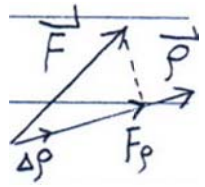
若要求 $\vec{F}$ 在某 $\vec{\rho}$ 方向分量，則取 $\vec{\rho}$ 方向的位移 $\Delta\vec{\rho}$，

$\Delta U = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{\rho} = -F_\rho \Delta\rho$， $F_\rho = \lim\limits_{\Delta\rho\to 0}(-\Delta U/\Delta\rho)_{\text{其它方向位移為 0}}$

$= -\partial U(\rho,\cdots\cdots)/\partial\rho$。



例：$U(x,y) = (1/2)k(x^2+y^2) = kr^2/2 = U'(r)$，

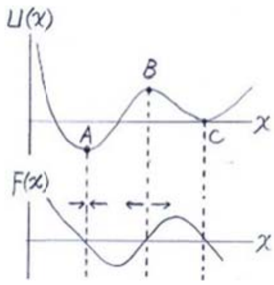
$F_x = -kx$， $F_y = -ky$， $\vec{F} = -k(x,y) = -k\vec{r}$，$\therefore F_r = -kr = -\partial U'(r)/\partial r$ indeed。

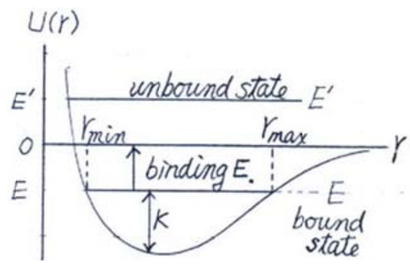
Energy Diagram

dU/dx 是切線斜率，$U(x)$ 斜率為 0 處

$F(x) = -dU/dx = 0$ 。

A 為穩定平衡點， B 為不穩定平衡點。





H.W. Ch.7: Prob. 7, 8. Ch.8: Ex. 3, 32, 63; Prob. 4, 9, 13,14.

Ch. 9 Momentum, Impulse, and Collisions

History：(不考)

① Descartes 猜想〝quantity of motion〞 $\equiv \sum_i m_i v_i$ 守恆。

② John Wallis in 1669 以實驗發現，若 2 物會黏在一起，則 $\sum_i m_i \vec{v}_i = const.$。

（定義 momenta $\vec{P}_1 \equiv m_1\vec{v}_1$，$\vec{P}_2 \equiv m_2\vec{v}_2$，$\vec{P}_f \equiv (m_1+m_2)\vec{v}_f$，則 $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_f$ 。）

③ Huygens & Wren 各自發現，硬球對撞時 $\sum_i m_i v_i^2 = const.$。

④ Newton $\sum_i \vec{P}_i = const.$ for all collisions,

$\sum_i m_i v_i^2 = const.$ for collisions between bard spheres.

Newton's original 2nd law：〝motive force〞 $\equiv m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{P}$。

3rd law：$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$，作用於 m_1 & m_2 的 motive forces 大小相等方向相反。

Euler 修改成：force $\vec{F} \equiv d\vec{P}/dt = d(m\vec{v})/dt = md\vec{v}/dt = m\vec{a}$，

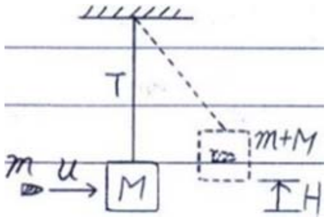
$d\vec{P}_1 = -d\vec{P}_2 \Rightarrow \vec{F}_{12}dt = -\vec{F}_{21}dt \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$。

物体相撞，又受外力。假設 m_i 受外力 $\vec{f}_{ie}$ 及來自 m_j 的內力 $\vec{f}_{ij}$（內力會互相抵消），

$\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$， $d\vec{P}/dt = \sum_i d\vec{p}_i/dt = \sum_i(\vec{f}_{ie} + \sum_j \vec{f}_{ij}) = \sum_i \vec{f}_{ie} = \vec{F}_{ext}$。

其第 n 分量 $dP_n/dt = F_{ext\,n}$。 若 $F_{ext\,n} = 0$，則 $dP_n/dt = 0$，n-th 分量守恆。

例：Ballistic pendulum (inelastic)，求子彈速度 $u=?$ 熱能 $=?$



Sol：(1) 在射入瞬間 $m+M$ 不受水平力（繩的 T 是垂直力），

$\therefore$ 總動量 $\vec{P}$ 的水平分量守恆， $mu=(m+M)V\cdots$① 。

m 被作負功， M 被作正功，但位移不同，機械能不守恆。

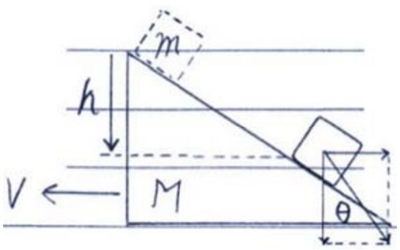
(2) 射入後，$m+M$ 一起上擺，繩的 T 恆垂直於運動方向，故不作功，機械能守恆，$(m+M)V^2/2=(m+M)gH\ \cdots$②（但繩的 T 使 $\vec{P}$ 不守恆）。

②$\Rightarrow V=\sqrt{2gH}$ ，代 V 入① $\Rightarrow u=[(m+M)/m]\sqrt{2gH}$ 。

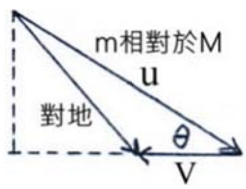
熱能 $K_i-K_f=mu^2/2-(m+M)V^2/2=(m+M)^2gH/m-(m+M)gH$

$=[M(M+m)/m]\,gH$。

例：m 自靜止沿光滑斜面 M（斜角 θ）下滑 h 高度時，若 M 與地面也無 friction，則 M 的速度 $V=?$



Sol：設 m 相對於 M 的速度為 u ，則 m 相對於地面的水平速度為 $u\cos\theta-V$ 。



水平動量守恆 $m(u\cos\theta-V)=MV$

$\Rightarrow u=[(M+m)/(m\cos\theta)]V$ 。

m 的垂直動量 $P_\perp=mu\sin\theta=(M+m)\tan\theta V$ ，

水平動量 $P_{//}=MV$ ， m 的動能 $=(1/2m)(P_{//}^2+P_\perp^2)$ 。

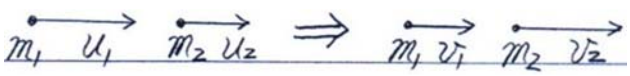
能量守恆 $mgh=(1/2m)\left[M^2V^2+(M+m)^2\tan^2\theta V^2\right]+MV^2/2$

$=[M^2+(M+m)^2\tan^2\theta+Mm]V^2/2m$

$=(M+m)[M+M\tan^2\theta+m\tan^2\theta]V^2/2m$ ，

$\therefore V=\left[2m^2gh\cos^2\theta/\left((M+m)(M+m\sin^2\theta)\right)\right]^{1/2}$ 。

Elastic collision in 1-dim.



$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2\ \cdots\cdots$①

$m_1u_1^2/2+m_2u_2^2/2=m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2\ \cdots\cdots$②

①$\Rightarrow\ m_1(u_1-v_1)=m_2(v_2-u_2)\ \cdots\cdots$③

②$\Rightarrow\ m_1(u_1-v_1)(u_1+v_1)=m_2(v_2-u_2)(v_2+u_2)\ \cdots\cdots$④

④/③$\Rightarrow u_1+v_1=u_2+v_2\ \cdots\cdots$⑤

$\Rightarrow v_2-v_1=-(u_2-u_1)$ ，即自 m_1 看來， m_2 接近與離去的速率相同，方向相反。

③$\Rightarrow u_1-v_1=(m_2/m_1)(v_2-u_2)\ \cdots\cdots$⑥

⑤+⑥$\Rightarrow\ 2u_1=[(m_1+m_2)/m_1]v_2+[(m_1-m_2)/m_1]u_2$ ，

乘上 $m_1/(m_1+m_2)\Rightarrow\ v_2=[2m_1/(m_1+m_2)]u_1+[(m_2-m_1)/(m_1+m_2)]u_2$ 。

代 v_2 入⑤ $\Rightarrow v_1 = v_2 - u_1 + u_2$（或把上式 $1 \leftrightarrow 2$）

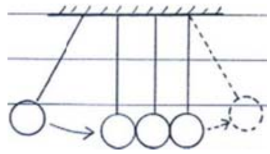
$$= [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)]u_1 + [2m_2/(m_1 + m_2)]u_2 \text{。}$$

(a) $u_2 = 0$，則 $v_1 = [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)]u_1$，$v_2 = [2m_1/(m_1 + m_2)]u_1$。

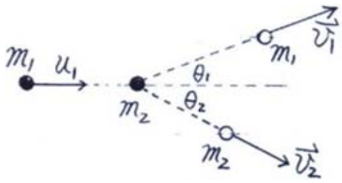
(b) $m_1 >> m_2$，則 $v_1 \approx u_1$，$v_2 \approx 2u_1 - u_2 \quad (= u_1 - (u_2 - u_1))$。

(c) $m_1 << m_2$，則 $v_2 \approx u_2$，$v_1 \approx -u_1 + 2u_2 = u_2 - (u_1 - u_2)$。

(d) $m_1 = m_2$，則 $v_1 = u_2$，$v_2 = u_1$，速度互換如右圖玩具。



Elastic collision in 2-dim.（假設 $u_2 = 0$）



$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 \cdots\cdots ①$$

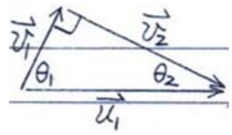
$$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 + m_2 v_2 \sin\theta_2 \cdots\cdots ②$$

$$m_1 u_1^2/2 = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 \cdots\cdots ③$$

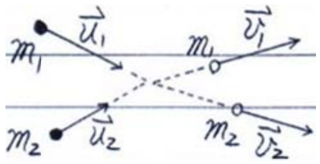
3 egs.，4 未知 $(v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$，$\therefore$仍有 1 自由度，例可取為 θ_1。

若 $m_1 = m_2$，則 $m_1\vec{u}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$，

又③$\Rightarrow u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$，$\therefore \theta_1 + \theta_2 = 90°$（撞球）。



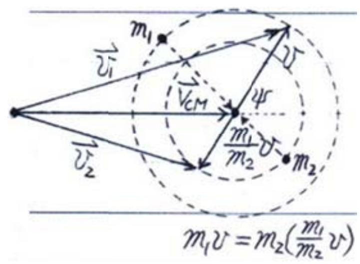
若 $\vec{u}_2 \neq 0$，則可先在質心 (CM) 座標中作如右的速度圖，



其中 $\vec{V}_{CM} = (m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2)/(m_1 + m_2)$，

$v = |\vec{u}_1 - \vec{V}_{CM}|$，$\psi$ 任意。

再回到 lab.座標而得 $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$。



例：重力彈弓、原子爐中的中子緩和劑。

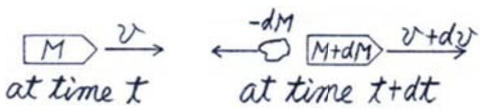
Inelastic collision

若二物會黏在一起：$m_i\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$。

若有能量 Q 來自內部：例核融合 $d^+ + d^+ \to t^+ + p^+$，$(2m_d - m_t - m_p)c^2 = Q$。

$$m_d\vec{u}_1 + m_d\vec{u}_2 = m_t\vec{v}_1 + m_p\vec{v}_2 \text{，} Q + m_d u_1^2/2 + m_d u_2^2/2 = m_t v_1^2/2 + m_p v_2^2/2 \text{。}$$

Rocket Propulsion



噴氣相對於 rocket 的噴速 $= -V_{ex}$，$V_{ex} > 0$，

噴氣相對於觀察者的速度 $= v - V_{ex}$。

動量守恆 $Mv = (M + dM)(v + dv) + (-dM)(v + dv - V_{ex})$

$$= Mv + dMv + Mdv + dMdv - dMv + dMV_{ex} - dMdv \text{。}$$

$\therefore Mdv = -dMV_{ex}$， thrust on the rocket $M\,dv/dt = -V_{ex}\,dM/dt$。

$$dv = -V_{ex}\,dM/M \quad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv' = -V_{ex}\int_{M_0}^{M} dM'/M' \quad \Rightarrow$$

$v - v_0 = -V_{ex} \ln M' \Big|_{M_0}^{M} = -V_{ex} \ln(M/M_0) = V_{ex} \ln(M_0/M)$ 。

註：$e \equiv \lim_{N\to\infty} (1+1/N)^N$ ，$e^x = \lim_{N\to\infty} (1+1/N)^{Nx}$,

$$e^x = \lim_{N\to\infty} [1 + ((Nx)!/1!(Nx-1)!)1/N + \cdots\cdots + ((Nx)!/n!(Nx-n)!)1/N^n + \cdots\cdots]$$

$$= \lim_{N\to\infty} [1 + (Nx/1!)1/N + \cdots\cdots + ((Nx)(Nx-1)\cdots(Nx-n+1)/n!)1/N^n + \cdots\cdots]$$ 。

$Nx - n + 1 \approx Nx$ as $N \to \infty$ ，$\therefore e^x = 1 + x/1! + \cdots + x^n/n! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 。

（或 $e^x = \lim_{N\to\infty} (1+1/N)^{Nx} = \lim_{N\to\infty} (1+x/N)^N$

$$= \lim_{N\to\infty} [1 + (N!/1!(N-1)!)\, x/N + \cdots\cdots + (N!/n!(N-n)!) x^n/N^n + \cdots\cdots]$$

$$= \lim_{N\to\infty} [1 + (N/1!)\, x/N + \cdots\cdots + (N(N-1)\cdots(N-n+1)/n!) x^n/N^n + \cdots\cdots]$$

$$= 1 + (1/1!)x + \cdots + (1/n!)x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$$ 。）

$$\mathrm{d}(e^x)/dt = 0 + 1 + \cdots + x^{n-1}/(n-1)! + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$$ 。

When $\in$ small，$e^{\in} \approx 1 + \in$ ，$\therefore \ln(1+\in) \approx \ln e^{\in} = \in$ 。

$$d(\ln x)/dx = (\ln(x+dx) - \ln x)/dx = \ln[(x+dx)/x]/dx = \ln(1+dx/x)/dx$$

$$= (dx/x)/dx = 1/x$$ 。

H.W.: Prob. 4, 5, 6, 9, 18, 19, 20

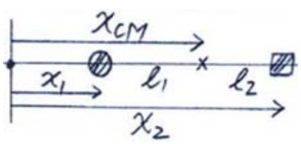
Ch. 10 System of Particles

多質點系統 total momentum $\vec{P} \equiv \sum_i m_i \vec{v}_i$ ，total mass $M \equiv \sum_i m_i$ 。

若取代表點（center of mass, CM） $\vec{R}_{CM} \equiv (\sum m_i \vec{r}_i)/(\sum m_i)$ ，

則 $\vec{V}_{CM} \equiv d\vec{R}_{CM}/dt = (\sum_i m_i d\vec{r}_i/dt)/M = (\sum_i m_i \vec{v}_i)/M = \vec{P}/M$ ，即 $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$ 。

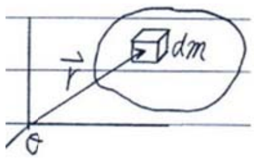
例：



$x_{CM} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2) \Rightarrow (m_1 + m_2) x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2$

$\Rightarrow m_1 (x_{CM} - x_1) = m_2 (x_2 - x_{CM})$ ，即 $m_1 l_1 = m_2 l_2$ 。

For a continuous body $\vec{R}_{CM} = (1/M)\int \vec{r} dm$.



例：右圖 linear density λ ，$x_{CM} = 0$ ，

$$y_{CM} = (1/\lambda\pi R)\int_0^{\pi} (R\sin\theta)(\lambda R d\theta)$$

$$= (R/\pi)\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2R/\pi$$ 。