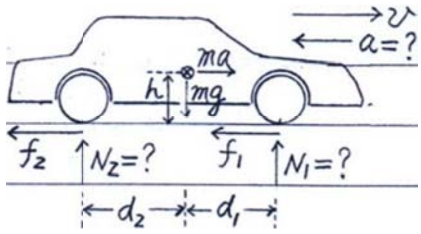
另法：以 $B\,(C\,)$點為參考點，則 $\tau_B(\tau_C)$ 中 $T\ \&V(T\ \&\ H)$ 不出現，而先得 $H(V)$ 。

例：Car mass m，coeff. of friction u_k，完全煞死，$a, N_1, N_2 = ?$



$N_1 + N_2 = mg$，$f_1 = \mu_k N_1$，$f_2 = \mu_k N_2$，

$ma = f_1 + f_2 = \mu_k (N_1 + N_2) = \mu_k mg$，$\therefore a = u_k\, g$ 。

法①：以前輪底為參考（N_1, f_1, f_2 不出現），

$\tau_1 = -N_2(d_1 + d_2) - mah + mgd_1 = 0$，

$\therefore N_2 = mg(d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)$，

$N_1 = mg - N_2 = mg\left[1-(d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)\right] = mg(d_2 + \mu_k h)/(d_1 + d_2)$ 。

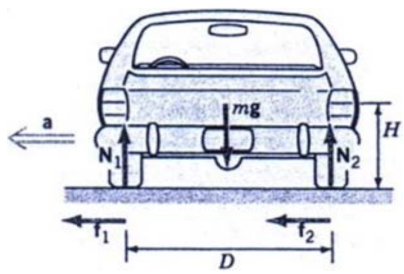
法②：以 CM 為參考（$mg\ \&\ ma$ 不出現），$\tau_{CM} = N_1 d_1 - N_2 d_2 - f_1 h - f_2 h = 0$

$\Rightarrow N_1 d_1 - (mg - N_1)d_2 = \mu_k N_1 h + u_k N_2 h = \mu_k mgh$，

$\therefore N_1 = mg(d_2 + u_k h)/(d_1 + d_2)$，$N_2 = mg - N_1 = mg(d_1 - \mu_k h)/(d_1 + d_2)$ 。

即使 $d_1 = d_2$，N_1 仍然大於 N_2，因慣性力 ma 向前產生力矩，使車尾上抬。

例：車子 speed v，作半徑 r 的轉彎，車不翻的最大 $v_{\max} = ?$



① $f_1 + f_2 = mv^2/r$，② $N_1 + N_2 = mg \Rightarrow N_2 = mg - N_1$，

③ $\tau_{\rm CM} = N_2\, D/2 - (f_1 + f_2)H - N_1\, D/2 = 0$ 。

代①②入③ $\Rightarrow (mg - N_1)\,D/2 = (mv^2/r)H + N_1\, D/2$

$\Rightarrow N_1 D = mgD/2 - (mv^2/r)H \Rightarrow N_1 = m(g/2 - v^2 H/rD)$ 。

當 $v = v_{\max}$，$N_1 = 0$，$v_{\max}^2 = grD/2H$ 。

（也可以右輪底 2 為參考點，$\tau_2 = mg\, D/2 - (m\,v^2/r)H - N_1 D = 0$ 而得 N_1 。）

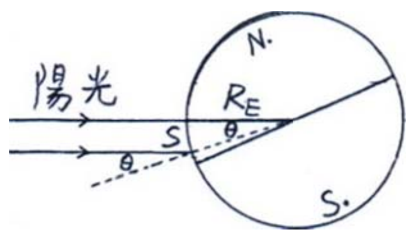
H.W.：Ex. 17, 23, 25, 30, 33；Prob. 1, 2, 3, 9, 10, 14, 17, 18.

Ch. 13 Gravitation

Newton：地表 $g \approx 10\, m/s^2$，月球的 $a_{moon} = 4\pi^2 r_M / T^2 \approx 1/360\, m/s^2$，

$a_{moon}/g \approx 1/3600 \approx R_E^2/r_M^2$，符合 $g \propto 1/r^2$ 。

地球半徑由 Erastothenes（276 B.C.生）測得：$R_E = s/\theta$ 。



他也用日蝕、月蝕資料算出 日-地、月-地距離！

$\vec F = \left(-GMm/r^2\right)\hat r$，$\vec r \equiv \vec r_m - \vec r_M$，$\hat r \equiv \vec r/|\vec r|$，

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ by Cavendish's 實驗。

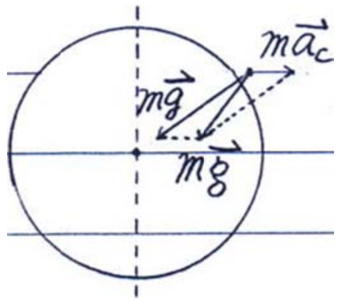
地表 $mg = GM_E m/R_E^2$ ，故 $M_E = gR_E^2/G = 6.0\times 10^{24}\,kg$ ，

平均密度 $\langle\rho\rangle = M_E/V_E \approx 5.5\,g/cm^3$ ，但地表石頭 $\rho\approx 3\,g/cm^3$ ，地心固態鐵 $\rho\approx 13\,g/cm^3$ ，地球非均勻。

$m_I a = F = m_G g \;\Rightarrow\; a = (m_G/m_I)g$ 。 Newton：單擺周期 $T = 2\pi\sqrt{m_I\ell/m_G g}$ ，

發現 $|(m_I - m_G)/m_I| < 10^{-3}$ （現代 $<10^{-12}$ ）。

重力場 $\vec{g}\equiv \vec{F}/m = -(GM/r^2)\hat{r}$ 。



因地球自轉，量到的 $\vec{g}' = \vec{g} + \vec{a}_C$ 。

$\vec{a}_C$ 在 poles 為 0，在 equator 為 $3.4\,cm/s^2$ ，故 $g'_p = g_p$ ，

$g'_e = g_e - 3.4\,cm/s^2$ 。實際量得 $g'_p - g'_e = 5.2\,cm/s^2$ ，

故 $g_p - g_e = g'_p - g'_e - 3.4\,cm/s^2 = 1.8\,cm/s^2$ 。

假設扁圓但密度均勻的地球僅得 $g_p - g_e = 0.5\,cm/s^2$ 而已，故 $1.8\,cm/s^2$ 主要來自密度不均勻。

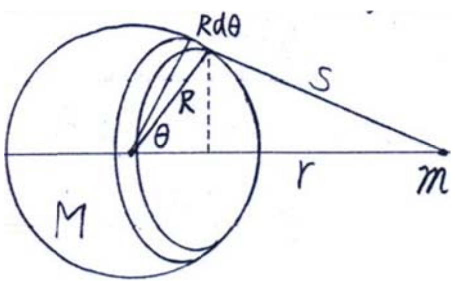
重力作功 $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \int_{r_0}^{r} F_r\,dr' = \int_{r_0}^{r}\left(-GMm/r'^2\right)dr' = -GMm\left(-r'^{-1}\Big|_{r_0}^{r}\right)$

$= (GMm/r) - (GMm/r_0)$ 。

重力位能 $U(r) = U(\infty) - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = 0 - (GMm/r) + (GMm/\infty)$

$= -(GMm/r)$ 。

Shell Theorem（ for a spherical shell with mass M and radius R ）



分成許多環，環的面積 $dA = 2\pi(R\sin\theta)(Rd\theta)$

$dM = \left(dA/4\pi R^2\right)M = (M/2)\sin\theta\,d\theta$ ，

故 $dU = -(GmdM/s) = -(GmM/2s)\sin\theta\,d\theta$ 。

Cosine thm.：

$(s+ds)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta + d\theta)$ ，

$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ 。

二式相減，得 $2sds = 2Rr\sin\theta\,d\theta$ ，因此 $\sin\theta\,d\theta = sds/Rr$ ，

故 $dU = -(GmM/2s)(sds/Rr) = (-GmM/2Rr)ds$ 。

m 在球外 $r>R$ ： $U = \int_{r-R}^{r+R}\dfrac{-GmM}{2Rr}ds = \dfrac{-GmM}{2Rr}[(r+R)-(r-R)] = \dfrac{-GmM}{r}$ ，

$F = -\dfrac{dU}{dr} = -\dfrac{GmM}{r^2}$ 。

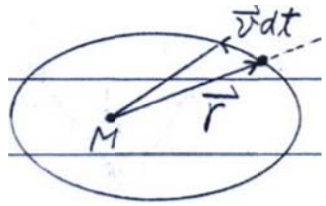
m 在球內 $r<R$ ： $U = \int_{R-r}^{R+r}\dfrac{-GmM}{2Rr}ds = \dfrac{-GmM}{2Rr}[(R+r)-(R-r)] = \dfrac{-GmM}{R}$

$U = const.$ ， $F = 0$ 。

Tycho Brahe：20 年記錄行星精密至 4 arc-min（ $=4\times(1^0/60)$ ）。

Kepler：先用 6 年以正圓 fit Brahe's data，但總有 8 arc-min 的誤差。再重新用 2 年以橢圓作 fit，成功得**三大定律**：(1) 橢圓軌道，太陽為焦點之一；(2) 行星與太陽連線在相同時間內掃過相同面積；(3) 橢圓半長 R，周期 T， $R^3/T^2=const.$。

Proof of (1)：難，略去。 （ $\dot\theta=\ell/mr^2$， $E=m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)/2+GMm/r$，代入 $d\theta=(\dot\theta/\dot r)dr$ 並作積分，得橢圓方程 $\alpha/r=1+e\cos\theta$。 ）

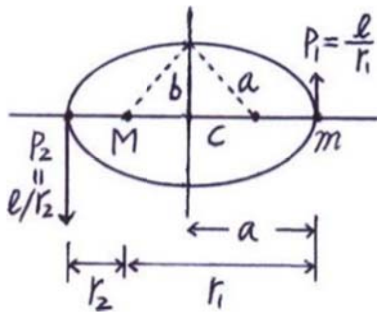


Proof of (2)：(area swept in dt) $dA=(1/2)\left|\vec r\times\vec v dt\right|$，

but $l=\left|\vec r\times\vec p\right|=m\left|\vec r\times\vec v\right|$，$\therefore dA/dt=l/2m=const$。

(任何〝中心力〞 $\vec F=f\vec r$ 的 $\vec\tau=\vec r\times(f\vec r)=0$，$\therefore\vec l=const$。)

Proof of (3)：



因 area sweeping rate $dA/dt=\ell/2m=const.$，

故 period $T=A/(\ell/2m)=2mA/\ell$。但 $A=?$ $\ell=?$

Ellipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$， $r_1=a+c$， $r_2=a-c$，

故 $r_1r_2=a^2-c^2=b^2$， $(r_1+r_2)/2=a$，

面積 $A=\pi ba=\pi\sqrt{r_1r_2}\,(r_1+r_2)/2$。

Energy 守恆 $\dfrac{1}{2m}(\ell/r_1)^2-\dfrac{GMm}{r_1}=\dfrac{1}{2m}(\ell/r_2)^2-\dfrac{GMm}{r_2}$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2m}\ell^2\left(1/r_1^2-1/r_2^2\right)=GMm\left(1/r_1-1/r_2\right)$$

$$\Rightarrow\ \left(\ell^2/2m\right)\left(1/r_1+1/r_2\right)=GMm\ \Rightarrow\ \ell=\sqrt{2GMm^2r_1r_2/(r_1+r_2)}\ 。$$

故 $T=2mA/\ell=2m\left(\pi\sqrt{r_1r_2}\,(r_1+r_2)/2\right)\sqrt{(r_1+r_2)}/\sqrt{2GMm^2r_1r_2}$

$=\pi(r_1+r_2)^{3/2}/\sqrt{2GM}$，

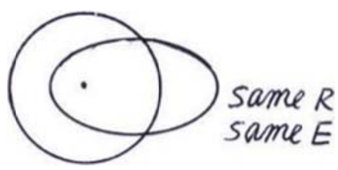
$T^2=\pi^2\left((r_1+r_2)/2\right)^3 8/2GM=\pi^2(R)^3 4/GM$，故 $R^3/T^2=GM/4\pi^2$。

Energy in Elliptical Orbit

由 $E=\dfrac{1}{2m}(\ell/r_1)^2-\dfrac{GMm}{r_1}=\dfrac{1}{2m}(\ell/r_2)^2-\dfrac{GMm}{r_2}$，解得 $\ell=\sqrt{2GMm^2r_1r_2/(r_1+r_2)}$。

$$E=\frac{1}{2m}\left(\frac{2GMm^2r_1r_2}{r_1^2(r_1+r_2)}\right)-\frac{GMm}{r_1}=\frac{GMm}{r_1}\frac{r_2}{(r_1+r_2)}-\frac{GMm}{r_1}=\frac{-GMm}{(r_1+r_2)}=\frac{-GMm}{2R}\ ,$$

$R\equiv(r_1+r_2)/2=a$， E 與短軸 b 無關。

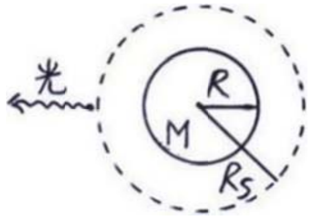


Bound and Unbound Trajectory (Black Holes)

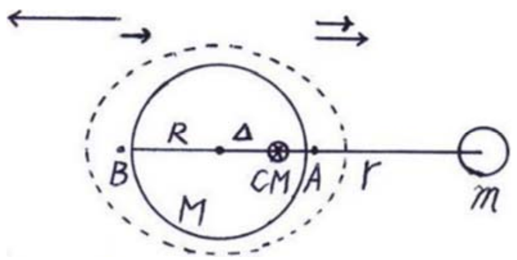
$E = mv^2/2 - GMm/r$，當 $E = 0$，$v = \sqrt{2GM/r} \equiv v_{esc}$，escape velocity。

$v < v_{esc}$，elliptical orbit；$v = v_{esc}$，parabolic；$v > v_{esc}$，hyperbolic。

若 $v_{esc} = \sqrt{2GM/r} = c$ (光速)，則 $r = 2GM/c^2 \equiv R_S$，Schwarzchild radius（古典的結果正好與相對論的相同）。當 $r < R_S$ 時，連光也無法逃逸。若星球的半徑 $R < R_S$，就是黑洞。例：M87 的 $M = 3\times10^9$ 太陽質量，$R_S \approx 10^{10} km \approx$ 冥王星軌道半徑，應是黑洞。



Tidal Force（潮力）



月-地總質心與地心的距離

$\Delta = (mr + M\cdot 0)/(m+M)$

$= 4500 km$，而地球半徑 $R = 6400 km$。

地球小公轉的離心力 ＝ 月球吸引力，即

$4\pi^2 \Delta M/T^2 = GmM/r^2$。

下二式會用到 $Gm/(r\mp R)^2 = (Gm/r^2)(1\mp R/r)^{-2} \approx (Gm/r^2)(1\pm 2R/r)$。

A：$a_A = +4\pi^2(R-\Delta)/T^2 + Gm/(r-R)^2 \approx +4\pi^2(R-\Delta)/T^2 + Gm/r^2 + 2GmR/r^3$

B：$a_B = -4\pi^2(R+\Delta)/T^2 + Gm/(r+R)^2 \approx -4\pi^2(R+\Delta)/T^2 + Gm/r^2 - 2GmR/r^3$

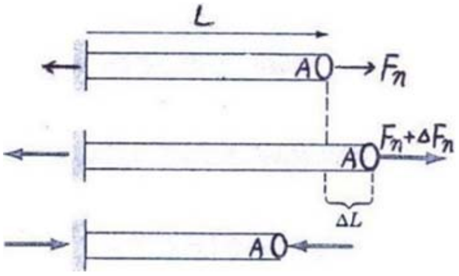
$= -a_A$ (向左為負)，故一天有二次漲落潮。 註：地球重力場也是 $g_B = -g_A$。

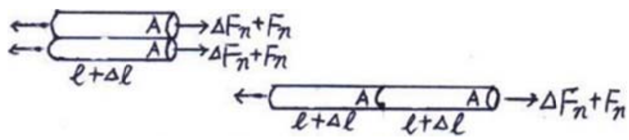
H.W.：Ex. 27；Prob. 9, 15, 17

Ch. 14 Solids and Fluids

Elastic moduli（彈性係數）≡ (stress 應力)/(strain 應變)

Young's modulus Y（材料的性質）





$\Delta L \propto \Delta F_n/A$

$\Delta L \propto L$

無其它因素，故 $\Delta L = (1/Y)(\Delta F_n/A)L$，

$Y \equiv \dfrac{\Delta F_n}{A}\Big/\dfrac{\Delta L}{L}\left(= -\Delta P\Big/\dfrac{\Delta L}{L}\right)$，$\dfrac{\Delta F_n}{A} = Y\dfrac{\Delta L}{L}$。

$\Delta F_n = Y(A/L)\Delta L = k\Delta L$，故彈簧常數 $k = Y(A/L)$。

$P \equiv F/A$ 即壓力或張力，1 pascal (Pa) ≡ 1 N/m^2，1 psi ≡ 1 lb/in^2 = 6871 Pa。