

# 信号与系统课程笔记: Lecture 22

## 零极图, 系统函数 $H(s)$

授课教师: 秦雨潇

笔记记录: 曹时成

2023 年 11 月 24 日 (第十二周, 周五)

### 1 复习

#### 1.1 拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) = cf(t) &\longleftrightarrow h(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} \\ \uparrow s\text{域} &\quad \quad \quad \uparrow \mathcal{L} \\ s^2 Y(s) + asY(s) + bY(s) = cF(s) &\longleftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b} = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} \end{aligned}$$

#### 1.2 零极图

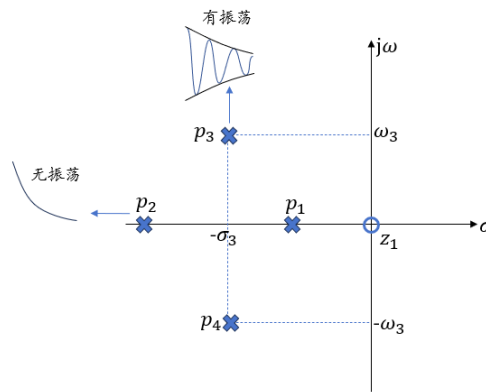


图 1: 零极图

#### 1.3 零极图的作用

(1) 可以得到  $H(s)$

$$\text{例: } H(s) = \frac{k s - 0}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

(2) 零极图可以直接看出系统的“属性”

$$\text{例: } h(t) = k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + k_3 e^{-\delta_3 t} \cos \omega_3 t$$

## 2 零极图的作用 3: 设计系统

第一步：观察一下

$$H(s) \longleftrightarrow H(w) \quad e^{jw_0} * h(t) = |H(w_0)|e^{j(w_0 + \angle H(w_0))}$$

$$H(w) = H(s)|_{s=jw \text{ 或 } \delta=0}$$

$$|H(w)| = |H(s)| = \left| \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} \right| = \frac{\prod_{i=1}^m |(s-z_i)|}{\prod_{i=1}^n |(s-p_i)|} \Big|_{s=jw \text{ 或 } \delta=0}$$

零极图设计系统

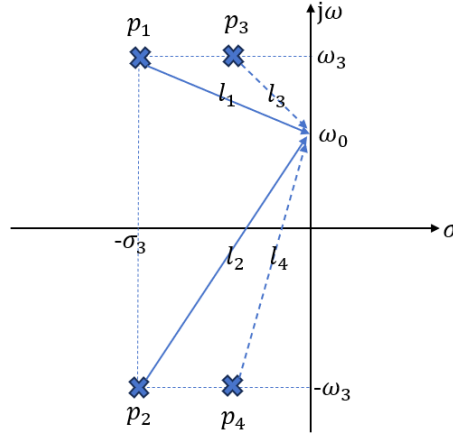


图 2: 零极图对应系统的解释

$$|H(w)| = \frac{\prod_{i=1}^m |(s-z_i)|}{\prod_{i=1}^n |(s-p_i)|} \Big|_{s=jw} = \frac{\prod_{i=1}^m |(jw-z_i)|}{\prod_{i=1}^n |(jw-p_i)|}$$

$$\equiv \frac{|C_{z1}| |C_{z2}| |C_{z3}|}{|C_{p1}| |C_{p2}| |C_{p3}|}$$

$$\text{其中 } |l_1| = |\overrightarrow{p_1 w_0}| = |jw_0 - p_1| = |C_{p1}|$$

当  $|l_1| \cdot |l_2|$  最大时,  $H(w_0)$  最小

当  $|l_1| \cdot |l_2|$  最小时,  $H(w_0)$  最大

$$\text{极点靠近 } jw \text{ 轴时: } |l_3| \cdot |l_4| < |l_1| \cdot |l_2| \implies H(w)_{|l_1| \cdot |l_2|} > H(w)_{|l_3| \cdot |l_4|}$$

### 2.1 LPF

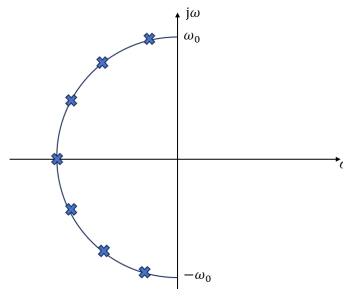


图 3: 巴特沃斯滤波器 (Butterworth Filter) 的零极图

极点数越多，滤波器衰减越快，但系统设计难度越大。

## 2.2 BPF，带通滤波器

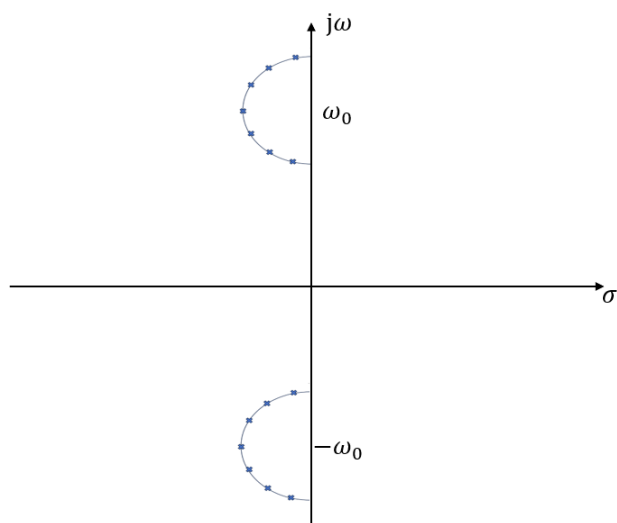


图 4: 带通滤波器的零极图

## 2.3 Notch Filter，带阻滤波器

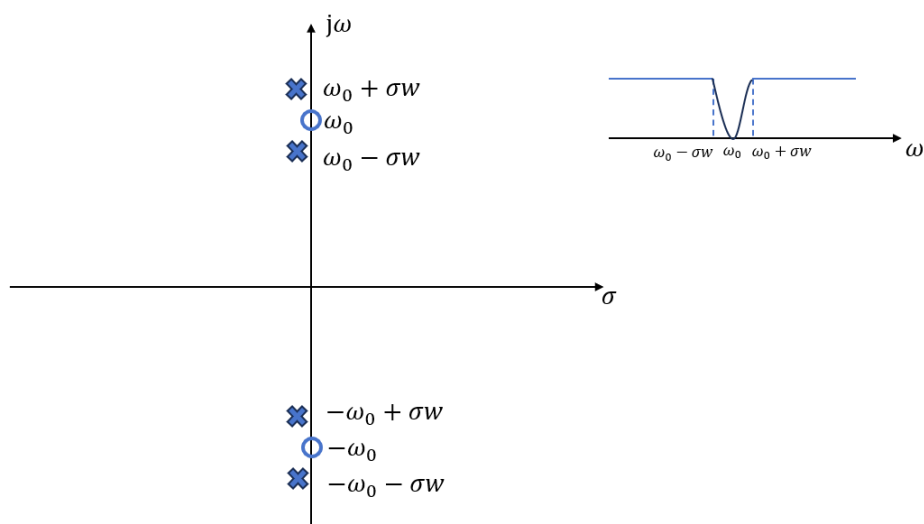


图 5: 带阻滤波器的零极图

## 3 框图

需求  $\xrightarrow{\text{Z-P 图}} H(s) \rightarrow \text{微分方程} \xrightarrow{\text{框图}} \text{“电路”}$

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = cf(t)$$

### 3.1 框图的基本元素

- (1) 基本运算逻辑：加法；乘法；微分。
- (2) 基本运算单元：“加法器”；“乘法器”；“积分器”。
- (3) 基本框图元素：

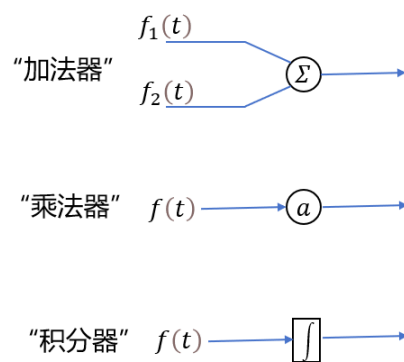


图 6: 基本框图元素