信号与系统课程笔记：Lecture 28

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 12 月 15 日（第十五周，周五）

1 求全响应

1.1 零状态

$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=f[k]$，$f[k]=4^kU[k]$

z 域：$Y(z)-5z^{-1}Y(z)+6z^{-2}Y(z)=F(z)$

$$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)=F(z)$$

$$\begin{aligned}
Y(z)&=\frac{z^2}{z^2-5z+6}\cdot F(z)\\
\frac{Y(z)}{z}&=\frac{z}{z^2-5z+6}\cdot\frac{z}{z-4}\\
\frac{Y(z)}{z}&=\frac{z_1}{z-2}+\frac{z_2}{z-3}+\frac{z_3}{z-4}\\
Y(z)&=\frac{z_1z}{z-2}+\frac{z_2z}{z-3}+\frac{z_3z}{z-4}
\end{aligned}$$

则 $y[k]=z_12^kU[k]+z_23^kU[k]+z_34^kU[k]$

1.2 零输入

$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=f[k]$，$f[k]=0$，$y[-1]=a_1$，$y[-2]=a_2$

z 域：$Y(z)-5(z^{-1}Y(z)+y[-1]z^0)+6(z^{-2}Y(z)+y[-2]z^0+y[-1]z^{-1})=0$

$$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)-(5a_1+6a_2+6a_1z^{-1})=0$$

$$\begin{aligned}
（令 5a_1+6a_2=\alpha，6a_1=\beta）Y(z)&=\frac{\alpha+\beta z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}\\
Y(z)&=\frac{\alpha z^2+\beta z}{z^2-5z+6}\\
\frac{Y(z)}{z}&=\frac{\alpha z+\beta}{z^2-5z+6}\\
\frac{Y(z)}{z}&=\frac{z_1}{z-2}+\frac{z_2}{z-3}\\
Y(z)&=\frac{z_1z}{z-2}+\frac{z_2z}{z-3}
\end{aligned}$$

则 $y[k]=z_12^kU[k]+z_23^kU[k]$

2 z 域的系统函数

$H(Z) \rightleftarrows h[k]$
本质和 $H(\omega)$，$H(s)$ 相同。

2.1 求法

(1) 差分方程

(2) $h[k] \to H(z)$

(3) $H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)}$

2.2 $H(z)$ 的应用场景

(1) $H(z) \to h[k]$

(2) $H(z) \to Y(z)$

(3) $H(z)$ 和初始状态可以求零输入响应。

(4) $H(z) \to$ 系统的差分方程。

(5) 可以画框图和流图。

(6) 可以得到系统的零极图，判断系统的稳定性。

(7) $H(z) \to$ 系统的“频率特性”。

例 1：某 LTI 系统，$f[k] = (-0.5)^k U[k]$，$Y_{zs}[k] = [\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^k + 4(-\frac{1}{3})^k - \frac{2}{9}(-\frac{1}{2})^k]U[k]$，

求 $h[k]$ 和 ODE。

① 求 $h[k]$：$F(z) = \frac{z}{z+0.5}$

$$Y(z) = \frac{3}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 4\frac{z}{z+\frac{1}{3}} - \frac{9}{2}\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

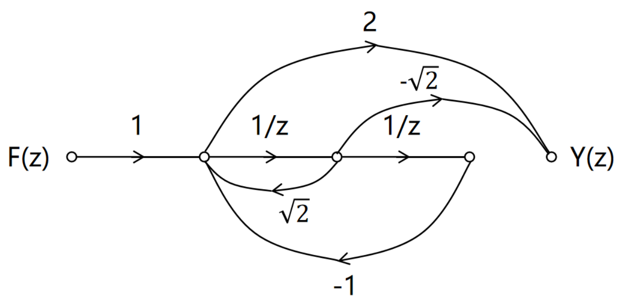
$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(Z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$\cdots$

② 求 ODE：$(1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1})F(z)$

$$y[k] - \frac{1}{6}y[k-1] - \frac{1}{6}y[k-2] = f[k] + 2f[k-1]$$

例 2：



$$y[k] - \sqrt{2}y[k-1] + y[k-2] = -\sqrt{2}f[k-1] + 2f[k-2]$$

3 z 域的系统零极图

$H(z)=\frac{b_m(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$
$\forall\xi_i$，$H(z)\big|_{z=\xi_i}=0$ 称为零点。

总结：① 所有极点在单位圆内，系统稳定。 $|a|<1\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}a^k=0$

② 有一个极点在单位圆外，系统不稳定。

③ 有极点在单位圆上，“一阶”：“临界稳定”。 $1^kU[k]\Leftrightarrow\cos\omega kU[k]$

“二阶或以上”：不稳定。

4 朱利准则

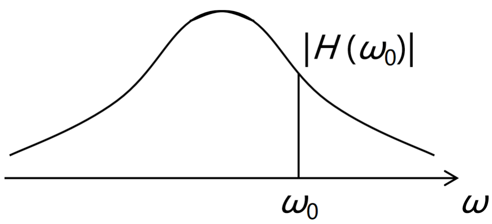
见课本。

5 系统稳定性（BIBO，Bounded Input Bounded Output）

$\sum_{k=0}^{+\infty}|h[k]|<+\infty$（系统稳定的充要条件）
极点在单位圆内或 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆是判断系统 BIBO 的充要条件。

6 系统对正弦（余弦）序列的响应

$y(t)=e^{j\omega_0 t}*h(t)=|H(\omega_0)|e^{j(\omega_0 t+\theta)}$，$\theta=\angle H(\omega_0)$



例题：$H(\omega)=\frac{1-j\omega}{j\omega-0.5}$（或 $H(s)=\frac{1-s}{s-0.5}$），$f(t)=10\cos(628Tt+\frac{\pi}{6})$，$T=10^{-3}\mathrm{s}$

$f(t)\to H(\omega)$（或 $H(s)$）$\to ?$

$H(z)=\frac{1-z}{z-0.5}$，$f[k]=10\cos(628Tk+\frac{\pi}{6})$，$T=10^{-3}\mathrm{s}$

$f[k]\to H(z)\to ?$

解：$H(\omega_0)=H(\omega)\big|_{\omega=\omega_0}=\frac{1-e^{j\omega}}{e^{j\omega}-0.5}\big|_{\omega=628\times10^{-3}}$

$|H(\omega_0)|=\alpha$，$\angle H(\omega_0)=Ae^{j\theta}=\beta$

$y(t)=\alpha10\cos(628Tt+\frac{\pi}{6}+\beta)$

7 $H(z)$ 中零极图的配置

$|H(z)| = \frac{|\prod_{i=1}^{m}(z-\xi_i)|}{|\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)|}$