証明メモ

1　定理 7.39 の i→iii

K を対象の集合とする．背理法の仮定 (仮定 1) をすると，K の開被覆であって有限被覆がとれないものが存在する．

全有界 (問題の仮定) を仮定したので，K は 1/2 の閉球で覆える．

「1/2 半径の閉球と K の共通部分[*1]」全部が有限開被覆で覆えたとすると (仮定 2)，閉球全部が K を覆っているのだから，有限開被覆が K を覆うことになる．これは (仮定 1) に矛盾．したがって，(仮定 2) は誤りで，「1/2 半径の閉球と K の共通部分」のうち，有限開被覆で覆えないものがある (仮定 2 おわり)．その 1/2 半径の閉球を B_1 とよぶ．まとめると，$B_1 \cap K$ は有限開被覆で覆えない．

全有界を仮定してあり，K は 1/4 の閉球たちで覆えるので，$B_1 \cap K$ も 1/4 の閉球たちで覆える．「1/4 半径の閉球と $B_1 \cap K$ の共通部分」全部が有限開被覆で覆えたとすると，先の議論と同様に 1/4 半径の閉球のうち，有限開被覆で覆えないものがあるので，これを B_2 とよぶ．

同様に，半径 $1/2^n$ の閉球で，有限開被覆で覆えないものが作れるので，B_n が作れる．

閉球たちの中心で点列が作れるので，それらを ξ_n とよぶ．閉球たちは，となりあった番号なら共通部分を持つので，ξ_n と ξ_{n+1} の距離はどんどん 0 へと縮んでいき，ξ_n は Cauchy 列となる．完備 (問題の仮定) なので，ξ_n の収束先が存在して，ξ とよべ，しかも $\xi \in K$ となる．したがって，開被覆のなかで ξ を含むものがある．その開被覆の中の開集合を U とよぶ．ξ を中心とする開球で，U に含まれるものがある．それを $U(\xi, \epsilon)$ とする．B_n はどんどん小さくなって ξ に近づいていくので，十分大きい N で B_N は $U(\xi, \epsilon)$ に含む．

$$B_N \subset U(\xi, \epsilon) \subset U$$

なので，B_N が開被覆の元である U に含まれることになってしまう．これは，(仮定 1) に明らかに反している．したがって，(仮定 1) は誤り．(仮定 1 おわり)．証明おわり．

2　定理 7.46

列 λ_n についての話は予備になっている．

$$\|x_n - x\|_0 \to 0$$

だが，$\|\cdot\|_0$ は距離なので定理 7.7 より，各 i について，

$$x_n^i \to x^i$$

[*1] 「共通部分」をつけないとはみでた分が覆えなくなったりするが，はみでた分は本質ではないのだからそれでは困る

ということになる．先の λ_n を x_n^i に，λ を x^i に，v を e^i にすると，

$$\|x_n^i e_i - x^i e_i\|_1 \to 0$$

が言える．(事実 1)

$\|x_n - x\|_1$ に三角不等式を使って，

$$\|x_n - x\|_1 \leq \sum_i \|x_n^i e_i - x^i e_i\|_1$$

なので，(事実 1) より，

$$\|x_n - x\|_1 \to 0$$

が言える．証明おわり．

3　定理 8.2

三角不等式で L_1, L_2 に分けて抑える．

$$\frac{\|(L_1 - L_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \left\|(L_1 - L_2)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right\| < \epsilon$$

x は勝手に走るので，$(x - x_0)/\|x - x_0\|$ は大きさ 1 のやつ全部を走る．これが ϵ より小さいのだから，大きさ 1 のを入れたときで定まる線形作用素のノルムの定義より，L_1 と L_2 は同じ．

4　線形作用素のノルムの妥当性 (8.3 に関連し)

$$\|L(x)\|_W \leq \|L\| \, \|x\|_V$$

がなりたつ．

$$\begin{aligned}\|L(x)\|_W &= \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\|x\|_V\right\|_W \\ &= \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right)\right\|_W \|x\|_V \\ &\leq \|L\| \, \|x\|_V\end{aligned}$$

「定義より明らか」だった．

5　p.112 の例 4，「1」ってなんだ

傾きなので，x の変化量という意味っぽい

6　定理 8.6 平均値の定理

η をとる．

$$A = \left\{\xi \in [a,b]; {}^\forall a \leq z \leq \xi \, ; \|f(z) - f(a) \leq (M + \eta)(z - a)\|\right\}$$

だった．ここで，A が区間であることはすぐに分かる．問題は大きい側が閉かどうかである．つまり，$A=[a,\sup A]$ か $A=[a,\sup A)$ かという問題である．

$\sup A\in A$ かどうかという問いは

$$^{\forall}a\leq z<\sup A\,;\|f(z)-f(a)\|\leq(M+\eta)(z-a)$$

という問いだが，これは $\sup A$ と A の定義により，

$$^{\forall}\epsilon\;^{\forall}z\leq z<\sup A-\epsilon\,;\|f(z)-f(a)\|\leq(M+\eta)(z-a)$$

ということから分かる．

7　p.111 と p.116 の注意について

116 については，

$$Df(x_0)\colon\Omega(\subset V)\to W$$

である一方，

$$Df\colon\Omega(\subset V)\to\Omega(\subset V)\to W$$

となっており，後者は線型写像のノルムで議論しなければならないあたり注意がいる．

8　8.8 の一次元

大雑把に両辺割って

$$^{\forall}z\;\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-Df(z)\right|\leq\sup_{\xi\in S}|Df(\xi)-Df(z)|$$

となるが，$(f(y)-f(x))\,/(y-x)$ のほうは左端と右端を直線で繋いだ平均的傾き，右辺の $Df(\xi)$ のほうは sup のおかげで大きくなっている．引いてるのは両方とも同じなので，同じ感じ．

9　8.14 の評価

p.102 の

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-D\varphi(0)(1)\|\leq4\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$

だが，21 式により，

$$\|\varphi(1)-\varphi(0)-D\varphi(0)(1)\|\leq\sup_{\tau\in[0,1]}\|D\varphi(\tau)-D\varphi(0)\|$$

さらに足し引きして三角不等式を使って，

$$\sup_{\tau\in[0,1]}\|D\varphi(\tau)-D\varphi(0)\|\leq\sup_{\tau\in[0,1]}\left(\left\|D\varphi(\tau)-D^2f(x_0)(t,s)\right\|+\left\|D^2f(x_0)(t,s)-D\varphi(0)\right\|\right)$$

となる．ここで，22 式への $\rho=0,\tau$ の代入例

$$\left\|D\varphi(0)-D^2f(x_0)(t,s)\right\|\leq2\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$
$$\left\|D\varphi(\tau)-D^2f(x_0)(t,s)\right\|\leq2\epsilon(\|s\|+\|t\|)\,\|s\|$$

を使える．まとめれば，得られる．

10　8.14 の λ をいれるくだり

λ を入れても不等式が保たれるので，本来十分小さくないとなりたたない s, t は実は大きくても成り立つということが分かる．したがって，特に $\|s\|, \|t\| = 1$ のときを考えても不等式は保たれる．すると

$$\left\| D^2 f(x_0)(t,s) - D^2 f(x_0)(s,t) \right\| \leq 24\epsilon$$

がなりたつ．すると，1 で考えているから，2 変数の関数を吐く関数についてのノルムを考えたことになる．

11　8.15 の等式

適用順がみそ．

$$Df = \left[x_0' \mapsto \left[t' \mapsto \sum_{i=1}^{d} D_i f(x_0')(t'^i) \right] \right]$$

となっている．

$$\begin{aligned}
D^2 f(x_0)(t,s) &= D\left(Df\right)(x_0)(t)(s) \\
&= D\left(\left[x_0' \mapsto \left[t' \mapsto \sum_{j=1}^{d} D_j f(x_0')(t'^j) \right] \right] \right)(x_0)(t)(s) \\
&= \left(\left[x_0' \mapsto \left[t' \mapsto \sum_{j=1}^{d} D_j \left(\left[x_0'' \mapsto \left[t'' \mapsto \sum_{i=1}^{d} D_i f(x_0'')(t''^i) \right] \right] \right)(x_0')(t'^j) \right] \right] \right)(x_0)(t)(s) \\
&= \sum_{j=1}^{d} D_j \left(\left[x_0'' \mapsto \left[t'' \mapsto \sum_{i=1}^{d} D_i f(x_0'')(t''^i) \right] \right] \right)(x_0)(t^j) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} D_j \left(\left[x_0'' \mapsto \left[t'' \mapsto D_i f(x_0'')(t''^i) \right] \right] \right)(x_0)(t^j) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \left(D_j D_i f\right)(x_0)(t^i)
\end{aligned}$$