

107 工科系統微積分 (上) Final 助教名字記得寫!!

1. 用 $\varepsilon - \delta$ 定義證明 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = 2$ 10%

2. 求以下各極限 10%

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)$ b. $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} a e^{-ax} dx$

3. 求以下各微分 15%

a. $\frac{d}{dx}(\sin^2 x e^{x^2})$ b. $\frac{d}{dx} 2^x$ c. $\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$

4. $f(x) = x^2 + x^{-2}$ 求此函數在區間 $[0.5, 2.5]$ 的極大極小值 10%

5. 求以下各積分 25%

a. $\int_0^1 x \sin \pi x^2 dx$ b. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9} dx$ c. $\int \cos^2 x dx$
d. $\int 2^x dx$ e. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

6. 曲線段 $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in [0, 2]\}$ 其中 $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ \sqrt{2x - x^2} & x > 1 \end{cases}$

a. 求 C 的長度 5%

b. 求 C 與 x 軸圍成區域對 x 軸旋轉的旋轉體體積 5%

7. 求以下各微分方程式在 x 大於 0 時的解 10%

a. $y'(x) + y(x) = 1$ $y(0) = 0$

b. $y'(x) + y(x) = H(x)$ $y(0) = 0$ 其中 $H(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$

8. 已知 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 10%

常態分配，機率密度函數為 $k(\sigma) e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ ， $x \in (-\infty, \infty)$

σ 為標準差，求 $k(\sigma)$