信号与系统课程笔记：Lecture 25-26

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 12 月 08 日（第十四周，周五）

1 复习

(1) 离散时间傅里叶变换（Discrete Time Fourier Transform，DTFT）

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \int_{\mathbb{R}} \delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{-jnT_s\omega} \\
&\xlongequal{k=nT_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]e^{-jk(T_s\omega)}
\end{aligned}$$

(2) 从 DTFT 推导 Z 变换

$$\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{-jT_s\omega n}e^{-\sigma T_s n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k](e^{jT_s\omega}e^{\sigma T_s})^{-k} \\
&\xlongequal{z=e^{jT_s\omega+\sigma T_s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}
\end{aligned}$$

(3) 从 S 域推导 Z 变换

$$\begin{aligned}
F(z) &= f(nT_s)\mathscr{L}\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{-nT_s\cdot s} \\
&\xlongequal{k=nT_s,z=e^{sT_s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}
\end{aligned}$$

2 不同域/变换之间的联系

(1) $z = e^{jT_s\omega+\sigma T_s}$

$z=e^{sT_s} \quad s=j\omega+\sigma$

(2) $\omega\cdot T_s=\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega_s}=2\pi\cdot\frac{\omega}{\omega_s}(\frac{\mathrm{rad/s}}{\mathrm{rad/s}})$ 无单位　“normalized frequency”归一化频率

$F(\frac{\omega}{\omega_s})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]e^{-jk(2\pi\frac{\omega}{\omega_s})}$

令 $\widetilde{\omega}=\frac{\omega}{\omega_s}\cdot 2\pi$，则 $F(\widetilde{\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]e^{-jk\widetilde{\omega}}$

(3) DTFT 与 Z 变换：$F(z)\big|_{z=e^{-jk\widetilde{\omega}}\text{或}\sigma T_s=1} \quad\rightarrow\quad$ DTFT

(4) S 变换与 Z 变换：$z=e^{sT_s} \qquad F(s)=F(z)\big|_{z\text{换为}e^{sT_s}}$

(5) S 域和 Z 域：$s=j\omega+\sigma \qquad z=e^{sT_s}=e^{\sigma T_s}\cdot e^{j\omega T_s}=Ae^{j\theta}$

① Z 域是 S 域的映射。

② Z 域也是复数域。

③ S 域 $\rightarrow$ Z 域是多对一的映射。

3 收敛域

(1) CTFT：Dirichlet 条件：$\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$（充分条件）

$|F(\omega)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(t)e^{-j\omega t}|\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$

(2) S 域：$\lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-\sigma t}=0$

$|F(s)|=|\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t|\leqslant\int_{\mathbb{R}}|f(t)|e^{-\sigma t}\mathrm{d}t<+\infty$

$\int_{\mathbb{R}}|f(t)|e^{-\sigma t}\mathrm{d}t\leqslant|\max f(t)|\int_{\mathbb{R}}e^{-\sigma t}\mathrm{d}t=|\max f(t)|\frac{1}{\sigma}$

只要 $f(t)e^{-\sigma t}\to 0$，当 $t\to+\infty$ 时

(3) Z 域：$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f[k]z^{-k}|<+\infty$

$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]z^{-k}$ 有解

$|F(z)|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f[k]z^{-k}|<+\infty$，则有解

需要数列 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f[k]z^{-k}|=+\infty$，但 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f[k]z^{-k}$ 有解

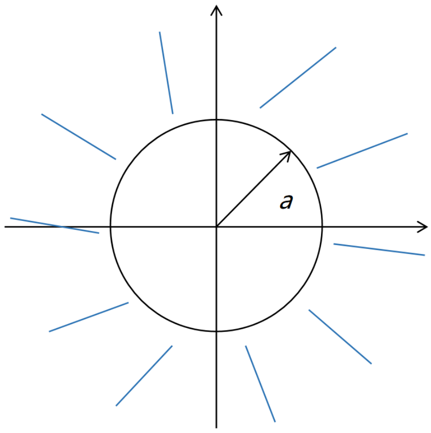
$f[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k}(-1)^k=-\ln 2$

$f[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\frac{1}{k}(-1)^k|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}$，$k\to+\infty$

例题：$f_1[k]=a^kU[k]$

解：$\sum_{k=0}^{+\infty}a^kz^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{a}{z})^k=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a}$

$|\frac{a}{z}|<1 \quad\Longrightarrow\quad |a|<|z|$ 或 $|z|>|a|$



4 常用 Z 变换

(1) $\delta[k] \rightleftharpoons 1$

(2) $U[k] \rightleftharpoons \frac{z}{z-1}$

(3) $a^k U[k] \rightleftharpoons \frac{z}{z-a}$

(4) $e^{jbk} U[k] \rightleftharpoons \frac{z}{z-e^{jb}}$

5 Z 变换的性质

(1) linear：if $f_1[k] \rightleftharpoons F_1(z)$，$f_2[k] \rightleftharpoons F_2(z)$

$$\text{than } af_1[k] + bf_2[k] \rightleftharpoons aF_1(z) + bF_2(z)$$

(2) 反转：if $f[k] \rightleftharpoons F(z)$

than $f[-k] \rightleftharpoons F(z^{-1})$

(3) 尺度变换：$a^k f[k] \rightleftharpoons F(\frac{z}{a})$

(4) 微分：$kf[k] \rightleftharpoons (-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$

$k^2 f[k] \rightleftharpoons (-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)]$

$\cdots$

(5) 卷积：$f_1[k] * f_2[k] \rightleftharpoons F_1(z) \cdot F_2[z]$

(6) ★ 时移：$f(t \pm t_0) \overset{\mathscr{F}}{\rightleftharpoons} F(\omega)e^{\pm j\omega t_0}$

$f(t-t_0)U(t-t_0) \overset{\mathscr{L}}{\rightleftharpoons} F(s)e^{-st_0}$（只考虑因果信号）

① 如果只考虑因果信号

$f[k-m] \cdot U[k-m] \overset{\mathscr{Z}}{\rightleftharpoons} z^{-m}F(z) \quad k, m \in \mathbb{Z}^+$

② 对于“一般”信号的单边 Z 变换