1. Рассмотрим множество последовательностей из произвольных натуральных чисел, обозначим его буквой A. Например, одним элементом A является последовательность $(1, 2, 3, 4, \ldots)$. Определим подмножество $B \subset A$, последовательностей в которых единица упомянута не больше 1 раза, двойка — не более двух раз, тройка — не более трёх и так далее. Определим подмножество $C \subset A$, последовательностей, в которых все числа кроме числа 2016 упоминаются конечное количество раз, а число 2016 может упоминаться любое количество раз.

   Найдите $\operatorname{card} A$, $\operatorname{card} B$, $\operatorname{card} C$

2. У Буратино есть три монетки: одна целиком зелёная, вторая — целиком красная и третья — со стороны орла зелёная, со стороны решки — красная. Сначала Буратино подбрасывает цветную монетку. Если цветная монетка выпадает красной стороной, то Буратино подбрасывает красную монетку, если зелёной — то зелёную. Вероятности выпадения орла равны: 0.2 — для красной монетки, 0.4 — для зелёной, 0.7 — для цветной. Пусть X — индикатор того, выпал ли орёл на цветной монетке, а Y — индикатор того, выпал ли орёл при втором броске.

   Найдите $\mathrm{E}(Y|X)$, $\mathrm{E}(X|Y)$, $\mathrm{Var}(X|Y)$

3. Величины $X_1, \ldots, X_{100}$ независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{80}\}$ а $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \ldots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \ldots, X_{100}\}$

   Найдите

   (a) $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$

   (b) $\mathrm{E}(X_1|L)$, $\mathrm{E}(X_1|\min\{X_1, \ldots, X_{100}\})$

4. You throw a fair coin infinite number of times. Let's denote the result of the second toss by Y_2 (0 for tail and 1 for head) and the number of throws to get the first «head» by N. Find $\mathrm{E}(Y_2|N)$, $\mathrm{Var}(Y_2|N)$ and $\mathrm{E}(N|Y_2)$

5. It is known that $\mathrm{E}(Y|X) = 0$. Which of the following quantities must be zero: $\mathrm{E}(Y)$? $\mathrm{E}(X)$? $\mathrm{Cov}(X, Y)$? $\mathrm{Cov}(X^2, Y)$? $\mathrm{Cov}(X, Y^2)$? Prove or provide a counter-example.

6. The random variables X_1, X_2, ..., X_n, ...are independent uniformly distributed on $[0; 1]$. I am summing them until the first X_i greater than 0.5 is added. After this term I stop. Let's denote by S the total sum and by N — the number of terms added. Find $\mathrm{E}(S|N)$, $\mathrm{Var}(S|N)$, $E(S)$