题目 1

解：图(a)

$$H(s)=H_0\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{s}{s^2+s+1}$$

图(b)

$$H(s)=H_0\frac{s^2}{\left(s+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{s^2}{s^2+s+1}$$

题目 2

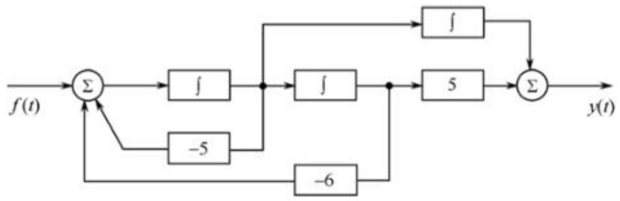
解:(1) 因为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s+5}{s^2+5s+6}$$

故得系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+5f(t)$$

(2) 该系统的一种时域模拟图如图题 6-9 所示。



图题 6-9

(3) 求零状态响应 $y_f(t)$:

$$F(s)=\frac{1}{s+1}$$

故

$$Y_f(s)=F(s)H(s)=\frac{s+5}{(s+1)(s^2+5s+6)}=\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$
$$=\frac{2}{s+1}+\frac{-3}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

故得

$$y_f(t)=(2e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t})U(t)$$

求零输入响应 $y_x(t)$。

系统的特征方程为 $s^2+5s+6=0$,故得特征根为 $p_1=-2,p_2=-3$。故得零输入响应的通解形式为

$$y_x(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$$

又

$$y_x'(t)=-2A_1e^{-2t}-3A_2e^{-3t}$$

故有

$$\begin{cases}y_x(0^+)=y(0^-)=A_1+A_2=2\\ y_x'(0^+)=y'(0^-)=-2A_1-3A_2=1\end{cases}$$

联解得 $A_1=7,A_2=-5$。故得零输入响应为

$$y_x(t)=(7e^{-2t}-5e^{-3t})U(t)$$

求全响应

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(7e^{-2t}-5e^{-3t})U(t)+(2e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t})U(t)$$
$$=(4e^{-2t}-4e^{-3t})U(t)+2e^{-t}U(t)$$

题目 3

解:(1) 系统函数

$$H(s)=\frac{s+3}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

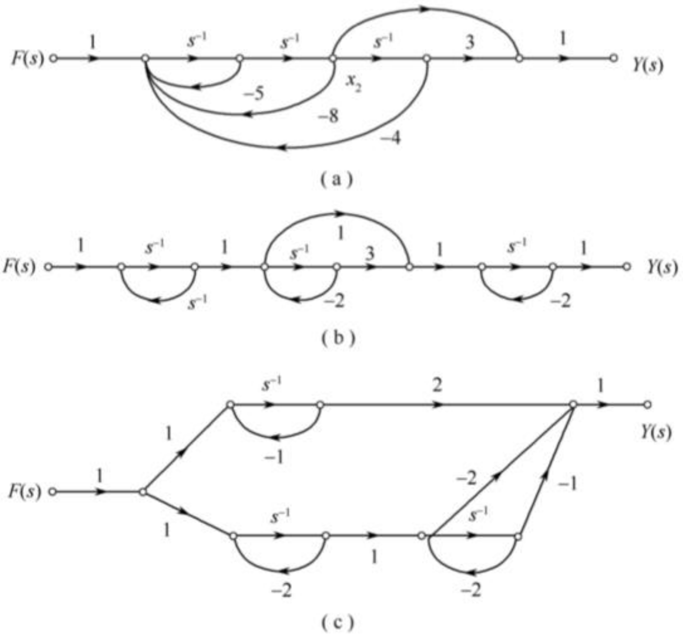
直接形式的信号流图如图题 6-12(a) 所示。

(2) $$H(s)=\frac{1}{s+1}\times\frac{s+3}{s+2}\times\frac{1}{s+2}$$

级联形式的信号流图如图题 6-12(b) 所示。

(3) $$H(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{(s+2)^2}+\frac{-2}{s+2}=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+2}\left(\frac{-1}{s+2}-2\right)$$

并联形式的信号流图如图题 6-12(c) 所示。



图题 6-12

题目 4

解:本例是典型的用单边 z 变换求解因果系统响应的问题。由于给出的后向差分方程,在用单边 z 变换求因果系统的零输入响应和全响应时,要用到系统的初始状态,而本例已知的是全响应的初始值,所以要用迭代法求出初始状态。经过迭代求得初始状态为

$$y(-1)=2,y(-2)=-0.5$$

(1) 求零输入响应。对齐次差分方程两边作单边 z 变换

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=0$$

代入 $y(-1)=2,y(-2)=-0.5$,解得零输入响应的像函数

$$Y(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}=\frac{2z}{z-2}-\frac{z}{z+1}$$

取反变换得零输入响应

$$y_x(k)=[2(2)^k-(-1)^k]U(k+2)$$

(2) 对非齐次差分方程两边作 z 变换,并考虑初始状态为零。

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)-2z^{-2}Y(z)=\frac{z}{z-1}(1+2z^{-2})$$

解得零状态响应的像函数

$$Y(z)=\frac{z^3+2z}{(z^2-z-2)(z-1)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{\frac{1}{2}z}{z+1}-\frac{\frac{3}{2}z}{z-1}$$

取反变换的零状态响应

$$y_f(k)=\left[2(2)^k+\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}\right]U(k)$$

(3) 求全响应。用(1)题和(2)题的求解结果相加,便可以得到全响应。也可以对非齐次差分方程取单边 z 变换来求全响应。此时要用到系统的初始状态。

对非齐次差分方程两边作单边 z 变换

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=\frac{z}{z-1}(1+2z^{-2})$$

代入初始状态值,解得

$$Y(z)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}+\frac{z^3+2z}{(z^2-z-2)(z-1)}$$

上式第一项是零输入响应的像函数,第二项是零状态响应的像函数。

将 $Y(z)$ 整理并作部分分式展开,得到全响应的像函数

$$Y(z)=\frac{4z}{z-2}-\frac{\frac{1}{2}z}{z+1}-\frac{\frac{3}{2}z}{z-1}$$

取反变换得到全响应

$$y(k)=\left[4(2)^k-\frac{1}{2}(-1)^k-\frac{3}{2}\right]U(k)$$

题目 5

解:本题的关键是求出系统函数。全响应的像函数为

$$Y(z)=\frac{z(-z^2+2z+5)}{(z^2+3z+2)(z-1)}$$

由于激励 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}$,不难判断系统函数的特征多项式为

$$D(z)=z^2+3z+2$$

写出齐次差分方程

$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=0$$

作单边 z 变换

$$Y_x(z)+3[z^{-1}Y_x(z)+y(-1)]+2[z^{-2}Y_x(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=0$$

代入初始状态,解得

$$Y_x(z)=\frac{-z^2}{z^2+3z+2}$$

零状态响应像函数

$$Y_f(z)=Y(z)-Y_x(z)=\frac{z(z+5)}{(z^2+3z+2)(z-1)}$$

系统函数为

$$H(z)=\frac{z+5}{z^2+3z+2}$$

差分方程为

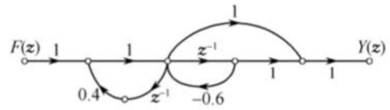
$$y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-1)+5f(k-2)$$

题目 6

解:(1) 系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}$$

因为是因果系统,所以系统函数的收敛域为 $|z|>0.6$。



图例 8-19

(2) $H(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}=\dfrac{z}{z-0.4}\,\dfrac{z+1}{z+0.6}$

由梅森公式含义,画出级联形式信号流图如图例 8-19 所示。

(3) 系统函数极点为 $p_1=0.4,p_2=-0.6$,都在单位圆内,系统稳定。

(4) 系统的频率特性为

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{j2\omega}+e^{j\omega}}{e^{j2\omega}+0.2e^{j\omega}-0.24}$$

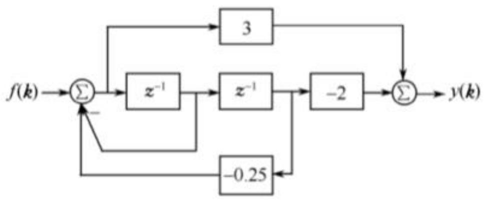
将 $\omega_0=0.5\pi$ 代入,得

$$H(e^{j0.5\pi})=\frac{-1+j}{-1+0.2j-0.24}=1.13e^{-j35.8^\circ}$$

正弦稳态响应为

$$y(k)=2.26\cos(0.5\pi k+9.2^\circ)$$

题目 7



图例 8-20

解:由梅森公式求得系统函数为

$$H(z)=\frac{3z^2-2}{z^2+z+0.25}$$

极点 $p_1=p_2=-0.5$ 都在单位圆内,系统稳定。

系统的频率特性为

$$H(e^{j\omega})=\frac{3e^{j2\omega}-2}{e^{j2\omega}+e^{j\omega}+0.25}$$

将 $\omega_0=0,0.5\pi,\pi$ 分别代入,得

$$H(0)=\frac{4}{9}$$

$$H(e^{j0.5\pi})=4\angle 53.1^\circ$$

$$H(e^{j\pi})=4$$

系统的稳态响应

$$y(k)=\frac{4}{9}+4\cos(0.5\pi k+53.1^\circ)+12\cos(\pi k)$$

题目 8

解：$F(z)=\dfrac{z}{z-1}$。

(1) 求零输入响应。对其次差分方程进行 z 变换，得

$$Y_x(z)-[z^{-1}Y_x(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y_x(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=0$$

代入初始状态，解得

$$Y_x(k)=\frac{z^2+4z}{z^2-z-2}=\frac{-z}{z+1}+\frac{2z}{z-2}$$

取反变换，得

$$y_x(k)=[-(-1)^k+2(2)^k]U(k)$$

(2) 求零状态响应。对非其次差分方程进行 z 变换，得

$$Y_f(z)-z^{-1}Y_f(z)-2z^{-2}Y_f(z)=(1+2z^{-2})F(z)$$

解得

$$Y_f(z)=\frac{z(z^2+2)}{(z-1)(z+1)(z-2)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{0.5z}{z+1}-\frac{1.5z}{z-1}$$

取反变换，得

$$y_f(k)=[2(2)^k+0.5(-1)^k-1.5]U(k)$$

(3) 求全响应。将(1) 和(2) 小题求解结果相加可以得到全响应。下面用 z 变换求解。

对非齐次差分方程作单边 z 变换

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-2)+z^{-1}y(-1)]=(1+2z^{-2})F(z)$$

代入初始状态，解得

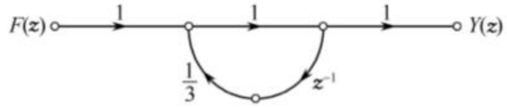
$$Y(z)=\frac{z(2z^2+3z-2)}{(z-1)(z+1)(z-2)}=\frac{-1.5z}{z-1}-\frac{0.5z}{z+1}+\frac{4z}{z-2}$$

取反变换，得全响应

$$y(k)=[-1.5-0.5(-1)^k+4(2)^k]U(k)$$

题目 9

解：(1) $H(z)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}z^{-1}}$，故得系统的信号流图如图题 8-19 所示。



图题 8-19

(2) 因 $$Y(z)=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{3z}{z-\frac{1}{3}}=\frac{z}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$F(z)=\frac{Y_f(z)}{H(z)}=\frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

故系统的输入

$$f(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}U(k-1)$$

题目 10

解：(1) 因有

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{2z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-z}{z-\frac{1}{4}}$$

故系统的单位序列响应

$$h(k)=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]U(k)$$

(2) 由于系统的极点都在单位圆内，所以该系统是稳定的。

(3) 系统的差分方程为

$$y(k+2)-\frac{3}{4}y(k+1)+\frac{1}{8}y(k)=f(k+2)$$

或 $$y(k)-\frac{3}{4}y(k-1)+\frac{1}{8}y(k-2)=f(k)$$

(4) 因有

$$G(z)=H(z)F(z)=\frac{z^2z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}=\frac{-2z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}z}{z-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{8}{3}z}{z-1}$$

故得系统的单位阶跃响应为

$$g(k)=\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{8}{3}(1)^k\right]U(k)$$

题目 11

解:(1)

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

故得 s 域零输入解为

$$\boldsymbol{\Phi}(s)x(0^-)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

进而得时域零输入解为$\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}U(t)$。

$$s\text{ 域零状态解}=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{BF}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left[\frac{1}{s}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\\ 0\end{bmatrix}$$

故得时域零状态解为$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 0\end{bmatrix}U(t)$。故得

状态向量=零输入解+零状态解

$$=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}U(t)$$

(2)
$$y(t)=[1\quad 0]x(t)=\left(\frac{1}{2}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)U(t)$$

(3)
$$H(s)=\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\frac{1}{s+2}$$

故得
$$h(t)=e^{-2t}U(t)$$

题目 12

解:(1)

$$[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\frac{1}{z(z-1)}\begin{bmatrix}z-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 1 & z-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{Z}^{-1}\{[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}z\}=\boldsymbol{Z}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{z-\frac{1}{2}}{z-1} & \frac{\frac{1}{4}}{z-1}\\ \frac{1}{z-1} & \frac{z-\frac{1}{2}}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\delta(k)+\frac{1}{2}U(k-1) & \frac{1}{4}U(k-1)\\ U(k-1) & \delta(k)+\frac{1}{2}U(k-1)\end{bmatrix}$$

(2) $$\boldsymbol{X}(z)=[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}zx(0)+[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{BF}(z)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{z-1/2}{z-1} & \frac{1/4}{z-1}\\ \frac{1}{z-1} & \frac{z-1/2}{z-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{z-1/2}{z(z-1)} & \frac{1/4}{z(z-1)}\\ \frac{1}{z(z-1)} & \frac{z-1/2}{z(z-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{z-1/4}{z-1}\\ \frac{z+1/2}{z-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{z^2-1/2}{(z-1)^2}\\ \frac{z^2-z+1}{(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

故得 $$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta(k)+\frac{3}{4}U(k-1)\\ \delta(k)+\frac{3}{2}U(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}kU(k)-\frac{1}{2}(k-1)U(k-1)\\ (k-1)U(k-1)\end{bmatrix}$$

(3) $$\boldsymbol{Y}(z)=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}zx(0)+\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{BF}(z)+\boldsymbol{DF}(z)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{z-1/4}{z-1}\\ \frac{z+1/2}{z-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{z^2-1/2}{(z-1)^2}\\ \frac{z^2-z+1}{(z-1)^2}\end{bmatrix}$$

故得 $$\boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\delta(k)+\frac{3}{4}U(k-1)\\ \delta(k)+\frac{3}{2}U(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta(k)+2kU(k)-\frac{3}{2}(k-1)U(k-1)\\ \delta(k)+kU(k)\end{bmatrix}$$

(4) $$\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{C}[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\frac{z^2-1/2}{z(z-1)}\\ \frac{z^2-z+1}{z(z-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{1/2}{z}+\frac{1/2}{z-1}\\ 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\end{bmatrix}$$

(5) $$\boldsymbol{h}(k)=\mathscr{L}^{-1}[\boldsymbol{H}(z)]=\begin{bmatrix}\delta(k)+\frac{1}{2}\delta(k-1)+\frac{1}{2}U(k-1)\\ \delta(k)-\delta(k-1)+U(k-1)\end{bmatrix}$$