Конспект лекции 22.11.16

Марданов Тимур

Упражнение 8. Пошла Маша в лес и собрала 100 грибов: L лисичек, R рыжиков и M мухоморов. Пусть p_L, p_R, p_M - вероятности найти гриб определенного типа, такие что $\begin{cases} p_L, p_R, p_M > 0 \\ p_L + p_R + p_M = 1 \end{cases}$.

Пусть также расположение каждого гриба не зависит от расположения других.
Найдите:

1. $E(R + L \mid M)$, $E(M \mid R + L)$;
2. $E(R \mid L)$;
3. $Var(R \mid L)$;
4. $E(R + L \mid L + M)$;
5. $P(E(R \mid L)) = 0$;
6. $P(R = 0 \mid L)$;
7. $E((\frac{p_M}{p_R+p_L})^{100-L})$;
8. $P(R = 7 \mid L)$.

Решение:

1. Если известно, что Маша собрала M мухоморов, то очевидно, что она собрала $100 - M$ лисичек и рыжиков. $E(R + L \mid M) = 100 - M$. Аналогично $E(M \mid R + L) = 100 - R - L$.
2. Если Маша собрала L лисичек, то тогда $R \in \{0, 1 \ldots, 100 - L\}$. Заметим, что случайная величина R имеет биномиальное распределение $R \sim Bin(n = 100, p = p_R) \rightarrow$
$\rightarrow (R \mid L) \sim Bin(n = 100 - L, p = \frac{p_R}{p_R+p_M})$.
Матожидание биномиального распределения $E(R) = np$. Тогда $E(R \mid L) = (100 - L)(\frac{p_R}{p_M+p_R})$.
3. Дисперсия биномиального распределения $Var(R) = np(1 - p)$.
Тогда $Var(R \mid L) = (100 - L)(\frac{p_R}{p_M+p_R})(1 - \frac{p_R}{p_M+p_R})$.
4. $E(R + L \mid L + M) = E(R \mid L + M) + E(L \mid L + M) = (100 - (L + M)) + ((L + M)\frac{p_L}{p_L+p_M})$. Здесь главное заметить, что $L \mid L + M$ имеет биномиальное распределние.
5. Необходимо просто подставить ответ из пункта 2)
$P(E(R \mid L) = 0) = P((100 - L)(\frac{p_R}{p_M+p_R}) = 0) = P(L = 100) = p_L^{100}$.
6. Иногда для нахождения общего решения удобно подставлять конкретные значения вместо случайных величин и находить частное решение. Попробуем найти не $P(R = 0 \mid L)$, а
$P(R = 0 \mid L = 7) = P(M = 93 \mid L = 7) = (\frac{p_M}{p_M+p_R})^{93}$. Тогда $P(R = 0 \mid L) = (\frac{p_M}{p_M+p_R})^{100-L}$.
7. $E((\frac{p_M}{p_M+p_R})^{100-L}) = E(P(R = 0 \mid L)) = \{E(E(X \mid \mathcal{F})) = E(X)\} = P(R = 0) = (1 - p_R)^{100}$.
8. Вспомнив формулу для биномиального распределения $P(R = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$ и результаты пункта 2), получим $P(R = 7 \mid L) = \begin{cases} 0 & \text{if } L = 93 \\ C_{100-L}^7 (\frac{p_R}{p_R+p_M})^7 (1 - \frac{p_R}{p_R+p_M})^{100-L-7} & \text{if } L \neq 93 \end{cases}$.

Упражнение 9 (8.58 из задачника).

$x_1, \ldots, x_{100} \sim \mathcal{U}[0; 1]$ и независимые.
$L = max\,\{x_1, \ldots, x_{80}\}$; $R = max\,\{x_{81}, \ldots, x_{100}\}$; $M = max\,\{L, R\}$.
Найдите:

1. $P(L > R \mid L)$;
2. $E(x_1 \mid L)$;

3. $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid M)$;

4. $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid x_1)$.

Решение:

1. Предположим $L = 0.7$. Тогда $P(L > R \mid L = 0.7) = P(0.7 > R \mid L = 0.7) = \{R$ и $L -$ независимы$\} = P(R < 0.7) = P(x_{81} < 0.7, \dots, x_{100} < 0.7) =$
$= \{x_i -$ независимы$\} = P(x_{81} < 0.7) * \dots * P(x_{100} < 0.7) = 0.7^{20} \to P(L > R \mid L) = L^{20}$
$(*)\ E(L^{20}) = E(P(L > P \mid L)) = \{E(E(X \mid \mathcal{F})) = E(X)\} = P(L > R) = \frac{80}{100}$.

2. Попробуем сначала найти $E(x_1 \mid max\,\{x_1, x_2, x_3\} = 0.7) = p_{x_1=max}0.7 + p_{x_1\neq max}E(x_1) = \frac{1}{3}0.7 + + \frac{2}{3}0.35$.
Тогда $E(x_1 \mid L) = \frac{1}{80}L + \frac{79}{80}\frac{L}{2}$.

3. Попробуем сначала найти $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid M = 0.7) = \{y \sim \mathcal{U}[0; 0.7]\} = E(min\,\{y_1,\dots,y_{99}\})$. Проведём мысленный эксперимент: возьмём отрезок [0,0.7] и отметим на нём 99 точек случайным образом. Так мы поделим отрезок на 100 маленьких отрезков. И хотя их длинна различна, в среднем она равна $\frac{0.7}{100}$. А величина, которую мы ищем, равна рсстоянию от нуля до первой точки = средняя длинна маленького отрезка. Тогда $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid M = 0.7) = \frac{0.7}{100}$, а в общем случае $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid M) = \frac{M}{100}$.

4. $E(min\,\{x_1,\dots,x_{100}\} \mid x_1) = p_{x_1=min}x_1 + p_{x_1\neq min}E(min\,\{x_2,\dots,x_{100}\}) = \frac{1}{100}x_1 + \frac{99}{100}\frac{1}{100}$.

Мартингалы

Определение. Фильтрация $(\mathcal{F}_n)$ — последовательность σ-алгебр таких, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n$. Иногда фильтрацию называют потоком σ-алгебр.

Определение. Случайный процесс (X_n) — последовательность случайных величин X_n.

Определение. Случайный процесс (X_n) адаптирован к фильтрации $(\mathcal{F}_n)$, если $\forall n$ величина X_n является $\mathcal{F}_n$-измеримой.

Определение. Случайный процесс (X_n) — мартингал по отношению к фильтрации $(\mathcal{F}_n)$, если

1. $E(X_n)$ - существует $\forall n$;

2. (X_n) адаптирован к фильтрации $(\mathcal{F}_n)$;

3. $\forall n\ E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ (лучший прогноз на завтра - сегодняшнее значение).

Пример 1. Имеется колода из 52 карт. Достаем по очереди одну карту. $X_n \equiv$ доля тузов в неоткрытой части колоды после открытия n карт. Тогда:

X_0	$\frac{4}{52}$
P	1

X_1	$\frac{3}{51}$	$\frac{4}{51}$
P	$\frac{4}{52}$	$\frac{48}{52}$

X_{51}	1	0
P	$\frac{48}{52}$	$\frac{4}{52}$

Является ли X_n мартингалом? Первые два условия выполняются. Проверим третье:

	сейчас	следующий момент
извлечено карт	n	$n+1$
осталось карт	$52-n$	$51-n$
доля тузов в колоде	X_n	X_{n+1}
штук тузов в колоде	$X_n(52-n)$	$X_{n+1}(51-n)$
тузов открыто	$4 - X_n(52-n)$	$4 - X_{n+1}(51-n)$

$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \{X_n -$ условная пвероятность извлечь туза$\} = X_n(\frac{X_n(52-n)-1}{51-n}) + (1-X_n)(\frac{X_n(52-n)}{51-n}) =$

$= \frac{X_n(52-n)(X_n+1-X_n)-X_n}{51-n} = X_n \to X_n$ - мартингал.

Пример 2. $\mathcal{F}_n = \sigma(z_1, \ldots, z_n)$; $z_i -$ случайные величины, независимые и одинаково распределённые. $P(z_i = -1) = P(z_i = 1) = \frac{1}{2}$. Являются ли мартингалами следующие случайные процессы?

1. (z_n);
2. $(X_n),\ X_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$;
3. $(R_n),\ R_n = X_n^2$;
4. $(L_n),\ L_n = X_n^2 - n$.

Решение: все процессы адаптированы к $(\mathcal{F}_n)$

1. $E(z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(z_{n+1} \mid z_1, \ldots, z_n) = \{z_i - \text{независимы}\} = E(z_{n+1}) = 0 \neq z_n = 1\ or - 1 \rightarrow$ $\rightarrow (z_n) -$ не мартингал.
2. $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(\sum_{i=1}^{n+1} z_i \mid z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i + E(z_{n+1} \mid z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i = X_n \rightarrow$ $\rightarrow (X_n) -$ мартингал.
3. $E(R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 \mid z_1, \ldots, z_n) = \{X_{n+1} = X_n + z_{n+1}\} = E((X_n + z_{n+1})^2 \mid z_1, \ldots, z_n) =$ $= E(X_n^2 \mid z_1, \ldots, z_n) + E(2X_n z_{n+1} \mid z_1, \ldots, z_n) + E(z_{n+1}^2 \mid z_1, \ldots, z_n) = X_n^2 + 0 + 1 \neq R_n \rightarrow$ $\rightarrow (R_n) -$ не мартингал.
4. $E(L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 - (n+1) \mid z_1, \ldots, z_n) = E(X_{n+1}^2 \mid z_1, \ldots, z_n) - E((n+1) \mid z_1, \ldots, z_n) =$ $= E(R_{n+1} \mid z_1, \ldots, z_n) - n - 1 = X_n^2 + 1 - n - 1 = X_n^2 - n = L_n \rightarrow (L_n) -$ мартингал.

Свойства мартингалов

Если (X_n) — мартингал, то:

1. $E(X_n) = const$
   Доказательство: $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \rightarrow E(E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = E(X_n) \rightarrow E(X_{n+1}) = E(X_n)$ для $\forall n$.
2. $E(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ для $\forall k \geq 1$
   Доказательство:
   - Случай $k = 1$: $\quad E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$
   - Предположим $E(X_{n+i} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$: $\quad E(X_{n+i+1} \mid \mathcal{F}_n) = \{\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+i}\} =$ $= E(E(X_{n+i+1} \mid \mathcal{F}_{n+i}) \mid \mathcal{F}_n) = \{E(X_{n+i+1} \mid \mathcal{F}_{n+i}) = X_{n+i}\} = E(X_{n+i} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$.

Определение. Случайная величина τ называется моментом остановки (stopping time) по отношению к фильтрации $(\mathcal{F}_n)$, если:

1. $\tau \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{+\infty\}$.
2. $\forall n$ индивид, различающий события из $\mathcal{F}_n$, способен понять: наступил момент τ или нет. Формально: событие $\{\tau \leq n\}$ лежит в σ-алгебре $\mathcal{F}_n$.

Пример: внук играет с кошкой во дворе. Предположим, что у внука есть часы и он знает, убежала ли кошка и во сколько. Бабушка может установить следующие правила, когда нужно идти домой:

1. $\tau_1 =$ вернуться через час после того, как кошка убежит.
2. $\tau_2 =$ вернуться за час до того, как кошка убежит.

Величина τ_1 является моментом остановки, так как внук всегда может сказать, когда убежала кошка и сколько времени прошло.
Величина τ_2 не является моментом остановки, так как внук не может сказать, когда убежит кошка, не заглядывая в будущее.

Теорема об остановке мартингала (теорема Дуба или stopping time theorem). Если $(X_n -$ мартингал по отношению к $(\mathcal{F}_n)$; τ - момент остановки по отношению к $(\mathcal{F}_n)$ и выполнено хотя бы одно из условий 1-3, то $E(X_\tau) = E(X_1)$

Условия:

1. Существует число m такое, что $\tau < m$.
2. $P(\tau = +\infty) = 0$ и при это существует такое число m, что $|X_{min\{n,\tau\}}| < m$
3. $E(\tau) < \infty$ и существует такое число m, что $E(|X_{min\{n+1,\tau\}} - X_{min\{n,\tau\}}|\mathcal{F}_n) < m$