Конспект лекции 20.12.16

Аня Терещенко

Упражнения по стохастическому анализу

Упражнение 1

Рассмотрим модель Блэка-Шоулза
$\mu = 0.2$
$r = 0.1$
$\delta = 0.1$
Найти вероятности:

1. $\mathrm{P}(W_2 > 0)$
2. $\widetilde{\mathrm{P}}(W_2 > 0)$
3. $\mathrm{P}(\widetilde{W_2} > 0)$
4. $\widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{W_2} > 0)$

Сразу можно сказать, что в пункте 1) и 4) ответ равен 0.5,
то есть $\mathrm{P}(W_2 > 0) = 0,5$ и $\widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{W_2} > 0) = 0.5$.
W_2 распределен нормально с математическим ожиданием 0 и дисперсией 2.
$X_2 \sim N(0; 2)$
То есть справа от нуля лежит половина распределения.
А значит, вероятность попадания в правую часть равна 0,5.
$\widetilde{W_t} = W_t + \frac{\mu - r}{\delta}$
2) $\widetilde{\mathrm{P}}(W_2 > 0) = \widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{W_2} - \frac{0.2-0.1}{0.1} \cdot 2 > 0) = \widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{W_2} > 2) = \widetilde{\mathrm{P}}(N(0;1) > \frac{2}{\sqrt{2}}) = 1 - F(1.4142135)$
Относительно р процесс W_t- броуновское движение.
Относительно $\widetilde{\mathrm{P}}$ процесс $\widetilde{W_t}$- броуновское движение.
4) $\widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{W_2} > 0) = \mathrm{P}(W_2 + \frac{0.2-0.1}{0.1} \cdot 2 > 0) = \mathrm{P}(W_2 > -2) = \mathrm{P}(N(0;1) > -\sqrt{2}) = F(1.41)$,
где F - функция распределения для $\mathcal{N}(0;1)$.

Пусть $S_0 = 100$

Найти:

1. $\mathrm{P}(S_1 > 110)$
2. $\widetilde{\mathrm{P}}(S_1 > 110)$
3. $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(S_1)$
4. $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(S_1)$

$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\delta^2}{2}) \cdot t + \delta W_t}$
$\mathrm{P}(S_1 > 110) = \mathrm{P}(S_0 e^{(0.2 - \frac{0.01}{0.2}) \cdot 1 + 0.1 W_1} > 110) = \mathrm{P}(100 e^{0.195 + 0.1 \cdot W_1} > 110) = \mathrm{P}(e^{0.195 + 0.1 \cdot W_1}) > 1.1) = \mathrm{P}(e^{0.195 + 0.1 \cdot W_1} > e^{\ln 1.1}) = \mathrm{P}(0.195 + 0.1 \cdot W_t > \ln 1.1) = \mathrm{P}(W_1 > \frac{\ln 1.1 - 0.195}{0.1}) = 1 - F(\frac{\ln 1.1 - 0.195}{0.1}) = 0.84$
$W_1 \sim N(0;1)$
$W_1 = \widetilde{W_1} - \frac{0.2-0.1}{0.1}$
$\mathrm{E}_{\mathrm{P}}(S_1) = \mathrm{E}(S_0 e^{(\mu - \frac{\delta^2}{2}) \cdot t + \delta W_t}) = \mathrm{E}(100 e^{(0.2 - \frac{0.01}{0.2}) \cdot 1 + 0.1 W_t}) = 100 e^{0.195} \, \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(e^{0.1 W_1})$
Если $W_1 \sim \mathcal{N}(\mu; \delta^2)$,
то $\mathrm{E}(e^{\alpha X}) = e^{\alpha \mu} + \frac{\alpha^2 \delta^2}{2}$
Так как $W_1 \sim \mathcal{N}(0; 1)$,
то $100 e^{0.195} \, \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(e^{0.1 W_1}) = 100 e^{0.195} e^{0.1 \cdot 0 + \frac{0.1^2 \cdot 1}{2}} = 100 e^{0.2}$

$\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(S_1)$
Свойство $\widetilde{\mathrm{P}}$
$X_0 = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(e^{-rt}X_t|\mathcal{F}_0)$
Цена акции S_1 определяется броуновским движением и от прошлого не зависит (не зависит от $\mathcal{F}_0$)
$S_0 = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(e^{-r\cdot 1}S_1|\mathcal{F}_0) = e^{-0.1}E_{\mathrm{P}}(S_1)$
$\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(S_1) = 100e^{0.1}$

Упражнение 2

В рамках модели Блэка-Шоулза оцените в T=0 актив, который в момент времени T стоит $X_T = \ln S$
$\widetilde{W_t} = W_t + \frac{\mu - r}{\delta}$
$X_0 = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(e^{-rT}\cdot X_T|\mathcal{F}_0) = e^{-rT}\cdot \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\ln S_T|\mathcal{F}_0) = e^{-rt}\cdot \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\ln(S_0\cdot e^{(\mu-\frac{\delta^2}{2})\cdot T+\delta\cdot W_T}|\mathcal{F}_0) = e^{-rT}(\ln S_0 + (\mu - \frac{\delta^2}{2})\cdot T + \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\delta W_t|\mathcal{F}_0))$
$\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\delta W_t|\mathcal{F}_0) = \mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\delta\cdot(\widetilde{W} - \frac{\mu-r}{\delta}\cdot T) = \delta(\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\widetilde{W_T}) - \frac{\mu-r}{\delta}\cdot T) = -\delta\cdot(\mu - r)\cdot T,$
$\widetilde{W_T} \sim \mathcal{N}(0; T - s)$
следовательно $\mathrm{E}_{\widetilde{\mathrm{P}}}(\widetilde{W_T}) = 0$
$X_0 = e^{-rT}(\ln S_0 + (\mu - \frac{\delta^2}{2})\cdot T - T(\mu - r)$
$X_0 = e^{-rT}(\ln S_0 - T\cdot\frac{\delta^2}{2} + rT)$