信号与系统课程笔记：Lecture 15

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

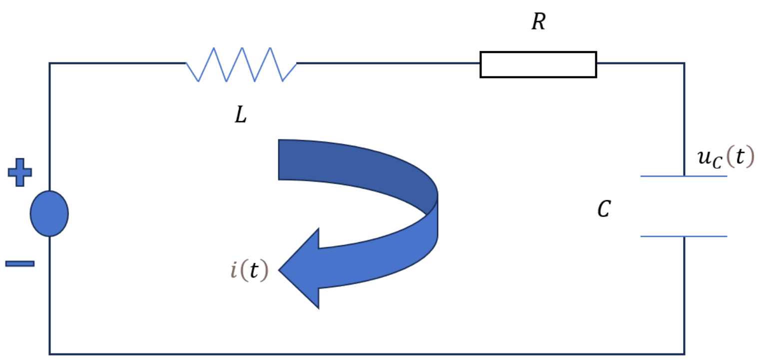
2023 年 11 月 03 日（第九周，周五）

1 系统的数学表达

(1) $y = ax \quad \Longleftrightarrow \quad Y = AX，X = A^{-1}Y$

(2) $y = ax^2$ 例如：CNN/DNN

1.1 电路



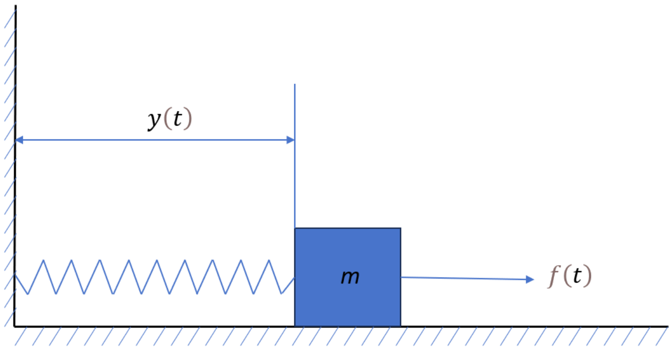
$$\begin{array}{ccc} U_S(t) & \rightarrow & U_C(t) \\ \text{输入} & & \text{输出} \\ \text{激励} & & \text{响应} \end{array}$$

$U_S(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t)$

其中，$\begin{cases} U_R(t) = i(t)R \\ i(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_C(t) \\ U_L(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U_S(t) = U_C(t) + R \cdot C \cdot U_C'(t) + L \cdot C \cdot U_C''(t) \\ U_C(0) = U_C'(0) = 0 \end{cases}$$

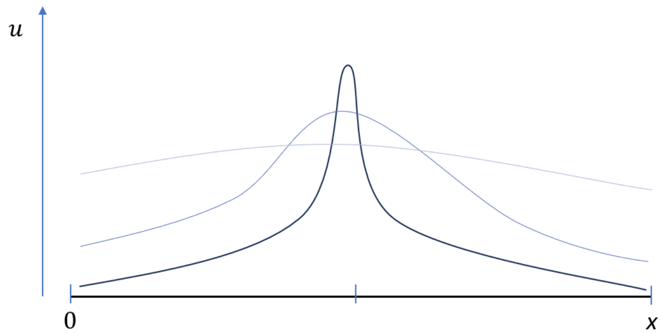
1.2 力学



$$\begin{array}{ccc} f(t) & \rightarrow & y(t) \\ \text{输入} & & \text{输出} \end{array}$$

$$\begin{cases} F = ma = my''(t) \\ f(t) + ky(t) + \alpha y'(t) = F \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(t) = my''(t) + \alpha y'(t) + ky(t) \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

1.3 傅里叶铁棒实验（求解在某时刻铁棒在某处的温度）



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0)\text{已知} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{常微分方程（PDE）} & \rightarrow & \text{偏微分方程（ODE）} \\ \text{偏微分方程（ODE）} & \rightarrow & \text{线性方程（linear）} \end{cases}$$

1.4 结论

许多系统（$f(t) \to y(t)/y(t) = G(f(t))$）在数学上归纳为如下形式：

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{\mathrm{d}^m y(t)}{\mathrm{d}t^m}$$

2 响应的类型

零输入响应 + 零状态响应 = 完全响应

(1) 零状态响应：$y(t) = 0 \quad t < 0$

(2) 零输入响应：$y(0)$ 可导，连续

举例：卷积 $\begin{matrix} \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau & \to & \int_{\mathbb{R}} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ f(t) & \to & f(t) * h(t) \end{matrix}$ 为零状态响应。

3 基本信号的响应

$e^{j\omega_0 t}$ 基本信号 $\quad \to \quad h(t)$ 系统 $\quad \to \quad ?$

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} * h(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_0 t} \mathrm{d}\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 t} \mathrm{d}\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) \end{aligned}$$