## 题目 1

解：由信号周期性的性质得

(1) $\cos 8t$ 为周期信号，周期为 $T_1=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$；$\sin 12t$ 为周期信号，周期为 $T_2=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，且 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{2}$ 为有理数，故 $f(t)$ 为周期信号，其周期为 $T$，等于 $T_1$ 与 $T_2$ 的最小公倍数，即 $T=\frac{\pi}{2}$。

(2) $\cos 2t$ 为周期信号，周期为 $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$；$2\sin \pi t$ 为周期信号，周期为 $T_2=\frac{2\pi}{\pi}=2$，但 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\pi}{2}$ 为无理数，故 $f(t)$ 为非周期信号，$T_1$ 与 $T_2$ 之间不存在最小公倍数，故 $f(t)$ 为非周期信号。此题说明两个周期信号之和不一定是周期信号。

(3) $f(k)$ 的周期 $N=\frac{2\pi}{\omega}$，$N$ 应为正整数，但由于 $\pi$ 为无理数，$N$ 不可能为正整数，故 $f(k)$ 为非周期信号。

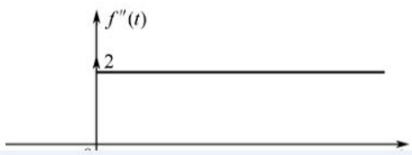
(4) $\cos\frac{\pi}{4}k$ 为周期信号，周期为 $N_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$ 个间隔；$2\sin 4\pi k$ 为周期信号，周期为 $N_2=2\times\frac{2\pi}{4\pi}=1$。故 $f(k)$ 为周期信号，其周期 $N$ 等于 $N_1$ 与 $N_2$ 的最小公倍数，即 $N=8$ 个间隔。

## 题目 2

**解**：由周期信号的性质可得

(1) $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(2) $2\cos\frac{\pi}{4}k$ 的周期为 $N_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，$\sin\frac{\pi}{8}$ 的周期为 $N_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$，$\cos\frac{\pi}{2}k$ 的周期为




$$N_3=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

故 $f(k)$ 的周期为 $N=16$。

## 题目 3

**解**：由功率信号与能量信号的定义得

(1) 由于

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2a}<\infty$$

故 $f(t)$ 为能量信号。

(2) 周期信号均为功率信号，$P=\frac{1}{2}A^2<\infty$。

(3) 由于

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t^2\mathrm{d}t\rightarrow\infty$$

$$P=\lim_{T\rightarrow\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\rightarrow\infty}\int_0^{\frac{T}{2}}t^2\mathrm{d}t\rightarrow\infty$$

故 $f(t)$ 既不是能量信号，也不是功率信号。无界的与非收敛的非周期信号，既不是能量信号，也不是功率信号。

(4) 由于

$$W=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f(k)|^2=\sum_{k=0}^{\infty}0.25^k=\frac{1}{1-0.25}=\frac{4}{3}<\infty$$

故 $f(t)$ 是能量信号。

(5) 由于

$$P=\lim_{N\rightarrow\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{N}|f(k)|^2=\lim_{N\rightarrow\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{N}1^2=\lim_{N\rightarrow\infty}\frac{1}{2N+1}(N+1)=\frac{1}{2}<\infty$$

故 $f(t)$ 为功率信号。

## 题目 4

**解**:由信号的积分性质得

(1) 原式 $=\int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t)\mathrm{d}t+\int_{-5}^{5}(3t-2)\delta(t-2)\mathrm{d}t=-2+(3\times2-2)=2$;

(2) 原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}(2-t)\delta'(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}(2-t)\delta(t)\mathrm{d}t=1+2=3$;

(3) 原式 $=-(t^2-2t+3)'|_{t=2}=-(2t-2)|_{t=2}=-2$;

(4) 原式 $=\int_{-5}^{1}\cos\frac{\pi}{2}t\delta(t-2)\mathrm{d}t+\int_{-5}^{1}\cos\frac{\pi}{2}t\delta(t+4)\mathrm{d}t=0+1=1$。

## 题目 5

解：(1) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\{[\cos t+\sin(2t)]\varepsilon(t)\}$

$$\begin{aligned}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{[-\sin t+2\cos(2t)]\varepsilon(t)+\delta(t)\}\\&=[-\cos t-4\sin(2t)]\varepsilon(t)+[-\sin t+2\cos(2t)]\delta(t)+\delta'(t)\\&=[-\cos t-4\sin(2t)]\varepsilon(t)+2\delta(t)+\delta'(t)\end{aligned}$$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}\delta(t)]=-\mathrm{e}^{-t}\delta(t)+\mathrm{e}^{-t}\delta'(t)=-\delta(t)+\delta'(t)+\delta(t)=\delta'(t)$

所以 $(1-\mathbf{t})\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left[\mathbf{e}^{-\mathbf{t}}\delta(\mathbf{t})\right]=(1-\mathbf{t})\left[-\delta(\mathbf{t})+\delta'(\mathbf{t})\right]=\delta(\mathbf{t})+\delta'(\mathbf{t})$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\lim_{t\rightarrow0}\frac{\sin(\pi t)}{t}=\lim_{t\rightarrow0}\frac{\pi\sin(\pi t)}{\pi t}=\pi$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}[\delta'(t)+\delta(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta(t)dt$

根据冲击偶函数的性质：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$

得 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t)dt=-\frac{de^{-2t}}{dt}\Big|_{t=0}=-(-2)e^{-2t}\Big|_{t=0}=2$

根据冲击函数的性质：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta(t)dt=e^{-2t}\Big|_{t=0}=1$

得 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}[\delta'(t)+\delta(t)]dt=3$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2+\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right]\delta(t+2)dt=\left[t^2+\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right]\Big|_{t=-2}=3$

(6) 根据冲击函数的尺度变换性质：$\delta\left(\frac{1}{2}t\right)=\frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|}\delta(t)=2\delta(t)$

得 $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2)\delta\left(\frac{t}{2}\right)dt=2\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2)\delta(t)dt=2(t^2+2)\Big|_{t=0}=4$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+2t^2-2t+1)\delta'(t-1)dt=-\left[\frac{d}{dt}(t^3+2t^2-2t+1)\right]\Big|_{t=1}$

$$=-(3t^2+4t-2)\big|_{t=1}=-5$$

(8) 因为 $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

所以 $(1-x)\delta'(x)=\delta'(x)+\delta(x)$

则 $\int_{-\infty}^{t}(1-x)\delta'(x)dx=\int_{-\infty}^{t}[\delta'(x)+\delta(x)]dx=\delta(t)+\varepsilon(t)$

**题目 6**

**解**: 本题 (1)~(3) 延续题 1–7 和题 1–9 的类型, 要求绘一个指数函数或三角函数经矩形"选通门"的输出。(4) 是一个简单的门函数, 同题 1–7(2)。(5) 和 (6) 分别是 Sa 函数和衰减包络三角函数的导数。

(1) 和题 1–9(3) 类似, 一个单调增函数和一个单调减函数之积可能有多种变化趋势, 需确定极点的数量、位置和属性。$f'(t) = \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t}, f'(t_0) = 0 \Longrightarrow t_0 = 1$, 即 $f(t)$ 在 $t_0 = 1$ 取得极值 $\mathrm{e}^{-1}$。再由 $t\mathrm{e}^{-t}u(t)$ 恒大于零, 所以在 $t_0$ 取得极大值。即 $f(t)$ 从 $f(0) = 0$ 开始单调增至 $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ 后单调减至 $f(\infty) = 0$。

(2) 本题可理解为 $g(t) = \mathrm{e}^{-t}[u(t) - u(t-1)]$ 右移 1 而成。

(3) $\cos(\pi t)$ 的周期是 2, 所以 $[u(t) - u(t-2)]$ 的"选通门"恰好截取一个周期。

(4) 无需赘述。

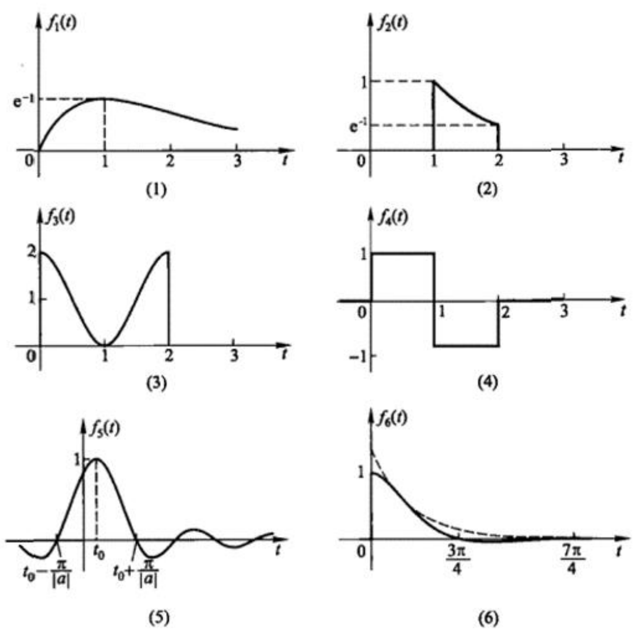
(5) 本题可理解为 $\dfrac{\sin t}{t}$ 先压扩 $a$ 再右移 $t_0$, 即在 $t = t_0$ 时取得最大值, 并向两侧振荡衰减, 在 $t = t_0 + \dfrac{n}{a}\pi$ 有过零点。假设 $t_0 > 0$, 由于 $\dfrac{\sin t}{t}$ 是偶函数, $a$ 的符号不影响绘图结果。

(6) 对原式进行化简

$$\begin{aligned} f(t) &= -\mathrm{e}^{-t}(\sin t)u(t) + \mathrm{e}^{-t}(\cos t)u(t) + \mathrm{e}^{-t}(\sin t)\delta(t) \\ &= \mathrm{e}^{-t}(\cos t - \sin t)u(t) \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)u(t) \end{aligned}$$

即周期为 $2\pi$ 的余弦函数右移 $\dfrac{\pi}{4}$ 后被衰减指数 $\mathrm{e}^{-t}$ 加权, $f(0) = 1$, 过零点是 $\dfrac{3}{4}\pi + n\pi, n = 1, 2, 3\cdots$。

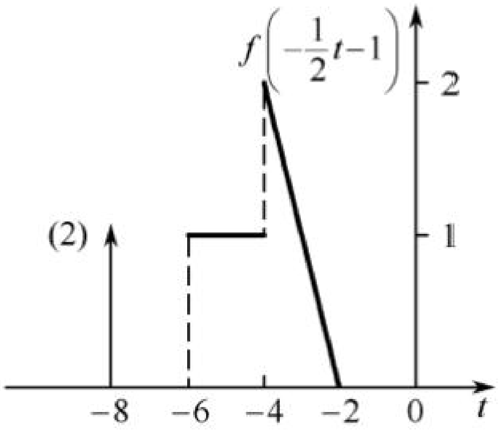
绘图结果如解图 1–11 所示。




解图 1–11

**题目 7**

**解：如下图所示**




( b )

**题目 8**

解：（1）将 $\mathbf{f}(\mathbf{t})$波形右移 1 得 $\mathbf{f}(\mathbf{t}-1)$波形，保留$\mathbf{t}>0$的部分，波形如图 1-14（a）所示。

（2）将 $\mathbf{f}(\mathbf{t})$波形右移 1 得 $\mathbf{f}(\mathbf{t}-1)$波形，保留$\mathbf{t}>1$的部分，波形如图 1-14（b）所示。

（3）$\mathbf{f}(\mathbf{t}) \xrightarrow{\text{左移2}} \mathbf{f}(\mathbf{t}+2) \xrightarrow{\text{反转}} \mathbf{f}(2-\mathbf{t})$，波形如图 1-14（c）所示。

（4）将（3）中所得 $\mathbf{f}(2-\mathbf{t})$的波形截去$\mathbf{t}>2$的部分，波形如图 1-14（d）所示。

（5）$\mathbf{f}(\mathbf{t}) \xrightarrow{\text{向左平移1}} \mathbf{f}(\mathbf{t}+1) \xrightarrow{\text{压缩为原来的}\frac{1}{2}} \mathbf{f}(2\mathbf{t}+1) \xrightarrow{\text{波形反转}} \mathbf{f}(1-2\mathbf{t})$，波形如图 1-14（e）所示。

（6）$\mathbf{f}(\mathbf{t}) \xrightarrow{\text{右移2}} \mathbf{f}(\mathbf{t}-2) \xrightarrow{\text{扩展为2倍}} \mathbf{f}(0.5\mathbf{t}-2)$，波形如图 1-14（f）所示。

（7）信号波形跳变处求导为冲激信号，例如图 1-14 中在$\mathbf{t}=-2$处，$\mathbf{f}(\mathbf{t})$由 0 跳变到 2，则求导后，此处为$2\delta(\mathbf{t}+2)$。也可写出函数表达式然后求导，波形如图 1-14（g）所示。

（8）积分，相当于 $\mathbf{f}(\mathbf{t})*\varepsilon(\mathbf{t})$，信号积分后变得平滑，波形如图 1-14（h）所示。

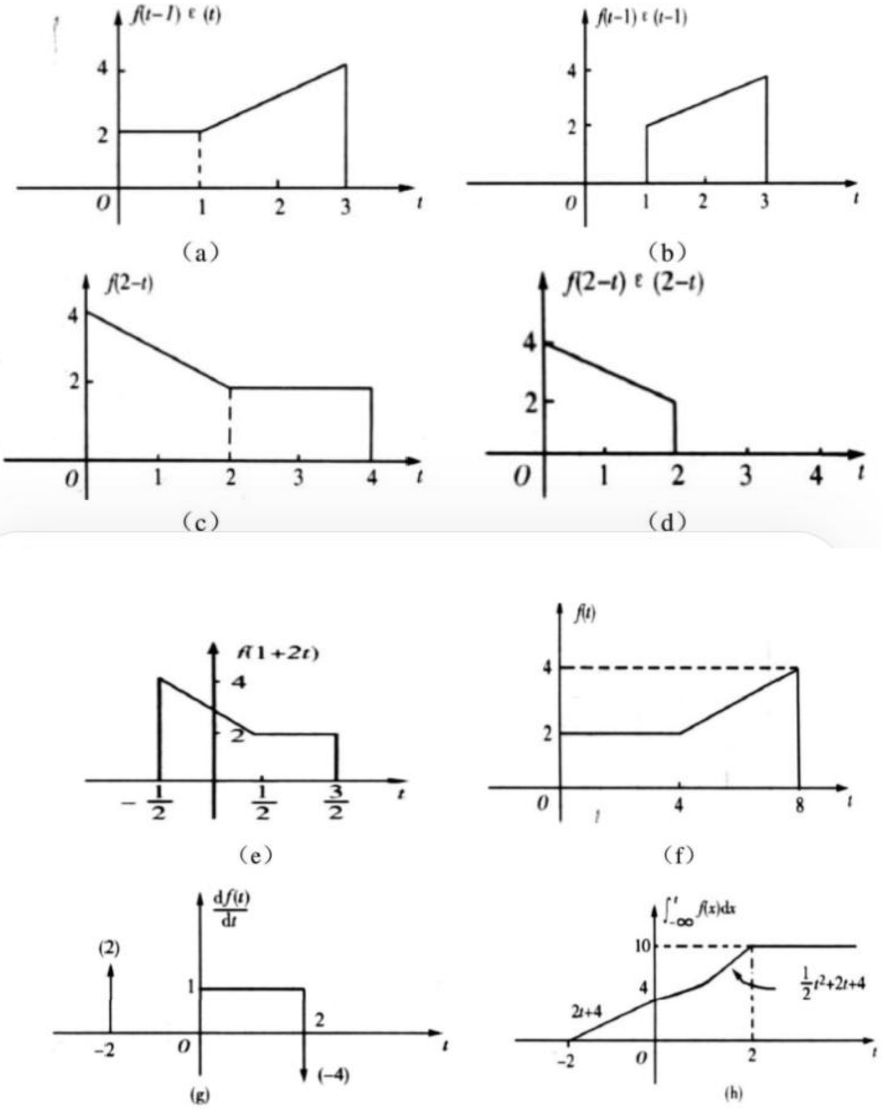



图 1-14

## 题目 9

解：利用尺度变换 $f(3-2t)$ 展宽至原来的 2 倍得到 $f(3-t)$，如图 1-20（a）所示。

$f(3-t)$ 反转得到 $f(3+t)$，向右平移 3 得到 $f(t)$，如图 1-20（b）所示。

由 $f(t)$ 波形直接求导可得 $\frac{df(t)}{dt}$ 的波形，跳变的部分用冲击函数表示，如图 1-20（c）所示。

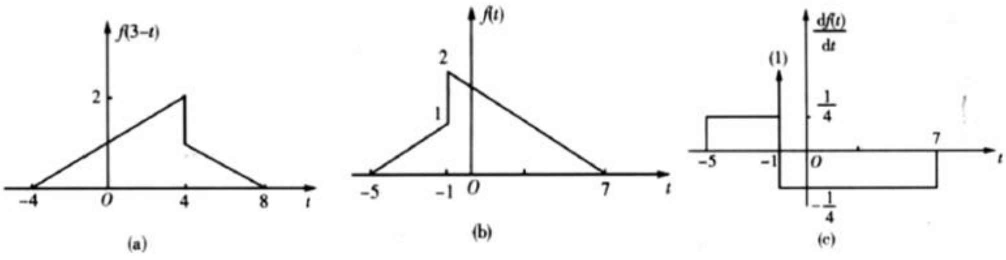



图 1-20

**题目 10**

**解** (1) 若以 $u_C(t)$ 为响应，则可建立如下方程组

$$\begin{cases} i_L(t)=\dfrac{u_C(t)}{R}+C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ u_S(t)=u_C(t)+L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \quad ①$$

消去 $i_L(t)$，可得如下微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=u_S(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C(t)=\frac{1}{LC}u_S(t)$$

(2) 若以 $i_L(t)$ 为响应，则消去方程组①中的 $u_C(t)$，可得如下微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R}u_S(t)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i_L(t)=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RLC}u_S(t)$$

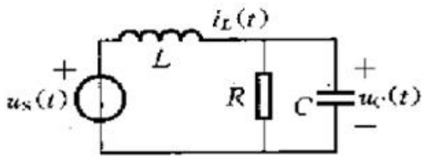



图 1-13

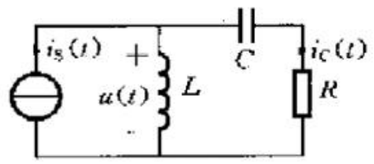



图 1-14