$\supset h_x h_y h_z = 2\pi$

$v(\nu) = D(\nu) \cdot 4\pi k^2 \cdot dk$

工科一近代物理期末考

2015／06／25

(第 1 題-第 5 題 由助教批考；第 6 題有具體陳述或實貫意見者，酌情加分 1-5 分)

1. Planck 把光量子化稱為光子(photon)，頻率ν的光子，光子可以擁有的能量必須是$h\nu$的整數倍$nh\nu$。
   (a) 根據波茲曼分布推導頻率為 ν 的光子，其平均能量 $\langle h\nu\rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/K_BT}-1}$ 。
   (b) 計算頻率在 ν 和 $\nu + d\nu$ 之間駐波的數目$g(\nu)d\nu$，考慮：
      i. 駐波 $k = {n\pi}/{L}$，k 波數、L 寬度。
      ii. Dispersion 關係 $\omega = c\,|\vec{k}|$，$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$，球殼的面積為$4\pi k^2 dk$。
      iii. 考慮每一個$\vec{k}$ 對應兩個偏極光，簡併數為 2。 $\frac{1}{8\pi^3} 4\pi k^2 dk$
   (c) 以上兩部分合成黑體輻射的能量密度的頻率分布函數 $u(\nu, T) = g(\nu)\langle h\nu\rangle$。證明總輻射能量 $u(T) = \int u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$，寫出$\sigma$的式子（保留積分形式不用積出來）。$\lambda_{max} T$
2. Bohr 用角動量量子化的假設推導氫原子能譜 $E_n = -{R}/{n^2}$ ，R 為 Rydberg 能量。
   (a) 重覆 Bohr 的量子化 $L_n = n\hbar$，求常數R。
   (b) 將一維的氫原子的薛丁格方程式$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{-e^2}{x}\Psi(x) = E\Psi(x)$ 簡化為無因次的方程
   $-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\Psi(\xi) = \epsilon\Psi(\xi)$，找出對應的長度單位和能量單位。
3. 簡述以下實驗的方法和意義：
   (a) 1914 Lord Ernest Rutherford 的 alpha 粒子散射實驗。
   (b) 1923 Arthur Holly Compton 的 x-ray 散射實驗。
   (c) 1922 Stern-Gerlach 銀原子在磁場下的路徑分裂實驗。
4. 電子（質量 $9 \times 10^{-31}\,kg$）於無限位能井中（寬度 100 Å），從能量最低的基態（n＝1），躍升到第二激發態(n＝3)，放出光的波長為何？ ($\hbar = 1.054\times10^{-34}$ J-s)
5. 簡諧震盪的 Hamiltonian 可以簡化為 $H = a^\dagger a + \frac{1}{2}$；其中$a^\dagger$ 為 a 的 adjoint，且滿足
   $$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1。$$
   若已經 $|n>$ 為H的本徵向量 $H\,|n> = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n>$ 。
   (a) 證明 $a|n>$ 也是 H 的本徵向量，本徵值為$n - \frac{1}{2}$ ：$a|n> = c_1\,|n-1>$
   (b) 證明 $a^\dagger|n>$ 也是 H 的本徵向量，本徵值為$n + \frac{3}{2}$ ：$a^\dagger|n> = c_2\,|n+1>$
   (c) 請求取上兩式中兩個比率常數 c_1和c_2。
6. 請簡單敘述你這一學期學習的心得，以及對課程內容安排、上課方式的建議

Ïhý uú