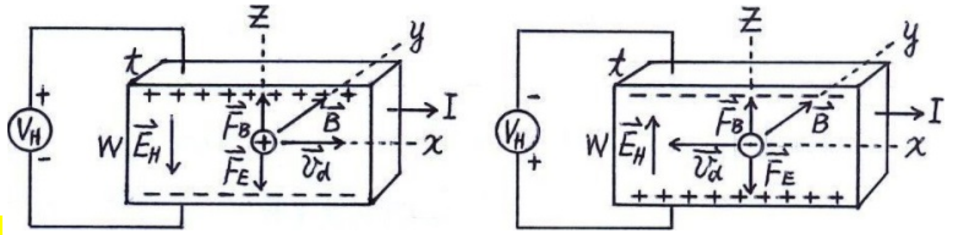
Hall Effect (Oct. 1879)

Maxwell 的書上說： $\vec{B}$ 作用在導体上而非電流上，有無 $\vec{B}$ 對電流分布無影響。

Hall 在 1877 年開始當 H. Rowland 的研究生。他懷疑上述說法，他想電流應被推到導線的一側而降低有效截面積使電阻增加，但他無法測得此效應。Rowland 早先已發現電線兩側間有微弱電壓，便建議 Hall 用金箔重作此實驗，而發現了 Hall effect。



$\vec{v}_d = v_d\hat{x}$, $\vec{B} = B\hat{y}$,

$\vec{E}_H = E_H\hat{z}$.

I 穩定時 q 走直線，

$\therefore \vec{v}_d$ （ & $\vec{J},\vec{E}$ ）均勻。

(a) $F_z = qE_H + qv_dB = 0$ ，

$\therefore E_H = -v_dB$ 均勻,，$\therefore v_d = -E_H/B = V_H/wB$ 。

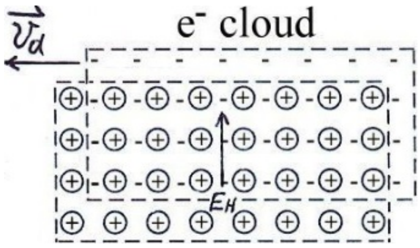
(b) $nq = J/v_d = J(-B/E_H) = (I/wt)(Bw/V_H) = IB/V_Ht$.

$\therefore$ 量 V_H 可知 v_d & nq ，若 $V_H > 0$ ，則 $q > 0$ 。

Most metals: e^-. Metals Co, Zn, Pb, Fe & semiconductors Si, Ge: h^+ (hole).

Force on a wire： e^- cloud 受磁力向上而拉正離子，

或說正離子受到向上 $\vec{E}_H$ 的作用。



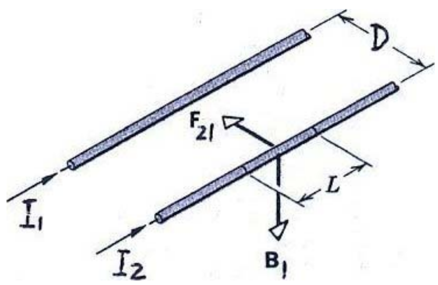
H.W.： Ex. 54; Prob. 1, 2, 4, 5, 6.

Ch. 30 Sources of the Magnetic Field

Oersted described his work ($I \Rightarrow \vec{B}$) to Paris Academy of Science in Sept. 1820.

Biot-Savart announced in Oct. 1820 that $B \propto I/r$ for a long straight wire. (They measured the period of oscillation of a magnetized needle in $\vec{B}$ field.)

Force between parallel wires



$F_{21} = I_2LB_1 = I_2L(\mu_0 I_1/2\pi D) = (\mu_0/2\pi)I_1I_2L/D$.

$\therefore$ force per unit length $F/L = (\mu_0/2\pi)(I_1I_2/D)$.

Definition of 1 A: Let $D = 1m$ & $L = 1m$,

when $I_1 = I_2 = 1A$, $F = 2\times10^{-7}N$.

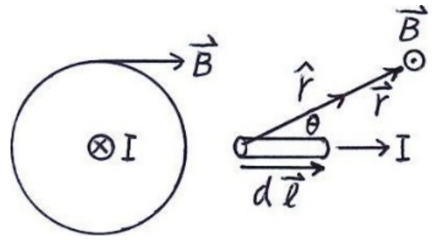
$2\times10^{-7}N = (\mu_0/2\pi)(1A)^2(1m)/(1m)$, $\therefore \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ N/A^2$ exact.

(If $D = 1cm$, $L = 1m$, $I_1 = I_2 = 1A$, then $F = 2\times10^{-5}N = 2\ dyne$.)

$1C \equiv 1A\cdot 1\sec$, and the charge of electron was found to be $1.6\times10^{-19}C$.

$1/4\pi\in_0$ was measured to be $9.0\times10^{9}\ N\cdot m^2/C^2$.

$$1/\mu_0 \in_0 = (1/4\pi \in_0)/(\mu_0/4\pi) = (9.0\times 10^9\ N\cdot m^2/C^2)/(10^{-7}\ N\cdot \sec^2/C^2)$$
$$= 9.0\times 10^{16}\ m^2/\sec^2\ =\ (\text{speed of light})^2\ .$$

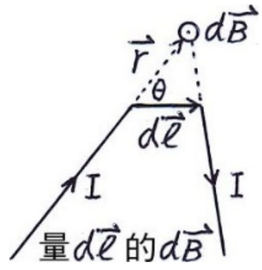


$d\vec{B}$ of a current element

For a long straight wire $B=\mu_0 I/2\pi r \leftrightarrow E=\lambda/2\pi\in_0 r$.

$dB \propto 1/r^2$? Biot-Savart (Dec. 1820, after Laplace's hint):

$dB=(\mu_0/4\pi)\,Id\ell\sin\theta/r^2$, $d\vec{B}=(\mu_0/4\pi)\,Id\vec{\ell}\times\hat{r}/r^2$.



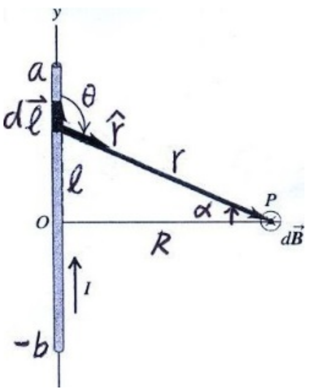
$\vec{B}$ of a moving charge

$Id\vec{\ell}=JAd\vec{\ell}=\vec{J}Ad\ell=nq\vec{v}_d Ad\ell=(nqAd\ell)\vec{v}_d=(dQ)\vec{v}_d$,

$\therefore\ d\vec{B}=(\mu_0/4\pi)(dQ)\vec{v}_d\times\hat{r}/r^2$ ，但只適用於：

（a）緩慢且非加速；或（b）電流圈中的穩定電流（雖電荷有加速）。

例：



$B=(\mu_0 I/4\pi)\int d\ell\sin\theta/r^2$. $\sin\theta=\sin(\alpha+\pi/2)=\cos\alpha$,

$\ell=R\tan\alpha$, $d\ell=R\,d\alpha/\cos^2\alpha$, $1/r^2=\cos^2\alpha/R^2$.

$B=(\mu_0 I/4\pi)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\, d\alpha/R=(\mu_0 I/4\pi R)(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$

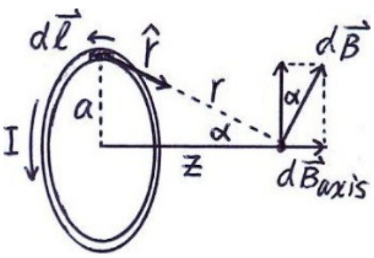
$=(\mu_0 I/4\pi R)[a/(R^2+a^2)^{1/2}+b/(R^2+b^2)^{1/2}]$.

(1) $a=b$, $B=(\mu_0 I/4\pi)2a/R(R^2+a^2)^{1/2}$.

(2) $a,b\to\infty$, $B=\mu_0 I/2\pi R$.

(3) $b=0\,, a\to\infty$, $B=\mu_0 I/4\pi R$.

例：A circular loop



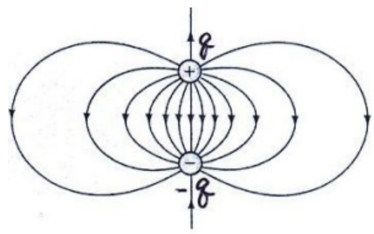
$d\vec{\ell}\perp\vec{r}$, $\therefore\ dB=(\mu_0/4\pi)\,Id\ell/r^2$,

$dB_{axis}=dB\sin\alpha$

$=(\mu_0/4\pi)(Id\ell/r^2)(a/r)$.

$B_{axis}=(\mu_0 Ia/4\pi r^3)\int_0^{2\pi a}d\ell$

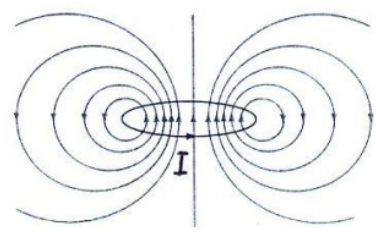
$=\mu_0 Ia2\pi a/4\pi(a^2+z^2)^{3/2}=\mu_0 Ia^2/2(a^2+z^2)^{3/2}$.



(1) At $z=0$, $B_{axis}=\mu_0 I/2a$. $\leftrightarrow$ 直導線 $B=\mu_0 I/2a\pi$.

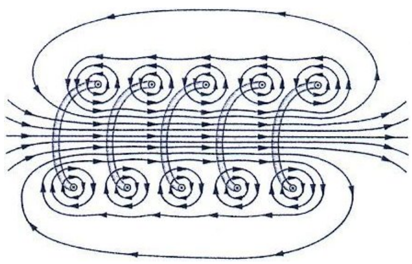
(2) When $z>>a$, $B_{axis}\approx\mu_0 Ia^2\pi/2\pi z^3=\mu_0\mu/2\pi z^3$

$\leftrightarrow E_{axis}\approx p/2\pi\in_0 z^3$. （右圖）

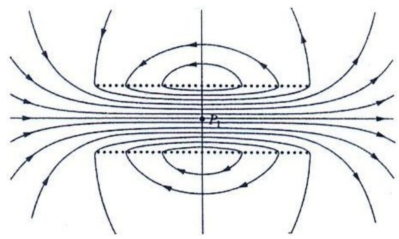


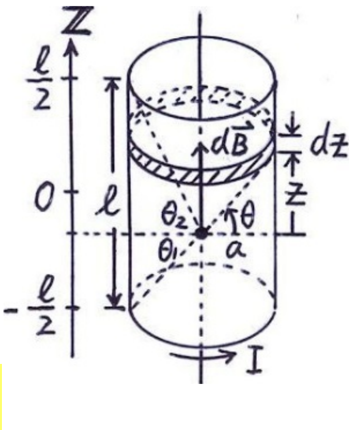
例：solenoid（螺管）

繞得很鬆

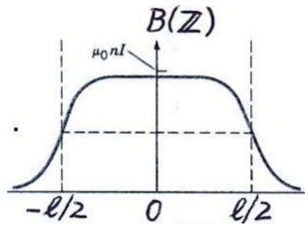


繞很緊密



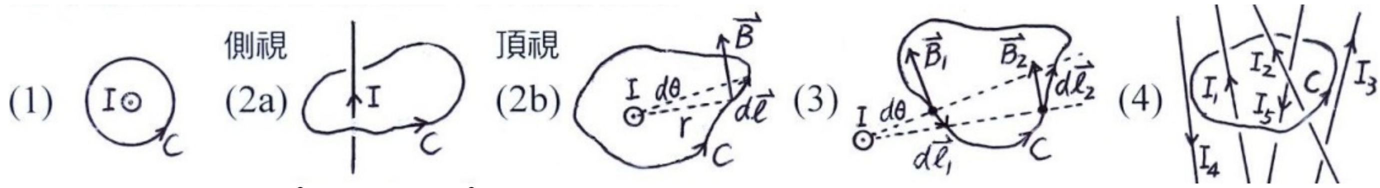


繞得很緊密，# of turns per unit length $n = N/\ell$ 。
由圓形電流圈的 B_{axis} 可知 $dB = \mu_0 (ndzI)a^2/2(a^2+z^2)^{3/2}$ 。
代 $z = a\tan\theta$ ，$dz = a\,d\theta/\cos^2\theta$ ，得
$dB = [\mu_0 nIa^3 d\theta/\cos^2\theta]/2(a^2+a^2\tan^2\theta)^{3/2}$
$= [\mu_0 nId\theta/\cos^2\theta]/[2/\cos^3\theta] = \mu_0 nId\theta\cos\theta/2$.
$\therefore B = (\mu_0 nI/2)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta$
$= (\mu_0 nI/2)[\sin\theta_2(Z) - \sin\theta_1(Z)]$.



無限長螺管，$\theta_1 = -90^o$ ，$\theta_2 = 90^o$ ，$\therefore B = \mu_0 nI$ 。

Ampere's law （Ampere 不喜歡 Biot-Savart 的工作，因為 (a) 實驗沒精確到足以宣稱 $\sin\theta$ ；(b) 不存在 isolated current element，它永遠是線路的一部份）
先考慮無限長直導線電流 I 與積分迴路 C 。



(1) C 正圓形：$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_C Bd\ell = (\mu_0 I/2\pi r)2\pi r = \mu_0 I$ 。

(2) C 任意形狀：$\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = Bd\ell_{//} = (\mu_0 I/2\pi r)rd\theta = (\mu_0 I/2\pi)d\theta$ ，ind. of r ，
$\therefore \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ 與正圓形相同（或 $= (\mu_0 I/2\pi)\int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$ ）。

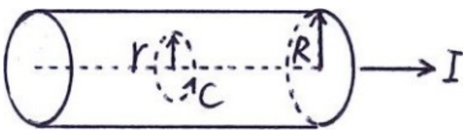
(3) I 在 C 外部：∵成對抵消，$\therefore \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0$ （或 $= (\mu_0 I/2\pi)\int_{\theta_0}^{\theta_0} d\theta = 0$ ）。

(4) 多電流：$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\sum \vec{B}_i)\cdot d\vec{\ell} = \sum_{i\text{ 在}C\text{內}} \mu_0 I_i = \mu_0 I_{encl}$ ，I_{encl} 是在 C 內的總電流。

Ampere's law：$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl}$ for current loop & C of any shapes，I_{encl} 是穿過以 C 為邊界的任何面的總電流，I & C 的方向由右手決定。

此 law 可由 Biot-Savart $\vec{B} = (\mu_0/4\pi)q\vec{v}\times\hat{r}/r^2$ 導得。但後來發現此 $\vec{B}$ 只適用於電荷緩慢且不加速時，或雖電荷有加速但是在電流圈的穩定電流中時，而 Ampere's law 卻適用於任何情況，因此應是由 Ampere's law 在特殊條件下導出 Biot-Savart law。

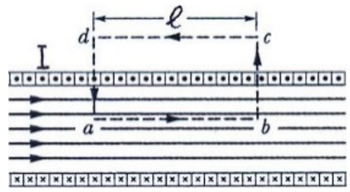
例：長圓柱中的均勻電流



$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl}$

$$\Rightarrow B2\pi r = \begin{cases} \mu_0 (Ir^2/R^2) \text{ for } r < R \\ \mu_0 I \text{ for } r > R \end{cases} \Rightarrow B(r) = \begin{cases} (\mu_0/2\pi)(I/R^2)r \text{ for } r < R \\ \mu_0 I/2\pi r \text{ for } r > R \end{cases} 。$$

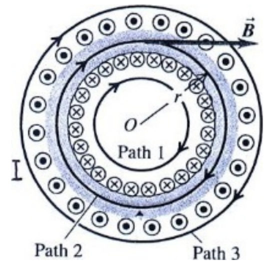
例：極緊密的無窮長螺管（電流 I 、每單位長度繞 n 圈）



內部 $\vec{B}$ 不能有徑向分量（否則有 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \neq 0$ ），也不能有圓切線分量（否則有 $\oint_{C'} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \neq 0$ 但 C' 內無電流）。

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\ell = \mu_0(n\ell I) \;\Rightarrow\; B = \mu_0 nI \quad \text{（與前同）。}$$

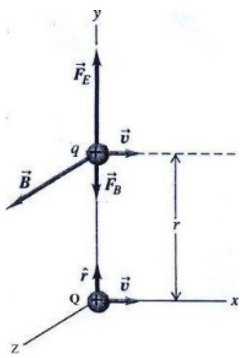
例：Toroid（電流 I 、共繞 N 圈）



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0(NI) \Rightarrow B(r) = \mu_0 NI/2\pi r.$$

當 $r\to\infty$ ， $N/2\pi r = n$ 時， $B = \mu_0 nI$ 。

$\vec{F}_E$ & $\vec{F}_B$ between charged particles



Q 在 q 處建立磁場 $\vec{B} = (\mu_0/4\pi)(Qv/r^2)\hat{z}$ ，

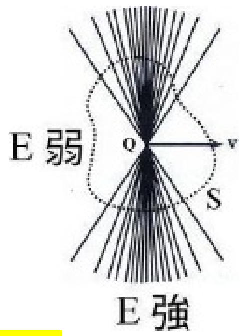
故 q 受磁力 $\vec{F}_B = qv\hat{x}\times\vec{B} = -(\mu_0/4\pi)(qQv^2/r^2)\hat{y}$ 。

而 q 受電力 $\vec{F}_E = q\vec{E} \approx (1/4\pi\epsilon_0)(qQ/r^2)\hat{y}$ ，

$\therefore F_B/F_E = -\mu_0\epsilon_0 v^2 = -v^2/c^2$ 。

但總力 $\vec{F}_E + \vec{F}_B = m\,d^2\vec{r}/dt^2$ 與慣性座標無關，而在它們的靜止座標中 $F_E' = qQ/4\pi\epsilon_0 r^2$ ， $F_B' = 0$ ，

$\therefore F_E + F_B = F_E' + F_B' = qQ/4\pi\epsilon_0 r^2$ ，



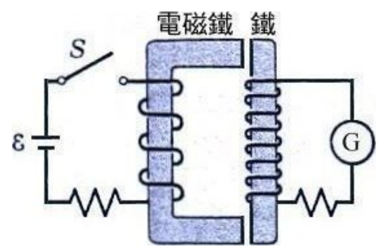
故 $F_E = qQ/4\pi\epsilon_0 r^2 - F_B \approx (1+v^2/c^2)qQ/4\pi\epsilon_0 r^2$ 。（右上圖）

H.W.: Ex. 9, 14, 21, 22; Prob. 1, 3, 4, 5, 8, 9.

Ch. 31 Electromagnetic Induction

Oersted found $I \Rightarrow \vec{B}$ in 1820. Within weeks, electromagnet was found.

那磁場 $\vec{B}$ 能產生電流 I 嗎？Joseph Henry found in Aug. 1830 that a current was induced by a changing magnetic field. But he did not publish immediately.



Magnetic flux $\phi_B \equiv \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$ for any $\vec{B}(\vec{r},t)$ & surface S ,

unit: $1\,\text{weber (W)} \equiv 1T\cdot 1m^2$.

Gauss's law for $\vec{B}$: $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$ $(= q_M$, but $q_M = 0)$.

Faraday found (1831):

(1) Fixed coil, changing $\vec{B}(\vec{r},t)$ （右圖）