信号与系统课程笔记：Lecture 24：Z 变换

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 12 月 1 日（第十三周，周五）

1 遗留问题：劳斯准则

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

判断该函数是否有负根？

有一个 n+1 行列的矩阵形式：

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{array} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

其中：

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{bmatrix}$$

$\cdots$ 以此类推，求出矩阵最终形式.

如果矩阵第一列产生符号变化则有负根，对应系统不稳定.

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1
\end{array}
\begin{bmatrix}
\boxed{a_n} & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
$$

2 Z 变换

系统	连续	离散
时域	$f(t) * h(t)$	$f[k] * h[k], k \in \mathbb{Z}$
频域	$F(w)H(w)$	DTFT
S 域	$F(s)H(s)$	Z 变换：$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}$

信号的连续/离散域关系:

$$
\begin{aligned}
F[k] &= \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - nT_s), T_s = \frac{2\pi}{\Omega} \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s), n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

2.1 Discrete Time Fourier Transform

连续信号 FT：$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-jwt}\, dt$

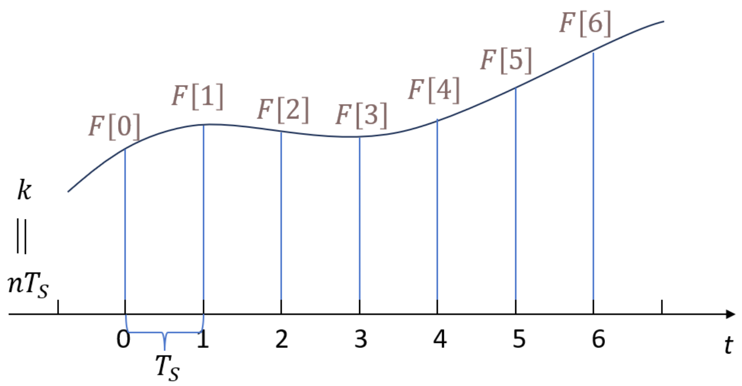
DTFT：$F(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f[k]e^{-jwk}, k \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{R}$

DTFT 变换后也是连续频谱！

$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-jwt}\, dt$ （连续 $\longrightarrow$ 离散）

$\int_{\mathbb{R}} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)e^{-jwt}\, dt$

$= \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s) \int_{\mathbb{R}} \delta(t - nT_s)e^{-jwt}\, dt$



$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{-jnT_s w}$

令 $k = nT_s$

$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[k]e^{-jw}$

2.2 从 DTFT 推导 Z 变换

$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{-j(nT_s)w}$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)re^{(jw)-nT_s}$

令 $z = re^{(jw)}$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)z^{-nT_s}$

令 $k = nT_s$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}$

2.3 从 S 域推导 Z 变换

$f(t) \longleftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s), n \in \mathbb{Z}$

进行拉普拉斯变换：

$F(s) \longleftrightarrow f(nT_s)\mathscr{L}\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)\}$

令 $e^s = z$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)e^{s(nT_s)}$

令 $k = nT_s$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}$