信号与系统课程笔记：Lecture 19-20

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 11 月 17 日（第十一周，周五）

1 复习

(1) LT 与 FT 的本质相同 $\quad f(t)e^{-\sigma t}U(t)$

(2) LT 是 FT 的拓展 $\quad \omega \to s = \sigma + j\omega$

(3) $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$，$t \geqslant 0$
$f(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s$，$t \geqslant 0$

2 拉普拉斯变换（Laplace Transfrom，LT）的性质

(1)（相同）线性：if $f_1(t) \rightleftharpoons F_1(s)$，$f_2(t) \rightleftharpoons F_2(s)$

$$\text{than } Af_1(t) + Bf_2(t) \rightleftharpoons AF_1(s) + BF_2(s)$$
$$f_1(t) : \sigma > \sigma_1，\ f_2(t) : \sigma > \sigma_2，\text{则 } \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

(2)（相同）尺度变换：if $f(t) \rightleftharpoons F(s)$

$$\text{than } f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})，\ \sigma > \alpha\sigma_0$$

(3)（相似）时移：$f(t - t_0) \rightleftharpoons e^{-st_0}F(s)$，$t_0 \geqslant 0$

(4)（相同）复频移：$f(t)e^{st_0} \rightleftharpoons F(s - s_0)$，$\sigma \geqslant \sigma_0$（原来的）$+\sigma_0$（对应 s_0）

(5) ★**（相似）时域微分：**$f'(t) \rightleftharpoons sF(s) - f(0^-)$

证明：$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \cdot e^{-st}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{+\infty}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t) \cdot e^{-st}] + sf(t)e^{-st}\}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t) \cdot e^{-st}]\mathrm{d}t + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty} + sF(s) \\
&= 0 - f(0^-) + sF(s) \\
&= sF(s) - f(0^-)
\end{aligned}$$

扩展：求 $f''(t)$

令 $g(t) = f'(t)$，则求 $g'(t)$ 的 LT

$g'(t) = sG(s) - f'(0^-)$，其中 $G(s) = \mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^-)$

因此，$f''(t) = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$

总结：$f^n(t) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - sf^{n-2}(0^-) - f^{n-1}(0^-)$

(6) 时域积分：$\int_{0^-}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \rightleftharpoons \frac{1}{s}F(s)$

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \rightleftharpoons \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0^-)$

(7) s 域微分：$(-t)^nf(t) \rightleftharpoons \frac{\mathrm{d}^nF(s)}{\mathrm{d}s^n}$

(8) s 域积分：$\frac{f(t)}{t} \rightleftharpoons \int_{s}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

(9)（相同）卷积：$f_1(t) * f_2(t) \rightleftharpoons F_1(s)F_2(t)$，$\sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

注意：$[f_1(t)U(t)] * [f_2(t)U(t)]$ 即 $f_1(t), f_2(t)$ 为因果信号。

(10) 对称性：没有这个性质！

(11) 初值，终值定理：$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(+\infty)$，$\lim_{s\to +\infty} sF(s) = f(0^+)$

证明：
$$
\begin{aligned}
f'(t) &= sF(s) - f(0^-) \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0^-}^{0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{s\to+\infty} f(0^+) - f(0^-) + 0 - 0 \\
&= f(0^+) - f(0^-)
\end{aligned}
$$

因此 $sF(s) - f(0^-) = f(0^+) - f(0^-)$

则 $sF(s) = f(0^+)$，$(s \to +\infty)$

(12) Bonus (1)：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = F(0)$

(13) Bonus (2)：$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}(x)\mathrm{d}x = 1$，$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sinc}(x)|\mathrm{d}x = +\infty$

3 例题

(1) $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0$，$y(0^-) = 2$，$y'(0^-) = -5$，求解系统。

第一步：LT

$$
\begin{aligned}
s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5[sY(s) - y(0^-)] + 4Y(s) = 0 \\
(s^2 + 5s + 4)Y(s) - (s+5)y(0^-) - y'(0^-) = 0 \\
(s^2 + 5s + 4)Y(s) - (2s+5) = 0 \\
Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+4}
\end{aligned}
$$

第二步：Inverse LT

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2s+5}{s^2+5s+4}\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{k_1\frac{1}{s+1}+k_2\frac{1}{s+4}\} \\
&= k_1e^{-t}+k_2e^{-4t}
\end{aligned}
$$

(2) $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=U(t)$，$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=-5$，求解系统。

第一步：LT

$$
\begin{aligned}
s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+5[sY(s)-y(0^-)]+4Y(s) &= \frac{1}{s} \\
(s^2+5s+4)Y(s)-(2s+5) &= \frac{1}{s} \\
(s^3+5s^2+4s)Y(s)-(2s^2+5s) &= 1 \\
Y(s) &= \frac{2s^2+5s+1}{s^3+5s^2+4s}
\end{aligned}
$$

第二步：Inverse LT

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2s^2+5s+1}{s^3+5s^2+4s}\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{s+p_i}\} \\
&= \sum_{i=1}^{3}q_ie^{-p_it}
\end{aligned}
$$

(3) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+6f(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=-1$，$f(t)=5\cos(t)U(t)$，求完全响应。

第一步：LT

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2y(0^-)+y'(0^-)+sy(0^-)}{s^2+5s+6}+\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s) \\
&= \frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+2}+\frac{k_4}{s+1}
\end{aligned}
$$

其中：第一项 $\frac{s^2y(0^-)+y'(0^-)+sy(0^-)}{s^2+5s+6}$ 为“零输入响应”项；

第二项 $\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)$ 为“零状态响应”项；

第一项和第二项分母 s^2+5s+6 为“系统”；

第一项分子 $s^2y(0^-)+y'(0^-)+sy(0^-)$ 为“初始条件”；

第二项分子 $2(s+3)F(s)$ 为“激励”。

第二步：Inverse LT

$\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=[k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t}+k_3e^{-2t}+k_4\cos(t-\varphi_4)]U(t)$

其中：前两项 $k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t}$ 为“零输入”；

后两项 $k_3e^{-2t}+k_4\cos(t-\varphi_4)$ 为“零状态”。

或者：前三项 $k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t}+k_3e^{-2t}$ 为“暂态分量”；

最后一项 $k_4\cos(t-\varphi_4)$ 为“稳态分量”。