信号与系统课程笔记：Lecture 18-19

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 11 月 15 日（第十一周，周三）

1 复习

(1) Shannon-Nyquist 采样定理：$f_s > 2B_\omega$

(2) 频谱混叠："Aliasing"

(3) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[t_0]\mathrm{Sa}[\frac{\omega_s}{2}(t-t_0)]$，$t_0 = nT_s$　　"若干 Sa(·) 信号叠加"

2 回顾傅里叶变换（Fourier Transfrom，FT）

FT 存在的条件（充分条件）：Dirichlet 条件

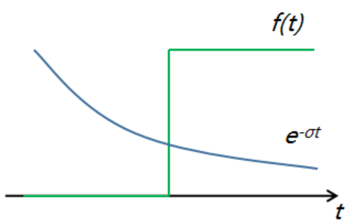
(1) 绝对可积：$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$

(2) 在任意区间 $[a,b]$ 内，$f(t)$ 只有有限多个"第一类间断点"

(3) 在任意区间 $[a,b]$ 内，$f(t)$ 只有有限多个极大值/极小值

3 拉普拉斯变换（Laplace Transfrom，LT）

3.1 LT 定义



思路：$f(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot U(t)$ 满足 Dirichlet 条件后，可以对其进行 FT。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\sigma t}U(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{s=\sigma+j\omega} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

综上，LT 定义：$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ “单边 LT”（无特殊说明，均默认为单边 LT）

3.2 逆变换定义

$f(t)e^{-\sigma t}U(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(s)e^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(s)e^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega\cdot e^{\sigma t}\cdot U(t)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(s)e^{(\sigma+j\omega)t}\mathrm{d}\omega\cdot U(t)\\
&\xlongequal{s=\sigma+j\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(s)e^{st}\mathrm{d}\omega\cdot U(t)\\
&\xlongequal{\mathrm{d}s=j\mathrm{d}\omega}\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathbb{R}}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\cdot U(t)\\
&\xlongequal{\omega\in(-\infty,+\infty)\to s\in(\sigma-j\infty,\sigma+j\infty)}\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

综上，逆变换定义：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$，$t\geqslant 0$

3.3 说明

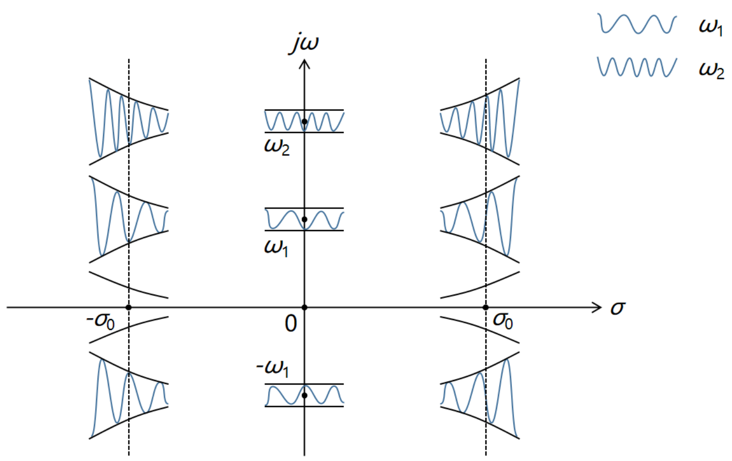
“s 域” “s domain”

$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$ $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$

4 LT vs FT

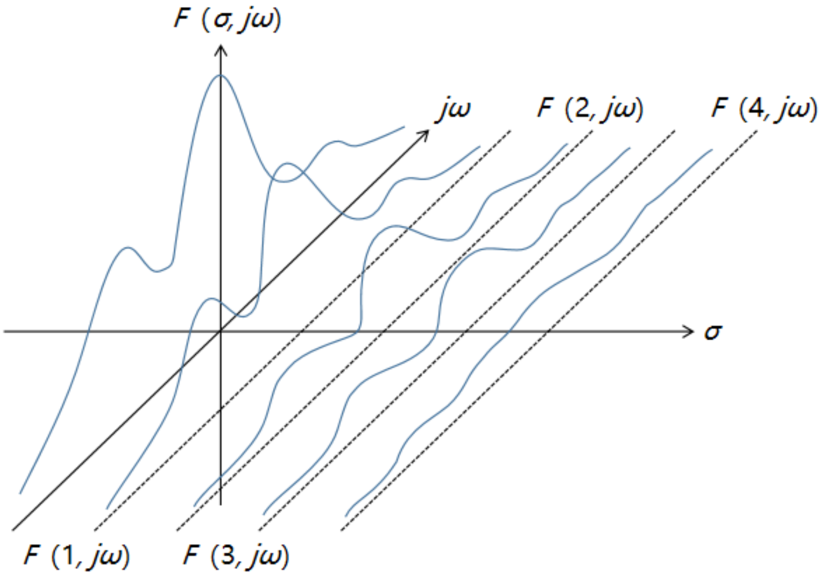
相同：其本质依然是把信号分解为一系列正交函数集。

正交基： $e^{-st}=e^{-\sigma t}\cdot e^{-j\omega t}$ vs $e^{-j\omega t}$ “$\approx$” $\int_{\mathbb{R}}e^{j\omega_1 t}e^{-j\omega_2 t}\mathrm{d}t=0$



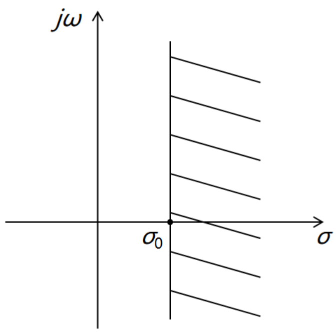
LT 本质是 FT 的拓展，因此，两者应该性质相似、相通。

5　$F(\sigma, j\omega)$ 示意图



6　收敛域

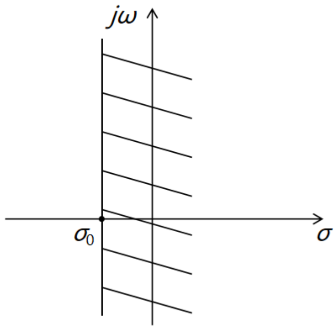
例：$f(t) = e^{2t} \cdot e^{-\sigma t} \cdot U(t)$　　只有当 $\sigma > 2$ 时，LT“才有意义”。
$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$，所有满足上述条件的 $\sigma > \sigma_0$ 称之为收敛域。



(1) 收敛域一定是向“右边”扩展。

(2) 收敛域边界是垂直于 σ 轴的直线。

7 FT 与 LT 之间的联系



(1) 当 $\sigma_0 < 0$ 时，$F(\omega) = F(s)\big|_{\sigma=0}$

(2) 当 $\sigma_0 > 0$ 时，$F(\omega)$ 不存在

(3) 当 $\sigma_0 = 0$ 时，$F(\omega) = \lim_{\sigma\to 0} F(s) \equiv$ 广义 FT

综上，只有当 $\sigma > \sigma_0$ 时，$F(s)$ 才有数值解。

8 LT 求解的例题

(1) $f(t) = e^{-\alpha t}$，$\alpha > 0$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s+\alpha} \end{aligned}$$

因此，$e^{-\alpha t} \overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{s+\alpha}$

$F(\omega) = \frac{1}{s+\alpha}\big|_{\alpha=0} = \frac{1}{\sigma+j\omega}$

(2) $f(t) = U(t)$

$F(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma + j\omega} \\ &= \lim_{\sigma\to 0} \frac{\sigma - j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \\ &= \lim_{\sigma\to 0} \frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2} - \lim_{\sigma\to 0} \frac{j\omega}{\sigma^2+\omega^2} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

9 几种常见的 LT

时域	s 域
$\delta(t)$	1
$U(t)$	$\frac{1}{s}$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t-nT_s)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f_0(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-sT}}F_0(s)$
$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT_s)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$