

1. Для процесса  $Y_t = W_t^5 + tW_t$  найдите  $dY_t$  и выпишите ответ в полной форме записи.
2. Для процесса  $Y_t = f(t) \exp(4W_t)$  найдите  $dY_t$  и подберите функцию  $f(t)$  так, чтобы процесс  $Y_t$  был мартингалом.
3. Найдите  $E(\int_0^t s W_s dW_s)$  и  $\text{Var}(\int_0^t s W_s dW_s)$
4. Для броуновского движения  $W_t$  найдите  $E(W_5(W_6 - W_3))$ .
5. Find  $\text{Var} \left( \int_0^t W_s ds \right)$ .

You may use the following guiding steps:

- (a) Find  $d(tW_t)$  in short and full form
  - (b) Find  $E \left( 2tW_t \int_0^t s dW_s \right)$
  - (c) Find  $E \left( \left( \int_0^t s dW_s \right)^2 \right)$
  - (d) Find  $E \left( \int_0^t W_s ds \right)$
  - (e)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  :)
6. Researcher Veniamin throws a fair dice until 6 appears. Let denote by  $T$  the total number of throws and by  $N$  the number of throws when 5 appeared. Find  $E(N|T)$ ,  $\text{Var}(N|T)$ ,  $E(N)$ ,  $\text{Var}(N)$  and  $E(T|N)$ .

The joint distribution of the random vector  $(X, Y)$  is given by its probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{x-y}, & \text{for } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where  $c$  is a normalization constant. Find  $E(X | Y)$ .

7. В рамках модели Блэка-Шоулза предполагается, что  $S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$ . Переходи к риск-нейтральной вероятности сопровождается заменой  $\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ . В рамках данных обозначений рассчитайте текущую стоимость актива, который через  $T$  лет стоит  $\ln S_T$ .