

1. Рассмотрим множество  $M$  всех многочленов с натуральными коэффициентами. Например,  $5x^2 + 6x + 7 \in M$ , а  $\cos x \notin M$ .

(a) Найдите мощность множества  $M$ .

(b) (\*) Джейсон Борн хочет узнать все коэффициенты этого многочлена. Джейсон Борн имеет право задавать только вопросы о значениях этого многочлена в натуральных точках по своему выбору. Сколько вопросов ему достаточно задать?

2. У майора Пронина есть несколько множеств:

- $A$  — все подмножества натуральных чисел; например,  $\{5, 6, 11\} \in A$ , а  $\{5, 6.5\} \notin A$ .
- $B$  — все подмножества натуральных чисел, состоящие из одного «куска» подряд идущих чисел; например,  $\{5, 6, 7\} \in B$ , а  $\{5, 6, 11\} \notin B$ .
- $C$  — все подмножества натуральных чисел, состоящие из конечного числа «кусков»; например,  $\{5, 6, 7, 19, 20\} \in C$ , а  $\{2k | k \in \mathbb{N}\} \notin C$ .

Помогите майору Пронину определить, какие из этих множеств равномощны  $\mathbb{N}$ , и какие равномощны  $\mathbb{R}$ .

3. Джон Смит равновероятно выбирает одну из четырех точек на плоскости:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, -3)$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — координаты выбранной точки.

Найдите  $E(Y|X)$ ,  $\text{Var}(Y|X)$ .

4. Шерлок Холмс подбрасывает кубик бесконечное количество раз. Пусть  $X$  — номер броска, когда впервые выпало пять, а  $Y$  — когда впервые выпало шесть.

Найдите  $E(Y|X)$ ,  $\text{Var}(Y|X)$ .

5. Величины  $X$  и  $Y$  имеют совместное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найдите  $E(Y|X)$ ,  $\text{Var}(Y|X)$ .

Секретный хинт:  $f(v) \propto \exp(-\frac{1}{2}v'\Sigma^{-1}v)$ .

6. Джеймс Бонд подбрасывает правильную монетку 30 раз. Величина  $X$  — количество орлов при первых 20 бросках,  $Y$  — количество орлов при последних 20 бросках.

Найдите  $E(X|Y)$ ,  $E(Y|X)$ ,  $\text{Var}(Y|X)$ .