Конспект лекции 20.12.16

Яцушко Кирилл

Перед тем, как мы перейдём к выводу модели Блэка-Шоулза, рассмотрим 3 мелких сюжета. Эти сюжеты содержат промежуточные вычисления, результаты которых будут использоваться в дальнейшем.

1. Три мелких сюжета

1.1. Первый мелкий сюжет

Вычислим значение величины $\mathbb{E}[e^{\alpha x}]$, где $X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Есть два способа решить эту задачу.

1.1.1. Способ первый

Стандартизируем нашу случайную величину:

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = z \sim N(0;1)$$
$$x = z\sigma + \mu$$

Вычислим значение матожидания "честно", с помощью интеграла:

$$\mathbb{E}[e^{\alpha x}] = \mathbb{E}[e^{\alpha(\sigma z+\mu)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha\sigma z+\alpha\mu}] = e^{\alpha\mu}\times\mathbb{E}[e^{\alpha\sigma z}] = e^{\alpha\mu}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\sigma z} f(z)dz = e^{\alpha\mu}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\sigma z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz =$$

$$= e^{\alpha\mu}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z^2-2\alpha\sigma z+\alpha^2\sigma^2)+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}dz = e^{\alpha\mu+\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-\alpha\sigma)^2}dz =$$

$$= (\text{введём замену } \tilde{z} = z-\alpha\sigma) = e^{\alpha\mu+\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\tilde{z}^2}{2}}d\tilde{z} = e^{\alpha\mu+\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$$

1.1.2. Способ второй

Перефразируем задачу в терминах броуновского движения: необходимо вычислить $\mathbb{E}[e^{\alpha(\mu+W_t)}]$, где $W_t \sim N(0;t)$, $\mu + W_t \sim N(\mu;t)$. Решим эту задачу в рамках небольшого упражнения. Держим в голове идею о том, что матожидание удобно считать для процессов, являющихся мартингалами.

Упражнение

1) $Y_t = e^{\alpha(\mu+W_t)}$. Найти dY_t, записать в краткой и в полной форме записи.
2) Проверить, является ли Y_t мартингалом.
3) Придумать такую $f(t)$, чтобы $Z_t = f(t)\times Y_t$ был мартингалом.

Решение

1) $dY_t = \alpha e^{\alpha(\mu+W_t)}dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha(\mu+W_t)}dW_{t^2}$.
Таким образом, краткая форма записи:

$$dY_t = \alpha e^{\alpha(\mu+W_t)}\,dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha(\mu+W_t)}\,dt$$

А в полной форме записи:

$$Y_t = Y_0 + \int\limits_0^t \alpha e^{\alpha(\mu+W_s)}dW_s + \int\limits_0^t \frac{\alpha^2}{2}e^{\alpha(\mu+W_s)}ds$$

2) Какие у нас есть способы проверить, что процесс является мартингалом? Первый способ — это по определению проверить, что $\mathbb{E}[Y_{t+s} \mid \mathcal{F}_t] = Y_t$. Второй способ — это использовать свойство интеграла Ито:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t A_u dW_u - \text{мартингал}$$

Мы видим, что не присутствуй в полной форме записи выделенная красным цветом часть, наш процесс был бы мартингалом. Но сейчас он не мартингал. ¯_(ツ)_/¯

3) $dZ_t = d(f(t) \times Y_t) = f_t' Y_t dt + f(t) dY_t + 0 \times \frac{1}{2}(dY_t)^2 = f_t' Y_t dt + f(t)(\alpha e^{\alpha(\mu+W_t)} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha(\mu+W_t)} dt)$

Условие, чтобы Z_t был мартингалом:

$$f_t' Y_t dt + f(t)(\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha(\mu+W_t)} dt) = 0$$

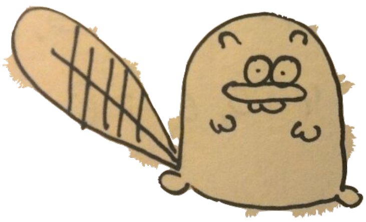
$$f_t' + f(t)\frac{\alpha^2}{2} = 0$$

$$f_t' = -f(t)\frac{\alpha^2}{2}$$

$$f(t) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t}$$

Таким образом, мы выяснили, что процесс $Z_t = e^{-\frac{\alpha^2}{2}t} \times e^{\alpha(\mu+W_t)}$ является мартингалом. Действительно: $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_0] = e^{\alpha\mu}$. Если заменить Z_t и провести небольшие преобразования, то получим: $\mathbb{E}[e^{\alpha(\mu+W_t)}] = e^{\alpha\mu + \frac{\alpha^2 t}{2}}$.

Мудрый стохастический бобр без труда заметил, что полученный нами результат совпал с результатом, который мы получили первым способом. А вы заметили?



1.2. Второй мелкий сюжет

Необходимо выразить с помощью $F(t)$ (функция распределения N(0;1)) $P(\sigma W_t > a)$. Делается это следующим образом:

$$P(\sigma W_t > a) = P(\frac{W_t}{\sqrt{t}} > \frac{a}{\sigma\sqrt{t}}) = 1 - P(\frac{W_t}{\sqrt{t}} \le \frac{a}{\sigma\sqrt{t}}) = 1 - F(\frac{a}{\sigma\sqrt{t}})$$

1.3. Третий мелкий сюжет или Теорема Гирсанова

Прежде чем сформулировать теорему Гирсанова, рассмотрим два упражнения.

Упражнение

Дано распределение, заданное таблицей:

Y	0	1	2
вероятность P	a	b	1-a-b

1) Можно ли подобрать вероятности таким образом, чтобы $Y \sim Bin(n = 2, p = \frac{1}{3})$?
2) Можно ли подобрать вероятности таким образом, чтобы $Y \sim Bin(n = 4, p = \frac{1}{2})$?

Решение

1) Можно. $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{4}{9}$.
2) Нельзя.

Упражнение

Дано распределение, заданное таблицей:

	Y_2 = **- 2**	Y_2 = **0**	Y_2 = **2**
Y_1 = **-1**	a	0,4 - a	0,1
Y_1 = **1**	0,2	b	0,3-b

Можно ли подобрать a и b так, чтобы случайный процесс (Y_1, Y_2) был мартингалом? Если да, то подберите эти значения.

Решение

Заметим, что $\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1] = Y_1$. Тогда:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = -1] = -1 \\ \mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = 1] = 1 \end{cases}$$

$$P(Y_1 = -1) = 0,5$$
$$\mathbb{E}[Y_2 \mid Y_1 = -1] = -2 \times \frac{a}{0,5} + 0 \times \frac{0,4 - a}{0,5} + 2 \times \frac{0,1}{0,5} = -1$$
$$-2a + 0,2 = -0,5$$
$$-2a = -0,7$$
$$a = 0,35$$
$$-2 \times \frac{0,2}{0,5} + 2 \times \frac{0,3 - b}{0,5} = 1$$
$$-0,4 + 0,6 - 2b = 0,5$$
$$b < 0$$

Мы получили, что **вероятность b должна быть отрицательной**. Такого не бывает, поэтому ответ: нет, подобрать нельзя.

Теорема Гирсанова

Если W_t - броуновское движение для вероятности P, то можно найти такую вероятность $\tilde{P}$, что $Y_t = W_t + \mu t$ будет броуновским движением для вероятности $\tilde{P}$.

2. Модель Блэк-Шоулза

В модели Блэк-Шоулза есть всего два актива:

- Акции с ценой S_t
  - $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
  - $S_t = S_0 \times e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} + \sigma W_t$
- Безрисковые облигации с ценой B_t
  - $dB_t = B_t \times r \times dt$
  - $B_t = B_0 \times e^{rt}$

В этой модели предполагается отсутствие арбитража, отсутствие транзакционных издержек и непрерывность количества активов.

Основное упражнение

Инвестор сейчас находится в моменте времени $t = 0$ и имеет на руках актив, за который в неслучайный момент времени T он получит S_T^2 рублей. Мы обозначим цену актива как X_t. Для этого актива можно сконструировать имплицирующий портфель, в котором будет A_t акций и $\frac{X_t - A_t S_t}{B_t}$ облигаций.

Стоимость такого портфеля в произвольный момент времени будет выражаться как:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_u dS_u + \int_0^t \frac{X_u - A_u S_u}{B_u} dB_u$$

Нашей задачей является поиск справедливой цены X_0 в начальный момент времени.

Упражнение

В этом упражнении мы изучим, как изменяется во времени цена имплицирующего портфеля. Нужно найти:

1) $dX_t - ?$
2) $d(e^{-rt}X_t) - ?$

Решение

$$dX_t = A_t dS_t + \frac{X_t - A_t S_t}{B_t} dB_t = A_t dS_t + (X_t - A_t S_t) r dt$$

$$d(e^{-rt}X_t) = e^{-rt}dX_t - rX_t e^{-rt}dt = e^{-rt}(A_t dS_t + (X_t - A_t S_t)rdt - rX_t dt) = e^{-rt}(A_t dS_t - A_t S_t r dt) =$$
$$= A_t e^{-rt}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t - S_t r dt) = S_t A_t e^{-rt}(\mu dt + \sigma dW_t - rdt) = S_t A_t e^{-rt}((\mu - r)dt + \sigma dW_t)$$

Заметим, что процесс $Y_t = e^{-rt}X_t$ не является мартингалом. Воспользуемся теоремой Гирсанова.

$$dY_t = e^{-rt} S_t A_t \sigma (\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW)$$

Рассмотрим выражение в скобках.

$$d\tilde{W} = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW$$

$$\tilde{W}_t = \tilde{W}_0 + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} du + \int_0^t dW_u$$

$$\tilde{W}_t = \tilde{W}_0 + \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$$

Вопрос в следующем: является ли процесс $\tilde{W}_t$ броуновским движением? Вообще говоря, нет. Но теорема Гирсанова говорит, что найдется такая вероятность $\tilde{P}$, что он будет броуновским движением. Тогда относительно вероятности $\tilde{P}$ процесс $dY_t = e^{-rt} S_t A_t \sigma d\tilde{W}_t$ будет являться броуновским движением. Таким образом, мы доказали, что:

$$\forall t X_0 = \mathbb{E}[e^{-rt}X_t \mid \mathcal{F}_0]_{\tilde{P}}$$

Пользуясь этим фактом, мы без труда ответим на изначально поставленный вопрос:

$$X_0 = \mathbb{E}[e^{-rT}X_T \mid \mathcal{F}_0]_{\tilde{P}} = e^{-rT}\mathbb{E}[S_t^2 \mid \mathcal{F}_0] = e^{-rT} \times \mathbb{E}[S_0^2 e^{2(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} + 2\sigma W_T \mid \mathcal{F}_0] =$$
$$= e^{-rT} S_0^2 e^{2(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}[e^{2\sigma(\tilde{W}_T - \frac{\mu - r}{\sigma}T)} \mid \mathcal{F}_0] = e^{-rT} S_0^2 e^{2\mu T - \sigma^2 T} e^{-2(\mu - r)T} \mathbb{E}[e^{2\sigma \tilde{W}_t} \mid \mathcal{F}_0] =$$
$$= e^{rt} S_0^2 e^{-\sigma^2 T} \mathbb{E}[e^{2\sigma \tilde{W}_T}] = S_0^2 e^{rT - \sigma^2 T} e^{2\sigma \times 0 + \frac{4\sigma^2 T}{2}} = S_0^2 e^{rT + \sigma^2 T} = X_0$$