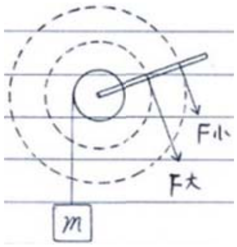
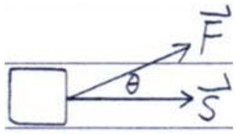
Ch. 7, 8 Work & Energy

Greek：work $W \equiv FS$.

古典世界只有 friction＆重力（例：馬車、
取井水），作功與距離 S 成正比。



省力不省功，如右圖取井水，F 不同，
但 $F2\pi r$ 相同。

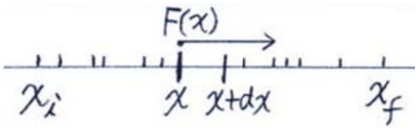


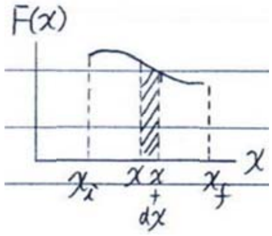
Generally $W = \vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\theta$ ，如最右圖。

一維：$W = \lim_{N\to\infty,\Delta x_n\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n)\Delta x_n$

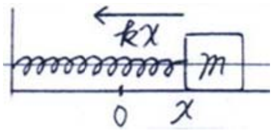
$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$

$= F(x)$ 曲線下的面積，如最右圖。





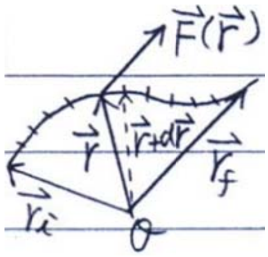
例：Spring $F(x) = -kx$ ，如右圖。



Spring 作功 $W = \int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} xdx$

$= -k(x^2/2\Big|_{x_i}^{x_f}) = kx_i^2/2 - kx_f^2/2$.

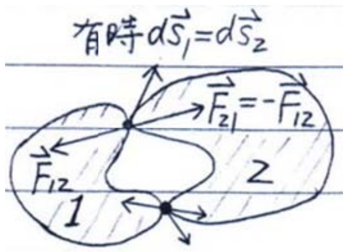
三維： $W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ ，如最右圖。



Why $dE \equiv \vec{F}\cdot d\vec{S}$ （and $d\vec{P} \equiv \vec{F}dt$ ）？

把不受外力作用的系統分成二互相作用的子系統，則

恆成立：$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ，$dt_1 = dt_2$ 。



無動摩擦時成立：$d\vec{S}_1 = d\vec{S}_2$ if no slip（不滑動的靜摩擦），

or $(d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2) \perp \vec{F}_{12}$ if $\mu_k = 0$（光滑表面只有正向力）。

可定義守恆量，其改變由 $dE \equiv \vec{F}\cdot d\vec{S}$ ，$d\vec{P} \equiv \vec{F}dt$ ，$\vec{F}\times d\vec{S}$ ，$|\vec{F}|^2\,\vec{F}\cdot d\vec{S}\cdots$等定義。

例：$d(E_1 + E_2) = \vec{F}_{12}\cdot d\vec{S}_1 + \vec{F}_{21}\cdot d\vec{S}_2 = \vec{F}_{12}\cdot(d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2) = 0$ if no slip or $\mu_k = 0$ 。

$d(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = \vec{F}_{12}\,dt_1 + \vec{F}_{21}\,dt_2 = \vec{F}_{12}\,dt_1 + (-\vec{F}_{12})\,dt_1 = 0$ always.

$\vec{F}_{12}\times d\vec{S}_1 + \vec{F}_{21}\times d\vec{S}_2 = \vec{F}_{12}\times(d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2) = 0$ if no slip.

但只有 $dE \equiv \vec{F}\cdot d\vec{S}$ & $d\vec{P} = \vec{F}dt$ 有用，原因：

（1）$\vec{F}\cdot d\vec{S} = m(d\vec{v}/dt)\cdot(\vec{v}dt) = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = d(mv^2/2)$.

證明：$f(\vec{v}) = m\vec{v}\cdot\vec{v}/2$, $df \equiv f(\vec{v}+d\vec{v}) - f(\vec{v})$

$\Rightarrow d(m\vec{v}\cdot\vec{v}/2) = (1/2)m(\vec{v}+d\vec{v})\cdot(\vec{v}+d\vec{v}) - (1/2)m\vec{v}\cdot\vec{v}$

$= m\vec{v}\cdot d\vec{v} + md\vec{v}\cdot d\vec{v}/2$ ，$(d\vec{v})^2$ 可略。

$\therefore \int \vec F\cdot d\vec S=\int d\left(mv^2/2\right)=mv_f^2/2-mv_i^2/2$.

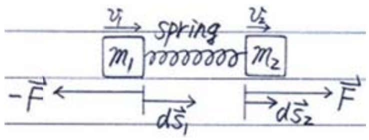
$\int \vec F dt=\int m\left(d\vec v/dt\right)dt=\int d(m\vec v)=m\vec v_f-m\vec v_i$.

都只與前後狀態有關，而與過程無關。而 $\int \vec F\times d\vec S$ 則不能。

註：$\vec F\times d\vec S=m(d\vec v/dt)\times(\vec v dt)=m(d\vec v)\times\vec v\neq d(1/2\,m\vec v\times\vec v)=0$ 。

（2）常見的重力、spring、靜電力、…都是保守力場，損失的 $\vec F\cdot d\vec S$ 都可再取回。

例：

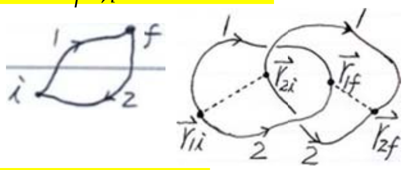


m_1 損失 FdS_1 ，spring+m_2 獲得 FdS_1 ，m_2 獲 FdS_2 ，spring 獲 $F(dS_1-dS_2)$ (被壓縮)，可再被釋出。

保守力（conservative force）：

（1）物體在力場中繞一圈回到原位，被作的功為 0，即 $W^{(1)}_{i\to f}+W^{(2)}_{f\to i}=0$ ；或

（2）把物體自 i 移到 f ，被作功 ind. of path， $W^{(1)}_{i\to f}=W^{(2)}_{i\to f}$ 。



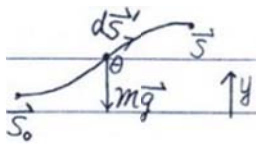
保守力場可定義位能 U （potertial energy）：

$\Delta U=U_f-U_i\equiv -W_{i\to f}$ ，$U(\vec S)=U(\vec S_0)-W=U(\vec S_0)-\int_{\vec S_0}^{\vec S}\vec F(\vec s\,')\cdot d\vec s\,'$ 。

例：spring $F(x)=-kx$ ，$U(x)=U(0)-\int_0^x(-kx')\,dx'=0+\left(kx'^2/2\Big|_0^x\right)=kx^2/2$ 。

例：重力場 $\vec F=m\vec g$ ，$U(\vec S)=U(\vec S_0)-\int_{\vec S_0}^{\vec S}m\vec g\cdot d\vec s\,'=U_0-\int mgds'\cos\theta$ ，

但 $ds'\cos\theta=-dy'$ ，$\therefore U(\vec S)=U_0+\int_{y_0}^{y}mgdy'=U_0+mg(y-y_0)$ 。



假設系統內質量間皆無動摩擦，則 m_p 與 m_q 間的接觸力滿足 $\vec F_{pq}\cdot d\vec S_p+\vec F_{qp}\cdot d\vec S_q$ $=\vec F_{pq}\cdot\left(d\vec S_p-d\vec S_q\right)=0$ 如前述。當另有內部或外來保守力 $\vec F^c_p$ 作用在 m_p 時，U_f-U_i

$$=-\sum_p\int_{\vec S_{pi}}^{\vec S_{pf}}\vec F^c_p\cdot d\vec S_p=-\sum_p\int_{\vec S_{pi}}^{\vec S_{pf}}\left(\vec F^c_p+\sum_q\vec F_{pq}\right)\cdot d\vec S_p=-\sum_p\int_{\vec S_{pi}}^{\vec S_{pf}}\left(m_p d\vec v_p/dt\right)\cdot\vec v_p dt$$

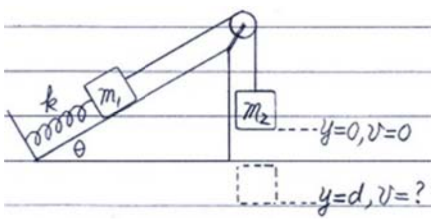
$$=\cdots\cdots=-\sum_p(mv^2_{pf}/2-mv^2_{pi}/2)=-K_f+K_i,\quad \therefore U_f+K_f=U_i+K_i$$ 。

若有多個保守力，$\sum_n(U_{nf}-U_{ni})=-\sum_n\sum_p\int_{\vec S_{pi}}^{\vec S_{pf}}\left(\vec F^c_{np}+\sum_q\vec F_{pq}\right)\cdot d\vec S_p=-K_f+K_i$ 。

定義機械能 $E\equiv K+U$ ，則機械能守恒：$E_f=E_i$ ，or $\Delta E=\Delta U+\Delta K=0$ 。

例：spring $E=mv^2/2+kx^2/2$ ；重力 $E=mv^2/2+mg(y-y_0)$ 。

例：



當 m_2 在 $y=0$ 時，$v=0$ ，spring 張力 $T=0$ 。

當 m_2 在 $y=d$ 時，$v=?$ Spring 的最大伸長量 $D=?$

Sol：因不知 rope 長，用 $\Delta K+\Delta U_g+\Delta U_{sp}=0$ 。

① $(m_1+m_2)v^2/2+(m_1gd\sin\theta-m_2gd)+kd^2/2=0$，

$\therefore\ v^2=\left[2/(m_1+m_2)\right]\ \left(m_2gd-m_1gd\sin\theta-kd^2/2\right)$。

② $y=D$ 時，$v=0$，$\therefore 0+(m_1gD\sin\theta-mgD)+kD^2/2=0$，

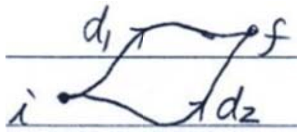
$\therefore\ D=(2g/k)(m_2-m_1\sin\theta)$。

若有非保守（non-conservative）力作功 W_{nc}（不能用位能處理），

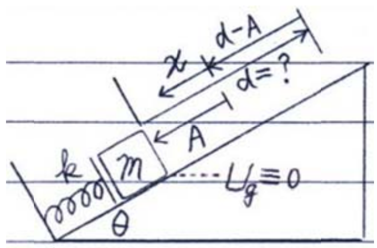
則機械能不守恆，$E_f-E_i=W_{nc}$。

例：friction，$W_{nc}=-fd$，$E_f-E_i=-fd$。

$W_{nc}^{(1)}=-fd_1$，$W_{nc}^{(2)}=-fd_2$，depends on path。



例：斜面有 friction $f\ \ (=\mu_k mg\cos\theta)$，先是 spring 被壓縮 A, m 靜止。



① 放開後，m（可與 spring 分離）向上最遠 $d=?$

② m 滑回時，spring 最大壓縮 $x=?$

Sol：$E=K+U_g+U_{sp}$，$E_f-E_i=-fD$，

而 $E_i=kA^2/2\quad(K_i=0=U_{gi})$。

① $E_f=U_{gf}=mgd\sin\theta\quad(U_{spf}=0=K_f)$，$\therefore mgd\sin\theta-kA^2/2=-fd$，

$\Rightarrow d=kA^2/\left[2(f+mg\sin\theta)\right]$。

② $K_f=0$，$U_{gf}=mg(A-x)\sin\theta$，$U_{spf}=kx^2/2$，

$\therefore\left[kx^2/2+mg(A-x)\sin\theta\right]-kA^2/2=-f\left[d+(d-A)+x\right]$，

$kx^2/2+(f-mg\sin\theta)x+\left[mgA\sin\theta-kA^2/2+f(2d-A)\right]=0$，可解得 x。

由 $U(\vec S)$ 求 $\vec F(\vec S)$

一維：$\Delta U=-F(x)\Delta x$，$\therefore F(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\Delta U/\Delta x=-dU/dx$。

例：$U(x)=kx^2/2$，$F(x)=-(d/dx)(k\,x^2/2)=-kx$。

三維：$\Delta U=-\vec F\cdot\Delta\vec S=-F_x\Delta x-F_y\Delta y-F_z\Delta z$，

若要求 F_x，令 $\Delta y=0=\Delta z$，則 $\Delta U=-F_x\Delta x$，即 $F_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\Delta U/\Delta x\right)_{\Delta y=0=\Delta z}$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)\right]/\Delta x\equiv-\partial U(x,y,z)/\partial x$，$y$ & z 視同常數。

同理 $F_y=-\partial U(x,y,z)/\partial y$，$F_z=-\partial U(x,y,z)/\partial z$。

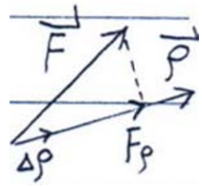
例：$U(x,y,z)=cx^3y^2z$，$F_x=-c(3x^2)y^2z$，$F_y=-cx^3(2y)z$，$F_z=-cx^3y^2$。

例：重力位能 $U(x,y,z)=mgz$，$F_x=-\partial U/\partial x=0$，$F_y=0$，$F_z=-\partial U/\partial z=-mg$。

若要求 $\vec{F}$ 在某 $\vec{\rho}$ 方向分量，則取 $\vec{\rho}$ 方向的位移 $\Delta\vec{\rho}$，

$\Delta U = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{\rho} = -F_\rho \Delta\rho$，$F_\rho = \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\left(-\Delta U/\Delta\rho\right)_{\text{其它方向位移為 }0}$

$= -\partial U(\rho,\cdots\cdots)/\partial\rho$。



例：$U(x,y) = (1/2)k(x^2+y^2) = kr^2/2 = U'(r)$，

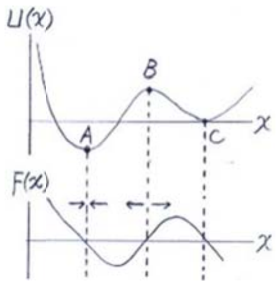
$F_x = -kx$，$F_y = -ky$，$\vec{F} = -k(x,y) = -k\vec{r}$，$\therefore F_r = -kr = -\partial U'(r)/\partial r$ indeed。

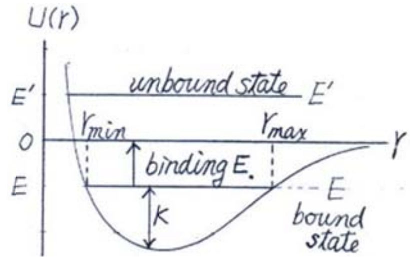
Energy Diagram

dU/dx 是切線斜率，$U(x)$ 斜率為 0 處

$F(x) = -dU/dx = 0$。

A 為穩定平衡點，B 為不穩定平衡點。





H.W. Ch.7: Prob. 7, 8. Ch.8: Ex. 3, 32, 63; Prob. 4, 9, 13,14.

Ch. 9 Momentum, Impulse, and Collisions

History：(不考)

① Descartes 猜想〝quantity of motion〞$\equiv \sum_i m_i v_i$ 守恆。

② John Wallis in 1669 以實驗發現，若 2 物會黏在一起，則 $\sum_i m_i \vec{v}_i = const.$。

（定義 momenta $\vec{P}_1 \equiv m_1\vec{v}_1$，$\vec{P}_2 \equiv m_2\vec{v}_2$，$\vec{P}_f \equiv (m_1+m_2)\vec{v}_f$，則 $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_f$。）

③ Huygens & Wren 各自發現，硬球對撞時 $\sum_i m_i v_i^2 = const.$。

④ Newton $\sum_i \vec{P}_i = const.$ for all collisions,

$\sum_i m_i v_i^2 = const.$ for collisions between bard spheres.

Newton’s original 2nd law：〝motive force〞$\equiv m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{P}$。

3rd law：$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$，作用於 m_1 & m_2 的 motive forces 大小相等方向相反。

Euler 修改成：force $\vec{F} \equiv d\vec{P}/dt = d(m\vec{v})/dt = md\vec{v}/dt = m\vec{a}$，

$d\vec{P}_1 = -d\vec{P}_2 \Rightarrow \vec{F}_{12}dt = -\vec{F}_{21}dt \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$。

物体相撞，又受外力。假設 m_i 受外力 $\vec{f}_{ie}$ 及來自 m_j 的內力 $\vec{f}_{ij}$（內力會互相抵消），

$\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$，$d\vec{P}/dt = \sum_i d\vec{p}_i/dt = \sum_i(\vec{f}_{ie} + \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i \vec{f}_{ie} = \vec{F}_{ext}$。

其第 n 分量 $dP_n/dt = F_{ext\,n}$。 若 $F_{ext\,n} = 0$，則 $dP_n/dt = 0$，n-th 分量守恆。