信号与系统课程笔记：Lecture 13

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 11 月 01 日（第九周，周三）

1 复习

Fourier Transfrom = $\lim_{T\to+\infty}$ Fourier Series
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\omega]e^{j\omega t}\qquad \omega=n\Omega$，$t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$
$F[\omega]=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{dt}$

2 傅里叶变换（Fourier Transfrom，FT）

2.1 推导

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}f(t)&=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[\omega]e^{j\omega t}\\&=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\xi)e^{-j\omega\xi}\mathrm{d}\xi\cdot e^{j\omega t}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-j\omega\xi}\mathrm{d}\xi\cdot e^{j\omega t}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-j\omega\xi}\mathrm{d}\xi\cdot e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

因此，傅里叶变换公式为：

$$F(\omega)=\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

令 $\omega=2\pi f$，傅里叶变换公式为：

$$F(f)=\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}F(f)e^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

2.2 说明

(1) Continuous Time Fourier Transfrom（CTFT）

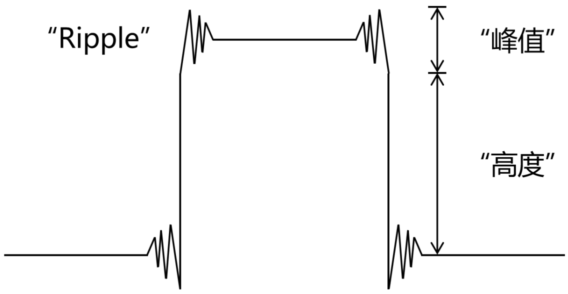
(2) “notation”: $F(j\omega)$, $F(\omega)$, $\hat{f}(\omega)$, $\mathscr{F}\{f(t)\}$　　注意: 傅里叶逆变换写为 $\mathscr{F}^{-1}\{f(t)\}$

2.3 性质

(1) Gibbs 现象

① “峰值”不会下降，大约是“高度”的 9%

② 随着累加，“波纹”的宽度会被进一步压缩，趋向于 0



(2) Dirichlet 条件（充分条件）

① 绝对可积，$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$

证明：$|F(\omega)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-j\omega t}|\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty$

② 在任意区间 $[a,b]$ 内，$f(t)$ 只有有限多个“第一类间断点”

③ 在任意区间 $[a,b]$ 内，$f(t)$ 只有有限多个极大值/极小值

2.4 例题

(1) $f(t) = e^{-\alpha t}U(t)$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{-(\alpha+j\omega)}(0-1) \\
&= \frac{1}{\alpha+j\omega}
\end{aligned}$$

(2) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

(3) $g_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0 & e.e. \end{cases}$

$F(\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

(4) $\delta(t)$

$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t)e^{-j\omega 0}\mathrm{d}t = 1$

2.5 特殊情况

问题：

一系列不满足绝对可积的函数，如何进行傅里叶变换？

思路 (极限思维)：

如果可以构造 $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$,且 $f_n(t)$ 满足 Dirichlet 条件,则 $F(\omega) = \lim_{n\to+\infty} F_n(\omega)$ 统称为广义傅里叶变换。

举例：

$\mathscr{F}\{f(t)\}$，其中 $f(t) = 1$，如何进行傅里叶变换？

(1) $e^{-\alpha|t|} \rightleftharpoons \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$\alpha \to 0 \qquad e^{-\alpha|t|} \to 1$

$\mathscr{F}\{f(t) = 1\} = \lim_{\alpha\to 0} \mathscr{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \begin{cases} +\infty & \omega = 0 \\ 0 & \omega \neq 0 \end{cases}$

$\int_{\mathbb{R}} \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega = \lim_{\alpha\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega = 2\arctan(\frac{\omega}{\alpha})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$

则 $1 \rightleftharpoons 2\pi\delta(t)$

(2) $\lim_{\tau\to 0} Sa(\frac{\omega\tau}{2}) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

3 傅里叶变换的性质

(1) 线性：if $f_1(t) \rightleftharpoons F_1(\omega)$，$f_2(t) \rightleftharpoons F_2(\omega)$

$$\text{than } af_1(t) + bf_2(t) \rightleftharpoons aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

(2) 奇偶性：if $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$

$$\text{than } f(-t) \rightleftharpoons F(-\omega)$$

(3) 对称性：if $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$

$$\text{than } F(t) \rightleftharpoons 2\pi f(-\omega)$$

(4) **尺度变换**：if $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$

$$\text{than } f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{|\alpha|}F(\frac{\omega}{\alpha})$$

(5) 频移/时移：if $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$

时移：$f(t \pm t_0) \rightleftharpoons e^{\pm j\omega t_0}F(\omega)$

频移：$f(t)e^{\mp j\omega_0 t} \rightleftharpoons F(\omega \pm \omega_0)$

(6) **卷积定理**：if $f_1(t) \rightleftharpoons F_1(\omega)$，$f_2(t) \rightleftharpoons F_2(\omega)$

$$\text{than } f_1(t) * f_2(t) \rightleftharpoons F_1(\omega)F_2(\omega)$$

证明：$\int_{\mathbb{R}}[f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau] \cdot e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} f_2(t-\tau) \cdot e^{-j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}(t-\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} f_2(\xi) \cdot e^{-j\omega(\xi)}\mathrm{d}(\xi) \cdot e^{-j\omega\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \cdot F_2(\omega) \\
&= F_1(\omega)F_2(\omega)
\end{aligned}
$$

(7) Parseval's 定理：if $f(t) \rightleftharpoons F(\omega)$

$$\text{than } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

(8) 时域/频域，微分/积分（自己看书学习！）