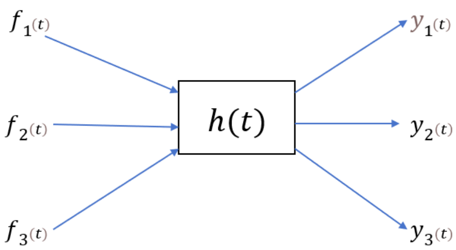
信号与系统课程笔记：Lecture 30：系统的状态空间分析 2

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 12 月 22 日（第十六周，周五）

1 课堂回顾

1.1



（1）SISO “Single Input Single output”

$\Downarrow$

MIMO “Multiple Input Multiple output”

（2）h(t)：黑盒子

$\Downarrow$

状态方程

1.2 例 1：一个经典电路

$\dot{X} = AX + BF$ “状态方程组 $\longrightarrow$ 矩阵形式”

（1）列方程

$[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 必须一阶微分

（2）解 x

(3)$Y = CX + DF$

2 例 2：微分方程 1

$y'''(t) + ay''(t) + by'(t) + cy(t) = df(t)$

解：3 阶列 3 个

$X = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$

(1) 状态方程

令：$x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t), x_3(t) = y''(t)$

则：

$x_1' = x_2(t)$

$x_2' = x_3(t)$

$x_3' = -ax_3(t) - bx_2(t) - cx_1(t) + df(t)$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX + BF$$

(2) 输出方程

$y = x_1$

3 例 3：微分方程 2

$y'''(t) + ay''(t) + by'(t) + cy(t) = df(t) + ef'(t) + gf''(t)$

解：

(1) 状态方程

换元：

$q'''(t) + aq''(t) + bq'(t) + cq(t) = f(t)$

$y(t) = dq(t) + eq'(t)$

$x_1' = x_2(t)$

$x_2' = x_3(t)$

$x_3' = -ax_3(t) - bx_2(t) - cx_1(t) + f(t)$

(2) 输出方程

$y = dx_1 + ex_2 + gx_3$

4 例 4：离散差分方程 1

$y[k] + ay[k-1] + by[k-2] = df[k]$

解：

(1) 状态方程

原则：连续“’”，放左边；离散“+1”，放左边

$x_1[k] = y[k-2], x_2[k] = x_1[k+1], x_3[k] = x_2[k+1]$　　必须列成 $x[k+1]$ 的形式！

$x_1[k+1] = x_2[k]$

$x_2[k+1] = x_3[k] = -ax_1[k] - bx_2[k] + f[k]$

$\dot{X} = AX + BF$

(2) 输出方程与例 2 中连续微分方程相同

5 例 5：离散差分方程 2

同理于例 3

6 9.3 解状态/输出方程

6.1

$\dot{x} = Ax(t) + Bf(t)$

对两边做 laplace 变换

$sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BF(s)$

$(sI - A)X(s) = x(0^-) + BF(s)$

$X(s) = (sI - A)^{-1}(x(0^-) + BF(s))$

令：$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

则：

$$X(s) = \Phi(s)x(0^-) + \Phi(s)BF(s)$$

其中：

$\Phi(s)x(0^-)$　　为零输入响应

$\Phi(s)BF(s)$　　为零状态响应

$H(s) = \Phi(s)B$　　为系统函数

$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \varphi(t)x(0^-) + \varphi(t)Bf(t)$

输出方程：

$Y(s) = CX(s) + DF(s)$

$Y(s) = C\Phi(s)x(0^-) + (C\Phi(s)B + D)F(s)$

其中：

$C\Phi(s)x(0^-)$　　为零输入响应

$(C\Phi(s)B+D)F(s)$ 为零状态响应

$C\Phi(s)B+D=H(s)$ 为系统函数

$y(t)=C\varphi(t)x(0^-)+(C\varphi(t)B+D)f(t)$

6.2 例题

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f_t$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} f_t, f(t)=u(t), \begin{bmatrix} x_1(0^-) & x_2(0^-) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解：

（1）

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 \\ \frac{1/2}{(s+1)} - \frac{1/2}{(s+3)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

（2）$\Phi(s) \longrightarrow \varphi(t)$

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}) & e^{-3t} \end{bmatrix} u(t)$$

（3）$C\Phi(s)B+D=H(s)$

$=\frac{1/2}{s+3}$

（4）

$y(t)=C\varphi(t)x(0^-)+\mathscr{L}^{-1}\{H(s)F(s)\}$

7 9.4 系统的稳定性判定

$det(sI-A)=0$

所有的根 s<0 时，则稳定