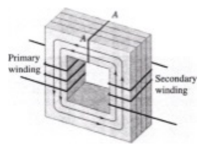
結論：當 $0 \le Z \le \infty$ 時，$\phi_{p2} \le \phi_{p1} \le 90^o$（變壓器是電感性的，使 $\phi_{p1} \ge \phi_{p2}$）。

【參考不考：$\phi_{11} = \phi_{21} = N_1 k I_1$，$\phi_{22} = \phi_{12} = N_2 k I_2$，$\therefore L_1 = N_1 \phi_{11}/I_1 = N_1^2 k$，$L_2 = N_2 \phi_{22}/I_2 = N_2^2 k$，$M = M_{12} = N_1 \phi_{12}/I_2 = N_1(N_2 k I_2)/I_2 = N_2 N_2 k$。
若使用複數的 Z，$j \equiv \sqrt{-1}$，則等效阻抗 $Z_{eq} = -\omega k N_1^2 Z/(N_2^2 \omega k + jZ)$。】

防止 Eddy current：切成一片一片，如右圖。



Impedence matching

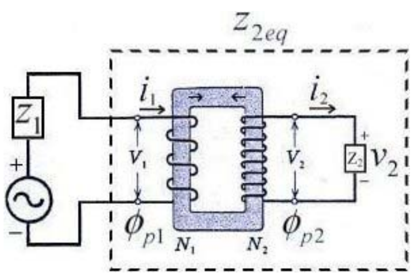
假設變壓器不消耗能量，電源送出的功率全被 Z 消耗，則

$P_{av} = (V_1^2/2Z_{eq})\cos\phi_{p1} = (V_2^2/2Z)\cos\phi_{p2} = (N_2/N_1)^2 (V_1^2/2Z)\cos\phi_{p2}$，

$\therefore Z_{eq} = Z(N_1/N_2)^2(\cos\phi_{p1}/\cos\phi_{p2})$，變壓器也能變阻抗。

（a）當 Z 很小時，$\phi_{p2} \approx \phi_{p1}$，故 $Z_{eq} \approx Z(N_1/N_2)^2$。

（b）當右圖音箱的阻抗 z_2 透過變壓器變成 z_{2eq}，而與擴大機的內阻抗 z_1 相等時，音箱消耗的功率最高。



H.W.： Ex. 35; Prob. 6, 7, 8, 12, 13.

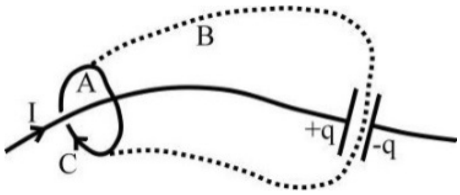
Ch. 34 Maxwell's Equations; Electromagnetic Waves

(1) Faraday showed in 1845 that $\vec{B}$ field affected a beam of light passing through glass.

(2) $1/\mu_0 \in_0 = (1/4\pi \in_0)/(\mu_0/4\pi) = (\text{speed of light } c)^2$.

Displacement Current（位移電流）

考慮以 C 為邊界的曲面 A & B。根據 Ampere's law，



$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu I$ for 面 A，

$= 0$ for 面 B？ 錯，Ampere's law 須修正。

電容內有電場 $E = \sigma/\in = q/\in A$，$\therefore q = \in EA = \in \phi_E$，$\phi_E$ 是通過面 B 的向右電通量。

（另法：假設完美導線，則 A 上無電場，$q = \in \oint_{A\cup B} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \in \int_B \vec{E}\cdot d\vec{A} = \in \phi_E$。）

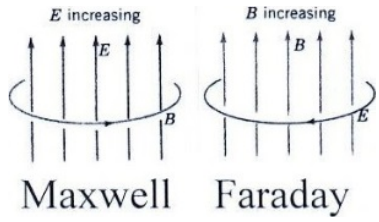
$I = dq/dt = \in d\phi_E/dt$，若把 Ampere's law 修改成 $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu(I_{encl} + \in d\phi_E/dt)$，

則適用於 A & B：$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu I$ for A（$\because \in d\phi_E/dt = 0$），

$= \mu \in d\phi_E/dt$ for B（$\because I_{encl} = 0$）。

（若導線非完美，則 A & B 上都增加等量的向右電通量。）

$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \ldots\ldots + \mu \in d\phi_E/dt$ Maxwell's induction law。



Maxwell 稱 $\in d\phi_E/dt \equiv I_D$ 為位移電流，與 I_{encl} 平等，

$I_D = \in (d/dt)\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_S (\in \partial\vec{E}/\partial t)\cdot d\vec{A} = \int_S \vec{J}_D \cdot d\vec{A}$，$\vec{J}_D \equiv \in \partial\vec{E}/\partial t$ 位移電流密度。

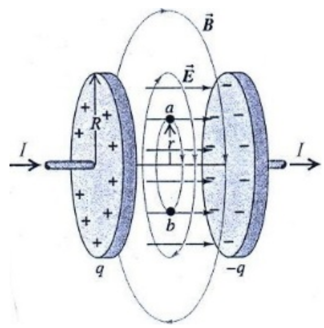
$\in \vec{E} = \in_0 \vec{E} + \vec{P}$（見以下【參考】），$\partial\vec{P}/\partial t$ 是因束縛電荷位移而產生的電流密度，

故 Maxwell 把 $\in_0 \partial\vec{E}/\partial t$ 看成是真空中乙太的位移電流密度（但錯誤）。

【參考：介質中電雙極密度 $\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V\to 0}[(\sum_i q_i\vec{d}_i)/\Delta V]$，而會穿過平面 A 的電荷是 $\vec{P}\cdot\vec{A}$（見電容那章 $\sigma_i = \vec{P}\cdot\hat{A}$）。故 Gauss law $\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = (1/\in_0)(Q_{ext} - \oint_S \vec{P}\cdot d\vec{A})$

$\Rightarrow \oint_S (\in_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{A} = Q_{ext} \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{ext}$，$\vec{D} \equiv \in_0 \vec{E} + \vec{P}$ displacement field。

因 $\vec{P}$ 必行 $\vec{E}$，故可寫成 $\vec{D} = \in \vec{E}$。介質中需 $\vec{E}$ & $\vec{P}$ 兩個場，但物理學家喜用 $\vec{E}$ & $\vec{D}$。】



例：Induced $\vec{B}$ field in a capacitor（有 $\in dE/dt = J_D = I/\pi R^2$）

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu \in d\phi_E/dt \Rightarrow B2\pi r = \begin{cases} \mu \in (\pi r^2)\, dE/dt & \text{for } r<R \\ \mu \in (\pi R^2)\, dE/dt & \text{for } r>R \end{cases},$$

$$\therefore B = \begin{cases} \mu(r/2) \in dE/dt & \text{for } r<R \\ \mu(R^2/2r) \in dE/dt & \text{for } r>R \end{cases}。$$

若代入 $\in dE/dt = I/\pi R^2$，則 $B = \begin{cases} \mu(r/2) I/\pi R^2 = (\mu I/2\pi) r/R^2 & \text{for } r<R \\ \mu(R^2/2r) I/\pi R^2 = \mu I/2\pi r & \text{for } r>R \end{cases}$。

Maxwell's equations（Maxwell 原先提出 20 eqs.，1885 年 O. Heaviside 用向量分析符號改寫成 4 eqs.）（注意式中 $\in \vec{E} = \vec{D} \leftrightarrow \vec{B} = \mu\vec{H}$，$\vec{D}/\in = \vec{E} \leftrightarrow \vec{H} = \vec{B}/\mu$）:

(1) $\oint_{S_1} \in \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q$；　(2) $\oint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$（$= Q_M$，但磁荷 $Q_M = 0$）；

(3) $\oint_{C_3} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -(d/dt)\int_{S_3} \vec{B}\cdot d\vec{A} = -d\phi_B/dt$（$= -I_M - d\phi_B/dt$，但磁荷流 $I_M = 0$）；

(4) $\oint_{C_4} (\vec{B}/\mu)\cdot d\vec{\ell} = I + (d/dt)\int_{S_4} \in \vec{E}\cdot d\vec{A}$（$= I + d\phi_D/dt$）。

再加上 Lorentz force $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$，此 5 式描述了自然界所有古典電磁現象。

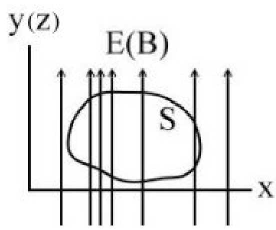
（註：常用的電荷守恆可由(1) & (4)的微分式証明；上式中的 μ & $\in$ 不須是常數。）

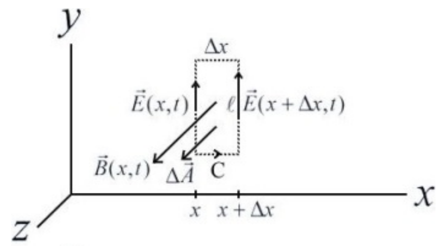
E.M. Wave in charge-free space（where $Q = 0 = I$）

考慮簡單情況：$\vec{E}(\vec{r},t) = (0, E(x,t), 0)$，$\vec{B}(\vec{r},t) = (0, 0, B(x,t))$。

因在 $x = const.$ 的平面上 $\vec{E}$ & $\vec{B}$ 均勻，與 y & z 無關，故稱平面波。

自動滿足 Gauss laws $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$ & $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$（右圖）。

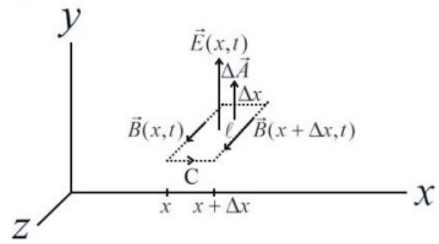




$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(x+\Delta x,t)\ell - E(x,t)\ell = \Delta x(\partial E/\partial x)\ell$$

$= -d\phi_B/dt = -d(B\ell\Delta x)/dt = -(\partial B/\partial t)\ell\Delta x$，

$\therefore\ \partial E/\partial x = -\partial B/\partial t \quad \ldots\ (1)$。



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B(x,t)\ell - B(x+\Delta x,t)\ell = -\Delta x(\partial B/\partial x)\ell$$

$= \mu\epsilon\, d\phi_E/dt = \mu\epsilon\, d(E\ell\Delta x)/dt = \mu\epsilon(\partial E/\partial t)\ell\Delta x$，

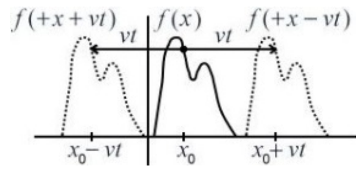
$\therefore\ \partial B/\partial x = -\mu\epsilon\,\partial E/\partial t \quad \ldots\ (2)$。

$\partial^2 E/\partial x^2 \overset{(1)}{=} (\partial/\partial x)(-\partial B/\partial t) = -(\partial/\partial t)(\partial B/\partial x) \overset{(2)}{=} \mu\epsilon\,\partial^2 E/\partial t^2$。

$\partial^2 B/\partial x^2 \overset{(2)}{=} (\partial/\partial x)(-\mu\epsilon\,\partial E/\partial t) = -\mu\epsilon(\partial/\partial t)(\partial E/\partial x) \overset{(1)}{=} \mu\epsilon\,\partial^2 B/\partial t^2$。

$f(q) = f(+x\mp vt)$ 代表以速率 v 向右$(+\hat{x})$或向左$(-\hat{x})$傳的波，滿足 $\partial^2 f/\partial t^2 = [(\partial q/\partial t)(\partial/\partial q)][(\partial q/\partial t)(\partial f/\partial q)]$

$= (\mp v)^2\,\partial^2 f/\partial q^2 = v^2\,\partial^2 f/\partial x^2$。



$\therefore\ E = E(\pm x - vt)$，$B = B(\pm x - vt)$，其中 $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$，speed of EM wave。

真空中 $v = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3.0\times 10^8\ m/\sec = c$；介質中 $v = 1/\sqrt{K_m\mu_0 K_e\epsilon_0} = c/\sqrt{K_m K_e}$

$= c/n$，$n = \sqrt{K_m K_e}$ 折射率。

再取最簡單的，波長 λ 的 sine 波：$E = E_0\sin[2\pi(\pm x - vt)/\lambda] \equiv E_0\sin(\pm kx - \omega t)$，

$k \equiv 2\pi/\lambda$ wave number (與波有關的數)，$\omega \equiv 2\pi v/\lambda = kv$ or $2\pi/T$ 角頻率。

$\partial E/\partial x = -\partial B/\partial t \quad \Rightarrow \pm kE_0\cos(\pm kx - \omega t) = -\partial B/\partial t$，

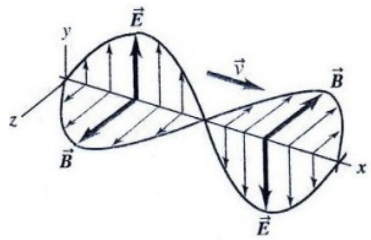
$\therefore\ B = \pm(k/\omega)E_0\sin(\pm kx - \omega t) = \pm(1/v)E$，

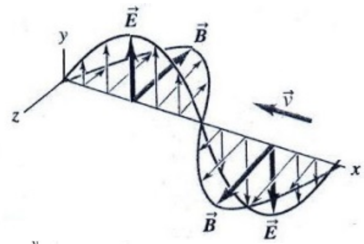
$\equiv B_0\sin(\pm kx - \omega t)$，$B_0 = \pm(k/\omega)E_0 = \pm E_0/v = \pm\sqrt{\mu\epsilon}E_0$，+ 向右 − 向左傳。

結論：$E = E_0\sin(\pm kx - \omega t)$，

$B = \pm E/v$，+ 向右 − 向左傳，

前進方向 $\propto \vec{E}\times\vec{B}$。





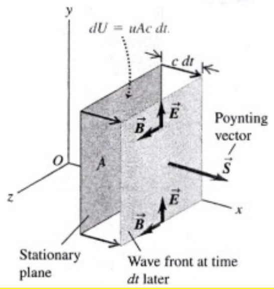
Energy Transport

能量密度 $u = u_E + u_B = \epsilon E^2/2 + B^2/2\mu$。

但 $E = vB = B/\sqrt{\mu\epsilon}$，$\therefore\ \epsilon E^2/2 = \epsilon(B^2/\mu\epsilon)/2 = B^2/2\mu$，

$\therefore\ u = \epsilon E^2 = B^2/\mu$, or $= (E\sqrt{\mu\epsilon})B/\mu = \sqrt{\epsilon/\mu}\,EB$。

厚 vdt 的体積中有能量 $dU = udV = u(Avdt)$，



energy flux (per unit area per unit time) $S \equiv (1/A)\,dU/dt = vu = vB^2/\mu = EB/\mu$。

（註：任何物理量 X 的密度 u_X，$dU_X = u_X dV = u_X(Avdt)$，其 flux $S_X = vu_X$。）

含方向 $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{B}/\mu$ (Poynting vector) 。

Sinusoidal wave $S = EB/\mu = (1/\mu)[E_0 \sin(kx-\omega t) B_0 \sin(kx-\omega t)]$

$= (E_0 B_0/2\mu)[1-\cos(2(kx-\omega t))]$，$E_0 = vB_0$ 。

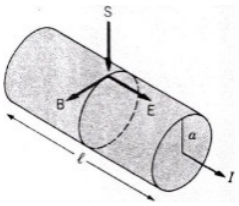
$\therefore$ Intensity $I \equiv \langle S \rangle = E_0 B_0/2\mu = E_0^2/2\mu v$ or $vB_0^2/2\mu$ 。

例：有一 point source，平均功率 P_{av}，各向均勻，在距離 r 處的 $E_0(r)$ & $B_0(r) = ?$

$I(r) = P_{av}/4\pi r^2 = E_0^2/2\mu v$ or $vB_0^2/2\mu$,

$\therefore E_0(r) = \sqrt{\mu v P_{av}/2\pi r^2}$，$B_0(r) = \sqrt{\mu P_{av}/2\pi r^2 v} \propto 1/r$ (not $1/r^2$) 。

例：Cylindrical conducting wire of radius a & length ℓ with resistance R & current I .



$E = V/\ell = IR/\ell$, $B = \mu I/2\pi a$.

$S = EB/\mu = (1/\mu)(IR/\ell)(\mu I/2\pi a)) = I^2 R/2\pi a\ell$,

因 $2\pi a\ell$ 即圓柱側面面積 A，故 $I^2 R = SA$ 。

Momentum and Radiation Pressure

$\because E = mc^2$, $\therefore m = E/c^2$, $\rho = u/c^2$ mass density in EM wave 。

Momentum density $\vec{\Pi} = \rho\vec{v}$ (也可視為 mass flux) $= \vec{v}u/c^2 = \vec{S}/c^2$ 。

(此式電磁學也能証明，不須用 $E = mc^2$)

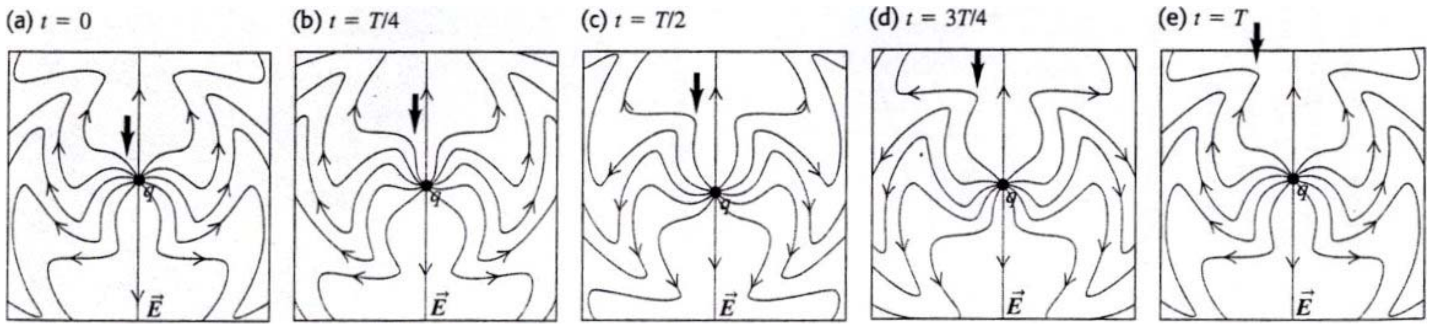
Surface A 受光壓力 $P = F/A = (1/A)(dp/dt)$，動量 $dp = \Pi dV = \Pi(Avdt)$，

$\therefore P = v\Pi$ (可視為 momentum flux) $= (v/c^2)S$ (全吸收) 或 $(2v/c^2)S$ (全反射) 。

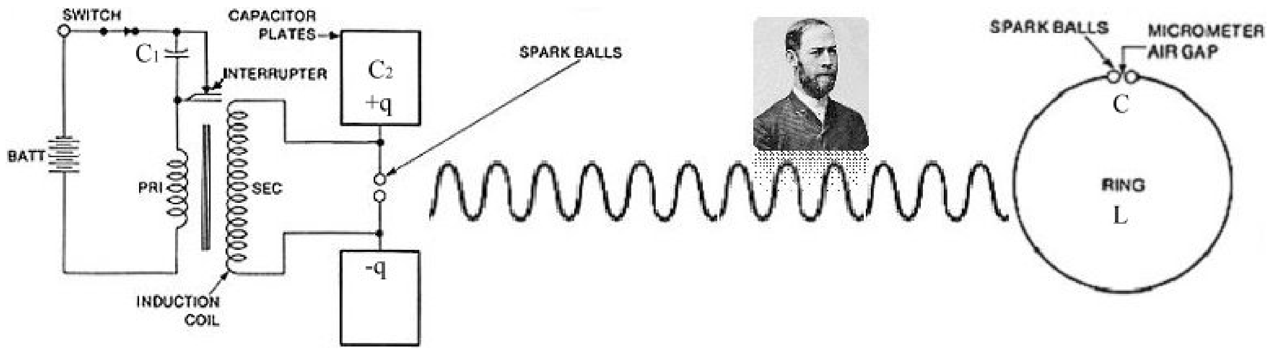
$\langle P \rangle = (v/c^2)\langle S \rangle = (v/c^2)I$ (全吸) 或 $(2v/c^2)I$ (全反) 。

In vaccum, $v = c$, $\langle P \rangle = I/c$ or $2I/c$ 。

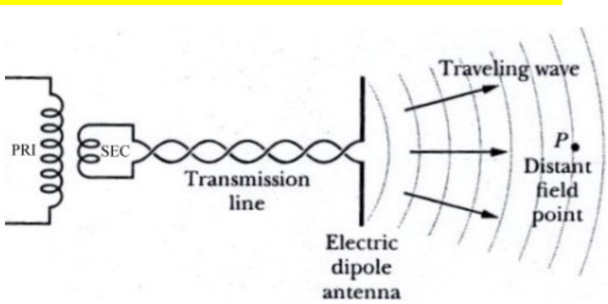
Radiation (可想像成電荷甩動電力線，電力線數目或電通量固定，下圖是單一電荷)



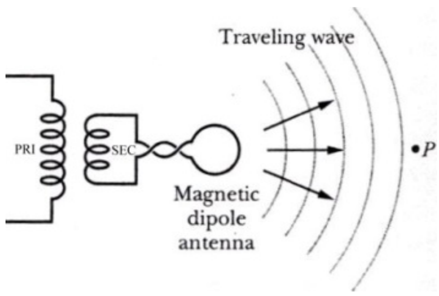
Hertz
實驗：



C_2（含小球）經變壓器變換又與 C_1 串聯後有等效電抗 L_{eq} & C_{eq} 。主線圈 PRI 的電流達設定值時，產生的磁場會把 interrupter 的開關吸開，電流改流經電容 C_1 ，而作 $\omega=\sqrt{1/L_{eq}C_{eq}}$ 的振盪，發出電磁波， C_2 的兩個小球間會產生火花。右邊的金屬環就是個線圈 L ，兩端小球就是電容 C ，調整 L 或 C 使 $\sqrt{1/LC}=\sqrt{1/L_{eq}C_{eq}}$ 時，右上角的小球間就會產生火花。

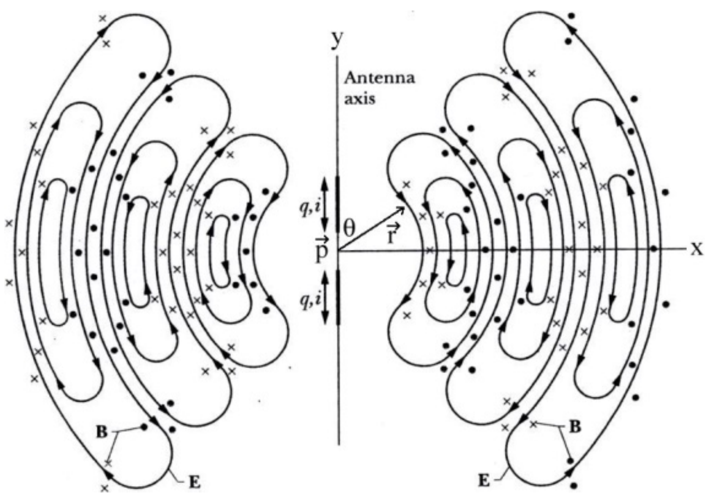


Electric dipole antenna



Magnetic dipole antenna

【參考】若 $\vec{p}(t)=q\vec{d}(t)=p_0\sin(\omega t)\hat{y}$ ，
則在 $r>>d$ 處：
$E\approx(p_0k^2/4\pi\epsilon_0 r)\sin\theta\sin(\omega t-kr)$ ，
$B\approx E/c$ ， $\vec{r},\vec{E},\vec{B}$ 兩兩互相垂直，
$\vec{S}\equiv\vec{E}\times\vec{B}/\mu\propto(\sin^2\theta/r^2)\hat{r}$ 。



H.W.： Prob. 1, 7, 8, 9, 12.