

Calculus(Midterm 4)

1. (15%) 二維向量函數 $F(x, y) = (y, -x)$, C 為曲線, $C = \{(t, t^2) | 1 \leq t \leq 2\}$,

求 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

2. (15%) 函數 $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$, 向量函數 $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

(F 可以表成 $yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$)

(a). 求 $\nabla \cdot F$ (散度) 與 $\nabla \times F$

(b). 求 $\nabla \cdot f$ 與 $\nabla \times (\nabla f)$

(c). 求 $\nabla^2 f$

3. (15%) $P(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cdot z$, $F(x, y, z) = \nabla P$,
 C 為曲線, $C = \{(3 \cos t, 4 \sin t, t^2 + 1) | 0 \leq t \leq 1\}$

求 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

4. (15%) $F(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$
 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

求 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$

5. (20%) 曲面 S 是球面的一部分

$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 2\}$

$F(x, y, z) = x^2\vec{i} + zx\vec{j} - y\vec{k}$

\vec{n} 為向球面外的 unit normal vector

求 $\iint_S \nabla \times F \cdot \vec{n} \, dA$

6. (20%) $F(x, y, z) = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

曲面 S 是一橢球, \vec{n} 是向外的 unit normal vector

$S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$

求 $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$