$, pode ser feita nas Figuras 6.54 e 6.55, para os dois métodos de ajuste em estudo.

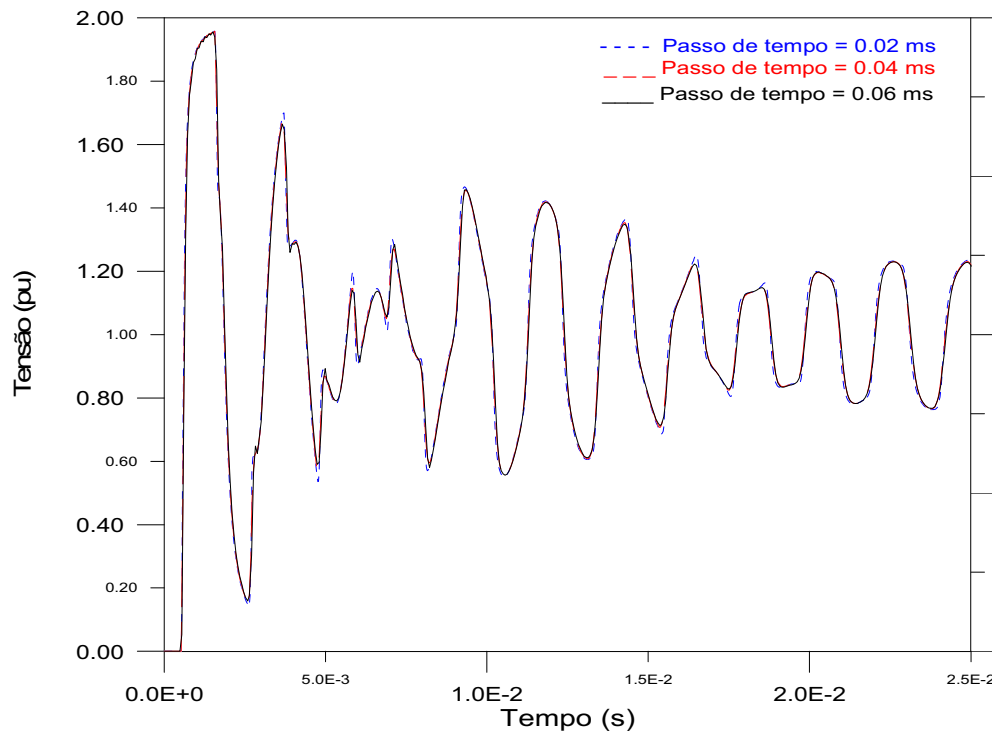


Figura 6.54 - Condição transitória no terminal receptor na fase “a” para energização da linha de transmissão da Figura 6.14, por um degrau de tensão nas três fases, para $\Delta t = 20\ \mu\text{s}$, $40\ \mu\text{s}$ e $60\ \mu\text{s}$. Resultados obtidos fazendo uso do método assintótico.

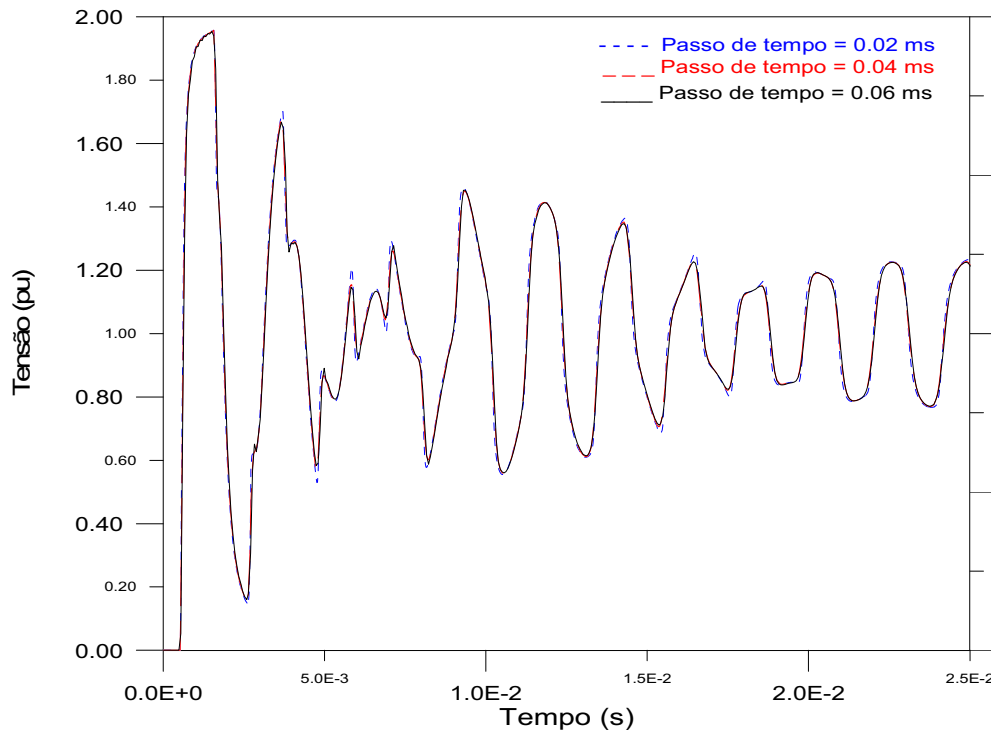


Figura 6.55 - Condição transitória no terminal receptor na fase “a” para energização da linha de transmissão da Figura 6.14, por um degrau de tensão nas três fases, $\Delta t = 20\mu s$, $40\mu s$ e $60\mu s$. Resultados obtidos fazendo uso do método não-linear.

Apesar de variarmos significativamente o passo de tempo ($20\mu s$ a $60\mu s$) as diferenças observadas não foram tão significativas. Nota-se, no entanto, que algumas variações bruscas, devido às componentes de altas frequências, não são mais determinadas para $\Delta t = 60\mu s$.

Uma forma prática de escolher o passo de tempo é fazer uso dos tempos de trânsito da linha para cada modo de propagação, e de posse destes, tomar por valor para Δt um submúltiplo do tempo de propagação do modo mais rápido, ou seja:

$$m \cdot \Delta t = \tau_{min} \quad (6.3)$$

Onde: τ_{min} = tempo de propagação do modo mais rápido;

m = número inteiro positivo.

Para a linha de transmissão trifásica da Figura 6.14, os tempos de trânsito calculados são apresentados na Tabela 6.10.

Tempo de trânsito do modo zero, τ_0	548,919 μs
Tempo de trânsito do modo positivo, τ_1	533,584 μs
Tempo de trânsito do modo negativo, τ_2	533,720 μs

Tabela 6.10 - Tempos de propagação para os modos da linha de transmissão da Figura 6.14.

Da Tabela 6.10, podemos observar que para $\Delta t = 5 \mu s$, da equação (6.3), temos: $m \cong 106$, para $\tau_{min} = 533,584 \mu s$. Para $\Delta t = 20 \mu s$, temos $m \cong 26$. Para $\Delta t = 60 \mu s$, temos $m \cong 9$. Desta forma, um valor, $\left(\frac{\tau_{min}}{100}\right) \leq \Delta t \leq \left(\frac{\tau_{min}}{50}\right)$ se constitui em uma boa escolha, para o passo de tempo, em simulações de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência.

6.5 Considerações Finais.

A propagação de surtos nas linhas de transmissão é afetada pela dependência dos parâmetros com a frequência e pelo efeito corona. Devido às dificuldades em modelar ambos efeitos juntos, um procedimento comumente adotado tem sido dividir a linha em vários segmentos. Desta forma, a não-linearidade do efeito corona é simulado conectando-se ramos para a terra, nas extremidades dos segmentos (SEMLYEN & DERI, 1985; HUANG & SEMLYEN, 1987; BARROS et al, 1995a; BARROS et al, 1995b). Cada seção é então modelada considerando-se o efeito da frequência sobre seus parâmetros. Neste ponto, uma aproximação precisa e de baixa ordem para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, implicará em uma redução significativa do esforço computacional.

Visando verificar a aplicação do método de ajuste não-linear implementado, tomamos como exemplo, a linha de transmissão trifásica, não-transposta da Figura 6.56, cujos dados são listados na Tabela 6.11.

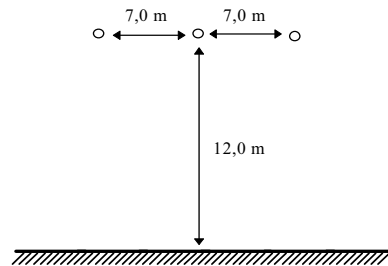


Figura 6.56 - Linha de transmissão trifásica, não-transposta.

Número de Circuitos	1
Número de condutores por fase	1
Resistividade do condutor da fase	32 nΩ.m
Diâmetro externo do condutor	28,6 mm
Resistividade do solo	100,0 Ω.m
Comprimento da linha	30,0 m

Tabela 6.11 - Dados da linha de transmissão da Figura 6.56.

A título de comparação, obtivemos as aproximações para $Y_c(\omega)$ e $A(\omega)$, para a linha de transmissão da Figura 6.56, fazendo uso do FDDATA™. Os resultados obtidos com o método de ajuste assintótico e o método de ajuste não-linear, são apresentados na Tabela 6.12.

		Método de ajuste assintótico			Método de ajuste não-linear		
		Número de zeros	Número de pólos	Erro Máximo	Número de zeros	Número de pólos	Erro Máximo
$Y_c(\omega)$	modo zero	20	20	9,51 %	09	09	0,55 %
	modo positivo	14	14	10,13 %	07	07	0,35 %
	modo negativo	14	14	10,30 %	07	07	0,31 %
$A(\omega)$	modo zero	27	28	0,167 %	04	05	0,017 %
	modo positivo	01	02	0,023 %	01	02	0,006 %
	modo negativo	25	26	0,404 %	02	03	0,004 %

Tabela 6.12 - Resultados obtidos para a linha de transmissão da Figura 6.56.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho, estudou-se a modelagem de linhas de transmissão a parâmetros distribuídos dependentes da frequência, para simulação de transitórios eletromagnéticos no domínio do tempo.

Um método de ajuste foi implementado para a obtenção de funções racionais aproximadas para a admitância característica e o fator de propagação de uma linha no domínio modal. A aplicação do método possibilitou a obtenção de funções precisas de baixa ordem para os casos analisados neste trabalho.

Dois casos foram analisados: uma linha de transmissão monofásica com retorno pela terra e uma linha de transmissão trifásica, não-transposta, com condutores geminados e cabo pára-raios. Para esses casos, a aplicação do método de ajuste implementado forneceu funções racionais precisas e de menor ordem que o método de ajuste assintótico (FDDATATM) aplicado aos mesmos casos.

Na obtenção dos modelos para as linhas de transmissão analisadas (pré-processamento), verificou-se um tempo de execução superior para o método de ajuste implementado, quando comparado ao método de ajuste assintótico. Por isso, seria importante reduzir o número de iterações necessário para a convergência do método de ajuste implementado. Para tanto, precisa-se melhorar a estimativa inicial e talvez utilizar técnicas para acelerar a convergência.

Simulações digitais foram feitas utilizando o programa MICROTRAN®.

Determinou-se as condições transitórias, nas linhas em estudo, para diferentes situações:

- * energização da linha por fonte senoidal de tensão (terminal receptor em aberto);
- * energização da linha por degrau de tensão nas três fases (terminal receptor em aberto);
- * energização da linha por fonte senoidal de tensão (terminal receptor com uma das fases em curto-circuito com a terra).

O modelo de baixa ordem gerado com o método de ajuste implementado produziu resultados idênticos aos gerados pelo modelo obtido com o método de ajuste assintótico, mas proporcionando uma redução notória no esforço computacional.

A utilização de um modelo preciso e de baixa ordem pode ser muito importante em:

- (a) estudos em que o porte do sistema a ser analisado exija um tempo de simulação considerável, de modo que uma redução no tempo de processamento total represente um aspecto importante;
- (b) estudos em que a linha precise ser subdividida em várias seções, como é o caso da representação de linhas que incluam atenuações causadas por efeito corona;
- (c) simuladores para sistemas de potência em tempo real que utilizem DSP (Digital Signal Processor), tecnologia emergente e em desenvolvimento que possibilita o estudo e a elaboração de estratégias realistas de proteção, onde a redução do tempo de processamento em

cada passo de tempo é de essencial importância para viabilizar a simulação em tempo real (WANG & MATHUR, 1981; DUFOUR et al, 1996).

A aplicação do método de ajuste implementado para a modelagem de cabos subterrâneos é um ponto a ser investigado em trabalhos futuros (MARTI, 1988).

Uma possível aplicação do método implementado, na modelagem de linhas de transmissão polifásicas no domínio da fase diretamente, também é um aspecto a ser analisado (ANGELIDIS & SEMLYEN, 1995; CASTELANOS & MARTI, 1995).

Referências Bibliográficas

- ANGELIDIS, G., SEMLYEN, A. *Direct Phase-Domain Calculation of Transmission Line Transients using Two-Sided Recursions*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, No. 2, pp. 941-949, April, 1995.
- BARROS, H. M., CARNEIRO JR., S., AZEVEDO, R. M. *An Efficient Recursive Scheme for Simulation of Overvoltages on Multiphase Systems Under Corona*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, pp. 1443-1452, July 1995
- _____, AZEVEDO, R. M., CARNEIRO JR., S. *A Comparison of Frequency-Dependent Line Models in Connection with Implicit Segmentation Schemes*. IPST'95 - International Conference on Power Systems Transients, pp. 29-34, Lisbon, September 1995.
- BRANDÃO FARIA, J. A. *Overhead Three-Phase Transmission Lines - Non-Diagonalizable Situations*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No.4, pp.1348-1354, October, 1988.
- BUDNER, A. *Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program.*, Trans. IEEE Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 88-97, January, 1970.
- CARSON, J. R. *Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return*. Bell System Technical Journal, Vol. 5, pp. 539-554, 1926.
- CASTELLANOS, F., MARTI, J. R. *Phase-Domain Multiphase Transmission Line Models*. IPST'95 - International Conference on Power Systems Transients, pp. 17-22, Lisbon, September 1995.

- CHEN, W. H. *Linear Network Design and Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1964.
- CIGRÉ WORKING GROUP 33.02. *Guidelines for Representation of Network Elements when Calculating Transients*. Technical Brochure CE/SC GT/WG 02, 1990.
- COSTA JR., P., *A Transformada Z Aplicada ao Cálculo de Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Transmissão de Energia Elétrica e de Telecomunicações*. Tese de Doutorado, UNICAMP, 1995.
- DERI, A., TEVAN, G., SEMLYEN, A., CASTANHEIRA, A. *The Complex Ground Return Plane, a Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, n°8, pp. 3686-3693, August, 1981.
- DOMMEL, H. W. *Digital Computer Solution of Eletromagnetic Transients in Single and Multi-Phase Networks*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, pp. 388-399, April, 1969.
- _____. *EMTP Theory Book*. Microtran Power System Analysis Corporation, Vancouver, 1992.
- DUFOUR, C., LE-HUY, H., SOUMAGNE, J., HAKIMI, A. E. *Real-Time Simulation of Power Transmission Lines Using Marti Model With Optimal Fitting on Dual-DSP Card*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 11, No.1, January 1996.
- GALLOWAY, R. H., SHORROCKS, W. B. WEDEPOHL, L. M. *Calculation of Electrical Parameters for Short and Long Polyphase Transmission Lines*. Proc. IEE, Vol. III, n°12, pp. 2051-2059, December 1964.
- HAMMING, R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Second Edition. New York: Dover Publications Inc., 1986.

- HEDMAN, D. E. *Propagation on Overhead Transmission Lines. I - Theory of Modal Analysis. II - Earth-Conduction Effects and Practical Results.* IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-84, pp.205-211, May, 1965.
- HUANG, W., SEMLYEN, A. *Computation of Electro-Magnetic Transients on Three-Phase Transmission Lines with Corona and Frequency Dependent Parameters.*”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. PWRD-2, No.3, pp. 887-898, July 1987.
- HUMPAGE, W. D. *Z-Transform Eletromagnetic Transient Analysis in High-Voltage Networks.* London: Peter Peregrinus Ltd., 1982.
- LANCZOS, C. *Applied Analysis.* New York: Dover Publications Inc., 1988.
- MAGNUSSON, P. C. *Travelling Waves on Multi-Conductor Open-Wire Lines - A Numerical Survey of the Effects of Frequency Dependence of Modal Composition.* IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, pp. 1565-1572, September/October, 1977.
- MARTI, L. *Low-Order Approximation of Transmission Line Parameters for Frequency-Dependent Models.* IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No.11, pp. 3582-3589, November, 1983.
- _____. *Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices.* IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 03, No.3, pp. 1099-1110, July, 1988.
- MARTI, J. R. *Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations.* IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.1, pp. 147-157, January, 1982.
- _____, GARRETT, B. W., DOMMEL H. W., WEDEPOHL, L. M. *Transients Simulation in Power Systems: Frequency Domain and Time Domain Analysis.*

Power Systems Planning & Operation Section, Canadian Electrical Association, Montreal, March 1985.

MEYER, W. S., DOMMEL, H. W. *Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol PAS-93, pp. 1401-1409, September/October, 1974.

MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS CORPORATION, *Transients Analysis Program Reference Manual*. Vancouver, 1992.

MORENO P., DE LA ROSA, R., NAREDO, J. L. *Frequency Domain Computation of Transmission Line Closing Transients*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 6, No.1, pp.275-281, January, 1991.

NAIDU, S. R. *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*. Campina Grande: Editora Grafset, ELETROBRÁS/UFPB, 1985.

_____, LIMA, F. N. *A Frequency-Dependent Transmission Line Model for Eletromagnetic Transient Studies*. IEE Proc., Vol. 132, Pt. C, No.6, pp.294-297, November, 1985.

NAREDO, J. L., SILVA, J. L., ROMERO, R., MORENO, P. *Application of Approximated Modal Analysis Methods for PLC System Design*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. PWRD-2, No.1, pp.57-63, January, 1987.

PORTELA, C. *Regimes Transitórios*. Vol. I. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1983.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing*. Second Edition. New York: Cambridge University Press, 1992.

- SEMLYEN, A., DABULEANU, A. *Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines with Ground Return Using Recurive Convolutions*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94, pp. 561-571, March/Apri, 1975.
- _____, ROTH, R. A. *Calculation of Exponential Step Responses - Accurately for Three Base Frequencies*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-96, pp. 667-672, March/April, 1977.
- _____. *Contributions to The Theory of Calculation of Electromagnetic Transients an Transmission Lines with Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No.2, pp.848-856, February, 1981.
- _____, DERI, A. *Time Domain Modelling of Frequency Dependent Three-Phase Transmission Line Impedance*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No.6, pp.1549-1555, June, 1985.
- SNELSON, J. K. *Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines - Frequency Dependent Parameters*. IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 85-91, January/February, 1972.
- VALKENBURG, V. *Introduction to Modern Network Syntesis*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1960.
- WANG, X., MATHUR, R. M. *Real-Time Digital Simulator of The Electromagnetic Transients of Transmission Lines with Frequency Dependence*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 4, No.4, pp.2249-2255, October, 1989.

WEDEPOHL, L. M. *Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems*. Proc. IEE, Vol. 110, n°12, pp. 2200-2212, December, 1963.

ZHOU, PEI-BAI. *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. New York: Springer-Verlag, 1993.

Apêndice A

Cálculo da Impedância Série - Método de Carson.

CARSON (1926) desenvolveu equações na forma de série para o cálculo de impedâncias próprias e mútuas de circuitos com retorno pelo solo, considerando que:

(a) Os condutores são perfeitamente horizontais acima do solo e longos o bastante para que a tridimensionalidade e os efeitos dos extremos possam ser desprezados (o problema se torna um caso bidimensional);

(b) O espaço aéreo é homogêneo e sem perdas, com permeabilidade μ_0 e permissividade ϵ_0 ;

(c) O solo é homogêneo com resistividade uniforme ρ , permeabilidade μ_0 e permissividade ϵ_0 . A terra comporta-se como um condutor e assim, as correntes de deslocamento podem ser desprezadas. Acima de uma certa frequência, denominada de frequência crítica, as correntes de deslocamento capacitivas não podem ser desprezadas.

Como a densidade de corrente resistiva é $J_r = \left(\frac{E}{\rho} \right)$ e a densidade de corrente capacitiva é

$J_c = \epsilon \cdot \omega \cdot E$, na frequência crítica $J_c = J_r$, assim: $f_{crit} = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon\rho} \right)$ (Hz), e outras fórmulas

devem ser utilizadas (DOMMEL, 1992);

(d) O espaçamento entre os condutores seja significativamente maior que os raios dos mesmos, assim os efeitos de proximidade podem ser desprezados.

Desta forma, os elementos da matriz impedância série, podem ser calculados a partir da configuração da linha e das características de seus condutores, pelas seguintes expressões:

(i) Para a impedância própria.

$$Z'_{ii} = (R'_{i-int} + \Delta R'_{ii}) + j \cdot \left(\frac{\omega \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot h_i}{GMR_i} \right) + \Delta X'_{ii} \right) \quad \text{em } (\Omega/\text{km}) \quad (A1)$$

(ii) Para a impedância mútua.

$$Z'_{ik} = Z'_{ki} = (\Delta R'_{ik}) + j \cdot \left(\frac{\omega \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{D_{ik}}{d_{ik}} \right) + \Delta X'_{ik} \right) \quad \text{em } (\Omega/\text{km}) \quad (A2)$$

Onde: R'_{i-int} = resistência AC do condutor “i” em $\Omega/\text{unidade de comprimento}$;

h_i = altura média, acima dos solo, do condutor “i” (ver Figura A.1);

D_{ik} = distância entre o condutor “i” e a imagem do condutor “k” (ver Figura A.1);

d_{ik} = distância entre os condutores “i” e “k” (ver Figura A.1);

GMR_i = raio médio geométrico do condutor “i”;

$\omega = 2\pi f$; f = frequência em Hz;

$\Delta R'$, $\Delta X'$ = termos de correção de Carson que levam em consideração os efeitos do retorno pelo solo.

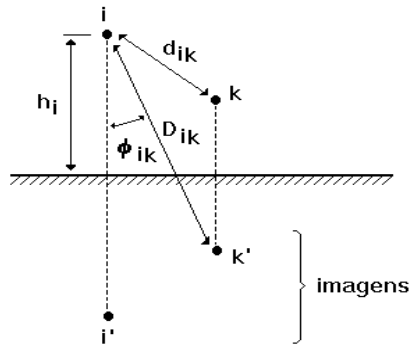


Figura A.1 - Disposição dos condutores “i” e “k”.

Os termos de correção de Carson $\Delta R'$ e $\Delta X'$ nas equações (A1) e (A2) são funções do ângulo “ ϕ ” e do parâmetro “ a ”, dado por:

$$a = 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{5} \cdot 10^{-4} \cdot D \cdot \sqrt{\frac{f}{\rho}} \quad (A3)$$

Onde: $D = 2 \cdot h_i$ em metros para a impedância própria;

$D = D_{ik}$ em metros para a impedância mútua;

ρ = resistividade do solo em $\Omega \cdot m$.

Para elevados valores de frequência ou baixos valores de resistividade do solo, os termos de correção $\Delta R'$ e $\Delta X'$, tendem para zero e o parâmetro “ a ” tende para infinito. Carson expressou os termos de correção, através de integrais infinitas, as quais podem ser desenvolvidas nas seguintes séries infinitas, válidas para $a \leq 5$ (CARSON, 1926; DOMMEL, 1992).

$$\begin{aligned} \Delta R' = 4 \cdot \omega \cdot 10^{-4} \cdot \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 \cdot a \cdot \cos \phi + b_2 \cdot \left[(c_2 - \ln a) \cdot a^2 \cdot \cos 2\phi + \phi \cdot a^2 \cdot \sin 2\phi \right] + b_3 \cdot a^3 \cdot \cos 3\phi \right. \\ \left. - d_4 \cdot a^4 \cdot \cos 4\phi - b_5 \cdot a^5 \cdot \cos 5\phi + b_6 \cdot \left[(c_6 - \ln a) \cdot a^6 \cdot \cos 6\phi + \phi \cdot a^6 \cdot \sin 6\phi \right] + b_7 \cdot a^7 \cdot \cos 7\phi \right. \\ \left. - d_8 \cdot a^8 \cdot \cos 8\phi - \dots \right\} \\ \text{em } (\Omega/km) \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\Delta X' = 4. \omega . 10^{-4} . \left\{ \frac{1}{2} . (0.6159315 - \ln a) + b_1 . a . \cos \phi - d_2 . a^2 . \cos 2\phi + b_3 . a^3 . \cos 3\phi - d_4 . a^4 . \cos 4\phi \right. \\ \left. - b_5 . a^5 . \cos 5\phi + b_6 . [(c_6 - \ln a) . a^6 . \cos 6\phi + \phi . a^6 . \sin 6\phi] + b_7 . a^7 . \cos 7\phi \right. \\ \left. - d_8 . a^8 . \cos 8\phi - \dots \right\} \\ \text{em } (\Omega/\text{km}) \quad (\text{A5})$$

Para $a > 5$, as seguintes séries são mais recomendadas:

$$\Delta R' = \left(\frac{\cos \phi}{a} - \frac{\sqrt{2} . \cos 2\phi}{a^2} + \frac{\cos 3\phi}{a^3} + \frac{3 . \cos 5\phi}{a^5} - \frac{45 . \cos 7\phi}{a^7} \right) . \frac{4. \omega . 10^{-4}}{\sqrt{2}} \quad \text{em } (\Omega/\text{km}) \quad (\text{A6})$$

$$\Delta R' = \left(\frac{\cos \phi}{a} - \frac{\sqrt{2} . \cos 2\phi}{a^2} + \frac{\cos 3\phi}{a^3} + \frac{3 . \cos 5\phi}{a^5} - \frac{45 . \cos 7\phi}{a^7} \right) . \frac{4. \omega . 10^{-4}}{\sqrt{2}} \quad \text{em } (\Omega/\text{km}) \quad (\text{A7})$$

Os coeficientes b_i , c_i e d_i são constantes e podem ser calculados utilizando-se as seguintes fórmulas recursivas:

$$b_i = b_{i-2} . \frac{\text{sign}}{i(i+2)} , \text{ com } b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ e } b_2 = \frac{1}{16} \\ c_i = c_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2} , \text{ com } c_2 = 1.3659315 \\ d_i = \frac{\pi}{4} . b_i$$

Com $\text{sign} = \pm 1$, mudando para cada quatro termos sucessivos ($\text{sign} = +1$, para $i = 1, 2, 3, 4$; $\text{sign} = -1$, para $i = 5, 6, 7, 8$, etc.).

As funções trigonométricas podem ser calculadas diretamente da geometria da linha, de onde:

$$\cos \phi_{ik} = \frac{h_i + h_k}{D_{ik}} \quad \text{e} \quad \sin \phi_{ik} = \frac{x_{ik}}{D_{ik}}$$

Para os termos de ordem elevada das séries, as seguintes fórmulas recursivas são utilizadas:

$$\begin{aligned}a^i \cdot \cos i\phi &= \{a^{i-1} \cdot \cos[(i-1) \cdot \phi] \cdot \cos \phi - a^{i-1} \cdot \sin[(i-1) \cdot \phi] \cdot \sin \phi\} \cdot a \\a^i \cdot \sin i\phi &= \{a^{i-1} \cdot \cos[(i-1) \cdot \phi] \cdot \sin \phi + a^{i-1} \cdot \sin[(i-1) \cdot \phi] \cdot \cos \phi\} \cdot a\end{aligned}$$

Apêndice B

Cálculo da Impedância Série - Método de Deri, Tevan, Semlyen e Castanheira.

Uma forma simples de levar em consideração o efeito do retorno pelo solo, foi proposto por DERI et al (1981). Nesta formulação, em vez de se adicionar os termos de correção de Carson (Apêndice A), utiliza-se a seguinte expressão:

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j \cdot \omega \cdot \mu_0}} \quad (B1)$$

Onde: ρ = resistividade do solo.

Para levar em consideração o efeito da frequência sobre a impedância série da linha, e assim, tem-se:

(i) Para a impedância própria.

$$Z'_{ii} = R'_{i-int} + j \cdot \left(\frac{\omega \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot (h_i + p)}{GMR_i} \right) \right) \quad \text{em } (\Omega/km) \quad (B2)$$

(ii) Para a impedância mútua.

$$Z'_{ik} = Z'_{ki} = j \cdot \left(\frac{\omega \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{(h_i + h_k + 2 \cdot p)^2 + (x_{ik})^2}}{GMR_i} \right) \right) \quad \text{em } (\Omega/km) \quad (B3)$$

Onde: x_{ik} = distância horizontal entre os condutores “i” e “k”. Esta formulação, embora mais simples, produz resultados bem próximos dos obtidos pelo método de Carson (DOMMEL, 1992; MICROTRAN POWER SYSTEM ANALYSIS PROGRAM, 1992).

Apêndice C

Cálculo da Admitância Shunt.

A capacitância entre os “n” condutores e a terra, é representada por uma matriz simétrica $[C]$, de ordem $n \times n$, de modo que os elementos da diagonal C_{ii} é a soma das capacitâncias shunt por unidade de comprimento do condutor “i”, para todos os outros e para a terra. Os elementos fora da diagonal, $C_{ik} = C_{ki}$, são os valores negativos da capacitância shunt por unidade de comprimento entre os condutores “i” e “k”.

Entretanto a matriz $[C]$ não pode ser calculada diretamente. Primeiramente, a matriz dos coeficientes de potencial de Maxwell deve ser calculada, e $[C]$ é então obtida por inversão da matriz $[P]$, isto é:

$$[C] = [P]^{-1} \quad (C1)$$

Os elementos de $[P]$ são calculados a partir da geometria da linha. Se $r \ll h$ (ou seja, o raio do condutor é muito menor que sua distância ao solo), tem-se:

$$P_{ii} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot h_i}{r_i} \right) \quad \text{em (km/F)} \quad (C2)$$

$$P_{ik} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{D_{ik}}{d_{ik}} \right) \quad \text{em (km/F)} \quad (C3)$$

Os coeficientes de potencial relacionam as tensões ao terra e a carga eletrostática nos condutores através da seguinte equação:

$$[V] = [P] \cdot [Q] \quad (C4)$$

A condutância shunt $[G]$ é desprezada para linhas aéreas, pois sua influência só é considerável em muito baixas frequências (aproximadamente CC), onde o comportamento da linha é determinada por $[R]$ e $[G]$.

Desta forma a admitância shunt é dada por:

$$[Y] = j \cdot \omega \cdot [C] \quad (C5)$$

Apêndice D

Eliminação dos Cabos Pára-Raios.

1 Na Matriz Capacitância.

A matriz $[Y]$ calculada da forma descrita no Apêndice C, terá uma ordem $(p+q)$, onde “ p ” é o número de fases e “ q ” o número de cabos pára-raios.

Suponhamos que a relação inversa da equação (C4) tenha sido encontrada invertendo-se a matriz dos coeficientes de potencial de Maxwell $[P]$, produzindo a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (D1)$$

Uma vez que podemos considerar que a tensão nos cabos pára-raios é zero (assumindo que os mesmos não estejam isolados das torres, mas aterrados), as tensões V_i na equação (D1), relacionadas com os cabos pára-raios, podem ser anuladas, ou seja, $V_i=0$ se o condutor “ i ” está aterrado nas estruturas das torres.

Como normalmente não é desejado calcular as cargas eletrostáticas nos cabos pára-raios, pode-se omitir as linhas correspondentes a Q_i dos cabos pára-raios.

Assim: $[C]_{(p+q) \times (p+q)} \rightarrow [C_{red}]_{p \times p} \Rightarrow [Y_{red}] = j \cdot \omega \cdot [C_{red}]$

Desta forma, os cabos pára-raios são eliminados pela simples eliminação das linhas e colunas correspondentes na equação (D1). O efeito dos cabos pára-raios, no entanto, está contido nas equações remanescentes.

2 Na Matriz Impedância Série.

A matriz $[Z]$ calculada da forma descrita nos Apêndices A e B, terá uma ordem $(p+q)$, onde “ p ” é o número de fases e “ q ” o número de cabos pára-raios.

A equação relacionando tensão e corrente será:

$$[V] = [Z] \cdot [I] \quad \text{ou} \quad [I] = [Z]^{-1} \cdot [V] \quad (\text{D2})$$

Como no caso da matriz $[Y]$, as últimas “ q ” linhas e colunas de $[Z]^{-1}$ são descartadas e a matriz modificada de ordem “ p ” é novamente invertida produzindo a matriz $[Z_{red}]$ que elimina as expressões para os cabos pára-raios. No entanto, a presença dos cabos pára-raios está contida nas equações remanescentes.

Apêndice E

Eliminação dos Condutores Geminados.

Em linhas aéreas de alta tensão, condutores geminados são frequentemente utilizados, onde cada fase ou conjunto de condutores a uma mesma tensão, consiste de dois ou mais subcondutores bem próximos, quando comparados ao espaçamento para as demais fases. O arranjo dos condutores geminados é normalmente simétrico, mas arranjos assimétricos tem sido propostos (DOMMEL, 1992).

Dois métodos distintos podem ser utilizados para o cálculo de parâmetros de condutores geminados.

1 Eliminação dos subcondutores pela redução da matriz Z .

Neste método, os parâmetros são originalmente calculados com cada subcondutor sendo considerado um condutor individual. Uma vez que a tensão é a mesma para os condutores geminados de uma mesma fase, faz-se uso deste fato para reduzir a ordem das matrizes ao número de condutores de fase equivalentes.

O processo de eliminação é o mesmo para $[Z]$ e $[P]$, portanto será explanado apenas para a redução da matriz $[Z]$.

Consideremos que os condutores “ i ”, “ k ”, “ l ” e “ m ” sejam geminados, formando a fase “ R ”. Assim teremos:

$$I_i + I_k + I_l + I_m = I_R \quad (E1)$$

$$\frac{dE_i}{dx} + \frac{dE_k}{dx} + \frac{dE_l}{dx} + \frac{dE_m}{dx} = \frac{dE_R}{dx} \quad (E2)$$

$$-\begin{bmatrix} \frac{dE_i}{dx} \\ \frac{dE_k}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dE_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ik} & \cdots & Z_{in} \\ Z_{ki} & Z_{kk} & \cdots & Z_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{ni} & Z_{nk} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ I_k \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (E3)$$

Usando (E1) e (E2) em (E3), teremos:

$$-\begin{bmatrix} \frac{dE_R}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dE_n}{dx} \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} I_R \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (E4)$$

Desta forma as quatro linhas e quatro colunas correspondentes aos subcondutores “i”, “k”, “l” e “m” são reduzidas a uma única linha e coluna para o arranjo que compõe a fase “R”

2 Substituição dos subcondutores geminados pelo condutor equivalente.

Neste método o conceito de distâncias médias geométricas é utilizado visando substituir o conjunto de subcondutores geminados por um único condutor equivalente. Embora teoricamente, este método não se restrinja a arranjos simétricos, este tem sido utilizado em casos onde haja simetria entre os subcondutores geminados.

As seguintes fórmulas são baseadas nas seguintes hipóteses:

- (a) O arranjo de subcondutores é simétrico;
- (b) A distribuição de corrente entre os subcondutores que constituem a fase, é uniforme.

Sob estas condições, o conjunto pode ser tratado como um único condutor equivalente, pela substituição do raio médio geométrico, GMR , nas fórmulas (A1) e (B2) pelo raio médio geométrico equivalente, dado por:

$$GMR_{equiv} = \sqrt[N]{N \cdot GMR \cdot A^{N-1}} \quad (E5)$$

Onde: GMR = raio médio geométrico de um subcondutor individual do conjunto geminado;

A = raio do conjunto de condutores geminados (ver Figura E.1);

N = número de subcondutores.

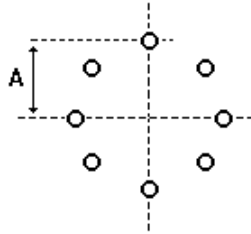


Figura E.1 - Arranjo simétrico com $N=8$ subcondutores individuais.

De forma análoga, o raio “ r ” da equação (C2) deve ser substituído pelo raio equivalente, dado por:

$$r_{equiv} = \sqrt[N]{N \cdot r \cdot A^{N-1}} \quad (E6)$$

Ambos os métodos acima descritos produzem resultados praticamente idênticos (DOMMEL, 1992).

Apêndice F

Convolução Recursiva.

Considere a seguinte integral de convolução,

$$s(t) = \int_T^\infty f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (F1)$$

a ser calculada para o tempo “ t ”, com $s(t-\Delta t)$ já conhecido do passo de tempo anterior.

A integral (F1) pode ser dividida em uma soma de duas outras integrais,

$$s(t) = \int_T^{T+\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du + \int_{T+\Delta t}^\infty f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (F2)$$

No entanto, substituindo u em (F1) por $(u+\Delta t)$, $s(t-\Delta t)$ pode ser expresso como:

$$s(t-\Delta t) = e^{p \cdot \Delta t} \cdot \int_{T+\Delta t}^\infty f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du \quad (F3)$$

Portanto de (F2) temos:

$$s(t) = \int_T^{T+\Delta t} f(t-u) \cdot e^{-p \cdot (u-T)} \cdot du + e^{-p \cdot \Delta t} \cdot s(t-\Delta t) \quad (F4)$$

Desta forma, $s(t)$ é determinado recursivamente a partir de $s(t-\Delta t)$ com uma integração sobre um único passo de tempo Δt . Se assumirmos que “ f ” varia linearmente entre $(t-T-\Delta t)$ e $(t-T)$, então (MARTI, 1982; DOMMEL, 1992):

$$s(t) = c_1 \cdot s(t-\Delta t) + c_2 \cdot f(t-T) + c_3 \cdot f(t-T-\Delta t) \quad (F5)$$

Onde:

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-p \cdot \Delta t} \quad ; \quad c_2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \cdot (1 - e^{-p \cdot \Delta t}) \\ c_3 &= -\frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot \Delta t} + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \cdot (1 - e^{-p \cdot \Delta t}) \end{aligned} \quad (F6)$$

Apêndice G

Sistemas Físicos Passivos: Propriedades de $P(s)$.

Uma função polinomial racional $P(s)$ no plano complexo s tem a seguinte forma:

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_n \cdot s^n + A_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + A_1 \cdot s + A_0}{B_m \cdot s^m + B_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + B_1 \cdot s + B_0} \quad (G1)$$

ou,

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot \dots \cdot (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot \dots \cdot (s + p_m)} \quad (G2)$$

Onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios na variável complexa $s = \sigma + j\omega$.

Se $P(s)$ corresponde a resposta de um sistema físico passivo (uma admitância ou uma impedância, por exemplo), $P(s)$ possui as seguintes propriedades (CHEN, 1964):

Propriedade 1 - $P(s)$ é representável como uma razão de dois polinômios em s , na forma da equação (G1), com coeficientes reais.

Propriedade 2 - Os pólos e zeros de $P(s)$, se não estão sobre o eixo $j\omega$, estão no semi-plano esquerdo do plano complexo.

Propriedade 3 - Os pólos e zeros de $P(s)$, que estão sobre o eixo $j\omega$, são simples.

Propriedade 4 - A função $P(s)$ expressa na forma (G1), possui apenas coeficientes positivos no numerador e denominador.

Propriedade 5 - A componente real de $P(j\omega)$ nunca é negativa, isto é, $\text{Re}[P(j\omega)] \geq 0$, para qualquer valor de ω .

A Função Polinomial Racional $P(s)$ no Plano Complexo.

O módulo de uma função $P(s)$ no plano complexo pode ser escrito como:

$$|P(s)|^2 = P(s) \cdot P(-s) \quad (\text{G3})$$

Se $P(s)$ for uma função polinomial racional, da forma,

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = H \cdot \frac{(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdot (s + z_3) \cdot \dots \cdot (s + z_n)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot (s + p_3) \cdot \dots \cdot (s + p_m)} \quad (\text{G4})$$

Podemos escrever $|P(s)|^2$ como,

$$|P(s)|^2 = H^2 \cdot \frac{(-s^2 + z_1^2) \cdot (-s^2 + z_2^2) \cdot (-s^2 + z_3^2) \cdot \dots \cdot (-s^2 + z_n^2)}{(-s^2 + p_1^2) \cdot (-s^2 + p_2^2) \cdot (-s^2 + p_3^2) \cdot \dots \cdot (-s^2 + p_m^2)} \quad (\text{G5})$$

Com $s = j\omega$ e $m \geq n$, $|P(s)|^2$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$|P(\omega)|^2 = G \cdot \frac{(c_1\omega^2 + 1) \cdot (c_2\omega^2 + 1) \cdot (c_3\omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (c_n\omega^2 + 1)}{(d_1\omega^2 + 1) \cdot (d_2\omega^2 + 1) \cdot (d_3\omega^2 + 1) \cdot \dots \cdot (d_m\omega^2 + 1)} \quad (\text{G6})$$

$$\text{Onde: } G = H^2 \cdot \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}{z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 \cdot \dots \cdot z_n^2}$$

$$c_i = \frac{1}{z_i^2}$$

$$d_j = \frac{1}{p_j^2}$$

c_i e d_j são números positivos e reais, com $i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, m$.

Apêndice H

Método de Ajuste Não-Linear.

Suponha que estejamos ajustando um modelo que possui M parâmetros ajustáveis a_j , $j=1, 2, \dots, M$, a N pontos $(x_i ; y_i)$, $i=1, \dots, N$. O modelo prediz um relacionamento funcional entre os dados independentes e suas variáveis, na forma,

$$y(x) = y(x; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M)$$

Consideremos um modelo que depende não-linearmente do conjunto de M parâmetros incógnitas a_j .

O problema consiste em determinar a melhor aproximação, dada pelo vetor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_M]$, de forma a minimizar uma dada função erro χ^2 . No entanto, com a dependência não-linear dos a_j , a minimização deve se dar iterativamente.

O modelo a ser ajustado é:

$$y = y(x; \mathbf{a}) \tag{H1}$$

A função erro (PRESS et al, 1992) por sua vez, é dada por:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - y(x_i; \mathbf{a})}{\sigma_i} \right]^2 \tag{H2}$$

1 Conceitos Fundamentais

A palavra otimização denota tanto uma minimização como uma maximização de uma dada função.

Um processo de otimização pode ser restringido por algumas condições predeterminadas, como:

$$\text{Minimizar } \{y(\mathbf{a})\}, \text{ sujeito a: } \begin{cases} h_i(\mathbf{a}) = 0, & i = 1, \dots, p \\ g_j(\mathbf{a}) \geq 0, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (\text{H3})$$

Onde, $y(\mathbf{a})$ é a função objetiva que se deseja otimizar, \mathbf{a} é um vetor de ordem n em um espaço linear E_n . A equação (H3) é a expressão matemática de um problema de otimização restrita. Em (H3) se algumas das restrições ou a função objetiva é não-linear, tem-se um problema de otimização não-linear.

Se a função objetiva não se limita por nenhuma condição restritiva, o problema é dito ser de otimização irrestrita.

Para uma função de uma única variável, $y=f(a)$, as condições necessárias e suficientes para que um valor a^* seja um mínimo local, são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a^*)}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f(a^*)}{\partial a^2} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{H4})$$

Para uma função de várias variáveis $F(\mathbf{a})$, expandindo $F(\mathbf{a})$ em série de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &= F(\mathbf{a}) + \delta a_1 \cdot \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial a_1} + \delta a_2 \cdot \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial a_2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \delta a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1^2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \delta a_1 \cdot \delta a_2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{1}{2} \cdot \delta a_1 \cdot \delta a_2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_1 \partial a_2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \delta a_2^2 \cdot \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial a_2^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{H5})$$

Desprezando os termos de ordem superior de (H5), obtemos,

$$F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}) + \delta\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \cdot \delta\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a} \quad (\text{H6})$$

No método de Newton, $\delta \mathbf{a}$ é calculado em cada iteração para que:

$$[F(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) - F(\mathbf{a})] \text{ seja mínimo.}$$

Ou seja, $\nabla_{\delta \mathbf{a}} [F(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) - F(\mathbf{a})] = 0$. Logo, $G(\mathbf{a}) \delta \mathbf{a} = -g(\mathbf{a})$.

Onde:

$$g(\mathbf{a}) = \nabla F(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_n} \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{a}) = \nabla g(\mathbf{a}) = \nabla^2 F(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_n \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial a_n^2} \end{bmatrix}$$

Os elementos de $g(\mathbf{a})$ são as derivadas de primeira e os elementos de $G(\mathbf{a})$ as derivadas de segunda ordem da função objetiva. A matriz $G(\mathbf{a})$ é denominada de matriz Hessiana da função objetiva.

De (H6), se \mathbf{a}^* é um mínimo local, devemos ter:

$$g(\mathbf{a}^*) = 0 \quad e \quad F(\mathbf{a}^* + \delta \mathbf{a}^*) \geq F(\mathbf{a}^*)$$

Em outras palavras, as condições necessárias e suficientes para minimizar uma função de várias variáveis, são:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}^*) &= 0 \\ \delta \mathbf{a}^T \cdot G(\mathbf{a}^*) \cdot \delta \mathbf{a}^T &\geq 0 \end{aligned} \tag{H7}$$

Desta forma, resolver um problema de otimização irrestrita equivale a determinar a solução de um conjunto de equações não-lineares:

$$\nabla F(\mathbf{a}^*) = 0 \tag{H8}$$

Fazendo uso da condição: $\delta \mathbf{a}^T \cdot G \cdot \delta \mathbf{a}^T \geq 0$ (H9)

A solução de (H8) é um problema de minimização.

Os métodos para resolução de problemas de minimização irrestrita, para uma função de multivariáveis, são classificados em dois grupos: métodos analíticos e métodos diretos. Os métodos analíticos baseiam-se no conhecimento das derivadas da função objetiva. Os métodos diretos baseiam-se apenas na função objetiva, sendo portanto métodos de comparação de funções.

Em um método analítico iterativo, no início da iteração k , as variáveis são denotadas por \mathbf{a}_k . O incremento $\delta \mathbf{a}_k$ e o passo ótimo \mathbf{p}_k , são utilizados para estimar o novo ponto:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{p}_k \delta \mathbf{a}_k \quad (\text{H10})$$

Diferentes considerações na escolha de $\delta \mathbf{a}_k$, diferenciam os métodos analíticos de otimização (ZHOU, 1993).

2 Método dos Mínimos Quadrados Não-Linear

Se a função a qual se deseja obter uma solução aproximada, tem a forma:

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m f_i^2(\mathbf{a}) = \|f(\mathbf{a})\|^2 = f^T(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \quad (\text{H11})$$

o gradiente e a matriz Hessiana, da função tem uma estrutura especial,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{a}) &= \nabla F(\mathbf{a}) = 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \\ G(\mathbf{a}) &= \nabla g(\mathbf{a}) = 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) + 2 \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{H12})$$

Onde:

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial a_1} & \frac{\partial f_m}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_n} \end{bmatrix}, \text{ é a matriz Jacobiana de ordem } m \times n.$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{a}) \cdot K_i(\mathbf{a})$$

$$K_i(\mathbf{a}) = \nabla^2 f_i(\mathbf{a})$$

Como $F(\mathbf{a})$ está sendo minimizado no contexto dos mínimos quadrados, as componentes de $\nabla^2 f_i$ são desprezíveis e $G(\mathbf{a})$ pode ser aproximado por:

$$G(\mathbf{a}) \cong 2 \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \quad (\text{H13})$$

Gauss observou que se $f_i(\mathbf{a})$ são funções lineares de \mathbf{a} e $F(\mathbf{a})$ é quadrática, então a matriz Jacobiana é constante ($\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}$). Desta forma, sugeriu aproximar o gradiente no ponto $(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$ da seguinte forma:

$$\nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \cong 2 \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \quad (\text{H14})$$

A forma aproximada de $f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$ é obtida dos termos lineares da expansão de Taylor,

$$f(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \cong f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a} \quad (\text{H15})$$

Combinando as equações (H14) e (H15), obtemos uma estimativa do gradiente de $F(\mathbf{a})$ em $(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$,

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &\cong 2 \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot [f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}] \\ \nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) &\cong 2 \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) + \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}] \end{aligned} \quad (\text{H16})$$

Uma vez que temos assumido que as m linhas de $\mathbf{J}(\mathbf{a})$ são linearmente independentes, a matriz $\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})$ é não-singular e a matriz inversa $[\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})]^{-1}$ existe. Então, fazendo $\nabla F(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = 0$ em (H16), temos:

$$\delta\mathbf{a} = -[\mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})]^{-1} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) \quad (\text{H17})$$

Comparando (H17) com (H10), para $p_k = l$, ao final da iteração k , temos:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \delta\mathbf{a}_k$$

No método de Newton: $G_k(\mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{a}_k = -g_k(\mathbf{a})$

$$\text{Portanto, de (H12): } [\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + Q(\mathbf{a})] \cdot \delta\mathbf{a}_k = -\mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k \cdot f_k(\mathbf{a}) \quad (\text{H18})$$

Se $\|f_k(\mathbf{a})\|$ tende para zero a medida que \mathbf{a} se aproxima da solução, a matriz \mathbf{Q} também tende para zero. Consequentemente, o método dos mínimos quadrados é aplicável quando o termo de primeira ordem $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T$ de (H18) domina comparado ao termo de segunda ordem $\mathbf{Q}(\mathbf{a})$. Isto não se verifica quando os resíduos da solução são muito altos. Este caso, se constitui em uma restrição ao método. Uma modificação do método de Gauss-Newton, visando superar tal restrição, é o método de Levenberg-Marquardt, descrito a seguir.

2.1 O Método de Levenberg- Marquardt.

No método de Levenberg-Marquardt, a equação (H18) é reescrita da seguinte forma:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I}] \cdot \delta \mathbf{a}_k = -\mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k \cdot f_k(\mathbf{a}) \quad (\text{H19})$$

Onde, $\lambda_k \geq 0$ é um escalar e \mathbf{I} a matriz identidade de ordem n .

Para um valor suficientemente alto de λ_k , a matriz $[\mathbf{J}(\mathbf{a})_k \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I}]$ é positiva definida e assim $\delta \mathbf{a}_k$ está na direção descendente. Quando $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^*$, e $\lambda_k \rightarrow 0$, o método produz uma convergência assintótica da mesma forma que o método de Gauss-Newton.

O método de Levenberg-Marquardt, apresenta um ótimo desempenho, em casos práticos, na determinação de modelos não-lineares, fato que o tem tornado um padrão em rotinas de mínimos quadrados (PRESS et al, 1992).

Dado um conjunto de valores iniciais para os parâmetros do ajuste, vetor \mathbf{a} , segue-se o algoritmo descrito abaixo (PRESS et al, 1992):

- 1) Determina-se $\chi^2(\mathbf{a})$ na equação (H2) e assume-se inicialmente $\lambda = 0,001$;

2) Determina-se a matriz $[J(\mathbf{a})_k \cdot J^T(\mathbf{a})_k + \lambda_k \cdot \mathbf{I}]$ e o vetor $[-J^T(\mathbf{a})_k \cdot f_k(\mathbf{a})]$ e resolve-se o sistema sobredeterminado de equações lineares da equação (H19), determinando-se $\delta \mathbf{a}$ para o valor inicial de λ .

3) Calcula-se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a})$, para os valores iniciais dos parâmetros a_j (vetor \mathbf{a}).

4) Se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) \geq \chi^2(\mathbf{a})$, faz-se $\lambda = 10 \cdot \lambda$ na equação (H19).

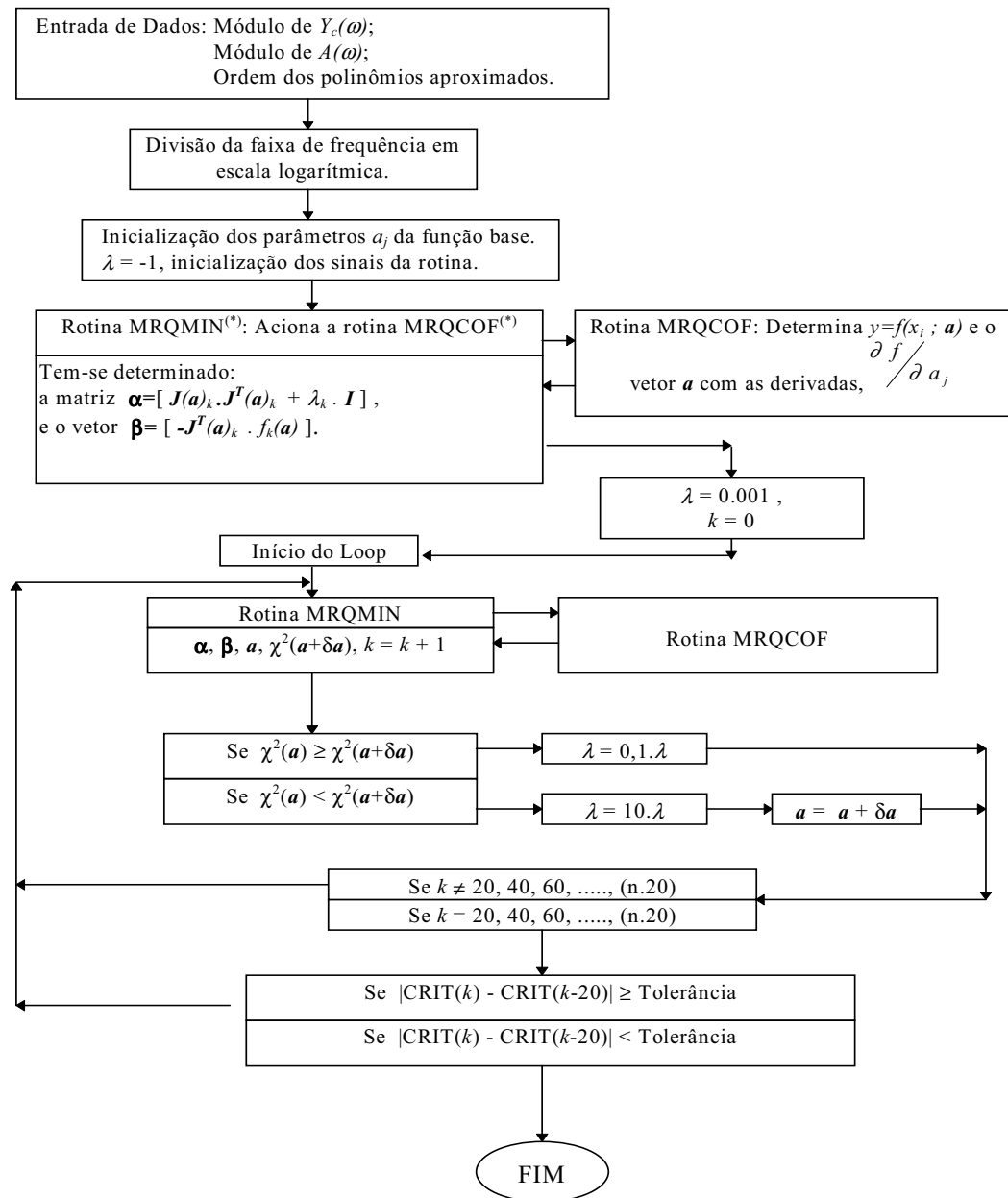
5) Se $\chi^2(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) < \chi^2(\mathbf{a})$, faz-se $\lambda = 0,1 \cdot \lambda$ na equação (H19), e atualiza-se a solução, $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}$.

Em qualquer das situações 4 e 5, armazena-se o valor de $\chi^2(\mathbf{a})$ em um vetor $CRIT(k)$, onde k é o número da iteração.

6) A cada 20 iterações, se $|CRIT(k) - CRIT(k-20)| \geq (\text{Tolerância})$, (que corresponde a $|\chi^2(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) - \chi^2(\mathbf{a})| \geq (\text{Tolerância})$ para $\delta \mathbf{a}$ após 20 iterações), retorna-se ao item 3;

7) Caso $|CRIT(k) - CRIT(k-20)| \geq (\text{Tolerância})$, finaliza-se o processo de ajuste.

O algoritmo implementado é melhor detalhado, na forma de diagrama de blocos, na Figura H1.



(*) As rotinas MRQMIN e MRQCOF foram obtidas da referência PRESS et al, 1992.

Figura H1 - Diagrama de blocos do algoritmo implementado - Método Não-Linear.