國立成功大學 學年度第 學期考試試卷

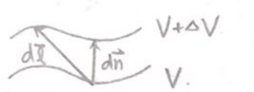
National Cheng Kung University Examination Sheet for Academic Year: Semester: 107 年 11 月 6 日 Year Month Day

姓名 Name	劉育如	科目名稱 Subject Name	電磁學	教師簽章 Signature of Instructor	李[illegible]
學號 Student No.	E94056233				
院系 College	工 學院 College 工科 系 Department 三 年 Year 班 Class	評閱成績 Score	95		

Part A.

1、gradient (梯度)：在純量場中，純量隨空間的最大變化率及方向。 △詳述細節.

+13 +5



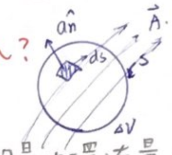
$\left|\frac{\Delta V}{\Delta l}\right| < \left|\frac{\Delta V}{\Delta n}\right|$ $\nabla V = \hat{a}_n \frac{dV}{dn}$

2、divergence (散度)：從微小體積上，其外圍封閉曲面上的通量總和。

+4

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

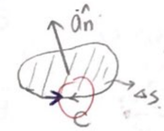
illustration?



3、curl (旋度)：向量場中，從微小面積上，其外圍 contour 的最大環流量及其相對應的方向

+4

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{[\hat{a}_n \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}\,]_{max}}{\Delta s}$$



2、fundamental postulates of electrostatics in free space.

+18

[Differential form] [Integral form]

+3 ① $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$? ?

+5 ① $\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

Divergence Theorem ↓ $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ (Gauss's Law)

② $\nabla \times \vec{E} = 0$. +5

ε_0：真空介電係數

ρ_V：體電荷密度

在一個封閉曲面上電量的通量會等於封閉曲面內所有電量總和除以 ε_0 ?. 體電荷密度

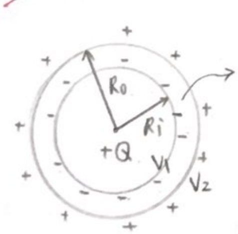
② $\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0$

Stoke's Theorem ↓ $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ +5

在電場中沿任意封閉路徑移動電荷，作功量為 0.

3、No. $\vec{E} = -\nabla V$ $\vec{E} = 0$ 不代表 V 為 0，是代表 $\nabla V = 0$.

+10 Ex. 在靜電場中的金屬球殼



球殼中的電荷會被 +Q 吸引及排斥到導體表面，導致其內部沒有自由電荷存在 ⇒ $\rho_V = 0$ 由 fundamental postulate $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$.

∵ 在導體內部 $\vec{E} = 0$ ∴ 移動電荷並不會使其電位能增加

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

由此即可證明，即使 $\vec{E} = 0$，並不代表 V 亦為 0.

4、良好的金屬導體中沒有自由電荷

+5 是因為其內部電荷會被吸引及排斥到導體表面，如上題所繪之圖形.

(續寫轉背頁)

Part B. 1、

$+20$

① $0 \le R \le b$. $\rho_v = -\rho$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{-\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E_R \hat{a_R} \qquad d\vec{s} = ds\, \hat{a_R}$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_R(\cancel{4\pi} \cancel{R^2}) = \frac{-\rho\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^{\cancel{3}}\right)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_R = \frac{-\rho R}{3\varepsilon_0}$$

△ why 徑向 $\vec{E} = E_R \hat{a_R}$

$$\underline{\vec{E} = \frac{-\rho R}{3\varepsilon_0} \hat{a_R}} \;※$$

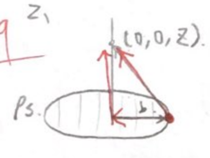
② $R > b$. $\rho_v = 0$.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{-\rho\left(\frac{4}{3}\pi b^3\right)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E_R \hat{a_R} \quad d\vec{s} = ds\,\hat{a_R} \quad \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_R(\cancel{4\pi} R^2) = \frac{-\rho\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} b^3\right)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{-\rho b^3}{3\varepsilon_0 R^2} \qquad \underline{\vec{E} = \frac{-\rho b^3}{3\varepsilon_0 R^2} \hat{a_R}} \;※$$

$+19$ 2、



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \hat{a_R} \qquad d\vec{E} = \frac{\rho_s ds' \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad \vec{R} = -r\hat{a_r} + z\hat{a_z}$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_s \frac{-r\hat{a_r} + z\hat{a_z}}{\left(\sqrt{r^2+z^2}\right)^3} ds'$$

$$= \underbrace{\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{-r}{(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr\,d\phi \,\hat{a_r}}_{\text{會有對稱項互消}} + \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} r\,dr\,d\phi\,\hat{a_z}$$

$+15$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{z r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr\,d\phi\,\hat{a_z} \qquad \text{令 } r^2+z^2=u$$

$$du = 2r\,dr \Rightarrow r\,dr = \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{z^2}^{z^2+b^2} z u^{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} du\,d\phi\,\hat{a_z}$$

$$= \frac{\rho_s}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \times \cancel{2\pi} \times \frac{1}{2} \times z \times \left(-2u^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{z^2}^{b^2+z^2} \hat{a_z}$$

$$\underline{= -\frac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)\hat{a_z}} \;※$$

if b is large.

$$\underline{\vec{E} \simeq -\frac{\rho_s z}{2\varepsilon_0}\left(\cancel{\frac{1}{b}} - \frac{1}{|z|}\right)\hat{a_z}} \;※$$

0

$+4$

3. (a)

$+10$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a_n} \qquad \hat{a_n} = \hat{a_R}$$

$$= P_0 \hat{a_x} \cdot \hat{a_R} = \underline{P_0 \sin\theta \cos\phi} \;※$$

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial x} P_0 \underline{= 0} \;※$$

(b).

$$\oint_s \rho_{ps}\, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_0 \sin\theta\cos\phi \; R_0^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= P_0 R_0^2 \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \underline{= 0} \;※$$

$$\int_v \rho_{pv}\, dV \underline{= 0} \;※$$