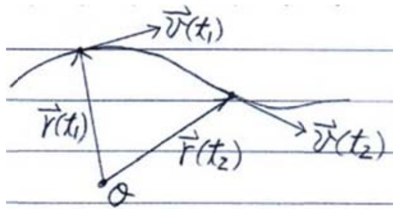
Ch. 4, 5,6



$\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.

Average velocity $\vec{v}_{av}\equiv\left(\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)\right)\big/(t_2-t_1)=\Delta\vec{r}/\Delta t$

$$=\left(\Delta x/\Delta t,\,\Delta y/\Delta t,\,\Delta z/\Delta t\right).$$

Instantaneous vel. $\vec{v}(t)\equiv\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}/\Delta t\equiv d\vec{r}/dt$

$$=\left(dx(t)/dt,\,dy(t)/dt,\,dz(t)/dt\right)=\left(v_x(t),v_y(t),v_z(t)\right).$$

Average acceleration $\vec{a}_{av}\equiv\left(\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)\right)\big/(t_2-t_1)=\Delta\vec{v}/\Delta t=\left(\Delta v_x/\Delta t,\,\Delta v_y/\Delta t,\,\Delta v_z/\Delta t\right)$.

Instantaneous acc. $\vec{a}(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{v}/\Delta t\equiv d\vec{v}/dt=\left(dv_x/dt,\,dv_y/dt,\,dv_z/dt\right)$

$$=\left(d^2x/dt^2,\,d^2y/dt^2,\,d^2z/dt^2\right).$$

Differential： $df(t)=f(t+dt)-f(t)$，或 $df(\vec{v})=f(\vec{v}+d\vec{v})-f(\vec{v})$。

如何算 derivative $df(t)/dt$ ？

例： $f(t)=ct^n$， $df/dt=\lim\limits_{\Delta t\to 0}[f(t+\Delta t)-f(t)]/\Delta t=c\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[(t+\Delta t)^n-t^n\right]\big/\Delta t$

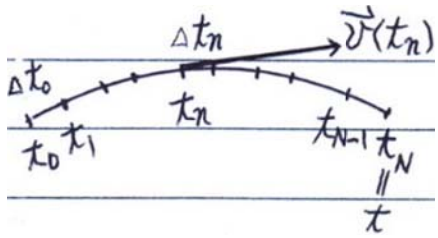
$$=c\lim_{\Delta t\to 0}\left[\left(t^n+nt^{n-1}\Delta t+(n(n-1)/2)t^{n-2}(\Delta t)^2+\cdots\right)-t^n\right]\Big/\Delta t$$

$$=c\lim_{\Delta t\to 0}\left(nt^{n-1}+(n(n-1)/2)t^{n-2}\Delta t+\cdots\right)=cnt^{n-1}.$$

上式在 $n\neq$ integer，甚至 $n<1$ 時也都成立。

$d^2f/dt^2\equiv(d/dt)(d/dt)f=(d/dt)(cnt^{n-1})=cn(n-1)t^{n-2}\neq(df/dt)^2=c^2n^2t^{2(n-1)}$.

例： $\vec{r}(t)=(a,bt,ct^2)$， $\vec{v}(t)=(0,b,2ct)$， $\vec{a}(t)=(0,0,2c)$。



$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\lim_{N\to\infty,\,\Delta t_n=t_{n+1}-t_n\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\vec{v}(t_n)\Delta t_n=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t')dt'$$

$$=\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right)+\int_{t_0}^{t}\left(v_x(t'),v_y(t'),v_z(t')\right)dt'.$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t')\,dt'.$$

如何作 $\int_{t_i}^{t_f}f(t)\,dt$ ？

If $f(t)=dg(t)/dt$，then $\int_{t_i}^{t_f}f(t)dt=\lim\limits_{N\to\infty,\,\Delta t_n\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(g(t_{n+1})-g(t_n))/\Delta t_n\right]\Delta t_n$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\left[g(t_1)-g(t_0)\right]+\left[g(t_2)-g(t_1)\right]+\left[g(t_3)-g(t_2)\right]+\cdots\cdots+\left[g(t_N)-g(t_{N-1})\right]\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{g(t_N)-g(t_0)\right\}=g(t_f)-g(t_i)\equiv g(t)\Big|_{t_i}^{t_f}.$$

上式可簡寫為 $\int_{t_i}^{t_f}f(t)dt=\int_{t_i}^{t_f}(dg/dt)\,dt=\int dg=\Delta g=g(t_f)-g(t_i)\equiv g(t)\Big|_{t_i}^{t_f}$ 。

例：定加速度運動 $\vec{a}(t)=\vec{a} \;\; = const.$， $\vec{v}(t)=\vec{v}(0)+\int_0^t \vec{a}dt' = \vec{v}_0+\vec{a}\int_0^t dt' = \vec{v}_0+\vec{a}t$，

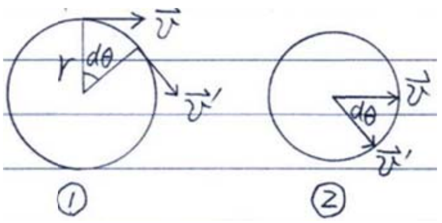
$\vec{r}(t)=\vec{r}(0)+\int_0^t \vec{v}(t')dt' = \vec{r}_0+\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}t')dt' = \vec{r}_0+\vec{v}_0\int_0^t dt'+\vec{a}\int_0^t t'dt' = \vec{r}_0+\vec{v}_0t+\vec{a}t^2/2$.

$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{v}_0t+\vec{a}t^2/2$ & $\vec{v}-\vec{v}_0=\vec{a}t \;\; \Rightarrow$

$\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=\vec{v}_0\cdot\vec{a}t+\vec{a}t\cdot\vec{a}t/2=\vec{v}_0\cdot(\vec{v}-\vec{v}_0)+(1/2)(v^2-2\vec{v}\cdot\vec{v}_0+v_0^2)=(v^2-v_0^2)/2$,

$\therefore v^2=v_0^2+2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$.

定速率圓周運動

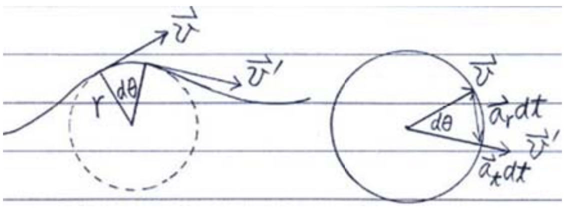


① $vT=r2\pi$ (or $vdt=rd\theta$);

② $aT=v2\pi$ (or $adt=vd\theta$).

$a\overset{②}{=}v2\pi/T\overset{①}{=}vv/r=v^2/r$ (or $a=v\,d\theta/dt=vv/r=v^2/r$).

任意曲線運動



$d\vec{v}\equiv\vec{v}'-\vec{v}=\vec{a}_rdt+\vec{a}_tdt$, r : radial， t : tangential.

① $vdt=rd\theta$ ，② $a_rdt=vd\theta$,

$\therefore a_r=v\,d\theta/dt=vv/r=v^2/r$.

$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_t$ ， $a_r=v^2/r$,

$a_t=d|\vec{v}|/dt\left(\neq|d\vec{v}/dt|=a\right)$, $a=\sqrt{a_r^2+a_t^2}$.

Newton's laws：

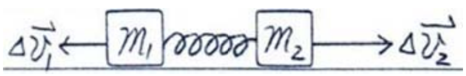
①不受外來作用時，物體靜者恆靜，動者作定速度運動；

② $\vec{F}=m\vec{a}$ ； ③ $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ 。

comments：①似是多餘，因由③知 $\vec{F}=0$，由②知 $\vec{F}=0$ 時 $\vec{a}=0$。②是 $\vec{F}$ & m 的定義，即以一標準力 F_s 對所有物體定義 $m\equiv F_s/a_s$ ，再以 m 定義受的力 $\vec{F}\equiv m\vec{a}$ 。③才是定律，它確保力的觀念可行(否則系統會自內部產生不為 0 的淨力而自行加速)。

$m=F/a$ 代表物體被加速的困難度，稱慣性質量(inertial mass) m_I 。

Facts found by exp.：



(1) $|\Delta\vec{v}_1|/|\Delta\vec{v}_2|=R_{12}=const.$ for any $\Delta\vec{v}_1$ & $\Delta\vec{v}_2$ ，

(2) 若 $|\Delta\vec{v}_2|/|\Delta\vec{v}_3|=R_{23}$ ，則 $|\Delta\vec{v}_1|/|\Delta\vec{v}_3|=R_{12}R_{23}=R_{13}$ 。

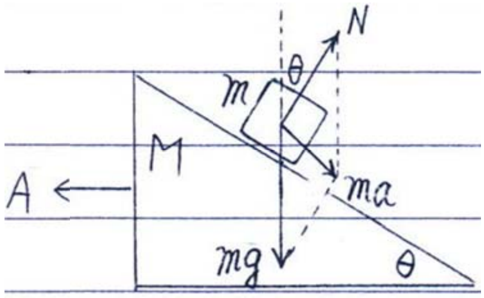
要如何描述這現象？牛頓的〝力〞是很好的描述法。但在原子世界中不用〝力〞，廣義相對論彎曲時空中也不用力的觀念。

物體在重力場 $\vec{g}$ 中受力 $\vec{F}_g=m_g\vec{g}$ ， m_g 叫 gravitational mass。 (m_g 是重力荷，相當於電荷 q 在電場 $\vec{E}$ 中受力 $\vec{F}_E=q\vec{E}$。相對論中 m_I 隨速度改變，但 m_g & q 不會。)

物體在 $\vec{g}$ 中的 $\vec{a}=\vec{F}_g/m_I=(m_g/m_I)\vec{g}$ ，Galilei 發現所有物體在 $\vec{g}$ 中都有相同 $\vec{a}$ ，即 m_g/m_I 均相同，故可取 $m_g=m_I$，則 $\vec{a}=\vec{g}$。(但接近光速時 $m_g/m_I\to0$ $\therefore\vec{a}\to0$。)

Galilei：1590，物體同時落地；1604，距離 $D \propto t^2$；1609，定加速度 $\vec{a}$ 。

例：all surfaces have no friction，求 $A, N, a_x, a_y = ?$

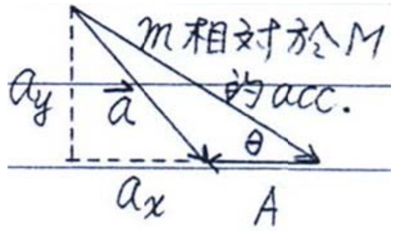


Sol：① $MA = N\sin\theta$

② $ma_x = N\sin\theta$

③ $ma_y = mg - N\cos\theta$

④ $a_y/(a_x + A) = \tan\theta$



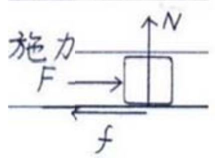
①, ②⇒ ⑤ $A = (m/M)a_x$, ⑥ $N = (m/\sin\theta)a_x$.

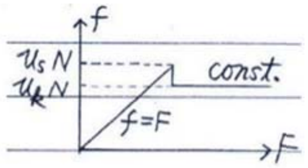
③, ⑥⇒ ⑦$ma_y = mg - (m/\tan\theta)\, a_x$；④, ⑤⇒ ⑧$a_y = (1 + m/M)\tan\theta a_x$（全以 a_x 表出）.

⑦, ⑧⇒ $g - (1/\tan\theta)a_x = (1 + m/M)(\tan\theta)a_x$, $\therefore\ a_x = g/[\cot\theta + (1 + m/M)\tan\theta]$.

代回 ⑤，⑥，⑦ 即得 A, N, a_y 。

Friction f



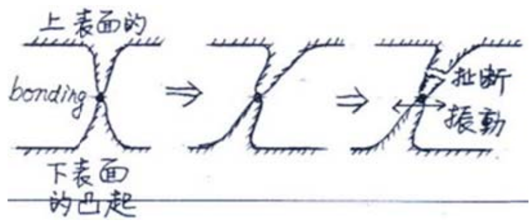


static friction $0 \le |f_s| \le \mu_s N$,

kineticfriction $f_k = \mu_k N$.

最大靜 f_s > 動 f_k 時物体才能有加速。

如何在最短距離煞車？不要煞死 （ABS 系統）。

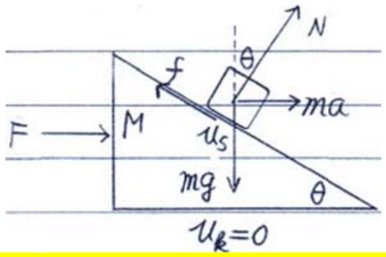


bondings 產生（放熱），又拉張扯斷（需能量），

須扯斷的 bondings 數目 ∝ 距離，

∴ 作功 ∝ 距離，∴ 力約為定值。

例：求 m 在 M 上不滑動的最大＆最小力 $F_{\max} = ?$



Sol： m 不滑動時 $a = F/(M+m)$ ，

$$\begin{cases} N\sin\theta - f\cos\theta = ma = [m/(M+m)]F \\ N\cos\theta + f\sin\theta - mg = 0 \end{cases} 。$$

當 $F = F_{\substack{\max\\ \min}}$ 時， $f = \mp\mu_s N$ ，∴ $\begin{cases} N\sin\theta \pm \mu_s N\cos\theta = [m/(M+m)]\, F_{\substack{\max\\ \min}} \cdots ① \\ N\cos\theta \mp \mu_s N\sin\theta = mg \cdots ② \end{cases}$ 。

①/②⇒ $F_{\substack{\max\\ \min}} = (M+m)g\,[(\sin\theta \pm \mu_s\cos\theta)/(\cos\theta \mp \mu_s\sin\theta)]$ 。

H.W. Ch.4: Prob. 6, 16, 18. Ch.5: Ex. 36; Prob. 5, 7, 9, 10. Ch.6: Ex.22; Prob. 2, 7.