题目 1

解：(1) 设 $\cos it$，$\cos rt$ 是余弦函数集中的任意两个函数，若 $i \neq r$，则

$$\int_0^{2\pi} \cos it \cos rt \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+r)t}{i+r} + \frac{\sin(i-r)t}{i-r}\right]_0^{2\pi} = 0$$

若 $i = r$，则

$$\int_0^{2\pi} (\cos it + \cos rt) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 it \, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2i}\sin 2it\right)_0^{2\pi} = \pi$$

故余弦函数集 $\{\cos nt\}$ 在时间区间 $[0, 2\pi]$ 是正交函数集。

(2) 要证明一个正交函数集是不完备的，只需要找到一个函数与该函数集正交即可。而所谓一个函数与某个函数集正交，指的是这个函数与函数集中的每个函数都正交。因此不能用余弦函数集中某个特指的函数来证明，而必须用一般表达式证明。我们选 $\sin t$，看它在时间区间 $[0, 2\pi]$ 内是否与 $\{\cos nt\}$ 正交。由于

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos nt \, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n \neq 1)$$

当 $n = 1$ 时，有 $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$，因此，$\sin t$ 在时间区间 $[0, 2\pi]$ 内与 $\{\cos nt\}$ 正交。故 $\{\cos nt\}$ 不是区间 $[0, 2\pi]$ 内的完备正交函数集。

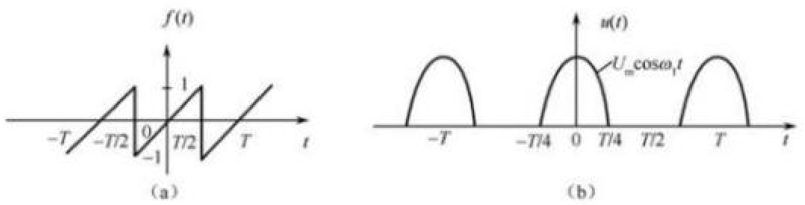
(3) 当 $i \neq r$ 时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos i \cos rt \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+r)t}{i+r} + \frac{\sin(i-r)t}{i-r}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{i^2 - r^2}\left[i\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{r\pi}{2} - j\cos\frac{i\pi}{2}\sin\frac{r\pi}{2}\right]$$

由于对于任意的正整数 i, r，此式都不等于零（例如 $i = 1, r = 2$，此式等于 $\frac{1}{3}$），故 $\{\cos nt\}$ 不是区间 $[0, \pi/2]$ 内的正交函数集。

由此例可以看出：(1) 一个函数集是否正交，与它所在的区间有关，在某个区间正交，在另一个区间可能不正交；(2) 正交函数集的定义规定，函数集中所有函数应两两正交，不能从一个函数中某几个相互正交就说该函数集是正交函数集。

题目 2



图例 3.3

解:图例 3.3(a) 图所示信号为时间 t 的实、奇周期函数,所以傅里叶级数系数 $a_k=0$,系数

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

在 $t=0\sim T/2$ 区间,$f(t)$ 的表达式为,$f(t)=\frac{2}{T}t$,由此可得

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}t\sin(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

应用分部积分,令 $u=\frac{2}{T}t$,$\mathrm{d}v=\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$,则 $\mathrm{d}u=\frac{2}{T}\mathrm{d}t$,$v=-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)$,考虑到 $\omega_1=2\pi/T$,所以

$$b_k=\frac{4}{T}\left[\frac{2}{T}t\left(-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)\right)\bigg|_0^{\frac{T}{2}}-\int_0^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)\ \frac{T}{2}\mathrm{d}t\right.$$

$$=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{8}{T^2k^2\omega_1^2}\sin(k\omega_1 t)\bigg|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{8}{T^2k^2\omega_1^2}\sin(k\pi)=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1},\qquad k=1,2,3,\cdots$$

故得图例 3.3(a) 所示信号 $f(t)$ 的傅里叶级数三角函数展开式为

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\omega_1 t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin(k\omega_1 t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)-\frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)+\cdots+(-1)^{k+1}\ \frac{1}{k}\sin(k\omega_1 t)\right]$$

图例 3.3(b) 图所示信号为时间 t 的实、偶周期函数,所以傅里叶级数系数 $b_k=0$,系数

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t)\cos(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

由图例 3.3(b) 图可知 $u(t)$ 在 $t=0\sim T/2$ 区间的函数表达式为

$$u(t)=\begin{cases}U_m\cos\omega_1 t, & 0\leqslant t\leqslant T/4\\ 0, & T/4\leqslant t\leqslant T/2\end{cases}$$

由此可得

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} U_m \cos(\omega_1 t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} U_m \left\{\frac{1}{2}\cos[(k+1)\omega_1 t] + \frac{1}{2}\cos[(k-1)\omega_1 t]\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2U_m}{T}\cdot\frac{\sin[(k+1)\omega_1 t]}{(k+1)\omega_1}\Bigg|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2U_m}{T}\cdot\frac{\sin[(k-1)\omega_1 t]}{(k-1)\omega_1}\Bigg|_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{U_m}{(k+1)\pi}\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{U_m}{(k-1)\pi}\sin\left[(k-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

于是有

$$a_0 = \frac{2U_m}{\pi}, a_1 = \frac{2U_m}{2}, a_2 = \frac{2U_m}{3\pi}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{2U_m}{15\pi}, \cdots$$

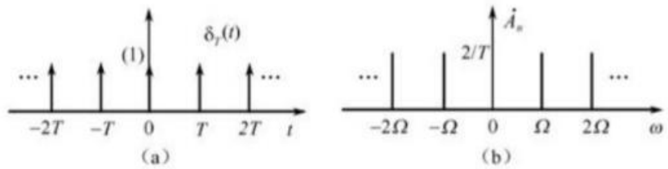
所以 $u(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t)$$

$$= \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{2U_m}{3\pi}\cos(2\omega_1 t) - \frac{2U_m}{15\pi}\cos(4\omega_1 t) + \cdots$$

$$= \frac{U_m}{\pi} + \frac{2U_m}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{15}\cos(4\omega_1 t) + \cdots\right]$$

题目 3



图例 3.4

解：

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega 0}\mathrm{d}t = \frac{2}{T}$$

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}, \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

其频谱如图例 3.4(b) 所示。

题目 4

解:本问题给出的两个周期信号均为三角函数表示的级数形式,所以只需对照周期信号的三角函数形式的傅里叶级数展开式

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$$

为此 $f(t)$ 的可表示为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t+\pi)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)+\frac{1}{7}+\cos(7\omega_1 t+\pi)+\cdots\right]$$

由此可得

$$\frac{A_0}{2}=0$$

$$A_1=\frac{4}{\pi},\quad \varphi_1=0$$

$$A_3=\frac{4}{3\pi},\quad \varphi_3=\pi$$

$$A_5=\frac{4}{5\pi},\quad \varphi_5=0$$

$$A_7=\frac{4}{7\pi},\quad \varphi_7=\pi$$

……

据此可画得(1)题中所给周期信号 $f(t)$ 的单边振幅频谱图与相位频谱图,如例图 3.5(a)、(b) 所示。

考虑正弦函数与余弦函数的变化关系,类似地将(2) 中所给出的周期信号改写为用余弦函数表示的傅里叶级数形式,即

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\right]$$

式中,基波角频率 $\omega_1=2\pi$ rad/s;除直流分量以外的各谐波分量的初相位均为 $\pi/2$。容易求得:

$$\frac{A_0}{2}=\frac{1}{2}$$

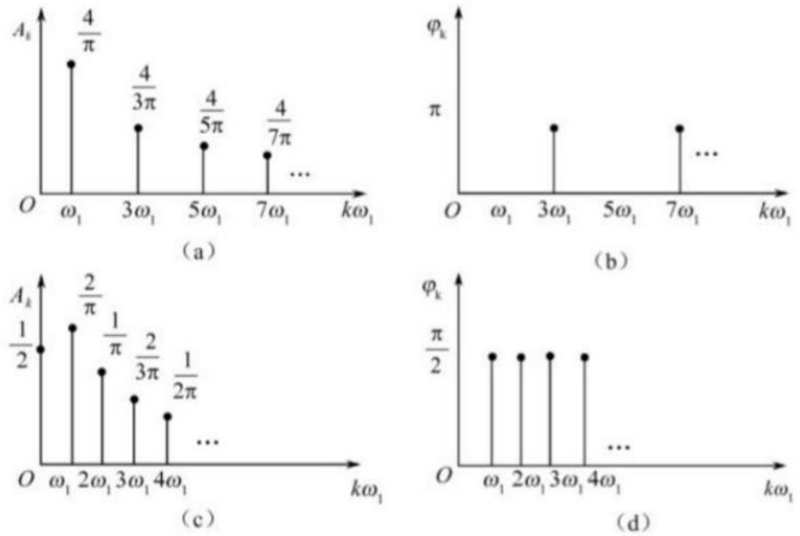
$$A_1=\frac{2}{\pi},\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$A_2=\frac{2}{\pi},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{2}$$

$$A_3=\frac{2}{3\pi},\quad \varphi_3=\frac{\pi}{2}$$

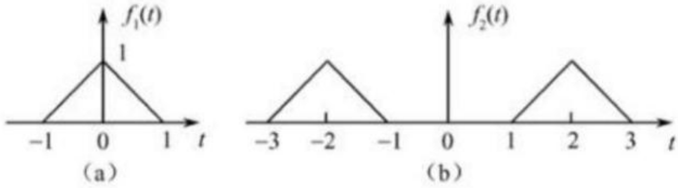
……

由此可画得(2) 题中所给周期信号 $f(t)$ 的单边振幅频谱图与相位频谱图如例图 3.5(c)、(d) 所示。



图例 3.5

题目 5



图例 3.7

解:对图例 3.7(a) 有 $f_1''(t)=\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$,故

$$(\mathrm{j}\omega)^2F_1(\mathrm{j}\omega)=1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-2\times1+1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}})^2$$

故得
$$F_1(\mathrm{j}\omega)=\left[\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^2=Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

对图例 3.7(b) 有 $f_2(t)=f_1(t+2)+f_1(t-2)$,故

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$
$$=2F_1(\mathrm{j}\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{2}=2Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos2\omega$$

题目 6

解:自相关函数

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t$$
$$=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t$$

分段讨论:

当 $\tau<0$ 时,$R(\tau)=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\tau}$;

当 $\tau>0$ 时,$R(\tau)=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$。

综上可知, $R(\tau)=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$ 。

题目 7

解： 周期信号的基波角频率 Ω 为信号中各频率成分中频率最小的信号的频率，且其余信号的角频率均为此角频率的整数倍，$T=\dfrac{2\pi}{\Omega}$。

（1）角频率为 $\Omega=100\text{rad/s}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{2\pi}{100}=\dfrac{\pi}{50}\text{s}$。

（2）角频率为 $\Omega=\dfrac{\pi}{2}\text{rad/s}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4\text{s}$。

（3）cos2t 的角频率为 $\Omega_1=2\text{rad/s}$，sin4t 的角频率为 $\Omega_2=4\text{rad/s}$，取两者的最大公约数即为复合信号的基波角频率 $\Omega=2\text{rad/s}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi\text{s}$。

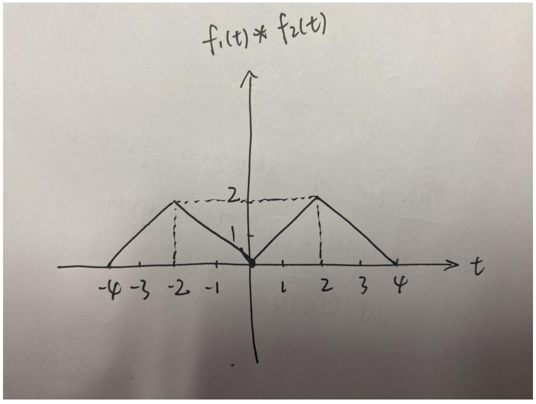
（4）三个分解信号的角频率分别为 $\Omega_1=2\pi, \Omega_2=3\pi, \Omega_3=5\pi$，基波角频率为 π，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2\text{s}$。

（5）角频率为 $\Omega=\dfrac{\pi}{4}\text{rad/s}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8\text{s}$。

（6）$\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ 的角频率分别为 $\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{\pi}{3}$、$\dfrac{\pi}{5}$，基波角频率为 $\dfrac{\pi}{30}\text{rad/s}$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{30}}=60\text{s}$。

题目 8

（1）



(2) $y[k]=\{\underset{\uparrow}{0}, 2, 10, 5, -1, -6, 2\}$

[5分]

若算错，回溯步骤酌情给分。

(3) 有若干种方法求解 根据定义：

[5分]

$$f_1[k] * f_2[k] = 0.5^k u[k] * u[-k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 0.5^i u[i-k]$$

写到这一步就可以得分 →

$$= \begin{cases} ①\ k\le 0 & \sum_{i=0}^{+\infty} 0.5^i = \frac{1}{1-0.5} = 2. \\ ②\ k>0 & \sum_{i=k}^{+\infty} 0.5^i = 0.5^k \times 2 = 2\cdot 0.5^k \end{cases}$$

也可以写成 $y[k]=2u[-k-1]+2\cdot 0.5^k u[k]$

或 $y[k]=2u[-k]+2\cdot 0.5^k u[k-1]$

题目 9

$$f_1[k] = 3e^{-2k}u(k) \qquad f_1[k] = 2u(k) \qquad f_2[k] = 2u(k-2)$$

(1) $$f_1[k] * f_2[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1[n] \cdot f_2[k-n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3e^{-2n}u(n) \cdot 2u[k-n]$$

$$= 6\sum_{n=0}^{k} e^{-2n} = 6 \cdot \frac{1-e^{-2(k+1)}}{1-e^{-2}} \cdot u(k)$$

(2) $$f_1[k] * f_3[k] = 6\sum_{n=0}^{k-2} e^{-2n} = 6\,\frac{1-e^{-2(k-1)}}{1-e^{-2}} \cdot u(k-2)$$

(3) $$f_2[k] * f_3[k] = 4\sum_{n=0}^{k-2} 1 = 4(k-1)u(k-2)$$