信号与系统课程笔记：Lecture 12,(推导) 傅里叶变换

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 10 月 27 日（第八周，周五）

1 课堂回顾

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[\omega]e^{j\omega t} \qquad n \in \mathbb{Z}，\omega = n\Omega = n\frac{2\pi}{T}$

$F[\omega] = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{dt}$

$F[\omega] =| F_n[\omega] | e^{j\phi_n}$ ，称为“双边频谱”（幅度谱和相位谱）

2 A Example of Fourier series

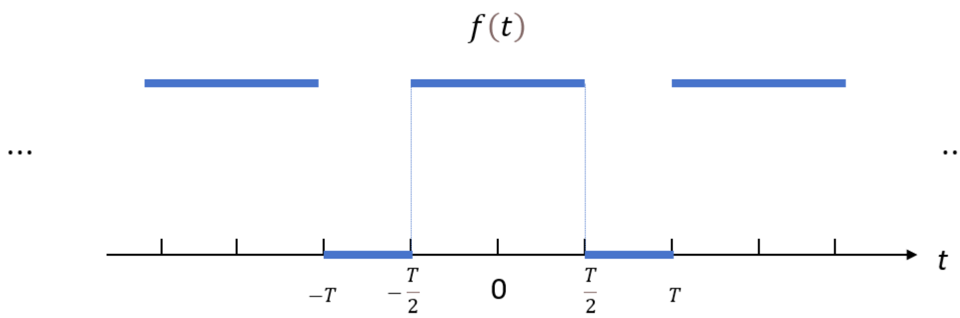

图 1: 时域上的一个门函数

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in (-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}) \\ 0 & e, e \end{cases}$$

2.1 傅里叶级数展开

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\Omega t}\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\Omega t}\mathrm{dt} \\ &= \frac{1}{-jn\Omega t}e^{-jn\Omega t} \mid_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{1}{jn\Omega t}(e^{jn\Omega\frac{\tau}{2}} - e^{-jn\Omega\frac{\tau}{2}}), \text{有：} cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}), sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \\ &= \frac{2}{n\Omega t}sin(\frac{n\Omega\tau}{2}) \end{aligned}$$

$= \frac{\tau}{T} \frac{sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$

令 $\frac{n\Omega\tau}{2} = x$

$= \frac{\tau}{T} \frac{sinx}{x}$

2.2 $sinx/x$

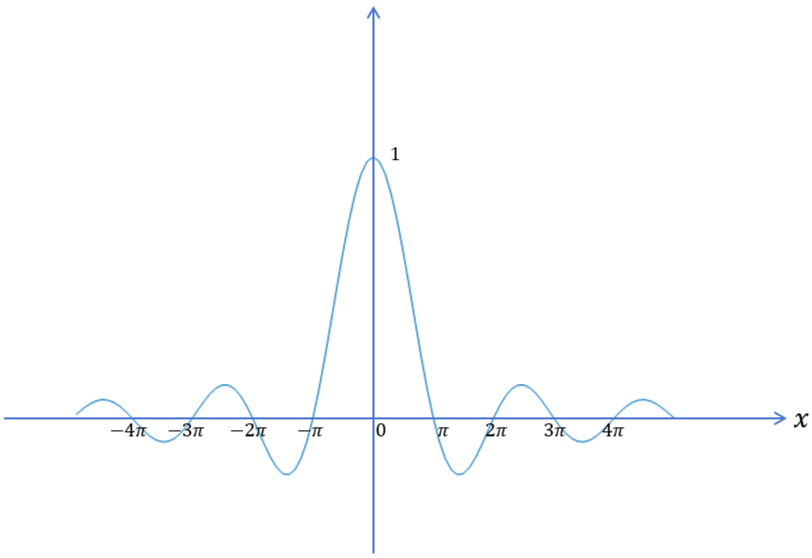

图 2: sinc 函数示意图

当将 x 轴弯曲为圆形时，该函数形式为雷达信号发射时的强度图

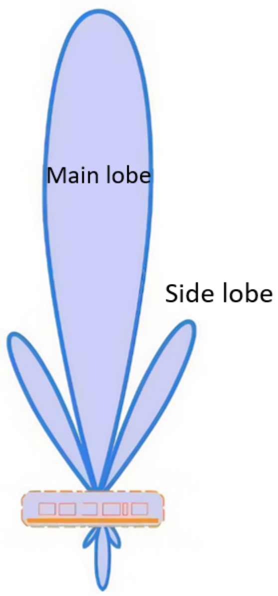

图 3: 雷达主瓣与旁瓣

（1）对于门函数傅里叶级数展开后，对应的 sinc 图像中每个“包络”间隔是多少？

$\omega = n\Omega$

间隔 $\omega = \frac{2\pi}{T}(rad/s)$

结论 1：采样间隔与 τ 无关，只与周期 T 有关。

（2）对于门函数傅里叶级数展开后，对应的 sinc 图像中 π 对应着多少？

$n\omega\tau/2 = \pi$ ， $n\Omega = \omega$

于是有：

$\omega\frac{\tau}{2} = \pi \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\tau}$

结论 2：第一个“0”点（形状）及后续“0”点只由 τ 决定，与 T 无关。

（3）$0 \sim \pi$ 之间有几条线（采样间隔）？令 $\tau = \frac{1}{4}T$

$\frac{2\pi}{\tau}/\frac{2\pi}{T} = \frac{T}{\tau} = 4$

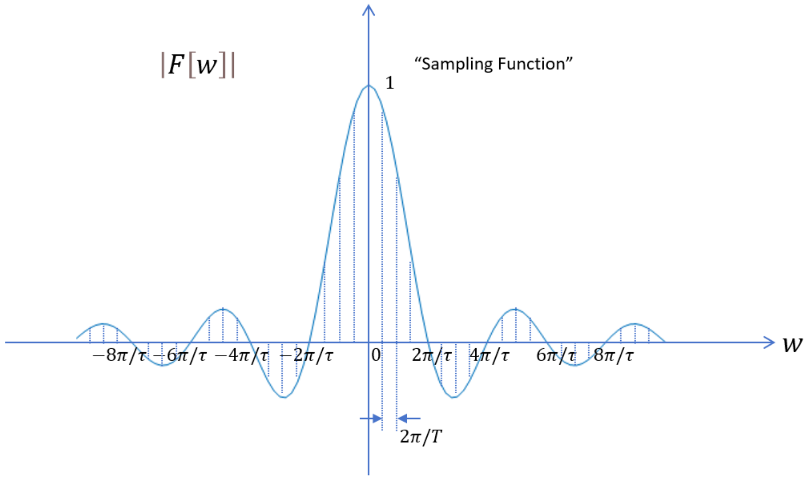

图 4: 采样函数示意图

$F_n = \frac{\tau}{T}\frac{sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2}$

$sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$

（4）当 T 不变，τ 变小，图 4 函数图像怎么变化？

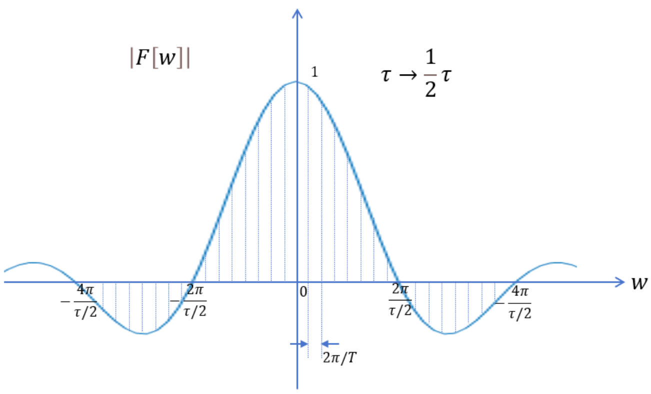

图 5: τ 变小两倍

T 不变 $\rightarrow$ 采样间隔不变

τ 变小 $\rightarrow$ $\frac{2\pi}{\tau}$ 变大

（5）当 T 变大，τ 不变，图 4 函数图像怎么变化？

T 变大 $\rightarrow$ $\frac{2\pi}{T}$ 变小，采样间隔更密

τ 不变 $\rightarrow$ 第一个“0”点及之后的“0”点不变 $\rightarrow$“包络”形状不变

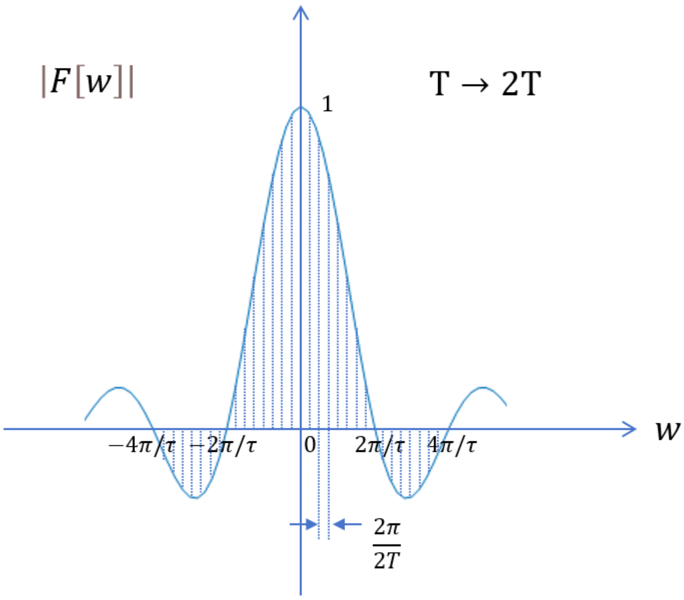

图 6: T 增大两倍

结论 1：周期信号 T 变大，采样更密，但不影响包络的形状，即不增加信息。

结论 2：一个域“拉伸”对应着另一个域的“压缩”，反之亦然。