

Зачёт по стохастическому анализу. 2017

1 июня 2017

Задача 1

Совместный закон распределения пары случайных величин представлен табличкой

	$X = 0, Y = 0$	$X = 0, Y = 1$	$X = 1, Y = 0$	$X = 1, Y = 1$
Вероятность	0.1	0.2	0.3	0.4

1. Найдите $E(Y|X)$ и представьте ответ в виде функции от X
2. Найдите $Var(Y|X)$ и представьте ответ в виде функции от X

Задача 2

Рассмотрим процесс $Y_t = \exp(at - 2W_t)$.

1. Найдите dY_t в краткой и полной форме записи.
2. При каком a процесс Y_t будет мартингалом?

Задача 3

Величины Z_1, Z_2, Z_3, \dots независимы и одинаково распределены. Каждая из них принимает значение 0.5 с вероятностью p и значение 4 с вероятностью $1 - p$.

Рассмотрим процесс $X_n = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n$.

1. Является ли процесс Z_n мартингалом при $p = 0.5$?
2. Является ли процесс X_n мартингалом при $p = 0.5$?
3. При каком p процесс Z_n будет мартингалом?
4. При каком p процесс X_n будет мартингалом?

Задача 4

В рамках модели Блэка-Шоулса цена акции подчиняется уравнению $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.

1. Найдите dY_t , если $Y_t = S_t^2$.
2. Запишите формулу для dY_t в полной записи
3. Является ли Y_t мартингалом?

Задача 5

В рамках модели Блэка-Шоулса найдите цену в момент времени 0 бумаги, которая в момент времени $t = 2$ приносит прибыль (или убыток) в размере $X_2 = \ln S_1$. Здесь S_u — цена акции в момент времени u . Параметры модели Блэка-Шоулса равны $\mu = 0.3$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $S_0 = 100$.