信号与系统课程笔记：Lecture 16
理想低通滤波器（Ideal Lowpass Filter）

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 11 月 8 日（第十周，周三）

1 复习

$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ 输出的频率和振幅取决于输入的 ω_0

根据 LTI 系统:

$f(t) * h(t) = y(t) \Leftarrow \delta(t) * h(t) = h(t)$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$y(t) = \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)H(\omega)\}$

结论：$H(\omega)$ 反应了 $y(t)$ 输出的幅度和初始相位的变化。

2 $H(\omega)$

$H(\omega)$: 频率响应函数（Frequency Response Function/转移函数（Transformation Function）

$h(t)$：“冲激响应”（Impulse Response Function, IRF）

Question:How to get $H(\omega)$?

(1) $H(\omega) = \mathscr{F}^{-1}\{h(t)\}$

(2) $F(\omega)H(\omega) = Y(\omega) \implies H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)}$

(3) 定义：$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$

$|H(\omega)|$ 为频幅响应，$e^{j\angle H(\omega)}$ 为相频响应。

2.1 例 1: ODE $\rightarrow$ linear

题：$y'(t) + 2y(t) = f(t)$，$f(t) = e^{-t}u(t)$，求 $y(t)$

解：根据时域微分性质 $f^n(t) = (jw)^n F(w)$

$(jw + 2)Y(w) = f(w)$

$H(w) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = (jw+2)$

$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) = \frac{1}{jw+2}\frac{1}{jw+1} = \frac{1}{jw+1} - \frac{1}{jw+2}$

故：$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

2.2 例 2: PDE →ODE → linear

题：傅里叶热传导方程求解 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

解：

令：$\mathscr{F}\{u(x,t)\} = \hat{u}(w,t)$

根据时域微分性质有：$\alpha^2 \frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2} = (jw)^2\hat{u}(w,t) = -\alpha^2 w^2 \hat{u}(w,t)$

此外：$\mathscr{F}\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t)$

令：$y(t) = \hat{u}(w,t)\hat{u}(w,0)$ 其中：$\hat{u}(w,t) = e^{-\alpha^2 w^2 t}\hat{u}(w,0)$

有：$y'(t) = -\alpha^2 w^2 y(t)$

$y(t) = e^{-\alpha^2 w^2 t}$

$y(t) = \hat{u}(w,t) = \mathscr{F}\{u(x,t)\} = e^{-\alpha^2 w^2 t}$ 是正态分布函数

由于正态分布函数的傅里叶变换也是正态分布函数且 $\hat{u}(w,t) = e^{-\alpha^2 w^2 t}\hat{u}(w,0)$

故：$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{y(t)\} * u(x,0)$

3 无失真传输

3.1 无失真系统

定义：输入和输出相比，只有幅度大小和出现时间的先后不同这两种“变化”，而没有波形的变化。

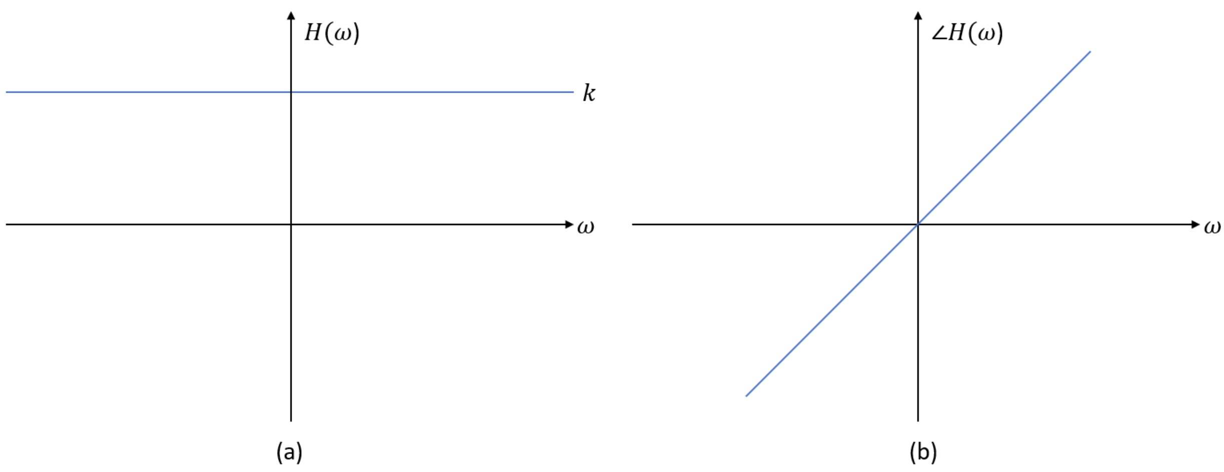

图 1: 无失真传输系统在频域的表示。（a）幅频；（b）相频。

数学表示：

$f(t) \longrightarrow kf(t-t_d)$, 根据时移性质有：

$F(w) \longrightarrow kF(w)e^{-jwt_d}$

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = ke^{-jwt_d} \equiv$ 无失真传输系统

结论 1：无失真系统在物理层面不存在

3.2 理想低通滤波器（Ideal Lowpass Filter （LPF）

无失真系统 $\xrightarrow{\text{退而求其次}}$ Ideal LPF

定义：在“有限带宽”$[-w_c, w_c]$ 范围内，幅频是常数，相频是线性即可。w_c 为截止频率（cut-off frequency），一般 w_c 的值为信号第一次衰减为 0 时对应的频率或者信号衰减为 3dB 时对应的频率。

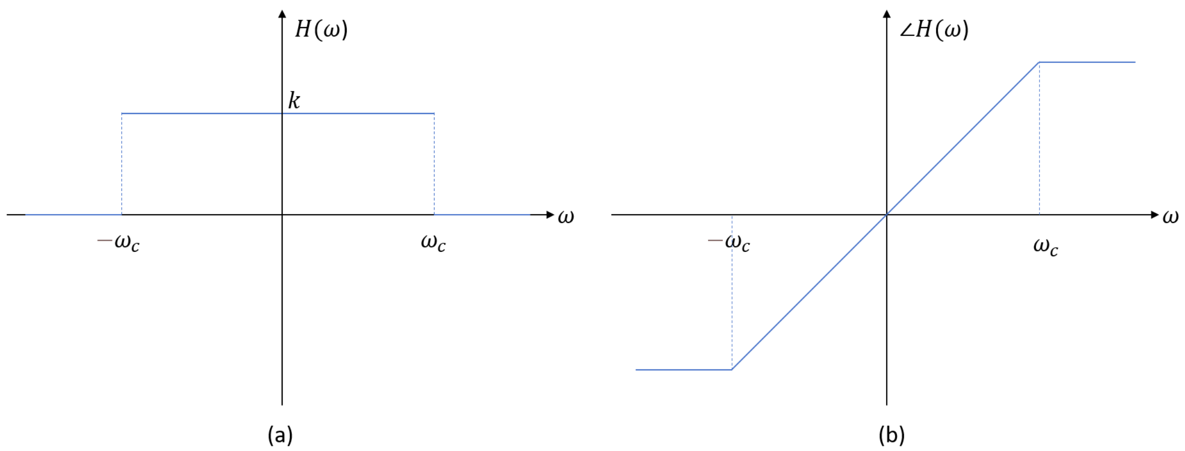

图 2: 理想低通滤波器在频域的表示。（a）幅频；（b）相频。

结论 2：Ideal LPF 也不存在

3.3 例题

对于一个信号 $f(t)$ 通过下图所示的 Ideal LPF，信号是否失真？

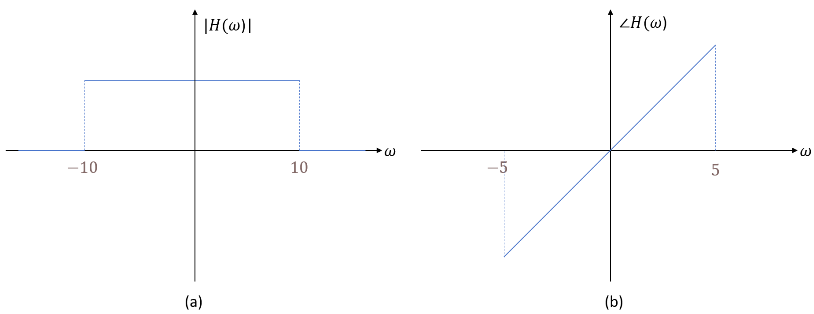

图 3: 一个理想低通滤波器在频域的表示。（a）幅频；（b）相频。

（1）$f(t) = cost + cos8t$ 失真

（2）$f(t) = sin2t + sin4t$ 无失真

（3）$f(t) = sin2tsin4t$ 失真

（4）$f(t) = cos^2 4t \Rightarrow 1 + 2cos8t$ 失真

3.4 卷积只能算零状态响应

对于 $H(\omega)F(\omega) = Y(\omega) \Leftrightarrow f(t) * h(t) = y(t)$ 来说，卷积算的是零状态响应。