题目 1

解:(1) 因 $G_\tau(t) \Leftrightarrow \tau \dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$,取 $\dfrac{\omega\tau}{2} = 2\pi\omega$,故得 $\tau = 4\pi$,则

$$G_{4\pi}(t) \Leftrightarrow 4\pi \frac{\sin 2\pi\omega}{2\pi\omega} = 2\pi \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}$$

则

$$\frac{1}{2\pi} G_{4\pi}(t) \Leftrightarrow \frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}$$

$$\frac{\sin 2\pi t}{\pi t} \Leftrightarrow 2\pi \times \frac{1}{2\pi} G_{4\pi}(\omega) = G_{4\pi}(\omega)$$

$$\frac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)} \Leftrightarrow G_{4\pi}(\omega) e^{-j2\omega}$$

(2) 因 $e^{-\alpha|t|} \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$,$\alpha > 0$,故 $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+t^2} \Leftrightarrow 2\pi e^{-\alpha|\omega|}$,$\alpha > 0$。

(3) 三角脉冲信号

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau}, & |t| \leqslant \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

因有

$$f_\tau(t) \Leftrightarrow \tau \left[\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right]^2$$

故

$$f_{4\pi}(t) \Leftrightarrow 4\pi \left[\frac{\sin 2\pi\omega}{2\pi\omega} \right]^2$$

即

$$\frac{1}{4\pi} f_{4\pi}(t) \Leftrightarrow \left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \right]^2$$

故

$$\left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \right]^2 \Leftrightarrow 2\pi \times \frac{1}{4\pi} f_{4\pi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} f_{4\pi}(\omega)$$

题目 2

解:利用傅里叶变换的对称性求解。因已知有 $G_\tau(t) \Leftrightarrow \tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$,所以

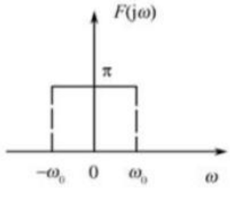
$$G_2(t) \Leftrightarrow 2Sa(\omega)$$

即有 $\quad 2\pi G_2(\omega) \Leftrightarrow 2Sa(t)$

故 $\quad F(j\omega) = \pi G_2(\omega) \Leftrightarrow Sa(t)$

$F(j\omega)$ 的图形如图例 3.10 所示。又因有

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$



图例 3.10

今取 $\omega = 0$,则得

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

题目 3

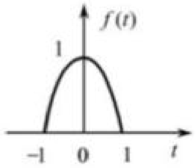


图 3.13

解法一：用直接积分法求。

由图示余弦脉冲波形，得 $f(t)$ 的函数表达式为

$$f(t)=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & -1\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

应用欧拉公式将 $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ 写为指数函数表示并代入上式，得

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\frac{\pi}{2})t}\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\frac{\pi}{2})t}\mathrm{d}t$$

$$=\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\frac{\pi}{2})t}}{-\mathrm{j}2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right|_{-1}^{1}+\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\frac{\pi}{2})t}}{-\mathrm{j}2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}\right|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\frac{\pi}{2})}}{\mathrm{j}2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\frac{\pi}{2})}}{\mathrm{j}2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+\frac{\pi}{2})}}{\mathrm{j}2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\frac{\pi}{2})t}}{\mathrm{j}2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}$$

再对上式应用欧拉公式并注意抽样函数 $Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$，故得

$$F(\mathrm{j}\omega)=Sa\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+Sa\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

解法二：应用常用函数傅里叶变换对及性质求解。

将 $f(t)$ 看作为门函数 $G_2(t)$ 与余弦函数 $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ 之乘积，即

$$f(t)=G_2(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

而 $$G_2(t)\leftrightarrow 2Sa(\omega)\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Leftrightarrow\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

由频域卷积定理可得

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}2Sa(\omega)*\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=Sa\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+Sa\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

与解法一求得的结果完全相同。从两种解法的求解过程来看，解法二较解法一简单。

题目 4

解： 因 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，由尺度变换性质得

$$f\left(\frac{1}{2}t\right)\Leftrightarrow\frac{1}{1/2}F\left[\mathrm{j}\omega/\left(\frac{1}{2}\right)\right]=2F(\mathrm{j}2\omega)$$

由时移性质得

$$f\left(\frac{t}{2}+3\right)=f\left[\frac{1}{2}(t+6)\right]\Leftrightarrow 2F(\mathrm{j}2\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}6\omega}$$

又

$$\cos4t\Leftrightarrow\pi[\delta(\omega+4)+\delta(\omega-4)]$$

再应用时域卷积定理，得

$$\begin{aligned}Y(\mathrm{j}\omega)&=2F(\mathrm{j}2\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}6\omega}\times\pi[\delta(\omega+4)+\delta(\omega-4)]\\&=2\pi F(-\mathrm{j}8)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}24}\delta(\omega+4)+2\pi F(\mathrm{j}8)\mathrm{e}^{\mathrm{j}24}\delta(\omega-4)]\end{aligned}$$

题目 5

解：(1) 由时移性质，知

$$\frac{1}{2}f(t+1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F(j\omega)e^{j\omega}$$

$$\frac{1}{2}f(t-1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F(j\omega)e^{-j\omega}$$

由线性性质并应用欧拉公式化简，得

$$\begin{aligned}Y_1(j\omega) &= \frac{1}{2}F(j\omega)e^{j\omega}+\frac{1}{2}F(j\omega)e^{-j\omega}\\ &= F(j\omega)\,\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\\ &= F(j\omega)\cos\omega\end{aligned}$$

(2) 由尺度变换性质，知

$$f\left(-\frac{1}{2}t\right)\Leftrightarrow 2F(-2j\omega)$$

$$f\left(\frac{1}{2}t\right)\Leftrightarrow 2F(2j\omega)$$

由时移性质知

$$f\left(-\frac{1}{2}t+1\right)=f\left[-\frac{1}{2}(t-2)\right]\Leftrightarrow 2F(-2j\omega)e^{-2j\omega}$$

$$f\left(\frac{1}{2}t-1\right)=f\left[\frac{1}{2}(t-2)\right]\Leftrightarrow 2F(2j\omega)e^{-2j\omega}$$

据线性性质，得

$$\begin{aligned}Y_3(j\omega) &= 2F(-2j\omega)e^{-2j\omega}+2F(2j\omega)e^{-2j\omega}\\ &= 2[F(-2j\omega)+2F(2j\omega)]e^{-2j\omega}\end{aligned}$$

(3) $y_3(t)$ 为 $f(t)$ 与 $\cos\pi t$ 相乘积的函数

$$\cos\pi t\Leftrightarrow\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]$$

由频域卷积定理，得

$$\begin{aligned}Y_3(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]\\ &= \frac{1}{2}F[j(\omega+\pi)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\pi)]\end{aligned}$$

$Y_3(j\omega)$ 亦可应用频移性质求。将 $\cos\pi t$ 用欧拉公式展开为指数函数表示形式，即

$$\cos\pi t=\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}$$

则

$$y_3(t)=\frac{1}{2}e^{j\pi t}\cdot f(t)+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}\cdot f(t)$$

由频移性质，知

$$\frac{1}{2}e^{j\pi t}f(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2}F[j(\omega-\pi)]$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\pi t}f(t)\Leftrightarrow\frac{1}{2}F[j(\omega+\pi)]$$

再由线性性质，得

$$Y_3(j\omega)=\frac{1}{2}F[j(\omega+\pi)]+\frac{1}{2}F[j(\omega-\pi)]$$

(4) $y_4(t)$ 为抽样函数 $3\frac{\sin 3t}{3t}$ 与 $f(t)$ 之卷积。因宽度为 τ，高度为 1 的门函数的傅里叶变换为频域的抽样函数形式，即

$$G_\tau(t)\Leftrightarrow\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以，由对称性质并考虑 $G_\tau(t)$ 是偶函数，得

$$\tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right)\Leftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega)=2\pi G_\tau(\omega)$$

由 $y_4(t)$ 的表达式中的抽样函数 $3Sa(3t)$ 可以看出 $\frac{\tau t}{2}=3t$，则 $\tau=6$。

故得

$$3Sa(3t)=3Sa(3t)\Leftrightarrow\pi G_6(\omega)$$

由时域卷积定理，的

$$Y_4(j\omega)=\pi G_6(\omega)\cdot F(j\omega)$$

(5) 由尺度变换性得

$$f\left(-\frac{1}{4}t\right)\Leftrightarrow 4F(-4j\omega)$$

由时移性质，得

$$f\left(-\frac{1}{4}t-1\right)=f\left[-\frac{1}{4}(t+4)\right]\Leftrightarrow 4F(-4j\omega)e^{4j\omega}$$

由时域微分性质，得

$$\frac{d}{dt}f\left[-\frac{1}{4}t-1\right]\Leftrightarrow j\omega\cdot 4F(-4j\omega)e^{4j\omega}$$

即

$$Y_5(j\omega)=4j\omega F(-4j\omega)e^{j4\omega}$$

题目 6

解：傅里叶逆变换公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

若 $F(\mathrm{j}\omega)$ 为比较简单的函数形式，如频域门函数形式，代入上述逆变换公式积分，可以简便地求得原函数 $f(t)$，但对于大多数频谱函数来讲，代入上式，用积分求原函数还是比较麻烦的，通常利用傅里叶变换性质结合常用的傅里叶变换对来求取傅里叶逆变换。

(1) 应用欧拉公式改写 $F_1(\mathrm{j}\omega)$ 表达式，即

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=2x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$$

考虑 $\delta(t)\Leftrightarrow 1$ 并应用时移性质可得

$$f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1(\mathrm{j}\omega)]=\delta(t+1)+\delta(t-1)$$

(2) $F_2(\mathrm{j}\omega)$ 中的 $\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega}$ 为对应信号时域移位的频域因子。先去掉该因子，令所剩部分为

$F_a(\mathrm{j}\omega)$，即

$$F_a(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$$

由单边衰减指数的傅里叶变换对，显然

$$f_a(t)=U(t)\mathrm{e}^{-t}$$

而

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=F_a(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega}$$

由时移性质，得

$$f_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_2(\mathrm{j}\omega)]=f_a(t+2)=U(t+2)\mathrm{e}^{-(t+2)}$$

(3) 类似(2) 题中对因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}$ 的处理，令

$$F_b(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{6-\omega^2+\mathrm{j}5\omega}$$

但若将 $F_b(\mathrm{j}\omega)$ 代入逆变换公式积分来求 $f_b(t)$ 是很繁复的。这里用部分分式法求 $f_b(t)$。在用部分分式展开 $F_b(\mathrm{j}\omega)$ 之前，将分母多项式中 $-\omega^2$ 改写为$(\mathrm{j}\omega)^2$。由此有

$$F_b(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{6-\omega^2+\mathrm{j}5\omega}=\frac{1}{6+(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}5\omega}=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}=\frac{A}{(\mathrm{j}\omega+2)}+\frac{B}{(\mathrm{j}\omega+3)}$$

式中

$$A=(\mathrm{j}\omega+2)F_b(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\mathrm{j}\omega=-2}=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+3)}\Big|_{\mathrm{j}\omega=-2}=1$$

$$B=(\mathrm{j}\omega+3)F_b(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\mathrm{j}\omega=-3}=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)}\Big|_{\mathrm{j}\omega=-3}=-1$$

所以

$$F_b(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)}-\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+3)}$$

对照单边指数衰减傅里叶变换对，便可写得

$$f_b(t)=U(t)\mathrm{e}^{-2t}-U(t)\mathrm{e}^{-3t}$$

而

$$F_3(\mathrm{j}\omega)=F_b(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$$

由时移性质，得

$$f_3(t)=f_b(t-1)=U(t-1)\mathrm{e}^{-2(t-1)}-U(t-1)\mathrm{e}^{-3(t-1)}$$

题目 7

解：计算本题需要利用傅里叶变换的反折、时移、尺度变换、时域积分、频域微分等性质。这里需要注意的是计算次序的问题。

[方法一] 按 $\mathscr{F}[f(t)]\to\mathscr{F}[f(4-2t)]\to\mathscr{F}[(t-2)f(4-2t)]\to\mathscr{F}[f_2(t)]$ 的次序计算。

步骤一：计算 $f(4-2t)$ 的傅里叶变换。

计算 $f(4-2t)$ 的傅里叶变换要用到反折、时移、尺度变换的性质。应用不同的次序会有不同的解法。以下仅举两种解法。

方法(a)：按时移 → 尺度变换 → 反折的次序求解。

已知

$$f(t)\Leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$$

对 t 时移 4

$$f(t+4)\Leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\omega}$$

对 t 压缩 2 倍得(注意得到的是 $f(2t+4)$ 而不是 $f[2(t+4)]$)

$$f(2t+4)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}$$

对 t 反折，得(注意得到的是 $f(4-2t)$，而不是 $f[-(2t+4)]$。)

$$f(4-2t)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{-\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

方法(b)：按反折 → 尺度变换 → 时移的次序求解。

已知

$$f(t)\Leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$$

对 t 反折

$$f(-t)\Leftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)$$

对 t 压缩 2 倍

$$f(-2t)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\right)$$

对 t 时移 $\frac{4}{2}$(注意不应是 4)，得

$$f[-2(t-2)]=f(4-2t)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

当然，采用其他次序，会有其相应解法，请读者自己验证。但是，不管采用什么次序，都要牢记一点，即对形如 $f(at-b)$ 的信号进行反折、时移和尺度变换时，都是直接对自变量 t 进行的，以免出错。

为了减少计算上的错误，常将这三条性质归纳成一条，即

$$f(at-b)\Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}$$

在本题中 $a=-2$，$b=-4$，代入上式即可得到

$$f(4-2t)\Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

步骤二：计算$(t-2)f(4-2t)$的傅里叶变换。根据频域微分性质，可得

$$
\begin{aligned}
tf(4-2t) &\Leftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f(4-2t)] \\
&= \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{2}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\right] \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} + \frac{\mathrm{j}}{2}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}) \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right) + F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}
\end{aligned}
$$

由线性性质，可得

$$
\begin{aligned}
(t-2)f(4-2t) &\Leftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f(4-2t)] - 2F[f(4-2t)] \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

步骤三：计算$\int_{-\infty}^{t}(t-2)f(4-2t)\mathrm{d}t$的傅里叶变换。

由时域积分定理可得

$$
\begin{aligned}
F_2(\mathrm{j}\omega) &= \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right] \\
&= \frac{\mathrm{j}\pi}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)\right]\Bigg|_{\omega=0}\delta(\omega) + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{2\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\frac{-\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

[方法二] 按$\mathscr{F}[tf(t)] \to \mathscr{F}[(t-2)f(4-2t)] \to \mathscr{F}[f_2(t)]$的次序计算。

注意到$(t-2)f(4-2t) = -\frac{1}{2}(4-2t)f(4-2t)$利用该信号的这一特殊性，可以使计算得到简化。

令$g(t) = -\frac{1}{2}tf(t)$，则$g(4-2t) = (t-2)f(4-2t)$。根据频域微分性质，可得

$$
g(t) = -\frac{1}{2}tf(t) \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)
$$

由方法一中步骤一的结论，可得

$$
\begin{aligned}
g(4-2t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} \\
&= \frac{\mathrm{j}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

利用时域卷积定理，即得到

$$
\begin{aligned}
F_2(\mathrm{j}\omega) &= \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}g(4-2t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mathrm{j}\pi}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)\right]\Bigg|_{\omega=0}\delta(\omega) + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

对于已知信号$f(t)$的傅里叶变换，求信号$(ct-\mathrm{d})f(at-b)$的傅里叶变换问题，通常采用方法一的解法，即先求得$f(at-b)$的傅里叶变换，再利用频域微分和线性性质求得$(ct-\mathrm{d})f(at-b)$的傅里叶变换；但如果该信号能过转换成为$(at-b)$的信号形式，那么采用方法二的解法，即先求得信号$tf(t)$的傅里叶变换，再利用反折、时移和尺度变换求得$(at-b)f(at-b)$的傅里叶变换往往是比较简便的。

题目 8

解：（1）根据尺度变换特性可得： $f(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{2}\right)$

根据频域微分特性可得： $(-\mathrm{j}t)f(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{2}\right)$

所以 $tf(2t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{2}\right)$ 。

（2）根据频域微分特性可得：$(-\mathrm{j}t)f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$ ，整理得： $tf(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$

根据傅里叶变换的线性性质可得：$(t-2)f(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\mathrm{j}\omega)-2F(\mathrm{j}\omega)$ 。

（3）根据时域微分特性可得： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$

根据频域微分特性可得：$(-\mathrm{j}t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)]$

所以 $t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)]=-\left[F(\mathrm{j}\omega)+\omega\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\mathrm{j}\omega)\right]$ 。

（4）根据傅里叶变换的时移性质可得： $f(1+t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$

根据反转特性可得： $f(1-t) \longleftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$ 。

（5）根据频域微分性质可得： $tf(t) \longleftrightarrow \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\mathrm{j}\omega)$

根据反转特性可得： $-tf(-t) \leftrightarrow -j\,\frac{d}{d\omega}F(-j\omega)$

根据时移性质可得：$(1-t)f(1-t) \longleftrightarrow -\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(-\mathrm{j}\omega)$ 。

（6）根据时移性质得：$f(t-5) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega}$

根据尺度变换特性可得： $f(2t-5) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5\omega}{2}}$

（7） $\frac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{1-\frac{1}{2}t}f(t)dt]=-\frac{1}{2}f(1-\frac{1}{2}t)$

根据尺度变换特性可得： $f(-\frac{1}{2}t) \leftrightarrow 2F(-j2w)$

根据时移特性可得： $f(1-\frac{1}{2}t) \leftrightarrow 2e^{-j2w}F(-j2w)$

则 $-\frac{1}{2}f(1-\frac{1}{2}t) \leftrightarrow -e^{-j2w}F(-j2w)$

根据时域积分性质可得： $\int_{-\infty}^{1-\frac{1}{2}t}f(\tau)\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega)-\frac{F(-\mathrm{j}2\omega)}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$ 。

（8）根据时移特性可得：$f(3+t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega}$

根据尺度变换特性可得：$f(3-2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left(-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\omega}$

根据频移性质可得：$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}f(3-2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F\left[-\frac{1}{2}\mathrm{j}(\omega-1)\right]\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\mathrm{j}(\omega-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3(\omega-1)}{2}}F\left(\mathrm{j}\frac{1-\omega}{2}\right)$。

（9）根据时域微分性质可得：$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$

又 $\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -\mathrm{j}sgn(\omega)$

故根据时域卷积定理可得：$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} * \frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)[-\mathrm{j}sgn(\omega)] = \omega sgn(\omega)F(\mathrm{j}\omega) = |\omega|F(\mathrm{j}\omega)$。

题目 9

解：（1）已知$g_2(t) \longleftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$，根据傅里叶变换的对称性质可得：

$$\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \pi g_2(\omega)$$

根据帕萨瓦尔能量定理可得：$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin t}{t}\right]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\pi g_2(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\times\pi^2\times 2 = \pi$ 。

（2）根据常用函数傅里叶变换对可得：$\mathrm{e}^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$，

根据其对称性可得：$\frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$

所以由帕萨瓦尔能量定理可得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}|^2\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\pi^2\times 2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\times\pi^2\times(-1)\mathrm{e}^{-2\omega}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

题目 10

$$2Sa(w) \leftrightarrow G_2(t)$$

$$2\cos 2w \leftrightarrow \delta(t+2) + \delta(t-2)$$

$$f(t) = G_2(t) * [\delta(t+2) + \delta(t-2)]$$

$$= G_2(t+2) + G_2(t-2)$$

题目 11

例：周期信号 $f(t)=1-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6})$ $\int_0^T$

求 Ω，画出频谱图。 $T_1=8$. $T_2=6$.

解：第一步是求周期T. $\Omega=\frac{2\pi}{T}$.

f(t)的周期是24. =T. $\Omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$. rad/s

第二步：

$f(t)=1-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3})$.