# 信号与系统课程笔记：Lecture 17
# 香农-奈奎斯特（Shannon-Nyquist）采样定理

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 11 月 10 日（第十周，周五）

## 1 课堂回顾

### 1.1 零输入响应和零状态响应

傅里叶变换只能求零状态响应

### 1.2 无失真传输与理想低通滤波器

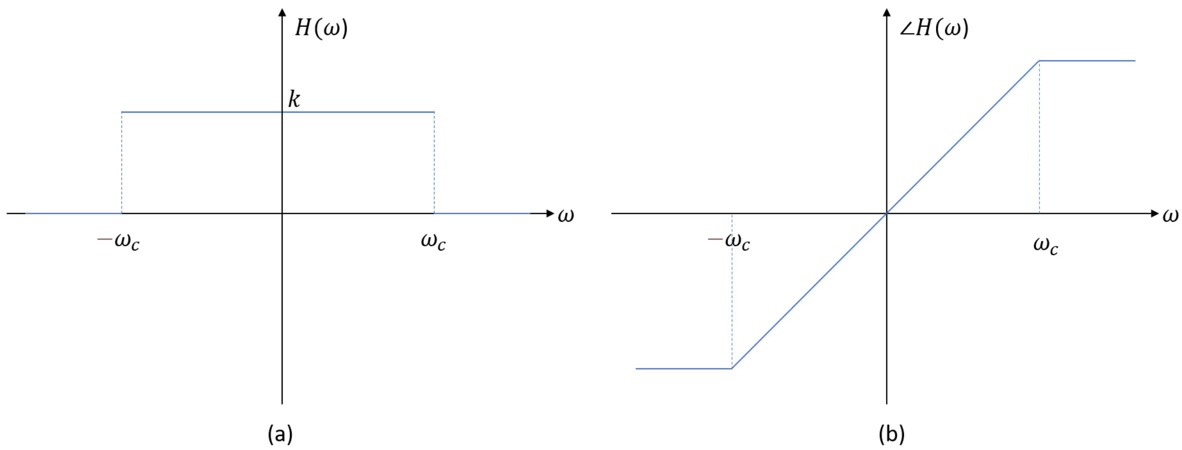


图 1: 理想低通滤波器在频域的表示。（a）幅频；（b）相频。

在“有限带宽”$[-w_c, w_c]$ 范围内，满足：

$$H(w) = \begin{cases} ke^{-jwt_d}, & w \leqslant w_c \\ 0, & w > w_c \end{cases}$$

$t_d$ 为时间延迟

$\mathscr{F}^{-1}\{H(w)\} = \frac{w_c}{\pi} Sa[w_c(t - t_d)]$

表明：理想低通滤波器在频域上是门函数，在时域上是 Sa 函数，且在时域上 Sa 函数关于 $t_d$ 对称。

### 1.3 如何理解 Ideal LPF 的“物理不可实现性”?

（1）$\mathscr{F}^{-1}H(w)$ 是 Sa 函数，在时间上趋向于无穷时，仍然有信号，这是不存在的。

（2）$\delta_t \to h(t)$, 表明 Sa 函数在 $t<0$ 时也有信号，这是“非因果”的。

### 1.4 Ideal LPF 的其他性质

$\delta_t \to A\delta(t-t_d)$, 信号是从 $\delta$ 函数变为 Sa 函数，信号不是一个无失真系统，信号是“严重失真”的。

### 1.5 物理可实现的理想低通滤波器的条件

“佩利-维纳”定理　　是一个“必要条件”

（1）在时域上：$h(t)=0 \quad \text{for} \quad t<0$

（2）在频域上：

A. $\int_{\mathbb{R}} |H(w)|^2 dw < \infty \equiv \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dw < \infty$

B. $\int_{\mathbb{R}} \frac{ln|H(w)|}{1+w^2} dw < \infty$ , 表明衰减不能快于 $e^{-w^2}$

## 2 采样定理

见对应的课件“信号与系统-采样定理”

## 3 例 2

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=2f'(t)+6f(t)$，其中，$y(0_-)=1$，$y'(0_-)=-1$，$f(t)=5costu(t)$

解：进行拉普拉斯变换可得：

$Y(s)=\frac{s^2y(0_-)+y'(0_-)+sy(0_-)}{s^2+5s+6}+\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)$

对于这个完全响应：

第一项 $\frac{s^2y(0_-)+y'(0_-)+sy(0_-)}{s^2+5s+6}$ 为“零输入响应”项

第二项 $\frac{2(s+3)}{s^2+5s+6}F(s)$ 为“零状态响应”项

分母 $s^2+5s+6$ 为“系统”

第一项分子 $s^2y(0_-)+y'(0_-)+sy(0_-)$ 为“初始条件”

第二项分子 $2(s+3)F(s)$ 为“激励”

对 $Y(s)$ 化简得：$Y(s)=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+2}+\frac{k_4}{s+1}$

$\mathscr{L}^{-1}Y(s)=[k_1e^{-2t}+k_2e^{-3t}+k_3e^{-2t}+k_4cos(t-\varphi_4)]u(t)$

其中前两项为“零输入”响应，后两项为“零状态”响应; 前三项也称为“暂态分量”，最后一项也称为“稳态分量”。