

Конспект лекции 13.12.16

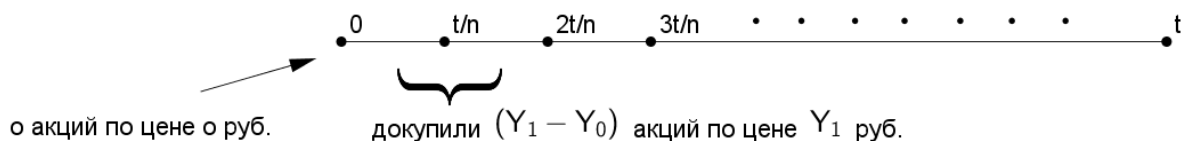
Живайкина Александра

Упражнение 1. Взять стохастический интеграл в непрерывном времени:

$$\int_0^t W_u dW_u$$

Это первый и единственный стохастический интеграл, который мы будем брать по определению, так как взятие интеграла по определению всегда наиболее долгий и трудоемкий способ решения.

Разделим интервал от 0 до t на n частей, а затем устремим $n \rightarrow \infty$.



Для удобства переобозначим:

$$\begin{aligned} Y_1 &= W_{\frac{t}{n}} \\ Y_2 &= W_{\frac{2t}{n}} \\ &\vdots \\ Y_{n-1} &= W_{\frac{(n-1)t}{n}} \\ Y_n &= W_t \end{aligned}$$

Чтобы решить поставленную задачу, сначала необходимо найти дискретную версию (I_n) исходного стохастического интеграла, а потом вычислить предел I_n в смысле L^2 при $n \rightarrow \infty$:

$$I_n \xrightarrow{L^2} I$$

• Дискретная версия интеграла записывается следующим образом:

$$I_n = -0 + Y_n \cdot Y_n - (Y_1 - Y_0) \cdot Y_1 - (Y_2 - Y_1) \cdot Y_2 - \dots - (Y_n - Y_{n-1}) \cdot Y_n$$

где

0 — изначальное богатство

$Y_n \cdot Y_n$ — конечное богатство

$(Y_1 - Y_0) \cdot Y_1 - (Y_2 - Y_1) \cdot Y_2 - \dots$ — затраты на покупку дополнительных акций

Таким образом, получаем, что:

$$I_n = Y_n^2 - \sum_{i=1}^n Y_i \cdot (Y_i - Y_{i-1}) \quad (1)$$

Однако у I_n считать предел не удобно, так как Y_i и $Y_i - Y_{i-1}$ зависимы. Лучше сначала вычислить предел величины J_n , у которой приращения броуновского движения не зависимы, а потом перейти от J_n к I_n .

J_n записывается следующим образом:

$$J_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1})^2 \quad (2)$$

- Возьмем предел величины J_n в смысле L^2 при $n \rightarrow \infty$.

Обратим внимание, что $Y_i - Y_{i-1}$ показывает, насколько броуновское движение изменилось за данный промежуток времени $\frac{t}{n}$. Все эти интервалы времени не пересекаются, поэтому разницы броуновского движения не зависимы.

Заметим, что $Y_i - Y_{i-1}$ имеет нормальный закон распределения с параметрами:

$$Y_i - Y_{i-1} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t}{n}\right)$$

Математическое ожидание и дисперсия J_n равны:

$$E(J_n) = E\left(\sum (Y_i - Y_{i-1})^2\right) = \sum E\left((Y_i - Y_{i-1})^2\right) = n \cdot \text{Var}(Y_i - Y_{i-1})^2 = n \cdot \frac{t}{n} = t$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(J_n) &= n \cdot \text{Var}\left((Y_i - Y_{i-1})^2\right) = \langle \text{сделаем единичную дисперсию} \rangle = n \cdot \text{Var}\left(\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\sqrt{\frac{t}{n}}}\right)^2 \cdot \frac{t}{n}\right) = \\ &= n \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2 \cdot \text{Var}\left((\mathcal{N}(0; 1))^2\right) = \frac{t^2}{n} \cdot \chi^2(1) = \frac{t^2}{n} \cdot 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ последовательность $J_n \xrightarrow{L^2} t$.

- Выразим I_n через J_n .

Раскроем скобки в (1) и (2) уравнениях:

$$\begin{aligned} I_n &= Y_n^2 - \sum_{i=1}^n Y_i^2 + \sum_{i=1}^n Y_i \cdot Y_{i-1} \\ J_n &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 + \sum_{i=1}^n Y_{i-1}^2 - 2 \sum_{i=1}^n Y_i \cdot Y_{i-1} = 2 \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n Y_i \cdot Y_{i-1} - Y_n^2 \end{aligned}$$

Таким образом, связь между I_n и J_n равна:

$$J_n = -2I_n + Y_n^2$$

Сделаем обратную замену:

$$J_n = -2I_n + W_t^2 \quad (3)$$

- Устремляем левую и правую часть уравнения (3) в L^2 .

Мы знаем, что $J_n \xrightarrow{L^2} t$, $I_n \xrightarrow{L^2} I$, а W_t^2 от n не зависит. Следовательно, получаем:

$$t = -2I + W_t^2$$

$$I = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

Таким образом, стохастический интеграл в непрерывном времени имеет вид:

$$I = \int_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

Важно помнить, что из-за случайности стохастические интегралы нельзя брать как обычные интегралы.



$$\int_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - W_0^2}{2} = \frac{W_t^2}{2} - \text{это неправильно.}$$

Свойства стохастического интеграла

Введем несколько условий, которые всегда будем предполагать в дальнейшем:

1) Процесс (X_t) адаптирован к фильтрации (\mathcal{F}_t)

$$2) \int_0^t E(X_u^2) du < \infty$$

Перейдем к свойствам:

$$1) \int_0^t (aX_u + bY_u) dW_u = a \int_0^t X_u dW_u + b \int_0^t Y_u dW_u$$

$$2) \int_a^b X_u dW_u + \int_b^c X_u dW_u = \int_a^c X_u dW_u$$

$$3) I_t = \int_0^t X_u dW_u - \text{это мартингал}$$

Следовательно:

$$E(I_{t+\delta} | \mathcal{F}_t) = I_t \Rightarrow E(I_{t+\delta}) = I_t$$

Например, если $t = 0, \delta = t$, то

$$E(I_t) = E(I_0) = 0 \Rightarrow \text{В любой момент времени математическое ожидание одинаково}$$

$$4) \text{cov} \left(\int_0^t X_u dW_u, \int_0^t Y_u dW_u \right) = \int_0^t E(X_u \cdot Y_u) du - \text{ковариация стохастических интегралов равна обычному интегралу}$$

$$\text{В частном случае: } \text{Var} \left(\int_0^t X_u dW_u \right) = \int_0^t E(X_u^2) du$$

5) Лемма Ито

Версии по сложности:

→ лайт-версия

→ рабочая версия

→ версия «попонтиться»

Формы записи:

→ полная

→ сокращенная

Определение. Сокращенная форма записи интегралов

Процесс вида:

$$R_t = R_0 + \int_0^t X_u dW_u + \int_0^t Y_u du, \text{ где } R_0 - \text{это константа,}$$

называется процессом Ито и кратко записывается:

$$dR_t = X_t dW_t + Y_t dt$$

Сокращенную форму записи никак нельзя интерпретировать, так как dR_t, dW_t сами по себе не существуют.

Например, в математике из условной формы записи $x^2 = 0(x)$ и $x^3 = 0(x)$ не следует то, что $x^2 = x^3$

Упражнение 2. Дана краткая форма записи: $dX_t = W_t dW_t + 7dt$

Записать процесс в полной форме.

Решение: $X_t = X_0 + \int_0^t W_u dW_u + \int_0^t 7du$

Упражнение 3. Переформулировать свойство 4) (про ковариации) в краткой записи.

Решение: $\text{cov}(X_t dW_t, Y_t dW_t) = E(X_t, Y_t) dt$

Лемма Ито (лайт-версия)**• в краткой форме записи**

Если $Y_u = f(W_u, u)$ и f'_{ww}, f'_u — непрерывные функции, то $dY_t = f'_w dW_t + f'_t dt + \frac{1}{2} f''_{ww} dt$

• в полной форме записи

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f'_w(W_u, u) dW_u + \int_0^t f'_u(W_u, u) du + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{ww}(W_u, u) du$$

Упражнение 4. Для каждого пункта найти dY_t и выписать утверждение в полной форме.

a) $Y_t = W_t^2$

Решение: $dY_t = 2W_t dW_t + 0dt + \frac{1}{2} \cdot 2dt = 2W_t dW_t + dt$

$$Y_t = Y_0 + 2 \int_0^t W_u dW_u + \int_0^t du$$

$$W_t^2 = 0 + 2 \int_0^t W_u dW_u + t \Rightarrow \int_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

b) $Y_t = W_t \cdot t$

Решение: $dY_t = t dW_t + W_t dt$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t u dW_u + \int_0^t W_u du$$

$$W_t \cdot t = \int_0^t u dW_u + \int_0^t W_u du$$

c) $Y_t = \cos(W_t) - t$

Решение: $dY_t = -\sin(W_t)dW_t - dt - \frac{1}{2}\cos(W_t)dt$

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t \sin(W_u)dW_u - \int_0^t du - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(W_u)du$$

$$\cos(W_t) - t = \cos(W_0) - \int_0^t \sin(W_u)dW_u - t - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(W_u)du = 1 - \int_0^t \sin(W_u)dW_u - t - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(W_u)du$$

d) $Y_t = W_t^4$

$$dY_t = 4W_t^3 dW_t + 6W_t^2 dt$$

$$Y_t = W_t^4 = 4 \int_0^t W_u^3 dW_u + 6 \int_0^t W_u^2 du$$

e) $Y_t = t^2 \cdot W_t^3$

$$dY_t = 3t^2 \cdot W_t^2 dW_t + 2tW_t^3 dt + 3t^2 W_t dt$$

$$Y_t = t^2 \cdot W_t^3 = 3 \int_0^t u^2 \cdot W_u^2 dW_u + 2 \int_0^t u W_u^3 du + 3 \int_0^t u^2 \cdot W_u du$$

c), d), e) – решить дома

Способ запомнить формулировку леммы Ито в краткой условной записи
(не доказательство и не буквальное равенство)

Необходимо разложить в ряд Тейлора до второго порядка и упростить по принципу:

$$\begin{aligned} dW \cdot dW &= dt \Rightarrow \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1})^2 \xrightarrow{L^2} t, \text{ при } n \rightarrow \infty \\ dt \cdot dt &= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\Delta t)^2 \xrightarrow{L^2} 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \\ dt \cdot dW &= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \Delta t (Y_i - Y_{i-1}) \xrightarrow{L^2} 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Рабочая лемма Ито

Если $dX_t = A_t dW_t + B_t dt$ и $Y_t = f(X_t, t)$ и f''_{xx}, f'_t – непрерывные функции, то:

$$dY_t = f'_x dX_t + f'_t dt + \frac{1}{2} \left(f''_{xx} dX \cdot dX + f''_{xt} dX \cdot dt + f''_{tt} dt \cdot dt \right) = \boxed{f'_x dX + f'_t dt + \frac{1}{2} f''_{xx} \cdot A_t^2 dt}$$

Упражнение 5. Найти dY_t и восстановить полную форму записи.

a) $dX_t = W_t^2 \cdot dW_t + W_t \cdot dt$

$$Y_t = X_t^2 \cdot t \Rightarrow Y_0 = 0$$

Решение: $dY_t = 2X_t \cdot t dX + X_t^2 dt + \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot W_t^4 dt = 2X_t \cdot t \cdot (W_t^2 \cdot dW_t + W_t \cdot dt) + X_t^2 dt + t \cdot W_t^4 dt$

$$Y_t = 2 \int_0^t X_u \cdot u \cdot W_u^2 dW_u + 2 \int_0^t X_u \cdot u \cdot W_u du + \int_0^t X_u^2 du + \int_0^t u \cdot W_u^4 du$$

$$b) dX_t = \cos(W_t)dW_t + \sin(W_t)dt$$

$$Y_t = X_t^2 \Rightarrow Y_0 = X_0^2$$

$$\text{Решение: } dY_t = 2X_t dX_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos^2(W_t)dt = 2X_t \cdot (\cos(W_t)dW_t + \sin(W_t)dt) + \cos^2(W_t)dt$$

$$Y_t = X_0^2 + 2 \int_0^t X_u \cdot \cos(W_u)dW_u + 2 \int_0^t X_u \cdot \sin(W_u)du + \int_0^t \cos^2(W_u)du$$

Упражнение 6. В модели Блека-Шоулза предполагается, что цена акции S_t подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t dW_t$$

$$Y_t = \ln S_t$$

a) Найти dY_t и восстановить полную форму записи.

Решение:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{S_t} dS_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) \cdot (dS_t)^2 = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} \cdot \delta^2 \cdot S_t^2 dt = \\ &= \frac{1}{S_t} \cdot (\mu S_t dt + \delta S_t dW_t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} \cdot \delta^2 \cdot S_t^2 dt = \mu dt + \delta dW_t - \frac{1}{2} \delta^2 dt \end{aligned}$$

$$Y_t = Y_0 + \mu \int_0^t du + \delta \int_0^t dW_u - \frac{1}{2} \delta^2 \int_0^t du = Y_0 + \mu t + \delta W_t - \frac{\delta^2}{2} t = Y_0 + \delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) t$$

b) Найти S_t в явном виде.

Решение:

$$\ln S_t = \ln S_0 + \delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) t$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp^{\delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) t}$$

Упражнение 7. №5 с пересдачи 2015 года.

$$\begin{cases} dX_t = 8W_t^2 \cdot X_t dt + 4W_t \cdot X_t dW_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

a) Найти dY_t , если $Y_t = \ln X_t$.

Решение:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) \cdot (dX_t)^2 = \frac{1}{X_t} \cdot (8W_t^2 \cdot X_t dt + 4W_t \cdot X_t dW_t) - \frac{1}{2X_t^2} \cdot 16W_t^2 \cdot X_t^2 dt = \\ &= 8W_t^2 dt + 4W_t dW_t - 8W_t^2 dt = 4W_t dW_t \end{aligned}$$

$$Y_t = Y_0 + 4 \int_0^t W_u dW_u = 4 \cdot \frac{W_t^2 - t}{2} = 2(W_t^2 - t)$$

b) Найти X_t .

Решение:

$$\ln X_t = 2(W_t^2 - t)$$

$$X_t = \exp^{2(W_t^2 - t)}$$

Упражнение 8. №3 с пересдачи 2015 года.

Найти: $E(X_t)$ и $Var(X_t)$

Решение:

$$X_t = X_0 + 2 \int_0^t u du + \int_0^t u^2 dW_u = 2016 + t^2 + \int_0^t u^2 dW_u$$

$$E(X_t) = 2016 + t^2$$

$$Var(X_t) = Var\left(\int_0^t u^2 dW_u\right) = \int_0^t E(u^4) du = \int_0^t u^4 du = \left.\frac{u^5}{5}\right|_0^t = \frac{t^5}{5}$$