信号与系统课程笔记：Lecture 29：系统的状态空间分析

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 12 月 20 日（第十六周，周三）

1 课程重点梳理

（1）一般信号怎么分解为特殊信号

（2）特殊信号通过系统的变化与性质

（3）一般信号通过系统的变化与性质

重点内容：傅里叶变换和采样定理

2 课堂回顾

谐波信号通过系统

$f(t) = Ae^{j\omega_0 t} = Acos(\omega_0 t + \varphi_0) \longrightarrow \boxed{H(t)} \longrightarrow |H(\omega_0)|Acos(\omega_0 t + \varphi_0 + \angle H(\omega))$

1. $f(t)/f[k]$

$\updownarrow \quad \updownarrow$

s　z

2.

（1）$H(z)$　　$f[k] \longrightarrow H(z) \longrightarrow ?$

$H(\omega_0) = H(z)|_{z=e^{j\omega_0}}$

（2）$H(s)$　　$f(t) \longrightarrow H(s) \longrightarrow ?$

$H(\omega_0) = H(s)|_{s=j\omega_0}$

3 基本概念和定义

状态方程：表示系统状态变量与输入之间的关系的方程。

n 阶系统：由 n 个一阶微分/差分方程组构成。

输出方程：表示系统输入输出和状态变量之间的关系的方程。

对于 n 阶系统，如果有 q 个输出，则输出方程由 q 个代数方程组构成。

4 建立系统的状态方程和输出方程

4.1 初始状态

$x_1(0^-), x_2(0^-), \cdots, x_n(0^-)$

注意：

（1）电路中，一般来说，电容的系统状态选择 U_c；电感的系统状态选择 i_l

（2）系统状态数目是一定的，n 阶系统有 n 个初始状态。但是，状态方程的列法不唯一。

4.2 状态变量

状态变量：表示状态随时间变化的一组变量。

4.3 状态矢量/状态空间

$[x_1(0^-), x_2(0^-), \cdots, x_n(0^-)]^T$

状态空间为状态矢量构成的空间。

4.4 状态方程

状态方程：假设有 n 阶和 p 个输入

$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}f_1 + \cdots + b_{1p}f_p$

$\vdots$

$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}f_1 + \cdots + b_{np}f_p$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots'(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots'(t) \\ f_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = AX + BF \triangleq \text{状态方程}$$

4.5 输出方程

输出方程：描述系统输入输出和状态之间的代数方程组，假设有 q 个输出，则：

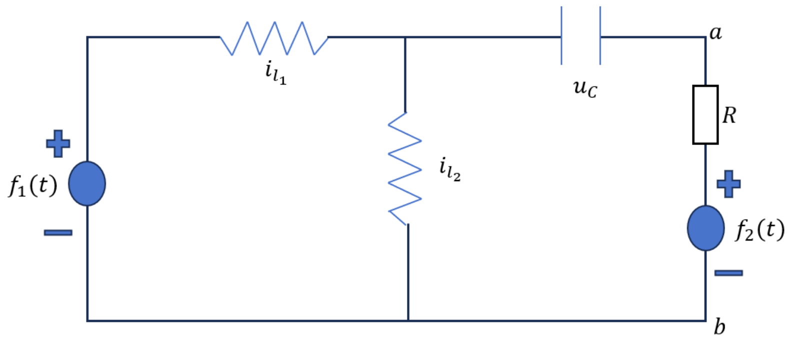
$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}f_1 + \cdots + d_{1p}f_p$

$\vdots$

$y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{n1}f_1 + \cdots + d_{qp}f_p$

$$\dot{Y} = CX + DF \triangleq \text{输出方程}$$

5 例 1



求 u_{ab}

解：

状态变量：

$x_1 = i_{L_1} \qquad x_2 = i_{L_2} \qquad x_3 = u_c$

电压（Ku）：

$x_1' = f_1 - x_3 - R(x_1 - x_2) - f_2 = -\frac{R}{L_1}x_1 + \frac{R}{L_1}x_2 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}f_1 - \frac{1}{L_1}f_2$

$x_2' = u_{L_2} = x_3 + R(x_1 - x_2) + f_2 = -\frac{R}{L_2}x_1 - \frac{R}{L_2}x_2 + \frac{1}{L_2}x_3 + \frac{1}{L_2}f_2$

电流（Kcl）：

$x_3' = i_{L_1} - i_{L_2} = x_1 - x_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

def: 状态空间 = 状态方程 + 输出方程

输出：$y_1 = u_{L_2}, y_2 = u_{ab}$

$y_1 = L_2 x_2' = R(x_1 - x_2) + x3 + f_2$

$y_2 = Ri_R + f_2 = R(x_1 - x_2) + f_2$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & R & 1 \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$