Конспект лекции 17.11.16

Фомина Александра

Мотивация. σ-алгебра - это способ описать наделенность информации: есть рациональный агент и список событий, про которые агент *точно* знает, произошли они или нет.

Упражнение 1. Подбрасывают кубик два раза. Случайная величина X_1 - сколько выпало в первый раз, случайная величина X_2 - сколько выпало во второй раз. Винни Пух знает результаты обоих подбрасываний. Джеймс Бонд знает результат только второго подбрасывания. Если $\mathcal{F}_W$ и $\mathcal{F}_J$ - это списки событий, которые точно различают Винни Пух и Джеймс Бонд соответственно, то

1. $\mathcal{F}_J \subset \mathcal{F}_W$;
2. Примеры события A, $A \in \mathcal{F}_W$, $A \notin \mathcal{F}_J$: $A = \{X_1 = 4\} \in \mathcal{F}_W$, $A = \{X_1 = 4\} \notin \mathcal{F}_J$;
   Примеры события B, $B \in \mathcal{F}_W$, $B \in \mathcal{F}_J$: $B = \{X_2 > 4\} \in \mathcal{F}_W$, $B = \{X_2 > 4\} \in \mathcal{F}_J$.

Упражнение 2. Тот же эксперимент, что и в Упражнении 1, те же $\mathcal{F}_W$ и $\mathcal{F}_J$. Какова мощность множества (cardinality) $\mathcal{F}_W$ и $\mathcal{F}_J$?

Пусть Ω - множество исходов. Тогда $\Omega = 36$, т.к. всего 36 элементарных события, которые нельзя разбить на более мелкие события.

$X_1 \setminus X_2$	1	2	...
1	(1,1)	(1,2)	...
2	(2,1)	(2,2)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Большие события получаются путем объединения маленьких событий. Например:

$$\{X = 4\} = \{X_1 = 4, X_2 = 1\} \cup \{X_1 = 4, X_2 = 2\} \cup \{X_1 = 4, X_2 = 3\} \cup \dots$$

$X_1 \setminus X_2$	1	2	3	4	5	6
1	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-
4	+	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-

Так как всего в таблице 36 клеток, в каждой из который может стоять либо "$+$" либо "$-$", то всего может быть 2^{36} вариантов. Следовательно, $\operatorname{card} \mathcal{F}_W = 2^{36}$.

Для Джеймса Бонда $\{X_2 = 4\}$ не разбивается на более элементарные события $\Rightarrow$ у него 6 элементарных события, то есть $\operatorname{card} \mathcal{F}_J = 2^6$.

- Если агент знает, что $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$, то он знает, что $A^c \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$.

- $\varnothing$ не происходит никогда, Ω происходит всегда $\Rightarrow$ $\varnothing \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.

Определение. $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, если

1. $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$;
2. если взять счётное (countable) количество событий из $\mathcal{F}$ и выполнить любые операции $(\cdot \cup \cdot, \cdot \cap \cdot, \cdot \setminus \cdot, \cdot^c)$, то в результате получится событие из списка $\mathcal{F}$.

Альтернативное определение. $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

2. если $A \in \mathcal{F}$, то и $A^c \in \mathcal{F}$;
3. если $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение. $\sigma(B, C)$ – минимальная σ-алгебра, содержащая события B и C.

Упражнение 3. $\Omega = \Re$, $A = [-10; -5]$, $B = [-7, 0)$. Найти: $\sigma(A)$, $\sigma(A, B)$.

$$\sigma(A) = \{\varnothing, \Re, [-10; -5], (-\infty; -10) \cup (-5; +\infty)\}$$

$$\sigma(A, B) = \{\varnothing, \Re, [-10; -5], [-7; 0), [-10; 0), (-\infty; -10) \cup (-5; +\infty), (-\infty; -7) \cup [0; +\infty), (-\infty; -10) \cup [0; +\infty),$$
$$[-7; -5], (-\infty, -7) \cup (-5; +\infty), [-10; -7], (-\infty; -10) \cup (-7, +\infty), [-5, 0), (-\infty; -5) \cup [0, +\infty),$$
$$(-\infty; -10) \cup (-7; -5) \cup [0; +\infty), (-10, -7) \cup (-5; 0]\}$$

Так как -10, -7, -5 и 0 делят числовую прямую на 4 "куска" , то в $\sigma(A, B)$ всего 2^4 элементов.

Случайные величины

Определение (интуитивное). Случайная величина X называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если информации в $\mathcal{F}$ достаточно, чтобы определить, чему равно X.

Определение (формальное). Случайная величина X называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\forall t$ событие $\{X \leq t \in \mathcal{F}\}$.

Упражнение 4.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$
$$\mathcal{H} = \{\varnothing, \Omega, \{a, d\}, \{b, c\}\}$$

a) Является ли X измеримой случайно величиной относительно $\mathcal{F}$? Нет, так как, если произошло a, мы не можем отличить a от c, потому что у них разные значения. Значит, мы не знаем, чему равна X.

b) Является ли Y измеримой случайно величиной относительно $\mathcal{F}$? Нет.

c) Является ли X измеримой случайно величиной относительно $\mathcal{H}$? Нет.

d) Является ли Y измеримой случайно величиной относительно $\mathcal{F}$? Да.

Обозначение. X, Y – случайные величины. Тогда $\sigma(X, Y)$ – минимальная σ-алгебра, содержащая все события вида $\{X \leq t\}$ и $\{Y \leq t\}$.

Упражнение 5.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1
W	7	1	2	2

a) Найти явно $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \{\varnothing, \Omega, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

b) Определить, сколько событий входит в $\sigma(X, Y)$.
Если мы знаем X и Y, мы знаем, что произошло: a, b, c или d. Следовательно, card $\sigma(X, Y) = 2^4$.

c) Найти явно $\sigma(W)$.

$$\sigma(W) = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

Определение (интуитивное). Условное матожидание:

1. $E(Y|\mathcal{F})$ – случайная величина;
2. $E(Y|\mathcal{F})$ – наилучший (с т. з. минимизации ожидаемого квадрата ошибки) прогноз Y, сделанный агентом, различающим события из $\mathcal{F}$.

Обозначение. $E(Y|X) = E(Y|\sigma(X))$

Упражнение 6. Кубик подбрасывается два раза. X_i - результат i-го подбрасывания. $\mathcal{F}_J = \sigma(X_2)$.

a) Найти $E(X_2|\mathcal{F}_J)$. $E(X_2|\mathcal{F}_J) = X_2$;

b) Найти $E(X_2^2|\mathcal{F}_J)$. $E(X_2^2|\mathcal{F}_J) = X_2^2$;

c) Найти $E(X_1|X_2)$. Так как X_1 и X_2 независимы, то знание про X_2 бесполезно. Следовательно, $E(X_1|X_2) = E(X_1) = 3,5$;

d) Найти $E(X_1 + X_2|X_2)$. $E(X_1 + X_2|X_2) = E(X_1|X_2) + E(X_2|X_2) = 3,5 + X_2$.

Свойства матожидания

Если X и Y – случайные величины, $E(X)$ и $E(Y)$ существуют, a и b – константы, $\mathcal{F},\ \mathcal{H}$ – σ-алгебры, $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$:

1. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$.
2. Если X и $\mathcal{F}$ независимы, то $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.
3. Если X измерима относительно $\mathcal{F}$ и $g(\ )$ – кусочно-непрерывная функция, то $E(g(X)|\mathcal{F}) = g(X)$.
4. Если $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, то $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.
5. $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$.
6. Если $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$, то $E(E(X|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{F})$ и $E(E(X|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{F})$.
7. Неравенство Йенсен: если f – выпуклая, то $E(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(E(X|\mathcal{F}))$.

Дополнительные понятия:

Определение. A – событие, $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло} \end{cases}$ – индикатор A, $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$. Тогда $P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})$.

Определение. Условная дисперсия: $Var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - (E(X|\mathcal{F}))^2$.

Свойства условной дисперсии:

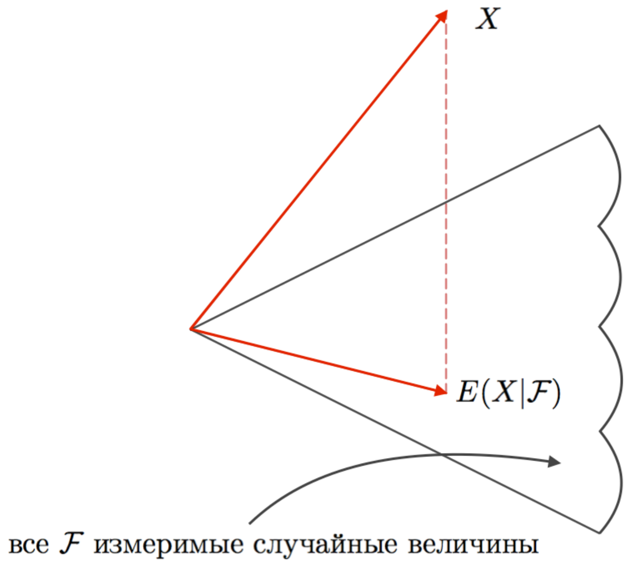
8. Если g – кусочно-непрерывная функция и X измерима относительно $\mathcal{F}$, то $Var(g(X)|\mathcal{F}) = 0$.
9. Теорема Пифагора: $Var(X) = Var(E(X|\mathcal{F})) + E(Var(X|\mathcal{F}))$.

Геометрический взгляд:

9 класс		1 курс магистратуры
a, b – векторы		
$cos(a,b) = \dfrac{\langle a, b\rangle}{\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = corr(X,Y)$

$\langle a,b\rangle \longleftrightarrow Cov(X,Y)$
$|a|^2 = \langle a,a\rangle \longleftrightarrow Cov(X,Y) = Var(X)$
$|a| \longleftrightarrow \sigma_X$

Если $X \perp Y$ ($Cov(X,Y) = 0$), то $Var(X) + Var(Y) = Var(X+Y)$ (т. Пифагора).



$Var(X) = Var(E(X|\mathcal{F})) + Var(X - E(X|\mathcal{F}))$

Определение (формальное). Если $E(X)$ существует, то $E(X|\mathcal{F})$ – это случайная величина, которая

1. $\mathcal{F}$ измерима;
2. $E(X) = E(E(X|\mathcal{F}))$;
3. $X - E(X|\mathcal{F}) \perp$ любой $\mathcal{F}$ измеримой случайной величине, т.е. $Cov(X - E(X|\mathcal{F}), Z) = 0$ для любой случайной величины Z, являющейся $\mathcal{F}$ измеримой.

Определение. Случайная величина W называется условным матожиданием $E(X|\mathcal{F})$ если

1. W является $\mathcal{F}$ измеримой;
2. $E(X) = E(W)$;
3. $Cov(X - W, Z) = 0$ для любой $\mathcal{F}$ измеримой Z.

Упражнение 7.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти $Var(X|\sigma(Y))$.

$$Var(X|\sigma(Y)) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2 = \begin{cases} \dfrac{17}{5} - \left(\dfrac{9}{5}\right)^2, & \text{если } Y = 1 \\ \dfrac{14}{5} - \left(\dfrac{8}{5}\right)^2, & \text{если } Y = 3 \end{cases} = \left(\frac{17}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2\right)\cdot \mathbb{1}_{Y=1} + \left(\frac{14}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2\right)\cdot \mathbb{1}_{Y=3}$$

$$E(X|Y=1) = 1 \cdot \frac{0,1}{0,1+0,4} + 2 \cdot \frac{0,4}{0,1+0,4} = \frac{9}{5}$$

$$E(X|Y=3) = \frac{8}{5}$$

$$E(X^2|Y=1) = \frac{17}{5}$$

$$E(X^2|Y=3) = \frac{14}{5}$$