$v - v_0 = -V_{ex}\ln M'\big|_{M_0}^{M} = -V_{ex}\ln(M/M_0) = V_{ex}\ln(M_0/M)$ 。

註：$e \equiv \lim_{N\to\infty}(1+1/N)^N$ ，$e^x = \lim_{N\to\infty}(1+1/N)^{Nx}$,

$$e^x = \lim_{N\to\infty}[1+((Nx)!/1!(Nx-1)!)1/N+\cdots\cdots+((Nx)!/n!(Nx-n)!)1/N^n+\cdots\cdots]$$

$$= \lim_{N\to\infty}[1+(Nx/1!)1/N+\cdots\cdots+((Nx)(Nx-1)\cdots(Nx-n+1)/n!)1/N^n+\cdots\cdots]$$ 。

$Nx-n+1 \approx Nx$ as $N\to\infty$ ，$\therefore\ e^x = 1+x/1!+\cdots+x^n/n!+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ 。

（或 $e^x = \lim_{N\to\infty}(1+1/N)^{Nx} = \lim_{N\to\infty}(1+x/N)^N$

$$= \lim_{N\to\infty}[1+(N!/1!(N-1)!)\,x/N+\cdots\cdots+(N!/n!(N-n)!)x^n/N^n+\cdots\cdots]$$

$$= \lim_{N\to\infty}[1+(N/1!)\,x/N+\cdots\cdots+(N(N-1)\cdots(N-n+1)/n!)x^n/N^n+\cdots\cdots]$$

$$= 1+(1/1!)x+\cdots+(1/n!)x^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$$ 。）

$$d(e^x)/dt = 0+1+\cdots+x^{n-1}/(n-1)!+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$$ 。

When $\in$ small，$e^{\in} \approx 1+\in$ ，$\therefore \ln(1+\in) \approx \ln e^{\in} = \in$ 。

$$d(\ln x)/dx = (\ln(x+dx)-\ln x)/dx = \ln[(x+dx)/x]/dx = \ln(1+dx/x)/dx$$

$$= (dx/x)/dx = 1/x$$ 。

H.W.: Prob. 4, 5, 6, 9, 18, 19, 20

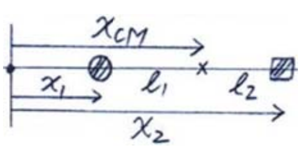
Ch. 10 System of Particles

多質點系統 total momentum $\vec{P} \equiv \sum_i m_i\vec{v}_i$ ，total mass $M \equiv \sum_i m_i$ 。

若取代表點（center of mass, CM） $\vec{R}_{CM} \equiv (\sum m_i\vec{r}_i)/(\sum m_i)$ ，

則 $\vec{V}_{CM} \equiv d\vec{R}_{CM}/dt = (\sum_i m_i d\vec{r}_i/dt)/M = (\sum_i m_i\vec{v}_i)/M = \vec{P}/M$ ，即 $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$ 。

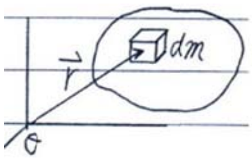
例：



$x_{CM} = (m_1x_1+m_2x_2)/(m_1+m_2) \Rightarrow (m_1+m_2)x_{CM} = m_1x_1+m_2x_2$

$\Rightarrow m_1(x_{CM}-x_1) = m_2(x_2-x_{CM})$ ，即 $m_1l_1 = m_2l_2$ 。

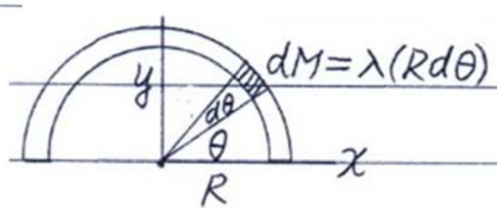
For a continuous body $\vec{R}_{CM} = (1/M)\int \vec{r}dm$.



例：右圖 linear density λ ，$x_{CM} = 0$ ，

$$y_{CM} = (1/\lambda\pi R)\int_0^{\pi}(R\sin\theta)(\lambda Rd\theta)$$

$$= (R/\pi)\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = 2R/\pi$$ 。



（註：$d\cos\theta=\cos(\theta+d\theta)-\cos\theta=\cos\theta\cos(d\theta)-\sin\theta\sin(d\theta)-\cos\theta$，

但 $\sin(d\theta)\approx d\theta$，$\cos(d\theta)=(1-\sin^2(d\theta))^{1/2}\approx 1-(1/2)(d\theta)^2\approx 1$，

$\therefore d\cos\theta=-\sin\theta d\theta$，$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\cos\theta\big|_0^{\pi}=-(-1)+1=2$ 。）

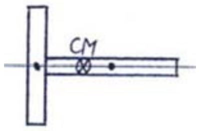
◆若把系統分成 2 (or more) 部分，

$$M_I\equiv\sum_{i=1}^{l}m_i\,,\quad M_J\equiv\sum_{j=l+1}^{n}m_j\,,\quad \vec{R}_I\equiv\Big(\sum_{i=1}^{l}m_i\vec{r}_i\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{l}m_i\Big),\quad \vec{R}_J\equiv\Big(\sum_{j=l+1}^{n}m_j\vec{r}_j\Big)\Big/\Big(\sum_{j=l+1}^{n}m_j\Big),$$

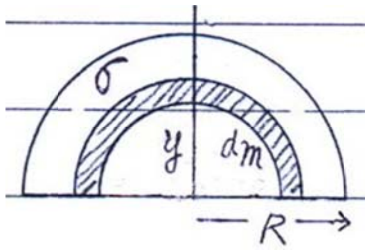
則 $(M_I\vec{R}_I+M_J\vec{R}_J)/(M_I+M_J)=\Big(\sum_{i=1}^{l}m_i\vec{r}_i+\sum_{j=l+1}^{n}m_j\vec{r}_j\Big)\Big/\Big(\sum_{i=1}^{l}m_i+\sum_{j=l+1}^{n}m_j\Big)=\vec{R}_{CM}$ ，

即可先求各部分的 CM's，再把各部質量看成集中於各 CM 點而算出總 CM 。

例：T 字尺如右圖。



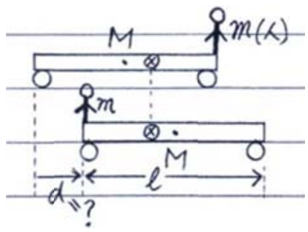
例：半圓盤如右圖，



$$y_{CM}=\int_0^R(2y/\pi)(\sigma\pi ydy)\Big/\int_0^R\sigma\pi ydy$$

$$=(2R^3/3)(\pi R^2/2)=4R/3\pi\text{ 。}$$

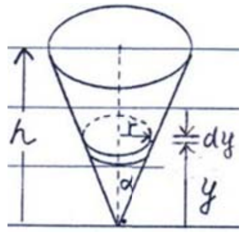
例：人自車右端走到左端，總 CM 位置不變（無外來力），



$(M\,l/2+ml)/(M+m)=x_{CM}=\big[M(l/2+d)+md\big]/(M+m)$

$\Rightarrow(M/2+m-M/2)l=(M+m)d\ \Rightarrow d=\big[m/(M+m)\big]\ l$ 。

例：求正圓錐的 CM 。



$dm=\rho dV=\rho\pi r^2dy=\rho\pi(y\tan\alpha)^2dy=(\rho\pi\tan^2\alpha)y^2dy$ ，

$y_{CM}=\int ydm\Big/\int dm=\int_0^h y^3dy\Big/\int_0^h y^2dy=(h^4/4)/(h^3/3)=3h/4$ 。

◆ Internal momentum $\sum_i m_i(\vec{v}_i-\vec{V}_{CM})=\vec{P}-M\vec{V}_{CM}=0$ 。

◆ 動能 K = 內動能 K_{int} + 外動能 K_{ext}

proof ：內速度 $\vec{u}_i\equiv\vec{v}_i-\vec{V}_{CM}$ ，$K=\sum_i(1/2)m_i(\vec{u}_i+\vec{V}_{CM})\cdot(\vec{u}_i+\vec{V}_{CM})$

$=\sum m_iu_i^2/2+(\sum m_i\vec{u}_i)\cdot\vec{V}_{CM}+(\sum m_i)V_{CM}^2/2=\sum m_iu_i^2/2+MV_{CM}^2/2$ 。

◆ $\vec{F}_{ext}=M\vec{A}_{CM}\quad(\vec{A}_{CM}\equiv d\vec{V}_{CM}/dt)$

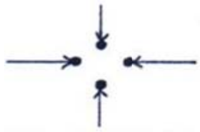
proof：$d\vec{P}/dt=(d/dt)(\sum m_i\vec{v}_i)=\sum m_i\,d\vec{v}_i/dt=\sum m_i\vec{a}_i=\sum\vec{f}_i=\vec{F}_{ext}$ ，

但又 $d\vec{P}/dt=(d/dt)(M\vec{V}_{CM})=M\vec{A}_{CM}$ ，$\therefore\vec{F}_{ext}=M\vec{A}_{CM}$ 。

◆ $\int\vec{F}_{ext}\cdot d\vec{R}_{CM}=\Delta(MV_{CM}^2/2)=\Delta K_{ext}$ （≠外力作的功 W_{ext} ）

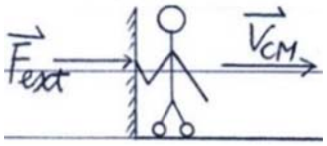
proof：$\int\vec{F}_{ext}\cdot d\vec{R}_{CM}=\int(Md\vec{V}_{CM}/dt)\cdot(\vec{V}_{CM}dt)=\int d(MV_{CM}^2/2)=\Delta(MV_{CM}^2/2)$ 。

外力作功 $W_{ext} = \Delta E = \Delta K_{ext} + \Delta E_{\text{int}}$



例：右圖 $\vec{F}_{ext} = 0$，$\therefore \Delta K_{ext} = 0$。但外力有作功 $W_{ext} \neq 0$，$\Delta K_{\text{int}} \neq 0$。

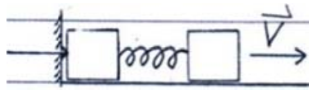
例：skater 推 wall，$\vec{F}_{ext}$ (by wall) $\neq 0$。但 wall 沒位移，$\therefore W_{ext} = 0$。



而 CM 有位移，$\Delta \vec{R}_{CM} \neq 0$，

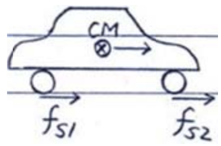
$\therefore \Delta K_{ext} \neq 0$，能量來自內部。

（類似能量來自壓縮的 spring，右圖。）

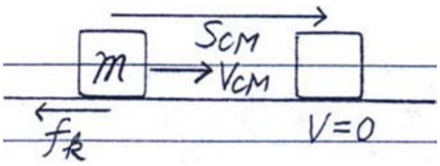


例：右圖車輪底的 static friction $(= F_{ext})$ 未作功，$W_{ext} = 0$。

但車子加速，$\Delta K_{ext} \neq 0$，能量來自汽油。



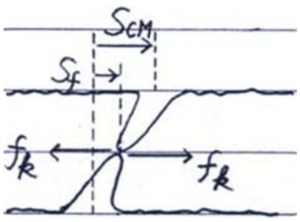
Work done by friction $dW_{ext} = -f_k dS_f \neq -f_k dS_{CM}$



$-f_k S_{CM} = \Delta K_{ext} = -mV_{CM}^2/2$，

但 m 底部有發熱，熱即 m 的內能改變 ΔE_{int}，

故 f_k 對作功 $W_{ext} = -mV_{CM}^2/2 + \Delta E_{\text{int}}$。

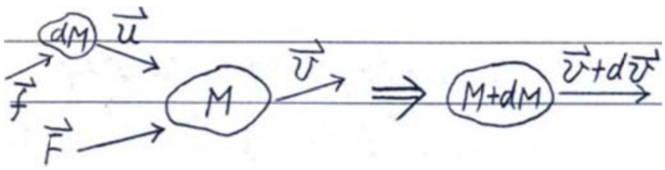


f_k 對 m 作功 $dW_{ext} = -f_k dS_f$，但 $dK_{ext} = -f_k dS_{CM}$

$\therefore dE_{\text{int}} = dW_{ext} - dK_{ext} = f_k(dS_{CM} - dS_f)$。

即存於凸起的變形能，扯斷後變成振盪熱能。

Systems of variable mass



質量加入：

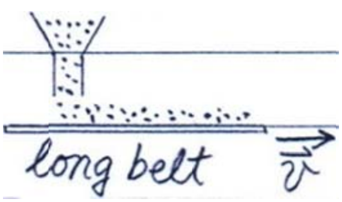
$$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - (dM)\vec{u} - M\vec{v}$$

$$= Md\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})dM \quad，\quad \vec{u} - \vec{v} \equiv \vec{u}_{rel}$$

$\vec{F}_{ext}(= \vec{F} + \vec{f}) = d\vec{P}/dt = M\, d\vec{v}/dt - \vec{u}_{rel}\, dM/dt$，

$\therefore M\, d\vec{v}/dt = \vec{F}_{ext} + \vec{u}_{rel}\, dM/dt$，$\vec{u}_{rel}\, dM/dt =$ 每單位時間加入 M 的動量。

例：total mass of grain on belt $= m$，$\vec{u} = 0$，$\therefore \vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{v} = -\vec{v}$。



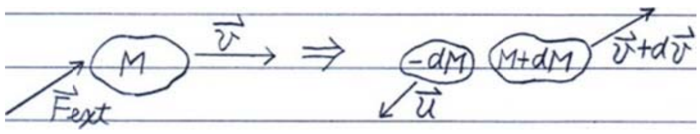
$d\vec{v}/dt = 0$，$\therefore \vec{F}_{ext} = \vec{v}\, dm/dt$ by belt（$=$ 前圖中的 $\vec{f}$）。

power required $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = v^2\, dm/dt$。

但 grain 的動能改變率 $dK/dt = (d/dt)(mv^2/2)$

$= (1/2)v^2\, dm/dt$，

即有1/2 被轉變為熱 by friction。



質量離開：

$d\vec{P}=(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})+(-dM\,\vec{u})-M\vec{v}$

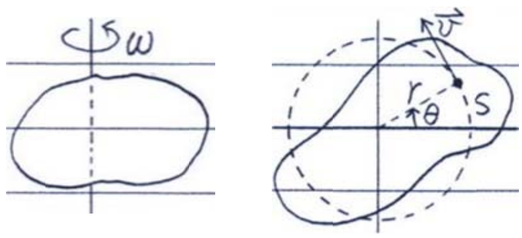
$=Md\vec{v}-(\vec{u}-\vec{v})dM$ ， $\vec{u}-\vec{v}\equiv\vec{u}_{rel}$ 。

$\therefore \vec{F}_{ext}=d\vec{P}/dt=M\,d\vec{v}/dt-\vec{u}_{rel}\,dM/dt$ ，與前式完全相同，但 $dM<0$ 。

例：rocket thrust， $\vec{F}_{ext}=0$ ， $\therefore M\,d\vec{v}/dt=\vec{u}_{rel}\,dM/dt=\vec{V}_{ex}\,dM/dt$ ， $dM<0$ 。

H.W.：Ex. 5, 8, 15; Prob. 1, 2, 3, 12.

Ch. 11 Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis



$\theta(t)=S(t)/r$ ， $\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\theta/\Delta t=d\theta/dt$ ，

$\alpha=d\omega/dt=d^2\theta/dt^2$ 。

定角加速度 $\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega'=\int_0^t\alpha dt'\Rightarrow\omega-\omega_0=\alpha t$ ，

$\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta'=\int_0^t\omega dt'=\int_0^t(\omega_0+\alpha t')dt'\Rightarrow\theta-\theta_0=\omega_0 t+\alpha t^2/2$ 。

代 $t=(\omega-\omega_0)/\alpha$ 入上式 $\Rightarrow\theta-\theta_0=\omega_0(\omega-\omega_0)/\alpha+(1/2)\alpha(\omega-\omega_0)^2/\alpha^2$

$=(1/\alpha)(\omega_0\omega-\omega_0^2+\omega^2/2-\omega\omega_0+\omega_0^2/2)\Rightarrow\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)$ 。

物体上一點 $S=r\theta$ ， $v=dS/dt=(d/dt)(r\theta)=r\,d\theta/dt=r\omega$ ，

Tangential $a_t=dv/dt=r\,d\omega/dt=r\alpha$ ，radial $a_r=v^2/r=r^2\omega^2/r=r\omega^2$ 。

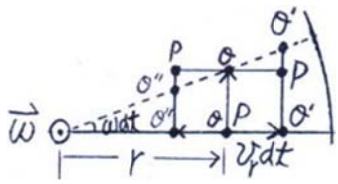
【略】**Coriolis force in a rotating frame**（例 earth，自北極向南極看）

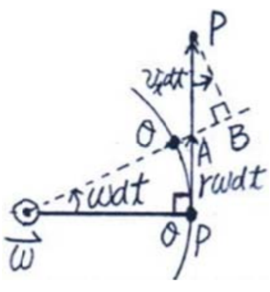
$a=\omega^2 r$ ，非均勻加速座標。圓盤(disk)以角速度 $\vec{\omega}$ 旋轉，被釘在 disk 上 $\vec{r}$ 處的觀察者 O 相對於外界有速度 $\vec{\omega}\times\vec{r}$ 。Disk 的上空有一粒子 P 以等速度運動，在圖示的瞬間相對於 O 的速度 $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_t$ ， $\vec{v}_r$ 在 radial、 $\vec{v}_t$ 在 tangential 方向。

(a)左圖 $\vec{v}_r$ ： P 相對於 O' 的位移 $=r\omega dt-(r+v_r dt)\omega dt$

$=-v_r\omega(dt)^2=a(dt)^2/2$ ，

$\therefore a=-2\omega v_r$ ， v_r 向外為＋。





(b)右圖 $\vec{v}_t$ ：離心 $\overline{OA}$ + Coriolis $\overline{AB}$ （見註）

$=\left(r/\cos(\omega dt)-r\right)+v_t dt\sin(\omega dt)=r(\omega dt)^2/2+v_t\omega(dt)^2=a(dt)^2/2$ ，

$\therefore a=\omega^2 r+2\omega v_t$ ， v_t 向上為＋。

註：下 $\overline{PA}=(r\omega)dt$ ，上 $\overline{AP}=v_t dt$ ， $1/\cos(\omega dt)=\left(1-\sin^2(\omega dt)\right)^{-1/2}\approx 1+(\omega dt)^2/2$ 。