黃致誼 歷史108 B34044053

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

微積分 II 期中考 Mid-Exam of Calculus II

滿分為 125 分

1. (10 %) 請檢驗下列級數是否收斂？

   [1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   [2] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

2. (10 %) 請找出 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ 的收斂半徑 R

3. (15 %) 請找出下列函數的泰勒展開式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

   [1] $f(x) = e^{-x^2}$

   [2] $(1+x^2)^{\frac{1}{3}}$

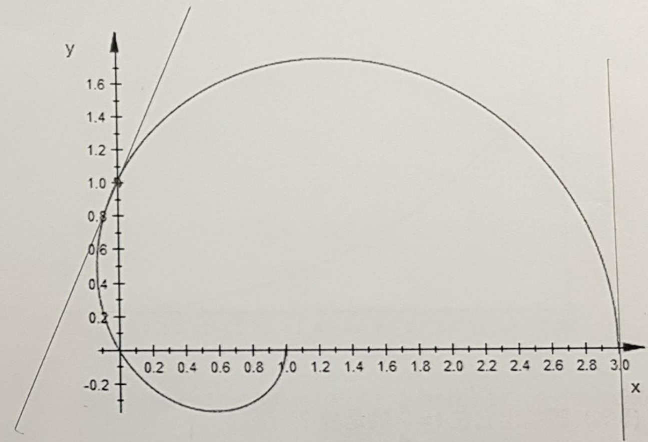
   [3] $f(x) = \arctan x$

4. (10 %) 請利用泰勒多項式找出下列數值的估計到小數點下 6 位精確。

   [1] $\arctan(0.01)$

   [2] $\sqrt[3]{1.01}$

5. 對極座標的圖形 $r(\theta) = 2\cos\theta + 1$，$0 \le \theta \le \pi$ 的圖形如下：



   [1] (10 %) 請問它在(0, 1)及(3, 0)的切線各是？(請以極座標方程式 $r = f(\theta)$ 表示)

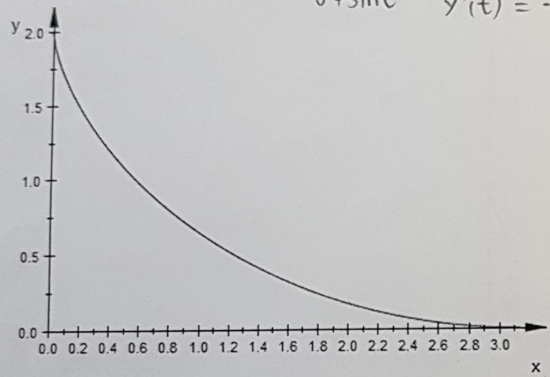
   [2] (5 %) 請找出在兩條切線及函數圖形所包含的面積？

   [3] (10 %) 如果把這條極座標曲線在第一象限的部分對 X 軸旋轉所形成的旋轉體體積是多少？

6. 假設 $\vec{\mathbf{r}}(t)=(x(t),y(t))$，其中 $x(t)=t-\sin(t)$，$y(t)=1+\cos(t)$，$0 \le t \le \pi$

1-cost　　y'(t) = -sint

0 +sint　　y''(t) = -cost



[1] (5 %) 請找出它在 $t=\frac{\pi}{4}$ 的切線？

[2] (5 %) 請找出它在第一象限與 X 軸所圍成的面積？

[3] (10 %) 如果把這條極座標曲線在第一象限的部分對 Y 軸旋轉所形成的旋轉體體積是多少？

[4] (15 %) 試求出運動時的單位切向量 $\vec{\mathbf{T}}(t)$、單位法向量 $\vec{\mathbf{N}}(t)$、及曲率 $\kappa(t)$。

7. (25 %) 挑戰題：假設我們把 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 分成 2^n 等份，取 $x_k=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{2^n}$，$1 \le k \le 2^n-1$，假設 $S_n=\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2 x_k}$，

[1] (5 %) 利用 $\frac{1}{\sin^2 x_k}+\frac{1}{\sin^2 x_{2^n-k}}=\frac{1}{\sin^2 x_k}+\frac{1}{\cos^2 x_k}$，找出 $S_n=4S_{n-1}+2$。如果不知道怎麼做，試試 n=1，2，3

[2] (5 %) 將 $S_n=4S_{n-1}+2$ 改寫成 $S_n+c=4(S_{n-1}+c)$ 並找出 $S_n=f(n)$。(Hint: 過程中你需要自己找 S_1)

[3] (10 %) 當 x 在 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 時，我們會有 $0 \le \sin x \le x \le \tan x$，因此我們會有 $\frac{1}{\tan^2 x} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{\sin^2 x}$，透過 $\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1$，並利用 $\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\tan^2 x_k} \le \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{x_k^2} \le \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2 x_k}$，找出 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

$\int x\cos^2 x$

$= \int x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$= \int \frac{1}{2}x + \int \frac{x}{2}\cos 2x$