# 信号与系统课程笔记：Lecture 8

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 10 月 18 日（第七周，周三）

## 1 复习

### 1.1 矢量的分解

我们希望，对于任意矢量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，可以分解为若干“子矢量” $\vec{v_i}$，若“子矢量”满足:

(1) $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(2) $span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

则 $\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{v}_i$，其中 $C_i = \frac{\langle \vec{A}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}$（$C_i$ 是 $\vec{A}$ 在 $\vec{v}_i$ 上的投影）

那么，这组“子矢量”被称为一组“正交基”。

### 1.2 信号的分解

我们希望，对于任意信号 $f(t)$，可以分解为若干“子信号” $v_i(t)$ 且 $t \in [a, b]$，若“子信号”满足：

(1) $< v_i(t), v_j(t) >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

(2) 如果在 $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t), \dots\}$ 之外，不存在任何 $g(t) \neq 0$，满足 $\langle v_i(t), g(t) \rangle = 0$，则称 $\{v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t), \dots\}$ 为完备集。

则 $f(t) = \sum C_i v_i(t)$，其中 $C_i = \frac{\langle f(t), v_i(t) \rangle}{\|v_i(t)\|^2}$

那么，这组“子信号”被称为一组“正交完备集”。

### 1.3 以下特殊信号是否为正交完备集？

(1) $\delta$ 函数：$\delta(t)/\delta[k]$ 是正交完备集

(2) 阶跃函数：$U(t)/U[k]$ 不正交

(3) 门函数：$G(t)$ 正交不完备

(4) 随机分布函数：$N(\mu, \delta)$：$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 是正交完备集

# 2 傅里叶级数（Fourier Series，FS）

## 2.1 $\cos(x)$ 和 $\sin(x)$

$$\begin{cases} \cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(kx) \\ \sin(x), \sin(2x), \ldots, \sin(kx) \end{cases} \text{是否正交？是否完备？}$$

(1) $\cos(kx)$，$\cos(lx)$（$k, l \in \mathbb{Z}^+$，$k, l = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$）在 $[0, 2\pi]$ 是否正交？

证明：$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\mathrm{dx} =$

$$\begin{cases}
k = l = 0 \quad \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{dx} = x\Big|_0^{2\pi} \\
\qquad\qquad\qquad = 2\pi \\
k = l \neq 0 \quad \displaystyle\int_0^{2\pi} [\cos(kx)]^2 \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1 + \cos(2kx)]\mathrm{dx} \\
\qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{2}[\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{dx} + \int_0^{2\pi} \cos(2kx)\mathrm{dx}] \\
\qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{2}(2\pi + \dfrac{2}{2k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi}) \\
\qquad\qquad\qquad = \pi \\
k \neq l \quad \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}[\int_0^{2\pi} \cos(k+l)x + \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x]\mathrm{dx} \\
\qquad\qquad\qquad = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{k+1}\sin(k+l)x\Big|_0^{2\pi} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{k-1}\sin(k-l)x\Big|_0^{2\pi} \\
\qquad\qquad\qquad = 0
\end{cases}$$

因此，$\cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx), \ldots$ 在 $[0, 2\pi]$ 内正交。

**Question:**

① $\cos(kx) \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ 是否正交？(已证明)

② $\sin(kx) \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ 是否正交？

③ $\cos(kx) \quad \sin(lx) \quad k, l \in \mathbb{Z}$ 是否正交？

(2) $\cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx), \ldots$ 在 $[0, 2\pi]$ 内完备（详见书籍等证明资料）。

## 2.2 FS 的不同形式

$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \sin(kt) \quad k \in \mathbb{Z}, k = [0, 1, 2, \ldots]$
其中，$a_k = \frac{\langle f(t), \cos(kt)\rangle}{\langle \cos(kt), \cos(kt)\rangle} \quad b_k = \frac{\langle f(t), \sin(kt)\rangle}{\langle \sin(kt), \sin(kt)\rangle} \quad t \in [0, 2\pi]$

(1)“三角形式”：

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\to t \in [-\infty, +\infty] \quad f(t) = f(t \pm 2k\pi)$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(\frac{2\pi}{T}kt) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(\frac{2\pi}{T}kt) \quad t \in [a, b]$

（隐含：$f(t) = f(t \pm kT) \quad T \in \mathbb{R}$）

(2) "余弦形式"：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[a_k \cos(\frac{2\pi}{T}kt) + b_k \sin(\frac{2\pi}{T}kt)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[A_k \cos(\psi)\cos(\frac{2\pi}{T}kt) + A_k \sin(\psi)\sin(\frac{2\pi}{T}kt)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[A_k \cos(\frac{2\pi}{T}kt - \psi)]
\end{aligned}
$$

其中，$A_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2} \quad \psi = \arctan(\frac{b_k}{a_k})$