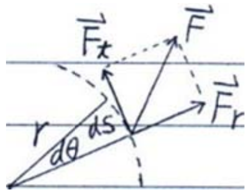
Work & Power

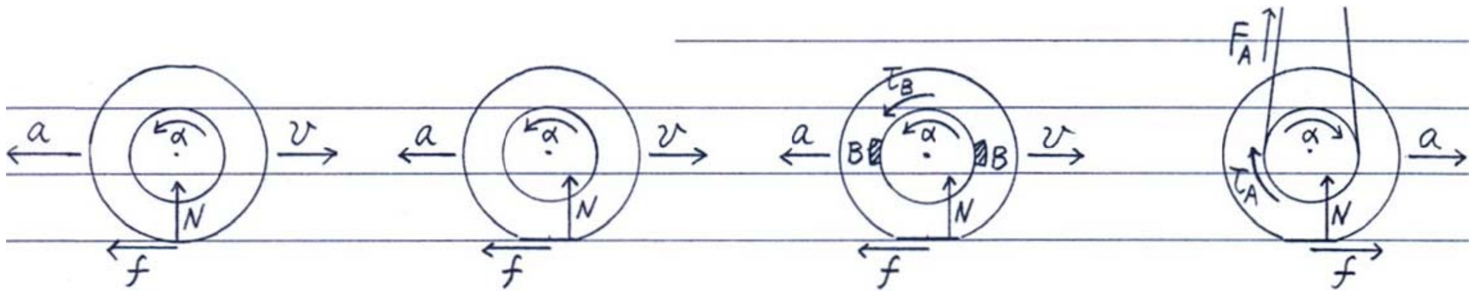


$dw = F_t ds = F_t r d\theta = \tau d\theta$，$\therefore$ power $P = dw/dt = \tau\omega$ ($\leftrightarrow P = Fv$)。

$W = \int dw = \int \tau d\theta = \int I\alpha d\theta = \int I(d\omega/dt)\omega dt = I\int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega d\omega$

$= I\omega_f^2/2 - I\omega_i^2/2$。

Rolling Friction（arrow 方向為〝+〞）



$f = ma$ 向右減速
但 $I\alpha = -fR < 0$
向右加速，矛盾
$\therefore f = 0$，$\alpha = 0$

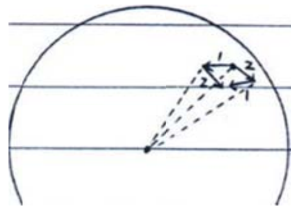
$\begin{cases} f = ma \\ \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_N = (1+\beta)maR$

$\begin{cases} f = ma \\ \tau_B + \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_B + \tau_N = (1+\beta)maR$
可以 $\tau_N = 0$

$\begin{cases} f = ma \\ \tau_A + \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_A + \tau_N = (1+\beta)maR$
可以 $\tau_N = 0$

註：以上用到 $fR + I\alpha = (ma)R + \beta mR^2(a/R) = (1+\beta)maR$

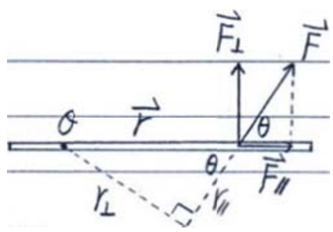
Rotation Angles



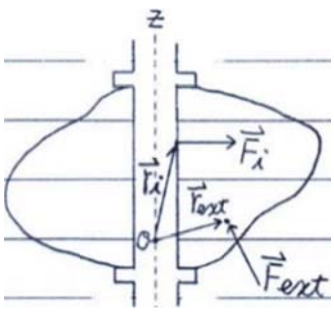
$\vec{\theta}$：$|\vec{\theta}|$ angle 大小，$\hat{\theta} \equiv \vec{\theta}/|\vec{\theta}|$ 轉軸方向。$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$（例翻轉書本），故非向量。但 $d\vec{\theta}_1 + d\vec{\theta}_2 = d\vec{\theta}_2 + d\vec{\theta}_1$，故 $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$，$\vec{\omega}$ 是向量。

H.W.：Ex. 26, 29, 32, 34, 44, 56, 57, 58, 70；Prob. 2, 7, 13.

Ch. 12 Angular Momentum and Statics



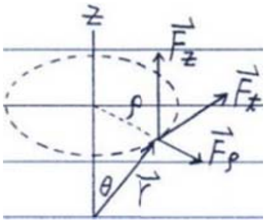
相對於一點的 torque（右圖） $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$，
$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta = r(\sin\theta)F = rF_\perp = r_\perp F$。



（左圖）當有固定光滑 axis（在 $\hat{z}$ 方向）時，axis 會作用一力矩 $\vec{\tau}_{axis} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \perp \hat{z}$。

物體受的 total torque $\vec{\tau}=\vec{\tau}_x+\vec{\tau}_y+\vec{\tau}_z$，$\vec{\tau}_x \,\&\, \vec{\tau}_y$ 因包含 $\vec{\tau}_{axis}$ 而非常複雜，難以分析，但其作用只是使物體相對於 $\hat{x} \,\&\, \hat{y}$ 軸作左右擺動 (但 $\omega_x=0=\omega_y$)，故無需分析，只需分析 $\vec{\tau}_z$ 。

【參考：轉動慣量其實是張量 I_{ij} ，力矩 $\tau_i=\sum_{j=1}^{3} I_{ij}\alpha_j$ ，雖 $\alpha_x=0=\alpha_y$ ，但 $dL_{x,y}/dt=\tau_{x,y}=I_{xz,yz}\alpha_z\neq 0$ 。】



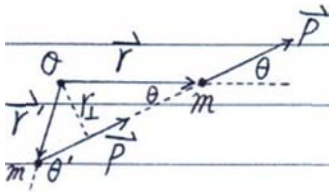
不受軸力影響的 $\vec{\tau}_z=?$ (以下單位向量 $\hat{A}\equiv\vec{A}/|\vec{A}|$)

$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=(r\cos\theta\,\hat{z}+\rho\hat{\rho})\times(\vec{F}_\rho+\vec{F}_t+\vec{F}_z)$ ，

但 $\hat{z}\times\vec{F}\perp\hat{z}$ ，$\hat{\rho}\times\vec{F}_z\perp\hat{z}$ ，$\hat{\rho}\times\vec{F}_\rho=0$ ，

$\therefore \vec{\tau}_Z=\vec{\rho}\times\vec{F}_t$ ，$\tau_Z=\rho F_t$ 。

Angular Momentum $\vec{l}\equiv\vec{r}\times\vec{P}$ ，$l=rp\sin\theta=r_\perp P=rP_\perp$ 。

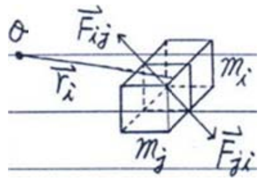


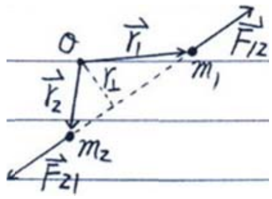
$d\vec{l}/dt=(d/dt)(\vec{r}\times\vec{P})=(d\vec{r}/dt)\times\vec{P}+\vec{r}\times(d\vec{P}/dt)$

$\quad=\vec{v}\times(m\vec{v})+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{\tau}$ 。

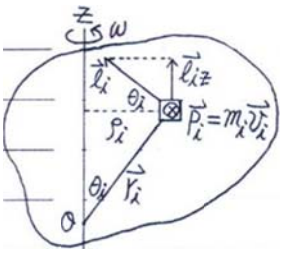
粒子系統：$\vec{L}\equiv\sum\vec{l}_i$ ，$d\vec{L}/dt=\sum d\vec{l}_i/dt=\sum\vec{\tau}_i$ 。

但內力的 torques 互相抵消，$\therefore d\vec{L}/dt=\sum_{ext}\vec{\tau}_{ext}$ 。





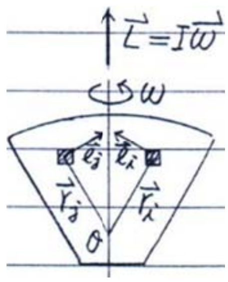
若有 fixed axis 則只考慮 $\hat{z}$ 分量，$dL_Z/dt=\tau_{ext\,Z}$ 。$L_z=?$



$l_i=r_iP_i\sin 90^o$ ，$l_{iZ}=l_i\sin\theta_i=r_iP_i\sin\theta_i=(r_i\sin\theta_i)(m_iv_i)$

$\quad=(\rho_i)(m_i\rho_i\omega)$ ，

$\therefore\ L_Z=\sum l_{iZ}=\sum m_i\rho_i^2\omega=I\omega$ 。

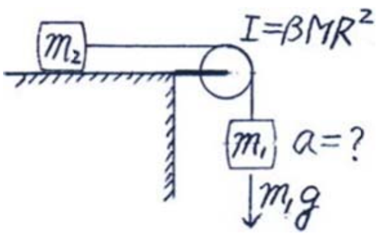


而若 axis 是對稱軸如右圖，則 $\vec{L}=I\vec{\omega}$ 。

$\tau_Z=dL_Z/dt \ \Rightarrow \tau_Z=(d/dt)(I\omega)=I\,d\omega/dt=I\alpha$ (again !) 。

動能 $K=I\omega^2/2=(I\omega)^2/2I=L_Z^2/2I \quad\leftrightarrow\quad K=P^2/2m$ 。

【略】例：



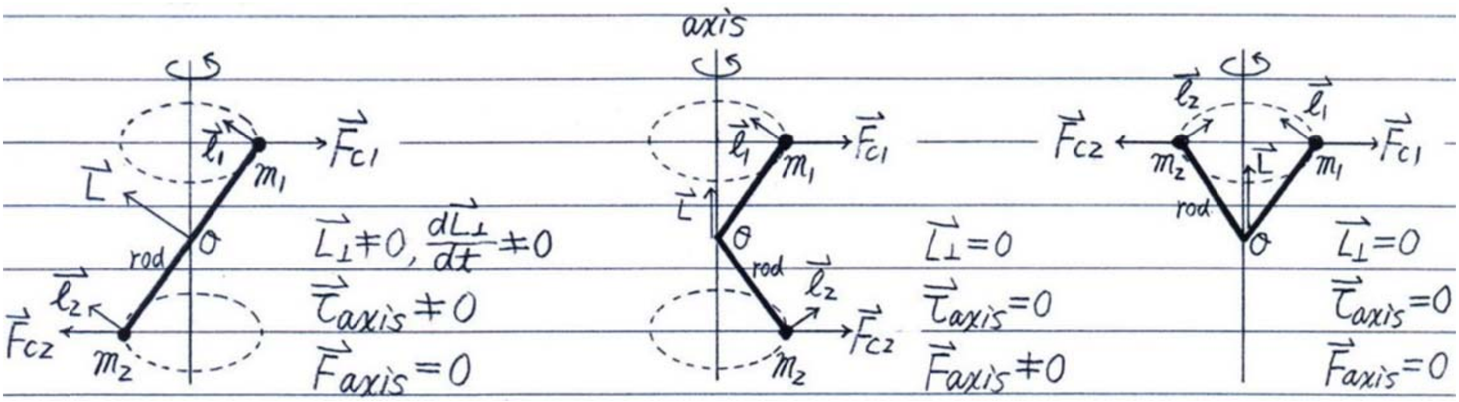
以 pulley 中心為原點，把 m_1, m_2 & pulley 看成一系統，

$L=m_1vR+m_2vR+I\omega$ (假設 m_2 rope 保持水平)

m_2 處受的外力為 0 (rope 張力是內力)，pulley axis 作的力矩為 0，只有 m_1 ，受的重力 $m_1\vec{g}$ 有力矩，故

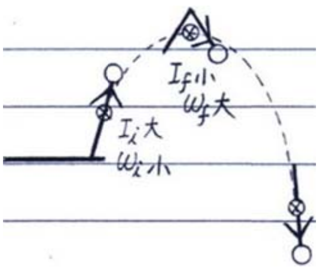
$\tau_{ext}=dL/dt\Rightarrow Rm_1g=(d/dt)(m_1vR+m_2vR+I\omega)\ =m_1aR+m_2aR+(\beta MR^2)(a/R)$ ，

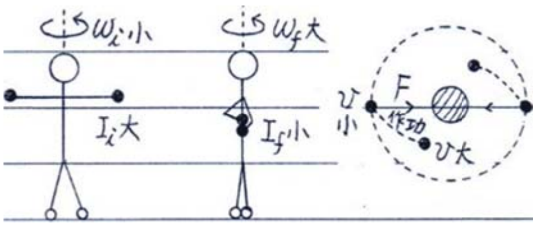
$\therefore a=m_1g/(m_1+m_2+\beta M)$ 。

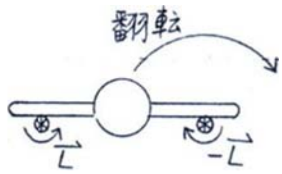


若外力的 $\vec{\tau}_{ext} = 0$，則 $d\vec{L}/dt = 0$，$\vec{L}$ 守恆。 若只某分量 $\tau_{ext\ Z} = 0$，則 L_Z 守恆。
若有 fixed axis（$\hat{z}$ 方向），且 $\tau_Z = 0$，則 $I_i\omega_i = I_f\omega_f$。

例：跳水者　　例：溜冰者　　例：air plane

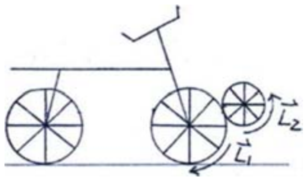






若 engine 卡住（$\vec{L} \to 0$）則會翻轉，∴引擎不能固定太牢。

例：右圖 bicycle，若 $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0$ 則很難騎。

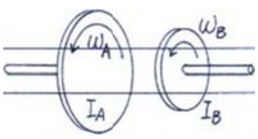


例：中子星 $R_i \approx 7\times10^8 m$ ~ size of sun，$\omega_i = 1\quad rev./month = 3.9\times10^{-7}\ rev./\sec$，
$R_f \approx 1.6\times10^4 m$，假設純重力塌縮，$M$ 不變且均勻（與實際不符），$\omega_f = ?$
Sol：$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow (2/5)MR_i^2\omega_i = (2/5)MR_i^2\omega_f \Rightarrow \omega_f = (R_i/R_f)^2\omega_i = 750\ rev./\sec$。
$K = L^2/2I$，$\because I_f < I_i$，$\therefore K_f > K_i$，動能來自重力位能，見溜冰者的解釋。

若物體可分成二部分各自旋轉，$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0 \quad (= L_i) \quad \Rightarrow I_1\omega_1 dt + I_2\omega_2 dt = 0$
$\Rightarrow I_1 d\theta_1 + I_2 d\theta_2 = 0$，$\therefore d\theta_2 = -(I_1/I_2)d\theta_1$。

例：Cat 自高處落下（2012 年 Boston，自 19 樓摔下，毫髮無傷）

例：



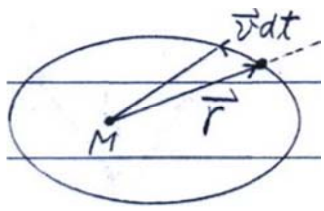
類似汽車 clutch（離合器），合成一體後 $\omega_f = ?$
$(I_A + I_B)\omega_f = I_A\omega_A + I_B\omega_B$，$\therefore \omega_f = (I_A\omega_A + I_B\omega_B)/(I_A + I_B)$。

Kepler's 2nd Law：行星與太陽的連線等時間掃過相同面積

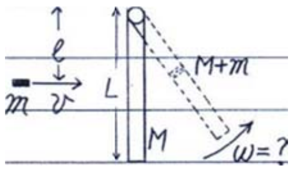
Proof：(area swept in dt) $dA=(1/2)|\vec{r}\times\vec{v}dt|$，

but $l=|\vec{r}\times\vec{p}|=m|\vec{r}\times\vec{v}|$，$\therefore dA/dt=l/2m=const$。

(任何〝中心力〞$\vec{F}=f\,\vec{r}$ 的 $\vec{\tau}=\vec{r}\times(f\,\vec{r})=0$，$\therefore \vec{l}=const$。)



例：



子彈 m 射入寬 L 、質量 M 的門，no friction at hinge，$\omega=?$

Sol：$mvl=(I_{door}+I_{bullet})\omega=(ML^2/3+ml^2)\omega$，

$\omega=mvl/(ML^2/3+ml^2)$。 （ $E,\vec{P}$ 都不守恆 ）

Spin & Orbital Angular Momentum

$\vec{L}=\vec{L_o}+\vec{L}_s$，$\vec{L}_o$ 是 CM 相對於觀察者（公轉），$\vec{L}_s$ 是物體相對於 CM （自轉）。

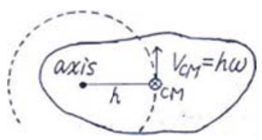
proof：以下 $\vec{r},\vec{u}$ 相對於 CM ，$\vec{R},\vec{V}$ 相對於觀察者原點。

$$\vec{L}=\sum_i \vec{R}_i\times m_i\vec{V}_i=\sum_i(\vec{r}_i+\vec{R}_{CM})\times m_i(\vec{u}_i+\vec{V}_{CM})$$

$$=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{u}_i+\vec{R}_{CM}\times(\sum_i m_i\vec{u}_i)+(\sum_i m_i\vec{r}_i)\times\vec{V}_{CM}+\vec{R}_{CM}\times(\sum_i m_i)\vec{V}_{CM}$$

$$=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{u}_i+\vec{R}_{CM}\times(M\vec{V}_{CM})=\vec{L}_s+\vec{L}_o\quad(\text{ or }\ \vec{L}_{\text{int}}+\vec{L}_{ext}\ )。$$

例：



$$L=I\omega=(I_{CM}+Mh^2)\omega=I_{CM}\omega+hM(h\omega)$$

$$=L_s+L_o\ (\text{ or }\ L_{\text{int}}+L_{ext}\ )。$$

Torque $\vec{\tau}=d\vec{L}/dt=(d/dt)(\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{u}_i+\vec{R}_{CM}\times M\vec{V}_{CM})$

$$=\sum\vec{r}_i\times m_i\,d\vec{u}_i/dt+\vec{R}_{CM}\times\left(M\,d\vec{V}_{CM}/dt\right)=\vec{\tau}_s+\vec{\tau}_o\ (\text{ or }\ \vec{\tau}_{\text{int}}+\vec{\tau}_{ext}\ )。$$

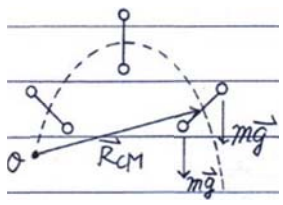
CM 有加速度，但在加速座標中，慣性力相當於均勻重力場，其相對於 CM 的力矩為 0，故在算 $\vec{\tau}_s$（ $\vec{\tau}_{\text{int}}$ ）時不須考慮慣性力：

$$\vec{\tau}_s=\sum\vec{r}_i\times(m_i\,d\vec{u}_i/dt)=\sum\vec{r}_i\times m_i(d\vec{V}_i/dt-d\vec{V}_{CM}/dt)$$

$$=\sum\vec{r}_i\times m_i\,d\vec{V}_i/dt+\sum_i\vec{r}_i\times m_i(-d\vec{V}_{CM}/dt)=\sum\vec{r}_i\times(m_i d\vec{V}_i/dt)\ 。$$

例：右圖空中飛的物体，$\vec{\tau}_s=0$，$\therefore\vec{L}_s$ 不變；

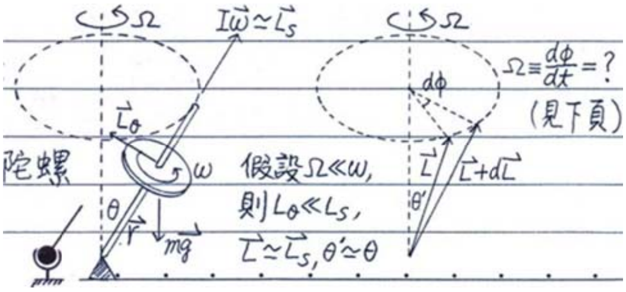
但 $\vec{\tau}_o=\vec{R}_{CM}\times 2m\vec{g}\neq 0$，$\therefore\vec{L}_o$ 會變。



陀螺（圖在下頁）

假設公轉角速度 $\Omega<<\omega$ ，則 $L_O<<L_S$ ，$\vec{L}=\vec{L}_O+\vec{L}_S\approx\vec{L}_S\approx I\vec{\omega}$，$\theta'\approx\theta$。

$d\vec{L}=\vec{\tau}dt=\vec{r}\times(m\vec{g})dt$（ $\perp\vec{g}$ ，在水平方向），$\therefore|d\vec{L}|=rmg\sin\theta dt$ 。



但又$|d\vec{L}| = L\sin\theta' d\phi \approx I\omega\sin\theta d\phi$，
$\therefore I\omega\sin\theta d\phi \approx rmg\sin\theta dt$，
$\therefore \Omega \equiv d\phi/dt \approx rmg/(I\omega)$，ind. of θ，
適用於$\omega >> \Omega$時，ω愈大愈正確。

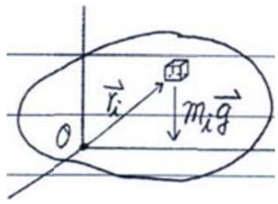
因$|\vec{\tau}| = rmg\sin\theta \approx \Omega L_S\sin\theta = |\vec{\Omega}\times\vec{L}_S|$，方向也相同，故$\vec{\tau}\approx\vec{\Omega}\times\vec{L}_S$。
（比較：質點作圓運動時，$F = mv^2/r = (v/r)mv = \omega P$，$\vec{F} = \vec{\omega}\times\vec{P}$。）

tip of axle 必稍降低，原因：

(1) 支點作用的$\vec{\tau}_S$無 axle 方向分量，$\therefore \omega$幾乎不變，$K_{\text{int}} \approx I\omega^2/2$幾乎不變，但公轉（進動 precession）也有動能，此動能必來自重力位能，故需稍降低。

(2) total $\tau_z = 0$，$\therefore L_z$不變，但公轉帶有$(\vec{L}_O)_z$，故$\vec{L}_S$需下降以抵消$(\vec{L}_O)_z$，使$\Delta L_z = \Delta L_{Oz} + \Delta L_{Sz} = 0$。

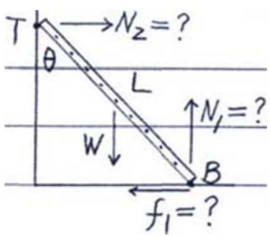
Static Equilibrium：$\sum\vec{F}_n = 0$ 且相對於任一點的 $\sum\vec{\tau}_n = 0$。



重力的 torque：$\vec{\tau}_g = \sum\vec{r}_i\times(m_i\vec{g}) = (\sum m_i\vec{r}_i)\times\vec{g} = (M\vec{R}_{CM})\times\vec{g}$
$= \vec{R}_{CM}\times(M\vec{g})$，可看成集中於$CM$。

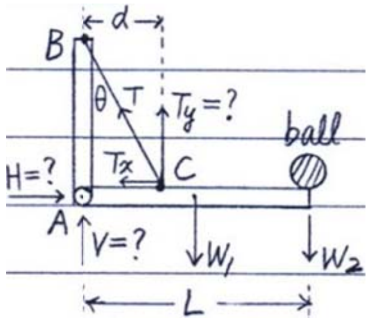
（略）例：梯子與 wall 間無摩擦，但與地面有摩擦f_1，求$f_1, N_1, N_2 = ?$

$$\Sigma F_y = N_1 - W = 0 \Rightarrow N_1 = W\ ;\ \Sigma F_x = N_2 - f_1 = 0 \Rightarrow N_2 = f_1\ 。$$



法①：以T為參考，$\tau_T = -W(L/2)\sin\theta - f_1L\cos\theta + N_1L\sin\theta = 0$,
$\therefore f_1 = (-W(L/2)\sin\theta + WL\sin\theta)/(L\cos\theta) = (W/2)\tan\theta$。
法②：以B為參考，$\tau_B = W(L/2)\sin\theta - N_2L\cos\theta = 0$，
$\therefore N_2 = (W/2)\tan\theta$。

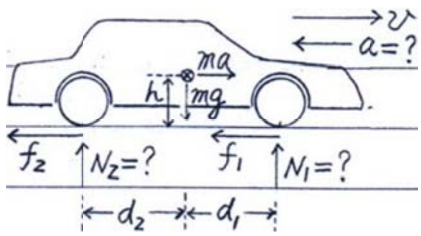
例：垂直棒固定，以樞鈕、細繩與水平棒連接，求作用於水平棒的力$T,V,H=?$



Sol：以樞紐A為支點，則H & V不出現，而先得T，
$\tau_A = (T\cos\theta)d - W_1L/2 - W_2L = 0$，
$\therefore T = (W_1/2 + W_2)L/(d\cos\theta)$。
$H = T_x = T\sin\theta = (W_1/2 + W_2)L\tan\theta/d$。
$V = W_1 + W_2 - T_y = (W_1 + W_2) - (L/d)(W_1/2 + W_2)$。

另法：以 $B\,(C\,)$點為參考點，則 $\tau_B(\tau_C)$ 中 $T\ \&\ V(T\ \&\ H)$ 不出現，而先得 $H(V)$ 。

例：Car mass m ，coeff. of friction u_k ，完全煞死， $a, N_1, N_2 = ?$



$N_1 + N_2 = mg$ ， $f_1 = \mu_k N_1$ ， $f_2 = \mu_k N_2$ ，

$ma = f_1 + f_2 = \mu_k(N_1 + N_2) = \mu_k mg$ ，$\therefore a = u_k g$ 。

法①：以前輪底為參考（ N_1, f_1, f_2 不出現），

$\tau_1 = -N_2(d_1 + d_2) - mah + mgd_1 = 0$ ，

$\therefore N_2 = mg(d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)$ ，

$N_1 = mg - N_2 = mg[1 - (d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)] = mg(d_2 + \mu_k h)/(d_1 + d_2)$ 。

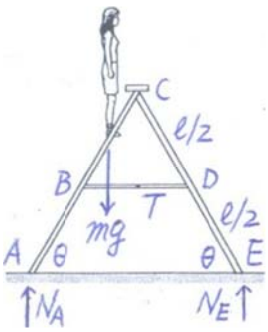
法②：以 CM 為參考（ $mg\ \&\ ma$ 不出現）， $\tau_{CM} = N_1 d_1 - N_2 d_2 - f_1 h - f_2 h = 0$

$\Rightarrow N_1 d_1 - (mg - N_1)d_2 = \mu_k N_1 h + u_k N_2 h = \mu_k mgh$ ，

$\therefore N_1 = mg(d_2 + u_k h)/(d_1 + d_2)$ ， $N_2 = mg - N_1 = mg(d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)$ 。

即使 $d_1 = d_2$ ， N_1 仍然大於 N_2 ，因慣性力 ma 向前產生力矩，使車尾上抬。

例：二梯相靠，梯長 ℓ 、質量可略，中點以細繩連接，人重 mg 站在 $3\ell/4$ 處，



求 $T, N_A, N_E = ?$

二梯看成一体，並以 A 為參考點，

$\tau_A = N_E 2\ell\cos\theta - mg(3\ell/4)\cos\theta = 0 \Rightarrow N_E = 3mg/8$ 。

$\sum_i F_i = 0 \Rightarrow N_A = mg - N_E = 5mg/8$ 。

考慮 CE 梯，並以 C 參考點， $\tau_c = N_E \ell\cos\theta - T(\ell/2)\sin\theta = 0$

$\Rightarrow T = 2N_E\cot\theta = 3mg\cot\theta/4$ 。

H.W.：Ex. 17, 23, 25, 30, 33；Prob. 1, 2, 3, 9, 10, 17, 18.

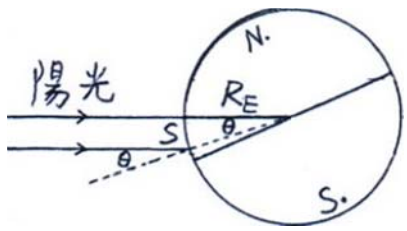
Ch. 13 Gravitation

Newton：地表 $g \approx 10\, m/s^2$ ，月球的 $a_{moon} = 4\pi^2 r_M / T^2 \approx 1/360\, m/s^2$ ，

$a_{moon}/g \approx 1/3600 \approx R_E^2 / r_M^2$ ，符合 $g \propto 1/r^2$ 。

地球半徑由 Erastothenes（276 B.C.生）測得： $R_E = s/\theta$ 。

他也用日蝕、月蝕資料算出 日-地、月-地距離！



$\vec{F} = \left(-GMm/r^2\right)\hat{r}$ ， $\vec{r} \equiv \vec{r}_m - \vec{r}_M$ ， $\hat{r} \equiv \vec{r}/|\vec{r}|$ ，

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ by Cavendish’s 實驗。