**Цель**
Сборник задач по стохастическому анализу. Цели:

а) Открытость: bdemeshev.github.io/sc401

б) Задачи под курс стохастического анализа для экономистов

# Содержание



## 1. Счетность множеств и пр.

***Задача* 1.1.** *Какова мощность декартова произведения счетного количества счетных множеств?*
***Задача* 1.2.** *Пусть $A$ — некоторое множество. Пусть $F$ — множество функций, принимающих только значения ноль или один с областью определения $A$. Пусть $M$ — множество всех подмножеств $A$. Равномощны ли $F$ и $M$?*

**Задача 1.3**. *An enemy submarine is somewhere on the number line (consider only integers for this problem). It is moving at some rate (again, integral units per minute). You know neither its position nor its velocity. You can launch a torpedo each minute at any integer on the number line. If the the submarine is there, you hit it and it sinks. You have all the time and torpedoes you want. You must sink this enemy sub — devise a strategy that is guaranteed to eventually hit the enemy sub.*

**Задача 1.4**. *Пусть $A$ — множество всех подмножеств натуральных чисел, а $B$ — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера: $\{5, 6, 178\} \in A$, $01010101010101\ldots \in B$. Сравните мощность множеств $A$ и $B$.*

**Задача 1.5**. *Сравните мощности множеств $A$ и $B$, если $A = \mathbb{Q}$ — рациональные числа, $B = \mathbb{Q}^2$ — пары рациональных чисел.*

**Задача 1.6**. *Сравните мощности множеств $A$ и $B$, если $A = \mathbb{N}$, $B$ — множество бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1.*

**Задача 1.7**. *Сравните мощности множеств $A$ и $B$, если $A = \mathbb{N}$, $B$ — множество подмножеств натуральных чисел.*

**Задача 1.8**. *Назовём две бесконечных вправо последовательности из нулей и единиц «похожими», если они отличаются на конечное количество членов. Это отношение «похожести» разбивает все последовательности на классы похожих последовательностей.*

а) *Какова мощность множества последовательностей похожих на последовательность из одних нулей?*

б) *Какова мощность множества классов похожих последовательностей?*

**Задача 1.9**. *Злобный Дракон поймал бесконечное счётное количество гномов. Расставил их в шеренгу так, что первый видит всех остальных, второй — всех, начиная с третьего гнома, и т.д. Далее Дракон надевает каждому гному либо чёрный, либо белый колпак. Гномы одновременно пытаются угадать цвет своего колпака. Гномы, не угадавшие цвет своего колпака, съедаются Драконом. Есть ли у гномов стратегия, позволяющая им иметь конечные боевые потери при встрече со Злобным Драконом?*

**Задача 1.10**. *В отеле бесконечное счётное количество номеров. Все номера заняты туристами.*

а) *Приехал ещё один турист. Как переразместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?*

б) *Приехало ещё счётное количество туристов. Как переразместить всех постояльцев, чтобы всем хватило места?*

**Задача 1.11**. *Дед Мороз пришёл к детишкам на Новый Год с мешком, в котором счётное количество пронумерованных конфет. Конфеты можно есть только после наступления Нового Года. Ровно за минуту до Нового Года Дед Мороз выдаёт детишкам конфеты номер 1 и 2 и тут же забирает конфету номер 1 обратно. Ровно за пол-минуты — выдаёт конфеты номер 3 и 4 и забирает конфету номер 2. Ровно за четверть минуты — выдаёт конфеты номер 5 и 6 и забирает конфету номер 3. И так далее, ускоряясь, выдаёт из мешка две очередные конфеты и забирает у детишек конфету с наименьшим номером.*

а) *На сколько изменяется количество конфет у детишек за одну операцию дарения-забирания?*

б) *У кого к Новому Году окажется конфета номер 1?*

в) *У кого к Новому Году окажется конфета номер 2015?*

г) *Сколько конфет будет у детишек к Новому Году?*

# 2. Сигма-алгебры и измеримость

**Задача** 2.1. *Игральный кубик подбрасывается один раз. В первый момент времени наблюдатель узнает, выпала ли четная грань или нет. Во второй момент времени наблюдатель дополнительно узнает, выпала ли грань больше двух или нет. В третий момент времени наблюдатель точно узнает, какая грань выпала. Укажите множество элементарных событий и соответствующие три алгебры событий.*

**Задача** 2.2. *Почему алгебра?*

*Значки некоторых операций над множествами ($\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\triangle$, etc) были заменены на привычные значки операций над числами ($+$, $-$, $\cdot$) так, что все условия выполнены:*

а) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

б) $A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$

в) *Уравнение* $A + X = B$ *всегда имеет единственное решение* $X = B - A$

г) *Существуют такие* $1$ *и* $0$, *такие, что:*

   (a) $1 \cdot A = A$

   (b) $0 \cdot A = 0$

   (c) $A + 0 = A$

   (d) $A - 0 = A$

а) *Какие операции над множествами скрыты значками* $+$, $-$, $\cdot$?

б) *Какие множества подразумеваются под* $1$ *и* $0$?

в) *Упростите в этой алгебре выражения* $(A + B)(A - B) + A$, $1 + 1$.

*Комментарий: к сожалению, деление в этой алгебре отсутствует, именно поэтому термин поле (field) некорректен.*

**Задача** 2.3. *Приведите пример алгебры, которая не является* $\sigma$*-алгеброй.*

**Задача** 2.4. *Сколько* $\sigma$*-алгебр можно создать на множестве из 3-х элементов? из 4-х элементов?*

**Задача** 2.5. *Определим* $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i$ *и* $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i$

*Смысл:*

$\liminf_n A_n$ — *произошли все* $A_n$, *кроме быть может конечного числа*

$\limsup_n A_n$ — *произошло бесконечное количество* $A_n$

*Докажите, что* $1_{\liminf_n A_n} = \liminf_n 1_{A_n}$ *и* $1_{\limsup_n A_n} = \limsup_n 1_{A_n}$

**Задача** 2.6. *Пусть* $A$ *и* $B$ — *события. Определим* $C_n = \begin{cases} A, & n = 2k \\ B, & n = 2k+1 \end{cases}$.

*Найдите* $\limsup_n C_n$ *и* $\liminf_n C_n$.

**Задача** 2.7. *Пусть* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. *Найдите* $\liminf_n A_n$ *и* $\limsup_n A_n$.

*Пусть* $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$. *Найдите* $\liminf_n B_n$ *и* $\limsup_n B_n$.

***Задача*** 2.8. *Докажите, что* $\limsup_n A_n = \limsup_n A_{n+k}$ *и* $\liminf_n A_n = \liminf_n A_{n+k}$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$. *Смысл этого утверждения следующий: при вычислении предела последовательности можно проигнорировать миллион-другой членов в ее начале.*
***Задача*** 2.9. *Пусть* $A_n \subseteq B_n$ *для всех* $n \geqslant N$. *Сравните множества:* $\liminf_n A_n$ *и* $\liminf_n B_n$; $\limsup_n A_n$ *и* $\limsup_n B_n$.
***Задача*** 2.10. *Верно ли, что* $\left(\limsup_n A_n\right)^c = \liminf_n A_n^c$*?*
***Задача*** 2.11. *Разложите на множители* $1_{A\cap B}$ *и* $1_{A\setminus B}$
*Найдите* $1_A + 1_{A^c}$
***Задача*** 2.12. *Пусть* $\mathcal{F}$ — $\sigma$*-алгебра подмножеств* $\Omega$, *и* $B \subseteq \Omega$. *Верно ли, что набор множеств* $\mathcal{H} = \{A : A \subseteq B$ *или* $B^c \subseteq A\}$ *является* $\sigma$*-алгеброй на* $\Omega$*?*
***Задача*** 2.13. *Пусть* $\mathcal{F}_i$, $i \in I$ — $\sigma$*-алгебры подмножеств* $\Omega$.

а) *Докажите, что* $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ - $\sigma$*-алгебра.*

б) *Приведите пример, показывающий, что* $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ — *не обязательно алгебра.*

***Задача*** 2.14. *Решеткой будем обозначать количество элементов множества ('#A').*
*Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Определим* $\gamma(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#(A\bigcap\{1,2,3,\ldots,n\})}{n}$ *в тех случаях, когда этот предел существует. Величина* $\gamma(A)$ *(Cesaro density) показывает, какую «долю» от всех натуральных чисел составляет указанное подмножество. Пусть* $\mathcal{H} = \{A \subseteq \mathbb{N} | \exists\gamma(A)\}$.

а) *Приведите пример множества, у которого не определена доля Чезаро.*

б) *Верно ли, что у натуральных чисел, в записи которых присутствует хотя бы одна единица, есть доля? Если да, то чему она равна?*

в) *Верно ли, что у натуральных чисел, в записи которых присутствует ровно одна единица, есть доля? Если да, то чему она равна?*

г) *Верно ли, что* $\mathcal{H}$ *- алгебра?*

***Задача*** 2.15. *Пусть* $\mathcal{M}$ *это* $\pi$*-система на* $\Omega$. *Для любого множества* $A$ *из* $\lambda(\mathcal{M})$ *определим набор* $F(A) = \{L | L \cap A \in \lambda(\mathcal{M})\}$. *Т.е.* $F(A)$ — *это набор «хороших» относительно* $A$ *множеств, их* $A$ *не отбрасывает за пределы* $\lambda(\mathcal{M})$.
*Последовательно докажите, что:*

а) *Если* $A \in \mathcal{M}$, *то* $\mathcal{M} \subseteq F(A)$.

б) *Если* $A \in \lambda(\mathcal{M})$, *то* $F(A)$ — $\lambda$*-система.*

в) *Если* $A \in \mathcal{M}$, *то* $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq F(A)$.

г) *Если* $B \in \lambda(\mathcal{M})$, *то* $\mathcal{M} \subseteq F(B)$.

д) *Если* $B \in \lambda(\mathcal{M})$, *то* $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq F(B)$.

е) $\lambda(\mathcal{M})$ *является* $\pi$*-системой.*

***Задача*** 2.16. *Чтобы набор* $\mathcal{M}$ *являлся* $\sigma$*-алгеброй необходимо и достаточно, чтобы он одновременно являлся* $\pi$*-системой и* $\lambda$*-системой.*
***Задача*** 2.17. *Если* $\mathcal{M}$ *это* $\pi$*-система на* $\Omega$, *то* $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$
***Задача*** 2.18. *(Александр ?) Рассмотрим набор подмножеств* $\mathcal{H} = \{[0; \frac{1}{n}] | n \in \mathbb{N}\}$. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *минимальная алгебра, порождаемая этим набором, а* $\mathcal{F}$ — *минимальная порождаемая* $\sigma$*-алгебра.*

*а) Опишите все множества, входящие в $\mathcal{A}$*

*б) Опишите все множества, входящие в $\mathcal{F}$*

*в) Верно ли, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$ совпадают?*

*г) Совпадают ли мощности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$?*

**Задача** 2.19. *Пусть $\Omega$ — произвольное множество, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}$. При каком условии функция $f$ будет измеримой?*
**Задача** 2.20. *Пусть $X$ — случайная величина. Верно ли, что $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$?*
**Задача** 2.21. *При каком соотношении на $n$ и $\lambda$ для любой случайной величины $X$ справедливо равенство $\{X \geqslant \lambda\} = \{X \wedge n \geqslant \lambda\}$?*
**Задача** 2.22. *Пусть $X$ — случайная величина, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Верно ли, что $f(X)$ — является $\sigma(X)$-измеримой?*
**Задача** 2.23. *Верно ли, что любая непрерывная действительная функция является измеримой по Борелю?*
**Задача** 2.24. *Обозначим $x \wedge y = min\{x, y\}$. Верно ли, что $1_A \wedge 1_B = 1_{A \cap B}$?*
*Обозначим $x \vee y = max\{x, y\}$. Верно ли, что $1_A \vee 1_B = 1_{A \cup B}$?*
**Задача** 2.25. *Пусть $X_i$ — случайные величины и $N$ — случайная величина, принимающая натуральные значения. Верно ли, что $\sum_{i=1}^{N} X_i$ — случайная величина?*
**Задача** 2.26. *Правильный кубик подбрасывается один раз. $Y$ — индикатор того, выпала ли четная грань. $Z$ — индикатор того, выпало ли число больше 2-х.*

*а) Сколько элементов $\sigma(Z)$?*

*б) Сколько элементов в $\sigma(Y \cdot Z)$?*

*в) Сколько элементов в $\sigma(Y, Z)$?*

*г) Как связаны между собой $\sigma$-алгебры $\sigma(Y \cdot Z)$ и $\sigma(Y, Z)$?*

**Задача** 2.27. *Пусть $\Omega = [0; 1]$. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega |$ либо $A$ не более чем счетно, либо $A^c$ не более чем счетно $\}$.*
*Верно ли, что $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра?*
*Придумайте $B \subset \Omega$, такое что $B \notin \mathcal{F}$.*
**Задача** 2.28. *Случайные величины $X$ и $Y$ заданы на $(\Omega, \mathcal{F})$. Верно ли, что $A = \{w | X(w) = Y(w)\}$ лежит в $\sigma$-алгебре $\mathcal{F}$?*
**Задача** 2.29. *We toss a fair coin infinitely many times. So the set of all oucomes $\Omega$ is the set of all infinite sequences of H and T. Let $A_n$ be the event that the coin shows head in the $n$-th toss. Let $\mathcal{F} = \sigma(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ — be the minimal $\sigma$-algebra containing all the $A_n$.*
*Let $X_n$ be the proportion of heads after the first $n$ tosses.*

*а) Show that the event $X_n < t$ is contained in $\mathcal{F}$ for all $n$ and $t$.*

*б) Express the event $lim_{n \to \infty} X_n \leqslant 2/5$ using countable operations with the events of the form $X_n < t$.*

**Задача** 2.30. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Верно ли, что $f'$ — измерима по Борелю?*
**Задача** 2.31. *Пусть $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0; 1]$. Случайный процесс $X_t(w) := 1_{t=w}$. Постройте фильтрацию, порождаемую этим процессом.*
**Задача** 2.32. *В лесу есть три вида грибов: рыжики, лисички и мухоморы. Попадаются они равновероятно и независимо друг от друга. Маша нашла 100 грибов. Пусть $R$ — количество рыжиков, $L$ — количество лисичек, а $M$ — количество мухоморов среди найденных грибов.*

*а) Сколько элементов $\sigma(R)$?*

*б) Сколько элементов $\sigma(R, M)$?*

*в) Измерима ли $L$ относительно $\sigma(R)$?*

*г) Измерима ли $L$ относительно $\sigma(R, M)$?*

*д) Измерима ли $L$ относительно $\sigma(R + M)$?*

*е) Измерима ли $L$ относительно $\sigma(R - M)$?*

**Задача** 2.33. *Сначала подбрасываем кубик. Если выпала нечетная грань, то подбрасываем правильную монетку один раз. Если четная — то два. Пусть $X$ — количество подбрасываний монетки, а $Y$ — количество выпавших орлов.*

*а) Сколько элементов в $\sigma(X)$?*

*б) Сколько элементов в $\sigma(Y)$?*

*в) Сколько элементов в $\sigma(X, Y)$?*

*г) Измерима ли $X$ относительно $\sigma(Y)$?*

*д) Измерима ли $Y$ относительно $\sigma(X)$?*

**Задача** 2.34. *Пусть $X_n$ — независимые случайные величины равновероятно равные плюс или минус единице. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Сравните $\sigma$-алгебры $\sigma(X_1, X_2, \ldots X_n)$ и $\sigma(S_1, S_2, \ldots S_n)$.*

**Задача** 2.35. *Монетка подкидывается бесконечное количество раз: $X_n$ равно 1, если при $n$-ом подбрасывании выпадает орел и 0, если решка. Определим кучу $\sigma$-алгебр: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathcal{H}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.*

*Приведите по два нетривиальных (отличных от $\Omega$ и $\emptyset$) примера такого события $A$, что:*

*а) $A \in \mathcal{F}_{2010}$*

*б) $A \notin \mathcal{F}_{2010}$*

*в) $A$ лежит в каждой $\mathcal{H}_n$*

*В какие из упомянутых $\sigma$-алгебр входят события:*

*а) $X_{37} > 0$*

*б) $X_{37} > X_{2010}$*

*в) $X_{37} > X_{2010} > X_{12}$*

*Упростите выражения: $\mathcal{F}_{11} \cap \mathcal{F}_{25}$, $\mathcal{F}_{11} \cup \mathcal{F}_{25}$, $\mathcal{H}_{11} \cap \mathcal{H}_{25}$, $\mathcal{H}_{11} \cup \mathcal{H}_{25}$*

**Задача** 2.36. *Может ли в $\sigma$-алгебре быть ровно 2010 элементов?*

**Задача** 2.37. *Пусть $X$ — равномерная на $[0; 1]$ случайная величина. Пусть $\mathcal{H}_1$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все события вида $X = t$, а $\mathcal{H}_2$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все события вида $X < t$. Сравните $\sigma$-алгебры $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.*

**Задача** 2.38. *Правильная монетка подбрасывается бесконечное количество раз. Вася наблюдает за результатами подбрасываний до тех пор, пока не выпадет 3 орла подряд. Пусть $T$ — случайный момент времени, когда Вася прекратил наблюдения, и $\mathcal{F}_T$ — $\sigma$-алгебра событий различимых Васей. Приведите пример двух нетривиальных (отличных от $\Omega$ и $\emptyset$) событий, входящих в $\mathcal{F}_T$.*

***Задача* 2.39.** *Let $S_n$ be a symmetric random walk, i.e. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ where $X_n$ are independent and identically distributed with $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$. Let $T$ be the time of the second local maximum plus one. For example: if the sequence of $X_n$ is given by $+1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, \ldots$ then $T = 7$. We define the following sigma-algebras: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ and $\mathcal{F}_T$ — all events which may be distninguished by a rational agent who knows all $X_i$ up to time $T$.*

а) *Give an example of event $A$ such that $A \notin \mathcal{F}_T$ but $A \in \mathcal{F}_{2010}$*

б) *Give an example of event $B$ such that $B \in \mathcal{F}_T$ but $B \notin \mathcal{F}_{2010}$*

в) *Prove that $\mathcal{F}_T$ is different from each $\mathcal{F}_n$*

г) *Does $T = 5$ belongs to $\mathcal{F}_T$? Does $T = 5$ belongs to $\sigma(T)$?*

д) *Does $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = -1\}$ belongs to $\mathcal{F}_T$? To $\sigma(T)$?*

е) *Does $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = -1, X_5 = 1\}$ belongs to $\mathcal{F}_T$? To $\sigma(T)$?*

ж) *Are sigma-algebras $\mathcal{F}_T$ and $\sigma(T)$ equal?*

***Задача* 2.40.** *Монетка подбрасывается бесконечное количество раз. $X_n$ — результат $n$-го подбрасывания, 1, если решка и 0, если орел. Let $T$ be the first moment of time when the proportion of head is greater than 0.5. We define the following sigma-algebras: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ and $\mathcal{F}_T$ — all events which may be distninguished for sure by a rational agent who knows all $X_i$ up to time $T$.*

a. *Give an example of event $A$ such that $A \notin \mathcal{F}_T$ but $A \in \mathcal{F}_{2010}$*

b. *Give an example of event $B$ such that $B \in \mathcal{F}_T$ but $B \notin \mathcal{F}_{2010}$*

c. *Prove that $\mathcal{F}_T$ is different from each $\mathcal{F}_n$*

***Задача* 2.41.** *Опишите $\sigma$-алгебру подмножеств отрезка $[0;1]$, порождённую отрезками $[0;0.1)$ и $(0.5,1]$.*

***Задача* 2.42.** *Случайная величина $X$ равномерна на отрезке $[0;1]$. Величина $Y$ определяется по формуле $Y = 1_{X<0.5} + 1_{X>0.3}$. Опишите $\sigma$-алгебру $\sigma(Y)$.*

***Задача* 2.43.** *Сейчас либо солнечно, либо дождь, либо пасмурно без дождя. Соответственно, множество $\Omega$ состоит из трёх исходов, $\Omega = \{$солнечно, дождь, пасмурно$\}$. Джеймс Бонд пойман и привязан к стулу с завязанными глазами, но он может на слух отличать, идёт ли дождь.*

а) *Как выглядит $\sigma$-алгебра событий, которые различает агент 007?*

б) *Как выглядит минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая событие $A = \{\}$?*

в) *Сколько различных $\sigma$-алгебр можно придумать для данного $\Omega$?*

***Задача* 2.44.** *Возможно четыре исхода, $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Величины $X$ и $Y$ принимают значения $0$ и $1$:*

| | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|
| $X=0$ | $a$ | $b$ |
| $X=1$ | $c$ | $d$ |

*Найдите $\sigma$-алгебры $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $\sigma(X,Y)$, $\sigma(X+Y)$, $\sigma(X-Y)$*

# 3. Модель в дискретном времени, дерево

***Задача* 3.1.** *Consider a stock which price today is \$50. Suppose that over the next year, the stock price can either go up by 10%, or down by 3%, so the stock price at the end of the year is either \$55 or \$48.50. The interest rate on a \$1 bond is 6%. If there also exists a call on the stock with an exercise price of \$50, then what is the price of the call option? Also, what is the replicating portfolio?*

***Задача* 3.2.** *A stock price is currently \$50. It is known that at the end of 6 months, it will either be \$60 or \$42. The risk-free rate of interest with continuous compounding on a \$1 bond is 12% per annum. Calculate the value of a 6-month European call option on the stock with strike price \$48 and find the replicating portfolio.*

***Задача* 3.3.** *(Dividend-paying stock)*
*Consider the binomial asset pricing model with the modification described below. Let*

$$Y_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n \omega_{n+1}) = \begin{cases} u, & \text{if } \omega_{n+1} = H, \\ d, & \text{if } \omega_{n+1} = T. \end{cases}$$

$Y_{n+1}$ *depends only on the* $(n+1)$*-th coin toss and* $Y_{n+1}S_n$ *equaled to the stock price at time* $n+1$. *For the dividend-paying model consider another random variable* $A_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n \omega_{n+1})$ *taking values in* $(0,1)$ *and define the dividend paid at time* $n+1$ *as the amount* $A_{n+1}Y_{n+1}S_n$. *After the dividend is paid, the stock price at time* $n+1$ *is*

$$S_{n+1} = (1 - A_{n+1})Y_{n+1}S_n.$$

*An agent who begins with initial capital* $X_0$ *and at each time takes a position of* $\Delta_n$ *shares of stock, where* $\Delta_n$ *depends only on the first* $n$ *coin tosses, has a portfolio value governed by the wealth equation:*

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n) + \Delta_n A_{n+1} Y_{n+1} S_n && (1) \\ &= \Delta_n Y_{n+1} S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). && (2) \end{aligned}$$

*(i) Show that such a discounted wealth process is a martingale under the risk-neutral measure, which is defined as in the case of usual binomial asset pricing model (prove it as well!!!).*

*(ii) Show that the risk-neutral pricing formulastill applies.*

*(iii) Show that the discounted stock price is not a martingale under the risk-neutral measure. However, if* $A_{n+1}$ *is a constant* $a \in (0,1)$*, regardless of the value of* $n$ *and the outcome of the coin tossing* $\omega_1 \dots \omega_{n+1}$*, then* $\frac{S_n}{(1-a)^n(1+r)^n}$ *is a martingale under the risk-neutral measure.*

***Задача* 3.4.** *Chooser option*
*Let* $1 \leqslant m \leqslant N-1$ *and* $K > 0$ *be given A chooser option is a contract sold at time zero that confers on its owner the right to receive either a call or a put at time* $m$*. The owner of the option may wait until time* $m$ *before choosing. The call or put chosen expires at time* $N$ *with the strike price* $K$*. Show that the time-zero price of a chooser option is the sum of the time-zero price of a put, expiring at time N and having strike price* $K$*, and a call, expiring at time* $m$ *and having strike price* $\frac{K}{(1+r)^{N-m}}$*.*

***Задача* 3.5.** *Asian option. Consider an* $N$*-period binomial model. An Asian option has a payoff based on the average stock price, i.e.,*

$$V_N = f\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n\right),$$

*where the function* $f$ *is determined by the contractual details of the option.*

*(i) Let* $Y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$*. Show that the two-dimensional process* $(S_n, Y_n)$*,* $n = 0, 1, \dots, N$ *is Markov.*

(ii) *Show that the price $V_n$ of the Asian option at time $n$ is some function $v_n$ of $S_n$ and $Y_n$; i.e.*

$$V_n = v_n(S_n, Y_n),\ n = 0, 1, \dots, N.$$

*Give a formula for $v_N(s, y)$ and provide an algorithm for backward computing $v_n(s, y)$ in terms of $V_{N+1}$.*

**Задача** 3.6. *Asian option continued) Consider an $N$-period binomial model, and let $M$ be a fixed number between $0$ and $N-1$. Consider an Asian option with the payoff at time $N$ defined as*

$$V_N = f\left(\frac{1}{N_M}\sum_{n=M+1}^{N} S_n\right),$$

*where again the function $f$ is determined by the contractual details of the option.*
*Define*

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leqslant n \leqslant M \\ \sum\limits_{k=M+1}^{n} S_k, & \text{if } M+1 \leqslant n \leqslant N. \end{cases}$$

*Show that the two-dimensional process $(S_n, Y_n)$ is Markov (under the risk-neutral measure $\tilde{\mathbb{P}}$).*
*As we already know the price $V_n$ of the Asian option at time $n$ is some function $v_n$ of $S_n$ and $Y_n$; i.e.*

$$V_n = v_n(S_n, Y_n),\ n = 0, 1, \dots, N.$$

*Of course, when $n \leqslant M$, $Y_n$ is not random and does not need to be included in this function. Thus, for such $n$ we should seek a function $v_n$ of only $S_n$. Give a formula for $v_N(s, y)$ and provide an algorithm for backward computing $v_n(s, y)$ in terms of $V_{N+1}$. Note that the algorithm is different for $n < M$ and $n > M$, and there is a separate transition formula for $v_M(s)$ in terms of $v_{M+1}(\cdot, \cdot)$.*
**Задача** 3.7. *Докажите, что адаптированные случайные процессы $\left\{\frac{S_n}{(1+r)^n}\right\}$ и $\left\{\frac{X_n}{(1+r)^n}\right\}$ являются мартингалами относительно риск-нейтральной меры $(\tilde{p}, \tilde{q})$. Условие $0 < d < 1 + r < u$ является естественным необходимым условием отсутствия арбитража. Доказав, что $\left\{\frac{X_n}{(1+r)^n}\right\}$ мартингал, вы покажете, что это условие также является и достаточным.*
**Задача** 3.8. *Рассмотрим 3-х периодную модель. Параметры: $S_0 = 8$, $u = 1.5$, $d = 0.5$, $r = 0.1$*
*Найдите стоимость следущих опционов:*

а) *американский колл с ценой страйк $K = 10$*

б) *американский пут с ценой страйк $K = 10$*

в) *реализуемый в любой момент времени $t = 0, 1, 2, 3$ и приносящий (в случае реализации) платеж $\bar{S} - 10$, где $\bar{S}$ — средняя цена акций за время от $t = 0$ до момента реализации*

**Задача** 3.9. *Consider a knockout call option with strike price $K = 80$. The main difference with a standard call option is that the option vanishes as soon as the underlying stock goes below a knockout threshold $H = 70$. In this event the option pays a \$2 consolation payoff. The parameters are given by $r = 0.1$, $u = 1.5$, $d = 0.5$. The tree covers two periods or three dates, initial stock price is $S_0 = 120$.*

а) *calculate standard European call price*

б) *calculate knockout European call price*

## 3.1. Арбитраж

**Задача** 3.10. *Имеется три опциона колл с одинаковым сроком исполнения и разными страйк-ценами:* $K_1 < K_2 < K_3$, *причем* $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$. *Обозначим цены этих опционов как* $C_1, C_2$ *и* $C_3$. *Сравните* $C_2$ *и* $\frac{C_1+C_3}{2}$

**Задача** 3.11. *Пусть* $S_T$ *— цена акции в момент* $T$. *Экзотический опцион выплачивает сумму* $g(S_T) = min\{max\{S_T, 100\}, 120\}$. *Выразите цену этого опциона через цены двух подходящих опционов колл и процентную ставку.*

**Задача** 3.12. *Докажите, что при отсутствии арбитража, должно выполняться неравенство:*

$$S_t - D - K \leqslant C_t - P_t \leqslant S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

*здесь:*

$S$ *— цена акции*
$C$ *— цена американского опциона колл со страйк ценой* $K$ *и датой исполнения* $T$
$P$ *— цена американского опциона пут со страйк ценой* $K$ *и датой исполнения* $T$
$D$ *— приведенная к моменту* $t$ *стоимость дивидендов*

# 4. Мера

**Задача** 4.1. *Пусть* $X = Y$ *(a.e.) и* $Y = Z$ *(a.e.) Верно ли, что* $X = Z$ *(a.e.)?*

**Задача** 4.2. *Случайные величины* $X$ *и* $Y$ *независимы,* $f$ *и* $g$ *— измеримые функции. Докажите, что случайные величины* $f(X)$ *и* $g(Y)$ *независимы.*

**Задача** 4.3. *Докажите, что функция распределения имеет не более, чем счетное число разрывов. Исходя из этого факта, установите, что для любой случайной величины* $X$ *можно выбрать бесконечное (более, чем счетное) количество таких чисел* $x$, *что* $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

**Задача** 4.4. *Пусть* $\Omega = \{q \in [0;1] | q \in \mathbb{Q}\}$, *и* $\mathcal{F}_1$ *- класс подмножеств множества* $\Omega$, *имеющих вид* $[a;b)$, $(a;b]$, $[a,b]$ *или* $(a,b)$, *где* $a$ *и* $b$ *— рациональные числа. Обозначим через* $\mathcal{F}_2$ *класс всех конечных сумм попарно непересекающихся множеств из* $\mathcal{F}_1$. *Определим функцию* $\mathbb{P}$ *следующим образом:*
$\mathbb{P}(A) = b - a$, *если* $A \in \mathcal{F}_1$
$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, *если* $B \in \mathcal{F}_2$ *и* $B = \cup_{i=1}^{n} A_i$, *где* $A_i$ *попарно не пересекаются.*

а) *Верно ли, что* $\Omega$ *— алгебра?* $\sigma$*-алгебра?*

б) *Найдите* $\mathbb{P}(\Omega)$.

в) *Верно ли, что* $\mathbb{P}$ *является аддитивной?* $\sigma$*-аддитивной?*

**Задача** 4.5. *Пусть* $\Omega = \{a, b, c, d\}$, *и* $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$.
*Пусть* $\mathcal{F}$ *— множество всех подмножеств* $\Omega$.
*Определим вероятности* $\mathbb{P}_1$ *и* $\mathbb{P}_2$ *исходя из:*
$\mathbb{P}_1(\{a\}) = \mathbb{P}_1(\{d\}) = \frac{1}{6}, \mathbb{P}_1(\{b\}) = \mathbb{P}_1(\{c\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}_2(\{a\}) = \mathbb{P}_2(\{d\}) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}_2(\{b\}) = \mathbb{P}_2(\{c\}) = \frac{1}{6}$,
*а) Верно ли, что* $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$?
*б) Верно ли, что* $\mathbb{P}_1$ *и* $\mathbb{P}_2$ *совпадают на* $\mathcal{A}$?
*в) Почему не применима теорема Каратеодори о единственности продолжения меры на порождаемую* $\sigma$*-алгебру?*

**Задача** 4.6. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *— вероятностное пространство,* $B$ *- событие с* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Для* $A \in \mathcal{F}$ *определим* $P_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$. *Докажите, что* $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$ *- вероятностное пространство.*

**Задача** 4.7. *Докажите, что* $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_T \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{T} A_n)$

**Задача** 4.8. *Пусть* $f$ *и* $g$ *обычные действительные функции.*

а) *Приведите пример таких $f$ и $g$, что $f$ — непрерывна, $g$ - непрерывна почти наверное (относительно классической меры Лебега $\lambda$), $f = g$ почти наверное.*

б) *Приведите примеры таких $f$ и $g$, что $f = g$ почти наверное, $f$ — непрерывна, $g$ не является непрерывной даже почти наверное.*

в) *Приведите пример такой $f$, непрерывной почти наверное, что ни одна $g$ почти наверное равная $f$, не является непрерывной.*

***Задача* 4.9.** *Две $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ независимы. Пусть $\mathcal{F}_1' \subseteq \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2' \subseteq \mathcal{F}_2$. Докажите, что $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_1'$ и $\mathcal{F}_2'$ независимы.*

***Задача* 4.10.** *Про независимость в лимсуп/лиминф 1.8.16, 1.8.32*

***Задача* 4.11.** *(надо проверить, решабельно ли это до интеграла лебега)*
*Докажите неравенства Фату для вероятности:*
$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mathbb{P}(A_n)$ *и* $\limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$

***Задача* 4.12.** *А что такое метрика?*
*Докажите, что на плоскости $(x, y)$ обе функции: 1. $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$*
*2. $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$*
*являются метриками*

***Задача* 4.13.** *Пусть $X$ и $Y$ одинаково распределены, и $f(t)$ — борелевская функция.*
*Верно ли, что $f(X)$ и $f(Y)$ одинаково распределены?*

***Задача* 4.14.** *Известно, что $\mathbb{P}(X > c \Delta Y > c) = 0$ для любой константы $c$. Верно ли, что $X = Y$ почти наверное?*

***Задача* 4.15.** *Имеется последовательность событий $A_1$, $A_2$, ..., такая что вероятность любого $A_i$ равна $\mathbb{P}(A_i) = 1$. Найдите $\mathbb{P}(\cup A_i)$ и $\mathbb{P}(\cap A_i)$*

***Задача* 4.16.** *Имеется последовательность событий $A_1$, $A_2$, ..., такая что $\lim \mathbb{P}(A_i) = 1$. Найдите $\lim \mathbb{P}(B \cap A_i)$*

***Задача* 4.17.** *Существует ли последовательность событий $A_1$, $A_2$, ..., такая что $\lim \mathbb{P}(A_i) = 1$, но $\mathbb{P}(\cap_{i=k}^{\infty} A_i) = 0$ для любого числа $k$?*

# 5. Виды сходимостей

***Задача* 5.1.** *Известно, что $X_n \geqslant 0$. Верно ли, что $\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$?*

***Задача* 5.2.** *[Grimmett, ex. 7.11.1]*
*Пусть $X_n$ заданы на одном вероятностном пространстве, и их функции плотности имеют вид $p_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$*
*К чему сходится $X_n$ и в каком смысле (as, $L^1$, in probability, in distribution)?*

***Задача* 5.3.** *Пусть $X_n$ и $Y_n$ заданы на одном вероятностном пространстве и $X_n \to X$ (in distribution), $Y_n \to Y$ (in distribution). Верно ли, что $X_n + Y_n \to X + Y$ (in distribution)?*

***Задача* 5.4.** *Пусть $X_n$ — имеет распределение $Bin(n, 0.5)$. И $Y_n$ — остаток от деления $X_n$ на 5 (можно и не на пять). К чему сходится $Y_n$ по распределению?*
*решение (через характеристические функции?)*
*см. aops, t=174723*

***Задача* 5.5.** *Converges AS*
*Show that $X_n$ converges to $X$ a.s. iff for all $\varepsilon$, there exists $n$ s.t. for every random integer $N(w) > n$ (for all $w$), we have $\mathbb{P}(|X_N(w)(w) - X(w)| > \varepsilon) < \varepsilon$.*
*решение — ?, aops, t=174817*

***Задача* 5.6.** *Пусть $X$ — интегрируемая и $A_n$ попарно не пересекаются. Обозначим $A = \cup A_n$. Докажите, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X \cdot 1_{A_n}) = \mathbb{E}(A \cdot 1_A)$.*

***Задача* 5.7.** *Если $f$ — непрерывна и $X_n \to X$ a.e., то $f(X_n) \to f(X)$ a.e.*

***Задача* 5.8.** *Докажите или опровергните утверждения:*

а) *Если* $Y_n \uparrow Y$, *то* $1_{Y_n>a} \uparrow 1_{Y>a}$

б) *Если* $Y_n \uparrow Y$, *то* $1_{Y_n \geqslant a} \uparrow 1_{Y \geqslant a}$

в) *Если* $1_{Y_n>a} \uparrow 1_{Y>a}$, *то* $\mathbb{P}(Y_n > a) \uparrow \mathbb{P}(Y > a)$

г) *Если* $Y_n \to Y$ *(as), то* $\lim_{n\to\infty} 1_{Y_n>x} \geqslant 1_{Y>x}$ *(as)*

д) *Если* $Y_n \to Y$ *(as), то* $\lim_{n\to\infty} 1_{Y_n \geqslant x} \leqslant 1_{Y \geqslant x}$ *(as)*

***Задача* 5.9.** *Пусть* $X \sim U(0;1)$ *и* $X_n = (\cos(\frac{2\pi}{X}))^n$. *Верно ли, что* $X_n \to 0$ *(a.s)?*
***Задача* 5.10.** *Пусть* $X \in L^1$, *и последовательность событий* $A_n$ *такова, что* $\mathbb{P}(A_n) \to 0$.

а) *Докажите, что* $|X|1_{A_n} \to 0$ *(in probability)*

б) *Используя DCT и тот факт, что в последовательности, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное, покажите, что* $E\left(|X|1_{A_n}\right) \to 0$

в) *Для* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из* $\mathbb{P}(A) < \delta$ *следует* $\mathbb{E}(|X|1_A) < \varepsilon$

г) *Докажите, что* $\lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(|X| > T) = 0$

***Задача* 5.11.** *Пусть* $X_n \to X$ *(in* $L^1$*). Докажите, что* $\mathbb{E}(X_n 1_A) \to \mathbb{E}(X 1_A)$.
***Задача* 5.12.** *Пусть* $X_n \leqslant Y_n$ *(as) и* $X_n \to X$ *(in* $L^1$*), а* $Y_n \to Y$ *(in* $L^1$*). Верно ли, что* $X \leqslant Y$ *(as)?*
***Задача* 5.13.** [*Williams, E4.7*]

*Ваш выигрыш в* $n$*-ой партии равен* $X_n = \begin{cases} n^2 - 1, & p = n^{-2} \\ -1, & p = 1 - n^{-2} \end{cases}$ *и* $X_n$ *— независимы.*

а) *Найдите* $\mathbb{E}(X_n)$.

б) *Пусть* $A_t = \{$*не будет ни одного выигрыша начиная с времени* $t\}$. *Найдите* $\mathbb{P}(A_t)$ *и* $\mathbb{P}(\cup_t A_t)$.

в) *В каком смысле существует* $\lim_n \bar{X}_n$ *и чему он равен?*

г) *Можно ли назвать эту игру справедливой?*

***Задача* 5.14.** *Пусть* $X \sim U[0;1]$ *и* $X_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
*Куда и в каком смысле сходится* $X_n$*?*
***Задача* 5.15.** *Пусть* $U_n \sim U[0;1]$ *— независимые случайные величины. Пусть* $X_n = \min\{U_1, \ldots, U_n\}$

а) *К чему и в каком смысле сходится* $X_n$*?*

б) *При каких* $\theta$ *последовательность* $Y_n = n^\theta X_n$ *будет сходиться по распределению? К чему она будет сходиться?*

в) *К чему и в каком смысле сходится* $Z_n = (U_1 \cdot \ldots \cdot U_n)^{1/n}$*?*

***Задача* 5.16.** *Пусть* $X_0 \sim U[0;1]$ *и* $X_n = 6 + \sqrt{X_{n-1}}$.
*К чему и в каком смысле сходится* $X_n$*?*
***Задача* 5.17.** *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *называется дискретным, если* $\Omega$ *конечно или счетно (чаще всего при этом полагают, что* $\mathcal{F}$ *содержит все подмножества* $\Omega$*). Верно ли, что для дискретного вероятностного пространства сходимость почти наверное и сходимость по вероятности — это одно и то же?*

***Задача* 5.18**. *Пусть величины $X_1$, $X_2$, ... имеют нулевое среднее, ограниченную общей константой дисперсию и некоррелированы. Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ и $\alpha > 1/2$.*
*Сходится ли $\frac{S_n}{n^\alpha}$ в $L^2$?*
***Задача* 5.19**. *breaking a stick*
*A stick of length 1 is broken at a random point that is uniformly distributed. The right hand part is thrown away, and the left part is broken similarly (the breaking point being uniformly distributed). Let $X_n$ be the length of the remaining part after $n$ steps. We define $Y_n = X_n^{1/n}$.*
*In what sense does the $Y_n$ converge? What is the limit?*
***Задача* 5.20**. *Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}[0;1], P)$, где $P = \lambda$ — классическая мера Лебега.*
*Пусть $A_n = [0; \frac{1}{n}]$.*

*а) Найдите $\mathbb{P}(\limsup A_n)$.*

*б) Найдите $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*

*в) Противоречит ли этот пример лемме Бореля-Кантелли?*

***Задача* 5.21**. *Приведите пример последовательности $X_n$ и предела $X$, таких что:* $\lim E|X_n - X| = 0$, *но* $\mathbb{E}(|X_n|) = \infty$
***Задача* 5.22**. *Let $X_n = X \cdot 1_{X \leqslant n}$. In what sense (as., in $L^2$, in probability, in law) does the sequence $\{X_n\}$ converge? What is the limit? Consider two cases:*

*а) $X \sim N(0;1)$ (standard normal distribution).*

*б) $X = 2^T$ where $T$ is the time of the first head in the infinite sequence of coin tosses.*

***Задача* 5.23**. *Случайная величина $X_1$ равномерна на отрезке $[0;1]$ и $X_n = X_1^n$. В каких смыслах и к чему сходится $X_n$?*
***Задача* 5.24**. *Последовательность случайных величин $X_n$ такова, что $\mathbb{P}(X_n \to 0) = 1$. Возможно ли, что $\lim \mathbb{E}(X_n) \neq 0$?*
***Задача* 5.25**. *Известно, что $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Верно ли, что $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$?*
***Задача* 5.26**. *Известно, что $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Верно ли, что $Y \cdot X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} YX$?*
***Задача* 5.27**. *Известно, что $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Верно ли, что $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$?*
***Задача* 5.28**. *Известно, что $\varepsilon > 0$. Сравните величины $\mathbb{P}(X \leqslant t)$ и $\mathbb{P}(Y \leqslant t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|X - Y| > \varepsilon)$.*
***Задача* 5.29**. *Какое условие является более сильным?*

*а) Последовательность $X_n$ сходится к $X$ по вероятности*

*б)*
$$\mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \to 0$$

***Задача* 5.30**. *Последовательность случайных величин $X_n$ поточечно сходится к случайной величине $X$. Кроме того, $\lim \mathbb{E}(X_n) = 0$.*

*а) Верно ли, что $\mathbb{E}(X)$ обязательно существует?*

*б) Если дополнительно известно, что $\mathbb{E}(X)$ существует, то верно ли, что $\mathbb{E}(X) = 0$?*

***Задача* 5.31**. *Последовательность случайных величин $X_n$ сходится к $a$ по вероятности. Функция $f$ — борелевская и имеет производную в точке $x = a$. Представим $f(X_n)$ в виде*

$$f(X_n) = f(a) + f'(a)(X_n - a) + Y_n(X_n - a) \qquad (3)$$

*Сходится ли $Y_n$ по вероятности? Если да, то к чему?*

**Задача 5.32.** *Известно, что $X_n$ сходится по вероятности к нулю и $\lim_{t\to\infty}\sup_n \mathbb{P}(|Y_n| > t) = 0$. Верно ли, что $X_nY_n$ сходится по вероятности к нулю?*

**Задача 5.33.** *Хвостовая $\sigma$-алгебра. Случайные величины $X_1$, $X_2$, ...независимы, $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$. Каждая $X_i$ равновероятно принимает значения $0.5$ и $1.5$.*

*а) Найдите $\mathbb{P}(Y_n \to 0)$*

*б) Как изменится ответ, если $X_i$ равновероятно принимает значения $n/(n+1)$ и $(n+2)/(n+1)$?*

*в) Как изменится ответ, если $X_i$ равновероятно принимает значения $1 - 1/\sqrt{n+1}$ и $1 + 1/\sqrt{n+1}$?*

# 6. Интеграл Лебега

**Задача 6.1.** *Случайные величины $X$ и $Y$ являются интегрируемыми и независимыми (то есть независимы минимальные $\sigma$-алгебры, ими порождаемые). Докажите, что $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*
*Воспользуйтесь стандартной техникой: индикатор — простая - неотрицательная — произвольная*

**Задача 6.2.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $X$ - случайная величина, причем $X \geqslant 0$ и $0 < \mathbb{E}(X) < +\infty$. Для произвольного события $A \in \mathcal{F}$ определим $P_X(A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot 1_A)}{\mathbb{E}(X)}$.*

*а) Докажите, что $(\Omega, \mathcal{F}, P_X)$ — вероятностное пространство.*

*б) Обозначим $E_X(Y) = \int Y \cdot dP_X$. Докажите, что если $Y \geqslant 0$, то $E_X(Y) = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(X)}$.*

**Задача 6.3.** *Пусть $X$ — дискретная случайная величина, со счетным множеством значений $\{a_1, a_2, \ldots\}$, где $a_i \geqslant 0$. Докажите, что $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot \mathbb{P}(X = a_i)$.*

**Задача 6.4.** *Рассмотрим вероятностное пространство $([0;1], \mathcal{B}, \lambda)$.*
*Пусть $q(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ — функция Дирихле.*

*а) Является ли $q$ измеримой?*

*б) Найдите $\int_\Omega q \cdot d\lambda$ (интеграл Лебега).*

*в) Докажите, что $\int_0^1 q \cdot dx$ (интеграл Римана) не существует.*

**Задача 6.5.** *Докажите, что условия (1) и (2) равносильны:*
*(1) $\mathbb{E}(X1_F) \leqslant \mathbb{E}(Y1_F)$ для любого события $F$*
*(2) $X \leqslant Y$ (as)*

**Задача 6.6.** *Пусть $X \in L^1$, $Y \in L^1$. Верно ли, что $\max\{X, Y\} \in L^1$?*

**Задача 6.7.** *Обозначим $||X||_p = (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$ и $||X||_\infty = \inf\{t | \mathbb{P}(|X| \leqslant t) = 1\}$.*

*а) Докажите, что $||X||_p \leqslant ||X||_\infty$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

*б) Докажите, что $\lim_{p\to\infty} ||X||_p = ||X||_\infty$.*

**Задача 6.8.** *Пусть $X \in L^2$, $Y \in L^2$.*

*а) Верно ли, что $X^2 \in L^1$?*

*б) Верно ли, что $XY \in L^1$?*

**Задача 6.9.** *Two random variables X and Y have the same distiribution and that X<=Y almost surely. Under this condition I have to show that X=Y almost surely.*

***Задача* 6.10**. *Известно, что* $\mathrm{Var}(X) = 0$. *Существует ли константа* $a$ *такая, что* $0 < \mathbb{P}(X = a) < 1$?

***Задача* 6.11**. *Известно, что* $\mathbb{P}(0 < X < 1) = 1$. *Сравните* $\mathrm{Var}(X)$ *и* $\mathbb{E}(X)$.

***Задача* 6.12**. *Задана последовательность функций* $f_n(x) = \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1+x^2}$. *Сходится ли числовая последовательность* $a_n = \int_{[0;+\infty)} f_n d\lambda$, *где* $\lambda$ — *классическая мера Лебега?*

***Задача* 6.13**. *Функции* $f_n$ *заданы на отрезке* $[0;1]$ *и интегрируемы. Последовательность* $f_n$ *сходится равномерно к функции* $f$ *по классической мере Лебега* $\lambda$. *Верно ли, что* $\int_{[0;1]} f\, d\lambda$ *существует? Верно ли, что* $\int_{[0;1]} f_n\, d\lambda \to \int_{[0;1]} f\, d\lambda$?

***Задача* 6.14**. *Функции* $f_n$ *заданы на множестве* $[0;\infty)$ *формулой* $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$. *Существует ли интегрируемая функция* $f$, *такая что* $f \geqslant f_n$ *для всех* $n$?

# 7. Характеристическая функция

***Задача* 7.1**. [*Williams, 16.2*]
*Пусть* $U \sim U[-1;1]$.

а) *Найдите характеристическую функцию* $\varphi_U(t)$.

б) *Докажите, что* $U$ *не представима в виде* $X - Y$, *где* $X$ *и* $Y$ *независимы и одинаково распределены.*

***Задача* 7.2**. *Пусть величины* $X$ *и* $Y$ *имеют совместную функцию плотности:*
$f(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)$, *при* $|x| < 1$, $|y| < 1$.

а) *Верно ли, что* $X$ *и* $Y$ *независимы?*

б) *Верно ли, что* $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$?

***Задача* 7.3**. *Пусть* $X$ *имеет функцию плотности Коши,* $p(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
*Верно ли, что* $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X^2(t)$?

***Задача* 7.4**. *Пусть* $X \sim N(0;1)$ *и* $W = X^4$
*Докажите, что:*

а) *существует* $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itW})$

б) *не существует* $f(t) = \mathbb{E}(e^{tW})$

***Задача* 7.5**. *Пусть* $X \sim N(0;1)$.

а) *Чему равно* $\mathbb{E}(X^{2n+1})$?

б) *Докажите, что* $\mathbb{E}(X^{2n}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

в) *Пусть* $Y \sim N(0;\sigma^2)$. *Найдите* $\mathbb{E}(Y^{2n})$.

***Задача* 7.6**. *Случайная величина* $X$ *задана табличкой:*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x_i)$ | 0.1 | 0.3 | 0.6 |

а) *Найдите функцию* $g(t) = \mathbb{E}(t^X)$ *и постройте ее график.*

б) *Чему равно* $g(1)$?

в) *Верно ли, что* $g(0) = \mathbb{P}(X = 0)$?

г) *Верно ли, что* $g(1) = \mathbb{P}(X = 1)$*?*

д) *Найдите* $g'(1)$ *и* $\mathbb{E}(X)$.

е) *Найдите* $g''(1)$ *и* $\mathbb{E}(X(X-1))$.

ж) *Выразите* $\mathrm{Var}(X)$ *через* $g'(1)$ *и* $g''(1)$.

**Задача** 7.7. *Случайной величине* $X$, *чей закон распределения задан таблицей:*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $(X = x_i)$ | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

*сопоставим «производящую» функцию* $f(t) = 0.3t^0 + 0.2t^1 + 0.5t^2$

а) *Какой вероятностный смысл имеют величины* $f'(1)$, $f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2$*?*

б) *Как связаны* $\mathbb{P}(X = x_i)$ *и* $f^{(i)}(0)$*? Примечание:* $f^{(i)}(0)$ *— это* $i$*-ая производная.*

**Задача** 7.8. *Случайная величина* $Y$ *задана табличкой:*

| $y_i$ | 0 | 1 | -1 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y_i)$ | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

а) *Найдите функцию* $g(t) = \mathbb{E}(t^X)$ *и постройте ее график.*

б) *Чему равно* $g(1)$*?*

в) *Верно ли, что* $g(0) = \mathbb{P}(X = 0)$*?*

г) *Верно ли, что* $g(1) = \mathbb{P}(X = 1)$*?*

д) *Найдите* $g'(1)$ *и* $\mathbb{E}(X)$.

е) *Найдите* $g''(1)$ *и* $\mathbb{E}(X(X-1))$.

ж) *Выразите* $\mathrm{Var}(X)$ *через* $g'(1)$ *и* $g''(1)$.

**Задача** 7.9. *Пусть* $S_n$ *— симметричное случайное блуждание.*

а) *Найдите производящую функцию для* $S_n$.

б) *Найдите* $\mathbb{E}(S_n^4)$.

**Задача** 7.10. *Пусть* $X$ *и* $Y$ *независимы и их сумма нормальна.*
*Верно ли, что* $X$ *и* $Y$ *нормальны?*
**Задача** 7.11. *Пусть* $g(t)$ *— производящая функция целочисленной неотрицательной случайной величины* $X$. *Известно, что* $g(0) = 0$ *и* $g(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. *Что можно сказать о законе распределения* $X$*?*
**Задача** 7.12. *Вася хватается за точку* $t$ *на отрезке* $[0; 1]$. *Затем на отрезке делается* $n$ *равномерно выбираемых случайных разрезов. Васе достается тот кусок, за который он держится. Какова средняя длина куска, достающегося Васе?*

# 8. Условное ожидание

***Задача* 8.1**. *Borel-Kolmogorov paradox*
*По статье из Wikipedia*
*Пусть совместная функция плотности $X$ и $Y$ имеет вид:*
$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, -y < x < 1-y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
*Пусть $U = \frac{X}{Y} + 1$.*

а) *Найдите функцию плотности $p_{Y|X}(y|x)$.*

б) *Найдите функции плотности $p_{U,Y}(u,v)$ и $p_{Y|U}(y,u)$.*

в) *Верно ли, что $X = 0 \Leftrightarrow U = 1$?*

г) *Верно ли, что $p_{Y|X}(t|0) = p_{Y|U}(t,1)$?*

д) *Мораль?*

***Задача* 8.2**. *Пусть $X$ — равномерна на отрезке $[0;1]$. В шляпе лежат две свернутые бумажки. На одной бумажке написано $X$, на другой $X^2$. Вы тяните одну бумажку наугад. Пусть $Z$ — число, написанное на вытянутой Вами бумажке, а $W$ — число на другой бумажке. Увидев число, Вы решаете, оставить себе эту бумажку, или отказаться от этой и забрать оставшуюся. Ваш выигрыш — число на оставшейся у Вас бумажке.*

а) *Найдите $\mathbb{E}(W|Z)$.*

б) *Максимально подробно (кубическое уравнение там будет суровое, не решайте его) опишите стратегию, максимизирующую Ваш выигрыш.*

в) *Как изменится результат, если на одной бумажке написано значение $X$, а на второй — значение случайной величины, имеющей такое же распределение, как и $X^2$, но независимой от $X$?*

***Задача* 8.3**. *Пусть $X$ и $Y$ независимы и экспоненциально распределены с параметром $\lambda$.*
*Найдите $\mathbb{E}(X|X+Y)$, $\mathbb{E}(X+Y|X-Y)$, $\mathbb{E}(X|X-Y)$, $\mathbb{E}(X||X-Y|)$.*
***Задача* 8.4**. *Пусть $X \sim U[0;100]$, $Y \sim U[-1;1]$ и независимы. Найдите $\mathbb{E}(X|X+Y)$.*
***Задача* 8.5**. *Внутри круга радиуса 1 равномерно выбирается точка. Пусть $X$ и $Y$ — ее абсцисса и ордината. Найдите совместную функцию плотности $p(x,y)$, частную функцию плотности $p(x)$, условную функцию плотности $p(x|y)$, $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(X^2|Y)$, $Cov(X,Y)$.*
*Являются ли $X$ и $Y$ независимыми?*
***Задача* 8.6**. *Suppose (X,Y) is a random vector with a distribution given by $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = 1/10$ for $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4$.*
*Find $\mathbb{E}(Y|X)$*
***Задача* 8.7**. *Пусть $X \sim U[0;1]$, $Y$ равновероятно равно 0 и 1, $X$ и $Y$ независимы, $Z = X^Y$. Найдите $\mathbb{E}(Z|Y)$, $\mathrm{Var}(Z|Y)$, $\mathbb{E}(Z|X)$, $\mathrm{Var}(Z|X)$*
***Задача* 8.8**. *Правильный кубик подбрасывается один раз. $X$ — число очков, выпавшее на кубике. $Y$ — индикатор того, выпала ли четная грань. $Z$ — индикатор того, выпало ли число больше 2-х.*
*Найдите закон распределения (проще говоря, заполните табличку) для случайных величин $\mathbb{E}(XY|XZ)$, $\mathbb{E}(Z|X)$, $\mathbb{E}(X|Z)$*
*Табличка для заполнения:*

| $\Omega$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{E}(XY\|XZ)$ | | | | | | |
| $\mathbb{E}(Z\|X)$ | | | | | | |
| $\mathbb{E}(X\|Z)$ | | | | | | |

***Задача* 8.9.** *Докажите, что* $|EX| \leqslant E|\mathbb{E}(X|\mathcal{H})| \leqslant E|X|$.
***Задача* 8.10.** *Пусть* $A$ *— событие, и* $X \in L^1$. *Как связаны* $\mathbb{E}(X|A)$, $\mathbb{E}(X|A^c)$ *и* $\mathbb{E}(X|1_A)$?
***Задача* 8.11.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ *независимы и одинаково распределены,* $Z = X + Y$. *Найдите* $p_{X|Z}(x|z)$, $\mathbb{E}(X|Z)$, $\operatorname{Var}(X|Z)$ *для случаев:*

а) $X$ *— экспоненциально распределено с* $\lambda$

б) $X$ *— равномерно распределено на* $[0;1]$

***Задача* 8.12.** *Пусть* $X$ *имеет экспоненциальное распределение с параметром* $\lambda$
*Найдите* $\mathbb{E}(X|X^2)$
***Задача* 8.13.** *Два игрока одновременно выбирают действительные числа* $x_1$ *и* $x_2$, *соответственно. Платежные функции имеют вид* $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 + 2x_2x_1 + \theta_1 x_1 \\ -x_2^2 + 4x_1x_2 + 2\theta_2 x_2 \end{pmatrix}$, *где* $\theta_1 \sim U[0;2]$, $\theta_2 \sim U[1;2]$
*Значение* $\theta_1$ *известно первому игроку, а значение* $\theta_2$ *— второму. Найдите равновесие по Нэшу в чистых стратегиях;*
***Задача* 8.14.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ *— интегрируемые случайные величины, такие что* $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ *и* $\mathbb{E}(Y|X) = X$. *Верно ли, что* $X = Y$ *(as)?*
***Задача* 8.15.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ *— независимые случайные величины, равные 1 с вероятностью* $p \in (0;1)$ *или 0. Пусть* $Z = 1_{X+Y=0}$. *Найдите* $\mathbb{E}(X|Z)$.
***Задача* 8.16.** [*важно!*]
*Пусть* $X \in L^1$, $Y \in L^1$ *и* $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$. *Рассмотрим все множества* $A$, *для которых* $\mathbb{E}(X 1_A) = \mathbb{E}(Y 1_A)$. *Верно ли, что они образуют* $\sigma$*-алгебру?*
*Почему для нахождения* $\mathbb{E}(X|Y)$ *достаточно проверять CE2 множествами вида* $A = 1_{Y \leqslant t}$?
***Задача* 8.17.** *Пусть* $f : \mathbb{R} \to [0;1]$ *и* $Y \sim U[0;1]$. *Найдите* $\mathbb{P}(Y \leqslant f(X)|X)$
***Задача* 8.18.** *Pythagoras is back!*

а) *Назовем условной дисперсией величину* $\operatorname{Var}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{H}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{H})^2$
*Докажите, что* $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(\operatorname{Var}(X|\mathcal{H})) + \operatorname{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H}))$.

б) *Пусть* $S$ *— сумма случайного количества слагаемых,* $S = \sum_{i=1}^N X_i$, *где* $N$ *и* $X_i$ *независимы,* $X_i$ *— независимы и одинаково распределены. Докажите, что* $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_i)$ *и* $\operatorname{Var}(S) = \mathbb{E}(N)\operatorname{Var}(X_i) + [\mathbb{E}(X_i)]^2 \operatorname{Var}(N)$.

*Комментарий: чтобы прочувствовать последнюю формулу, представьте, во что она превращается, если* $X_i$ *или* $N$ *— константа.*

***Задача* 8.19.** *Пусть* $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ *и* $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. *Что представляет собой* $\mathbb{P}(A|\mathcal{H})$ *и* $\mathbb{P}(B|\mathcal{H})$?
***Задача* 8.20.** *Пусть* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Приведите пример, в котором* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H}_1)|\mathcal{H}_2) \neq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H}_2)|\mathcal{H}_1)$.
***Задача* 8.21.** *Пусть* $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. *Докажите, что условие* $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}_2)$ *равносильно условию* $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}_2) \in \mathcal{H}_1$.
***Задача* 8.22.** *Докажите условную :) формулу условной вероятности:*
*Если* $A \in \mathcal{H}$ *и* $\mathbb{P}(B) > 0$, *то* $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{E}(1_A \mathbb{P}(B|\mathcal{H}))}{\mathbb{E}(\mathbb{P}(B|\mathcal{H}))}$.
***Задача* 8.23.** *Пусть* $Z = \mathbb{E}(X|Y)$. *Верно ли, что* $\mathbb{E}(X|Y^2) = \mathbb{E}(Z|Y^2)$?
***Задача* 8.24.** *Пусть* $A$ *— событие (не обязательно из* $\mathcal{H}$*). Введем обозначение* $\mathbb{P}(A|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(1_A|\mathcal{H})$ *по аналогии с безусловным* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A)$.

а) *Найдите* $\mathbb{P}(A|\mathcal{H})$ *для случая* $A \in \mathcal{H}$.

б) *Пусть* $A$ *и* $B$ *независимы,* $\mathbb{P}(A) = p$, $\mathbb{P}(B) = q$ *и* $Z = 1_{A \cup B}$. *Найдите* $\mathbb{P}(A|Z)$.

в) *Пусть* $X$ *и* $Y$ *— результаты двух подбрасываний правильного кубика. Найдите* $\mathbb{P}(X > Y|Y)$.

***Задача* 8.25.** *Пусть* $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & x, y \in [0;1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$.

а) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$.

б) Найдите $\hat{X} = aY + b$ так, чтобы $E[(X - \hat{X})^2]$ была минимальной.

**Задача** 8.26. какая-то фигня

Величина $U \sim U[0;1]$, $X$ имеет распределения Рэлея:

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} & x \geqslant 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}.$

а) Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$.

б) Найдите $\hat{X} = aY + b$ так, чтобы $E[(X - \hat{X})^2]$ была минимальной.

**Задача** 8.27. Пусть $X$ и $Y$ имеют совместное нормальное распределение. Известны математические ожидания и ковариационная матрица.

а) Найдите $\hat{X} = aY + b$ так, чтобы $E[(X - \hat{X})^2]$ была минимальной.

б) Докажите, что $\mathbb{E}(X|Y) = \hat{X}$.

**Задача** 8.28. Пусть $X \in L^2$ и $Y \in L^2$, $X$ и $Y$ iid.
Найдите $\mathbb{E}(X|X+Y)$, $\mathbb{E}(X-Y|X+Y)$, $\mathbb{E}(X^2-Y^2|X+Y)$

**Задача** 8.29. Пусть $X_i$ — независимы и равномерны $U[0;1]$, $X_{min} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, и $X_{max} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

а) Найдите $\mathbb{E}(X_1|X_{min}$ и $\mathbb{E}(X_1|X_{max})$

б) Найдите $\mathbb{E}(X_1|X_{min}, X_{max})$.

в) Найдите $\mathbb{E}(X_1^2|X_{min})$.

**Задача** 8.30. Известно, что $Y = X^2$. Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$ если

а) $X \sim \mathcal{N}(0;1)$;

б) $X \sim \mathcal{N}(1;1)$;

**Задача** 8.31. Пусть $X$ и $Y$ имеют функцию плотности $p(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right\}$.
Пусть $Z = \sqrt{X+Y}$. Найдите $\mathbb{E}(X|Z)$.

**Задача** 8.32. Автобусы приходят на остановку через случайные промежутки времени и представляют собой пуассоновский поток с параметром $\lambda$. В первый день Вася приходит на остановку и замеряет время до первого автобуса. Пусть это время $X$. На следующий день Вася приходит на остановку и считает, сколько автобусов придет в течении времени $X$. Он получает количество автобусов $N$.

а) Найдите $\mathbb{E}(N)$ и $\mathrm{Var}(N)$.

б) Найдите $\mathbb{P}(N > 0)$.

**Задача** 8.33. Let $X_1, X_2, \ldots X_n$ be indepdently and identically distribuetd random variables, strictly positive.
Show that $\mathbb{E}(S_m|S_n) = m/n$ for $m \leqslant n$ , where $S_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$

**Задача** 8.34. Монетка выпадает орлом с вероятностью $p$. Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе монетку подкидывают 100 раз и записывают число орлов. На втором этапе монетку подбрасывают до тех пор, пока не выпадет столько орлов, сколько выпало на первом этапе. Обозначим число подбрасываний монетки на втором этапе буквой $X$.
Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$

**Задача** 8.35. *Рассмотрим вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{B}[0;1], \lambda)$, *где* $\lambda$ — *классическая мера Лебега.*
*На этом пространстве введем величины:*
$X(\omega) = 1_{\omega\in[0;0.5)}, Y(\omega) = 1_{\omega\in[0;0.75)}, Z(\omega) = 1_{\omega\in[0.25;0.75)}$.

а) *Верно ли, что* $X$ *и* $Z$ *независимы?*

б) *Найдите* $\mathbb{E}(X|Y)$ *и* $\mathbb{E}(X|Y, Z)$.

**Задача** 8.36. *Пусть* $X$ *и* $Z$ *независимы и стандартно нормально распределены;* $Y = \frac{Z}{1+X^2}$.

а) *Верно ли, что* $X$ *и* $Y$ *независимы?*

б) *Верно ли, что* $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$?

**Задача** 8.37. *Let* $X$ *be an exponential random variable, so that* $\mathbb{P}[X > t] = e^{-\lambda t}$ *for* $t > 0$, *with* $\lambda > 0$. *Let* $T$ *be a fixed value, and then compute* $E[X|\max(X, T)]$ *and* $E[X|\min(X, T)]$.
**Задача** 8.38. *Пусть совместное распределение* $X$ *и* $Y$ *задано таблицей:*

| | $X = -1$ | $X = 1$ |
|---|---|---|
| $Y = -1$ | *1/8* | *4/8* |
| $Y = 2$ | *2/8* | *1/8* |

а) *Найдите* $\mathbb{E}(X|Y)$, *представьте ответ в виде* $\mathbb{E}(X|Y) = a + bY$.

б) *Убедитесь, что* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$.

в) *Найдите* $\mathbb{E}(XY|Y)$ *и представьте ответ в виде* $f(Y)$.

**Задача** 8.39. а) *Что больше* $\mathrm{Var}(X)$ *или* $\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H}))$?

б) *Всегда ли* $\mathrm{Var}(X)$ *больше* $\mathrm{Var}(X|\mathcal{H})$?
**Задача** 8.40. *Пусть* $X$ *равномерно на* $[10; 20]$, *а* $Y$ *распределено экспоненциально с параметром* $\lambda = X$.

а) *Найдите* $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

б) *Сравните с* $\mathbb{E}(Y)$ *и* $\mathrm{Var}(Y)$ *для экспоненциального распределения с* $\lambda = 15$.

**Задача** 8.41. *Пусть клиенты приходят пуассоновским потоком с интенсивностью* $\lambda_{in}$. *А время обслуживания одного клиента экспоненциально с параметром* $\lambda_{service}$.
*Пусть* $X$ — *число клиентов, пришедших за время обслуживания Васи Сидорова.*
*Как распределено* $X$?
**Задача** 8.42. *Пусть* $X$ *распределено экспоненциально с параметром* $\lambda$, $Y$ — *распределено экспоненциально с параметром* $X$. *Найдите* $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X|Y)$
**Задача** 8.43. *Верно ли, что* $Cov(X, \mathbb{E}(Y|X)) = Cov(X, Y)$?
**Задача** 8.44. *Приведите пример:*

а) $X$ *и* $Y$ *зависимы, но* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

б) $X$ *и* $Y$ *зависимы, но* $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ *(as)*

в) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, *но* $\mathbb{E}(Y|X) \neq \mathbb{E}(Y)$ *(as)*

**Задача** 8.45. *Докажите, что если* $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ *(as), то* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
**Задача** 8.46. *Известно, что* $\mathbb{E}(X|Y) = Y$, $\mathrm{Var}(X|Y) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 10$.
*Найдите:* $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2|Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $Cov(X, Y)$

***Задача* 8.47**. *Find conditional expectation $\mathbb{E}(X|Y)$ intuitively (without formal proof)*
$Z \sim U[0;1]$, $A = \{Z > 0.5\}$, $X = 2Z^2$, $Y = 2Z - 1_A$.
***Задача* 8.48**. *We toss a fair coin 3 times. Let $X$ be the total number of heads and $Y$ — the total number of tails. $A$ — is the event that there is at least one head and at least one tail.*

а) *Find explicitely $\sigma(A)$, $\sigma(X \cdot Y)$.*

б) *How many elements there in $\sigma(X)$?*

в) *Find explicitely $\mathbb{E}(X|\sigma(Y))$, $\mathbb{E}(X|\sigma(XY))$, $\mathbb{E}(X|\sigma(A))$.*

г) *Find explicitely $\mathbb{E}(Y|\sigma(XY))$, $\mathbb{E}(1_A|\sigma(XY))$, $\mathbb{E}(1_A|\sigma(A))$.*

***Задача* 8.49**. *Верны ли следующие утверждения?*

а) *Если величины $X$ и $Y$ независимы, то $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.*

б) *Если $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, то величины $X$ и $Y$ независимы.*

в) *Если величины $X$ и $Y$ некоррелированы, то $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$.*

г) *Если $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$, то величины $X$ и $Y$ некоррелированы.*

*Источник: Алексей Суздальцев*
***Задача* 8.50**. *Вася случайно выбирает между 0 и 1 число $X_1$, затем случайно выбирает между 0 и $X_1$ число $X_2$, затем $X_3$ между 0 и $X_2$, и так до бесконечности.*

а) *Найдите $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathrm{Var}(X_n)$;*

б) *Найдите функцию плотности распределения $X_n$;*

в) *Найдите $\mathbb{E}(X_2|X_1, X_3)$;*

г) *К какой случайной величине стремится $X_n$ и в каких смыслах?*

*Источник: Алексей Суздальцев*
***Задача* 8.51**. *Маша собрала $n$ грибов в лесу наугад. В лесу есть рыжики, мухоморы и лисички. Рыжики попадаются с вероятностью $r > 0$, лисички "--- с вероятностью $l > 0$, мухоморы "--- с вероятностью $m > 0$, $r+m+l = 1$. Пусть $R$ "--- количество собранных рыжиков, $L$ "--- лисичек, а $M$ "--- мухоморов. Найдите:*

а) $\mathbb{E}(R + L|M)$, $\mathbb{E}(M|R + L)$

б) $\mathbb{E}(R|L)$

в) $\mathrm{Var}(R|L)$

г) $\mathbb{E}(R + L|L + M)$

д) $\mathbb{E}(R|R - L)$ *(? похоже, не решается в явном виде)*

е) $\mathrm{Var}(R|L)$

ж) $\mathbb{P}(\mathbb{E}(R|L) = 0)$

з) $\mathbb{P}(R = 0|L)$

и) $\mathbb{E}\left(\left(\frac{m}{r+m}\right)^{100-L}\right)$

**Задача 8.52.** *Пусть $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, $X - Bin(n_1, p)$, $Y - Bin(n_2, p)$. Найдите* $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

**Задача 8.53.** *Пусть $X$ и $Y$ — независимые пуассоновские случайные величины с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Найдите* $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

**Задача 8.54.** *Вася, Петя и Коля играют в карточного «дурака» втроём. Вася проигрывает с вероятностью $p_1$, Петя — с вероятностью $p_2$, Коля — с вероятностью $p_3$. Естественно, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Всего они сыграли $n$ партий. Обозначим количества проигранных ими партий $X_1$, $X_2$ и $X_3$, соответственно. Найдите* $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2)$. *Может получится и* $\mathrm{Var}(X_1|X_1+X_2)$*?*

**Задача 8.55.** *Пусть $X_1 \sim U[0;1]$, $X_2 \sim U[-1;1]$, $X_3 \sim U[-1;2]$. И $Y_i = X_i^2$.*
*Найдите* $\mathbb{E}(X_1|Y_1)$, $\mathbb{E}(X_2|Y_2)$ *и* $\mathbb{E}(X_3|Y_3)$.

**Задача 8.56.** *Let $X$ be uniform on $[0;1]$. We define $A := \{X > 0.1\}$ and $Y := X^2$. Find* $\mathbb{E}(Y|\sigma(1_A))$, $\mathbb{E}(1_A|\sigma(Y))$ *and* $\mathbb{E}(1_A + Y|Y - 1_A)$.

**Задача 8.57.** *Какая $\sigma$-алгебра в общем случае больше, $\sigma(X)$ или $\sigma(X^2)$? Приведите пример для случая* $\sigma(X) = \sigma(X^2)$.

**Задача 8.58.** *Пусть $X_1$, ..., $X_{100}$ независимы и равномерны на $[0;1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{80}\}$ а $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \ldots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \ldots, X_{100}\}$*
*Найдите*

а) $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$

б) $\mathbb{E}(X_1|L)$, $\mathbb{E}(X_1|\min\{X_1, \ldots, X_{100}\})$

в) $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_{100}\}|\max\{X_1, \ldots, X_{100}\})$

г) $\mathbb{E}(\min\{X_1, \ldots, X_{100}\}|X_1)$

**Задача 8.59.** *Пусть $X_1$, ..., $X_n$ — независимы и равномерны на $[0;1]$, и $M = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Найдите $\mathbb{E}(M^k)$ в уме без вычислений. Подсказка:* $M = \mathbb{P}(M > X_{n+1}|M)$

**Задача 8.60.** *Известно, что $Y$ и $X = \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$ одинаково распределены. Верно ли, что $Y = X$ почти наверное? Hint: start by comparing sets $Y > 0$ and $X > 0$*

**Задача 8.61.** *Верно ли, что* $\mathbb{E}(X|Y^2) = \mathbb{E}(X||Y|)$*?*

**Задача 8.62.** *Величины $X_1$, $X_2$, ...независимы и одинаково распределены. Мы складываем случайное количество $N$ слагаемых. Обозначим сумму буквой $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Найдите* $\mathbb{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$ *и* $Cov(S, N)$

**Задача 8.63.** *Неправильный кубик выпадает с вероятностью 0,5 шестеркой вверх. Остальные пять граней выпадают равновероятно. Случайная величина $X$ -- остаток от деления номера грани на два, $Y$ -- остаток от деления номера грани на три. Найдите*

а) *Закон распределения* $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$

б) *Выразите* $\mathbb{E}(Y \mid X)$ *через* $X$, *а* $\mathbb{E}(X \mid Y)$ *через* $Y$

в) *Найдите* $Cov(\mathbb{E}(Y \mid X), \mathbb{E}(X \mid Y))$, $Cov(\mathbb{E}(Y \mid X), X)$, $Cov(Y, X)$

**Задача 8.64.** *Случайная величина $X$ принимает значения в диапазоне $[0;1]$. Всегда ли существует случайная величина $Y$, принимающая всего два значения, такая, что $E(Y|X) = X$? Такая, что $E(X|Y) = Y$?*

**Задача 8.65.** *Цена литра молока, $X$, распределена равномерно на отрезке $[1;2]$. Количество молока, которое дает корова Мурка, $Y$, распределено экспоненциально с $\lambda = 1$. Надои не зависят от цены. Величина $Z$ — выручка кота Матроскина от продажи всего объема молока.*
*Найдите*

а) $E(Z|X)$, $\mathrm{Var}(Z|X)$, *корреляцию $Z$ и $X$*

б) *Закон распределения* $E(Z|X)$

*в)* *Функцию плотности величины* $\mathrm{Var}(Z|X)$

***Задача*** **8.66**. *Кубик подбрасывают бесконечное количество раз. Величина* $X$ *— номер подбрасывания, когда впервые выпала единица, а* $Y$ *— номер подбрасывания, когда впервые выпала шестерка. Найдите* $\mathbb{E}(Y|X)$.

***Задача*** **8.67**. *Верно ли, что* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Z) \cdot \mathbb{E}(Y \mid X))$, *если левая и правая части определены?*

***Задача*** **8.68**. *The random variables* $X_1, X_2, \ldots$ *are independent uniformly distributed on* $[0; 1]$. *I am summing them until the first* $X_i$ *greater than* $0.5$ *is added. After this term I stop. Let's denote by* $S$ *the total sum and by* $N$ *— the number of terms added. Find* $\mathbb{E}(S|N)$, $\mathrm{Var}(S|N)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$

*Котёнок с улицы Лизюкова ловит карасей до тех пор, пока не поймает карася длиной более полуметра. Длины карасей независимы и равномерны от 0 до 1 метра. Обозначим буквой* $N$ *количество пойманных карасей, а буквой* $S$ *— их суммарную длину. Найдите* $\mathbb{E}(S|N)$, $\mathrm{Var}(S|N)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathrm{Var}(S)$.

***Задача*** **8.69**. *Правильная монетка подбрасывается 3 раза. Случайная величина* $X$ *— количество выпавших орлов. Событие* $A$ *состоит в том, что в первый и третий раз результаты подбрасывания совпали. Событие* $B$ *— при последнем броске выпала решка.*

*а)* *Найдите* $\sigma(A)$.

*б)* *Сколько элементов в* $\sigma(X)$*?*

*в)* *Найдите* $\mathbb{E}(X \mid A)$, $\mathbb{E}(X \mid B)$.

*г)* *Найдите* $\mathbb{E}(X|\sigma(A))$, $\mathbb{E}(X|\sigma(B))$ *и* $\mathbb{E}(1_A \mid X)$.

***Задача*** **8.70**. *Найдите* $\mathbb{E}(Y|X)$ *и* $\mathbb{E}(Y^3|X)$ *если* $X$ *и* $Y$ *стандартные нормальные в совокупности с* $\mathrm{Corr}(X, Y) = \rho$.

***Задача*** **8.71**. *Известно, что* $Y = X\cos(X) + Z$, *где* $X \sim N(0, 10)$, $Z \sim U[0; 30]$ *и* $X$ *и* $Z$ *независимы. Найдите* $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(Y|Z)$

***Задача*** **8.72**. *Известно, что* $X = (Z_1 + Z_2)^2 + Z_3$ *и* $Y = (Z_1 + Z_2)^3 + Z_3$, *величины* $Z_i$ *независимы,* $Z_1 \sim U[0; 2]$, $Z_2 \sim N(1, 4)$, $Z_3 \sim N(-2, 9)$. *Найдите*

*а)* $\mathbb{E}(X \mid Z_1)$, $\mathbb{E}(X \mid Z_2)$, $\mathbb{E}(X \mid Z_3)$

*б)* $\mathbb{E}(Y \mid Z_1)$, $\mathbb{E}(Y \mid Z_2)$, $\mathbb{E}(Y \mid Z_3)$

***Задача*** **8.73**. *Величины* $X$ *и* $Y$ *имеют совместную функцию плотности*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, \text{ если } x, y \in [0; 1], \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

*Найдите* $f(x)$, $f(y|x)$, $\mathbb{E}(Y|X)$.

***Задача*** **8.74**. *Если* $X$ *имеет нормальное распределение* $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, *а фукнция* $g(t)$ *не слишком быстро растёт при* $t \to \infty$, *то* $\mathbb{E}((X - \mu)g(X)) = \sigma^2 \mathbb{E}(g'(X))$. *Доказывать это равенство не требуется, но если интересно, то оно доказывается путём интегрирования по частям левой части. Исходя из данного равенства докажите, что для довольно произвольных* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *и* $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ *и функции* $f$ *выполнено равенство:*

$$\mathbb{E}((X - \mu)f(X, Y_1, \ldots, Y_n)) = \sigma^2 \mathbb{E}(f'_x(X, Y_1, \ldots, Y_n)).$$

***Задача*** **8.75**. *Храбрая исследовательница Василиса подбрасывает правильную монетку до выпадений двух орлов подряд. Пусть* $X$ *— это количество орлов,* $Y$ *— решек, а* $Z$ *— всего подбрасываний.*

*а)* *Найдите* $\mathbb{E}(X|Y = 3)$;

*б)* *Найдите* $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X|Z)$, $\mathbb{E}(Z|X)$, $\mathbb{E}(Y|Z)$ *и* $\mathbb{E}(Z|Y)$;

*в)* *Хм, а* $\mathbb{E}(X^2|Y)$*?*

# 9. Разложение в сумму, первый шаг, цепи Маркова

***Задача* 9.1.** *Information on buy-backs is adapted from investorwords.com. This problem suggests how results on biased random walks can be worked into more realistic models.*
*Consider a naive model for a stock that has a support level of \$20/share because of a corporate buy-back program. (This means the company will buy back stock if shares dip below \$20 per share. In the case of stocks, this reduces the number of shares outstanding, giving each remaining shareholder a larger percentage ownership of the company. This is usually considered a sign that the company's management is optimistic about the future and believes that the current share price is undervalued. Reasons for buy-backs include putting unused cash to use, raising earnings per share, increasing internal control of the company, and obtaining stock for employee stock option plans or pension plans.) Suppose also that the stock price moves randomly with a downward bias when the price is above \$20, and randomly with an upward bias when the price is below \$20. To make the problem concrete, we let $Y_n$ denote the stock price at time $n$, and we express our stock support hypothesis by the assumptions that*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_{n+1} = 21 | Y_n = 20] &= 9/10 \\
\mathbb{P}[Y_{n+1} = 19 | Y_n = 20] &= 1/10
\end{aligned}
$$

*We then reflect the downward bias at price levels above \$20 by requiring that for $k > 20$:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_{n+1} = k+1 | Y_n = k] &= 1/3 \\
\mathbb{P}[Y_{n+1} = k-1 | Y_n = k] &= 2/3.
\end{aligned}
$$

*We then reflect the upward bias at price levels below \$20 by requiring that for $k < 20$:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_{n+1} = k+1 | Y_n = k] &= 2/3 \\
\mathbb{P}[Y_{n+1} = k-1 | Y_n = k] &= 1/3
\end{aligned}
$$

*Using the methods of ``single-step analysis" calculate the expected time for the stock to fall from \$25 through the support level all the way down to \$18. (I don't believe that there is any way to solve this problem using formulas. Instead you will have to go back to basic principles of single-step or first-step analysis to solve the problem.)*

***Задача* 9.2.** *Пусть $S_n$ — симметричное случайное блуждание с началом в нуле и $\tau$ — момент первого достижения суммы в 1 рубль. Найдите $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(S_{n\wedge\tau})$ и $\mathbb{E}(S_\tau)$.*

***Задача* 9.3.** *Допустим, что игрок играет либо до достижения некоторой суммы либо до полного проигрыша. Обозначим $p$ вероятность выигрыша в отдельной партии.*
*Прокомментируйте следующее утверждение:*
*Ставку выгодно удвоить, если $p < \frac{1}{2}$ и выгодно снизить в два раза, если $p > \frac{1}{2}$.*

***Задача* 9.4.** *Сколько существует маршрутов движения частицы, начинающихся в нуле ($S_0 = 0$), заканчивающихся в нуле при $t = 10$ ($S_{10} = 0$) и не посещающих ноль между этими моментами времени?*

***Задача* 9.5.** *Пусть $S_n$ — случайное блуждание, $S_n - S_{n-1} = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & 1-p \end{cases}$.*
*Пусть $n$ — четное число и $t \leqslant n$. Зависит ли $\mathbb{P}(S_t = k | S_n = 0)$ от $p$?*

***Задача* 9.6.** *The following example is a classic in elementary probability theory called the Ballot Problem. In an election, candidate A receives $n$ votes and candidate B receives $m$ votes, where $m > n$, so A is the winner. Assuming that all orderings of vote countings are equally likely, prove that the probability that A is always ahead in the count of votes is $(n-m)/(n+m)$*

***Задача* 9.7.** *Consider a coin-flipping game, where the probability of a head is $p$ and the probability of a tail is $1-p$. What is the probability that for the first time on flip $2n$ after beginning, the total number of heads is the same as the total number of tails? Since the number of heads is the same as the number of tails, the total* *number of coin-flips is double the number of heads, hence an even number. Note that we do ask that heads be ahead of tails until flip $2n$ or that tails be ahead of heads, only that they first equalize at flip $2n$ Equivalently, consider a gambler starting from an initial stake $X_0$. The gambler wins a dollar when the coin flip is heads with probability $p$. The gambler loses a dollar when the coin flip is tails with probability $1-p$. Let the outcome of the $i$th flip be*

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with probability } p \\ -1 & \text{with probability } 1-p \end{cases}$$

*Then the gambler's fortune at stage $n$ is $X_0 + \sum_{i-1}^{n} X_i$. Define the probability that the gambler's fortune is again $X_0$ for the first time at step $2n$? We do not care if the gambler has been ahead or behind, only that he gambler's fortune again is his starting value at flip $2n$.*

**Задача 9.8.** *In a random walk starting at the origin find the probability that the point $a > 0$ will be reached before the point $-b < 0$.*

**Задача 9.9.** *Show that in a random walk starting at the origin the probability to reach $a > 0$ before returning to the origin equals $p(1-q_1)$*

**Задача 9.10.** *а) Draw a sample path of a random walk (with $p = 1/2 = q$) starting from the origin where the walk visits the position $5$ twice before returning to the origin.*

*б) Using the result from questions 2, it can be shown with careful but elementary reasoning that the number of times $N$ that a random walk ($p = 1/2 = q$) reaches the value $a$ a total of $n$ times before returning to the origin is a random variable with probability*

$$\mathbb{P}[N = 0] = 1 - 1/(2a)$$

*and*

$$\mathbb{P}[N = n] = \left(\frac{1}{4a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{n-1}.$$

*for $n \geqslant 1$. Compute the expected number of visits $\mathbb{E}[N]$ to level $a$.*

*в) Compare the expected number of visits of a random walk ($p = 1/2 = q$) to the value ``1 million'' before returning to the origin and to the level $10$ before returning to the origin.*

## 10. Мартингалы

**Задача 10.1.** *Придумайте мартингал $X_n$, такой, что одновременно выполнены 3 условия:*

*а)* $\sup X_n < \infty$

*б) Существует число $a$, такое что $\mathbb{P}(X_n = ai.o.) = 1$*

*в) Существует число $b > a$, такое что $\mathbb{P}(X_n = bi.o.) = 1$*

**Задача 10.2.** *Приведите пример субмартингала $X_n$ такого, что $X_n^2$ - супермартингал.*

**Задача 10.3.** *Докажите утверждения:*
*Если $X_n$ — субмартингал, то $(X_n - a)^+$ — субмартингал.*
*Если $X_n$ — супермартингал, то $X_n \wedge a$ - супермартингал.*

**Задача 10.4.** *Если $X_n$ — мартингал по отношению к некоторой фильтрации $\mathcal{F}_n$, то $X_n$ — мартингал по отношению к своей естественной фильтрации.*

**Задача 10.5.** *Пусть $S_n$ — симметричное случайное блуждание, $S_0 = 0$.*
*Верно ли, что $Z_n = (-1)^n \cos(\pi S_n)$ — мартингал?*
*Source: Zastawniak, ex. 3.6*
**Задача 10.6.** *Пусть $M_n$ — неотрицательный субмартингал, $\lambda > 0$ и $M_n^* = \sup_{i \leqslant n} M_i$.*
*Верен ли следующий вариант неравенства Дуба: $\lambda \mathbb{P}(M_n^* > \lambda) \leqslant \mathbb{E}(M_n 1_{M_n^* > \lambda}) \leqslant \mathbb{E}(M_n)$?*
*10.6*
**Задача 10.7.** [*Williams, E10.1*]
*В начальный момент времени в урне лежит 1 черный и 1 белый шар. В каждый момент времени из урны наугад извлекается один шар. Вместо одного извлеченного шара в урну кладут два шара такого же цвета. Пусть $C_n$ — количество, а $M_n$ — доля черных шаров после $n$-го шага. Рассмотрим также величину $B_n$, показывающую, сколько раз из урны доставали черный шар к моменту времени $n$ включительно.*

а) *Как связаны $B_n$ и $C_n$?*

б) *Докажите, что $M_n$ — мартингал.*

в) *Найдите $\mathbb{P}(C_n = k)$.*

г) *Как распределен $\lim M_n$?*

д) *Докажите, что для $0 < \theta < 1$ мартингалом будет последовательность*

$$N_n = (n+1) C_n^{B_n} \theta^{B_n} (1-\theta)^{n-B_n}.$$

**Задача 10.8.** *В фирме работает два менеджера, $A$ и $B$. Изначально у каждого менеджера было по одному клиенту. Обозначим $A_n$ и $B_n$ — количество клиентов, обратившихся к менеджерам $A$ и $B$ к моменту времени $n$ включительно. Обозначим $M_n = \frac{A_n}{A_n + B_n}$, долю клиентов, предпочедших менеджера $A$.*
*В каждый момент времени $n$ в фирму приходит один новый клиент. Он обращается к менеджеру $A$ с вероятностью $M_{n-1}$, и к менеджеру $B$ с вероятностью $(1 - M_{n-1})$.*

а) *Верно ли, что $M_n$ — мартингал?*

б) *Верно ли, что $M_n$ сходится (as)?*

в) *К чему сходится (as) $M_n$?*

**Задача 10.9.** *Вася стреляет в мишень. Вероятность попасть в следующий раз равна доле имеющихся попаданий. В первый раз Вася попал, во второй — нет.*
**Задача 10.10.** *Изначально курс акций $S_0 = 100$. Безрисковая процентная ставка равна $r = 0.1$. В каждый момент времени курс акций может либо домножиться на $u = 1.2$ с вероятностью $p$, либо на $d = 0.9$ с вероятностью $1 - p$. При каком $p$ дисконтированный курс акций будет мартингалом?*
**Задача 10.11.** *Каждый индивид живет один момент времени. Число потомков каждого индивида — случайная величина, имеющая закон распределения $X$ (одинаковый для всех индивидов). Пусть $Y_n$ — численность $n$-го поколения, $Y_0 = 1$.*

а) *Найдите константу $\theta$, при которой $G_n = \frac{Y_n}{\theta^n}$ будет мартингалом.*

б) *Пусть $A$ — событие, состоящее в том, что рано или поздно популяция погибнет. Пусть $\mathbb{P}(A) = \alpha$. Найдите $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}_n)$ как функцию от $Y_n$. Верно ли, что это мартингал?*

в) *Найдите уравнение на $\alpha$.*

**Задача 10.12.** [*Williams, E10.9*]
*Пусть $X_n$ — супермартингал, $T$ — момент остановки. Докажите, что*

*а)* $\mathbb{E}(X_T 1_{T<\infty}) \leqslant \mathbb{E}(X_0)$

*б)* $c\mathbb{P}(\sup_n X_n \geqslant c) \leqslant \mathbb{E}(X_0)$

***Задача* 10.13.** *[Steele, 2.5.]*
*Пусть $M_n$ — субмартингал, а $\tau \leqslant \nu$ ограниченные моменты остановки. Докажите, что $\mathbb{E}(M_\tau) \leqslant \mathbb{E}(M_\nu)$*
***Задача* 10.14.** *Некоррелированность приращений.*
*Пусть $X_n$ — мартингал, $X_n \in L^2$, и четыре момента времени $n_1 < n_2 \leqslant n_3 < n_4$.*
*Найдите $Cov(X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_4} - X_{n_3})$*
***Задача* 10.15.** *[Williams, E10.2] Принцип Беллмана*
*Выигрыш $X_n$ в $n$-ой партии может равняться 1 или -1 с вероятностями $p$ и $q = 1-p$, соответственно. $Z_n$ - благосостояние игрока после $n$ партий. Пусть $1/2 < p < 1$ и $Z_0 > 0$. Игрок решил играть $N$ партий. Цель игрока - максимизировать ожидаемую «процентную ставку» $\mathbb{E}(\ln \frac{Z_N}{Z_0})$. К моменту времени $n$ игрок владеет информацией $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. На $n+1$-ую партию игрок может поставить любую сумму в диапазоне $[0; Z_n]$.*
*Обозначим «энтропию» $\alpha = p \ln p + q \ln q + \ln 2$.*

*а)* *Докажите, что для любой (предсказуемой) стратегии величина $\ln Z_n - n\alpha$ будет супермартингалом.*

*б)* *Найдите наилучшую стратегию, т.е. такую, что $\ln Z_n - n\alpha$ будет мартингалом*

*Примечание: величина $\ln \frac{Z_N}{Z_0}$ называется процентной ставкой в силу того, что $\ln(1+r) \approx r$*

***Задача* 10.16.** *A propos Энтропией величины $X$ называется число $E\left(\log_2 \frac{1}{p(X)}\right)$, где $p\left(t\right) = \mathbb{P}\left(X = t\right)$ для дискретных величин, а для непрерывных величин $p\left(t\right)$ — функция плотности. Энтропия измеряет количество информации, получаемой при наблюдении величины $X$. При расчете энтропии важны не сами значения величины $X$, а их вероятности.*
*Логарифм можно брать по другому основанию, когда логарифм берется по основанию 2, то единица измерения энтропии — бит.*
*Пусть имеется монетка, выпадающая гербом с вероятностью $\theta$.*
*Величина $X$ равна единице, если монетка выпадает гербом, и нулю в противном случае. При каком $\theta$ энтропия будет максимальной? Чему она при этом будет равна?*
***Задача* 10.17.** *Докажите утверждения:*
*Если $X_n$ — субмартингал, то $(X_n - a)^+$ — субмартингал.*
*Если $X_n$ — супермартингал, то $X_n \wedge a$ - супермартингал.*
***Задача* 10.18.** *Известно, что $X_n$ — субмартингал по отношению к фильтрации $\mathcal{F}_n$. Также известно, что $\mathbb{E}(X_n) = const$. Верно ли, что $X_n$ — мартингал?*
***Задача* 10.19.** *Приведите пример адаптированного случайного процесса, $X_t$, такого что: $\mathbb{E}(X_{t+1}) = \mathbb{E}(X_t)$, но процесс $X_t$ — не мартингал.*
***Задача* 10.20.** *Приведите пример случайного процесса $X_t$ и двух фильтраций $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{H}_t$, таких что $X_t$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_t$, но не мартингал относительно $\mathcal{H}_t$, хотя $X_t$ адаптирован к обеим фильтрациям. Будет ли в построенном примере $X_t$ мартингалом относительно $\mathcal{K}_t = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{H}_t$?*
***Задача* 10.21.** *Величины $Z_1$, $Z_2$, ...независимы и равновероятно принимают значения плюс и минус один. Процесс $(X_n)$ задаётся соотношением $X_n = Z_1 + \ldots + Z_n$. Фильтрация $(\mathcal{F}_n)$ — естественная фильтрация для процесса $(Z_n)$.*

*а)* *Является ли процесс $(Z_n)$ мартингалом?*

*б)* *Является ли процесс $(X_n)$ мартингалом?*

*в)* *Является ли процесс $Y_n = 2^{X_n}$ мартингалом?*

*г) Подберите константу $\alpha$, чтобы процесс $R_n = X_n - \alpha n$ был мартингалом.*

*д) Подберите константу $\beta$, чтобы процесс $S_n = \beta^{X_n}$ был мартингалом.*

## 10.1. Равномерная интегрируемость

***Задача*** **10.22**. *Конечный набор интегрируемых случайных величин равномерно интегрируем.*
***Задача*** **10.23**. *Если $|X_\alpha| < Y$ и $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, то набор $\{X_\alpha\}$ равномерно интегрируем.*
***Задача*** **10.24**. *Если набор случайных величин ограничен в смысле $L_p$, $p > 1$, то он равномерно интегрируем.*
*Ограничен в смысле $L^p$: $\sup_\alpha E\left(|X_\alpha|^p\right) < +\infty$.*
***Задача*** **10.25**. *Равномерно интегрируемый набор ограничен в $L_1$. [Aad, 1.16]*
***Задача*** **10.26**. *Сходящаяся в $L_1$ последовательность является равномерно интегрируемой. [Aad, 1.17]*
***Задача*** **10.27**. *Пусть наборы случайных величин $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ равномерно интегрируемы. Тогда равномерно интегрируемо их объединение.*
***Задача*** **10.28**. *[Grimmett, 7.10.1]*
*Пусть $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ равномерно интегрируемы. Верно ли, что последовательность $\{X_n + Y_n\}$ равномерно интегрируема?*
***Задача*** **10.29**. *Show that a convex function of a martingale is a submartingale. In other words, let $M_0, M_1, \dots, M_N$ be a martingale and let $\varphi$ be a convex function. Show that $\varphi(M_0), \varphi(M_1), \dots, \varphi(M_N)$ is a submartingale.*
***Задача*** **10.30**. *Problem 1.3 (Discrete time stochastic integral) Suppose $M_0, M_1, \dots, M_N$ is a martingale and let $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ is an adapted process. Define the discrete-time stochastic integral (sometimes called a martingale transform) $I_0, I_1, \dots, I_N$ by setting $I_0 = 0$ and*

$$I_n = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j (M_{j+1} - M_j), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

*Show that $I_0, I_1, \dots, I_N$ is a martingale.*
***Задача*** **10.31**. *Рассмотрим серию испытаний Бернулли с подбрасыванием монеты. Положим $X_j = 1$, если при $j$-ом подбрасывании монета оказалась верхом стороной head, и $X_j = -1$ иначе. Определим дискретное случайное блуждание как случайный процесс $M_0, M_1, M_2, \dots$, где $M_0 = 0$ и*

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n \geqslant 1.$$

*Докажите, что $M_0, M_1, \dots$ матингал. Пусть $\sigma > 0$. Положим $S_n = e^{\sigma M_n} \cdot \left(\frac{2}{e^\sigma + e^{-\sigma}}\right)^n$ Докажите, что процесс $S_0, S_1, S_2, \dots$ также мартингал.*
***Задача*** **10.32**. *Дискретный стохастический интеграл. Пусть процесс $M_0, M_1, \dots, M_N$ является мартингалом, а процесс $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}$ адаптирован. Определим новый процесс $I_0, I_1, \dots, I_N$ как*

$$I_0 = 0, \quad I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_j \cdot (M_{j+1} - M_j),\ n = 1, \dots, N.$$

*Докажите, что $I_0, I_1, \dots, I_N$ также мартингал.*
***Задача*** **10.33**. *Toss a symmetric coin repeatedly. Let $X_j = 1$ if the $j$-th toss results in a head and $X_j = -1$ if the $j$-th toss results in a tail. Consider the stochastic process $M_0, M_1, M_2, \dots$ defined by $M_0 = 0$ and*

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n \geqslant 1.$$

*This is called a symmetric random walk; with each head it steps up one, and with each tail, it steps down one.*

*(i) Show that $M_0, M_1, \dots$ is a martingale*

*(ii) Let $\sigma$ be a positive constant and, for $n \geqslant 0$, define*

$$S_n = e^{\sigma M_n} \cdot \left(\frac{2}{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}\right)^n$$

*Show that $S_0, S_1, S_2, \dots$ is a martingale. Note that even though the symmetric random walk $M_n$ has no tendency to grow, the geometric symmetric random walk, which is $e^{\sigma M_n}$ does have a tendency to grow. This is the result of putting a martingale into the convex exponential function. In order to again have a martingale, we must «discount» the geometric symmetric random walk, using the term $\frac{2}{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}$ as the discount rate.*

***Задача* 10.34** (Steele, 2.1.). $S_n = S_{n-1} + X_n$, $X_n = \begin{cases} -1, p = 0,52 \\ 1, p = 0,45 \\ 2, p = 0,03 \end{cases}$ *Найдите $x$ чтобы процесс $x^{S_n}$ был мартингалом.*

***Задача* 10.35**. */Тема/.*
*Известно, что $A \in \mathcal{F}_n$ и $\omega \in A \Rightarrow N(\omega) > n$. Верно ли, что $A \in \mathcal{F}_{n \wedge N}$?*

***Задача* 10.36**. *Пусть $X_i \geqslant 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n$, $N_t = sup(n|S_n \leqslant t)$. Докажите, что $N_t + 1$ — момент остановки.*

***Задача* 10.37**. *Обезьяны и Шекспир*
*Кто-то давным-давно заметил, что обезьяна, посаженная за пишущую машинку, напечатает рано или поздно полное собрание сочинений Шекспира. Вопрос в том, сколько ей в среднем потребуется нажатий на клавиши (предположим, что их 26 как букв в английском языке) чтобы напечатать слово ABRACADABRA?*
*Трюк: Организуем казино! В каждый момент времени в казино приходит новый игрок с начальным капиталом в 1 рубль. Каждый входящий игрок действует по одной и той же схеме: ставит все имеющиеся деньги на очередную букву слова ABRACADABRA (т.е. сначала на A, потом на B и так далее, когда слово кончается все деньги снова ставятся на A...). Если обезьяна напечатала нужную букву, то игрок получает свою ставку, увеличенную в 26 раз, если нет — то игрок покидает казино. Рассмотрите мартингал, связанный с суммарным благосостоянием всех игроков.*
*Трюк исполнен профессиональными каскадерами, не пытайтесь повторить его самостоятельно (Williams, Proba with Martingales).*

***Задача* 10.38**. *Гладиаторы-вампиры*
*Есть две команды гладиаторов-вампиров. У каждого из них своя сила. Если вампир силы $a$ убивает вампира силы $b$ (что происходит с вероятностью $\frac{a}{a+b}$), то его сила увеличивается на $b$. Соревнование между командами построено в форме отдельных поединков. От каждой команды выдвигается по одному участнику, победитель возвращается в свою команду и начинается следующий поединок. Допускается неоднократное участие одного вампира в поединках. Пусть в первой команде $n_x$ участников с суммарной силой $X_0$, а во второй — $n_y$ участников с суммарной силой $Y_0$; $X_n$ — суммарная сила первой команды после $n$ поединков.*

*а) Докажите, что $X_n$ — мартингал.*

*б) Верно ли, что игра закончится к моменту $n_x + n_y$?*

*в) Найдите вероятность выигрыша первой команды.*

***Задача* 10.39**. *Пуассоновский процесс.*
*Случайный процесс $N(t)$ (в непрерывном времени) называется Пуассоновским процессом с параметром $\lambda$, если выполнены:*

*P1. При $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ величины $\triangle_k = N(t_k) - N(t_{k-1})$ являются независимыми.*
*P2. Для $t > s$ величина $N(t) - N(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \cdot (t - s)$*
*По смыслу $N(t)$ показывает, сколько событий произошло к моменту времени $t$.*
*Кстати, кто не знал и забыл:*
*Распределение Пуассона с параметром $\lambda$: $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$*
*Пусть $t_n$ — фиксированные моменты времени и $X_n = N(t_n) - \lambda \cdot t_n$.*
*Верно ли, что $X_n$ — мартингал?*

**Задача 10.40**. *По мотивам Rock-Scissors-Paper and survival of the weakest*
*Есть $N$ клеток, в каждой из которых живет скорпион. Скорпионы бывают трех видов.*
*Яд скорпиона 1-го вида убивает скорпиона 2-го вида с вероятностью $p_1$. Яд скорпиона 2-го вида убивает скорпиона 3-го вида с вероятностью $p_2$. Яд скорпиона 3-го вида убивает скорпиона 1-го вида с вероятностью $p_3$. В остальных случаях яд безвреден.*
*В каждый момент времени случайным образом выбираются 2 клетки. Происходит сражение скорпионов. Если один из скорпионов погиб, то опустевшая клетка проигравшего скорпиона заселяется новым скорпионом победившего вида.*
*Численности скорпионов в момент времени $t$ обозначим $N_1(t)$, $N_2(t)$ и $N_3(t)$.*

а) *Чему равно $\mathbb{E}(N_1(t+1) - N_1(t)|\mathcal{F}_t)$?*

б) *При каких условиях на $N_1(0)$, $N_2(0)$ и $N_3(0)$ средняя численность скорпионов каждого вида будет неизменной?*

в) *Верно ли, что при этих условиях численность скорпионов каждого вида будет мартингалом?*

г) *Как зависят от $p_1$, $p_2$ и $p_3$ равновесные численности скорпионов?*

**Задача 10.41**. *Перед Машей колода в 52 карты. Маша открывает карты одну за одной. В любой момент времени Маша может сделать заявление "Следующая карта будет красной!". Маша выигрывает, если ее предсказание сбудется.*

а) *Найдите оптимальную стратегию, используя элементарные методы.*

б) *Определите мартингал, на который делает ставку Маша.*

**Задача 10.42**. *«La grande martingale»*
*Пусть $Y_i$ — iid, результат $i$-го подбрасывания правильной монетки, т.е. $Y_i = \begin{cases} 1, p = 1/2 \\ 0, p = 1/2 \end{cases}$*
*Обозначим $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$*
*Допустим, что игрок использует «стратегию удвоения» (la grande martingale). На первый результат подбрасывания он ставит рубль. Если он проигрывает, то удваивает ставку. Если он выигрывает, то снова начинает со ставки размером в рубль.*
*Опишите, как выглядит соответствующее мартингальное преобразование $(C \cdot X)_n$.*
*Верно ли, что $C_i$ является предсказуемым процессом?*
*Чему равно ожидаемое благосостояние игрока после $n$ подбрасываний монетки?*

**Задача 10.43**. *Намек на сходимость мартингалов.*
*Пусть последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ сходится. Зафиксируем два числа $a < b$. Верно ли, что число пересечений снизу-вверх отрезка $[a; b]$ конечно?*
*Пусть последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ ограничена. Число пересечений снизу-вверх любого отрезка $[a; b]$, где $a < b$ конечно. Верно ли, что $\{x_n\}$ сходится?*

**Задача 10.44**. *Let $M_0, M_1, M_2 \ldots$ ne the symmetric random walk. Define $I_0 = 0$ and*

$$I_n = \sum_{j=0}^{n-1} M_j(M_{j+1} - M_j), \quad n = 1, 2, \ldots$$

*Show that*

$$I_n = \frac{1}{2}M_n^2 - \frac{n}{2}.$$

**Задача 10.45**. *Докажите, что*

а) *Если $T$ — момент остановки, то множества $\{T < n\}$, $\{T \leqslant n\}$, $\{T = n\}$, $\{T \geqslant n\}$ и $\{T > n\}$ лежат в $\mathcal{F}_n$.*

б) *Случайная величина $T \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ является моментом остановки если и только если $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого $n$.*

в) *Если $T_1$ и $T_2$ моменты остановки, то $T_1 \vee T_2$ и $T_1 \wedge T_2$ — моменты остановки.*

**Задача 10.46**. *Пусть $T$, $S$ — моменты остановки.*

а) *Проверьте то, что $\mathcal{F}_T$ — действительно $\sigma$-алгебра.*

б) *Можно ли в определении $\mathcal{F}_T$ заменить $A \cap (T \leqslant n) \in \mathcal{F}_n$ на $A \cap (T = n) \in \mathcal{F}_n$?*

в) *Пусть $T \equiv n$. Верно ли, что $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$?*

г) *Пусть $T \leqslant S$. Как связаны между собой $\mathcal{F}_T$ и $\mathcal{F}_S$?*

д) *Верно ли, что $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$?*

е) *Пусть $T < \infty$ и $X_n$ — адаптированный процесс. Верно ли, что $X_T \in \mathcal{F}_T$?*

*Комментарий: попробуйте дать сначала интуитивный ответ на вопросы в-е, а затем уже возиться с $\sigma$-алгебрами.*

**Задача 10.47**. *Равномерная интегрируемость...Докажите (или опровергните)...*

а) *Конечный набор интегрируемых величин равномерно интегрируем.*

б) *Если существует $Y \in L^1$, такое что для любого $X \in \mathcal{A}$ выполнено $|X| \leqslant Y$, то набор $\mathcal{A}$ - равномерно интегрируем.*

в) *Если $\sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, где $p > 1$, то набор $\mathcal{A}$ - равномерно интегрируем.*

г) *Для любых случайных величин $X$ и $Y$ выполнено неравенство: $\mathbb{E}(|X| 1_{|Y|>M}) \leqslant \mathbb{E}(|X| 1_{|X|>N}) + \frac{N}{M}\mathbb{E}(|Y| 1_{|Y|>M})$.*

д) *Если $\mathcal{A} = \{\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}\}$, т.е. набор $\mathcal{A}$ — это условные ожидания от $X$ по всевозможным $\sigma$-алгебрам, то $\mathcal{A}$ - равномерно интегрируем.*

**Задача 10.48**. *Пусть $S_n$ — симметричное случайное блуждание с началом в нуле и $\tau$ — момент первого достижения суммы в 1 рубль. Найдите $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(S_{n\wedge\tau})$ и $\mathbb{E}(S_\tau)$. Почему $\lim_n \mathbb{E}(S_{n\wedge\tau}) \neq \mathbb{E}(S_\tau)$?*

**Задача 10.49**. *Приведите примеры процесса в дискретном времени, который:*

а) *является и мартингалом, и цепью Маркова*

б) *не является ни мартингалом, ни цепью Маркова*

в) *является мартингалом, но не цепью Маркова*

г) *является цепью Маркова, но не мартингалом*

## 10.2. Задачи на тему остановки мартингала

***Задача* 10.50**. *Пусть* $W_t$ *— стандартный винеровский процесс,* $a$ *и* $b$ *больше 0,* $\tau = min\{t|W_t = a \cup W_t = -b\}$.
*Найдите* $\mathbb{P}(W_\tau = a), \mathbb{E}(\tau), \mathbb{E}(\tau W_\tau)$
***Задача* 10.51**. *Пусть* $W_t$ *— стандартный винеровский процесс,* $a$ *и* $b$ *больше 0,* $X_t = W_t + \mu t$, $\tau = min\{t|X_t = a \cup X_t = -b\}$.
*Найдите* $\mathbb{P}(X_\tau = a), \mathbb{E}(\tau)$
***Задача* 10.52**. *Карты из колоды в 52 карты извлекаются до появления 2-го туза. Какова вероятность того, что следующая карта будет тузом?*
***Задача* 10.53**. *Двое играют в шахматы друг с другом до перевеса в 5 очков. Победитель партии получает 1 очко, проигравший — 0 очков, в случае ничьей каждый получает по пол-очка. Вася играет лучше Пети, поэтому: вероятность ничьей — одна четверть, вероятность того, что победит Вася равна половине, вероятность победы Пети — одна четверть.*

а) *Какова вероятность того, что в результате выиграет Вася?*

б) *Сколько партий они в среднем сыграют?*

***Задача* 10.54**. *У Маши — неправильная монетка (орел выпадет с вероятностью 0.6), у Светы — правильная. Маша и Света одновременно подкидывают свои монетки до тех пор, пока у кого-то из них орлов не накопится на два больше, чем у подружки. Побеждает в этой игре набравшая больше орлов. Какова вероятность того, что Маша выиграет?*
*Hints: Пусть* $B_t = M_t - S_t$ *— баланс числа орлов, т.е. преимущество Маши над Светой в момент времени* $t$.

а) *Какие значения и с какими вероятностями принимает* $\Delta B_t$*?*

б) *При каком* $a$ *случайный процесс* $a^{B_t}$ *будет мартингалом?*

***Задача* 10.55**. *Пусть* $S_t$ *— симметрическое случайное блуждание с началом в нуле.* $a$ *и* $b$ *больше 0,* $\tau = min\{t|S_t = a \cup S_t = -b\}$.
*Найдите* $\mathbb{P}(S_\tau = a), \mathbb{E}(\tau)$
***Задача* 10.56**. *Пусть* $S_t$ *— несимметрическое случайное блуждание с началом в нуле,* $\mathbb{P}(S_t - S_{t-1} = 1) = p$, $a$ *и* $b$ *больше 0,* $\tau = min\{t|S_t = a \cup S_t = -b\}$.
*Найдите* $\mathbb{P}(S_\tau = a), \mathbb{E}(\tau)$
***Задача* 10.57**. *Игральный кубик подбрасывается бесконечное количество раз. Сколько подбрасываний в среднем пройдет до появления последовательности 1-2-3-1-2?*
***Задача* 10.58**. *В коробке лежат 30 зеленых и 50 красных шаров. Мы извлекаем два наугад, один берем в левую руку, другой — в правую. Шар в левой руке красим в цвет шара, находящегося в правой руке. Затем возвращаем шары в коробку. Снова извлекаем два наугад и так далее. До тех пор, пока в коробке все шары не окрасятся в один цвет.*

а) *Какова вероятность того, что шары будут окрашены в красный цвет?*

б) *Сколько в среднем пар шаров будет извлечено?*

***Задача* 10.59**. *Safes and keys*
*source: Taiwan NMO 2006*
*There are 94 safes and 94 keys. Each key can open only one safe, and each safe can be opened by only one key. We place randomly one key into each safe. 92 safes are then randomly chosen, and then locked. What is the probability that we can open all the safes with the two keys in the two remaining safes?*
*(Once a safe is opened, the key inside the safe can be used to open another safe.)*

**Задача 10.60**. *Величины $X_i$ независимы, одинаково распределены и строго положительны, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Число $x > 0$. Момент остановки $T_x = \min\{n | S_n \geqslant x\}$. Докажите неравенство $x \leqslant \mathbb{E}(\min\{X_1, x\})\mathbb{E}(T_x) \leqslant 2x$*

**Задача 10.61**. *Вася прыгает на один метр вперед с вероятностью $p$ и на два метра вперед с вероятностью $1-p$. Как только он пересечет дистанцию в 100 метров он останавливается. Получается, что он может остановиться либо на отметке в 100 метров, либо на отметке в 101 метр.*

а) *Какова вероятность того, что он остановится ровно на отметке в 100 метров?*

б) *Численно с помощью компьютера найдите, при каком $p$ эта вероятность будет минимальной и чему она будет равна?*

**Задача 10.62**. *Храбрая исследовательница Мишель подбрасывает правильную монетку до появления последовательности ОРРОР. Сколько в среднем подбрасываний ей потребуется? Какова дисперсия количества подбрасываний?*

# 11. Броуновское движение

**Задача 11.1**. *Пусть $W_t$ — стандартное броуновское движение и $a > 0$.*
*Являются ли следующие процессы броуновским движением? мартингалом?*

а) $X_t = -W_t$;

б) $X_t = W_{a+t} - W_a$;

в) $X_t = \frac{1}{a} W_{a^2 t}$

г) $X_t = W_t^3$

**Задача 11.2**. *Пусть $Z$ — стандартная нормальная случайная величина. Определим случайный процесс $X(t) = \sqrt{t} Z$.*

а) *Найдите* $\mathbb{E}(X(t))$

б) *Найдите* $\mathrm{Var}(X(t))$

в) *Верно ли, что у процесса $X(t)$ независимые приращения?*

г) *Как выглядит типичная реализация $X(t)$?*

д) *Будет ли $X(t)$ броуновским движением?*

**Задача 11.3**. *Найдите* $\lim_{\Delta t \to 0} E\left[(W_{t+\Delta t} - W_t)^2\right]$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[(W_{t+\Delta t} - W_t)^2\right]}{\Delta t}$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[(W_{t+\Delta t} - W_t)^2\right]}{(\Delta t)^2}$. *Найдите* $E(|W_1 - W_0|)$, $E(|W_1 - W_{0,5}| + |W_{0,5} - W_0|)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(|W_{t+\Delta t} - W_t|)}{\Delta t}$. *Какое расстояние (имеется ввиду полная длина пути, а не перемещение) успевает в среднем пройти частица за единицу времени?*

**Задача 11.4**. *Пусть отрезок времени $[0; T]$ разделен на $n$ равных частей.*
*Для краткости обозначим $W_i = W(i \cdot \frac{T}{n})$, $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$.*

а) *Найдите* $\mathbb{E}(\Delta W_i)$, $\mathrm{Var}(\Delta W_i)$, $\mathbb{E}((\Delta W_i)^2)$, $\mathbb{E}((\Delta W_i)^3)$, $\mathbb{E}((\Delta W_i)^4)$.

б) *Пусть $A_n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2$. Найдите $\mathbb{E}(A_n)$, $\mathrm{Var}(A_n)$. Найдите к чему стремится $A_n$ в смысле $L^2$.*

*в) Пусть* $B_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$*. Найдите* $\mathbb{E}(B_n), \operatorname{Var}(B_n)$*. Найдите к чему стремится* $B_n$ *в смысле* $L^2$*.*

*г) Пусть* $C_n = W_n^2 - \sum_{i=1}^{n} W_i \Delta W_i$
*Выразите* $C_n$ *через* $W_n$ *и* $A_n$
*Найдите* $\mathbb{E}(C_n)$
*Найдите к чему стремится* $C_n$ *в смысле* $L^2$

*д) Пусть* $D_n = \sum (\Delta W_i)^3$
*Найдите к чему стремится* $D_n$ *в смысле* $L^2$

*е) Пусть* $X_n = \sum W_i W_{i-1} \Delta W_i$
*К чему стремится* $X_n$ *в смысле* $L^2$*?*

**Задача 11.5**. *Пусть* $W(t)$ *— винеровский процесс.*
*К чему сходится* $W(n)/n$ *и в каком смысле?*

**Задача 11.6**. *Let* $Z$ *be a normally distributed random variable, with mean* $0$ *and variance* $1$, $Z \sim N(0,1)$*. Then consider the continuous time stochastic process* $X(t) = \sqrt{t} Z$*. Show that the distribution of* $X(t)$ *is normal with mean* $0$ *with variance* $t$*. Is* $X(t)$ *a Brownian motion?*

**Задача 11.7**. *Let* $W_1(t)$ *be a Brownian motion and* $W_2(t)$ *be another independent Brownian motion, and* $\rho$ *is a constant between* $-1$ *and* $1$*. Then consider the process* $X(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} W_2(t)$*. Is this* $X(t)$ *a Brownian motion?*

**Задача 11.8**. *What is the distribution of* $W(s) + W(t)$*, for* $0 \leqslant s \leqslant t$*? (Hint: Note that* $W(s)$ *and* $W(t)$ *are not independent. But you can write* $W(s) + W(t)$ *as a sum of independent variables. Done properly, this problem requires almost no calculation.*

**Задача 11.9**. *Show that*

$$\operatorname{Cov}(W(s), W(t)) = E[W(s)W(t)] = \min(t, s)$$

*Assuming that a stock price moves according to Brownian motion, interpret this for a stock at* $t$ *and* $t+1$*.*

**Задача 11.10**. *Show that the probability density function*

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(x-y)^2/(2t))$$

*satisfies the partial differential equation for heat flow (the heat equation)*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

**Задача 11.11**. *Let* $W(t)$ *be standard Brownian motion.*

*а) Evaluate the probability that* $W(5) \leqslant 3$ *given that* $W(1) = 1$*.*

*б) Find the number* $c$ *such that* $\mathbb{P}[W(9) > c | W(1) = 1] = 0.10$*.*

**Задача 11.12**. *Show that* $\mathbb{E}[T_a] = \infty$ *for* $a > 0$*.*

**Задача 11.13**. *Suppose that the fluctuations of a share of stock of a certain company are well described by a Brownian Motion process. Suppose that the company is bankrupt if ever the share price drops to zero. If the starting share price is* $A(0) = 5$*, what is the probability that the company is bankrupt by* $t = 25$*? What is the probability that the share price is above* $10$ *at* $t = 25$*?.*

**Задача 11.14**. *Suppose you own one share of stock whose price changes according to a Brownian Motion Process. Suppose you purchased the stock at a price* $b + c$*,* $c > 0$ *and the present price is* $b$*. You have decided to sell the stock either when it reaches the price* $b + c$ *or when an additional time* $t$ *goes by, whichever comes first. What is the probability that you do not recover your purchase price?*

***Задача* 11.15. *The Distribution of the Maximum***
*Let $t$ be a given time, let $a > 0$ be a given value, then*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\max_{0\leqslant u\leqslant t} W(u) \geqslant a\} &= \mathbb{P}\{T_a \leqslant t\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-y^2/2)\, dy\end{aligned}$$

***Задача* 11.16. *Quadratic Variation.***
*A function $f(x)$ is said to have **bounded variation** if, over the closed interval $[a, b]$, there exists an $M$ such that*

$$|f(t_1) - f(a)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \ldots + |f(b) - f(t_n)| \leqslant M$$

*for all partitions $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$ of the interval.The idea is that we measure the total (hence the absolute value) up-and-down movement of a function. This is roughly like the arclength of the graph of the function. A monotone increasing or decreasing function has bounded variation. An everywhere differentiable function has bounded variation. Some functions, for instance Brownian Motion do not have bounded variation. A function $f(t)$ is said to have **quadratic variation** if, over the closed interval $[a, b]$, there exists an $M$ such that*

$$(f(t_1) - f(a))^2 + (f(t_2) - f(t_1))^2 + \ldots + (f(b) - f(t_n))^2 \leqslant M$$

*for all partitions $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$ of the interval. Again, the idea is that we measure the total (hence the positive terms created by squaring) up-and-down movement of a function. However, the squaring will make the small ups-and-downs smaller, so that perhaps a function without bounded variation may have quadratic variation. In fact, this is the case for Brownian Motion. The **total quadratic variation** of $Q$ a function $f$ on an interval $[a, b]$ is*

$$Q = \sup_P \sum_{i=0}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i)^2$$

*where the supremum is taken over all partitions $P$ with $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$, with mesh size going to zero as the number of partition points $n$ goes to infinity.*
***Quadratic Variation of Brownian Motion.***
*We can guess that Brownian Motion might have quadratic variation by considering the quadratic variation of our coin-flipping fortune record first. Consider the function piecewise linear function $S(t)$ defined by $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ with the Bernoulli random variables $X_i = +1$ with probability $p = 1/2$ and $X_i = -1$ with probability $q = 1 - p = 1/2$. With a little analysis, it is easy to show that we need only consider the quadratic variation at points $1, 2, 3, \ldots, n$ Then each term $(S(i + 1) - S(i))^2 = X_{i+1}^2 = 1$. Therefore, the quadratic variation is the total number of steps, $Q = n$. Now remember Brownian Motion is approximated by $(1/\sqrt{n})S(nt)$. Each step is size $1/\sqrt{n}$, then the quadratic variation of the step is $1/n$ and there are $n$ steps on $[0, 1]$. The total quadratic variation of $(1/\sqrt{n})S(nt)$ on $[0, 1]$ is $1$. We will not completely rigorously prove that the total quadratic variation of Brownian Motion is $t$, as claimed, but we will prove something very close to that.*
***Theorem.*** *Let $W(t)$ be standard Brownian motion. For every fixed $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{2^n} \left[ W\left(\frac{k}{2^n} t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n} t\right)\right]^2 = t$$

*with probability $1$ (that is, almost surely).*

*!!!PROVE THE THEOREM!!!*

**Задача** 11.17. *Comment: Starting from*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{2^n}\left[W\left(\frac{k}{2^n}t\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\right]^2=t$$

*and without thinking too carefully about what it might mean, we can imagine an elementary calculus limit to the left side and write the formula:*

$$\int_0^t [dW(\tau)]^2 = t = \int_0^t d\tau$$

*In fact, with more advanced mathematics this can be made sensible ad mathematically sound. Now from this relation, we could write it in differential form:*

$$dW(\tau)^2 = d\tau.$$

*The important thing to remember here is that the formula suggests that Brownian motion has differentials that cannot be ignored in second (or squared, or quadratic) order. Brownian motion ``wiggles" too much, even the total of the squared differences add up! In retrospect, this is not so surprising given the law of the iterated logarithm. We know that in any neighborhood $[t, t+dt]$ to the right of $t$, Brownian motion must come close to $\sqrt{2t\log\log t}$. That is, intuitively, $W(t+dt)-W(t)$ must be about $\sqrt{2dt}$ in magnitude, so we would guess $dW^2 \approx 2dt$ The theorem makes it precise.*

**Задача** 11.18. *Comment: Here's a more rigorous and somewhat different explanation of why the squared variation of Brownian motion may be guessed to be $t$: Consider*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(W\left(\frac{it}{n}\right)-W\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right)^2.$$

*Now let*

$$Z_{ni}=\frac{\left(W\left(\frac{it}{n}\right)-W\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right)}{\sqrt{t/n}}$$

*Then for each $n$, the sequence $Z_{ni}$ is a sequence of independent, identically distributed standard normal $N(0,1)$ normal random variables. Now we can write the quadratic variation as:*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t}{n}Z_{ni}^2 = t\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_{ni}^2\right)$$

*But notice that the expectation $\mathbb{E}(Z_{ni}^2)$ of each term is the same as calculating the variance of a standard normal $N(0,1)$ which is of course $1$.. Then the last term in parentheses above converges by the weak law of large numbers to $1$! Therefore the quadratic variation of Brownian motion converges to $t$. This little proof is in itself not sufficient to prove the theorem above because it relies on the weak law of large of number, hence establishes convergence in distribution only, and for the theorem above we want convergence almost surely.*

**Задача** 11.19. *Докажите, что условное распределение $W(s)$ при условии $X(t)=B$, $s<t$, является нормальным со средним $Bs/t$ и дисперсией $(s/t)(t-s)$:*

$$\mathbb{P}\left\{W(s)\in(x,x+\Delta x)|\, W(t)=B\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(s/t)(t-s)}}\cdot\exp(-(x-Bs/t)^2/2(t-s))\cdot\Delta x.$$

**Задача** 11.20. *Условная плотность $W(t)$, где $t_1<t<t_2$, при условии, что $W(t_1)=A$ и $W(t_2)=B$,*

*является нормальным со средним*

$$A + ((B - A)/(t_2 - t_1))(t - t_1)$$

*и дисперсией*

$$(t_2 - t)(t - t_1)/(t_2 - t_1).$$

***Задача* 11.21.** ***Quadratic Variation.***
***Theorem.*** *Let $W(t)$ be standard Brownian motion. For every fixed $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{2^n} \left[ W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right) \right]^2 = t$$

*with probability 1 (that is, almost surely).*
***Задача* 11.22.** *The above theorem can be amusingly summarized in the following way: Let $dW(t) = W(t + dt) - W(t)$. Let $dW(t)^2 = (W(t+dt) - W(t))^2$. Then (although mathematically not rigorously) we can say:*

$$\begin{aligned} dW(t) &\sim N(0, dt) \\ (dW(t))^2 &\sim N(dt, 0). \end{aligned}$$

***Theorem.***

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{2^n} \left| W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right) \right| = \infty$$

*In other words, the total variation of a Brownian path is infinite, with probability 1.*
***Задача* 11.23.** ***Hitting Times.***
*Consider standard Brownian Motion $W(t)$, which starts at $W(0) = 0$. Let $a > 0$. Let us denote the hitting time $T_a$ be the first time the Brownian Motion hits $a$. Specifically in notation from analysis*

$$T_a = \inf\{t > 0 : W(t) = a\}.$$

*Note the very strong analogy with the duration of the game in the gambler's ruin. Some Brownian paths will hit $a > 0$ fairly directly, others will make an excursion ( for example, to negative values) and take a long time to finally reach $a$. Thus $T_a$ will have a probability distribution. We will determine that distribution by a procedure similar to the first step analysis we made for coin-flipping fortunes. More specifically, we will consider a probability by conditioning, conditioning on whether or not $T_a \leqslant t$, for some given value of $t$.*

$$\mathbb{P}\{W(t) \geqslant a\} = \mathbb{P}\{W(t) \geqslant a | T_a \leqslant t\}\mathbb{P}\{T_a \leqslant t\} + \mathbb{P}\{W(t) \geqslant a | T_a > t\}\mathbb{P}\{T_a > t\}$$

*Now note that the second conditional probability is 0 because it is an empty event. Therefore:*

$$\mathbb{P}\{W(t) \geqslant a\} = \mathbb{P}\{W(t) \geqslant a | T_a \leqslant t\}\mathbb{P}\{T_a \leqslant t\}.$$

*Now, consider Brownian Motion ``started over'' again the time $T_a$ when it hits $a$. By the shifting transformation from the previous section, this would have just the distribution of Brownian Motion again, and so*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{W(t) \geqslant a | T_a \leqslant t\} &= \mathbb{P}\{W(t) \geqslant a | W(T_a) = a, T_a \leqslant t\} \\ &= = \mathbb{P}\{W(t) - W(T_a) \geqslant 0 | T_a \leqslant t\} \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

*Actually, this ``proof'' contains a serious logical gap, since $T_a$ is a ``random time'' not a fixed time, whereas* *the shifting transformation depends on having a fixed time. We ought to make sure that ``random times" act like fixed times. Under special conditions, random times can act like fixed times. Specifically, the proof can be fixed and made completely rigorous by showing that Brownian motion has the strong Markov property and that $T_a$ is a Markov time corresponding to the event of first passage from $0$ to $a$. This argument is a specific example of the Reflection Principle for Brownian Motion. It says that Brownian Motion reflected about a first passage has the same distribution as the original motion. Thus*

$$\mathbb{P}\{W(t) \geqslant a\} = (1/2)\mathbb{P}\{T_a \leqslant t\}.$$

*or*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{T_a \leqslant t\} &= 2\mathbb{P}\{W(t) \geqslant a\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty \exp(-x^2/(2t))\, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty \exp(-y^2/2)\, dy
\end{aligned}$$

*(note the change of variables $y = x/\sqrt{t}$ in the second integral). One can easily differentiate to obtain the probability distribution function (p.d.f)*

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} \exp(-a^2/(2t)).$$

*Note that this is much stronger than the analogous result for the duration of the game until ruin in the coin-flipping game. There we were only able to derive an expression for the expected value of the hitting time, not the probability distribution of the hitting time. Now we are able to derive the probability distribution of the hitting time fairly intuitively (although strictly speaking there is a gap). Here is a place where it is simpler to derive a quantity for Brownian Motion than it is to derive the corresponding quantity for random walk. RESTORE THE DETAILS and GET RID OF NUMEROUS GAPS.*

***Задача* 11.24**. ***Hitting Times Continued***.
*Let us now consider the probability that Brownian motion hits $a > 0$, before hitting $-b < 0$, where $b > 0$. To compute this we will make use of the interpretation of Standard Brownian Motion as being the limit of the symmetric random walk. PROVE that in the case of the fair ($p = 1/2 = q$) coin-flipping game the probability that the random walk goes up to $a$ before going down to $b$ when the step size is $\Delta x$ is*

$$\mathbb{P}\{ \text{ to } a \text{ before } -b \ \} = \frac{b\Delta x}{(a+b)\Delta x} = \frac{b}{a+b}.$$

*Here is a place where it is easier to derive the result from the coin-flipping game and pass to the limit than to derive the result from Brownian Motion principles.*

***Задача* 11.25**. ***VERY DIFFICULT***. *Prove that with probability $1$ (i.e. almost surely) a Brownian Motion is nowhere (except possibly on set of Lebesgue measure $0$) differentiable.*

***Задача* 11.26**. *Prove that a Brownian Motion path has no intervals of monotonicity. That is, there is no interval $[a, b]$ with $W(t_2) - W(t_1) > 0$ (or $W(t_2) - W(t_1) < 0$) for all $t_2, t_1 \in [a, b]$ with $t_2 > t_1$.*

***Задача* 11.27**. *Show that*

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{W(n)}{\sqrt{n}} &= +\infty \\
\liminf_{n\to\infty} \frac{W(n)}{\sqrt{n}} &= -\infty
\end{aligned}$$

***Задача* 11.28**. *Show that for arbitrarily large $t_1$, there is a $t_2 > t_1$ such that $W(t_2) = 0$. That is, Brownian*

*Motion paths cross the time-axis for arbitrarily large values of $t$.*

**Задача 11.29**. *Using the fact that the inversion $tW(1/t)$ is also a standard Brownian motion show that $0$ is an accumulation point of the zeros of $W(t)$. That is, Standard Brownian Motion crosses the time axis arbitrarily near $0$.*

**Задача 11.30**.

а) *What is the probability that Geometric Brownian Motion with parameters $r = 0$ and $\sigma$ ever rises to more than twice its original value? In economic terms, if you buy stock whose fluctuations are described by Geometric Brownian Motion, what are your chances to double your money?*

б) *What is the probability that Geometric Brownian Motion with parameters $r = -\sigma^2/2$ and $\sigma$ (so that the mean is constant) ever rises to more than twice its original value? In economic terms, if you buy stock whose fluctuations are described by this Geometric Brownian Motion, what are your chances to double your money?*

**Задача 11.31**. *Половина доказательства изометрии*
*Пусть $X(t)$ — адаптированный (согласованный) случайный процесс.*
*Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — фиксированные моменты времени.*

**Задача 11.32**. *For standard Brownian Motion $W(t)$ find the probability $p\{W(1) > 0 \& W(2) < 0\}$*

**Задача 11.33**. *Let $B(t)$ and $W(t)$ be independant Brownian Motions. Find $E\max\{B(t), W(t)\}$*

**Задача 11.34**. *Петя и Вася сделали ставки по 1 рублю на броуновское движение. Петя выигрывает у Васи ставку, если $W(t)$ достигнет уровня 1 раньше, чем уровня (-1) и наоборот. В игре можно удваивать ставки в любой момент времени. Если от одного игрока поступило предложение удвоить ставки, то другой игрок в ответ на это может либо сдаться (и потерять текущую ставку), либо согласиться на удвоение ставки. Один и тот же игрок не может удваивать ставку два раза подряд. Других запретов на удвоение ставки нет.*

а) *Какова оптимальная стратегия?*

б) *Дисперсия выигрыша при использовании обоими игроками оптимальных стратегий?*

**Задача 11.35**. *С помощью компьютера постройте пять реализаций процессов:*

а) $X_t = W_t$

б) $X_t = W_{\frac{t}{1-t}}$

в) $X_t = W_{t\wedge\tau}$, *где* $\tau = min\{t | W_t = -1\}$

г) $X_t = \begin{cases} W_{\frac{t}{1-t}\wedge\tau}, t \in [0; 1) \\ -1, t \in [1; \infty) \end{cases}$

д) $X_t = Z\sqrt{t}$, *где* $Z \sim N(0; 1)$

**Задача 11.36**. *For $0 < s < t$ calculate the probability $\mathbb{P}(W_t > 0 \mid W_s > 0)$ and $\mathbb{P}(W_s > 0 \mid W_t > 0)$.*

**Задача 11.37**. *Цель этого упраженения — разобраться, сколько времени процесс $Y_t = at + W_t$ в среднем проводит ниже нуля. Другими словами, мы хотим найти $\mathbb{E}(T)$, где*

$$T = \int_0^{+\infty} 1_{Y_t<0}\, dt \tag{4}$$

а) *Найдите $\mathbb{E}(T)$ для $a = 1$*

б) *Используя тот факт, что $\frac{1}{k}W_{k^2t}$ — также броуновское движение, докажите, что величина $E(T)$ обратна пропорциональна $a$*

в) *Найдите $\mathbb{E}(T)$ для произвольного $a$*

г) *Найдите* $\mathbb{E}(T)$, *если* $Y_t = \mu t + \sigma W_t$

**Задача 11.38**. *Цель этого упражнения — разобраться, сколько времени процесс* $Y_t = at + W_t$ *в среднем проводит в полоске* $[0; y]$. *Другими словами, мы хотим найти* $\mathbb{E}(T)$, *где*

$$T = \int_0^{+\infty} 1_{Y_t \in [0;y]} \, dt \tag{5}$$

а) *????*

б) *Найдите* $\mathbb{E}(T)$, *если* $Y_t = \mu t + \sigma W_t$

**Задача 11.39**. *Найдите закон распределения случайной величины* $2W_1 - W_2$.

# 12. Интеграл Ито

**Задача 12.1**. *Пусть* $X_t = \begin{cases} 1, & t \in [0;1) \\ -2, & t \in [1;2) \\ W_{1.5}, & t \in [2;\infty) \end{cases}$

*Найдите* $\int_0^t X_u dW_u$

**Задача 12.2**. *Пусть* $X_t = cos(t^2 \cdot W_t^3)$

а) *Найдите* $dX_t$.

б) *Перепишите найденное выражение для* $dX_t$ *с помощью интегралов.*

**Задача 12.3**. *Для следующих случайных процессов найдите* $dZ_t$ *и выпишите соответствующую формулу в полной записи (с интегралами вместо* $d$*):*

а) $Z_t = cos(t^2 \cdot W_t^3)$

б) $Z_t = W_t^3$

в) $Z_t = t^2$

г) $Z_t = e^{\alpha W_t}$

д) $Z_t = \int_0^t aW_a dW_a$

е) $Z_t = X_t^2$, *где* $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$

ж) $Z_t = X_t^{-1}$, *где* $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$

**Задача 12.4**. $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$, $dY_t = \gamma Y_t dt + \delta Y_t dW_t$. $Z_t = X_t / Y_t$. *Найдите* $dZ_t$

**Задача 12.5**. $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_{1t}$, $dY_t = \gamma Y_t dt + \delta Y_t dW_{2t}$. $W_{1t}$ *и* $W_{2t}$ *— два независимых винеровских процесса.* $Z_t = X_t Y_t$. *Найдите* $dZ_t$

**Задача 12.6**. *Являются ли процессы мартингалами:*

а) $X_t = W_t^2 - t$

*б)* $\exp(-uW_t - \frac{u^2}{2}t)$

**Задача** 12.7. *Подберите нетривиальную функцию $f(t)$ так, чтобы процесс $X_t$ был мартингалом:*

*а)* $X_t = f(t)\cos W_t$

*б)* $X_t = f(t)\sin W_t$

**Задача** 12.8. *Пусть $f(t)$ — неслучайная дифференцируемая функция и $\int_0^t f^2(s)ds < \infty$*
*Найдите интеграл $\int_0^t f(s)dW(s)$*
*Уточнение: «найдите» в данном случае означает выразите через более привычный интеграл Римана*
**Задача** 12.9. *Пусть $X(t)$ — геометрическое броуновское движение, т.е. $dX = \alpha X dt + \sigma X dW$, и $Y = X^n$*
*Докажите, что $Y$ — тоже геометрическое броуновское движение*
**Задача** 12.10. *считаем $\int B_t dt$ — разными способами: aops, 198662*
**Задача** 12.11. *Определим $X_t = \int_0^t \exp(as)\,dW_s$. Найдите $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathbb{E}(W_t \cdot X_t)$, $\mathbb{E}(X_t \cdot X_s)$*
**Задача** 12.12. *Используя лемму Ито и свойства стохастического интеграла найдите*

*а)* $dW_t^4$ *и* $\mathbb{E}(W_t^4)$

*б)* $dW_t^6$ *и* $\mathbb{E}(W_t^6)$

*в)* $dW_t^8$ *и* $\mathbb{E}(W_t^8)$

*г)* $dW_t^{2n}$ *и* $\mathbb{E}(W_t^{2n})$

**Задача** 12.13. *Найдите производную $dY_t/dt$, если она существует*

*а)* $Y_t = \int_0^t W_s\,ds$

*б)* $Y_t = \exp(\int_0^t W_s\,ds)$

*в)* $Y_t = \int_0^t W_s\,dW_s$

**Задача** 12.14. *Постройтие две реализации случайных процессов:*

*а)* $X_t = W_t$

*б)* $X_t = \int_0^t W_s\,ds$

*в)* $X_t = \int_0^t s\,dW_s$

*г)* $X_t = \int_0^t W_s\,dW_s$

*д) Броуновского движения со сносом,* $X_t = t + W_t$

*е) Геометрического броуновского движения,* $X_t = \exp(t + W_t)$

**Задача** 12.15. *Найдите интеграл Ито $\int_0^t e^{W_u - 0.5u}\,dW_u$*
**Задача** 12.16. *Известно, что $X_0 = 3$, $dX_t = 5dW_t + tdt$. Найдите $X_t$, $\mathbb{E}(X_t)$ и $\mathrm{Var}(X_t)$.*
**Задача** 12.17. *Известно, что $X_0 = 2$, $dX_t = W_t dW_t + 3dt$. Найдите $X_t$, $\mathbb{E}(X_t)$ и $\mathrm{Var}(X_t)$.*

# 13. Стохастические ДУ

***Задача* 13.1.** *Пусть случайные процессы $X$ и $Y$ являются решениями системы стохастических дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} dX = aXdt - YdW, X(0) = x_0 \\ dY = aYdt + XdW, Y(0) = y_0 \end{cases}$$

а) *Верно ли, что процесс $R(t) = X^2(t) + Y^2(t)$ является детерминистическим?*

б) *Найдите $\mathbb{E}(X(t))$.*

***Задача* 13.2.** *Vasicek interest rate model*
*Пусть процентная ставка удовлетворяет уравнению:*
$dR = a(b - R)dt + \sigma dW$, *$a$, $b$, $\sigma$ — положительные константы. $R(0)$ — также константа.*

а) *Прокомментируйте смысл $b$, почему $a$ положительное?*

б) *Решите уравнение, то есть найдите $R(t)$ (в ответе будет один неупрощаемый интеграл Ито).*

в) *Найдите $\mathbb{E}(R(t))$, $\mathrm{Var}(R(t))$.*

г) *Найдите $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(R(t))$ и $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(R(t))$.*

***Задача* 13.3.** *Решите $dX_t = \frac{1}{X_t}dt + X_t dW_t$ с начальным условием $X_0 = x$*

***Задача* 13.4.** *Consider the following stochastic differential equation*

$$dX_t = (\sqrt{1 - X_t^2} - 0.5X_t)dt + \sqrt{1 - X_t^2}dW_t, \quad X_0 = 0 \tag{6}$$

а) *Consider a substitution $X_t = \sin Y_t$, where $Y_t$ is some Ito process $dY_t = A_t dt + B_t dW_t$. Using Ito's lemma find $dX_t$.*

б) *State conditions on $A_t$ and $B_t$ such that the two $dX_t$ coincides*

в) *Find $Y_t$ and $X_t$*

***Задача* 13.5.** *Предположим, что $S_t$ является геометрическим броуновским движением, то есть*

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

а) *Найдите $\mathbb{E}(S_t)$ и $\mathrm{Var}(S_t)$*

б) *Являются ли геометрическими броуновскими движениями процессы $X_t = S_t^{-1}$ и $X_t = S_t^2$? Если да, то с какими коэффициентами сноса и волатильности?*

# 14. Модель Блэка-Шоулса

***Задача* 14.1.** *В рамках модели Блэка-Шоулса определите, сколько стоят в момент времени $t = 0$ следующие активы:*

а) *Актив, выплачивающий в момент времени $T$ величину $\frac{1}{S(T)}$.*

б) *Актив, выплачивающий в момент времени $T$ величину $\max\{ln(S(T), 0\}$.*

***Задача* 14.2.** *В рамках стандартной модели Блэка-Шоулза рассмотрим актив, который выплачивает величину $S^2(T_1)/S^2(T_0)$ в момент времени $T_1$.*
*Моменты времени $T_0 < T_1$ фиксированы.*
*Найдите стоимость этого актива в момент времени $t = 0$*

***Задача* 14.3.** *Цена акции в долларах подчиняется уравнению $dS = \alpha S dt + \sigma S dW_1$*
*Валютный курс (евро за доллар) подчиняется уравнению $dY = \beta Y dt + \delta Y dW_2$*
*$W_1$ и $W_2$ — независимые броуновские движения*
*Опцион платит $\ln(SY)$ (евро) в момент времени $T$*
*$r$ — процентная ставка в евро.*
*Найдите цену этого опциона в евро в момент времени $0$ (выразите ее через цену акции в евро).*
***Задача* 14.4.** *уравнение Блэка-Шоулза для акций с дивидендами*
*Допустим по акции платится постоянный дивиденд $\delta$. Т.е. за промежуток времени $dt$ владелец акции получает $\delta S dt$. Рассмотрим портфель из $(-1)$ опциона колл, $a_t$ акций и $b_t$ наличности.*

*а) Подберите $a_t$ так, чтобы портфель был безрисковым.*

*б) Подберите $b_t$ так, чтобы выполнялось бюджетное ограничение.*

*в) Выведите уравнение Блэка-Шоулза. Подсказка 1: При отсутствии арбитража безрисковый портфель должен приносить такую же доходность, как...*
*Подсказка 2: Готовый ответ отличается всего одним слагаемым.*

***Задача* 14.5.** *В рамках модели Блэка-Шоулза известны безрисковая процентная ставка, $r = 0.05$, волатильность, $\sigma = 0.2$ и стартовая цена акций, $S_0 = 100$. С помощью численного эксперимента на компьютере найдите стоимость опциона, который в момент времени $T = 1$ выплачивает* $\max\{S_{0.2}, S_{0.8}\}$.

# 15. Модель Блэка-Шоулса-2

# 16. Компьютерное моделирование

***Задача* 16.1.** *Flip a coin $25$ times, recording whether it comes up Heads or Tails each time. Scoring $X_i = +1$ for each Heads and $X_i = -1$ for each flip, also keep track of the accumulated sum $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ for $i = 1 \ldots 25$ representing the net fortune at any time. Plot the resulting $S_n$ versus $n$ on the interval $[0, 25]$. Finally, using $N = 5$ plot the rescaled approximation $W_5(t) = (1/\sqrt{5})S(5t)$ on the interval $[0, 5]$ on the same graph.*

# 17. Решения

**1.1** Континуум, так как оно равномощно множеству последовательностей из натуральных чисел.

**1.2** да

**1.3** Идея: счетное количество счетных множеств, считаем змейкой

**1.4** Одинаковая, биекция: $\{2, 4, 5\} \sim 01011000000\ldots$, т.е. единички соответствуют включенным в подмножество числам

**1.5** Одинаковая. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{Q}^2$

**1.6** $A < B$

**1.7** $A < B$

**1.8** Множество последовательностей похожих на любую заданную счётно. Мощность множества классов похожих последовательностей — континуум.

**1.9** Назовём две последовательности из чёрных и белых колпаков «похожими», если они отличаются на конечное количество колпаков. Гномы могут заранее в каждом классе похожих последовательностей выбрать одну «представительскую» последовательность. Глядя на колпаки впереди стоящих гномов, можно идентифицировать класс, которому принадлежит фактическая последовательность колпаков. Далее гномы гадают согласно «представительской» последовательности.

**1.10** Например, переселить всех текущих постояльцев в чётные номера. Останутся свободными все нечётные, их хватит.

**1.11** К Новому Году все конфеты окажутся у Деда Мороза.

**2.1**

**2.2** $+$ и $-$ — это симметрическая разность, $1$ — это $\Omega$, $0$ — $\emptyset$, $(A+B)(A-B)+A=B$, $1+1=0$

**2.3** Пример. $\Omega=[0;1]$, $\mathcal{A}$ состоит из конечных множеств и множеств с конечными дополнениями.

**2.4** столько же, сколько разбиений, 5 сигма-алгебр для 3-х элементов и 15 сигма-алгебр для 4-х элементов, числа Белла

**2.5**

**2.6** $\limsup_n C_n = A\cup B$, $\liminf_n C_n = A\cap B$.

**2.7**

**2.8**

**2.9** $\liminf_n A_n \subseteq \liminf_n B_n$ и $\limsup_n A_n \subseteq \limsup_n B_n$.

**2.10** да

**2.11** $1_{A\cap B}=1_A 1_B$, $1_{A\setminus B}=1_A 1_{B^c}$, $1_A+1_{A^c}=1$

**2.12** да, удобно изобразить $\Omega$ отрезком, «пескари» $A\subseteq B$ и «акулы» $A\supseteq B^c$

**2.13** б) $\Omega=\{a,b,c\}$, $\mathcal{F}_1=\{\emptyset,\Omega,a,bc\}$, $\mathcal{F}_2=\{\emptyset,\Omega,ab,c\}$

**2.14** Решение: разобьем натуральный ряд на пары соседних чисел. Можно так подобрать множества $A$ и $B$, что в каждом из них из каждой пары взято только одно число. Поэтому $\gamma(A)=\gamma(B)=\frac{1}{2}$. Подобрав совпадение-несовпадение в паре, можно сделать так, что $\gamma(A\cap B)$ не существует.

**2.15**

**2.16**

**2.17**

**2.18** $\mathcal{F}$ имеет мощность континуум, так как равномощно множеству последовательностей из нулей и единиц
$\mathcal{A}$ счетно, так как равномощно множеству последовательностей из нулей и единиц, где конечное количество нулей или конечное количество единиц

**2.19** $f$ — константа

**2.20** да

**2.21**

**2.22** да

**2.23** да

**2.24** Answer: yes, yes

**2.25**

**2.26**

**2.27** Например, $B$ — Канторово множество, или (гораздо проще) $B=[0;0,5]$. Оно само более чем счетно и дополнение к нему более чем счетно.
$\mathcal{F}$ действительно $\sigma$-алгебра.
$\emptyset$ лежит в $\mathcal{F}$ т.к. имеет ноль элементов (а ноль, очевидно, не более чем счетное число).
Если $A$ не более чем счетно, то $A^c$ лежит в $\mathcal{F}$ т.к. дополнение к $A^c$ содержит не более чем счетное число элементов.
Если дополнение к $A$ не более чем счетно, то $A^c$ лежит в $\mathcal{F}$ т.к. содержит не более чем счетное число элементов.
Проверяем счетное объединение $\bigcup_i A_i$.
Если среди $A_i$ встречаются только не более чем счетные, то и их объединение — не более чем

счетно.
Если среди $A_i$ встретилось хотя бы одно множество с не более чем счетным дополнением, то $\bigcup_i A_i$ тоже будет обладать не более чем счетным дополнением, так как объединение не может быть меньше ни одного из объединяемых множеств.

**2.28** Введём новую функцию $Z = X - Y$. Тогда интересующее нас множество - это прообраз нуля $A = Z^{-1}(0)$. Число ноль — борелевское множество. Докажем более сильное утверждение, что $Z$ — это случайная величина, т.е. прообраз любого борелевского множества измерим. По доказанной в прошлый раз теореме, достаточно проверить, что прообраз любого множества вида $(-\infty; z)$ измерим.
Пусть $r_x$ и $r_y$ — два рациональных числа. Множества $A_{r_x} = X^{-1}((-\infty; r_x))$ и $C_{r_y} = Y^{-1}((r_y; +\infty))$ измеримы.
Следовательно, $D_{r_x,r_y} = A_{r_x} \bigcap C_{r_y}$ тоже измеримо.
Немного помедитировав замечаем, что $Z^{-1}(-\infty; z) = \bigcup_{r_x - r_y < z} D_{r_x,r_y}$

**2.29**

**2.30** Да. $f'$ — непрерывна, а следовательно, измерима.

**2.31** Заметим, что $\sigma(X_t) = \{\emptyset, \Omega, \{t\}, \Omega\backslash\{t\}\}$. Значит в $\mathcal{F}_t$ является минимальной $\sigma$-алгеброй порожденной набором одноточечных множеств $\{x | x \in [0; t]\}$. Т.е. $\mathcal{F}_t$ — это все счетные подмножества отрезка $[0; t]$ плюс все их дополнения.

**2.32** $2^{101}$, $2^{101 \cdot 51}$, нет, да

**2.33** $2^2$, $2^3$, $2^5$, нет, нет

**2.34** Они совпадают

**2.35**

**2.36** Нет. В конечной только $2^n$, где $n$ — количество элементов в разбиении $\Omega$

**2.37** $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$

**2.38**

**2.39**

а)

б)

в)

г)

д) yes, yes

е) no, no

ж) no, consider $\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = -1\}$

**2.40**

**2.41** Содержит 8 элементов, порождается разбиением.

**2.42** Содержит 4 элемента, порождается разбиением.

**2.43** $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{$дождь$\}, \{$солнечно, пасмурно$\}$. Всего есть $1 + 1 + 3 = 5$ $\sigma$-алгебр.

**2.44**

**3.1**

**3.2**

**3.3**

**3.4**

**3.5**

**3.6**

**3.7**

**3.8**

**3.9**

**3.10**

**3.11**

**3.12**

**4.1** да

**4.2**

**4.3**

**4.4**

**4.5**

**4.6**

**4.7**

**4.8**

**4.9**

**4.10**

**4.11**

**4.12**

**4.13**

**4.14** Да. Рассмотрим множество $X - Y > c$. Его можно представить в виде $\{X - Y > c\} = \cup_q \{X > q \cap Y < q - c\}$. Далее замечаем, что $\mathbb{P}(X > q \cap Y < q - c) = \mathbb{P}(Y > q \cap Y < q - c) = 0$ для $c > 0$. Т.е. $\mathbb{P}(X - Y > c) = 0$ для $c > 0$. В силу непрерывности вероятности получаем $\mathbb{P}(X - Y > 0) = 0$. Далее используем симметрию и получаем $\mathbb{P}(Y - X > 0) = 0$. Значит $\mathbb{P}(X = Y) = 1$

**4.15** Обе равны 1

**4.16** $\mathbb{P}(B)$

**4.17** Да

**5.1**

**5.2** in probability (ok), in distribution (ok)

**5.3** no

**5.4**

**5.5**

**5.6**

**5.7**

**5.8** b) easy counterexample by Sasha Serova
$Y_n = 1 - 1/n$, $Y_n \uparrow 1$, take $a = 1$, $1_{Y_n \geqslant 1} = 0$, $1_{Y \geqslant 1} = 1$

**5.9**

**5.10**

**5.11** $|\mathbb{E}(X_n 1_A) - \mathbb{E}(X 1_A)| \leqslant \mathbb{E}(|X_n 1_A - X 1_A|) \leqslant \mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$

**5.12** Верно. Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$.
$E|X - X_n| + E|Y_n - Y| \geqslant E|X - Y + Y_n - X_n| \geqslant E\left(|X - Y + Y_n - X_n| 1_{X - Y > \varepsilon} 1_{Y_n \geqslant X_n}\right) \geqslant \varepsilon \mathbb{P}(X - Y > \varepsilon)$
Следовательно, для любого $\varepsilon$ вероятность $\mathbb{P}(X - Y > \varepsilon) = 0$ (т.к. левая часть стремится к 0 при $n \to +\infty$)

**5.13** $\mathbb{P}(A_t) = \frac{t-1}{t}$ и $\mathbb{P}(\cup_t A_t) = 1$
То есть с вероятностью 1 будет лишь конечное число выигрышей. Другими словами $\bar{X}_n \to -1$ (as)

**5.14**

**5.15**

**5.16**

**5.17**

**5.18**

**5.19** limit is $1/e$ almost surely
hint?: It's the law of large numbers. Show that the logarithm of a uniform 0-1 has expected value (-1). Its negative is an exponential distribution with parameter 1.

**5.20**

**5.21** В качестве $X_n$ и $X$ берем любую случайную величину с бесконечным мат. ожиданием

**5.22** $X_n \to X$. a) as, P, law, $L^2$; b) as, P, law

**5.23** К нулю, кроме как поточечно.

**5.24**

**5.25** Нет.

**5.26** Да

**5.27** Да

**5.28** $\mathbb{P}(X \leqslant t)$ меньше

**5.29** Условия равносильны

**5.30**

**5.31** Сходится по вероятности к нулю

**5.32** да,

$$\mathbb{P}(|X_nY_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_nY_n| > \varepsilon, |Y_n| > t) + \mathbb{P}(|X_nY_n| > \varepsilon, |Y_n| \leqslant t) \leqslant \\ \leqslant \underbrace{\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon/t)}_{\to 0} + \underbrace{\mathbb{P}(|Y_n| > t)}_{\to 0} \quad (7)$$

**5.33** Событие $Y_n \to 0$ лежит в хвостовой $\sigma$-алгебре, поэтому $\mathbb{P}(Y_n \to 0)$ может равняться только нулю или единице.

**6.1**

**6.2**

**6.3**

**6.4**

**6.5** (2) $\to$ (1): $X \leqslant Y$ (as) $\Rightarrow X1_F \leqslant Y1_F$ (as) $\Rightarrow \mathbb{E}(X1_F) \leqslant \mathbb{E}(Y1_F)$
(1) $\to$ (2): для $F = \{X - Y > \varepsilon\}$ получаем $\mathbb{E}((X-Y)1_F) \leqslant 0$, но $\mathbb{E}((X-Y)1_F) \geqslant \mathbb{E}(\varepsilon 1_F) = \varepsilon\mathbb{P}(F)$. Значит $\mathbb{P}(X - Y > \varepsilon) = 0$

**6.6**

**6.7**
а) Обнулим величину $X$ там, где она больше, чем $||X||_\infty$.

б) Обозначим $a = ||X||_\infty$. Тогда $\mathbb{P}(X > a - \varepsilon) > 0$. И $X \geqslant (a-\varepsilon)1_{X > a-\varepsilon}$. Значит $||X||_p \geqslant (a-\varepsilon)||1_{X>a-\varepsilon}||_p$.

**6.8**
а)

б) $\mathbb{E}(X^2 + Y^2 - 2XY) \geqslant 0$

**6.9** We know that X>Y with probability zero. Assume that X<Y with probability greater than zero. Then, the expectation of X would have to be less than the expectation of Y. And the distributions would be different — hence contradiction. So thereofre X=Y with probability 1 (almost surely)

**6.10** Нет, $X$ — почти наверное константа.

**6.11** $\mathrm{Var}(X) < \mathbb{E}(X)$

**6.12**

**6.13** Да

**6.14**

**7.1** а) $\varphi_U = (t) = \sin(t)/t$

б) $\varphi(t)\varphi(-t) = |\varphi(t)|^2 = \sin(t)/t$, но правая часть бывает отрицательной, противоречие.

**7.2**

**7.3**

**7.4**

**7.5**

**7.6**

**7.7**

**7.8**

**7.9**

**7.10** берем любые две характеристические функции, чтобы получалось в итоге нормальное распределение.

**7.11** Во-первых, $p_0 = 0$
Во-вторых, $g(\frac{1}{3}) = p_1\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} p_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \leqslant p_1\frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}(1-p_1)\left(\frac{1}{3}\right)^k = p_1\frac{1}{3} + (1-p_1)\frac{1}{6} = \frac{1+p_1}{6}$
Единственно возможный вариант это $p_1 = 1$.
Т.е. $X$ — это константа единица.

**7.12** Если не считать Васю, то $n$ случайных точек разрезают отрезок на куски со средней длиной $\frac{1}{n+1}$. Слева от Васи оказывается $L+1$ кусок, где $L$ — число разрезов, попавших слева от Васи. Значит, средняя длина от Васи до ближайшей точки налево равна $\mathbb{E}(\frac{t}{L+1})$, где $L - Bin(n,t)$. Аналогично, от Васи до ближайшего разреза справа — $\mathbb{E}(\frac{t}{R+1})$, где $R - Bin(n, 1-t)$.
Пусть $L - Bin(n,t)$. Считаем $\mathbb{E}(\frac{1}{L+1})$. Для начала находим $\mathbb{E}(x^L) = (tx+1-t)^n$. Затем замечаем, что $\frac{1}{L+1} = \int_0^1 x^L$. Значит $\mathbb{E}(\frac{1}{L+1}) = \int_0^1 \mathbb{E}(x^L) = \ldots = \frac{1-(1-t)^{n+1}}{t(n+1)}$. Получаем ответ: $\mathbb{E}(\frac{t}{L+1}) + \mathbb{E}(\frac{t}{R+1}) = \frac{2-(1-t)^{n+1}-t^{n+1}}{n+1}$. Чтобы кусок получался длиннее, лучше хвататься по центру!

**8.1**

**8.2** $\mathbb{E}(W|Z) = \frac{2Z^2+1}{2+\frac{1}{\sqrt{Z}}}$
Будет пороговое $b \approx 0.32$ (кубическое уравнение с плохими корнями). Если $Z < b$, то брать текущую, если $Z > b$, то менять выбор.
Source: aops, t=173650

**8.3** $\mathbb{E}(X+Y|X-Y) = |X-Y| + \frac{1}{\lambda}$

**8.4**

**8.5**

**8.6** Составляем таблицу $4\times 4$. Находим $\mathbb{E}(Y|X=1) = 2.5$, $\mathbb{E}(Y|X=2) = 3$, $\mathbb{E}(Y|X=3) = 3.5$, $\mathbb{E}(Y|X=4) = 4$.
И, $\mathbb{E}(Y|X) = 2 + 0.5X$.

**8.7**

**8.8**

$$\mathbb{E}(XY|XZ) = \begin{cases} 1, XZ = 0 \\ 0, XZ = 3 \\ 4, XZ = 4 \\ 0, XZ = 5 \\ 6, XZ = 6 \end{cases}$$

**8.9**

**8.10**

**8.11**

**8.12**

**8.13**

**8.14** Да, для $X$ и $Y$ из $L^2$ доказательство простое: $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(XY)$ и $\mathbb{E}((X-Y)^2) = 0$. В общем случае нужно спускаться до событий и определения (?). http://math.stackexchange.com/questions/34101/

**8.15**

**8.16**

**8.17**

**8.18**

**8.19**

**8.20**

**8.21**

**8.22**

**8.23**

**8.24**

**8.25**

**8.26**

**8.27** b) $Cov(X - \hat{X}, Y) = 0 \Rightarrow$ независимость $X - \hat{X}$ и $Y$
$A \in \sigma Y \Rightarrow E[(X - \hat{X})1_A] = \mathbb{E}(X - \hat{X})\mathbb{E}(1_A) = 0$

**8.28** $\mathbb{E}(X|X+Y) = 0.5(X+Y)$, $\mathbb{E}(X-Y|X+Y) = 0$, $\mathbb{E}(X^2 - Y^2|X+Y) = 0$

**8.29** $p(x_1|\min) = \frac{n-1}{n(1-\min)}$ при $x_1 > \min$
$\mathbb{E}(X_1|\min\{X_1, \ldots, X_n\}) = \frac{(1+\min)(n-1)}{2n}$

**8.30** 0,

$$\mathbb{E}(X|Y) = -\sqrt{Y}\frac{f(-\sqrt{Y})}{f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{Y})} + \sqrt{Y}\frac{f(\sqrt{Y})}{f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{Y})} = \sqrt{Y}\frac{\exp(2\sqrt{Y}) - 1}{\exp(2\sqrt{Y}) + 1}$$

**8.31** Рассмотрим величину $F$ такую, что $X = Z\cos(F)$, $Y = Z\sin(F)$.

**8.32** $\mathbb{E}(N) = 1$, $\mathrm{Var}(N) = 2$, $\mathbb{P}(N > 0) = 0.5$

**8.33**

**8.34**

**8.35**

**8.36**

**8.37**

**8.38**

**8.39** а) $\mathrm{Var}(X)$ больше (можно разложить $\mathrm{Var}(X)$)

**8.40**

**8.41** $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}(1_{X=k})=\mathbb{E}(\mathbb{E}(1_{X=k}|T))=\int_0^\infty e^{-lambda_{in}t}\frac{(\lambda_{in}t)^k}{k!}\lambda_{service}e^{-\lambda_{service}t}dt=\ldots$
Ответ: геометрически, $\alpha=\frac{\lambda_{service}}{\lambda_{in}}$, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\alpha}{(1+\alpha)^{k+1}}$

**8.42** $p(y)=\frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}$, $\mathbb{E}(Y|X)=1/X$, $\mathbb{E}(X|Y)=\frac{2}{\lambda+Y}$

**8.43**

**8.44**

**8.45**

**8.46**

**8.47**

**8.48**

**8.49** первое и четвертое верны, а второе и третье — нет.

**8.50** $\mathbb{E}(X_n)=\frac{1}{2^n}$; $V(X_n)=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}$. $f_{X_n}(x)=\frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot 1_{[0;1]}$.
$\mathbb{E}(X_2|X_1,X_3)=\frac{X_1-X_3}{\ln X_1-\ln X_3}$.
При любом $\omega$ последовательность $X_n(\omega)$ монотонно невозрастающая и ограниченная (нулем). Значит, она сходится. При этом

$$\mathbb{P}(\forall i\ X_i>\epsilon)<\mathbb{P}(X_k>\epsilon)<\frac{\mathbb{E}(X_k)}{\epsilon}=\frac{1}{2^k\epsilon}$$

для любого $k$. Значит, $\mathbb{P}(\forall i\ \ X_i>\epsilon)$ меньше любого положительного числа, то есть $\mathbb{P}(\forall i\ \ X_i>\epsilon)=0$. Значит, с вероятностью 1 $X_n(\omega)$ сходится именно к нулю, то есть $X_n\to 0$ почти наверное. Отсюда следуют сходимости по вероятности и по распределению. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n)=0$, а $0<\mathbb{E}(X_n^p)<\mathbb{E}(X_n)$ для $\forall p>1$, то имеет место также и сходимость в $L^p$. Итак, данная последовательность стремится к нулю во всех разумных смыслах.

**8.51** $\mathbb{E}(R+L|M)=n-M$, $\mathbb{E}(M|R+L)=n-R-L$, $\mathbb{E}(R|L)=(n-L)\frac{r}{1-l}$, $\mathrm{Var}(R|L)=(n-L)\frac{r}{1-l}\frac{1-r-l}{1-l}$, $\mathbb{P}(\mathbb{E}(R|L)=0)=l^n$, $\mathbb{P}(R=0|L)=\left(\frac{r}{r+m}\right)^{n-L}$

**8.52** $\mathbb{E}(X|X+Y)=\frac{n_1}{n_1+n_2}(X+Y)$

**8.53** $\mathbb{E}(X|X+Y)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}(X+Y)$

**8.54** Раскладываем $X_1$ в сумму $n$ индикаторов, получаем $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2)=\ldots=\frac{p_1}{p_1+p_2}(X_1+X_2)$

**8.55** $Y_1, 0, Y_3 1_{Y_3>1}$

**8.56**

**8.57** $\sigma(X)\subset\sigma(X^2)$, величина $X$, принимающая неотрицательные значения.

**8.58** $\mathbb{P}(L>R|L)=L^{20}$, $\mathbb{P}(L>R|R)=1-R^{80}$, $\mathbb{P}(L>R|M)=\frac{80}{100}$, $\mathbb{P}(L>R|L,M)=1-1_{L>M}$
$\mathbb{E}(\min\{X_1,\ldots,X_{100}\}|X_1)$ сводится к подсчету $E(1/(N+1))$ для биномиальной случайной величины.

**8.59** Используя подсказку получаем: $M^k=\mathbb{P}(M>X_{n+1}\cap M>X_{n+2}\cap\ldots\cap M>X_{n+k}|M)$. Значит $\mathbb{E}(M^k)=\mathbb{P}($максимум из $(n+k)$ равномерных величин лежит среди $n$ первых$)=\frac{n}{n+k}$

**8.60** Во-первых, интуитивно: наше условное мат. ожидание не сделало $Y$ более «грубым», значит не должно было совсем изменить, то есть ответ «верно». Во-вторых, формально. Т.к. $X$ и $Y$ одинаково распределены:

$$\mathbb{E}(1_{Y>0}Y)=\mathbb{E}(\max\{Y,0\})=\mathbb{E}(\max\{X,0\})=\mathbb{E}(1_{X>0}X)$$

По определению условного математического ожидания:

$$\mathbb{E}(1_{X>0}X)=\mathbb{E}(1_{X>0}Y)=\mathbb{E}(1_{X>0\cap Y>0}Y)+\mathbb{E}(1_{X>0\setminus Y>0}Y)\leqslant\mathbb{E}(1_{Y>0}Y)+\mathbb{E}(1_{X>0\setminus Y>0}Y)$$

Получаем, что $\mathbb{E}(1_{Y>0}Y) \leqslant \mathbb{E}(1_{Y>0}Y) + \mathbb{E}(1_{X>0\setminus Y>0}Y)$. Это возможно только если $\mathbb{E}(1_{X>0\setminus Y>0}Y) \geqslant 0$. Но $1_{X>0\setminus Y>0}Y \leqslant 0$. Значит $\mathbb{P}(X>0\setminus Y>0)=0$.
Рассмотрев дополнительно $X<0$ и $Y<0$ мы получаем, что $\mathbb{P}(X>0\Delta Y>0)=0$.
Сравнив аналогичным образом $(X-c)$ и $(Y-c)$ мы получаем, что $\mathbb{P}(X>c\Delta Y>c)=0$.

**8.61** Да, так как $\sigma(Y^2)=\sigma(|Y|)$

**8.62** $Cov(S,N)=\mathbb{E}(SN)-\mathbb{E}(S)\mathbb{E}(N)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(SN|N))-\mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N))\mathbb{E}(N)=\ldots$

**8.63**

**8.64** а) рассмотрите величину $Y$, принимающую значения 0 и 1

б) нет, если $X$ принимает больше значений, чем $Y$

**8.65** $E(X)=1$, $\operatorname{Var}(X)=1$, $E(X^2)=\operatorname{Var}(X)+E^2(X)=2$;
$E(Y)=3/2$, $\operatorname{Var}(Y)=1/12$, $E(Y^2)=\operatorname{Var}(Y)+E^2(Y)=7/3$;

$$E(Z|X)=E(XY|X)=XE(Y|X)=XE(Y)=1.5X \tag{8}$$

$$\operatorname{Var}(Z|X)=\operatorname{Var}(XY|X)=X^2\operatorname{Var}(Y|X)=X^2\operatorname{Var}(Y)=\frac{X^2}{12} \tag{9}$$

$$\begin{multline}Cov(X,Z)=Cov(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)=\\=E(X^2)E(Y)-E(X)E(X)E(Y)=E(Y)\operatorname{Var}(X)=\frac{3}{2}\end{multline} \tag{10}$$

$$\operatorname{Var}(Z)=E(X^2Y^2)-E(X)^2E(Y)^2=2\cdot\frac{7}{3}-1^2\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{29}{12} \tag{11}$$

$$Corr(X,Z)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1\cdot\frac{29}{12}}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}} \tag{12}$$

Величина $W=E(Z|X)$ равномерна на $[1.5;3]$
Заметим, что $V=X^2/12$ и $X=2\sqrt{3}\sqrt{V}$.

$$\frac{dx}{dv}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{v}} \tag{13}$$

Функция плотности

$$p(v)=p_X\left(2\sqrt{3v}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{v}}=\exp\left(-2\sqrt{3v}\right)\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{v}} \tag{14}$$

**8.66**

**8.67** Нет, например, возьмем независимые одинаково распределенные $X$ и $Y$ и $Z=(X+Y)/2$.

**8.68**

$$\mathbb{E}(S|N)=\frac{0.5}{2}(N-1)+\frac{1.5}{2}=\frac{N}{4}+\frac{1}{2}$$

Случайные величины $X_i$ условно независимы при фиксированном $N$, поэтому

$$\operatorname{Var}(S|N)=(N-1)\frac{0.5^2}{12}+\frac{0.5^2}{12}=N/48$$

Обратим внимание, что $N$ имеет геометрическое распределение:

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(N) + \frac{1}{2} = 1$$

Переходим к дисперсии:

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(S|N)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(S|N)) = 1/6$$

**8.69** В $\sigma(A)$ четыре события, $\sigma(A) = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$. В $\sigma(X)$ 16 событий. Оказывается, что $\mathbb{E}(X \mid A) = \mathbb{E}(X \mid \sigma(A)) = 1.5$.

**8.70**

**8.71** $\mathbb{E}(Y|X) = X\cos(X) + 15$, $\mathbb{E}(Y|Z) = Z$

**8.72**

**8.73** $f(x) = x + 0.5$ при $x \in [0; 1]$, $f(y|x) = \frac{x+y}{x+0.5}$, $\mathbb{E}(Y|X) = \int_0^1 y \cdot f(y|X)\,dy = \frac{3X+2}{6X+3}$.

**8.74**

**8.75**

$$\mathbb{E}(X|Y) = 2 + \mathbb{E}(T_1 + T_2 + \ldots + T_Y|Y),$$

где $T_i$ равна 1, если непосредственно до $i$-ой решки был орёл. Все $\mathbb{E}(T_i|Y)$ равны. Находим $\mathbb{E}(T_1|Y)$. Каждому варианту исходу, начинающемуся с Р соответствует ровно один исход начинающийся с ОР, но в два раза менее вероятный. Отсюда $\mathbb{E}(T_1|Y) = 1/3$ и $\mathbb{E}(X|Y) = 2 + Y/3$.

**9.1** The first thing to notice is that there is no natural upper boundary for this problem. In effect, the stock situation is like playing against an infinitely rich adversary. Therefore, we will set a temporary artificial boundary at $25 + M$, where $M$ is some positive integer, and then at the end of the problem, we will let $M$ go to infinity. Let $D_z$ be the duration of the game, that is, the expected number of moves until the stock goes from price 25 to price 18. Second, we note that the conditioning by expectation, or one-step analysis, give the following set of equations:

$$\begin{aligned}
D_{25} &= (1/3)D_{26} + (2/3)D_{24} + 1 \\
D_{24} &= (1/3)D_{25} + (2/3)D_{23} + 1 \\
D_{23} &= (1/3)D_{24} + (2/3)D_{22} + 1 \\
D_{22} &= (1/3)D_{23} + (2/3)D_{21} + 1 \\
D_{21} &= (1/3)D_{22} + (2/3)D_{20} + 1 \\
D_{20} &= (1/10)D_{19} + (9/10)D_{21} + 1 \\
D_{19} &= (2/3)D_{20} + (1/3)D_{18} + 1 \\
D_{18} &= 0
\end{aligned}$$

Еще одно уравнение! (Или пара)

**9.2**

**9.3**

**9.4**

**9.5**

**9.6**

**9.7**

**9.8** Let the probability that $X_i = +1$ be $p$, that is, a step to the right occurs with probability $p$. The stated random walk problem is equivalent to the ruin probability for a gambler starting with initial fortune $b$ who succeeds by reaching increasing his fortune by $a$ to reach the level $a+b$ before being ruined by losing $b$ reaching 0. This is the complementary probability to the ruin probability and so may be expressed as

$$p_b = 1 - q_b = 1 - \frac{(q/p)^{a+b} - (q/p)^b}{(q/p)^{a+b} - 1}$$

This can be simplified to

$$\frac{(q/p)^b - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}.$$

Alternatively, we can view this as the ruin of the gambler's adversary, and using the idea in the first corollary, express this as:

$$((p/q)^{a+b} - (p/q)^a)/((p/q)^{a+b} - 1).$$

One can verify with a little algebra that these expressions are equivalent.

**9.9** If the walker starts at the origin and goes to $-1$ at the first step, then the walk must return to the origin again before possibly reaching $a > 0$. Hence we need only consider the possibility of the walk starting from the point $1$ at the first step, and then reaching the value $a > 0$ before returning to the origin. The probability of going to $1$ is $p$, and then from $1$ the subsequent independent probability of reaching $a$ before returning to the origin is the same as the probability of the gambler achieving success at $a$ before reaching the origin, which is $1 - q_1$. Therefore the joint probability of the two independent events in succession is $p(1 - q_1)$. Consider a special case just to check the results. Consider $p = 1/2 = q$. Then it is easy to compute that $p(1 - q_1) = (1/2)(1 - (1 - 1/a)) = 1/(2a)$. Now take $a = 2$, and start from the origin. It is easy to see that the only to go from the origin to the point $a = 2$ before returning to the origin is to go from $0$ to $1$, and then $1$ to $2$ in sequence. Anything whatsoever can then happen, so long as the walk ultimately returns to the origin, which it must. So from direct computation, the probability of such a path is $1/4$. The formula gives the probability $1/(2a) = 1/(2 \cdot 2) = 1/4$, so the formula agrees with direct calculation in this special case, and we are reassured!

**9.10** for part b:

> If $q \geqslant p$, conclude from the preceding problem: In a random walk starting at the origin, the number of visits to the point $a > 0$ that take place before the first return to the geometric distribution with ratio $1 - qq_{a-1}$. (Explain why the condition $q \geqslant p$ is necessary)

This problem is conceptually and computationally simpler if $p = q = 1/2$ so I will work only that case. It is convenient to first calculate and record some probabilities, then solve the problem. Starting from the origin, the probability to reach $a > 0$ before returning to the origin is $p(1 - q_1) = p(1 - (1 - 1/a)) = p(1/a) = 1/(2a)$. Starting at $a$, the probability to reach the origin before returning to the starting point is $qq_{a-1} = q(1 - (a-1)/a) = q(1/a) = 1/(2a)$. This makes sense, since this situation is symmetric with the previous situation and so should have the same probability. The ratio for the geometric probability is supposed to be $1 - qq_{a-1} = 1 - q(1 - (a-1)/a) = 1 - q(1/a) = 1 - 1/(2a) = (2a-1)/(2a)$. The probability of $0$ visits to $a$ before hitting the origin is the complement of the probability of one (or more) visits to $a$ before hitting the origin. Since the random walk is recurrent (that is, will hit every point eventually from any starting point, this is where the necessity of $p = q = 1/2$ comes in!) the probability of hitting the origin again from $a$ (perhaps after more visits to $a$) is certain, so the probability of one (or more) visits to $a$ before hitting the origin is the same as the probability of a first visit to $a$ before returning to the origin, namely $p(1 - q_1) = 1/(2a)$. Then the desired probability of $0$ visits is $(1 - 1/(2a)) = (2a - 1)/(2 * a)$. The probability of exactly one visit to $a$ before returning to the origin is the probability of passing from the origin to $a$ without first returning to the origin, followed by passing from $a$ to the origin without first returning to $a$. This is $p(1 - q_1)qq_{a-1} = (1/(2a))(1/(2a)) = 1/(4a^2)$. The probability of exactly two visits to $a$ before returning to the origin is the probability of passing from the origin to $a$ without first returning to the origin, followed by a bridge from to $a$ to $a$ without touching the origin, followed by passing from $a$ to the origin without first returning to $a$. The middle probability is the same as the already computed probability of passing exactly 0 visits to $a$ from the origin, by the symmetry of the situation. This is

$$p(1-q_1)((2a-1)/(2a))qq_{a-1} = (1/(2a))(1/(2a)) = 1/(4a^2)(2a-1)/(2a).$$

Now the pattern is clear, and we see that the number of visits to $a$ with out first returning to the origin is a deficient geometric random variable with ratio $(2a-1)/(2a)$.
That is, the probability distribution is

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}[N=0] & = & (2a-1)/(2a) \\
\mathbb{P}[N=1] & = & 1/(4a^2) \\
\mathbb{P}[N=2] & = & (1/(4a^2))(2a-1)/(2a) \\
\mathbb{P}[N=3] & = & (1/(4a^2))((2a-1)/(2a))^2
\end{array}$$

and so on the expected value of $N$ is then

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{1}{4a^2} \left(\frac{2a-1}{2a}\right)^{i-1} = 1$$

This is astonishing, the expected number of visits to $a$ before returning to the origin, regardless of the value of $a$ is 1, the same for 1 million as for 10!.

**10.1**

**10.2**

**10.3**

**10.4**

**10.5**

**10.6** Да. Доказательство не меняется при замене неравенства. Например, Steele, p. 19-20.

**10.7** г)
Процедуру можно представить себе так:
Положим на прямую красный шар. Затем по одному будем класть белые шары (миллион штук). Причем класть их будем равновероятно на любое место между уже положенными шарами, или с любого края полоски.
В результате положение красного шара (отделяющего шары разных урн) распределено равновероятно.
То есть в пределе доля распределена равномерно на $[0;1]$

**10.8**

**10.9**

**10.10**

**10.11**

**10.12**

**10.13**

**10.14**

**10.15** Обозначим $s$ размер ставки в $n+1$-ой партии. Тогда $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1} s Z_n$.
Задача сводится к максимизации $E[(\ln Z_{n+1} - (n+1)\alpha) - (\ln Z_n - n\alpha)|\mathcal{F}_n]$ по $s$.
Получаем $s = 2p-1 = p-q$.

**10.16**

**10.17**

**10.18** да

**10.19** $X_t = tU$, где $U$ равновероятно принимает значения $(+1)$ или $(-1)$.

**10.20** $X_t$ — случайное блуждание, $\mathcal{F}_t$ — естественная фильтрация, $\mathcal{H}_t$ — колдунская фильтрация. Да, мартингал относительно $\mathcal{K}_t = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{H}_t$.

**10.21**

**10.22** По DCT.

**10.23**

**10.24**

**10.25** Существует $N$, такое что $\sup_{Z\in\mathcal{H}} E\left(|Z|1_{Z>N}\right) < 1$.
$\sup_{Z\in\mathcal{H}} E|Z| = \sup_{Z\in\mathcal{H}} E\left(|Z|1_{Z>N}\right) + \sup_{Z\in\mathcal{H}} E\left(|Z|1_{Z\leqslant N}\right) \leqslant 1 + N$

**10.26** (better solution is welcome).
$|X_k|1_{|X_k|>M} \leqslant |X - X_k|1_{|X_k|>M} + |X|1_{|X_k|>M}$
Заметим, что $1_{|X_k|>M} \leqslant 1_{|X|>M/2} + 1_{|X-X_k|>M/2}$
$|X_k|1_{|X_k|>M} \leqslant |X - X_k| + |X|1_{|X|>M/2} + |X|1_{|X-X_k|>M/2}$
Можно выбрать $K$ и $M$ так, что для любого $k \geqslant K$ правая часть будет меньше, чем $3\varepsilon$. А в силу конечности $K$ можно выбрать $M$ так, чтобы $|X_k|1_{|X_k|>M} \leqslant 3\varepsilon$ для $k < K$.

**10.27**

**10.28**

**10.29**

**10.30**

**10.31**

**10.32**

**10.33**

**10.34**

**10.35**

**10.36**

**10.37**

**10.38**

**10.39**

**10.40**

**10.41** Маше безразлично, делать ли прогноз на следующую карту или на последнюю, так как о них в любой момент времени имеется одинаковая информация. Исходная вероятность того, что последняя карта будет красной равна $\frac{1}{2}$. Следовательно, любая Машина стратегия приводит к такой вероятности выигрыша. Маша не может ее ни увеличить, ни снизить!

**10.42**

**10.43**

**10.44**

**10.45**

**10.46**

**10.47**

**10.48**

**10.49**

**10.50** Hint: Мартингалы $W_t$, $W_t^2 - t$, $W_t^3 - 3tW_t$ вам в помощь

**10.51** Hint: Мартингалы $a^{X_t}$ и $X_t - \mu t$ вам в помощь

**10.52** Hint: Мартингал $X_t$ — доля тузов среди неоткрытых карт вам в помощь

**10.53** Hint: Если $X_t$ — разница в очках, то $Y_t = a^{X_t}$ и $M_t = X_t + bt$ — мартингалы.
$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$,

| $\varepsilon_t$ | 0 | 1 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 |

$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 1/4$.
$M_t = X_t - t/4$
Из условия $\mathbb{E}(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) = Y_t$ получаем $a = 1/2$ и $Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^{X_t}$ — мартингал. Применяя теорему Дуба, находим, что $p = 32/33$ и $\mathbb{E}(\tau) = 18.8$.

**10.54** $\left(\frac{2}{3}\right)^{B_t}$ — мартингал
$\varepsilon_t = \Delta B_t$

| $\varepsilon_t$ | 0 | 1 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0.5 | 0.2 | 0.3 |

Кстати, используя другой мартингал, можно установить, что

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{10}{6}\right)^{M_\tau}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{10}{5}\right)^{S_\tau}\right)$$

**10.55** Hint: Мартингалы $S_t$, $S_t^2 - t$ вам в помощь

**10.56** Hint: Мартингалы $a^{S_t}$, $S_t + bt$ вам в помощь

**10.57** Hint: самое сложное тут — подходящий мартингал

**10.58** Hint: $K_t$ — число красных шаров — мартингал, $p = 5/8$.

**10.59** hint: Consider martingale $X_n$ the proportion of keys from the first two safes in safes which are closed at time $t$
sol (one of many possible)
let $\tau$ be a stopping time — the time when we cannot open more safes (all safes are open or we have no more keys). $T = \tau \wedge (n-1)$ is also a stopping time. The «last safe» is the safe not opened at $T$ with minimal possible number. Let $M_t$ be the proportion of not opened safes at time $t$ containing keys from the first $k$ safes. is a martingale. $T$ — bounded stopping time. $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) = \frac{k}{n}$ by the optional stopping time theorem. And $\mathbb{E}(M_T)$ is the probability we have been searching (the probability of opening all safes is exactly the probability that the last safe contains the key from the first safes).
aops, 1310759

**10.60** По тождеству Вольда

$$\mathbb{E}(\min\{X_1, x\})\mathbb{E}(T_x) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T_x} \min\{X_i, x\}\right) \tag{15}$$

Остается доказать, что $x \leqslant \sum_{i=1}^{T_x} \min\{X_i, x\} \leqslant 2x$

**10.61** Обозначим $P_n$ вероятность остановиться ровно на $n$ метрах. Мы ищем $P_{100}$.
Решение 1. По методу первого шага: $P_n = pP_{n-1} + (1-p)P_{n-2}$.
Решение 2. Попасть ровно в $n$ можно двумя способами: перелетев $n-1$ или попав в $n-1$ и сделав шаг в один метр. Значит $P_n = (1 - P_{n-1}) + pP_{n-1}$.
Решение 3. Обозначим Васину координату в момент времени $t$ как $X_t$. Можно найти $a$ так чтобы процесс $Y_t = a^{X_t}$ был мартингалом, $a = 1/(p-1)$. Момент остановки $T = \min\{t|X_t \geqslant n\}$. Мартингал $Y_{t\wedge T}$ ограничен, теорема Дуба применима. $\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$. Получаем

$$P = \frac{1 + (1-p)^{101}}{2-p}$$

**10.62**

**11.1** We have to systematically check each of the defining properties of Brownian motion in turn for each of the transformed processes.

a)
$$W_1(t) = cW(t/c^2)$$

(a) The increments

$$W_1(t) - W_1(s) = cW((t)/c^2) - cW(s/c^2) = c(W(t/c^2) - W(s/c^2))$$

are clearly normally distributed as a multiple of a normally distributed random variable. Since the increment $W(t/c^2) - W(s/c^2)$ has mean zero, then

$$W_1(t+s) - W_1(s) = c(W(t/c^2) - W(s/c^2))$$

must have mean zero. The variance is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_1(t) - W(s))^2] &= \mathbb{E}[(cW((t)/c^2) - cW(s/c^2))^2] \\ &= c^2\mathbb{E}[(W(t/c^2) - W(s/c^2))^2] \\ &= c^2(t/c^2 - s/c^2) = t - s. \end{aligned}$$

(b) Note that if $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, then $t_1/c^2 < t_2/c^2 \leqslant t_3/c^2 < t_4/c^2$, and the corresponding increments $W(t_4/c^2) - W(t_3/c^2)$ and $W(t_2/c^2) - W(t_1/c^2)$ are independent. Then the multiples of each by $c$ are independent and so $W_1(t_4) - W_1(t_3)$ and $W_1(t_2) - W_1(t_1)$ are independent.

(c) $W_1(0) = cW(0/c^2) = cW(0) = 0$.

(d) As the composition of continuous functions, $W_1$ is continuous.

б) To show that
$$W_2(t) = tW(1/t)$$

is a Brownian motion by the four definitional properties seems to be difficult. Instead the usual proof is to show that any Gaussian process $X(t)$ with mean 0 and $\mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = \min(s,t)$ must be Brownian motion. See the reference and outside links for more information.

(a)
$$W_2(t) - W_2(s) = tW(1/t) - sW(1/s)$$

which will be the difference of normally distributed random variables each with mean 0, so the difference will be normal with mean 0. It remains to check that the normal random variable has the correct variance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(W_2(t) - W_2(s))^2] &= \mathbb{E}[(sW(1/s) - tW(1/t))^2] \\ &= \mathbb{E}[(sW(1/s) - sW(1/t) + sW(1/t) - tW(1/t) - (s-t)W(0))^2] \\ &= s^2\mathbb{E}[(W(1/s) - W(1/t))^2] + (s-t)^2\mathbb{E}[(W(1/t) - W(0))^2] \\ &= s^2(1/s - 1/t) + (s-t)^2(1/t) \\ &= t - s \end{aligned}$$

Note the use of independence of $W(1/s) - W(1/t)$ from $W(1/t) - W(0)$ at the third equality.

(b) It seems to be hard to show the independence of increments directly. Instead rely on the fact that a Gaussian process with mean 0 and covariance function $\min(s,t)$ is a Brownian motion, and thus prove it indirectly. Note that

$$\mathrm{Cov}[W_2(s), W_2(t)] = st\min(1/s, 1/t) = \min(s, t).$$

(c) By definition, $W_2(0) = 0$.

(d) The argument that $\lim_{tto0} W_2(t) = 0$ is equivalent to showing that $\lim_{t\to\infty} W(t)/t = 0$. To show this requires use of Kolmogorov's inequality for Brownian motion and clever use of the Borel-Cantelli lemma and is beyond the scope of this course. Use the translation property in the third statement of this theorem to prove continuity at every value of $t$.

в)

$$W_3(t) = W(t+h) - W(h)$$

(a) The increment

$$W_3(t+s) - W_3(s) = [W(t+s+h) - W(h)] - [W(s+h) - W(h)] = W(t+s+h) - W(s+h)$$

which is by definition normally distributed with mean 0 and variance $t$.

(b) The increment

$$W_3(t_4) - W_3(t_3) = W(t_4 + h) - W(t_3 + h)$$

is independent from

$$W(t_2 + h) - W(t_1 + h) = W_3(t_2) - W_3(t_1),$$

by the property of independence of disjoint increments of $W(t)$.

(c)

$$W_3(0) = W(0 + h) - W(h) = 0.$$

(d) As the composition and difference of continuous functions, $W_3$ is continuous.

**11.2**

**11.3**

**11.4**

**11.5** Ответ: к 0, пожалуй во всех кроме поточенчном

**11.6** This problem is adapted from Baxter and Rennie, Problem 3.1, page 49. No, $X(t)$ is not Brownian motion for two reasons in spite of the fact that $\sqrt{t}Z \sim N(0, t)$ (which follows from being a scalar multiple by $\sqrt{t}$ of the $N(0, 1)$ random variable $Z$.) First, for $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, $X(t_2) - X(t_1) = (\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})Z$ is not independent of $X(t_4) - X(t_3) = (\sqrt{t_4} - \sqrt{t_3})Z$ since both are multiples of the same sample value $Z$ drawn from the $N(0, 1)$ population. Second, the distribution of $(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})Z$ is normal with variance $(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})^2 \neq t_2 - t_1$. Note nevertheless, that $X(0) = 0$ and $X(t)$ is continuous at $t = 0$.

**11.7** This problem is adapted from Baxter and Rennie, Problem 3.2, page 49. Yes, $X(t)$ is a Brownian motion. We can see this by verifying each of the properties in turn:

а)

$$X(t) - X(s) = \rho(W_1(t) - W_1(s)) + \sqrt{1 - \rho^2}(W_2(t) - W_2(s))$$

Since $(W_1(t) - W_1(s)) \sim N(0, t - s)$ and $(W_2(t) - W_2(s)) \sim N(0, t - s)$ and $W_1$ and $W_2$ are independent, so in particular the increments $(W_1(t) - W_1(s))$ and $(W_2(t) - W_2(s))$ are independent, then

$$\rho(W_1(t) - W_1(s) + \sqrt{1 - \rho^2}(W_2(t) - W_2(s)) \sim N(0, \rho^2(t - s) + (1 - \rho^2)(t - s)) = N(0, t - s).$$

б) For every pair of disjoint time intervals $[t_1, t_2]$ and $[t_3, t_4]$, with $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$, the increments

$$X(t_2) - X(t_1) = \rho(W_1(t_2) - W_1(t_1) + \sqrt{1-\rho^2}(W_2(t_2) - W_2(t_1))$$

and

$$X(t_4) - X(t_3) = \rho(W_1(t_4) - W_1(t_3) + \sqrt{1-\rho^2}(W_2(t_4) - W_2(t_3))$$

are independent, since $(W_1(t_2) - W_1(t_1)$, $(W_2(t_2) - W_2(t_1)$, $(W_1(t_4) - W_1(t_3)$, and $(W_2(t_4) - W_2(t_3)$ are all independent of one another.

в)

$$X(0) = \rho W_1(0) + \sqrt{1-\rho^2} W_2(0) = \rho 0 + \sqrt{1-\rho^2} 0 = 0.$$

г) Since $W_1(t)$ is continuous at $0$, and $W_2(t)$ is continuous at $0$, then $X(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} W_2(t)$ is continuous at $0$.

**11.8**

$$W(s) + W(t) = (W(s) - W(0)) + W(s) + (W(t) - W(s)) = 2(W(s) - W(0)) + (W(t) - W(s))$$

and $(W(s) - W(0))$ is independent from $(W(t) - W(s))$, so

$$W(s) + W(t) = 2(W(s) - W(0)) + (W(t) - W(s)) \sim N(0, 2^2 s + (t - s)) = N(0, 3s + t).$$

**11.9**

$$\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = E[W(s) - E[W(s)] \cdot W(t) - E[W(t)]] = E[W(s) \cdot W(t)].$$

Without loss of generality, assume $s < t$. Then

$$E[W(s) \cdot W(t)] = E[W(s) \cdot (W(t) - W(s) + W(s))] = E[W(s) \cdot (W(t) - W(s))] + E[W(s)W(s))] = 0 + \mathsf{D}W(s) = s$$

The process is exactly analogous if $t < s$, so

$$\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = E[W(s)W(t)] = \min(t, s).$$

The interpretation is that a stock above its mean value on day $t$ is likely to also be above its mean on day $t + 1$.

**11.10**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp(-(x-y)^2/(2t)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(x-y)^2/(2t)) \frac{(x-y)^2}{2t^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(x-y)^2/(2t)) \frac{(x-y)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(x-y)^2/(2t)) \frac{(x-y)^2}{t^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(x-y)^2/(2t)) \frac{1}{t}$$

Now after a little combining, the first summand in $\frac{\partial p}{\partial t}$ matches the second summand in $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ and the second summand in $\frac{\partial p}{\partial t}$ matches the first summand in $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$.

**11.11** a) Since $W(5) - W(1) \sim N(0, 4)$, the required probability is

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W(5) > 3 | W(1) = 1] &= \mathbb{P}[W(5) - W(1) > 3 - 1] \\ &= \mathbb{P}[(W(5) - W(1))/2 > 1] \\ &= 0.1586552539 \end{aligned}$$

б) Since $W(9) - W(1) \sim N(0,8)$, the required value can be deduced from

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[W(9) > c | W(1) = 1] &= \mathbb{P}[W(9) - W(1) > c - 1] \\ &= \mathbb{P}[(W(9) - W(1))/(2\sqrt{2}) > (c-1)/(2\sqrt{2})] \\ &= 0.10\end{aligned}$$

Then $(c-1)/(2\sqrt{2}) = 1.281551566$ and $c = 4.624775211$.

**11.12**

**11.13**

**11.14**

**11.15**

**11.16** Introduce some briefer notation for the proof, let:

$$\Delta_{nk} = W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right) \qquad k = 1, \dots, 2^n$$

and

$$W_{nk} = \Delta_{nk}^2 - t/2^n \qquad k = 1, \dots, 2^n.$$

We want to show that $\sum_{k=1}^{2^n} \Delta_{nk}^2 \to t$ or what is equivalent: $\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk} \to 0$. For each $n$, the random variables $W_{nk}, k = 1, \dots, 2^n$ are independent, and identically distributed by properties 1 and 2 of the definition of standard Brownian motion. Furthermore,

$$E[W_{nk}] = E[\Delta_{nk}^2] - t/2^n = 0$$

by property 1 of the definition of standard Brownian motion. Also, a routine (but omitted) computation of the fourth moment of the normal distribution shows that

$$E[W_{nk}^2] = 2t^2/4^n$$

(Note that one way to do the computation is to differentiate the characteristic function 4 times!) Finally, by property 2 of the definition of standard Brownian motion

$$E[W_{nk}W_{nj}] = 0, k \neq j$$

Now, expanding the square of the sum, and applying all of these computations

$$E\left[\left\{\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right\}^2\right] = \sum_{k=1}^{2^n} E[W_{nk}^2] = 2^{n+1}t^2/4^n = 2t^2/2^n$$

Now apply Chebyshev's Inequality to see:

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right| > \epsilon\right] \leqslant \frac{2t^2}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Now since $\sum (1/2)^2$ is a convergent series, the Borel-Cantelli lemma implies that the event

$$\left|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right| > \epsilon$$

can occur for only finitely many $n$. That is, for any $\epsilon > 0$, there is an $N$, such that for $n > N$

$$\left| \sum_{k=1}^{2^n} W_{nk} \right| < \epsilon$$

therefore we must have that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} W_{nk} = 0$, and we have established what we wished to show.

**11.17**

**11.18**

**11.19** The conditional density is

$$\begin{aligned} f_{s|t}(x|B) &= (f_s(x) f_{t-s}(B-x))/f_t(B) \\ &= K_1 \exp(-x^2/(2s) - (B-x)^2/(2(t-s))) \\ &= K_2 \exp(-x^2(1/(2s) + 1/(2(t-s))) + Bx/(t-s)) \\ &= K_2 \exp(-t/(2s(t-s))(x^2 - 2sBx/t)) \\ &= K_3 \exp(-(t(x - Bs/t)^2/(2s(t-s)))) \end{aligned}$$

where $K_1$, $K_2$, and $K_3$ are constants that do not depend on $x$. For example, $K_1$ is the product of $1/\sqrt{2\pi s}$ from the $f_s(x)$ term, and $1/\sqrt{2\pi(t-s)}$ from the $f_{t-s}(B-x)$ term, times the $1/f_t(B)$ term in the denominator. The $K_2$ term multiplies in an $\exp(-B^2/(2(t-s)))$ term. The $K_3$ term comes from the adjustment in the exponential to account for completing the square. We know that the result is a conditional density, so the $K_3$ factor must be the correct normalizing factor, and we recognize from the form that the result is a normal distribution with mean $Bs/t$ and variance $(s/t)(t-s)$.

**11.20** $X(t)$ subject to the conditions $X(t_1) = A$ and $X(t_2) = B$ has the same density as the random variable $A + X(t - t_1)$, under the condition $X(t_2 - t_1) = B - A$ by condition (2) of the definition of Brownian motion. Then apply the theorem with $s = t - t_1$ and $t = t_2 - t_1$.

**11.21** Introduce some briefer notation for the proof, let:

$$\Delta_{nk} = W\left(\frac{k}{2^n} t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n} t\right) \qquad k = 1, \dots, 2^n$$

and

$$W_{nk} = \Delta_{nk}^2 - t/2^n \qquad k = 1, \dots, 2^n.$$

We want to show that $\sum_{k=1}^{2^n} \Delta_{nk}^2 \to t$ or what is equivalent: $\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk} \to 0$. For each $n$, the random variables $W_{nk}, k = 1, \dots, 2^n$ are independent, and identically distributed by properties 1 and 2 of the definition of standard Brownian motion. Furthermore,

$$E[W_{nk}] = E[\Delta_{nk}^2] - t/2^n = 0$$

by property 1 of the definition of standard Brownian motion. Also, a routine (but omitted) computation of the fourth moment of the normal distribution shows that

$$E[W_{nk}^2] = 2t^2/4^n$$

(Note that one way to do the computation is to differentiate the characteristic function $4$ times!) Finally, by property 2 of the definition of standard Brownian motion

$$E[W_{nk} W_{nj}] = 0, k \neq j$$

Now, expanding the square of the sum, and applying all of these computations

$$E\left[\left\{\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right\}^2\right] = \sum_{k=1}^{2^n} E[W_{nk}^2] = 2^{n+1}t^2/4^n = 2t^2/2^n$$

Now apply Chebyshev's Inequality to see:

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right| > \epsilon\right] \leqslant \frac{2t^2}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Now since $\sum(1/2)^2$ is a convergent series, the Borel-Cantelli lemma implies that the event

$$\left|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right| > \epsilon$$

can occur for only finitely many $n$. That is, for any $\epsilon > 0$, there is an $N$, such that for $n > N$

$$\left|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}\right| < \epsilon$$

therefore we must have that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} W_{nk} = 0$, and we have established what we wished to show.

**11.22**

$$\sum_{n=1}^{2^n}\left|W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\right| \geqslant \frac{\sum_{n=1}^{2^n}\left|W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\right|^2}{\max_{j=1,\dots,2^n}\left|W\left(\frac{k}{2^n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\right|}$$

The numerator on the right converges to $t$, while the denominator goes to $0$ because Brownian paths are continuous, therefore uniformly continuous on bounded intervals. Therefore the faction on the right goes to infinity.

**11.23**

**11.24**

**11.25**

**11.26**

**11.27**

**11.28**

**11.29**

**11.30** a) Use the ``gambler's ruin'' formula for Geometric Brownian Motion:

$$\mathbb{P}\left[\frac{z_0\exp(rT_{A,B} + \sigma W(T_{A,B}))}{z_0} = B\right] = \frac{1 - A^{1-(2r-\sigma^2)/\sigma^2}}{B^{1-(2r-\sigma^2)/\sigma^2} - A^{1-(2r-\sigma^2)/\sigma^2}}$$

with $A = 0$ and $B = 2$ to obtain

$$\mathbb{P}\left[\exp(\sigma W(T_{0,2})) = 2\right] = \frac{1}{2^{1-(-\sigma^2)/\sigma^2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

б) Use the ``gambler's ruin'' formula for Geometric Brownian Motion again: with $A = 0$ and $B = 2$ to obtain

$$\mathbb{P}\left[\exp(\sigma W(T_{0,2})) = 2\right] = \frac{1}{2^{1-(-\sigma^2-\sigma^2)/\sigma^2}} == \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

**11.31**
$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X(t_i)(W(t_{i+1})-W(t_i))\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X^2(t_i))(t_{i+1}-t_i)$$

**11.32** Straight calculation with densities gives

$$1/2\pi\cdot\int_0^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{0}dy\cdot exp(-x^2/2)\cdot exp(-(x-y)^2/2)$$

but this is not the way you are supposed to find out the answer. Just remember the property of independent increments. We know, that $W(1)$ and $W(2)-W(1)$ are independent and even identically distributed. So «we cannot distinguish» them $\mathbb{P}(|W(2)-W(1)|>|W(1)|)=1/2$. Thus,

$$P\{W(1)>0,W(2)<0\}=P\{W(1)>0,W(2)-W(1)<0,|W(2)-W(1)|>|W(1)|\}$$

For Brownian motion, signs and lengths are independent, so,

$$P\{W(1)>0,W(2)<0\}=P\{W(1)>0)\mathbb{P}(W(2)-W(1)<0\}\cdot P\{|W(2)-W(1)|>|W(1)|\}=1/2*1/2*1/2=$$

**11.33** Note that

$$E\ \max\{B(t),W(t)\}=E\{B(t)\}+E\{(W(t)-B(t))\cdot I_{W(t)-B(t)>0}\}.$$

$W(t)-B(t)$ is a normal variate with mean $0$, variance $2t$, so the second expectation is

$$1/(4\pi t)\int_0^{\infty}y\exp(y^2/(4t))dy,$$

which I think is $\sqrt{t/\pi}$.

**11.34** Для «положительного» игрока:
- предлагать удвоение при $W(t)\geqslant 0.6$
- соглашаться на удвоение при $W(t)\geqslant -0.6$

решение:
Допустим на уровне $-a$ игроку безразлично, соглашаться или нет. Если не согласиться, получим проигрыш в ставку. Если согласиться, то возможно две ситуации: либо проиграем две ставки с вероятностью $\frac{2a}{1+a}$, либо достигаем уровня $a$, где противник безразличен между проигрышем в удвоенную ставку и еще чем-то.
Получаем: $-1=\frac{2a}{1+a}(-2)+\frac{1-a}{1+a}2$
б) может быть явно не решается, а может и решается...
Source: plus.math.org/issue15/features/doubling

**11.35**

**11.36** Перейдем к двум независимым нормальным переменным

**11.37** Для нахождения интеграла можно изменить порядок интегрирования. $\mathbb{E}(T)=\frac{\sigma^2}{2\mu^2}$

**11.38** Для нахождения интеграла можно изменить порядок интегрирования. $\mathbb{E}(T)=y/\mu$

**11.39** $2W_1-W_2=W_1-(W_2-W_1)$, величины $W_2-W_1$ и $W_1=W_1-W_0$ независимы, следовательно, $2W_2-W_1\sim N(0,2)$.

**12.1**

**12.2**

**12.3**

**12.4**

**12.5**
**12.6** $X_t = W_t^2 - t$ — да, $\exp(-uW_t - \frac{u^2}{2}t)$ — да
**12.7** $f(t) = e^{t/2}$
**12.8** $d(f(t)W_t) = f(t)dW_t + f'(t)W_t dt$, следовательно $\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t f'(s)W_s ds$
**12.9**
**12.10**
**12.11** $0$, Используя изометрию Ито:

$$\mathbb{E}(W_t \cdot X_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^t dW_s \int_0^t \exp(as)\, dW_s\right) = \int_0^t 1 \cdot \exp(as)\, ds \tag{16}$$

**12.12** $\mathbb{E}(W_t^{2n}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)t^n$
**12.13** а) $Y_t = \int_0^t W_s\, ds$, $dY_t/dt = W_t$

б) $Y_t = \exp(\int_0^t W_s\, ds)$, $dY_t/dt = W_t \exp(\int_0^t W_s\, ds)$

в) $Y_t = \int_0^t W_s\, dW_s$, не существует
**12.14**
**12.15** Способ раз. Продифференцировать подынтегральное выражение. Способ два. Записать этот интеграл в краткой записи и получить обычное дифференциальное уравнение.
**12.16** $X_t = 3 + 5W_t + t^2/2$
**12.17** $X_t = 2 + W_t^2/2 + 2.5t$
**13.1**
**13.2** $r(t) = r(0)e^{-at} + b\,(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dW_s$
$\mathbb{E}(r_t) = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$
$\mathrm{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$
**13.3** Сделаем замену $Y_t = \mathrm{e}^{t-2W_t} X_t^2$. Применяем лемму Ито:

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{e}^{t-2W_t}\mathrm{d}(X_t^2) + X_t^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^{t-2W_t} + \mathrm{d}\mathrm{e}^{t-2W_t} \cdot \mathrm{d}(X_t^2) \tag{17}$$

Заметим, что $\mathrm{d}\mathrm{e}^{t-2W_t} = \mathrm{e}^{t-2W_t}(3\mathrm{d}t - 2\mathrm{d}W_t)$ и $\mathrm{d}(X_t^2) = (X_t^2 + 2)\mathrm{d}t + 2X_t^2 \mathrm{d}W_t$.
Получаем

$$\mathrm{d}Y_t = 2\mathrm{e}^{t-2W_t}\mathrm{d}t \tag{18}$$

Вспоминаем начальное условие $Y_0 = \mathrm{e}^{0-2W_0} X_0^2 = x^2$. Получаем:

$$\mathrm{e}^{t-2W_t} X_t^2 = Y_t = x^2 + \int_0^t 2\mathrm{e}^{s-2W_s}\mathrm{d}s \tag{19}$$

Решение

$$X_t = \mathrm{sign}(x)\sqrt{x^2 \mathrm{e}^{2W_t - t} + 2\mathrm{e}^{2W_t - t}\int_0^t \mathrm{e}^{s-2W_s}\mathrm{d}s} \tag{20}$$

Источник: http://math.stackexchange.com/questions/80118/
**13.4** $X_t = \sin(t + W_t)$
**13.5**
**14.1**
**14.2**
**14.3**
**14.4**
**14.5**
**16.1**