

# 信号与系统课程笔记：Lecture 14

授课教师：秦雨潇

笔记记录：李梦薇

2023 年 11 月 03 日（第九周，周五）

## 1 复习

$$(1) f(t) = f(t) * \delta(t)$$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$(2) \delta(t) * h(t) = h(t)$$

$$1 \cdot H(\omega) = H(\omega) \quad ?$$

$$(3) f(t) * h(t) = y(t)$$

$$F(\omega) \cdot H(\omega) = Y(\omega)$$

## 2 能量谱和功率谱（Parseval's 定理）

$$(1) \text{ 能量谱: } G(\omega) = |F(\omega)|^2$$

注意：复数是共轭！

$$(2) \text{ 功率谱: } D(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{G(\omega)}{T}$$

## 3 周期信号的傅里叶变换

### 3.1 傅里叶级数（FS）

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n] e^{jn\Omega t}$$

### 3.2 傅里叶变换（FT）

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{jn\omega} d\omega$$

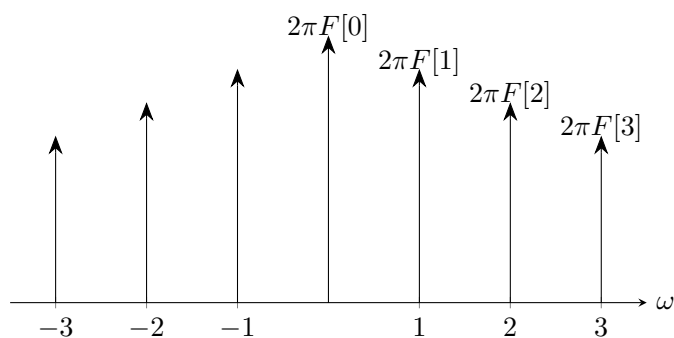
### 3.3 推导过程

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n] e^{jn\Omega t}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \mathcal{F}\{f_T(t)\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n]e^{jn\Omega t}\right\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n]\mathcal{F}\{e^{jn\Omega t}\} \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n]\delta(\omega - n\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[n]\delta(\omega - n\Omega) &= 2\pi F[0]\delta(\omega - 0\Omega) + \\
&\quad 2\pi F[1]\delta(\omega - 1\Omega) + \\
&\quad 2\pi F[2]\delta(\omega - 2\Omega) + \dots
\end{aligned}$$

频谱 ( $F_n/F[n] \rightarrow F(\omega)$ ) :



## 4 常见信号的 FT

$$(1) 1 \Rightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$(2) e^{j\omega_0 t} \Rightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$(3) \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

## 5 扩展

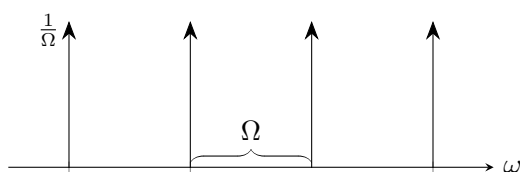
周期信号  $\Leftrightarrow$  离散信号

$T$  (周期)  $\times \Delta S$  (采样频率)  $= 2\pi$  (常数)

(CTFT: 连续非周期; DTFT: 离散非周期; DFT: 离散周期; CTFS: 时域连续周期)

(1) 周期性的  $\delta(t)$ , 周期为  $T$ 。  $\rightarrow$  “离散”

$$\begin{aligned}
 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\Omega) \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}, T \text{ 已知} \\
 = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) \\
 = \frac{1}{\Omega} \delta_{\Omega}(\omega)
 \end{aligned}$$



(2) 可以理解为直流信号的采样, 例如: 离散信号。  $\rightarrow$  “周期”

$$1 \rightleftharpoons 2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - n\Omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega)$$

(3)  $\cos(\frac{2\pi}{T}t)$  的采样, 离散信号。  $\rightarrow$  “周期”