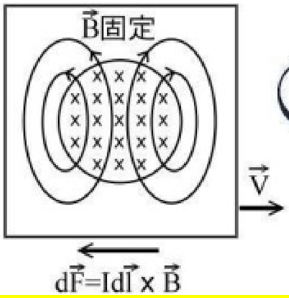
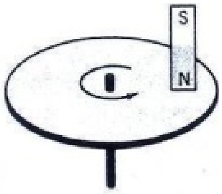
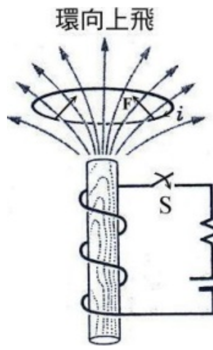
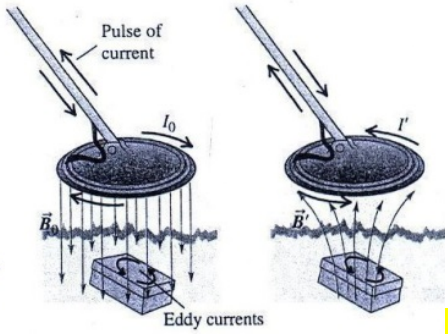
Eddy Currents



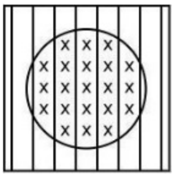






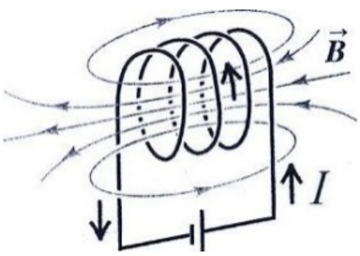
例：電磁爐　　例：阻泥、煞車、車速表　　魔術？　　metal detector

防止 eddy：切成條或片如右圖



H.W.：Ex. 14; Prob. 1, 3, 6, 7, 8, 9.

Ch. 32 Inductance and Magnetic Materials



$\varepsilon = -d\phi/dt$，ϕ 是通過「一端直線前進、一端螺旋前進的橡皮筋所掃出的波浪狀曲面」的磁通量。

但若繞得很緊密，則可用 $\varepsilon = \sum(-d\phi_i/dt) = -(d/dt)\sum\phi_i$。

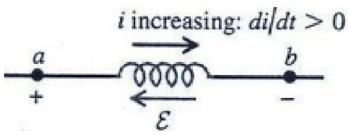
$\because$ each $\phi_i \propto I$，$\therefore$ flux linkage $\sum\phi_i \propto I$。

寫成 $\sum\phi_i = LI$，則 $\varepsilon = -(d/dt)(LI) = -L\,dI/dt$，

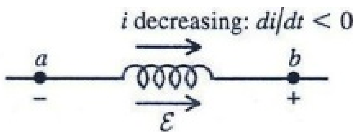
(self) inductance $L \equiv \left(\sum\phi_i\right)/I$ 或 $L \equiv -\varepsilon/(dI/dt)$，

unit: $1\,Henry\,(H) \equiv 1\,Weber/A$ or $1\,V\cdot\sec/A$。

If all $\phi_i = \phi$, then $\sum\phi_i = N\phi$, $L \equiv N\phi/I$.

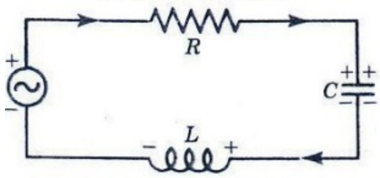


$V_{ab} = L\,di/dt > 0$



$V_{ab} = L\,di/dt < 0$

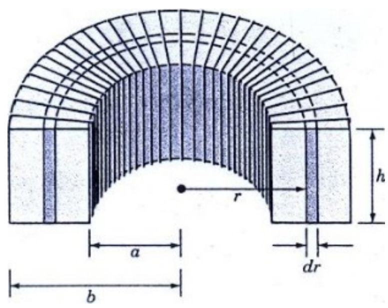
阻力是碰撞



電荷被阻絕

阻力是感應電場

例：



Toroid 內 $B(r) = \mu_0 NI/2\pi r$。

$\phi_B \equiv \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_a^b Bhdr = \int_a^b (\mu_0 Ni/2\pi r)hdr$

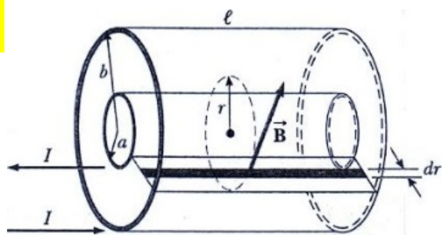
$= (\mu_0 Nih/2\pi)\ln(b/a)$，

$\therefore\ L \equiv N\phi/i = (\mu_0 N^2 h/2\pi)\ln(b/a)$。

例：long solenoid

$N\phi=(n\ell)(\mu_0 nIA)=\mu_0 n^2 I\ell A$，$\therefore L\equiv N\phi/I=\mu_0 n^2\ell A$ or $\mu_0 N^2 A/\ell$。

例：

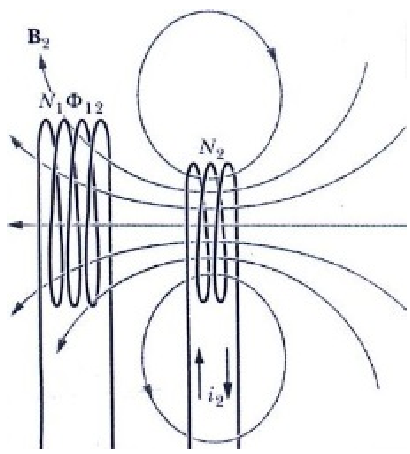


Coaxial cable(同軸電纜)內外殼間 $B(r)=\mu_0 I/2\pi r$。$\vec{E}$ 無徑向分量。通過圖中平行四邊形的面的 flux

$\phi=\int_S BdA=\int_a^b(\mu_0 I/2\pi r)\ell dr=(\mu_0\ell I/2\pi)\ln(b/a)$。

$\therefore L\equiv\phi/I=(\mu_0\ell/2\pi)\ln(b/a)$。

Mutual Inductance（互感）(ϕ_{1i2} 表線圈 2 電流在線圈 1 的第 i 圈中產生的 flux)



$\varepsilon_1=-\sum_{i=1}^{N_1}d(\phi_{1i1}+\phi_{1i2})/dt=-(d/dt)\sum_{i=1}^{N_1}(\phi_{1i1}+\phi_{1i2})$。

已知 $\sum_{i=1}^{N_1}\phi_{1i1}=L_1I_1$，現在定義 $M_{12}\equiv\left(\sum_{i=1}^{N_1}\phi_{1i2}\right)/I_2$，

則 $\varepsilon_1=-(d/dt)(L_1I_1+M_{12}I_2)=-L_1\,dI_1/dt-M_{12}\,dI_2/dt$。

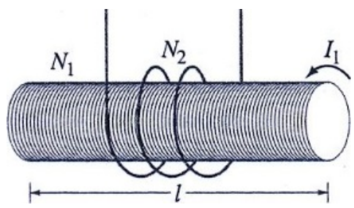
同理 $\varepsilon_2=-(d/dt)(L_2I_2+M_{21}I_1)$

$=-L_2\,dI_2/dt-M_{21}\,dI_1/dt$。

If $\phi_{1i2}=\phi_{12}$ for all i and $\phi_{2\,i1}=\phi_{21}$ for all j，then

$M_{12}=N_1\phi_{12}/I_2$，$M_{21}=N_2\phi_{21}/I_1$。

高等電磁學可証明 mutual inductance $M_{12}=M_{21}$ ($\equiv M$)。

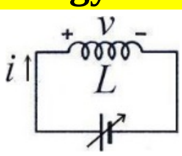


例：算 M_{12} 很難，但算 M_{21} 很簡單。

$\phi_{21}=B_1A_1=\mu_0(N_1/\ell_1)I_1A_1$，

$\therefore M=M_{21}=N_2\phi_{21}/I_1=\mu_0N_2N_1A_1/\ell_1$。

Energy Stored in an Inductor



$dU/dt=iv=iL\,di/dt$, $\therefore dU=iLdi$, $\leftrightarrow dU=(q/C)dq$

$U=\int_0^I Lidi=LI^2/2$. $\leftrightarrow U=Q^2/2C$。

Energy Density of $\vec{B}$ Field

For a solenoid: $L=\mu_0n^2\ell A$, $B=\mu_0nI$, $\therefore U=LI^2/2=\mu_0n^2\ell AI^2/2$.

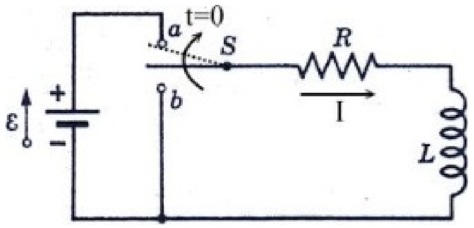
Energy density $u=U/A\ell=\mu_0n^2I^2/2=B^2/2\mu_0$ $\leftrightarrow u_E=\epsilon_0E^2/2$.

電磁學可証明此式適用於任何 $\vec{B}$。

驗証 coaxial cable：$\int(B^2/2\mu_0)dV=\int(1/2\mu_0)(\mu_0I/2\pi r)^2(2\pi r\ell dr)$

$=(\mu_0I^2\ell/4\pi)\int_a^b dr/r=(\mu_0I^2\ell/4\pi)\ln(b/a)=LI^2/2=U$.

LR Circuit



(a) charging

$\varepsilon - IR - L\,dI/dt = 0$, with $I(0) = 0$.

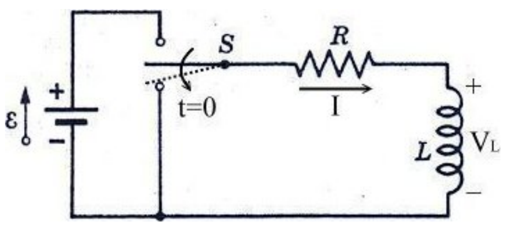
$dI/dt = (\varepsilon - IR)/L = (-R/L)(I - \varepsilon/R)$.

$\int_{I(0)=0}^{I(t)} dI'/(I' - \varepsilon/R) = -(R/L)\int_0^t dt'$,

$[\ln(I' - \varepsilon/R)]\big|_0^{I(t)} = \ln[(I - \varepsilon/R)/(-\varepsilon/R)] = -Rt/L$,

$I(t) - \varepsilon/R = -(\varepsilon/R)e^{-Rt/L}$, $I(t) = (\varepsilon/R)(1 - e^{-Rt/L}) = (\varepsilon/R)(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau \equiv L/R$.

$V_L = L\,dI/dt = \varepsilon\, e^{-Rt/L}$. $I(\infty) = \varepsilon/R$，$V_L(\infty) = 0$（$L$ 短路）。



(b) discharging

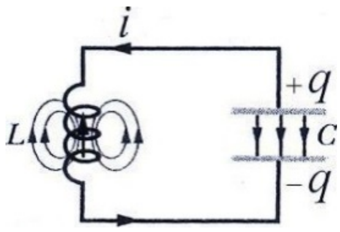
$-IR - L\,dI/dt = 0$, with $I(0) = I_0$.

$dI/dt = -(R/L)I \;\Rightarrow\; \int_{I(0)}^{I(t)} dI'/I' = -(R/L)\int_0^t dt'$,

$\ln[I(t)/I_0] = -Rt/L$, $I(t) = I_0 e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau}$,

$V_L = L\,dI/dt = -I_0 R\, e^{-Rt/L}$.

LC Oscillation



$q/C - L\,di/dt = 0$，代 $i = -dq/dt$

$\Rightarrow d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$. $\leftrightarrow d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$

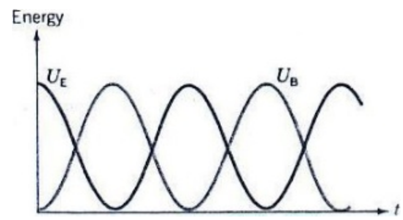
$\therefore q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \phi)$，$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ natural freq..

$i(t) = -dq/dt = Q\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = I\sin(\omega_0 t + \phi)$.

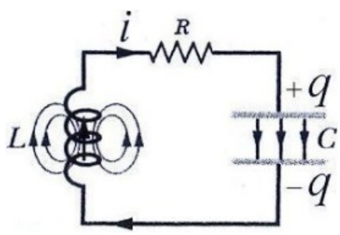
$U = U_B + U_E = Li^2/2 + q^2/2C \quad \leftrightarrow E = mv^2/2 + kx^2/2$

$\quad = (LI^2/2)\sin^2(\omega_0 t + \phi) + (Q^2/2C)\cos^2(\omega_0 t + \phi)$，

但 $LI^2 = L\omega_0^2 Q^2 = Q^2/C$，故 $U = LI^2/2 = Q^2/2C$。



Damped LC Oscillation



$-L\,di/dt - iR - q/C = 0$，代 $i = dq/dt$

$\Rightarrow L\,d^2q/dt^2 + R\,dq/dt + (1/C)q = 0$.

$\leftrightarrow m\,d^2x/dt^2 + \gamma\,dx/dt + kx = 0$

Try $q(t) = Qe^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$，代入 eq. 並整理成

$Qe^{-\alpha t}[C_1(\alpha,\omega,L,R,C)\cos(\omega t + \phi) + C_2(\alpha,\omega,L,R,C)\sin(\omega t + \phi)] = 0$ for all t.

故須 $C_1(\alpha,\omega,L,R,C) = 0 = C_2(\alpha,\omega,L,R,C)$，

由此可解得 $\alpha = R/2L$ 與 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$。

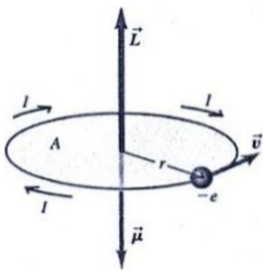
(a) underdamped：$1/LC - R^2/4L^2 > 0$，即 $R < \sqrt{4L/C}$，ω 實數，有振盪，

$\quad x(t) = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega t + \phi)$，$Q$ & ϕ 由 $q(0)$ & $i(0)$ 決定。

(b) critically damped：$1/LC - R^2/4L^2 = 0$，即 $R = \sqrt{4L/C}$ ，$\omega = 0$ ，無振盪，
$q(t) = (C + Dt)e^{-Rt/2L}$ ，C & D 由 $q(0)$ & $i(0)$ 決定。
(c) overdamped：$1/LC - R^2/4L^2 \equiv -a^2 < 0$ ，即 $R > \sqrt{4L/C}$ ，ω 虛數，無振盪，
$q(t) = Ce^{-(a+R/2L)t} + De^{-(-a+R/2L)t}$ ，C & D 由 $q(0)$ & $i(0)$ 決定。

Magnetic Properties of Matter

$\vec{\mu}$ of an atom



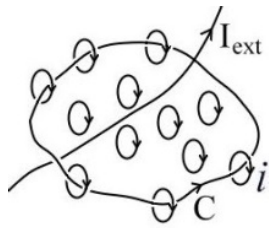
Current $I = ef = ev/2\pi r$,
$\mu = IA = (ev/2\pi r)\pi r^2 = evrm/2m = eL/2m$.
但在量子力學中 $L = n\hbar$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\hbar \equiv h/2\pi$,
(Planck's constant $h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$)
$\therefore\ \mu_L = en\hbar/2m = n\mu_B$,
$\mu_B \equiv e\hbar/2m = 9.274 \times 10^{-24}\ A \cdot m^2$ (Bohr magneton).

Spin of e^- also gives $\mu_S = e\hbar/2m = \mu_B$ $(= eS/m,\ \neq eS/2m,\ \because S = \hbar/2)$.

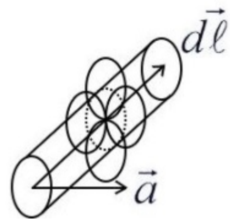
$\vec{\mu}_{atom} = \vec{\mu}_{neucleus} + \sum_{i=1}^{Z}(\vec{\mu}_{Li} + \vec{\mu}_{Si})$, permanent dipole.

介質中的 mag. dipole density (magnetization) $\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \to 0}[(\sum_{atom} \vec{\mu}_{atom})/\Delta V]$ 。

介質中磁場 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$ ，$\vec{B}_0$ 由外來電流 I_{ext} 建立，$\vec{B}_M$ 由介質的 $\vec{M}$ 建立。



以 current loop 代表介質中的原子、分子。考慮 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{encl}$ ，
只有圈住 C 的 loops 對 I_{encl} 有貢獻，所有中心落在圖示柱狀區域內的都是，共有 $N(\vec{a} \cdot d\vec{\ell})$ 個，N 是每單位体積的原分子數。故
$d\vec{\ell}$ 對 I_{encl} 貢獻 $N(i\vec{a}) \cdot d\vec{\ell} = (N\vec{\mu}_{atom}) \cdot d\vec{\ell} = \vec{M} \cdot d\vec{\ell}$ 。



$\therefore\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_{ext} + \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{\ell})$ ，故 $\oint_C (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) \cdot d\vec{\ell} = I_{ext}$ 。

定義 $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ ，則 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{ext}$ 。

$\because \vec{M}$ 必平行於 $\vec{B}$ ，$\therefore \vec{H} /\!/ \vec{B}$ ，可寫成 $\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$ 。

另又知 $\oint_C (\vec{B}_0/\mu_0) \cdot d\vec{\ell} = I_{ext}$ ，故必有 $\vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0 + \vec{f}$ ，其中 $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = 0$（保守）。

若 $\mu(H) = const.$（介質是 linear），當 $\vec{B}$ 均勻或介質無限大時，可証明 $\vec{f} = 0$ ，
此時 $\vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \equiv \vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0 + 0$ ，即 $\vec{B}_M = \vec{B} - \vec{B}_0 = \mu_0\vec{M}$ 。
$\vec{B}$ 有多種寫法：$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0 = K_m\vec{B}_0 = K_m\mu_0\vec{H} = \mu\vec{H}$ ，
$\chi_m \equiv \mu_0 M/B_0$ susceptibility（磁感率），$K_m \equiv 1 + \chi_m$ relative permeability，
$\mu \equiv K_m\mu_0$ permeability。$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \mu\vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \mu I_{encl}$ ，公式的 μ_0 全被 μ 取代。

Paramagnetism（順磁性，$\vec{\mu}_{atom} \neq 0$ 的物質，例 $A\ell$、Na、O_2、K、Mg、Mn、…）

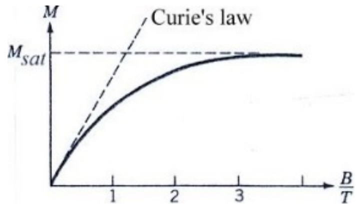
$\vec{\tau} = \vec{\mu}_{atom} \times \vec{B}$ 使 $\vec{\mu}_{atom}$ 與 $\vec{B}$ 同向，$\therefore \chi_m \equiv \mu_0 M/B_0 > 0$，$K_m > 1$，$\mu > \mu_0$。

但須考慮熱騷動：$kT \approx 6\times10^{-21} J \ \ at\ T = 300\ K$，

$2\mu_{atom}B \approx 1.9\times10^{23} J \ \ at\ B = 1T$，即 $kT \approx 300(2\mu_{atom}B)$。

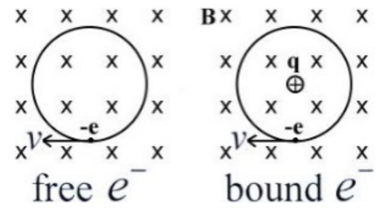
Curie's law：$M = C(B/T)$ for low B/T，C : Curie's constant.

At low B/T，$M \propto B \propto B_0$.　　Saturated $\vec{M}_{sat} = N\vec{\mu}_{atom}$.



Diamagnetism（反磁性，$\vec{\mu}_{atom} = 0$，例 C、Cu、Pb、Zn、Au、Ag、$NaC\ell$、…）

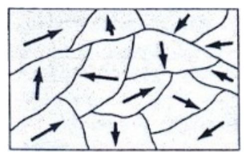
電荷在 $\vec{B}$ 中運動時，不論是 free or bound，誘發的 dipole $\vec{\mu}_{ind}$ 都與 $\vec{B}$ 反向，$\therefore \chi_m < 0$，$K_m < 1$，$\mu < \mu_0$。所有物質都有反磁性，但在 $\vec{\mu}_{atom} \neq 0$ 的物質中會被淹沒而不顯。

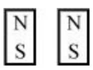


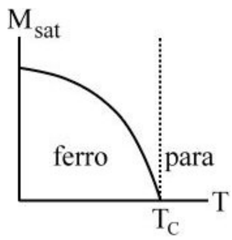
【參考不考：$-e$ 被 $+q$ 束縛，以 B 進紙面、v 順時針為正（右上圖），
則 $mv^2/r = kqe/r^2 + evB$。B 改變時，$\varepsilon = -d\phi_B/dt \ \Rightarrow E = -(r/2)dB/dt$，
故 $\Delta v = \int(-eE/m)dt = \int(er/2m)(dB/dt)dt = (er/2m)\Delta B$，即 $dv = (er/2m)dB$。
$mv^2r = kqe + evBr^2 \ \Rightarrow m2v(dv)r + mv^2dr = e(dv)Br^2 + ev(dB)r^2 + evB2rdr$，
代 $dB = (2m/er)dv$，可得 $dr/r = [evB/(mv^2/r - 2evB)]dv/v << dv/v$（因 $mv^2/r >> evB$），故 dr 可略。故 $B\uparrow \Rightarrow v\uparrow \Rightarrow \mu = I\pi r^2\uparrow$，$\vec{\mu}_{ind}$ 與 $\vec{B}$ 反向。】

Ferromagnetism（鐵磁性，例 Fe、Co、Ni、Gd、Dy、CrO_4、EuO、Fe_3O_4）

在邊長約 $1mm$、含 10^6 atoms 的磁域（magnetic domains）內，原子外層 e^- 的 spin 都在同方向。不能用古典物理解釋，因為雖然  能量低，但  能量卻高。

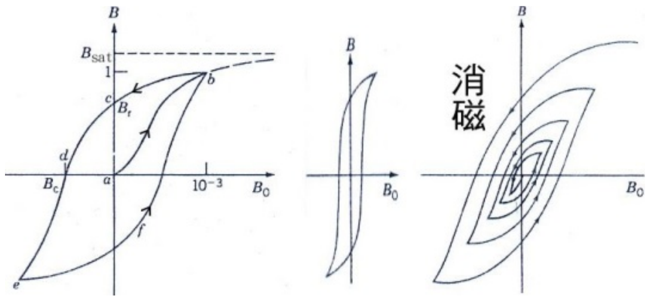


須用 Pauli's exclusion principle 解釋：若 $2e^-$ 的 spin 同（反）方向，即在相同（不同）spin state，則它們的 space states 必不同（可相同），距離較遠（近），而使庫倫位能較低（高），故 e^- spins 喜在同方向。但若 domain 太大，則因  能量太高而不穩。



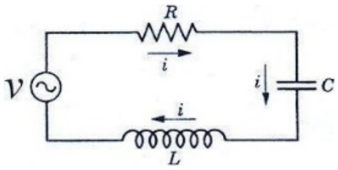
觀察磁域：將鐵粉灑在鐵磁物質表面時，鐵粉會被吸往磁域邊界(此處磁場不均勻)。
加上外來磁場 $\vec{B}_0$ 時，$\vec{M}$ 與 $\vec{B}_0$ 平行的磁域會擴大，與 $\vec{B}_0$ 反向的會縮小並稍轉向。
$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$，在鐵磁性物質中 $\mu(H)/\mu_0 = 1{,}000 \sim 100{,}000$，通常 $\vec{H} \neq \vec{B}_0/\mu_0$。

Hysteresis（磁滯，右圖）: 嚴重者（曲線包圍的面積很大）適合作永久磁鐵；中等者適合作記憶体；輕微者適合作變壓器、電磁鐵。



H.W.：Prob. 2, 9, 10, 11, 13.

Ch. 33 Alternating Current Circuits



$V\sin(\omega t) - L\,di/dt - iR - q/C = 0$。

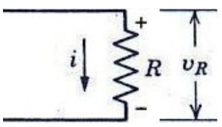
代 $i = dq/dt \;\Rightarrow L\,d^2q/dt^2 + R\,dq/dt + (1/C)q = V\sin(\omega t)$。

穩定時必有 $q(t) = Q\sin(\omega t + \phi)$，

用 $\sin(\omega t) = \sin(\omega t + \phi - \phi) = \sin(\omega t + \phi)\cos\phi - \cos(\omega t + \phi)\sin\phi$，

代入 eq. 整理後 $\sin(\omega t + \phi)$ & $\cos(\omega t + \phi)$ 的係數須分別為零，而解出 Q & ϕ。

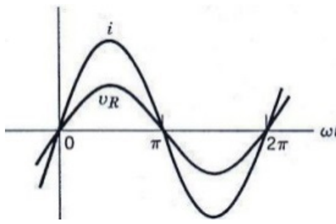
但本章要用〝phasor〞的方法解：假設 $i(t) = I\sin(\omega t + \phi_I)$，$v_R(t) = V_R\sin(\omega t + \phi_R)$，$v_L(t) = V_L\sin(\omega t + \phi_L)$，$v_C(t) = V_C\sin(\omega t + \phi_C)$，先逐一檢定 (V_R, ϕ_R)、(V_L, ϕ_L)、(V_C, ϕ_C) 與 (I, ϕ_I) 的關係，再求解。

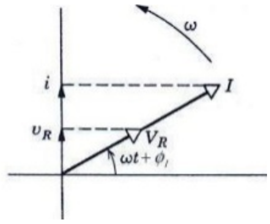


$i = I\sin(\omega t + \phi_I)$，

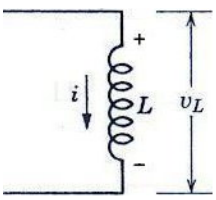
$v_R = V_R\sin(\omega t + \phi_R) = iR$

$= IR\sin(\omega t + \phi_I)$，





$\therefore V_R = IR$，R（電阻），$\phi_R = \phi_I$。

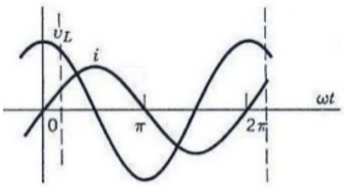


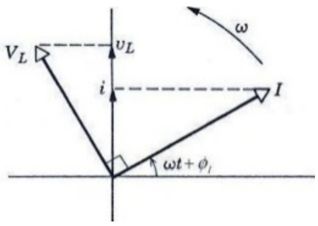
$i(t) = I\sin(\omega t + \phi_I)$，

$v_L = V_L\sin(\omega t + \phi_L) = L\,di/dt$

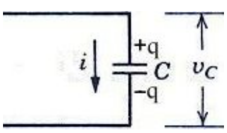
$= I\omega L\cos(\omega t + \phi_I)$

$= I\omega L\sin(\omega t + \phi_I + 90^o)$，





$\therefore V_L = I\omega L = IX_L$，$X_L \equiv \omega L$ inductive reactance（電抗），$\phi_L = \phi_I + 90^o$。

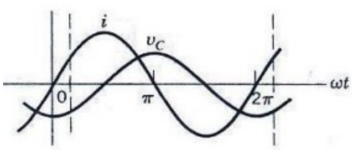


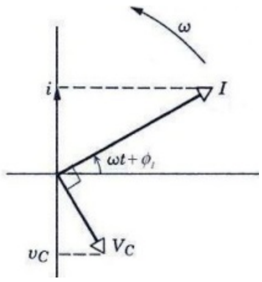
$i(t) = I\sin(\omega t + \phi_I) = dq/dt$，

$v_C = V_C\sin(\omega t + \phi_C) = q/C$

$= -(I/\omega C)\cos(\omega t + \phi_I)$

$= (I/\omega C)\sin(\omega t + \phi_I - 90^o)$，





$\therefore V_C = I/\omega C = IX_C$，$X_C \equiv 1/\omega C$ capacitive reactance（電抗），$\phi_C = \phi_I - 90^o$。