信号与系统课程笔记：Lecture 9

授课教师：秦雨潇
笔记记录：李梦薇

2023 年 10 月 20 日（第七周，周五）

1 复习

1.1 信号的分解

$f(t)=\sum_{i=k}^{l} C_i v_i(t) \quad a,b\in\mathbb{R} \quad a<b \quad \{v_i(t)\}$ 为正交完备集

其中，$C_i=\frac{\langle f(t),v_i(t)\rangle}{\langle v_i(t),v_i(t)\rangle}=\frac{1}{\|v_i(t)\|^2}\int_a^b f(t)v_i(t)\mathrm{d}t$

1.2 Fourier Series 的三角形式

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nt)+b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nt)] \quad t\in[0,T]$

其中，$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi}{T}nt)\mathrm{d}t$

1.3 Fourier Series 的余弦形式

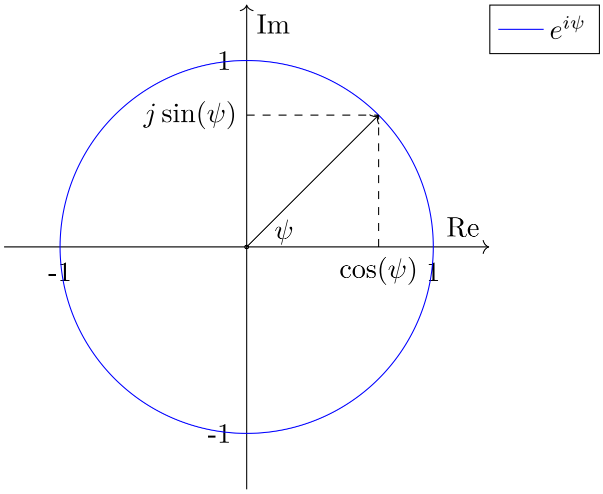
$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos(\frac{2\pi}{T}nt-\psi_n)]=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n\cos(\frac{2\pi}{T}nt-\psi_n)]$

其中，$A_n=\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2} \quad \psi=\arctan(\frac{b_n}{a_n})$

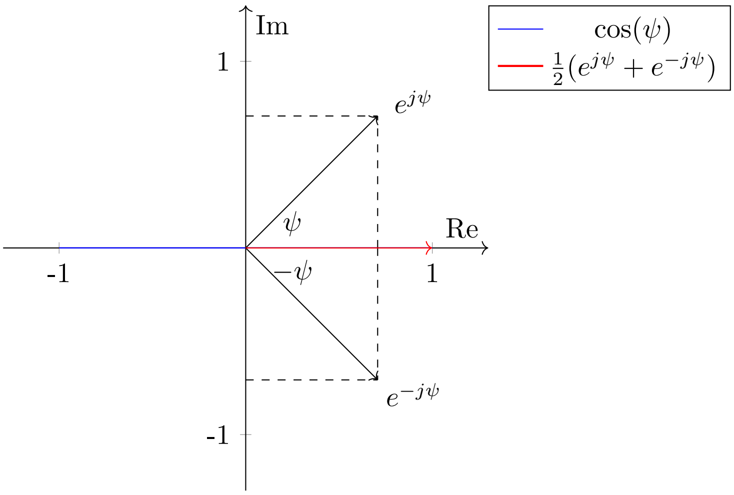
2 傅里叶级数（Fourier Series，FS）的指数（exp）形式

2.1 数学理解

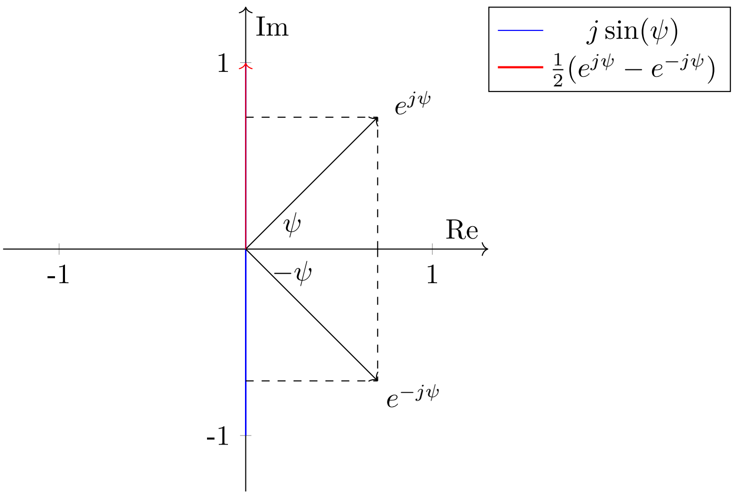
$e^{j\psi}=\cos\psi+j\sin(\psi)$



$\cos(\psi) = \frac{1}{2}(e^{j\psi} + e^{-j\psi})$



$\sin(\psi) = \frac{1}{2j}(e^{j\psi} - e^{-j\psi})$



推导：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2}[e^{j(\frac{2\pi}{T}nt+\psi_n)} + e^{-j(\frac{2\pi}{T}nt+\psi_n)}] \qquad \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \Omega \\
&= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2}[e^{j\Omega nt}e^{j\psi_n} + e^{-j\Omega nt}e^{-j\psi_n}] \\
&= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{2}e^{j\Omega nt}e^{j\psi_n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_n}{2}e^{j\Omega nt}e^{j\psi_n} \qquad \rightarrow A_n\text{和}\psi_n\text{的}n\text{仅表示序号，与正负无关} \\
&= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{A_n}{2}e^{j\Omega nt}e^{j\psi_n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{2}e^{j\psi_n}e^{j\Omega nt} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n}{2}e^{j\psi_n}e^{j\frac{2\pi}{T}nt}
\end{aligned}
$$

令 $F_n = \frac{A_n}{2}e^{j\psi_n}$，则 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad \rightarrow \quad e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = v_i(t)$？那么 $e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ 是否为正交完备集？

证明：

(1) $e^{jkx}, e^{jlx} \quad x \in [0, 2\pi] \quad k, l \in \mathbb{Z}$ 是否正交？

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{jkx}e^{-jlx}\mathrm{dx} &= \int_0^{2\pi} e^{j(k-l)x}e\mathrm{dx} \\
&= \begin{cases} k = l & \int_0^{2\pi} \mathrm{dx} = 2\pi \\ k \neq l & \frac{1}{k-l}e^{j(k-l)x}\Big|_0^{2\pi} = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

由此可见正交，等同于 $e^{j\frac{2\pi}{T}kx}, e^{j\frac{2\pi}{T}lx} \quad x \in [0, T]$ 正交。

(2) 完备（详见书籍等证明资料）。

因此，$e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ 是正交完备集。那么，$F_n = C_i = \frac{\langle f(t), e^{j\Omega nt}\rangle}{\|e^{j\Omega nt}\|^2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\Omega nt}\mathrm{d}t$。

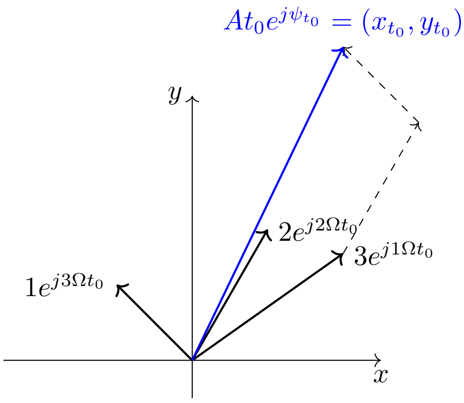
综上所述，FS 的指数形式为：

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$，其中 $F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\Omega t}\mathrm{dt} \qquad \rightarrow \omega = n\Omega$

或 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(\omega)e^{j\omega t}$，其中 $F_n(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{dt}$

2.2 几何理解

$f(t_0) = 3e^{j1\Omega t_0} + 2e^{j2\Omega t_0} + 1e^{j3\Omega t_0}$



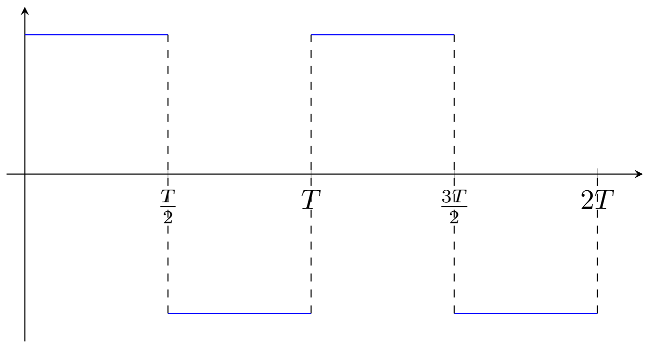
$f(t)$ “一般”情况下是实数信号时，$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}$，则 $F_n = F_{-n}$，$F[n,\Omega] = F[-n,\Omega]$，$n\Omega t = -n\Omega t$（$\psi_n = \psi_{-n}$）。由此可知，我们只需要记录 F_n 一半的信号。

3 几种特殊形式函数的 FS

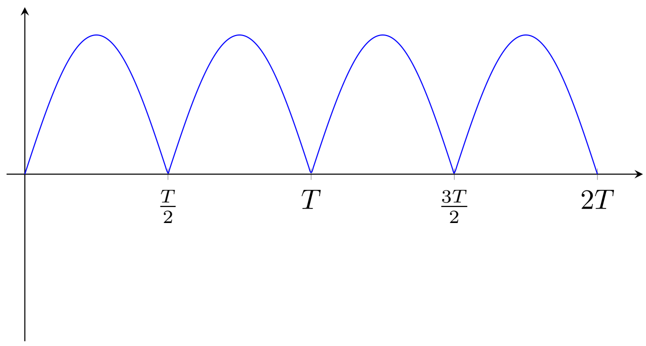
(1) 偶函数：$b_i = 0$

(2) 奇函数：$a_0 = 0 \quad a_i = 0$

(3) 奇谐函数：半波镜像

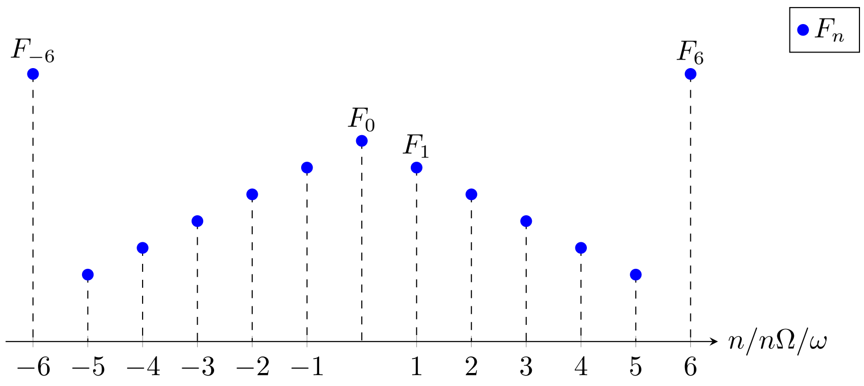


(4) 偶谐函数：半波重叠



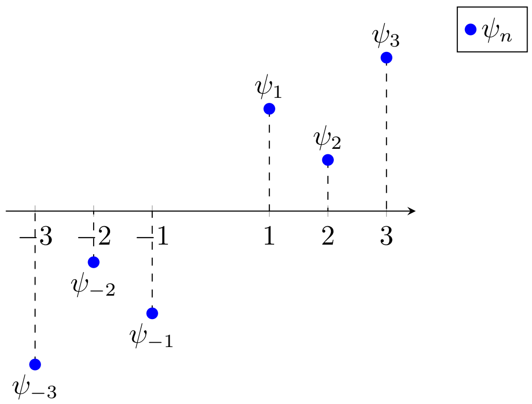
4 频谱

(1) $F_n = \frac{A_n}{2} e^{j\psi_n} \quad [-\pi, \pi] \quad \rightarrow \quad |F_n| = \frac{A_n}{2}$



(2) $\sum F_n e^{j\omega t} = \sum |F_n| e^{j\psi_n} e^{j\omega t}$

$\psi_1 = -\psi_{-1} \quad \psi_2 = -\psi_{-2} \quad \psi_3 = -\psi_{-3} \quad \ldots \quad \psi_n = -\psi_{-n}$



注意：实数情况下才成立。