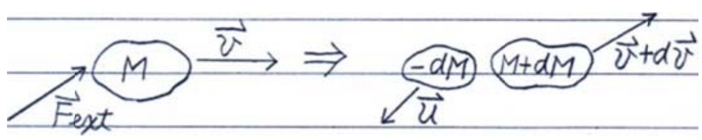


質量離開：

$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dM\,\vec{u}) - M\vec{v}$

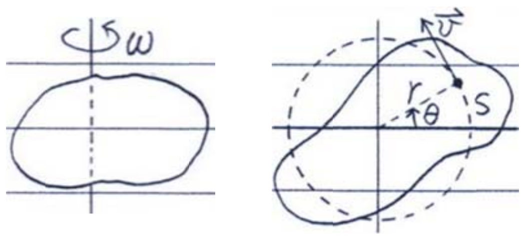
$= M d\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})dM$ ， $\vec{u} - \vec{v} \equiv \vec{u}_{rel}$ 。

$\therefore \vec{F}_{ext} = d\vec{P}/dt = M\,d\vec{v}/dt - \vec{u}_{rel}\,dM/dt$ ，與前式完全相同，但 $dM < 0$ 。

例：rocket thrust， $\vec{F}_{ext} = 0$ ， $\therefore M\,d\vec{v}/dt = \vec{u}_{rel}\,dM/dt = \vec{V}_{ex}\,dM/dt$ ， $dM < 0$ 。

H.W.：Ex. 5, 8, 15; Prob. 1, 2, 3, 12.

Ch. 11 Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis



$\theta(t) = S(t)/r$ ， $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\theta/\Delta t = d\theta/dt$ ，

$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ 。

定角加速度 $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = \int_0^t \alpha dt' \Rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha t$ ，

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_0^t \omega dt' = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t')\,dt' \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2$ 。

代 $t = (\omega - \omega_0)/\alpha$ 入上式 $\Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0(\omega - \omega_0)/\alpha + (1/2)\alpha(\omega - \omega_0)^2/\alpha^2$

$= (1/\alpha)(\omega_0\omega - \omega_0^2 + \omega^2/2 - \omega\omega_0 + \omega_0^2/2) \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ 。

物体上一點 $S = r\theta$ ， $v = dS/dt = (d/dt)(r\theta) = r\,d\theta/dt = r\omega$ ，

Tangential $a_t = dv/dt = r\,d\omega/dt = r\alpha$ ，radial $a_r = v^2/r = r^2\omega^2/r = r\omega^2$ 。

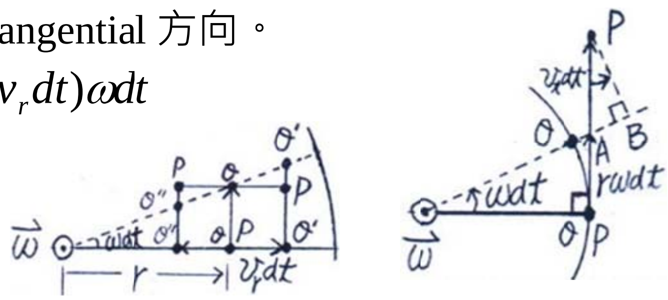
Coriolis force in a rotating frame（例 earth，自北極向南極看）

$a = \omega^2 r$ ，非均勻加速座標。圓盤(disk)以角速度 $\vec{\omega}$ 旋轉，被釘在 disk 上 $\vec{r}$ 處的觀察者 O 相對於外界有速度 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ 。Disk 的上空有一粒子 P 以等速度運動，在圖示的瞬間相對於 O 的速度 $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$ ， $\vec{v}_r$ 在 radial、 $\vec{v}_t$ 在 tangential 方向。

(a)左圖 $\vec{v}_r$ ： P 相對於 O' 的位移 $= r\omega dt - (r + v_r dt)\omega dt$

$= -v_r\omega(dt)^2 = a(dt)^2/2$ ，

$\therefore a = -2\omega v_r$ ， v_r 向外為 + 。



(b)右圖 $\vec{v}_t$ ：離心 $\overline{OA}$ + Coriolis $\overline{AB}$ （見註）

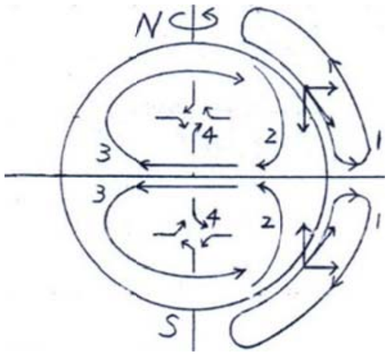
$= \left(r/\cos(\omega dt) - r\right) + v_t dt \sin(\omega dt) = r(\omega dt)^2/2 + v_t\omega(dt)^2 = a(dt)^2/2$ ，

$\therefore a = \omega^2 r + 2\omega v_t$ ， v_t 向上為 + 。

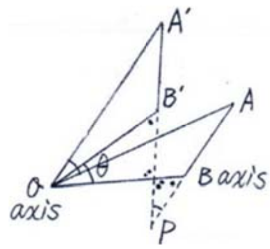
註：下 $\overline{PA} = (r\omega)dt$ ，上 $\overline{AP} = v_t dt$ ， $1/\cos(\omega dt) = \left(1 - \sin^2(\omega dt)\right)^{-1/2} \approx 1 + (\omega dt)^2/2$ 。

因此從 O 看來，P 都有一向右偏的 acc.，
total acc.可統一表示為 $\vec{a}=-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2\vec{\omega}\times\vec{v}$ 。

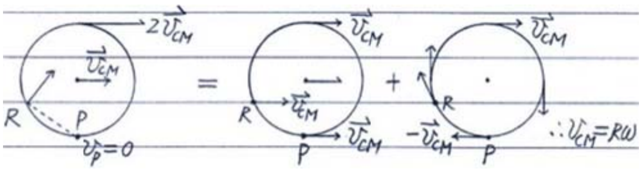
地球的大氣與洋流：①hot air 赤道升至高空，到極區後下降，沿地表回赤道。②因北(南)半球 Coriolis 向右(左)偏而形成東北(東南)風，並在赤道合流成東風。③經長年吹拂，推動向西的赤道洋流，又因 Coriolis 而在北(南)半球形成順(反)時方向的洋流。④當 air 流入低壓區時，因 Coriolis 向右(左)偏，而在北(南)半球形成反(順)時的颱風。



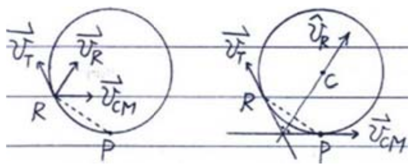
物體相對於一軸轉 θ 角時，相對於其它固定在體上的平行軸也轉 θ 角（即若 A 相對 O axis 轉 θ 至 A'，則 A 相對於 B axis 也轉 θ ）。
proof： $\Delta OA'B'\cong\Delta OAB$，$\therefore\angle PB'O=\angle PBO$ 。
又對頂角相等，$\therefore\angle APA'=\angle AOA'=\theta$ 。



Rolling = translation + rotation



右圖 $\because\left|\vec{v}_T\right|=\left|\vec{v}_{CM}\right|$，
$\therefore\vec{v}_R$ 平分 $\vec{v}_{CM}$ & $\vec{v}_T$ 的夾角，

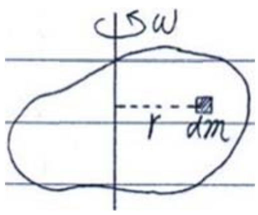


$\therefore\vec{v}_R\perp\overline{PR}$，相對於 P 的轉動（只就速度分布而言）。

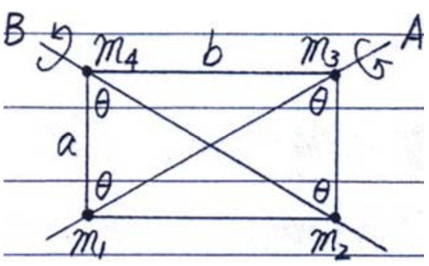
角速度：相對於 P 為 ω_P，相對於 CM ,為 ω_{CM} 。頂點 $v_{top}=2v_{CM}=2(R\omega_{CM})$；又 $v_{top}=(2R)\omega_P$，$\therefore\ \omega_P=\omega_{CM}\equiv\omega$ (again)。

旋轉動能 $K=\sum_i m_i v_i^2/2=\sum_i m_i(r_i\omega)^2/2=(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2/2=I\omega^2/2$，

$I\equiv\sum_i m_i r_i^2$ 轉動慣量（moment of rotational inertia），
代表物體轉動加速的困難度，r_i 是 m_i 與轉軸的垂直距離。



例：



$\sin\theta=b/\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=a/\sqrt{a^2+b^2}$，

$I_A=m_4(a\sin\theta)^2+m_2(a\sin\theta)^2$

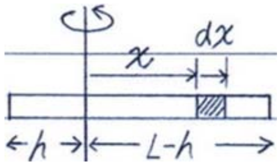
$=(m_2+m_4)a^2b^2/(a^2+b^2)$；

$I_B=m_1(a\sin\theta)^2+m_3(a\sin\theta)^2$

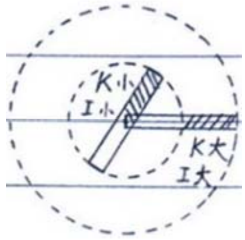
$=(m_1+m_3)a^2b^2/(a^2+b^2)$ 。

For continuous bodies $I=\int r^2dm=\int r^2(\rho dV)=\rho\int r^2dV$ 。

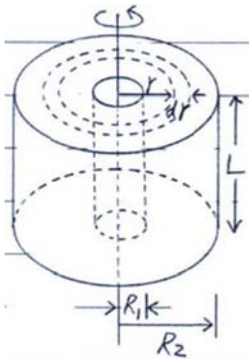
例：細棒長 L ，質量 M



$dm=(M/L)dx$ ， $I=\int x^2dm=(M/L)\int_{-h}^{L-h}x^2dx$ ，
$I=(M/L)x^3/3\big|_{-h}^{L-h}=(1/3)M(L^2-3Lh+3h^2)$ 。
If $h=0$ ， $I=ML^2/3$; if $h=L/2$ ， $I=ML^2/12$ 。



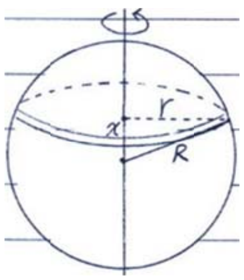
例：中空圓柱殼　　分成許多半徑 r ，厚 dr 的圓柱殼 $dm=\rho dV=\rho L2\pi rdr$ ，



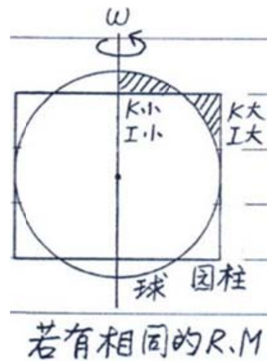
$I=\int r^2dm=2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2}r^3dr=2\pi\rho L(R_2^4-R_1^4)/4$

$=\rho\pi L(R_2^2+R_1^2)(R_2^2-R_1^2)/2$ 。 但 $M=\rho V=\rho\pi L(R_2^2-R_1^2)$ ，
$\therefore I/M=(R_1^2+R_2^2)/2$ ，即 $I=M(R_1^2+R_2^2)/2$ ，ind. of L 。
If $R_1=0$ ， $I=MR^2/2$ （實心柱）;
If $R_1\to R_2=R$ ， $I=MR^2$ （圓柱殼， M fixed， $\rho\to\infty$ ）。

例：實心圓球　　分成 disks，半徑 $r=\sqrt{R^2-x^2}$ ，

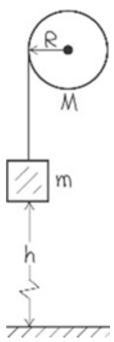


$dm=\rho dV=\rho\pi r^2dx$ ，
$dI=(dm)r^2/2=(1/2)\rho\pi r^4dx$ 。
$I=2\cdot(\rho\pi/2)\int_0^R(R^2-x^2)^2dx$
$=\rho\pi\left(R^4x\big|_0^R-2R^2x^3/3\big|_0^R+x^5/5\big|_0^R\right)$ ，



$I=(8/15)\rho\pi R^5$ 。 但 $M=\rho4\pi R^3/3$ ， $I/M=(2/5)R^2$ ，$\therefore I=(2/5)MR^2$ 。

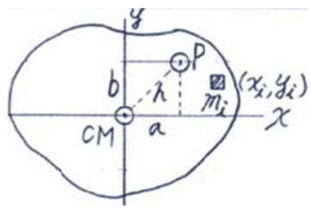
例：



滑輪 $I=\beta MR^2$ （中空圓柱 $\beta=(1+R_1^2/R^2)/2$ 、環 1、盤 $1/2$ 、球 $2/5$ ）， m 由靜止開始往下掉 h 時的速度 $v=$ ？

Sol：機械能守恆 $mgh=mv^2/2+I\omega^2/2=mv^2/2+\beta MR^2(v/R)^2/2$
$=mv^2/2+\beta Mv^2/2=(m+\beta M)v^2/2$ ，
$\therefore v=\sqrt{2gh/(1+\beta M/m)}$ 。

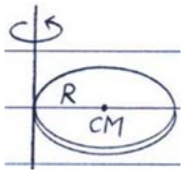
Parallel Axis Theorem：若 I_P 、 I_{CM} 分別是相對於平行的 P 軸、 CM 軸的轉動慣量，則 $I_P=I_{CM}+Mh^2$ ， h 是二軸間距離。
proof： $I_{CM}=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)$ ， $I_P=\sum m_i\left[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2\right]$ ，



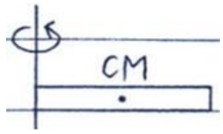
$I_P=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-2a\sum m_i x_i\ -2b\sum m_i y_i+(a^2+b^2)\sum m_i$ 。但 CM 是原點，
$\sum m_i x_i=MX_{CM}=0$ ，$\sum m_i y_i=MY_{CM}=0$ ，$a^2+b^2=h^2$ ，$\therefore I_P=I_{CM}+h^2M$ 。

【另一證法】相對於 P 軸轉動時，動能 $K=I_P\omega_P^2/2$ ；
但又有 $K=K_{ext}+K_{\text{int}}=MV_{CM}^2/2+I_{CM}\omega_{CM}^2/2=M(h\omega_P)^2/2+I_{CM}\omega_{CM}^2/2$ 。
而 $\omega_P=\omega_{CM}\equiv\omega$（前面已証明相對於體上任何平行軸的轉角都相同），
$\therefore I_P\omega^2/2=M(h\omega)^2/2+I_{CM}\omega^2/2$ ，即 $I_P=Mh^2+I_{CM}$ 。

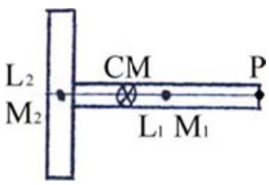
例：



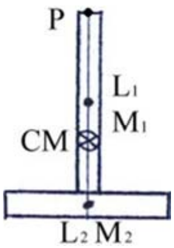
$I_{CM}=(1/2)MR^2$ ，
$I=(1/2)MR^2+MR^2$
$=(3/2)MR^2$ 。



$I_{CM}=(1/12)ML^2$ ，
$I=ML^2/12+M(L/2)^2$
$=ML^2/3$ ，正確。

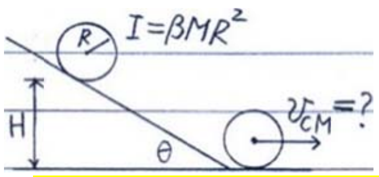


$I_P=M_1L_1^2/3+(M_2L_2^2/12+M_2L_1^2)$
。

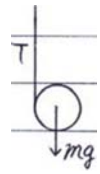


機械能守恆

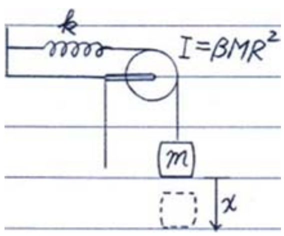
例：滾動而不滑動，滾下 H 高時，$v_{CM}=?$ Sol: $MgH=Mv_{CM}^2/2+I\omega^2/2$



$=Mv_{CM}^2/2+\beta MR^2(v_{CM}/R)^2/2=Mv_{CM}^2/2+\beta Mv_{CM}^2/2$
$\therefore v_{CM}=\sqrt{2gH/(1+\beta)}$ 。
$\beta_{sphere}=2/5$ ，$\beta_{disk}=1/2$ ，$\beta_{loop}=1$ ，
$\therefore$ sphere 最快（轉動能最小），loop 最慢。$\theta=90°\Rightarrow$ yo-yo 球。



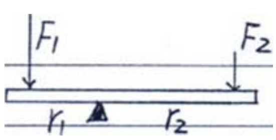
例：



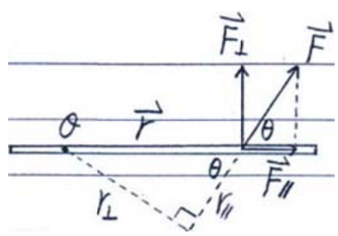
在 $x=0$ 時，m 的 $v=0$ ，spring 無張力；在 $x\neq0$ 時，$v(x)=?$

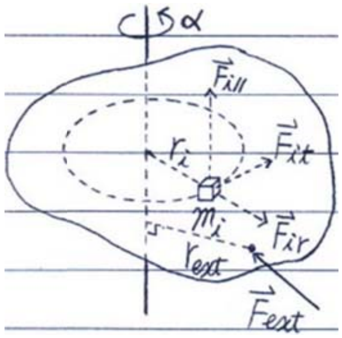
Sol：$E_f=mv^2/2+(v/R)^2/2I+kx^2/2-mgx=E_i=0$ ，
$\therefore v^2=(2mgx-kx^2)/(m+\beta M)$ 。

Torque

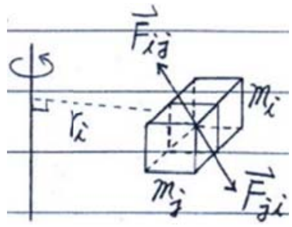


Archimedes：$r_1F_1=r_2F_2$ ，$\tau_1=\tau_2$（左圖）。
Da Vinci：$\tau\equiv rF_\perp=r(F\sin\theta)$（右圖）
$=(r\sin\theta)F=r_\perp F$ ，or $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ 。

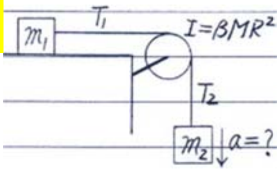




$F_{it} = m_i a_{it} = m_i r_i \alpha$ ， $\tau_i = r_i F_{it} = m_i r_i^2 \alpha$ ，
total torque $\tau \equiv \sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = I\alpha$ 。
但內力作用的力矩完全抵消（右圖），
$\therefore \tau = r_{ext} F_{ext} = \tau_{ext}$ ， $\therefore \tau_{ext} = I\alpha$ 。

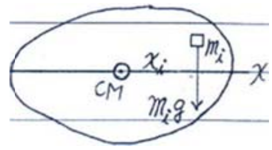


例：



m_1 & m_2 的加速度 $a = ?$
①$T_1 = m_1 a$ ，② $m_2 g - T_2 = m_2 a$ ，
③ $T_2 R - T_1 R = I\alpha = (\beta MR^2)(a/R) \Rightarrow T_2 - T_1 = \beta Ma$ 。
①+②+③$\Rightarrow$ $m_2 g = (m_1 + m_2 + \beta M)a \Rightarrow a = m_2 g/(m_1 + m_2 + \beta M)$ 。

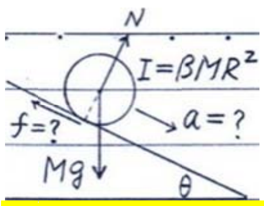
$\tau = I\alpha$ 也適用於 moving axis 只要 ①axis 方向不變，且 ②axis 穿過 CM 。
証明：在加速座標中原須考慮虛力（慣性力），但虛力相當於均匀
重力場，而重力所作相對於 CM 軸的力矩為 0，故不須考慮。



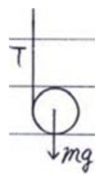
$$\tau_g = \sum x_i m_i g = (\sum x_i m_i) g = (MX_{CM}) g = X_{CM}(Mg) ，$$

即算重力的力矩時可看成重力全部集中於 CM 。 $\tau_g = 0$ if $X_{CM} = 0$ 。

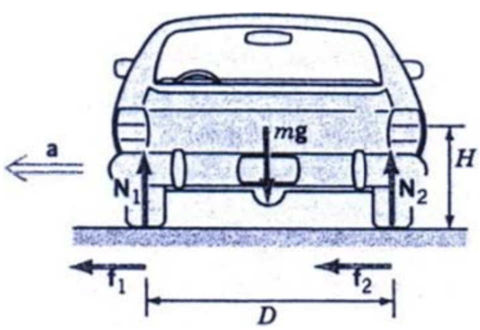
例：滾動而不滑動， $a = ?$



① $Mg\sin\theta - f = Ma$ ， ② $fR = I\alpha = (\beta MR^2)(a/R) \Rightarrow f = \beta Ma$ 。
①+②$\Rightarrow$ $Mg\sin\theta = (1+\beta)Ma \Rightarrow a = g\sin\theta/(1+\beta)$ 。
球的 a 最大。代 a 回②$\Rightarrow$ $f = \beta Mg\sin\theta/(1+\beta)$ 。
(a)最小需 $u_s = f/N = \beta Mg\sin\theta/[(1+\beta)(Mg\cos\theta)] = [\beta/(1+\beta)]\tan\theta$ 。
(b) $\theta = 90° \Rightarrow$ 右圖的 yo-yo 球，只需把 f 換成 rope 張力 T ，作法同上。

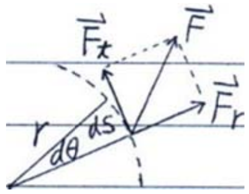


例：車子 speed v ，作半徑 r 的轉彎，車不翻的最大 $v_{\max} = ?$



① $f_1 + f_2 = mv^2/r$ ，② $N_1 + N_2 = mg \Rightarrow N_2 = mg - N_1$ ，
③torque $(f_1 + f_2)H + N_1 D/2 = N_2 D/2$ 。
代①②入③$\Rightarrow (mv^2/r)H + N_1 D/2 = (mg - N_1)D/2$
$\Rightarrow N_1 D = mgD/2 - (mv^2/r)H$
$\Rightarrow N_1 = m(g/2 - v^2 H/rD)$
當 $v = v_{\max}$ ， $N_1 = 0$ ， $v_{\max}^2 = grD/2H$ 。

Work & Power

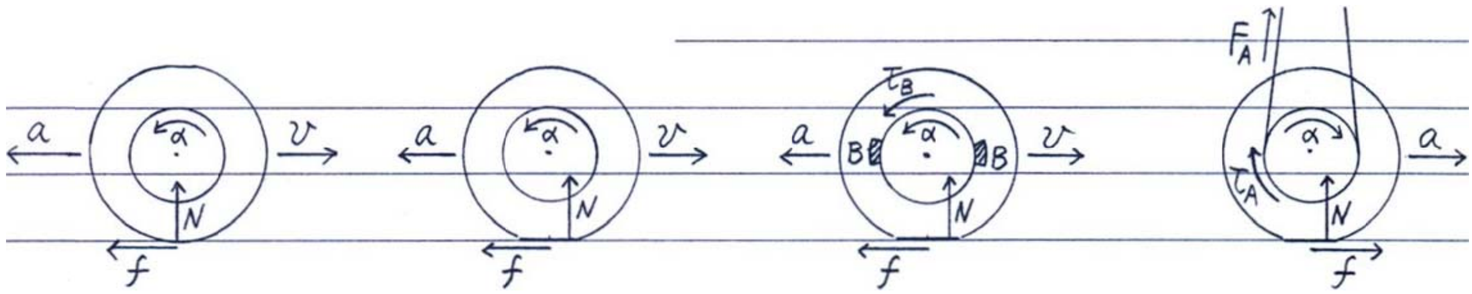


$dw = F_t ds = F_t r d\theta = \tau d\theta$，$\therefore$ power $P = dw/dt = \tau\omega$ ($\leftrightarrow P = Fv$)。

$W = \int dw = \int \tau d\theta = \int I\alpha d\theta = \int I(d\omega/dt)\omega dt = I\int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega d\omega$

$= I\omega_f^2/2 - I\omega_i^2/2$。

Rolling Friction（arrow 方向為〝+〞）



$f = ma$ 向右減速
但 $I\alpha = -fR < 0$
向右加速，矛盾
$\therefore f = 0$，$\alpha = 0$

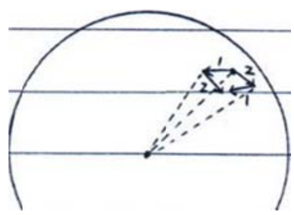
$\begin{cases} f = ma \\ \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_N = (1+\beta)maR$

$\begin{cases} f = ma \\ \tau_B + \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_B + \tau_N = (1+\beta)maR$
可以 $\tau_N = 0$

$\begin{cases} f = ma \\ \tau_A + \tau_N - fR = I\alpha \end{cases}$
$\tau_A + \tau_N = (1+\beta)maR$
可以 $\tau_N = 0$

註：以上用到 $fR + I\alpha = (ma)R + \beta mR^2(a/R) = (1+\beta)maR$

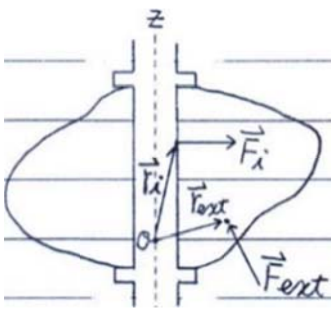
Rotation Angles



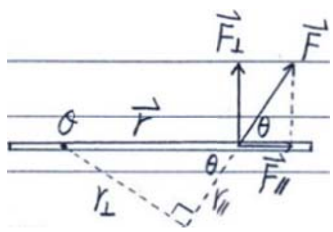
$\vec{\theta}$：$|\vec{\theta}|$ angle 大小，$\hat{\theta} \equiv \vec{\theta}/|\vec{\theta}|$ 轉軸方向。$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$（例翻轉書本），故非向量。但 $d\vec{\theta}_1 + d\vec{\theta}_2 = d\vec{\theta}_2 + d\vec{\theta}_1$，故 $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$，$\vec{\omega}$ 是向量。

H.W.：Ex. 26, 29, 32, 34, 44, 56, 57, 58, 70；Prob. 2, 7, 13.

Ch. 12 Angular Momentum and Statics



相對於一點的 torque（右圖）$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$，
$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta = r(\sin\theta)F = rF_\perp = r_\perp F$。



（左圖）當有固定光滑 axis（在 $\hat{z}$ 方向）時，axis 會作用一力矩 $\vec{\tau}_{axis} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \perp \hat{z}$。