

1. У Илона Маска есть множество A всех периодических последовательностей натуральных чисел. Например, $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots) \in A$, $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots) \notin A$.
 - (a) Помогите Илону Маску определить, равномощно ли множество A множеству \mathbb{N} ? Равномощно ли оно \mathbb{R} ?
 - (b) Помогите Илону Маску определить, равномощно ли множество всех последовательностей натуральных чисел множеству \mathbb{N} ? Равномощно ли оно \mathbb{R} ?
2. Грета Тунберг подбрасывает правильную монетку n раз. Обозначим Y_i индикатор выпадения орла при i -ом броске.
Обозначим также $L = \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ и $R = \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.
 - (a) Найдите $\mathbb{P}(R = 1|L)$, $\mathbb{P}(L = 1|R)$;
 - (b) Найдите $E(R|L)$, $E(L|R)$;
 - (c) Найдите $\text{Var}(R|L)$, $\text{Var}(L|R)$.
3. Эксперимент может закончиться одним из четырёх исходов, a , b , c или d .
 - (a) Выпишите минимальную сигма-алгебру \mathcal{F} , содержащую события $\{a, b, c\}$ и $\{b, c, d\}$.
 - (b) Приведите пример случайной величины, измеримой относительно \mathcal{F} , и пример величины, не измеримой относительно \mathcal{F} .
 - (c) Сколько существуют случайных величин, принимающих значения из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, измеримых относительно \mathcal{F} ?
4. Известно, что величина X распределена равномерно на отрезке $[0; 1]$, а величина Y при фиксированном X распределена равномерно на отрезке $[1; 1/X]$.
 - (a) Найдите $E(Y|X)$, $\text{Var}(Y|X)$;
 - (b) Найдите $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$;
 - (c) Найдите $E(X|Y)$, $\text{Var}(X|Y)$;
5. Рассмотрим независимые величины Y_n , принимающие значения $+1$ или -1 , $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$. Определим $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
 - (a) При каком p процесс $S_n + n/10$ будет мартингалом?
 - (b) При каком p процесс 0.7^{S_n} будет мартингалом?
 - (c) Пусть $p = 1/2$. При какой функции $h(n)$ процесс $S_n^2 + h(n)$ будет мартингалом?
6. Приезжающих из армии или от двора встречают n женщин. Они одновременно подбрасывают вверх n чепчиков. Ловят чепчики наугад, каждая женщина ловит один чепчик. Женщины, поймавшие свой чепчик уходят. А женщины, поймавшие чужой чепчик, снова подбрасывают его вверх. Подбрасывание чепчиков продолжается до тех пор, пока каждая не поймает свой чепчик. Найдите:
 - (a) Среднее количество женщин, поймавших свой чепчик при одном подбрасывании;
 - (b) Среднее количество подбрасываний.