信号与系统课程笔记：Lecture 21：H(s)

授课教师：秦雨潇

笔记记录：曹时成

2023 年 11 月 22 日（第十二周，周三）

1 复习

我们的系统可以（抽象）表达为：

例：$y''(t) + ay'(t) + by(t) = cf(t) \equiv f(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

解题“套路”：$s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + a(sY(s) - y(0_-)) + bY(s) = cF(s)$

化简合并：$(s^2 + as + b)Y(s) - [(s + a)y(0_-) + y'(0_-)] = cF(s)$

得：$Y(s) = \frac{(s+a)y(0_-)+y'(0_-)}{s^2+as+b} + \frac{c}{s^2+as+b}F(s)$

$\Longrightarrow y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

2 H(s)

2.1 H(s) 是什么？

H(s)：系统函数/转移函数（Transfer Function）

对于：$H(s) \longleftrightarrow H(w) \longleftrightarrow h(t)$

H(s): s 域响应；

H(w): 频域响应；

h(t): 脉冲响应函数（IRF）。

2.2 H(s)$\longrightarrow$ 如何求解？从“工程角度”求解逆变换

从 H(s) 求解 h（t）：

$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$

（1）当 m<n 时：

$H(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n}$

于是 p_i 的值已知，求解 k_i：

情况 1，分母无重根的情况下求解 k_i：

$H(s)(s-p_i)\mid_{s=p_i}=k_i$

情况 2，分母有重根的情况下求解 k_i：

例：$H(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^3}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_{13}}{(s-p_1)}+\frac{k_2}{(s-p_2)}\equiv\frac{\text{略}}{(s-p_1)^3(s-p_2)}$

于是：

$H(s)(s-p_i)^3\mid_{s=p_1}=k_{11}$

$\frac{d[H(s)(s-p_i)^3]}{ds}\mid_{s=p_1}=k_{12}$

$\vdots$

（2）当 m>n 时：

H(s) 化简为 a_0+（m<n 的部分）

例如：$H(s)=\frac{s+3}{s+2}=1+\frac{1}{s+2}$

例题 1：$H(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}=\frac{k_{11}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{13}}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+1)}$

解：

$k_{11}=H(s)(s-p_1)^3\mid_{s=-1}=(\frac{s-2}{s})\mid_{s=-1}=3$

$k_{12}=(\frac{s-2}{s})'\mid_{s=-1}=2$

$k_{13}=(\frac{s-2}{s})''\mid_{s=-1}=4$

$k_2=H(s)(s-p_2)\mid_{s=0}=(\frac{s-2}{(s+1)^3})\mid_{s=0}=-2$

于是：$h(t)=[(\frac{3}{2}t^2+2t+4)e^{-t}-2]u(t)$

作业：书上例 5-8 至例 5-15

2.3 如何理解 H(s)？$\equiv$ 零极图

H(s) 可以写成如下形式：

$H(s)=\frac{k(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

零极图：p_i 是极点，z_i 是零点

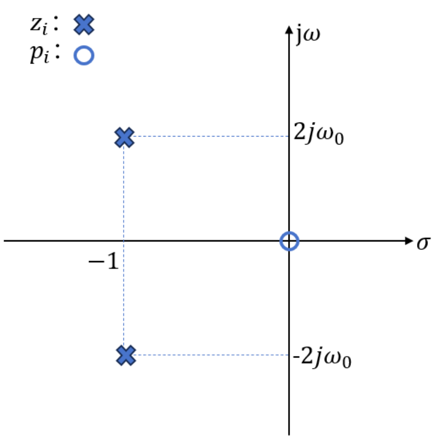


图 1: 零极图

零极图的作用以及和 H(s) 的关系？

（1）只看零极图，就可以写出 H(s)

$H(s) = \frac{ks}{(s-(-1+2j))(s-(-1-2j))} = \frac{ks}{(s^2+2s+5)}$

其中 H(s) 中的 k 作为一个常数项，在零极图中并不能体现出来。

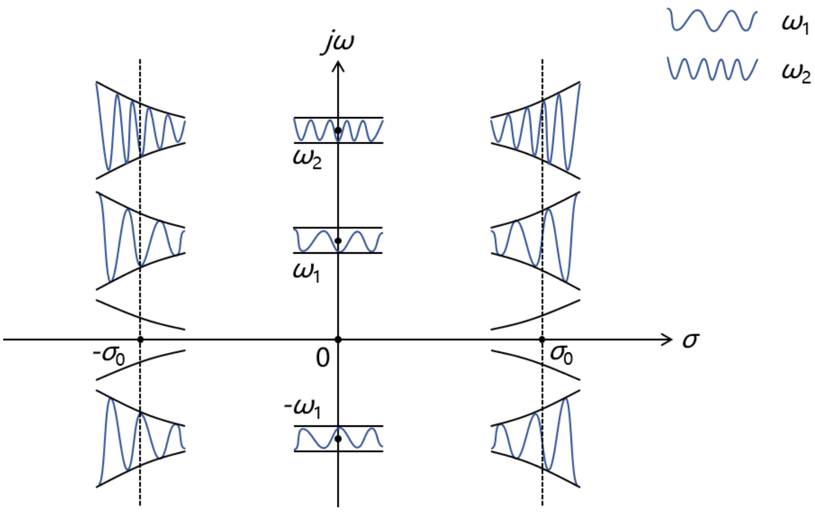
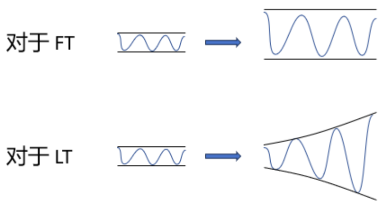


图 2: 零极图上的谐波函数

当 $\delta = 0$ 时，拉普拉斯变换为傅里叶变换



（2）零极图可以直接看出系统的“性质”（“频率响应”）

（3）收敛域

$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-\delta t} = 0 \Longleftrightarrow$ 系统稳定

收敛域：$\delta_c < 0$,$F(w) = F(s)|_{\delta=0}$

系统稳定 $\Longleftrightarrow$ 极点都在 jw 轴以左。