ポストモダン解析学 証明メモ

ashiato45

2013 年 9 月 13 日

1 これは何？

シュプリンガー (丸善) の「ポストモダン解析学」，原題は「Postmodern Analysis」の行間埋めの記録.

2 定理 7.39 の i→iii

K を対象の集合とする．背理法の仮定 (仮定 1) をすると，K の開被覆であって有限被覆がとれないものが存在する．

全有界 (問題の仮定) を仮定したので，K は 1/2 の閉球で覆える．

「1/2 半径の閉球と K の共通部分[*1]」全部が有限開被覆で覆えたとすると (仮定 2)，閉球全部が K を覆っているのだから，有限開被覆が K を覆うことになる．これは (仮定 1) に矛盾．したがって，(仮定 2) は誤りで，「1/2 半径の閉球と K の共通部分」のうち，有限開被覆で覆えないものがある (仮定 2 おわり)．その 1/2 半径の閉球を B_1 とよぶ．まとめると，$B_1 \cap K$ は有限開被覆で覆えない.

全有界を仮定してあり，K は 1/4 の閉球たちで覆えるので，$B_1 \cap K$ も 1/4 の閉球たちで覆える．「1/4 半径の閉球と $B_1 \cap K$ の共通部分」全部が有限開被覆で覆えたとすると，先の議論と同様に 1/4 半径の閉球のうち，有限開被覆で覆えないものがあるので，これを B_2 とよぶ.

同様に，半径 $1/2^n$ の閉球で，有限開被覆で覆えないものが作れるので，B_n が作れる.

閉球たちの中心で点列が作れるので，それらを ξ_n とよぶ．閉球たちは，となりあった番号なら共通部分を持つので，ξ_n と ξ_{n+1} の距離はどんどん 0 へと縮んでいき，ξ_n は Cauchy 列となる．完備 (問題の仮定) なので，ξ_n の収束先が存在して，ξ とよべ，しかも $\xi \in K$ となる．したがって，開被覆のなかで ξ を含むものがある．その開被覆の中の開集合を U とよぶ．ξ を中心とする開球で，U に含まれるものがある．それを $U(\xi, \epsilon)$ とする．B_n はどんどん小さくなって ξ に近づいていくので，十分大きい N で B_N は $U(\xi, \epsilon)$ に含む.

$$B_N \subset U(\xi, \epsilon) \subset U$$

なので，B_N が開被覆の元である U に含まれることになってしまう．これは，(仮定 1) に明らかに反している．したがって，(仮定 1) は誤り．(仮定 1 おわり)．証明おわり．

[*1] 「共通部分」をつけないとはみでた分が覆えなくなったりするが，はみでた分は本質ではないのだからそれでは困る

3　定理 7.46

列 λ_n についての話は予備になっている．

$$\|x_n - x\|_0 \to 0$$

だが，$\|\cdot\|_0$ は距離なので定理 7.7 より，各 i について，

$$x_n^i \to x^i$$

ということになる．先の λ_n を x_n^i に，λ を x^i に，v を e^i にすると，

$$\|x_n^i e_i - x^i e_i\|_1 \to 0$$

が言える．(事実 1)

$\|x_n - x\|_1$ に三角不等式を使って，

$$\|x_n - x\|_1 \leq \sum_i \|x_n^i e_i - x^i e_i\|_1$$

なので，(事実 1) より，

$$\|x_n - x\|_1 \to 0$$

が言える．証明おわり．

4　定理 8.2

三角不等式で L_1, L_2 に分けて抑える．

$$\frac{\|(L_1 - L_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \left\|(L_1 - L_2)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right\| < \epsilon$$

x は勝手に走るので，$(x - x_0)/\|x - x_0\|$ は大きさ 1 のやつ全部を走る．これが ϵ より小さいのだから，大きさ 1 のを入れたときで定まる線形作用素のノルムの定義より，L_1 と L_2 は同じ．

5　線形作用素のノルムの妥当性 (8.3 に関連し)

$$\|L(x)\|_W \leq \|L\| \, \|x\|_V$$

がなりたつ．

$$\begin{aligned}
\|L(x)\|_W &= \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\|x\|_V\right\|_W \\
&= \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|_W \|x\|_V \\
&\leq \|L\| \, \|x\|_V
\end{aligned}$$

「定義より明らか」だった．

6　p.112 の例 4，「1」ってなんだ

傾きなので，x の変化量という意味っぽい

7　定理 8.5

x_0 が二箇所に出てしまうので，ダミー変数を使わないと書けない．

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg\left(f(x_0)\right)\circ Df(x_0)$$

かけ算でなくなっているので注意．関数で書くと，

$$D(g\circ f) = \left[x_0 \mapsto Dg\left(f(x_0)\right)\circ Df(x_0)\right]$$

8　定理 8.6 平均値の定理

η をとる．

$$A = \left\{\xi\in[a,b];{}^\forall a\le z\le\xi\,;\|f(z)-f(a)\le(M+\eta)(z-a)\|\right\}$$

だった．ここで，A が区間であることはすぐに分かる．問題は大きい側が閉かどうかである．つまり，$A=[a,\sup A]$ か $A=[a,\sup A)$ かという問題である．

$\sup A\in A$ かどうかという問いは

$${}^\forall a\le z<\sup A\,;\|f(z)-f(a)\|\le(M+\eta)(z-a)$$

という問いだが，これは $\sup A$ と A の定義により，

$${}^\forall\epsilon\;{}^\forall z\le z<\sup A-\epsilon\,;\|f(z)-f(a)\|\le(M+\eta)(z-a)$$

ということから分かる．

9　p.111 と p.116 の注意について

116 については，

$$Df(x_0)\colon\Omega(\subset V)\to W$$

である一方，

$$Df\colon\Omega(\subset V)\to\Omega(\subset V)\to W$$

となっており，後者は線型写像のノルムで議論しなければならないあたり注意がいる．

10　8.8 の一次元

大雑把に両辺割って

$${}^\forall z\,\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-Df(z)\right|\le\sup_{\xi\in S}|Df(\xi)-Df(z)|$$

となるが，$\left(f(y)-f(x)\right)/(y-x)$ のほうは左端と右端を直線で繋いだ平均的傾き，右辺の $Df(\xi)$ のほうは sup のおかげで大きくなっている．引いてるのは両方とも同じなので，同じ感じ．

11　8.14 の評価

p.102 の

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-D\varphi(0)(1)\| \leq 4\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$

だが，21 式により，

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-D\varphi(0)(1)\| \leq \sup_{\tau\in[0,1]}\|D\varphi(\tau)-D\varphi(0)\|$$

さらに足し引きして三角不等式を使って，

$$\sup_{\tau\in[0,1]}\|D\varphi(\tau)-D\varphi(0)\| \leq \sup_{\tau\in[0,1]}\left(\left\|D\varphi(\tau)-D^2f(x_0)(t,s)\right\|+\left\|D^2f(x_0)(t,s)-D\varphi(0)\right\|\right)$$

となる．ここで，22 式への $\rho=0,\tau$ の代入例

$$\left\|D\varphi(0)-D^2f(x_0)(t,s)\right\| \leq 2\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$
$$\left\|D\varphi(\tau)-D^2f(x_0)(t,s)\right\| \leq 2\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$

を使える．まとめれば，得られる．

12　8.14 の λ をいれるくだり

λ を入れても不等式が保たれるので，本来十分小さくないとなりたたない s,t は実は大きくても成り立つということが分かる．したがって，特に $\|s\|,\|t\|=1$ のときを考えても不等式は保たれる．すると

$$\left\|D^2f(x_0)(t,s)-D^2f(x_0)(s,t)\right\| \leq 24\epsilon$$

がなりたつ．すると，1 で考えているから，2 変数の関数を吐く関数についてのノルムを考えたことになる．

13　8.15 の等式

適用順がみそ．

$$Df=\left[x_0'\mapsto\left[t'\mapsto\sum_{i=1}^{d}D_if(x_0')({t'}^i)\right]\right]$$

となっている．

$$
\begin{aligned}
D^2 f(x_0)(t,s) &= D\,(Df)\,(x_0)(t)(s) \\
&= D\left(\left[x'_0 \mapsto \left[t' \mapsto \sum_{j=1}^{d} D_j f(x'_0)({t'}^j)\right]\right]\right)(x_0)(t)(s) \\
&= \left(\left[x'_0 \mapsto \left[t' \mapsto \sum_{j=1}^{d} D_j \left(\left[x''_0 \mapsto \left[t'' \mapsto \sum_{i=1}^{d} D_i f(x''_0)({t''}^i)\right]\right]\right)(x'_0)({t'}^j)\right]\right]\right)(x_0)(t)(s) \\
&= \sum_{j=1}^{d} D_j \left(\left[x''_0 \mapsto \left[t'' \mapsto \sum_{i=1}^{d} D_i f(x''_0)({t''}^i)\right]\right]\right)(x_0)(t^j) \\
&= \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} D_j \left(\left[x''_0 \mapsto \left[t'' \mapsto D_i f(x''_0)({t''}^i)\right]\right]\right)(x_0)(t^j) \\
&= \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \left(D_j D_i f\right)(x_0)(t^i)
\end{aligned}
$$

14　8.17

14.1　準備

式 26 は左辺の微分は普通の微分，右辺の微分はフレッシェ微分であることに注意．でないと左辺が関数で右辺が値という訳の分からないことになる．

ここでは，普通の微分を $\tilde{D}$ と書く．普通の微分に合わせるには，フレッシェ微分の結果に 1 を代入しなければならない．つまり，

$$
\tilde{D}(f) = [\tau \mapsto (Df)(\tau)(1)]
$$

$$
\begin{aligned}
g &= [\tau \mapsto f(x_0 + \tau t)] \\
&= [\tau \mapsto f([\tau' \mapsto x_0 + \tau' t]\,(\tau))] \\
&= f \circ [\tau' \mapsto x_0 + \tau' t]
\end{aligned}
$$

に注意.

また，微分の性質として，$f\colon V \to B(W,U)$ について，

$$
D\,[v \mapsto f(v)(w)] = [v \mapsto (Df)(v)(w)]
$$

が言える．実際，

$$
\begin{aligned}
\left\|\left[v' \mapsto f(v')(w)\right](v) - \left[v' \mapsto f(v')(w)\right](v_0) - \left[v' \mapsto (Df)(v')(w)\right](v - v_0)\right\|_U &= \|f(v)(w) - f(v_0)(w) - (Df)(v-v_0)(w)\|_U \\
&\le \|f(v) - f(v_0) - (Df)(v - v_0)\|_{W \to U}
\end{aligned}
$$

である．また，これの系として，$f\colon V \to B(W,U)$, $g\colon X \to V$ について，

$$D\left[\tau \mapsto f(g(\tau))(w)\right] = \left[\tau \mapsto \left(Df\left(g(\tau)\right)(w)\right) \circ Dg(\tau)\right]$$

実際，

$$\begin{aligned}
D\left[\tau \mapsto f(g(\tau))(w)\right] &= D\left[\tau \mapsto \left[\xi \mapsto f(\xi)(w)\right](g(\tau))\right] \\
&= D\left(\left[\xi \mapsto f(\xi)(w)\right] \circ g\right) \\
&= \left[\tau \mapsto \left(D\left[\xi \mapsto f(\xi)(w)\right](g(\tau))\right) \circ Dg(\tau)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto \left(\left[\xi \mapsto Df(\xi)(w)\right](g(\tau))\right) \circ Dg(\tau)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto \left(Df\left(g(\tau)\right)(w)\right) \circ Dg(\tau)\right]
\end{aligned}$$

14.2 $\tilde{D}g$

練習に．

$$\begin{aligned}
\tilde{D}g &= \left[\tau \mapsto Dg(\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto D\left(f \circ \left[\tau' \mapsto x_0 + \tau' t\right]\right)(\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto \left[\xi \mapsto Df\left(\left[\tau' \mapsto x_0 + \tau' t\right](\xi)\right) \circ \left(D\left[\tau' \mapsto x_0 + \tau' t\right](\xi)\right)\right](\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto \left[\xi \mapsto Df\left(x_0 + \xi t\right) \circ \left(\left[\eta \mapsto \left[\tau' \mapsto \tau(t)\right]\right](\xi)\right)\right](\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto \left[\xi \mapsto Df(x_0 + \xi t) \circ \left[\tau' \mapsto \tau' t\right]\right](\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto Df(x_0 + \tau t) \circ \left[\tau' \mapsto \tau' t\right](1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto Df(x_0 + \tau t)(t)\right]
\end{aligned}$$

14.3 $\tilde{D}^{j+1}g$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^{j+1}g(\tau) &= \tilde{D}\left(\tilde{D}^j g\right)(\tau) \\
&= \tilde{D}\left[\tau' \mapsto D^j f(x_0 + \tau' t)(\underbrace{t \cdots t}_{j\text{ 個}})\right] \\
&= \left[\tau \mapsto D\left[\tau' \mapsto D^j f(x_0 + \tau' t)(\underbrace{t \cdots t}_{j\text{ 個}})\right](\tau)(1)\right]
\end{aligned}$$

中の項についてさらに計算する．

$$
\begin{aligned}
D\left[\tau' \mapsto D^j f(x_0+\tau' t)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}})\right] &= D\left[\tau' \mapsto D^j f\left(\left[\xi \mapsto x_0+\xi t\right](\tau')\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}})\right] \\
&= \left[\tau' \mapsto D^{j+1} f\left(\left[\xi \mapsto x_0+\xi t\right](\tau')\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}}) \circ D\left[\xi \mapsto x_0+\xi t\right](\tau')\right] \\
&= \left[\tau' \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau' t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}}) \circ \left[\eta \mapsto \left[\xi \mapsto \xi t\right]\right](\tau')\right] \\
&= \left[\tau' \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau' t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}}) \circ \left[\xi \mapsto \xi t\right]\right]
\end{aligned}
$$

これを入れて，

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}^{j+1} g(\tau) &= \left[\tau \mapsto \left[\tau' \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau' t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}}) \circ \left[\xi \mapsto \xi t\right]\right](\tau)(1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}}) \circ \left[\xi \mapsto \xi t\right](1)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j\text{ 個}})(t)\right] \\
&= \left[\tau \mapsto D^{j+1} f\left(x_0+\tau t\right)(\underbrace{t\cdots t}_{j+1\text{ 個}})\right]
\end{aligned}
$$

15　8.18

最後は線型写像のノルムの定義にしたがって引数の t を次々出していき，分母とでキャンセル

16　9.1

前の偏微分は値 2 個入れて値だが，今回は 1 個入れて値

17　9.9

$f: \mathbb{R} \to V$, $g: V \to \mathbb{R}$ での $g \circ f$ の微分

$$\begin{aligned}\tilde{D}\left(g \circ f\right) &= \left[\tau \mapsto D\left(g \circ f\right)(\tau)(1)\right] \\ &= \left[\tau \mapsto \left(Dg\left(f(\tau)\right) \circ Df(\tau)\right)(1)\right]\end{aligned}$$

書き換えて，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g \circ f\right)(t) = \left(Dg\left(f(t)\right) \circ Df(t)\right)(1)$$

そういうわけで，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\varphi_i(h)\right|_{h=0} &\overset{\text{上の}}{=} \left(Df\left(\left[x_0 + he_i\right](0)\right) \circ D\left[x_0 + he_i\right](0)\right)(1) \\ &= \left(Df(x_0) \circ \left[\xi \mapsto \xi e_i\right]\right)(1) \\ &= Df(x_0)(e_i) \\ &\overset{*}{=} Df(x_0)(0 \cdots \overset{\overset{i}{\vee}}{1} \cdots 0) \\ &\overset{8.11}{=} D_i f(x_0) \\ &\overset{9.1}{=} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i}\end{aligned}$$

18　9.12

p.133 で，

$$f(x_0 + v) \geq f(x_0) + \frac{\lambda}{4}\left\|v\right\|^2$$

から f は x_0 で狭義極小値をとることが出る．これは，f は x_0 で $f(x_0)$ になって，ちょっとずれると $\frac{\lambda}{4}\left\|v\right\|^2$ だけ底が押しあげられてしまう．

19　p.139

f は $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^m$ で．

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^d(x)}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1(x)}{\partial x^m} & \cdots & \frac{\partial f^m(x)}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

さらに，g は $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ として，

$$\left(\frac{\partial (g \circ f)(x)}{\partial x}\right)_{l \times d} = \left(\frac{\partial g\left(f(x)\right)}{\partial y}\right)_{l \times m}\left(\frac{\partial f}{}\right)$$

20　10.1 の L_0 について

$L_0 = D_2F(x_0, y_0)$ としたが，これは仮定のなかで可逆な線型写像と言われているので，当然可逆だし，$\ker L_0 = 0$ ということになる．

21　10.1 の評価 (没)

まったく間違った展開だったけど，後のために残しておく．$x - x_0$ を残さないように処理すべきだったということころに早く気づくべきだった.

$$\|G(x,y_1) - G(x,y_2)\| \le \left\|L_0^{-1}\right\| \|D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_2) - (F(x,y_1) - f(x,y_2))\|$$

で，

$$\begin{aligned}
&\|D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_2) - (F(x,y_1) - F(x,y_2))\| \\
&= \|D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_0) - D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_0) - F(x,y_1) + F(x_2)\|\,,\quad (\text{微分の線形性で　分割}) \\
&= \|(D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_0) + F(x_0,y_0) - F(x_0,y_1)) - (D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_0) + F(x_0,y_0) - F(x_0,y_2)) \\
&\qquad - (F(x,y_1) - F(x_0,y_1) + (F(x,y_2) - F(x_0,y_2)))\|\,,\quad (F(x_0,y_0)\ \text{と}\ F(x_0,y_1)\ \text{と}\ F(x_0,y_2)\ \text{を追加}) \\
&\le \|D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_0) + F(x_0,y_0) - F(x_0,y_1)\| + \|D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_0) + F(x_0,y_0) - F(x_0,y_2)\| \\
&\quad + \|F(x,y_1) - F(x_0,y_1)\| + \|F(x,y_2) - F(x_0,y_2)\|\,,\quad (\text{三角不等式}) \\
&\le q\|y_1-y_0\| + q\|y_2-y_0\| + \|F(x,y_1) - F(x_0,y_1)\| + \|F(x,y_2) - F(x_0,y_2)\|\,, \\
&\quad (\text{微分の定義を誤差}\ q\ \text{で適用．}\ \eta\ \text{が}\ q\ \text{に制約を受ける}) \\
&\le q\|y_1-y_0\| + q\|y_2-y_0\| + q\|y_1-y_2\| + q\|y_1-y_2\|\,, \\
&\quad (\text{連続の定義を誤差}\ q\|y_1-y_2\|\ \text{で適用．}\ x\ \text{が}\ \delta_1\ \text{と}\ q\ \text{に制約を受ける})
\end{aligned}$$

右辺 4 項は微分の定義や連続性の定義より十分小さいし，$\left\|L_0^{-1}\right\|$ も今は定数扱いしてよい[*2].

22　10.2 の交換

$$\lim_{n\to\infty} T(x)y_{n-1} \stackrel{?}{=} T(x)\left(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}\right)$$

となるか？

$$^\forall\epsilon\ ^\exists N\ ^\forall m \ge N\ \ \|T(x)y_{n-1} - T(x)y(x)\| < \epsilon$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
&\|T(x)y_{n-1} - T(x)y(x)\| \\
&= \|T(x)\|\,\|y_{n-1} - y(x)\|
\end{aligned}$$

$y_{n-1} \to y(x)$ なのだから，これは小さくできる.

23　10.1 の評価 (没その 2)

x_0 と x_1，x_0 と x_2 の関係からは x_1 と x_2 の関係はあまり導けなくて死ぬ.

まず，L_0^{-1} も線形であることに注意.

$$\begin{aligned}
&G(x,y_1) - G(x,y_2) \\
&= L_0^{-1}\left(D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_2) - (F(x,y_1) - F(x,y_2))\right) \\
&= (F(x_0,y_0)(y_1-y_2) - F(x,y_0)(y_1-y_2)) + L_0^{-1}\left(-F(x,y_1) + F(x,y_2) + D_2F(x,y_0)(y_1-y_2)\right)
\end{aligned}$$

[*2] ほんと？

ここで第二項について考える．

$$
\begin{aligned}
&-F(x,y_1)+F(x,y_2)+D_2F(x,y_0)(y_1-y_2)\\
&=(F(x,y_2)-F(x,y_0)-D_2F(x,y_0)(y_2-y_0))-(F(x,y_1)-F(x,y_0)-D_2F(x,y_0)(y_1-y_0))
\end{aligned}
$$

24　10.1 の評価

まず，L_0^{-1} も線形であることに注意．

$$
\begin{aligned}
&\|G(x,y_1)-G(x,y_2)\|\\
&=\left\|L_0^{-1}\left(D_2F(x_0,y_0)(y_1 0 y_2)-(F(x,y_1)-F(x,y_2))\right)\right\|\\
&=\left\|L_0^{-1}\right\|\|(D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_2)-(F(x,y_1)-F(x,y_2)))\|,\quad (L_0^{-1}\text{ は線形写像})\\
&=\left\|L_0^{-1}\right\|\|F(x,y_2)-F(x,y_1)-D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_1)\|\\
&=\left\|L_0^{-1}\right\|\|F(x,y_2)-F(x,y_1)-D_2F(x,y_1)(y_2-y_1)+D_2F(x,y_1)(y_2-y_1)-D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_1)\|,\\
&\quad(\text{足して引く})\\
&\leq\left\|L_0^{-1}\right\|(\|F(x,y_2)-F(x,y_1)-D_2F(x,y_1)(y_2-y_1)\|+\|D_2F(x,y_1)(y_2-y_1)-D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_1)\|),\\
&\quad(\text{三角不等式})\\
&\leq\left\|L_0^{-1}\right\|(\epsilon\|y_2-y_1\|+\|D_2F(x,y_1)(y_2-y_1)-D_2F(x_0,y_0)(y_2-y_1)\|),\quad(\text{微分の定義})\\
&\leq\left\|L_0^{-1}\right\|(\epsilon+\|D_2F(x,y_1)-D_2F(x_0,y_0)\|)\|y_2-y_1\|,\quad(D_2F(x,y_1)\text{ と }D_2F(x,y_0)\text{ は線形写像})\\
&\leq\left\|L_0^{-1}\right\|(\epsilon+\epsilon)\|y_2-y_1\|,\quad(DF\text{ は連続})\\
&=2\epsilon\left\|L_0^{-1}\right\|\|y_2-y_1\|
\end{aligned}
$$

今，$\left\|L_0^{-1}\right\|$ すなわち x_0 は定数と見ていいのだから，おわり．

25　10.1 「自分自身に写す？」

関数 $y\mapsto G(x,y)$ が[*3]自身に写すことを示したい．任意に $y\in B(y_0,\eta)$ をとって，これが $y\mapsto G(x,y)$ で $B(y_0,\eta)$ に飛ぶことを示せばよい．

$$
\|[y'\mapsto G(x,y')](y)-y_0\|=\|G(x,y)-y_0\|
$$

なので，あとは本の式の通り．これと式 9 の

$$
\|[y'\mapsto G(x,y')](y_1)-[y'\mapsto G(x,y')](y_2)\|\leq\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|
$$

の縮小性より，補題 10.2 が使えるようになる．

26　10.1 13 式の出所

$y=g(x)$ として，$F(x,g(x))=0$ としながら，11 式の両辺に L^{-1} を適用．覚えるなら 11 と 13 式の出し方にしたい．

[*3] $G(x,y)$ でなく，だと思う．

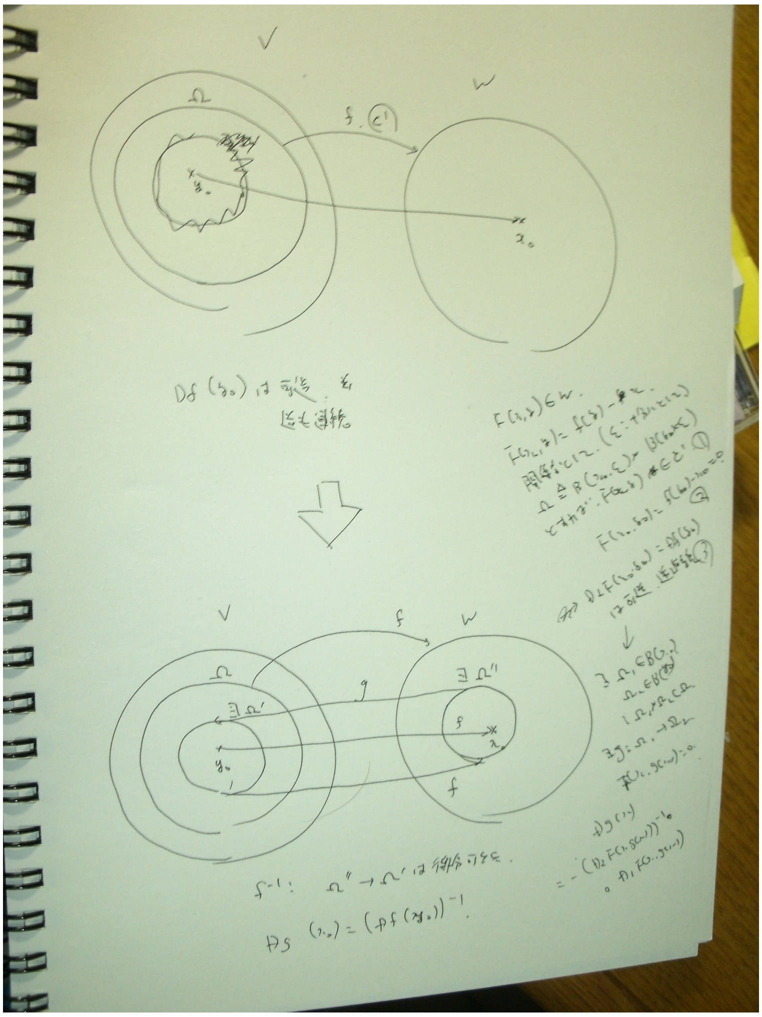
27　10.1 「(12)，(15) を用いると」？

12 式で，y を $g(x)$，y_1 を $g(x_1)$ としたものを考えたいが，これで収束するには $g(x) - g(x_1)$ が 0 に飛んでくれないと困る．これを 15 式が保証する．

28　10.1 $L^{-1}K$ とは

14 式以降では線型写像の引数だけノルムとして取り出す作業をやって「13,14 式より」を導いていわけだが，このとき
$$-L^{-1}K(x - x_1) \leq \left\| L^{-1} \circ K \right\| \|x - x_1\|$$
とすべきところ，
$$-L^{-1}K(x - x_1) \leq \left\| L^{-1}K \right\| \|x - x_1\|$$
と書いていると思われる．おかげで結論も，線型写像に値をとる写像を適用するという意味不明なことになっている．(式 3 はあってる)

29　10.3



29.1　F に対する陰関数定理の条件の確認

1. $F(x,y) \in W$ で，$F(x,y) = f(y) - x$ だった．開集合として (ϵ を十分小さいとして)

   $$\Omega = B(x_0, \epsilon) \times B(y_0, \epsilon)$$

   とすれば，$F(x,y) \in C^1$
2. $F(x_0, y_0) = f(y_0) - x_0 = 0$
3. $D_2F(x_0, y_0) = Df(y_0)$ は可逆．逆も連続．(仮定)

よって，陰関数定理が使えて，x_0 の開近傍 Ω_1 と y_0 の開近傍 Ω_2 をうまく選ぶと $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$ とでき，さらに Ω_1 から Ω_2 への関数 g を

$$F(x, g(x)) = 0$$

を満たすように作れる．ちなみに，さらに

$$Dg(x) = -\left(D_2F\left(x, g(x)\right)\right)^{-1} \circ D_1F(x, g(x))$$

がなりたつ．

この議論であらわれた Ω_1 を本では Ω'' とよんでいる．$Omega_2$ はそのまま．

29.2 $f(g(x)) = x$？

今，陰関数定理により $F(x, g(x)) = 0$ が成り立っている．よって，$F(x_0, g(x_0)) = 0$．$x_0 = f(y_0)$ が仮定にあるので，$F(x_0, y_0) = 0$ も成り立つ．

$$F(x_0, g(x_0)) = F(x_0, y_0) = 0$$

ということになる．$g(x_0), y_0 \in \Omega_1 \times \Omega_2$ なので，この範囲では x を定めると y が一意に定まることが陰関数定理から言えて，$g(x_0) = y_0$ となる．(もうちょっと楽に言えると思うんだけどなあ)

29.3 その後

g の単射は背理法でわかる．単射なので行き先を絞れば全単射になって，

$$f(g(x)) = x$$

なので，$g = f^{-1}$ となる．定理 7.31 で f^{-1} は開集合を開集合に写すから，$g(\Omega'')$ は開集合．

29.4 「これと (3) を併せて」

併せなくても $Df(y_0) = Df(g(x_0))$ が可逆であることを仮定しているのだから，左から逆を合成すれば終わりでは？？

30 10.5 Lagrange

DF を左側 $d-m$ と右側 m に分ける．「最後 m 行」は「最後 m 列」では？

DH の計算がむずかしかった．型として，$z \in \mathbb{R}^{d-m}$ と $g \colon \mathbb{R}^{d-m} \to \mathbb{R}^m$ に注意する．

$$\begin{aligned} DH &= D\left[z \mapsto h\left(z, g(z)\right)\right] \\ &= D\left[z \mapsto h \circ [z' \mapsto (z', g(z'))]\right] \\ &= \left[z \mapsto Dh(z, g(z)) \circ D\left[z' \mapsto (z', g(z'))\right]\right] \\ &= \left[z \mapsto Dh(z, g(z)) \circ (\mathrm{Id}, Dg(z))\right] \\ &\overset{8.11}{=} \left[z \mapsto D_{1\cdots d-m}h\left(z, g(z)\right) \circ \mathrm{Id} + D_{d-m+1\cdots d}h\left(z, g(z)\right) \circ Dg(z)\right] \end{aligned}$$

ここで $z = z_0$ とし，

$$D_{1\cdots d-m}h\left(z_0, g(z_0)\right) \circ \mathrm{Id} + D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0, g(z_0)\right) \circ Dg(z_0)$$

これは，152 頁の「別の書き方をすると…」の部分と同値．

これに $\mathrm{Inc}_i\,(i=1,\cdots,d-m)$ を合成するが，その前に先のを包含写像で書き直す．微分可能なのでこういうことができる．

$$Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{1\cdots d-m}+Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{d-m+1\cdots d}\circ Dg(z_0)$$

合成し，

$$\begin{aligned}
&\left(Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{1\cdots d-m}+Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{d-m+1\cdots d}\circ Dg(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_i\\
&=Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{1\cdots d-m}\circ\mathrm{Inc}_i+Dh\left(z_0,g(z_0)\right)\circ\mathrm{Inc}_{d-m+1\cdots d}\circ Dg(z_0)\circ\mathrm{Inc}_i\\
&=D_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)\circ D_ig(z_0)
\end{aligned}$$

これに 1 を代入して普通の微分にする (あとでもいいけど)．

$$\begin{aligned}
&D_ih\left(z_0,g(z_0)\right)(1)+\left(D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)\circ D_ig(z_0)\right)(1)\\
&=\tilde{D}_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)(\tilde{D}_ig(z_0))\\
&=\tilde{D}_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Inc}_k\circ\tilde{D}_ig(z_0)\right)\\
&\overset{\text{線形性}}{=}\tilde{D}_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+\sum_{k=1}^{m}D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)\left(\mathrm{Inc}_k\circ\tilde{D}_ig(z_0)\right)\\
&\overset{\text{線形性}}{=}\tilde{D}_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\Pr_k\circ\tilde{D}_ig(z_0)\right)D_{d-m+1\cdots d}h\left(z_0,g(z_0)\right)\begin{pmatrix}0\cdots\overset{\overset{k}{\vee}}{1}\cdots\overset{\overset{m}{\vee}}{0}\end{pmatrix}\\
&=\tilde{D}_ih\left(z_0,g(z_0)\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\Pr_k\circ\tilde{D}_ig(z_0)\right)\tilde{D}_{d-m+k}h\left(z_0,g(z_0)\right)
\end{aligned}$$

これは「別の書き方をすると…」の前の部分と同値． y の定義に注意．