

Конспект лекции 6.12.16

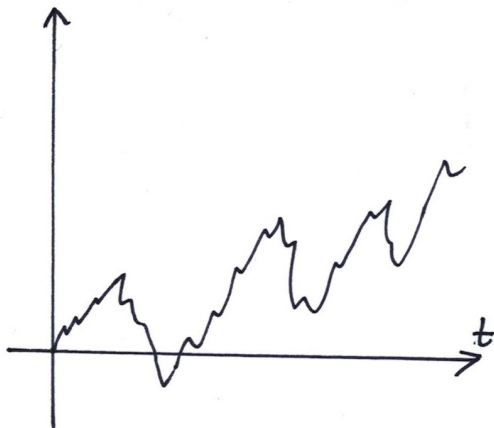
???

Свойства Винеровского процесса, масштабирование, инверсия, стохастический интеграл.

Свойства винеровского процесса

Рассмотрим свойства Винеровского процесса на примерах.

Рассмотрим Винеровский процесс W_t .



Упражнение 1

$$X_t = -W_t$$

Является ли X_t винеровским процессом?

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma((Y_s))_{s \leq t}$;

Проверим свойства винеровского процесса.

- 1) $X(0)=0$;
- 2) $P(\text{траектория } X_t \text{ непрерывна})=1$;
- 3) $X_t - X_s$ не зависит от \mathcal{F}_s ;
- 4) $X_t - X_s \sim N(0; t - s)$;
- 5) X_t измерим относительно \mathcal{F}_t

Упражнение 2

$$Y_t = W_{8+t} - W_8$$

Является ли Y_t винеровским процессом?

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma((Y_s))_{s \leq t}$;

Проверим свойства винеровского процесса.

- 1) $Y(0) = 0$;
- 2) $P(\text{траектория } Y_t \text{ непрерывна})=1$;
- 3) $Y_t - Y_s = W_{8+t} - W_8 - (W_{8+s} - W_8) = W_{8+t} - W_{8+s}$;
- $\mathcal{H}_t = \sigma((W_s))_{s \leq t}$
- $\mathcal{F}_t = \sigma((Y_s))_{s \leq t} = \sigma(W_{8+t} - W_8)_{s \leq t}$
- $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{8+s}$

Сигма-алгебра \mathcal{F}_{8+s} меньше, чем сигма-алгебра \mathcal{F}_s

- 4) $Y_t - Y_s = W_{8+t} - W_8 - (W_{8+s} - W_8) = W_{8+t} - W_{8+s} + W_8 \sim N(0, t - s)$;
- 5) Y_t измерим относительно \mathcal{F}_t

Независимость величин

Случайные величины A и B независимы, если $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$;

Независимость сигма-алгебр \mathcal{F} и \mathcal{H}

$$\forall F \in \mathcal{F} \text{ и } \forall H \in \mathcal{H}$$

$$p(F \cap H) = p(F) \cdot p(H);$$

Независимость случайной величины X и сигма-алгебры \mathcal{F} :

$(X \leq t)$ и \mathcal{F} - независимы;

$X = \sigma(x \leq t)$ и \mathcal{F} независимы;

Масштабирование

$$Z_t = \alpha W_{2t}$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma((Z_s))_{s \leq t};$$

Найти α такое, чтобы Z_t был Винеровским процессом.

Проверим свойства:

$$1) Z(0)=0;$$

$$2) P(\text{траектория } Z_t \text{ непрерывна})=1;$$

$$3) Z_t - Z_s \text{ не зависит от } \mathcal{F}_s \text{ (независимость от прошлого);}$$

$$4) \text{Нормальность: } Z_t - Z_s = \alpha(W_{2t} - W_{2s}) \sim N(0; 2t - 2s); \text{ (Цель: } Z_t - Z_s \sim N(0; t - s));$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$5) X_t \text{ измерим относительно } \mathcal{F}_t$$

Смысл свойства: сжатие по горизонтали в 2 раза, по вертикали в $\sqrt{2}$ раз.

Инверсия

$$R_t = \begin{cases} 1, & \text{при } t = 0 \\ f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}}, & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Найдите $f(t)$ такую, что R_t — Винеровский процесс

$$1) R(0)=0;$$

$$2) \text{Траектория непрерывна;}$$

$$f(0) = 0;$$

$$f(t) \text{ непрерывна;}$$

$$3) \text{Нормальность распределения}$$

$$R_t \sim N(0; t)$$

$$R_t - R_s \sim N(0; t - s)$$

$$f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}} \sim N(0; \frac{1}{t})$$

$$\text{var}(f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}}) = f^2(t) \cdot \frac{1}{t} = t$$

$$f^2(t) = t^2$$

$$f(t)=t$$

$$4) \text{Независимость от прошлого;}$$

$$5) R_t \text{ измерим относительно } \mathcal{F}_t$$

Геометрическое понимание свойства: инвертирует всю историю и упаковывает ее в интервал $[0;1]$;

$$R_1 = W_1$$

$$R_2 = 2W_{\frac{1}{2}}$$

$$R_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}W_2$$

$$\text{Упражнение}$$

$$E(W_4|W_7) = \frac{4}{7}W_7$$

Применим инверсию

$$W_4 = 4R_{\frac{1}{4}}$$

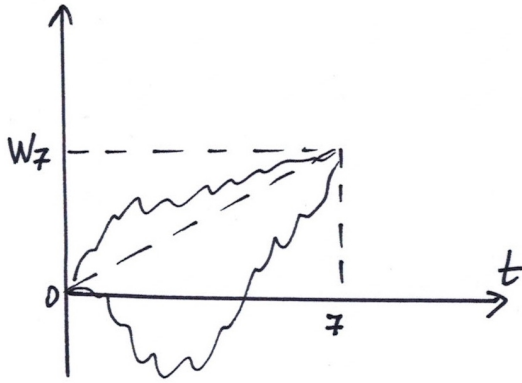
$$W_7 = 7R_{\frac{1}{7}}$$

$$E(4R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}}) = 4E(R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}}) = 4R_{\frac{1}{7}} = \frac{4}{7}W_7$$

$$E(4R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}}) - \text{В данном случае мы можем не обращать внимание на семерку внутри условия.}$$

Зная величину, умноженную на 7, мы можем вычислить значение самой величины. Например, нам не важно, в каких единицах измерения мы знаем температуру воздуха: мы понимаем истинное значение и в градусах Цельсия, и в градусах Фаренгейта.

Рассмотрим следующий пример:



Сравним дисперсии: $\text{var}(W_3|W_7)$ и $\text{var}(W_6|W_7)$. Какая дисперсия будет больше? Ближе к концу интервала дисперсия будет ниже ($\text{var}(W_6|W_7)$). Максимальная дисперсия: $\text{var}(W_{3.5}|W_6)$ (середина интервала).

Мы знаем, что в нуле значение было, нулевым, а также знаем значение в конце. Точность в середине интервала меньше (выше дисперсия).

Стохастический интеграл

$$\int_a^b A_t dB_t$$

- прибыль инвестора за период времени от a до b ;

B_t - цена акции

A_t - количество акций

Пример:

$$\int_0^3 8 dt = 8t \Big|_0^3 = 24$$

Изначальное богатство: $8 \cdot 0$

Конечное богатство: $8 \cdot 3$

Прибыль: конечное богатство - начальное богатство = 24.

Упражнение 1

W_t - Винеровский процесс;

$$X_t = \begin{cases} 7, & \text{при } t \in [0; 2] \\ W_2, & \text{при } t \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{10} X_t dW_t$$

До второго момента:

$$\int_0^2 X_t dW_t$$

Стохастическая величина: изначальное богатство: 7 акций по W_0 ($W_0 = 0$);

Держали до второго момента, потом докупили или продали.

Докупили ($W_2 - 7$) по цене W_2 , потратили на это $W_2 \cdot (W_2 - 7)$.

Десятый момент времени: Конечное богатство = $W_2 \cdot W_{10}$;

Прибыль: Конечное богатство - Начальное богатство - Расходы на покупку.

$$I = W_2 \cdot W_{10} - 7 \cdot 0 - W_2 \cdot (W_2 - 7) = W_2 \cdot W_{10} - W_2^2 + 7W_2.$$

$$E(W_2 \cdot W_{10}) = 2;$$

$$E(W_2^2) = 2;$$

$$E(7W_2) = 0;$$

$$E(I) = 0.$$

Упражнение 2

Пусть $X_1; X_2; X_3 \dots \rightarrow X$;

1) $X_1; X_2; X_3 \dots X \in L^2$;

$$E(X_1^2) < \infty;$$

$$E(X_L^2) < \infty;$$

Множество случайных величин, у которых конечное ожидание квадрата.

$$2) E((X_i - X)^2) \rightarrow 0$$

$$X_1 \sim N(5; 1);$$

$$X_2 \sim N(5; \frac{1}{2});$$

$$X_3 \sim N(5; \frac{1}{3});$$

$$X_n \sim N(5; \frac{1}{n});$$

Сходится ли X_n к чему-то?

Догадка: X_n сходится к 5.

Проверка по определению:

$$E((X_n - 5)^2) = \text{var}(X_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Доказали: сходится к константе 5.

Упражнение на дом:

W_t - Винеровский процесс;

$$X_1 = W_{\frac{1}{n}} - W_0;$$

$$X_2 = W_{\frac{2}{n}} - W_{\frac{1}{n}};$$

$$\text{Найти: } \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow ? \text{ (в L2)}$$