1. Вспомним свойства броуновского движения :)
   (a) Найдите $\mathrm{E}(W_3|W_1)$, $\mathrm{Var}(W_3|W_1)$;
   (b) Найдите $\mathrm{E}(W_1|W_3)$, $\mathrm{E}(W_1|\mathcal{F}_3)$, $\mathrm{Var}(W_1|W_3)$, $\mathrm{Var}(W_1|\mathcal{F}_3)$;
   (c) Найдите $\mathrm{E}(W_3^3|W_1)$, $\mathrm{E}(W_1^3|W_3)$.
2. Рассмотрим процесс $C_t = W_t^3 + 7W_t + 5 + d \cdot t \cdot W_t$.
   (a) Найдите dC_t.
   (b) При каких значениях d процесс C_t будет мартингалом?
   (c) Для полученного значения d найдите $\mathrm{Cov}(C_t, \int W_u^2 dW_u)$.
3. Рассмотрим процесс $Y_t = \exp(\sigma W_t + bt)$.
   (a) Найдите dY_t.
   (b) Как должны быть связаны b и σ, чтобы Y_t был мартингалом?
   (c) Найдите $\mathrm{E}(\exp(\sigma W_t))$.
4. Рассмотрим процесс $Y_t = W_t + 2t$. Пусть τ — первый момент времени, когда W_t окажется равным 5.
   (a) Пусть α — произвольная константа, найдите такую функцию $f(t)$, что процесс $M_t = f(t)\exp(\alpha Y_t)$ является мартингалом.
   (b) Используя теорему Дуба найдите $\mathrm{E}(\exp(-s\tau))$ для произвольной константы s.

   Подсказка: для первого пункта найдите dM_t и что-то там к чему-то там приравняйте :)
5. Эта задача объясняет, для чего искать такую полезную штуку, как $\mathrm{E}(\exp(-s\tau))$. При этом ничего из предыдущей задачи не используется :) Итак, пусть $m(s) = \mathrm{E}(\exp(-s\tau))$.
   (a) Найдите $m'(s)$, $m'(0)$, $m''(s)$, $m''(0)$.
   (b) Известно, что $m'(0) = -5$, а $m''(0) = 100$, найдите $\mathrm{E}(\tau)$ и $\mathrm{Var}(\tau)$.
6. Рассмотрим модель Блэка-Шоулза с параметрами S_0, μ, σ, r.

   Найдите цену актива X_0, если известно, что в момент времени $T = 2$ актив выплачивает сумму равную $X_2 = S_1 + 6\ln S_2$.