

# Mathématiques - Exercices classiques

Armand Wayoff

## 1 Polynômes

- ☐ Polynômes scindés
- ☐ Polynômes de Legendre
- ☐ Polynômes de Hilbert, fractions associées

## 2 Suites et Séries numériques

- ☐ Lemme de Cesàro
- ☐ Constante d'Euler
- ☐ Séries de Bertrand
- ☐  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- ☐ Sommutation des relations de comparaison
- ☐ Preuve de la formule de Stirling par Wallis
- ☐ Règle de Raabe
- ☐ Suites sous-additives
- ☐ Étude de la suite de terme général  $u_n = \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}$
- ☐ Décomposition incides pairs/impairs
- ☐ Produits infinis
- ☐ Transformation d'Abel
- ☐ Décomposition en éléments simples

### 3 Algèbre linéaire, matrices

- ☐ Produit d'endomorphismes nilpotents qui commutent
- ☐ Nilpotents
- ☐ Centre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- ☐ Semblables sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$
- ☐ Noyaux itérés
- ☐ Indice de nilpotence en dimension finie
- ☐ Applications de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  conservant le produit
- ☐ Matrices compagnon et commutant d'un cyclique
- ☐ Polynômes d'interpolation de Lagrange, lien avec les déterminants de Vandermonde
- ☐ Polynômes de Tchebychev
- ☐ Caractérisation des homotéthies:  $(x, f(x))$  liée pour tout  $x$
- ☐ Matrices à diagonale dominante

### 4 Déterminants

- ☐ Déterminant par blocs
- ☐ Déterminant tridiagonal
- ☐ Déterminant circulant
- ☐ Déterminant des  $|a_i - a_j|$
- ☐ Déterminant de Vandermonde, applications
- ☐ Inverse de la matrice de Vandermonde
- ☐ Déterminants de Cauchy, de Hilbert

## 5 Réduction

- ☐ Matrices à diagonale dominante
- ☐ Critère de non-diagonalisabilité sur  $\mathbb{C}$
- ☐ Vecteurs propres de  ${}^t\text{com}(A)$
- ☐ Éléments propres de  $MN$ , de  $NM$
- ☐ Réduction d'une matrice creuse
- ☐ Que dire si  $u \circ u$  est diagonalisable ?
- ☐ Spectre de  $Id_E - uv$  et  $Id_E - vu$
- ☐ Diagonalisation ou trigonalisation simultanée
- ☐ Commutant d'un endomorphisme diagonalisable
- ☐ Déterminant, réduction d'une matrice tridiagonale

## 6 Espaces préhilbertiens ou euclidiens

- ☐ Décomposition d'Iwasama
- ☐ Polynômes de Legendre
- ☐ Extremums d'une fonction sur les fonctions continues
- ☐ Polynômes de Laguerre
- ☐ Polynômes orthogonaux associés à un poids
- ☐ Matrices de Gram
- ☐ Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif
- ☐ Décomposition polaire d'une matrice
- ☐ Endomorphismes et matrices antisymétriques
- ☐ Rayon spectral d'une matrice

## 7 Intégration

- ☐ Fonction intégrable et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$
- ☐ Calcul d'une intégrale impropre
- ☐ Intégrales de Bertrand
- ☐ Une propriété géométrique de l'intégrale
- ☐ Permutation somme/intégrale
- ☐ Variante du lemme de Lebesgue
- ☐ Sommes de Riemann généralisées
- ☐ Intégration des relations de comparaisons
- ☐ Transformée de Fourier de la loi normale
- ☐ Intégrale à paramètre dans les bornes
- ☐ Intégrale de Dirichlet via une intégrale à paramètre

## 8 Géométrie, courbes et surfaces

- ☐ Géométrie élémentaire dans l'espace
- ☐ Réduction, tracé de coniques/quadratiques
- ☐ Orthoptique d'une parabole
- ☐ Courbe orthoptique de l'ellipse (cercle de Monge)
- ☐ Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas

## 9 Espaces vectoriels normés, suites

- ☐  $e$  est irrationnel
- ☐ Lemme de Cesàro, application à  $u_{n+1} = \sin(u_n)$
- ☐ Cesàro (variante)
- ☐ Normes de Hölder

## 10 Fonctions d'une variable réelle

- ☐ Point fixe d'une fonction de  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- ☐ Convexité et signe
- ☐ Théorème de Darboux
- ☐ Rolle à l'infini
- ☐ Equation fonctionnelle

## 11 Suites et séries de fonctions

- ☐ Convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales
- ☐ Intégration d'une série de fonctions
- ☐ Equivalent d'une série de fonctions
- ☐ Intégrale à paramètre vs. série de fonctions

## 12 Séries entières

- ☐ Comparaison de séries entières au bord
- ☐ Développement en série entière
- ☐ Série génératrice des polynômes d'Hermmite
- ☐ Théorème abélien ou taubérien sur les séries numériques
- ☐ Transformée de Laplace d'une série entière
- ☐ Formule de Cauchy et applications
- ☐ Matrice et série entière
- ☐ Fonction de Bessel et intégrale de Wallis
- ☐ Fonction non développable en série entière

## 13 Séries de Fourier

- ☐ Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger)
- ☐ Calcul de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(4)$
- ☐ Si la série de Fourier converge uniformément...
- ☐ Equation différentielle anticipante
- ☐ Interversions de Fourier

## 14 Équations différentielles

- ☐ Système différentiel en  $z = x + iy$
- ☐ Système différentiel antisymétrique
- ☐ Equation d'ordre 1 avec raccordement
- ☐ Variation des constantes
- ☐ Equation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement
- ☐ Lemme de Gronwall, application à une équation différentielle
- ☐ Variables séparables
- ☐ Equation non linéaire (de Bernoulli)
- ☐ Intégrale de Dirichlet via une équation différentielle

## 15 Fonctions de plusieurs variables

- ☐ Changement de variable polaire
- ☐ Equation aux dérivées partielles d'ordre 2
- ☐ Intégrales doubles
- ☐ Centre de masse d'un demi-disque
- ☐ Primitives d'une forme différentielle
- ☐ Changement de variables dans une intégrale double