题目 1

证明： 令 $x=at-b, a\neq 0$，则有 $t=\frac{x}{a}+\frac{b}{a}, \mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$，分为两种情况讨论：

（1）若 $\mathbf{a}>0$，则有 $\mathbf{a}=+|\mathbf{a}|$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$$

（1）若 $\mathbf{a}<0$，则有 $\mathbf{a}=-|\mathbf{a}|$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{-a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}f\left(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$$

综上，$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)\mathrm{d}t=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$

命题得证。

题目 2

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt$$

$$= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

题目 3

$$3.\ [f(t)\delta(t)]' = [f(0)\delta(t)]' = f(0)\delta'(t)$$

$$[f(t)\delta(t)]' = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

$$f(0)\delta'(t) = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

$$= f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

$$\Rightarrow f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta'(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(0)\delta(t)dt$$

$$= f(0)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - f'(0)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt$$

$$= 0 - f'(0) = f'(0)$$

题目 4

略，用 LTI 定义证明即可，须同时证明齐次性和叠加性。

题目 5

5. 略。注意反转和伸缩都是"时变"的。

题目 6

解：(1) 因为 $y(t) = f(t-2)$

输出值只取决于输入的过去值，如 $t = 6$ 时，输出 $y(6) = f(4)$，故为因果系统。

(2) 因为 $y(t) = f(t+2)$

输出值取决于输入的将来值，如 $t = 6$ 时，$y(6) = f(8)$，故为非因果系统。

题目 7

解：(1) 由系统的线性时不变性及因果性得，并由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = \frac{d}{dt}f_1(t)$$

$$f_2(t) \to y_2(t) = \frac{d}{dt}f_2(t)$$

$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \frac{d}{dt}[\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]$$

$$= \Lambda_1 \frac{df_1(t)}{dt} + \Lambda_2 \frac{df_2(t)}{dt} = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y(t)$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \frac{d}{dt}f(t-t_0) = \frac{df(t-t_0)}{d(t-t_0)} = y(t-t_0)$$

故得系统是时不变系统。 这个答案是一阶的，二阶可同理。

当 $t < 0$ 时，因有 $f(t) = 0$，故 $t < 0$ 时有 $y(t) = 0$。故系统是因果系统。

(2) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1(t)U(t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = f_2(t)U(t)$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to [\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]U(t) &= \Lambda_1 f_1(t)U(t) + \Lambda_2 f_2(t)U(t) \\ &= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)\end{aligned}$$

故系统是线性的。

由已知有

$$f(t-t_0) \to f(t-t_0)U(t) \neq f(t-t_0)U(t-t_0)$$

故系统是时变系统。

因有 $y(0) = f(0)U(0)$，故系统是因果系统。

(3) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = \sin[f_1(t)]\, U(t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = \sin[f_2(t)]\, U(t)$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) &\to \sin[\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]\, U(t) \\ &= \Lambda_1 \sin[f_1(t)]\, U(t) + \Lambda_2 \sin[f_2(t)]\, U(t)\end{aligned}$$

故系统是非线性系统。

又已知有

$$f(t-t_0) \to \sin[f(t-t_0)]U(t) \neq \sin[f(t-t_0)]\, U(t-t_0)$$

故系统是时变系统。

因有 $y(0) = \sin[f(0)]U(0)$，故系统是因果系统。

(4) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1(1-t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = f_2(1-t)$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \Lambda_1 f_1(1-t) + \Lambda_2 f_2(1-t) = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y(t)$$

故系统是线性系统。

设系统的激励为 $f(t)$，延时 t_0，即 $f(t-t_0)$；其折叠信号是 $f(-t-t_0)$；再右移 1，结果是

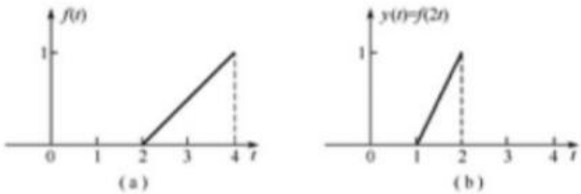
$$f(1-t-t_0) = f[1-(t+t_0)] = y(t+t_0)$$

可见，激励延时 t_0，响应反而超前 t，说明系统是时变的且是非因果的。

(5) 由于

$$f_1(t) \to f_1(2t)$$
$$f_2(t) \to f_2(2t)$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \Lambda_1 f_1(2t) + \Lambda_2 f_2(2t) = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)$$

故系统是线性的。



图例 1.14

设激励 $f(t)$ 的波形如图例 1.14(a) 所示，则响应 $y(t) = f(2t)$ 的波形如图例 1.14(b) 所示。可见，响应产生在激励之前，故系统是非因果系统，且是时变的。

(6) 由于

$$f_1(t) \to [f_1(t)]^2$$
$$f_2(t) \to [f_2(t)]^2$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to [\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]^2 \neq \Lambda_1 [f_1(t)]^2 + \Lambda_2 [f_2(t)]^2$$

故系统是非线性的。

又因有

$$f(t) \to [f(t)]^2$$

故有

$$f(t-t_0) \to [f(t-t_0)]^2 = y(t-t_0)$$

故系统是时不变的。

由 $y(t)=[f(t)]^2$ 知，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$，故 $y(t)=0$。故系统是因果的。

(7) 由于

$$f_1(t) \to \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$f_2(t) \to \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \int_{-\infty}^{t} [\Lambda_1 f_1(\tau) + \Lambda_2 f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = \Lambda_1 \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \Lambda_2 \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \int_{-\infty}^{t} f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{x=\tau-t_0} \int_{-\infty}^{5t-t_0} f(x)\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x = y(t-t_0)$$

故系统是时不变的。

当 $t<0$ 时，$f(t)=0$，故 $y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$。故系统是因果的。

(8) 由于

$$f_1(t) \to \int_{-\infty}^{5t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$f_2(t) \to \int_{-\infty}^{5t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \int_{-\infty}^{5t} [\Lambda_1 f_1(\tau) + \Lambda_2 f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau = \Lambda_1 \int_{-\infty}^{5t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \Lambda_2 \int_{-\infty}^{5t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \int_{-\infty}^{5t} f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{x=\tau-t_0} \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x = y(t-t_0)$$

故系统是时变的。

对于 $y(t)=\int_{-\infty}^{5t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$，取 $t=1$，有

$$y(1) = \int_{-\infty}^{5} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

故系统是非因果的。

题目 8

解：因已知有

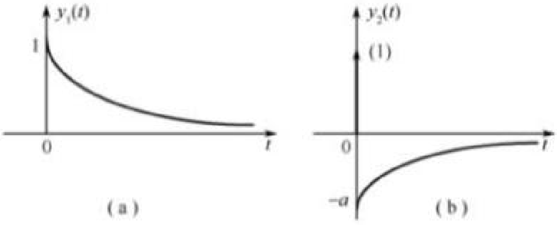
$$f_1(t)=U(t)\rightarrow y_1(t)=e^{-at}U(t)$$

$y_1(t)$ 的波形如例图 1.22(a) 所示。

又因有 $\delta(t)=\frac{d}{dt}U(t)$，故

$$y_2(t)=\frac{d}{dt}y_1(t)=\frac{d}{dt}[e^{-at}U(t)]=-ae^{-at}U(t)+e^{-at}\delta(t)=\delta(t)-ae^{-at}U(t)$$

$y_2(t)$ 的波形如图例 1.22(b) 所示。



(a) (b)

题目 9

$$\text{解：}(1)\ f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}3e^{-2\tau}U(\tau)\cdot 2U(t-\tau)d\tau$$

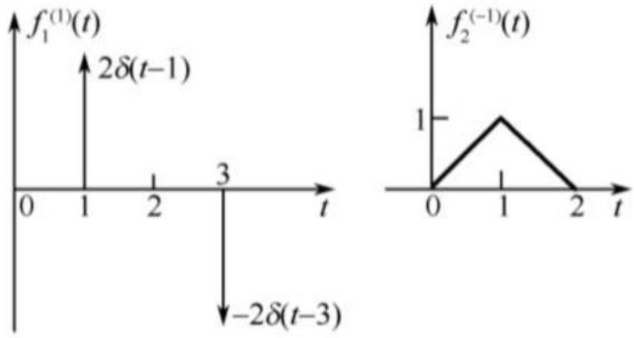
$$=6\int_{0^+}^{t}e^{-2\tau}d\tau=3(1-e^{-2t})U(t)$$

$$(2)\ f_1(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}3e^{-2\tau}U(\tau)\cdot 2U(t-\tau-2)d\tau$$

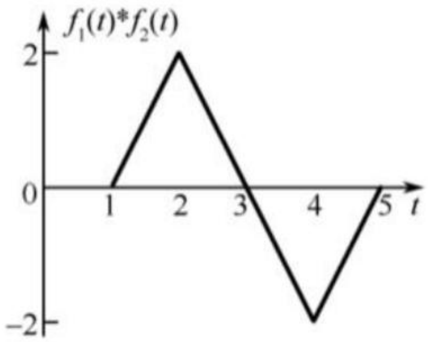
$$=6\int_{0^+}^{t-2}e^{-2\tau}d\tau=3[1-e^{-2(t-2)}]U(t-2)$$

题目 10

解：直接求$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积将比较复杂，利用函数与冲激函数的卷积较为方便。对$f_1(t)$求导数得$f_1^{(1)}(t)$，对$f_2(t)$求积分得$f_2^{(-1)}(t)$，其波形图如下图 a 所示。卷积$f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1(t)*f_2(t)$，如下图 b 所示



(a)



(b)