# Ch. 29 The Magnetic Field

Magnet (from an iron ore in Magnesia, Turkey)

Pierre de Maricourt (1269): Used magnetized needle to trace the “line of force” around a spherical lodestone and found magnetic poles.

William Gilbert (1600): Earth is a giant magnet; defined north seeking pole of a magnet.

Coulomb (1785): $F_e \propto q_1 q_2/r^2$ , $F_m \propto m_1 m_2/r^2$ between magnetic poles.

Oersted (1820)：演講結束時發現電流 $I$ 產生 $\vec{B}$（他先前已知閃電使磁針振動）;
磁鐵的 $\vec{B}$ 對帶電流 $I$ 的導線有作用力。

Biot and Savart (1820)：直導線產生 $B \propto I/r$（曲導線 $d\vec{B} \propto I d\vec{\ell} \times \hat{r}/r^2$ )。

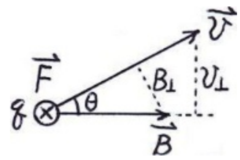
Ampere (1825)：導線在 $\vec{B}$ 中受力 $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$ 。

Faraday’s induction (1831): 磁通量改變率 $d\phi_B/dt$ 產生 $\vec{E}$ 。

Maxwell’s induction (and Maxwell’s eqs., 1864): 電通量改變率 $d\phi_E/dt$ 產生 $\vec{B}$ 。

$\vec{B}$ 的定義：方向 $\hat{B} \equiv$( 磁針的指向 ); 強度 $|\vec{B}| \propto$ 磁針在其中振動的頻率的平方。
（註：力矩 $I\, d^2\theta/dt^2 = \tau = -mB\sin\theta \quad \Rightarrow \omega^2 = mB/I$ 。）

實驗發現：當電荷 $q$ 以速度 $\vec{v}$ 在 $\vec{B}$ 中運動時受力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，
即 $F = qvB\sin\theta = qvB_{\perp} = qv_{\perp}B$ 。



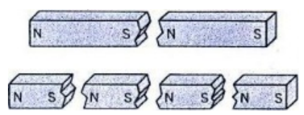

unit of $\vec{B}$ in MKSC: 1 tesla ( $T$ ) $\equiv (1\,N)/[(1\,C)(1\,m/s)] = 1\,N/A\cdot m$ .

但常用 1 gauss (G) $\equiv 10^{-4}T$ 。

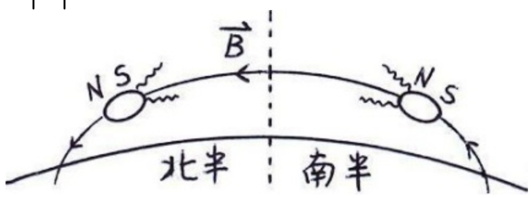
地磁 ~ 1 G，磁鐵 ~ 100 G，原子內 ~ $10\,T$ ，實驗室最高 $30\,T$ ，中子星 $10^8 T$ 。

$\because \vec{F} \perp \vec{v}$ ，$\therefore$ 功率 $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$ ，磁力不作功，$|\vec{v}|$ 不變。

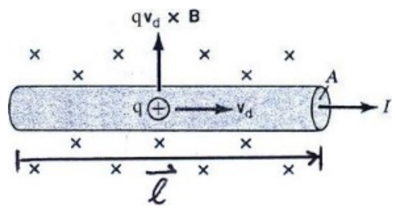
No magnetic monopole




淤泥中的細菌：



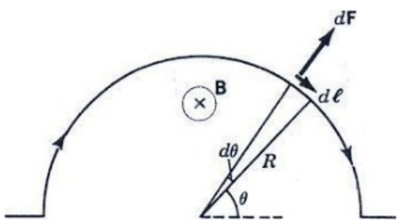

## Force on a current wire




$\vec{F} = (nA\ell)(q\vec{v}_d \times \vec{B})$ ，但 $nq\vec{v}_d A\ell = (\vec{J}A)\ell = I\vec{\ell}$ ，
$\therefore \vec{F} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B}$ 。 ( $\Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ historically. )

任何曲導線與磁場 $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$ 。

例：




$dF = Id\ell B = I(Rd\theta)B$ ，

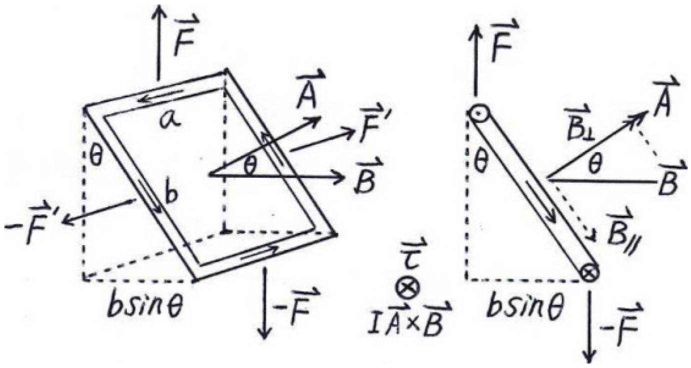
$$F_x = \int dF\cos\theta = IRB\int_0^{\pi} d\theta\cos\theta = IRB(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

$$F_y = \int dF\sin\theta = IRB\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta = IRB(-\cos\pi + \cos 0)$$

$= I(2R)B$ ，與長 $2R$ 的直線受力相同。

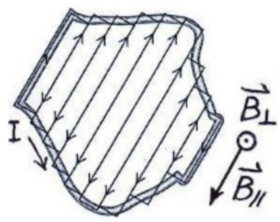
In fact, for any wire in an uniform $\vec{B}$, $\vec{F}=\int I\, d\vec{\ell}\times\vec{B}=I(\int_i^f d\vec{\ell})\times\vec{B}$
$=I(\vec{r}_f-\vec{r}_i)\times\vec{B}$, same as for a straight wire, ind. of shape.
$\vec{F}=0$ for a current loop, $\because \vec{r}_f=\vec{r}_i$。鐵原子或電子都可看成是電流圈。把鐵塊放在均匀 $\vec{B}$ 中不會受力，磁鐵能吸引鐵是因為它的 $\vec{B}$ 不均匀。

**Torque on a current loop by uniform $\vec{B}$**



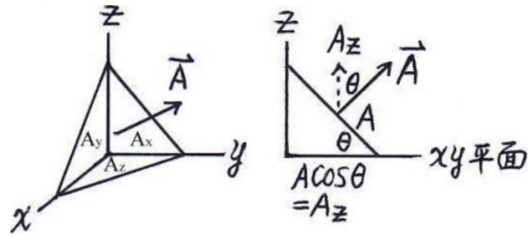

$\sum\vec{F}_i=0$, but $\sum\vec{\tau}_i\neq 0$, ind. of origin.
$\tau=(IaB)b\sin\theta=IAB\sin\theta$, $A\equiv ab$.
定義 magnetic dipole $\vec{\mu}\equiv I\vec{A}$
( $\leftrightarrow\ \vec{p}\equiv q\vec{d}$ )，則 $\tau=\mu B\sin\theta$。
含方向：$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$ ( $\leftrightarrow\ \vec{\tau}_E=\vec{p}\times\vec{E}$ )。
位能 $U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=-\mu B\cos\theta$ ( $\leftrightarrow U_E=-\vec{p}\cdot\vec{E}$ )，喜歡 $\vec{\mu}//\vec{B}$。

Planar loop of any shape ( 右圖 ):

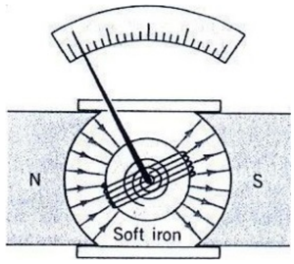



$\vec{\tau}=\sum\vec{\tau}_i=\sum\vec{\mu}_i\times\vec{B}=(\sum\vec{\mu}_i)\times\vec{B}=I(\sum\vec{a}_i)\times\vec{B}=I\vec{A}\times\vec{B}$.
$\because$曲面可由小平面組成，$\therefore$上式也適用於任意曲面。

面積向量：$\int d\vec{A}=\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$
$=A$ 在 $(yz,zx,xy)$ 平面的投影。

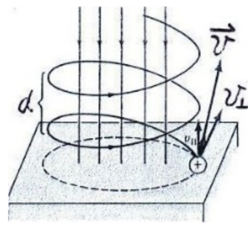



例：Galvanometer (d'Arsonval's)

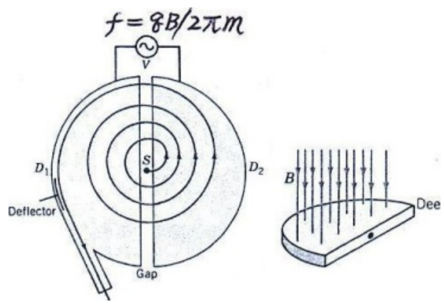



Torque due to $\vec{B}$: $\tau_B=\mu B\sin\theta=\mu B=(NIA)B$.
( $\vec{B}$ radial，$\vec{\mu}\perp\vec{B}$ always，效果等同均匀 $\vec{B}$ )
Torque due to spring: $\tau_S=\kappa\phi$, $\phi=$rotation angle.
$\tau_B=\tau_S \Rightarrow NIAB=\kappa\phi \Rightarrow \phi=(NAB/\kappa)I$.

**Motion of Charged Particles**

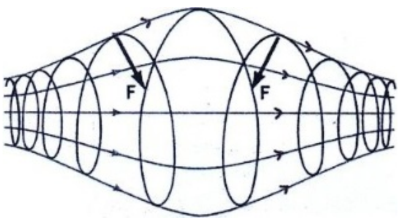



(a) In uniform $\vec{B}$ : $F=qv_\perp B=mv_\perp^2/r$, circular or helical.
$r=mv_\perp/qB$, period $T=2\pi r/v_\perp=2\pi m/qB$,
$f=1/T=qB/2\pi m$, cyclotron freq., ind. of $r$ & $v$.
Cyclotron ( 右圖，E. Lawrence & M.S. Livingston，
1930 (hand size) and 1934 (27-inch) ):
中空銅 D 內 $\vec{E}=0$，$q$ 只在 gap 被加速。



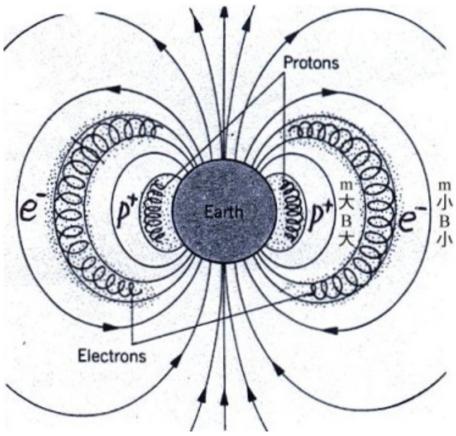
但只適用於低速粒子（ $p^+$ 最高 25 Mev ），高速時需用 synchrocyclotron（用 $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ），能量可達 200 Mev。
現代 Synchrotron 則可達 1 TeV 以上。

(b) In non-uniform $\vec{B}$ (e.g. magnetic bottle 左下圖)



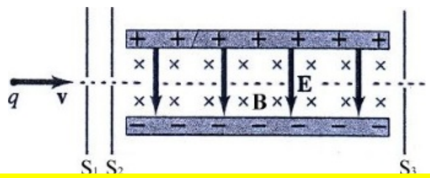

應用例：核融合

Van Allen (1958)
radiation belts:
$p^+$ 離地面 3,000 km；
$e^-$ 離地面 20,000 km。
逃逸入大氣層造成極光。



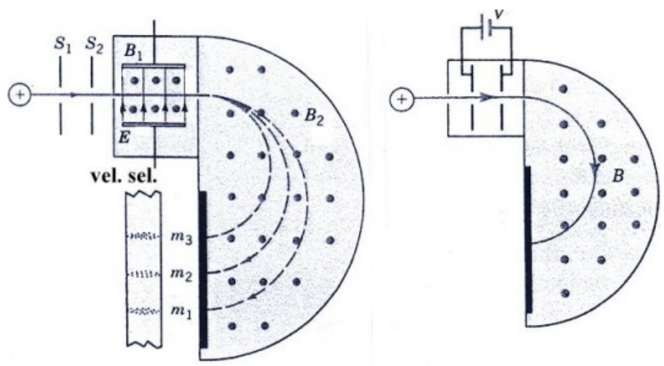

**Lorentz force** $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$，應用：

**(a) Velocity selector**




No deflection $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$,
i.e. $qE = qvB$, $\therefore v = E/B$.

**(b) Mass spectrometer** (for isotope isolation)




(a) (b)

(a) Bainbridge's（ $v$ 被選出，適合大樣本）
$r = mv/qB_2 = m(E/B_1)/qB_2$
$= mE/qB_1B_2 \Rightarrow m/q = (B_1B_2/E)r$.
(b) Dempster's（ $v$ 被造出，適合小樣本）
$mv^2/2 = qV \quad \Rightarrow v = \sqrt{2qV/m}$.
$r = mv/qB = (m/qB)\sqrt{2qV/m}$
$= \sqrt{2mV/qB^2} \Rightarrow m/q = (B^2/2V)r^2$.

(c) **電子的** $e/m$ **實驗**（ $m$ 太小， $r$ 太小，不適合用質譜儀）

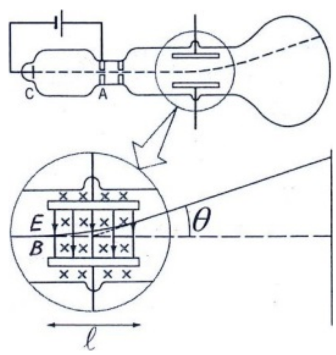
現在的方法：以高壓造出 $v = \sqrt{2eV/m}$ ；再調 $E$ & $B$ 使 $e^-$ 走直線，使 $v = E/B$。


$\therefore \sqrt{2eV/m} = E/B$， $e/m = E^2/2VB^2$。
$e/m = 1.75881962(\pm 53)\times 10^{11}\ C/kg$ (1990)。
$e$ 由油滴實驗決定，得 $m = 9.1093897(\pm 54)\times 10^{-31} kg$。

Thomson 的方法（右圖）：根據偏轉角 $\theta$ 量出 $v$。

先令 $B = 0$， $\tan\theta = v_y/v_x = at/v = (eE/m)(\ell/v)/v$
$= eE\ell/mv^2$，得 $v^2 = eE\ell/m\tan\theta$。

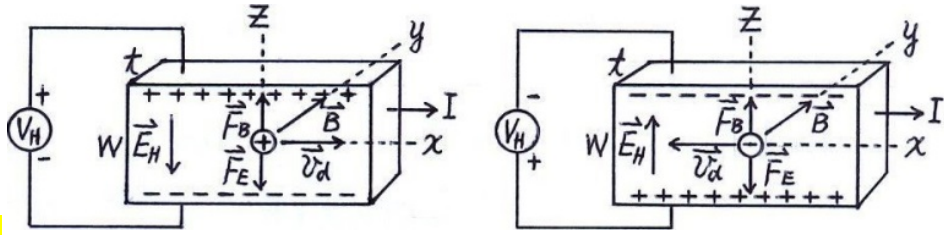
再調 $B$ 使走直線， $v = E/B$。 故 $e/m = E\tan\theta/B^2\ell$。



**Hall Effect** (Oct. 1879)

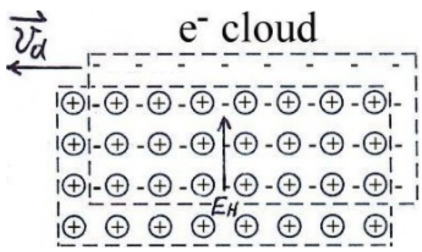
Maxwell 的書上說：$\vec{B}$ 作用在導体上而非電流上，有無 $\vec{B}$ 對電流分布無影響。
Hall 在 1877 年開始當 H. Rowland 的研究生。他懷疑上述說法，他想電流應被推到導線的一側而降低有效截面積使電阻增加，但他無法測得此效應。Rowland 早先已發現電線兩側間有微弱電壓，便建議 Hall 用金箔重作此實驗，而發現了 Hall effect。

$\vec{v}_d = v_d\hat{x}$ , $\vec{B} = B\hat{y}$ ,
$\vec{E}_H = E_H\hat{z}$ .
$I$ 穩定時 $q$ 走直線，
$\therefore \vec{v}_d$ （ & $\vec{J},\vec{E}$ ）均勻。
(a) $F_z = qE_H + qv_dB = 0$ ，
$\therefore E_H = -v_dB$ 均勻,，$\therefore v_d = -E_H/B = V_H/wB$ 。
(b) $nq = J/v_d = J(-B/E_H) = (I/wt)(Bw/V_H) = IB/V_Ht$ .
$\therefore$ 量 $V_H$ 可知 $v_d$ & $nq$ ，若 $V_H > 0$ ，則 $q > 0$ 。



Most metals: $e^-$.  Metals $Co, Zn, Pb, Fe$ & semiconductors $Si, Ge$: $h^+$ (hole).

Force on a wire：$e^-$cloud 受磁力向上而拉正離子，
或說正離子受到向上 $\vec{E}_H$ 的作用。



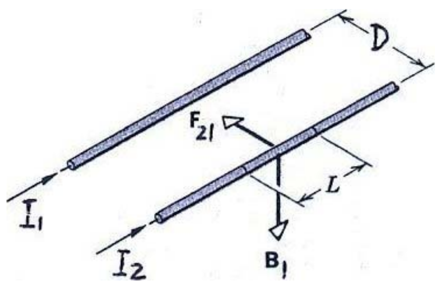

H.W.： Ex. 54; Prob. 1, 2, 4, 5, 6.

# Ch. 30 Sources of the Magnetic Field

Oersted described his work ( $I \Rightarrow \vec{B}$ ) to Paris Academy of Science in Sept. 1820.
Biot-Savart announced in Oct. 1820 that $B \propto I/r$ for a long straight wire. (They measured the period of oscillation of a magnetized needle in $\vec{B}$ field.)

**Force between parallel wires**

$F_{21} = I_2LB_1 = I_2L(\mu_0 I_1/2\pi D) = (\mu_0/2\pi)I_1I_2L/D$ .
$\therefore$ force per unit length $F/L = (\mu_0/2\pi)(I_1I_2/D)$ .



**Definition of 1 A**: Let $D = 1m$ & $L = 1m$ ,
when $I_1 = I_2 = 1A$ , $F = 2\times10^{-7}N$ .
$2\times10^{-7}N = (\mu_0/2\pi)(1A)^2(1m)/(1m)$ , $\therefore \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ N/A^2$ exact.
(If $D = 1cm$ , $L = 1m$ , $I_1 = I_2 = 1A$ , then $F = 2\times10^{-5}N = 2\ dyne$ .)
$1C \equiv 1A\cdot 1\sec$ , and the charge of electron was found to be $1.6\times10^{-19}C$ .
$1/4\pi\epsilon_0$ was measured to be $9.0\times10^9\ N\cdot m^2/C^2$ .