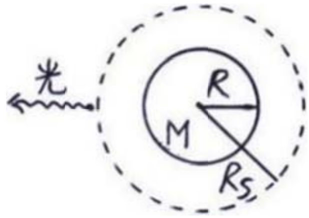
Bound and Unbound Trajectory (Black Holes)

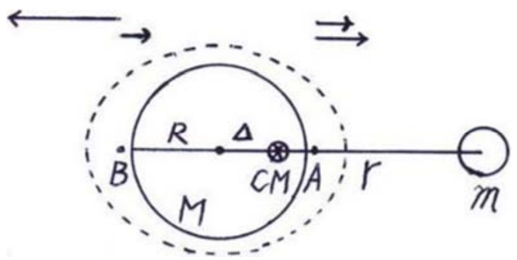
$E = mv^2/2 - GMm/r$ ，當 $E = 0$ ，$v = \sqrt{2GM/r} \equiv v_{esc}$ ，escape velocity。

$v < v_{esc}$ ，elliptical orbit；$v = v_{esc}$ ，parabolic；$v > v_{esc}$ ，hyperbolic。

若 $v_{esc} = \sqrt{2GM/r} = c$ (光速)，則 $r = 2GM/c^2 \equiv R_S$ ，Schwarzschild radius（古典的結果正好與相對論的相同）。當 $r < R_S$ 時，連光也無法逃逸。若星球的半徑 $R < R_S$ ，就是黑洞。例：M87 的 $M = 3\times10^9$ 太陽質量，$R_S \approx 10^{10}\,km \approx$ 冥王星軌道半徑，應是黑洞。



Tidal Force（潮力）



月-地總質心與地心的距離

$\Delta = (mr + M\cdot 0)/(m + M)$

$= 4500km$ ，而地球半徑 $R = 6400km$ 。

地球小公轉的離心力 = 月球吸引力，即

$4\pi^2\Delta M/T^2 = GmM/r^2$ 。

下二式會用到 $Gm/(r\mp R)^2 = (Gm/r^2)(1\mp R/r)^{-2} \approx (Gm/r^2)(1\pm 2R/r)$ 。

A：$a_A = +4\pi^2(R-\Delta)/T^2 + Gm/(r-R)^2 \approx +4\pi^2(R-\Delta)/T^2 + Gm/r^2 + 2GmR/r^3$

B：$a_B = -4\pi^2(R+\Delta)/T^2 + Gm/(r+R)^2 \approx -4\pi^2(R+\Delta)/T^2 + Gm/r^2 - 2GmR/r^3$

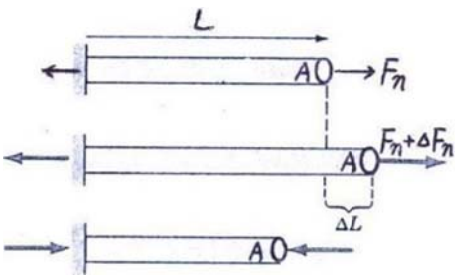
$= -a_A$ (向左為負)，故一天有二次漲落潮。 註：地球重力場也是 $g_B = -g_A$ 。

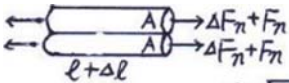
H.W.：Ex. 27；Prob. 9, 15, 17

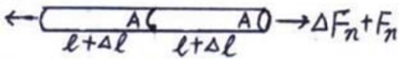
Ch. 14 Solids and Fluids

Elastic moduli（彈性係數）≡ (stress 應力)/(strain 應變)

Young's modulus Y（材料的性質）







$\Delta L \propto \Delta F_n/A$

$\Delta L \propto L$

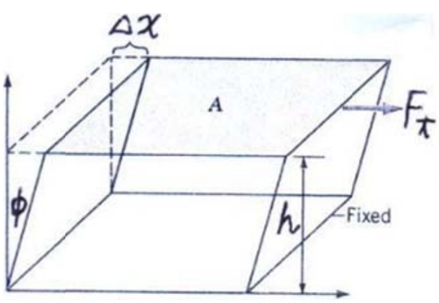
無其它因素，故 $\Delta L = (1/Y)(\Delta F_n/A)L$ ，

$$Y \equiv \frac{\Delta F_n}{A}\Big/\frac{\Delta L}{L}\left(= -\Delta P\Big/\frac{\Delta L}{L}\right)，\frac{\Delta F_n}{A} = Y\frac{\Delta L}{L}。$$

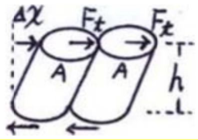
$\Delta F_n = Y(A/L)\Delta L = k\Delta L$ ，故彈簧常數 $k = Y(A/L)$ 。

$P \equiv F/A$ 即壓力或張力，$1\,\text{pascal (Pa)} \equiv 1\,\text{N/m}^2$ ，$1\,\text{psi} \equiv 1\,\text{lb/in}^2 = 6871\,\text{Pa}$ 。

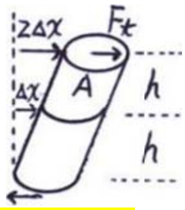
Shear modulus S（材料的性質）



$\Delta x \propto F_t / A$，



$\Delta x \propto h$，

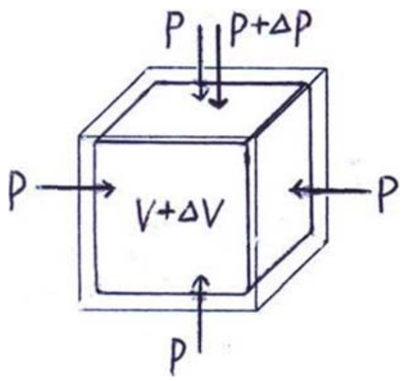


無其它因素，故 $\Delta x = (1/S)(F_t/A)h$，

$$S \equiv \frac{F_t}{A}\bigg/\frac{\Delta x}{h} = \frac{F_t}{A}\bigg/\tan\phi \approx \frac{F_t}{A}\bigg/\phi \quad \text{if } \phi \text{ is small，}$$

$$\frac{F_t}{A} = S\frac{\Delta x}{h} \approx S\phi \text{。}$$

Bulk modulus B（材料的性質，固体或流体）



$\Delta V \propto V$，$\Delta V \propto \Delta P$ when ΔP or $V''(P)$ is small。

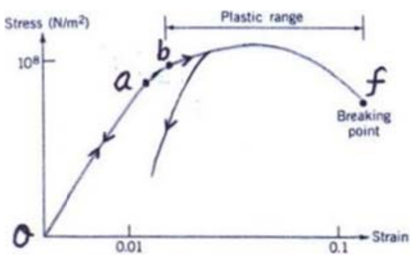
（Taylor 展開 $V(P+\Delta P) = V(P) + V^{(1)}(P)\Delta P + \cdots$。）

無其它因素，故 $\Delta V = -(1/B)V\Delta P$，

$$B \equiv -\Delta P\bigg/\frac{\Delta V}{V}\text{，}\quad \Delta P = -B\frac{\Delta V}{V}\text{。}$$

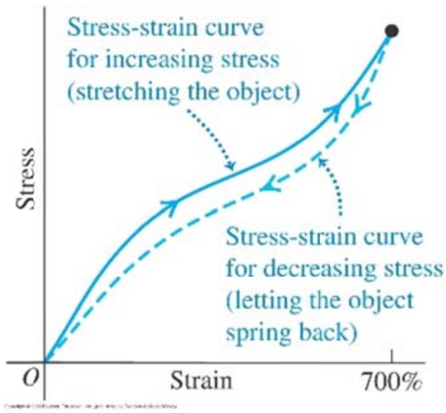
$$\text{Compressibility}\quad k \equiv \frac{1}{B} = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}\text{，}\quad \frac{\Delta V}{V} = -k\Delta P\text{。}$$

水的 $k = 46.4\times10^{-6}\,atm^{-1}$，$\Delta P = 1\,atm \;\Rightarrow\; \Delta V/V = 4.64/10$萬。



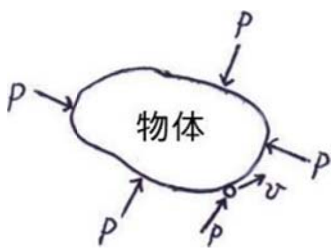
oa 是 proportional；
ab 是 not proportional
但 elastic(可逆)；
bf 是 plastic change
(塑變、不可逆)。

a 是 propotional limit；b 是 yield point；
f 是 breaking point。



遲滯 hysteresis，有內摩擦，可作吸震器

Fluids （**液体與氣体**）



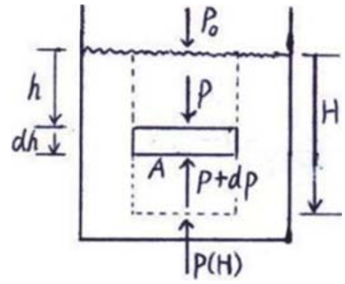
流体內的壓力 P 必垂直物体表面，否則表面的流体會流動。

$P \equiv \Delta F/\Delta A$，$1\,\text{pascal (Pa)} \equiv 1\,\text{N/m}^2$，$1\,\text{psi} \equiv 1\,\ell\text{b/in}^2$。

$1\,\text{atm} = 1.013\times10^5\ \text{Pa} = 10.13\,\text{N/cm}^2 = 1.033\,\text{kgw/cm}^2$

$= 14.7\ \text{psi} = 760\ \text{torr}$ $(1\,\text{torr} \equiv 1\,\text{mmHg}) \approx$ 三層樓水柱。

壓力與高度的關係

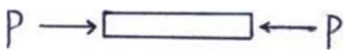


$\Sigma F_y = 0 \ \Rightarrow \ P(H)A = P_0 A + \rho(AH)g \ if \ \rho = const.$，故 $P(H) = P_0 + \rho g H$ 。

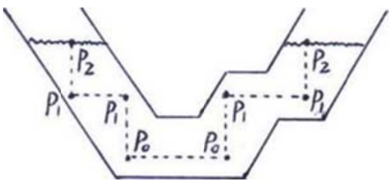
若 $\rho(h)$ 可變，則 $P(H)A = P_0 A + \int_0^H \rho(h)(Adh)g$ ，

故 $P(H) = P_0 + \int_0^H \rho(h) g dh$ 。 $\left(AdP = \rho(h)(Adh)g\right)$

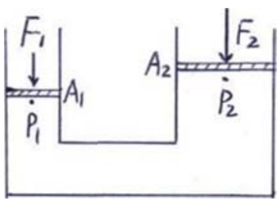
For air： $\Delta H = 3\,m \ \Rightarrow \ \Delta P = \rho g \Delta H = (1.2\,kg/m^3)(9.8\,m/s^2)(3\,m) = 35\,Pa$
$\approx 0.00035\,atm$ ，定溫下 $-\Delta V/V \approx \Delta P/P \approx 3.5/10^4$ ， ρ is almost constant。



$\Sigma F_x = 0$ ，故 P 只與深度有關。

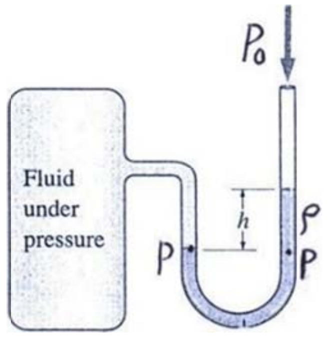


連通管



$F_1/A_1 = P_1 \approx P_2 = F_2/A_2$

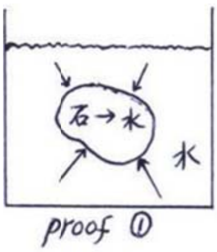
$F_2 = \left(A_2/A_1\right)F_1$ ，流体重可略

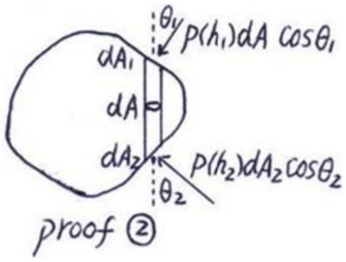


$P = P_0 + \rho g h$ ，絕對壓力

$P - P_0 = \rho g h$ ，相對壓力

Archimedes' principle：浮力 ＝ 排開的流体重



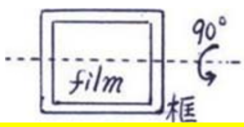


細柱 $df = P(h_2)dA_2\cos\theta_2 - P(h_1)dA_1\cos\theta_1$

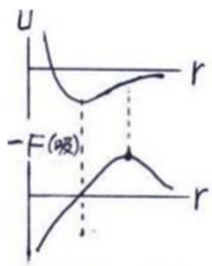
$= \left(P(h_2) - P(h_1)\right)dA = \left(\int_{h_1}^{h_2} \rho_f(h) g dh\right)dA$

＝ 細柱排開的流体重， ρ_f 是流体密度。

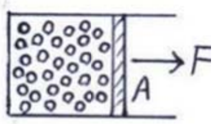
表面張力



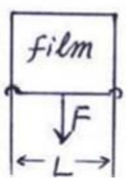
$\Rightarrow$



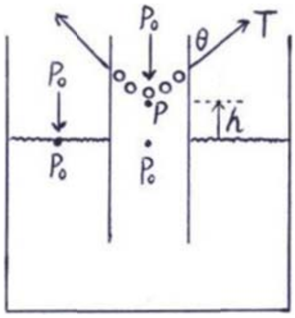
液体表面分子間距離較遠，Van der Waals 力是吸力，且吸力大到即使是受擠壓的內層分子也無法將表面分子分開，而形成表面張力。實驗可作到（右圖）分子間均為吸力，壓力是負的，水的 tensile stress $F/A = Y\left(\Delta L/L\right)$ 可達 300 atm。



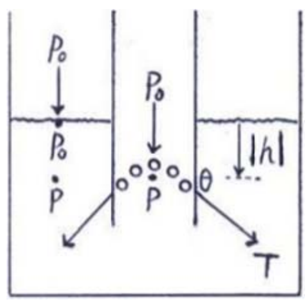
表面張力 $T \equiv (F/2)/L = F/2L$ （因薄膜有二表面），即 force per unit length。



毛細現象



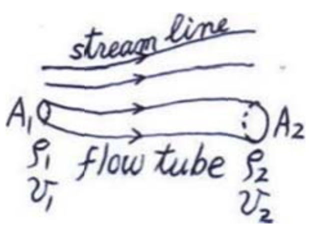
吸附力 > 內聚力
上拉的力=液柱重
$(T2\pi R)\cos\theta$
$=\rho(\pi R^2 h)g$
$h>0, \cos\theta>0$



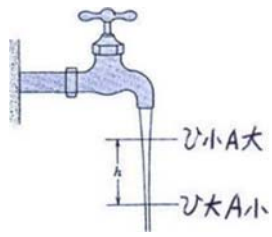
吸附力 < 內聚力
下拉力=空液柱重
$(T2\pi R)\cos\theta$
$=\rho(\pi R^2 h)g$
$h<0, \cos\theta<0$

故 $h=2T\cos\theta/(\rho g R)\propto 1/R$，$T$ 是分子吸力最高時的張力。水能到達幾十米高的樹頂就是靠毛細現象，靠大氣壓力僅能升到 10.33 米（需樹頂抽真空！）。

Fluid Flow

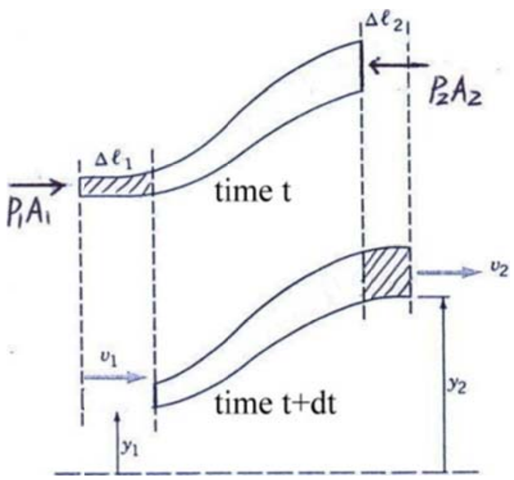


steady 時，$dm=\rho_1 A_1 v_1 dt=\rho_2 A_2 v_2 dt$，
故 $\rho_1 A_1 v_1=\rho_2 A_2 v_2$，continuity eq.。
若是不可壓縮流体 $\rho_1=\rho_2$，則 $A_1 v_1=A_2 v_2$。
例：水龍頭（右圖）。



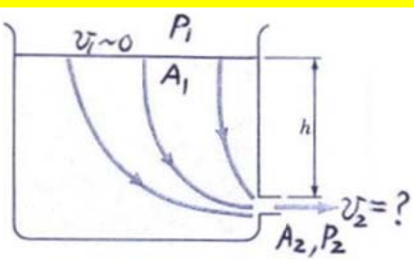
Ideal fluids：(1) non-viscous 無黏性；(2) steady 穩流；(3) irrotational 不旋轉。

Bernoulli's Eq. for Incompressible Ideal Fluids



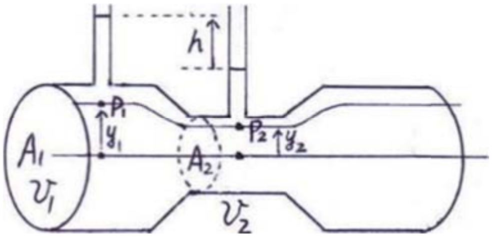
被作功 $\Delta W=P_1 A_1 \Delta\ell_1 - P_2 A_2 \Delta\ell_2$
$=(P_1-P_2)\Delta V$ if incompr.；
動能改變 $\Delta K=\rho_2 \Delta V_2 v_2^2/2-\rho_1 \Delta V_1 v_1^2/2$ if irrot.
$=\rho\Delta V(v_2^2-v_1^2)/2$ if incompr.；
位能改變 $\Delta U=\rho_2 \Delta V_2 g y_2-\rho_1 \Delta V_1 g y_1$
$=\rho g\Delta V(y_2-y_1)$ if incompr.。
$\Delta W=\Delta K+\Delta U$ if non-visc.& incompr (no heat)，
故 $(P_1-P_2)\Delta V=\rho\Delta V(v_2^2-v_1^2)/2+\rho g\Delta V(y_2-y_1)$，
即 $\rho v_1^2/2+P_1+\rho g y_1=\rho v_2^2/2+P_2+\rho g y_2$。
故在同一流管（或流線）$\rho v^2/2+P+\rho g y=const.$。

例：



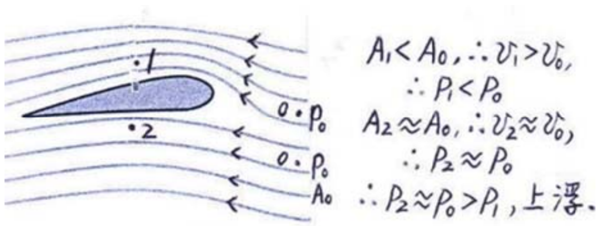
$\rho v_1^2/2+P_1+\rho g h=\rho v_2^2/2+P_2$。
$\because A_1>>A_2$，$\therefore v_1<<v_2$，$\therefore v_1\approx 0$，
$\rho v_2^2/2=(P_1-P_2)+\rho g h$
故 $v_2=\sqrt{2(P_1-P_2)/\rho+2gh}$。
若 $P_1=P_2=P_{air}$，則 $v_2=\sqrt{2gh}$。（註：小液塊可快速變形，故液塊側面與前後面受的壓力都一樣。）

例：Venturi meter （量水流速 v_1 ） $\rho v_1^2/2 + P_1 + \rho g y_1 = \rho v_2^2/2 + P_2 + \rho g y_2$

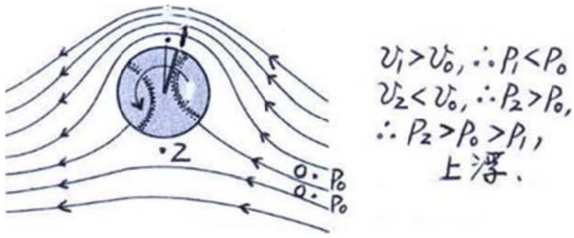


$\Rightarrow \quad (P_1 + \rho g y_1) - (P_2 + \rho g y_2) = \rho(v_2^2 - v_1^2)/2$，
但 $(P_1 + \rho g y_1) - (P_2 + \rho g y_2) = \rho g h$（水平流動），
$v_2 = (A_1/A_2)v_1$，故 $\rho g h = \rho v_1^2 (A_1^2/A_2^2 - 1)/2$，得
$v_1 = \sqrt{2gh/(A_1^2/A_2^2 - 1)}$。（註：各層液体均水平流動，無上下加速時，壓力來自重量疊加。）

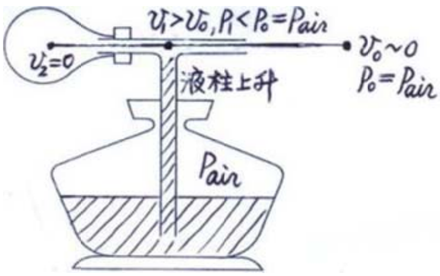
例：飛機翼



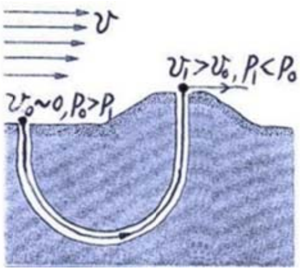
例：棒球



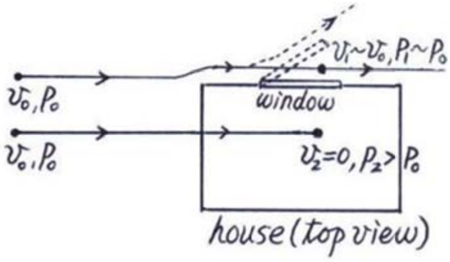
例：噴霧器



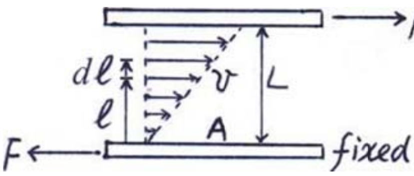
例：土撥鼠洞（同煙囪）



例：popping window



Real Fluid has viscosity (η)

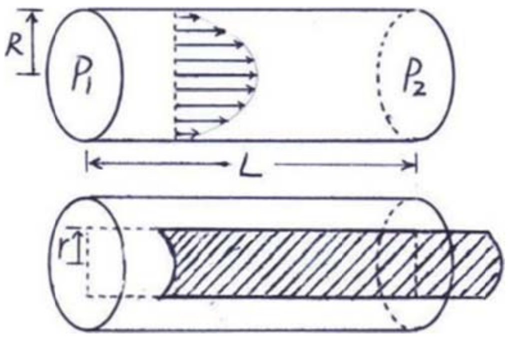


分成許多流体層，鄰層間摩擦力 $F = \eta A(dv/d\ell)$，滿足此式者稱 Newtonian fluid，viscosity $\eta \equiv (F/A) \div (dv/d\ell)$，其 MKS 單位是 $N \cdot s/m^2$，但常用 $1\ poise \equiv 1\ N \cdot s/cm^2$。

Steady 時 $dv/d\ell = const.$， $F = \eta A(v/L)$， $\eta \equiv (F/A) \div (v/L)$。

【下例僅供參考，不講也不考】

例：在長 L 、半徑 R 的圓管內，兩端有壓力 P_1 、 P_2，steady， $v(R) = 0$ ， $v(r) = ?$



考慮半徑 r 的圓柱狀流体，圓柱側面受黏力
$F(r) = A\eta(dv/dr) = 2\pi r L \eta\, dv/dr$，向右為正。
因 steady，流体只變形而不加速，故受淨力為 0，
須壓力差與黏力抵消： $F(r) + (P_1 - P_2) r^2 \pi = 0$。
故 $2\pi r L \eta\, dv/dr + (P_1 - P_2) r^2 \pi = 0$，
即 $dv/dr = -[(P_1 - P_2)/2L\eta] r$，且 $v(R) = 0$。

其解 $v(r)=[(P_1-P_2)/4L\eta](R^2-r^2)$。

体積流率 $\dfrac{dV}{dt}=\int_0^R 2\pi r dr\dfrac{(P_1-P_2)}{4L\eta}(R^2-r^2)=\dfrac{\pi(P_1-P_2)}{2L\eta}\left(R^2\int_0^R rdr-\int_0^R r^3dr\right)$

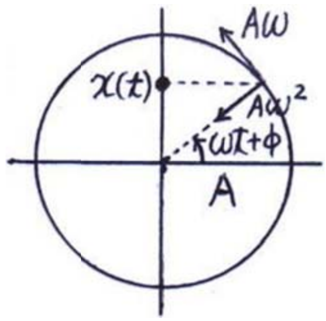
$=[\pi(P_1-P_2)/2L\eta](R^4/2-R^4/4)=[\pi(P_1-P_2)/8L\eta]R^4$ Poiseuille's law。

註：對有黏性的流体，前例 Venturi meter 的計算只適用於中線（$r=0$）。因流入必等於流出，故流率 $dV/dt=[\pi(P_1-P_2)/8L\eta]R^4=const.$ for all R，故必須 $(P_1-P_2)/L\propto 1/R^4$，故 $v(r)\propto(1/R^4)(R^2-r^2)=(1-r^2/R^2)/R^2$。一條流線經過處的 $r/R\equiv c$ 應均相等，因為如此則 $r_1=r_2(R_1/R_2)$，流入環狀區 $2\pi rdr$ 的會等於流出的：$v_1(r_1)2\pi r_1dr_1=[const.(1-c^2)/R_1^2]2\pi(R_1/R_2)^2r_2dr_2=v_2(r_2)2\pi r_2dr_2$。故流線上 $v\propto(1-c^2)/R^2\propto 1/A$，<u>符合 $A_1v_1=A_2v_2$。但只有在 $r=0$ 處無黏力（因 $dv/dr=0$），才可用 Bernoulli's eq.，即前面 Venturi meter 的分析只適用於中線。</u>

H.W.： Prob. 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10

Ch. 15 Oscillations

Simple Harmonic Motion（SHM，簡單諧和運動）



$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$，$x_0\equiv x(0)=A\sin(\phi)$。

A :amplitude，ω : angular frequency，ϕ : phase constant。

Period T: $\omega T=2\pi\Rightarrow T=2\pi/\omega$。

$v(t)=dx/dt=A\omega\cos(\omega t+\phi)$，$v_0\equiv v(0)=A\omega\cos(\phi)$。

$a(t)=dv/dt=-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)$，$a_0\equiv a(0)=-A\omega^2\sin(\phi)$。

When $x=0$，$v=\pm\omega A$，$a=0$；when $x=\pm A$，$v=0$，$a=\mp\omega^2 A$。

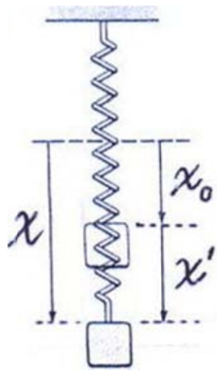
$x(t)$ 滿足 <u>**eq. of motion for SHM**</u>：$d^2x/dt^2+\omega^2x=0$。$\Leftrightarrow x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

$x_0^2+(v_0/\omega)^2=A^2\sin^2\phi+A^2\cos^2\phi=A^2$，故 $A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$；

$x_0/v_0=(\tan\phi)/\omega$，故 $\phi=\tan^{-1}(\omega x_0/v_0)$。故 $A\,\&\,\phi$ 完全由起始條件 $x_0\,\&\,v_0$ 決定。

例：spring-block $md^2x/dt^2=-kx\Rightarrow d^2x/dt^2+(k/m)x=0\Rightarrow\omega=\sqrt{k/m}$。

例：vertical spring-block



$kx_0=mg$，$F=md^2x/dt^2=md^2(x-x_0)/dt^2=md^2x'/dt^2$，

又 $F=mg-kx=-k(x-x_0)=-kx'$，故 $md^2x'/dt^2+kx'=0$。

$\therefore\omega=\sqrt{k/m}$，$T=2\pi\sqrt{m/k}$。

$\Delta U=[k(x'+x_0)^2/2-mg(x'+x_0)]-[kx_0^2/2-mgx_0]$

$=kx'^2/2+kx_0x'+kx_0^2/2-mgx'-kx_0^2/2=kx'^2/2$。