其解 $v(r)=[(P_1-P_2)/4L\eta](R^2-r^2)$。

体積流率 $\dfrac{dV}{dt}=\int_0^R 2\pi r dr\dfrac{(P_1-P_2)}{4L\eta}(R^2-r^2)=\dfrac{\pi(P_1-P_2)}{2L\eta}\left(R^2\int_0^R rdr-\int_0^R r^3 dr\right)$

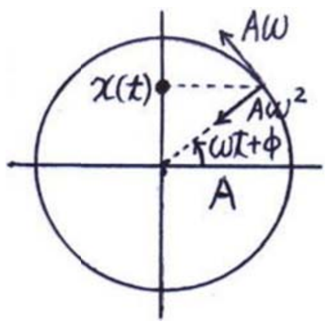
$=[\pi(P_1-P_2)/2L\eta](R^4/2-R^4/4)=[\pi(P_1-P_2)/8L\eta]R^4$ Poiseuille's law。

註：對有黏性的流体，前例 Venturi meter 的計算只適用於中線（$r=0$）。因流入必等於流出，故流率 $dV/dt=[\pi(P_1-P_2)/8L\eta]R^4=const.$ for all R，故必須 $(P_1-P_2)/L\propto 1/R^4$，故 $v(r)\propto(1/R^4)(R^2-r^2)=(1-r^2/R^2)/R^2$。一條流線經過處的 $r/R\equiv c$ 應均相等，因為如此則 $r_1=r_2(R_1/R_2)$，流入環狀區 $2\pi rdr$ 的會等於流出的：$v_1(r_1)2\pi r_1 dr_1=[const.(1-c^2)/R_1^2]2\pi(R_1/R_2)^2 r_2 dr_2=v_2(r_2)2\pi r_2 dr_2$。故流線上 $v\propto(1-c^2)/R^2\propto 1/A$，<u>符合 $A_1v_1=A_2v_2$。但只有在 $r=0$ 處無黏力（因 $dv/dr=0$），才可用 Bernoulli's eq.，即前面 Venturi meter 的分析只適用於中線。</u>

H.W.： Prob. 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10

Ch. 15 Oscillations

Simple Harmonic Motion（SHM，簡單諧和運動）



$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$，$x_0\equiv x(0)=A\sin(\phi)$。

A:amplitude，ω: angular frequency，ϕ: phase constant。

Period T: $\omega T=2\pi\Rightarrow T=2\pi/\omega$。

$v(t)=dx/dt=A\omega\cos(\omega t+\phi)$，$v_0\equiv v(0)=A\omega\cos(\phi)$。

$a(t)=dv/dt=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$，$a_0\equiv a(0)=-A\omega^2\sin(\phi)$。

When $x=0$，$v=\pm\omega A$，$a=0$；when $x=\pm A$，$v=0$，$a=\mp\omega^2 A$。

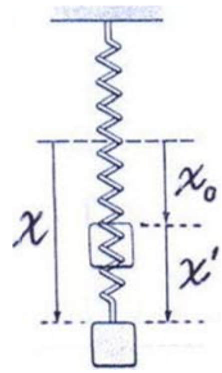
$x(t)$ 滿足 **<u>eq. of motion for SHM</u>**：$d^2x/dt^2+\omega^2 x=0$。$\Leftrightarrow x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

$x_0^2+(v_0/\omega)^2=A^2\sin^2\phi+A^2\cos^2\phi=A^2$，故 $A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$；

$x_0/v_0=(\tan\phi)/\omega$，故 $\phi=\tan^{-1}(\omega x_0/v_0)$。故 $A\,\&\,\phi$ 完全由起始條件 $x_0\,\&\,v_0$ 決定。

例：spring-block $md^2x/dt^2=-kx\Rightarrow d^2x/dt^2+(k/m)x=0\Rightarrow\omega=\sqrt{k/m}$。

例：vertical spring-block



$kx_0=mg$，$F=md^2x/dt^2=md^2(x-x_0)/dt^2=md^2x'/dt^2$，

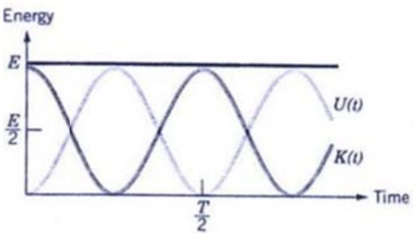
又 $F=mg-kx=-k(x-x_0)=-kx'$，故 $md^2x'/dt^2+kx'=0$。

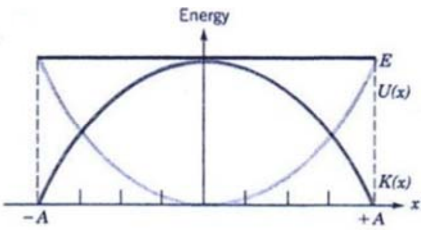
$\therefore\omega=\sqrt{k/m}$，$T=2\pi\sqrt{m/k}$。

$\Delta U=[k(x'+x_0)^2/2-mg(x'+x_0)]-[kx_0^2/2-mgx_0]$

$=kx'^2/2+kx_0x'+kx_0^2/2-mgx'-kx_0^2/2=kx'^2/2$。

Energy $E = mv^2/2 + kx^2/2 = (m\omega^2 A^2/2)\cos^2(\omega t+\phi) + (kA^2/2)\sin^2(\omega t+\phi)$





$= kA^2/2 = const.$ 。

$dE/dt = mv\,dv/dt + kx\,dx/dt$

$= mva + kxv = (ma+kx)v$

$= 0$ ，能量守恆。

【僅供參考，不考】 用能量守恆導 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$mv^2/2 = k(A^2 - x^2)/2 \quad \Rightarrow \quad |v| = |dx/dt| = \sqrt{(A^2 - x^2)k/m} \quad \Rightarrow$

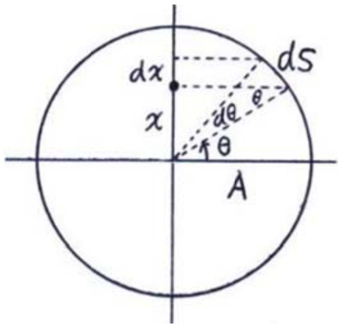
$\int_0^t \sqrt{k/m}\, dt' = \int_{x_0}^{x} |dx'| / \sqrt{A^2 - x'^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k/m}\, t = \int_{x_0}^{x} |dx'| / \left[A\sqrt{1-(x'/A)^2}\right]$ 。

定義 $x'/A \equiv \sin\theta'$ ， $dx'/A = \cos\theta' d\theta'$ ，代入得

$\sqrt{k/m}\, t = \int_{\theta_0}^{\theta} |\cos\theta' d\theta'| / \left[A\sqrt{1-\sin^2\theta'}\right] = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \theta - \theta_0$ 。

故 $\theta = \sqrt{k/m}\, t + \theta_0$ ， $x(t) = A\sin\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{k/m}\, t + \theta_0\right)$ 。

註：如右圖， $d\theta = ds/A = ds|\cos\theta| / A|\cos\theta| = |dx| / \sqrt{A^2 - x^2}$ 。



Simple Pendulum（單擺）

弧長 $s = L\theta$ ，切線力 $m_I\, d^2s/dt^2 = m_I L\, d^2\theta/dt^2 = -m_G g\sin\theta$

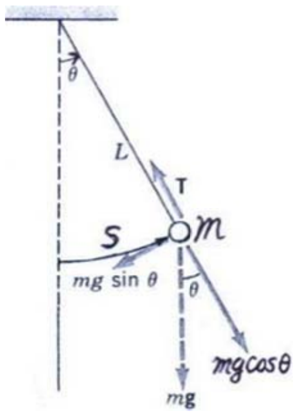
$\Rightarrow \quad d^2\theta/dt^2 + (m_G g/m_I L)\sin\theta = 0$ 。

當 θ 很小， $\sin\theta \approx \theta$ ，則 $d^2\theta/dt^2 + (m_G g/m_I L)\theta \approx 0$ ，

故 $\omega = \sqrt{m_G g/m_I L}$ ， $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m_I L/m_G g}$ 。

牛頓以此証明所有物体的 m_G/m_I 均相同，並輕鬆量出 g 。

取 $m_G = m_I$ 後， $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 。



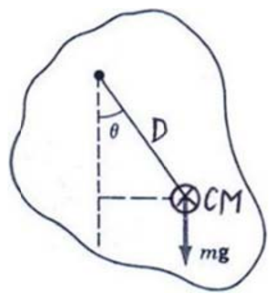
若 θ 不小，則 $T = 2\pi\sqrt{L/g}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\cdots\right)$ ， $\Theta \equiv \theta_{max}$ 。

Physical Pendulum（複擺）

$I\alpha = \tau \quad \Rightarrow \quad I d^2\theta/dt^2 = -mgD\sin\theta$ ，

當 θ 很小， $\sin\theta \approx \theta$ ，則 $d^2\theta/dt^2 + (mgD/I)\theta \approx 0$ 。

故 $\omega = \sqrt{mgd/I}$ ， $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/mgD}$ 。

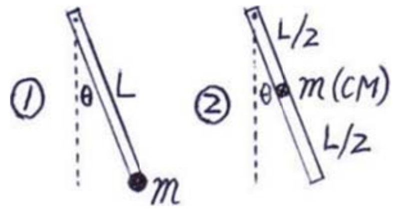


比較：(1) 長 L 的無質量細棒，下端有質量 m ；(2) 長 L 、質量 m 的均勻細棒。

(1) $I = mL^2$ ，$D = L \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{mL^2/mgL} = 2\pi\sqrt{L/g}$ 。

(2) $I = mL^2/3$ ，$D = L/2 \quad \Rightarrow$

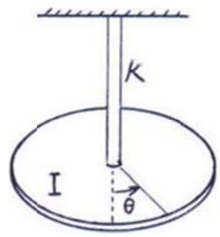
$T = 2\pi\sqrt{(mL^2/3)/(mgL/2)} = 2\pi\sqrt{2L/3g}$ 。



Torsional Pendulum (扭擺)

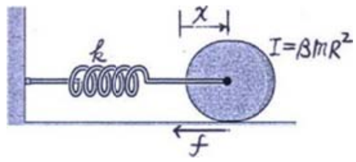
$I\alpha = \tau \quad \Rightarrow \quad Id^2\theta/dt^2 = -\kappa\theta \quad \Rightarrow \quad d^2\theta/dt^2 + (\kappa/I)\theta = 0$ ，

故 $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ ，$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$ 。



其它 (求 ω)

例：

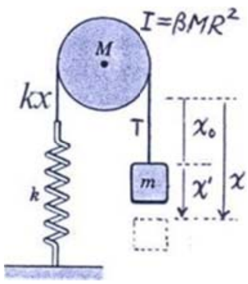


(1) $m\ddot{x} = -kx - f$ ；

(2) $I(\ddot{x}/R) = fR \quad \Rightarrow \quad$ (2’) $(I/R^2)\ddot{x} = f$ 。

(1)+(2’)得 $(m + I/R^2)\ddot{x} + kx = 0$ ，故 $\omega = \sqrt{k/(m + I/R^2)}$ 。

例：



(1) $m\ddot{x} = mg - T = kx_0 - T$ ；

(2) $I(\ddot{x}/R) = (T - kx)R \quad \Rightarrow \quad$ (2’) $(I/R^2)\ddot{x} + kx = T$ 。

(1)+(2’) 得 $(m + I/R^2)\ddot{x} + kx - kx_0 = 0$，$x - x_0 \equiv x'$ $(|x'| < x_0)$，

即 $(m + I/R^2)\ddot{x}' + kx' = 0$ ，故 $\omega = \sqrt{k/(m + I/R^2)}$ 。

Damped Oscillation (阻泥振盪)

假設有水阻力 $f = -\gamma v$ ，則 $md^2x/dt^2 = -kx - \gamma\, dx/dt$ ，

x 是自平衡點起算，向下為正。

即 $d^2x/dt^2 + (\gamma/m)dx/dt + (k/m)x = 0$ 。

Try $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$ ，代入 eq. 並整理成

$Ae^{-\alpha t}[C_1(\alpha, \omega, m, \gamma, k)\cos(\omega t + \phi)$

$+ C_2(\alpha, \omega, m, \gamma, k)\sin(\omega t + \phi)] = 0$ for all t。

故須 $C_1(\alpha, \omega, m, \gamma, k) = 0 = C_2(\alpha, \omega, m, \gamma, k)$ ，

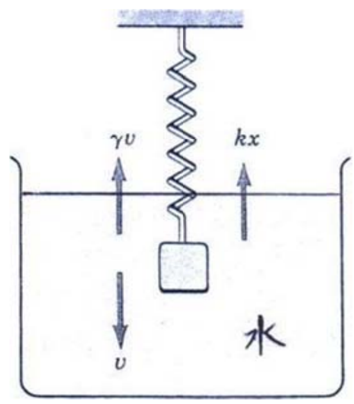
由此可解得 $\alpha = \gamma/2m$ 與 $\omega = \sqrt{k/m - (\gamma/2m)^2}$ ，

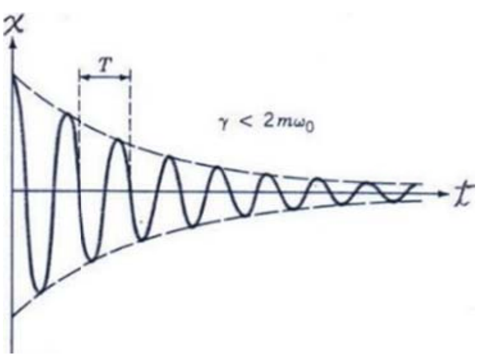
故 $x(t) = Ae^{-\gamma t/2m}\cos(\omega t + \phi)$ ，

A & ϕ 由 $x(0)$ & $v(0)$ 決定。

Case (A) underdamping： $k/m - \gamma^2/4m^2 > 0$ ，

即 $\gamma < 2\sqrt{mk}$ ，ω 實數，有振盪。



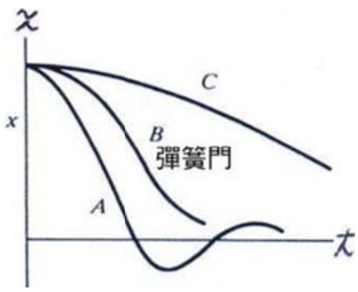


Case (B) critically damping：$k/m-\gamma^2/4m^2=0$，

即 $\gamma=2\sqrt{mk}$ ，$x(t)=(C+Dt)e^{-\gamma t/2m}$ ，無振盪。

Case (C) overdamping：$k/m-\gamma^2/4m^2\equiv -a^2<0$ ，

即 $\gamma>2\sqrt{mk}$ ，$x(t)=(Ce^{+at}+De^{-at})e^{-\gamma t/2m}$ 。



Energy $dE/dt=mv\,dv/dt+kx\,dx/dt=mva+kxv=(ma+kx)v=(-\gamma v)v$ ，

即 power by damping force。

Forced Oscillation （驅動振盪）

當有外來 driving force $F\cos(\omega_d t)$ 時，

$md^2x/dt^2=-\gamma\,dx/dt-kx+F\cos(\omega_d t)$ ，

即 $d^2x/dt^2+(\gamma/m)dx/dt+(k/m)x=(F/m)\cos(\omega_d t)$ 。

Steady 時，Try $x(t)=A\cos(\omega_d t+\phi)$ ，$A\,\&\,\phi$ 未知，

並且用 $\cos(\omega_d t)=\cos(\omega_d t+\phi-\phi)$

$=\cos(\omega_d t+\phi)\cos(\phi)+\sin(\omega_d t+\phi)\sin(\phi)$ ，

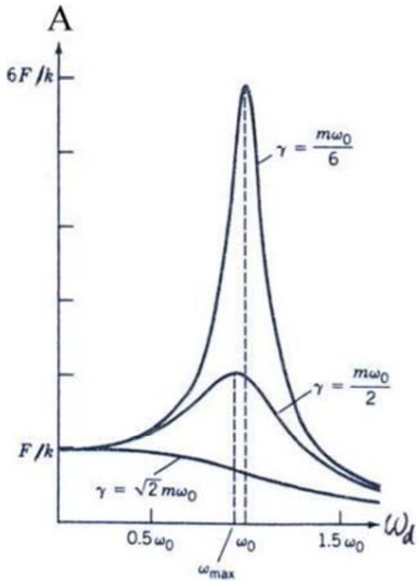
代入 eq. 並整理成 $[C_1(A,\phi,m,\gamma,k,F,\omega_d)\cos(\omega_d t+\phi)$

$+C_2(A,\phi,m,\gamma,k,F,\omega_d)\sin(\omega_d t+\phi)]=0$ for all t。

故須 $C_1(A,\phi,m,\gamma,k,F,\omega_d)=0=C_2(A,\phi,m,\gamma,k,F,\omega_d)$ ，

由此解得 $A=(F/m)\Big/\sqrt{(\omega_d^2-k/m)^2+(\gamma/m)^2\omega_d^2}$ ，$\phi=\cdots$ (略)。

當 ω_d 在 $\omega_0\equiv\sqrt{k/m}$ （自然頻率）附近時，A 最大，稱共振。



H.W.：Prob. 1, 4, 5, 7, 9, 13, 14

Ch. 18 Temperature, Thermal Expansion, Ideal Gas Law

Temperature：◆ Locke，一手熱水一手冷水再一齊放溫水中… ◆ Galilei 1595，玻璃球下管插水中，管中水上升… ◆ 17 世紀中，酒精溫度計 ◆ Fahrenheit 1724 ◆Celsius 1742。

Thermal Equilibrium：所有的 flows (mass, heat, …) 皆停止。

Zeroth law of thermodynamics

Form (a)：存在熱平衡，而且若 A、B 分別與 C 達成熱平衡，則 A 與 B 也會達成熱平衡。

Form (b)：每一物体都有一性質叫溫度，二物會達成平衡 ⇔ （若且唯若）它們有相同的溫度。