

1. Рассмотрим множество M всех многочленов с натуральными коэффициентами. Например, $5x^2 + 6x + 7 \in M$, а $\cos x \notin M$.

(a) Найдите мощность множества M .

(b) (*) Джейсон Борн хочет узнать все коэффициенты этого многочлена. Джейсон Борн имеет право задавать только вопросы о значениях этого многочлена в натуральных точках по своему выбору. Сколько вопросов ему достаточно задать?

2. У майора Пронина есть несколько множеств:

- A — все подмножества натуральных чисел; например, $\{5, 6, 11\} \in A$, а $\{5, 6.5\} \notin A$.
- B — все подмножества натуральных чисел, состоящие из одного «куска» подряд идущих чисел; например, $\{5, 6, 7\} \in B$, а $\{5, 6, 11\} \notin B$.
- C — все подмножества натуральных чисел, состоящие из конечного числа «кусков»; например, $\{5, 6, 7, 19, 20\} \in C$, а $\{2k | k \in \mathbb{N}\} \notin C$.

Помогите майору Пронину определить, какие из этих множеств равномощны \mathbb{N} , и какие равномощны \mathbb{R} .

3. Джон Смит равновероятно выбирает одну из четырех точек на плоскости: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, -3)$. Пусть X и Y — координаты выбранной точки.

Найдите $E(Y|X)$, $\text{Var}(Y|X)$.

4. Шерлок Холмс подбрасывает кубик бесконечное количество раз. Пусть X — номер броска, когда впервые выпало пять, а Y — когда впервые выпало пять два раза подряд.

Найдите $E(Y|X)$, $\text{Var}(Y|X)$.

5. Маша пошла в лес по грибы да по ягоды. Она собирает лисички, шампиньоны и рыжики до тех пор, пока не соберет n грибов. Лисички, шампиньоны и рыжики встречаются в лесу с некоторыми фиксированными вероятностями. Пусть X — количество лисичек, а Y — рыжиков. Известно, что $E(X) = 60$, $E(Y) = 20$, $\text{Var}(X) = 24$.

Найдите $E(Y|X)$, $\text{Var}(Y|X)$.

6. Джеймс Бонд подбрасывает правильную монетку 30 раз. Величина X — количество орлов при первых 20 бросках, Y — количество орлов при последних 20 бросках.

Найдите $E(X|Y)$, $E(Y|X)$, $\text{Var}(Y|X)$.