第一题

解:由系统的激励与零状态响应得如下之解。

(1)
$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}=\frac{2s+4}{(s+1)(s+3)}$$

$$Y(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+4}=\frac{6}{(s+1)(s+4)}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)}=\frac{3s+9}{s^2+6s+8}=\frac{\frac{3}{2}}{s+2}+\frac{\frac{3}{2}}{s+4}$$

故得

$$h(t)=\frac{3}{2}(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-4t})U(t)$$

(2) 系统的微分方程为

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=3f'(t)+9f(t)$$

第二题

解:根据已知的 $H(s)$,可列写系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$$

对上式等号两端同时求单边拉普拉斯变换得

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3sY(s)-3y(0^-)+2Y(s)=sF(s)+3F(s)$$

将 $F(s)=\dfrac{1}{s+3}$ 和 $y(0^-)=1,y'(0^-)=2$ 代入上式,经整理得

$$Y(s)=\underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)}_{Y_f(s)}+\underbrace{\frac{s+5}{s^2+3s+2}}_{Y_x(s)}$$

$$Y_x(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

故得零输入响应为

$$y_x(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})U(t)$$

$$Y_f(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

故得零状态响应为

$$y_f(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})U(t)$$

故得全响应为

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=\underbrace{(5\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t})U(t)}_{\text{自由分量}}$$

全响应中没有强迫响应分量,这是因为激励 $F(s)$ 的极点 $(s+3)$ 被系统 $H(s)$ 的零点 $(s+3)$ 约去了。

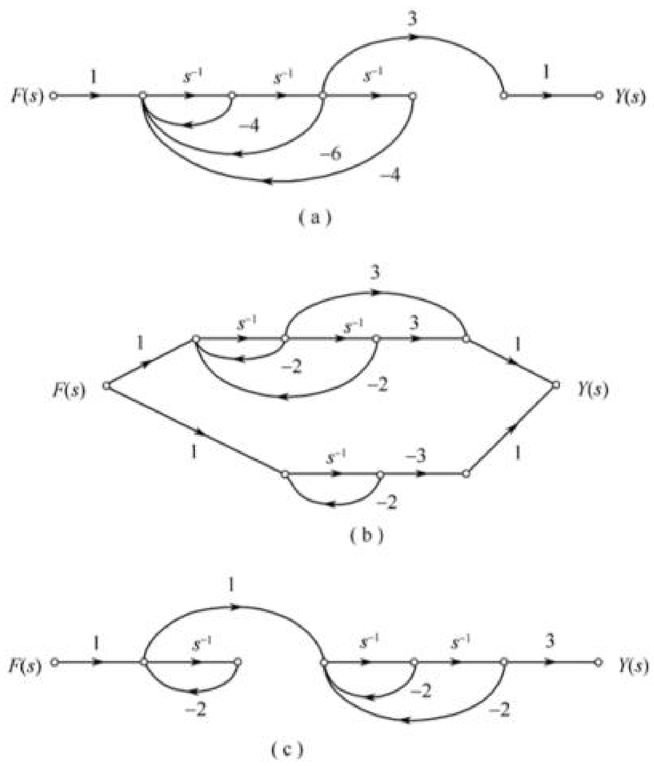
第三题

解：

(1) 直接形式信号流图如图例 6.25(a) 所示。

(2) $H(s)=\dfrac{3s+3}{s^2+2s+2}+\dfrac{-3}{s+2}$，故并联形式的信号流图如图例 6.25(b) 所示。

(3) $H(s)=\dfrac{s}{s+2}\cdot\dfrac{3}{s^2+2s+2}$，故级联形式的信号流图如图例 6.25(c) 所示。



图例 6.25

第四题

解:(1) 用卷积和定义直接求解，有

$$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|i|}=\sum_{i=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{|i|}+1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|i|}=1+2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=3$$

(2) 解法一：利用不进位乘法求解。将两个有限长序列以各自的 k 值按右端对齐，进行乘法，卷积和第一个不为零值的序号为两个序列不为零值的序号之和，该例 $y(k)$ 第一个不为零值的序号为 $k=0+1=1$。

$$\begin{array}{lcccccc}
f_1(k): & & & 2 & 2 & 1 & -1 \\
f_2(k): & & \times & & 1 & 4 & -2 \\
\hline
 & & & -4 & -4 & -2 & 2 \\
 & & 8 & 8 & 4 & -4 & \\
+ & 2 & 2 & 1 & -1 & & \\
\hline
 & 2 & 10 & 5 & -1 & -6 & 2
\end{array}$$

所以

$$y(k)=\{\underset{\uparrow}{0},2,10,5,-1,-6,2\}$$

解法二：利用卷积和的性质和 $f(k)*\delta(k)=f(k)$ 求解。

$$f_1(k)=2\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)-\delta(k-3)$$

$$f_2(k)=\delta(k-1)+4\delta(k-2)-2\delta(k-3)$$

$$\begin{aligned}y(k)&=[2\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)-\delta(k-3)]*[\delta(k-1)+4\delta(k-2)-2\delta(k-3)]\\&=2\delta(k-1)+10\delta(k-2)+5\delta(k-3)-\delta(k-4)-6\delta(k-5)+2\delta(k-6)\end{aligned}$$

所以

$$y(k)=\{\underset{\uparrow}{0},2,10,5,-1,-6,2\}$$

(3) 利用卷积和的性质求解，且用到 $\delta(2-k)=\delta(k-2)$。

因为 $$(2)^kU(k)*U(k)=[(2)^{k+1}-1]U(k)$$

所以

$$\begin{aligned}y(k)&=[(2)^{k+1}U(k+1)]*[\delta(k-2)+U(k)]\\&=(2)^{k-1}U(k-1)+[(2)^{k+2}-1]U(k+1)\\&=\delta(k+1)+3\delta(k)+[9(2)^{k-1}-1]U(k-1)\end{aligned}$$

(4) 由卷积和定义直接求解。

$$y(k)=(0.5)^kU(k)*U(-k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(0.5)^iU(i-k)$$

当 $k<0$ 时，有 $$y(k)=\sum_{i=0}^{\infty}(0.5)^i=2$$

当 $k\geqslant 0$ 时，有 $$y(k)=\sum_{i=k}^{\infty}(0.5)^i=2(0.5)k$$

所以 $$y(k)=2U(-k-1)+2(0.5)^kU(k)$$

第五题

解：根据卷积性质有

(1) $U(k)*U(k)=(k+1)U(k)$；

(2) $0.25^kU(k)*U(k)=\dfrac{1-(0.25)^{k+1}}{1-0.25}U(k)=\dfrac{4}{3}[1-(0.25)^{k+1}]U(k)$；

(3) $5^kU(k)*3^kU(k)=\dfrac{(5)^{k+1}-(3)^{k+1}}{5-3}U(k)=\dfrac{1}{2}[(5)^{k+1}-(3)^{k+1}]U(k)$；

(4) $kU(k)*\delta(k-2)=U(k)+U(k-1)+U(k-2)=(k-2)U(k-2)$。

第六题

解：(1) 因为

$$F(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{1}{z-2}$$

所以

$$f(k)=2^kU(k)-2^{k-1}U(k-1)$$

(2) 将$\dfrac{F(z)}{z}$作部分分式展开

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{z-j}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{z+j}$$

所以

$$F(z)=1-\frac{1}{2}\times\frac{z}{z-j}-\frac{1}{2}\times\frac{z}{z+j}$$

反变换

$$f(k)=\delta(k)-\frac{1}{2}(-j)^k-\frac{1}{2}(j)^k=\delta(k)-\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)U(k)$$

(3)

$$f(k)=\delta(k-1)+5\delta(k-2)-3\delta(k-5)$$

(4) $F(z)=z^2\dfrac{z}{z-2}$ 由收敛域可知 $F(z)$ 为双边 z 变换。由时移性

$$f(k)=2^{k+2}U(k+2)$$

第七题

解:由于$\frac{F(z)}{z}$为假分式,首先将 $F(z)$ 进行长除。

$$F(z) = 2z + 1 + \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

设
$$F_1(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

将$\frac{F_1(z)}{z}$进行部分分式展开,有

$$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

得
$$F(z) = 2z + 1 + \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2(z-2)} = 2z + \frac{3}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2(z-2)}$$

所以
$$f(k) = 2\delta(k+1) + \frac{3}{2}\delta(k) - U(k) + \frac{1}{2}(2)^k U(k)$$

第八题

解:在用单边 z 变换求因果系统的零输入响应时,要用到系统的初始状态。对于本例将 $k = -1$ 代入差分方程,容易验证 $y(-1) = 2, y(-2) = -0.5$ 就是系统的初始状态。

(1) 求零输入响应。对齐次差分方程作单边 z 变换

$$Y_x(z) - [z^{-1}Y_x(z) + y(-1)] - 2[z^{-2}Y_x(z) + y(-2) + z^{-1}y(-1)] = 0$$

代入 $y(-1) = 2, y(-2) = -0.5$,解得

$$Y_x(z) = \frac{z(z+4)}{z^2 - z - 2} = \frac{-z}{z+1} + \frac{2z}{z-2}$$

取反变换,得到零输入响应

$$y_x(k) = [2(2)^k - (-1)^k]U(k)$$

(2) 求零状态响应。对非齐次差分方程作单边 z 变换

$$Y_f(z) - z^{-1}Y_f(z) - 2z^{-2}Y_f(z) = F(z) + 2z^{-2}F(z) = \frac{z^2 + 2}{z(z-1)}$$

解得

$$Y_f(z) = \frac{z(z^2+2)}{(z-2)(z+1)(z-1)} = \frac{2z}{z-2} + \frac{0.5z}{z+1} - \frac{1.5z}{z-1}$$

取反变换得零状态响应

$$y_f(k) = [2(2)^k + 0.5(-1)^k - 1.5]U(k)$$