Конспект лекции 13.12.16

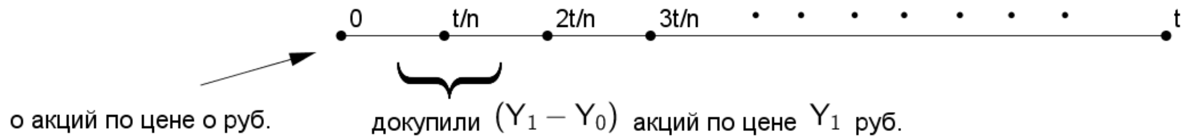
Живайкина Александра

Упражнение 1. Взять стохастический интеграл в непрерывном времени:

$$\int_0^t W_u dW_u$$

Это первый и единственный стохастический интеграл, который мы будем брать по определению, так как взятие интеграла по определению всегда наиболее долгий и трудоемкий способ решения.

Разделим интервал от 0 до t на n частей, а затем устремим $n \to \infty$.



Для удобства переобозначим:

$$\begin{aligned} Y_1 &= W_{\frac{t}{n}} \\ Y_2 &= W_{\frac{2t}{n}} \\ &\vdots \\ Y_{n-1} &= W_{\frac{(n-1)t}{n}} \\ Y_n &= W_t \end{aligned}$$

Чтобы решить поставленную задачу, сначала необходимо найти дискретную версию (I_n) исходного стохастического интеграла, а потом вычислить предел I_n в смысле L^2 при $n \to \infty$:

$$I_n \xrightarrow{L^2} I$$

• Дискретная версия интеграла записывается следующим образом:

$$I_n = -0 + Y_n \cdot Y_n - (Y_1 - Y_0) \cdot Y_1 - (Y_2 - Y_1) \cdot Y_2 - \dots - (Y_n - Y_{n-1}) \cdot Y_n$$

где
0 — изначальное богатство
$Y_n \cdot Y_n$ — конечное богатство
$(Y_1 - Y_0) \cdot Y_1 - (Y_2 - Y_1) \cdot Y_2 - \cdots$ — затраты на покупку дополнительных акций

Таким образом, получаем, что:

$$I_n = Y_n^2 - \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot (Y_i - Y_{i-1}) \tag{1}$$

Однако у I_n считать предел не удобно, так как Y_i и $Y_i - Y_{i-1}$ зависимы. Лучше сначала вычислить предел величины J_n, у которой приращения броуновского движения не зависимы, а потом перейти от J_n к I_n.

J_n записывается следующим образом:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_{i-1})^2 \tag{2}$$

• Возьмем предел величины J_n в смысле L^2 при $n \to \infty$.

Обратим внимание, что $Y_i - Y_{i-1}$ показывает, насколько броуновское движение изменилось за данный промежуток времени $\frac{t}{n}$. Все эти интервалы времени не пересекаются, поэтому разницы броуновского движения не зависимы.

Заметим, что $Y_i - Y_{i-1}$ имеет нормальный закон распределения с параметрами:

$$Y_i - Y_{i-1} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t}{n}\right)$$

Математическое ожидание и дисперсия J_n равны:

$$E(J_n) = E\left(\sum (Y_i - Y_{i-1})^2\right) = \sum E\left((Y_i - Y_{i-1})^2\right) = n \cdot Var\,(Y_i - Y_{i-1})^2 = n \cdot \frac{t}{n} = t$$

$$Var(J_n) = n{\cdot}Var\left((Y_i - Y_{i-1})^2\right) = \langle\text{сделаем единичную дисперсию}\rangle = n{\cdot}Var\left(\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\sqrt{\frac{t}{n}}}\right)^2 \cdot \frac{t}{n}\right) =$$

$$= n \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2 \cdot Var\left((\mathcal{N}(0;1))^2\right) = \frac{t^2}{n} \cdot \chi^2(1) = \frac{t^2}{n} \cdot 2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Таким образом, при $n \to \infty$ последовательность $J_n \xrightarrow{L^2} t$.

• Выразим I_n через J_n.

Раскроем скобки в (1) и (2) уравнениях:

$$I_n = Y_n^2 - \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Y_{i-1}$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Y_{i-1}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Y_{i-1} = 2\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot Y_{i-1} - Y_n^2$$

Таким образом, связь между I_n и J_n равна:

$$J_n = -2I_n + Y_n^2$$

Сделаем обратную замену:

$$J_n = -2I_n + W_t^2 \tag{3}$$

• Устремляем левую и правую часть уравнения (3) в L^2.

Мы знаем, что $J_n \xrightarrow{L^2} t$, $I_n \xrightarrow{L^2} I$, а W_t^2 от n не зависит. Следовательно, получаем:

$$t = -2I + W_t^2$$

$$I = \frac{W_t^2 - t}{2}$$

Таким образом, стохастический интеграл в непрерывном времени имеет вид:

$$\boxed{I = \int\limits_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - t}{2}}$$

!

Важно помнить, что из-за случайности стохастические интегралы **нельзя** брать как обычные интегралы.

$$\int\limits_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - W_0^2}{2} = \frac{W_t^2}{2} - \text{ это неправильно.}$$

Свойства стохастического интеграла

Введем несколько условий, которые всегда будем предполагать в дальнейшем:

1) Процесс (X_t) адаптирован к фильтрации $(\mathcal{F}_t)$

2) $\int\limits_0^t E(X_u^2 du) < \infty$

Перейдем к свойствам:

1) $\int\limits_0^t (aX_u + bY_u)\, dW_u = a\int\limits_0^t X_u dW_u + b\int\limits_0^t Y_u dW_u$

2) $\int\limits_a^b X_u dW_u + \int\limits_b^c X_u dW_u = \int\limits_a^c X_u dW_u$

3) $I_t = \int\limits_0^t X_u dW_u$ – это мартингал

Следовательно:

$E(I_{t+\delta}|\mathcal{F}_t) = I_t \Rightarrow E(I_{t+\delta}) = I_t$

Например, если $t = 0, \delta = t$, то
$E(I_t) = E(I_0) = 0 \Rightarrow$ В любой момент времени математическое ожидание одинаково

4) $cov\left(\int\limits_o^t X_u dW_u, \int\limits_o^t Y_u dW_u\right) = \int\limits_0^t E\left(X_u \cdot Y_u\right) du$ – ковариация стохастических интегралов равна обычному интегралу

В частном случае: $Var\left(\int\limits_0^t X_u dW_u\right) = \int\limits_0^t E\left(X_u^2\right) du$

5) **Лемма Ито**

Версии по сложности:
$\to$ лайт-версия
$\to$ рабочая версия
$\to$ версия «попонтоваться»

Формы записи:
$\to$ полная
$\to$ сокращенная

Определение. ***Сокращенная форма записи интегралов***

Процесс вида:

$$R_t = R_0 + \int\limits_0^t X_u dW_u + \int\limits_0^t Y_u du, \text{ где } R_0 - \text{это константа,}$$

называется процессом Ито и кратко записывается:

$$dR_t = X_t dW_t + Y_t dt$$

Сокращенную форму записи никак нельзя интерпретировать, так как dR_t, dW_t сами по себе не существуют.

Например, в математике из условной формы записи $x^2 = 0(x)$ и $x^3 = 0(x)$ **не следует** то, что $x^2 = x^3$

Упражнение 2. Дана краткая форма записи: $dX_t = W_t dW_t + 7dt$

Записать процесс в полной форме.

Решение: $X_t = X_0 + \int\limits_0^t W_u dW_u + \int\limits_0^t 7du$

Упражнение 3. Переформулировать свойство 4) (про ковариации) в краткой записи.

Решение: $cov\,(X_t dW_t, Y_t dW_t) = E(X_t, Y_t)dt$

Лемма Ито (лайт-версия)

• *в краткой форме записи*

Если $Y_u = f(W_u, u)$ и $f^{''}_{ww}, f^{'}_{u}$ — непрерывные функции, то $\boxed{dY_t = f^{'}_w dW_t + f^{'}_t dt + \frac{1}{2} f^{''}_{ww} dt}$

• *в полной форме записи*

$$\boxed{Y_t = Y_0 + \int\limits_0^t f^{'}_w(W_u, u)dW_u + \int\limits_0^t f^{'}_u(W_u, u)du + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f^{''}_{ww}(W_u, u)du}$$

Упражнение 4. Для каждого пункта найти dY_t и выписать утверждение в полной форме.

a) $Y_t = W_t^2$

Решение: $dY_t = 2W_t dW_t + 0dt + \frac{1}{2} \cdot 2dt = 2W_t dW_t + dt$

$Y_t = Y_0 + 2\int\limits_0^t W_u dW_u + \int\limits_0^t du$

$W_t^2 = 0 + 2\int\limits_0^t W_u dW_u + t \Rightarrow \int\limits_0^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - t}{2}$

b) $Y_t = W_t \cdot t$

Решение: $dY_t = t dW_t + W_t dt$

$Y_t = Y_0 + \int\limits_0^t u dW_u + \int\limits_0^t W_u du$

$W_t \cdot t = \int\limits_0^t u dW_u + \int\limits_0^t W_u du$

c) $Y_t = cos(W_t) - t$

Решение: $dY_t = -\sin(W_t)dW_t - dt - \frac{1}{2}\cos(W_t)dt$

$Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t \sin(W_u)dW_u - \int\limits_0^t du - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \cos(W_u)du$

$\cos(W_t) - t = \cos(W_0) - \int\limits_0^t \sin(W_u)dW_u - t - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \cos(W_u)du = 1 - \int\limits_0^t \sin(W_u)dW_u - t - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \cos(W_u)du$

d) $Y_t = W_t^4$

$dY_t = 4W_t^3 dW_t + 6W_t^2 dt$

$Y_t = W_t^4 = 4\int\limits_0^t W_u^3 dW_u + 6\int\limits_0^t W_u^2 du$

e) $Y_t = t^2 \cdot W_t^3$

$dY_t = 3t^2 \cdot W_t^2 dW_t + 2tW_t^3 dt + 3t^2 W_t dt$

$Y_t = t^2 \cdot W_t^3 = 3\int\limits_0^t u^2 \cdot W_u^2 dW_u + 2\int\limits_0^t uW_u^3 du + 3\int\limits_0^t u^2 \cdot W_u du$

c), d), e) — решить дома

***<u>Способ запомнить</u>* формулировку леммы Ито в краткой условной записи**
(не доказательство и не буквальное равенство)

Необходимо разложить в ряд Тейлора до второго порядка и упростить по принципу:

$$dW \cdot dW = dt \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y_{i-1})^2 \xrightarrow{L^2} t, \text{при } n \to \infty$$
$$dt \cdot dt = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\Delta t)^2 \xrightarrow{L^2} 0, \text{при } n \to \infty$$
$$dt \cdot dW = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\Delta t(Y_i - Y_{i-1}) \xrightarrow{L^2} 0, \text{при } n \to \infty$$

<u>Рабочая лемма Ито</u>

Если $dX_t = A_t dW_t + B_t dt$ и $Y_t = f(X_t, t)$ и f''_{xx}, f'_t — непрерывные функции, то:

$dY_t = f'_x dX_t + f'_t dt + \frac{1}{2}\left(f''_{xx} dX \cdot dX + f''_{xt} dX \cdot dt + f''_{tt} dt \cdot dt\right) = \boxed{f'_x dX + f'_t dt + \frac{1}{2} f''_{xx} \cdot A_t^2 dt}$

<u>Упражнение 5</u>. Найти dY_t и восстановить полную форму записи.

a) $dX_t = W_t^2 \cdot dW_t + W_t \cdot dt$

$Y_t = X_t^2 \cdot t \Rightarrow Y_0 = 0$

Решение: $dY_t = 2X_t \cdot t dX + X_t^2 dt + \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot W_t^4 dt = 2X_t \cdot t \cdot (W_t^2 \cdot dW_t + W_t \cdot dt) + X_t^2 dt + t \cdot W_t^4 dt$

$Y_t = 2\int\limits_0^t X_u \cdot u \cdot W_u^2 dW_u + 2\int\limits_0^t X_u \cdot u \cdot W_u du + \int\limits_0^t X_u^2 du + \int\limits_0^t u \cdot W_u^4 du$

b) $dX_t = cos(W_t)dW_t + sin(W_t)dt$

$Y_t = X_t^2 \Rightarrow Y_o = X_0^2$

Решение: $dY_t = 2X_t dX + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot cos^2(W_t)dt = 2X_t \cdot (cos(W_t)dW_t + sin(W_t)dt) + cos^2(W_t)dt$

$Y_t = X_0^2 + 2\int\limits_0^t X_u \cdot cos(W_u)dW_u + 2\int\limits_0^t X_u \cdot sin(W_u)du + \int\limits_0^t cos^2(W_u)du$

Упражнение 6. В модели Блэка-Шоулза предполагается, что цена акции S_t подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t dW_t$$
$$Y_t = \ln S_t$$

a) Найти dY_t и восстановить полную форму записи.

Решение:

$$dY_t = \frac{1}{S_t}dS_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{S_t^2}\right) \cdot (dS_t)^2 = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} \cdot \delta^2 \cdot S_t^2 dt =$$
$$= \frac{1}{S_t} \cdot (\mu S_t dt + \delta S_t dW_t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} \cdot \delta^2 \cdot S_t^2 dt = \mu dt + \delta dW_t - \frac{1}{2}\delta^2 dt$$

$Y_t = Y_0 + \mu\int\limits_0^t du + \delta\int\limits_0^t dW_u - \frac{1}{2}\delta^2\int\limits_0^t du = Y_0 + \mu t + \delta W_t - \frac{\delta^2}{2}t = Y_0 + \delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\right)t$

b) Найти S_t в явном виде.

Решение:

$\ln S_t = \ln S_0 + \delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\right)t$

$S_t = S_0 + \exp^{\delta W_t + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\right)t}$

Упражнение 7. №5 с пересдачи 2015 года.

$$\begin{cases} dX_t = 8W_t^2 \cdot X_t dt + 4W_t \cdot X_t dW_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

a) Найти dY_t, если $Y_t = \ln X_t$.

Решение:

$$dY_t = \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{X_t^2}\right) \cdot (4W_t \cdot X_t)^2 dt = \frac{1}{X_t} \cdot \left(8W_t^2 \cdot X_t dt + 4W_t \cdot X_t dW_t\right) - \frac{1}{2X_t^2} \cdot 16W_t^2 \cdot X_t^2 dt =$$
$$= 8W_t^2 dt + 4W_t dW_t - 8W_t^2 dt = 4W_t dW_t$$

$Y_t = Y_0 + 4\int\limits_0^t W_u dW_u = 4 \cdot \frac{W_t^2 - t}{2} = 2(W_t^2 - t)$

b) Найти X_t.

Решение:

$\ln X_t = 2(W_t^2 - t)$

$X_t = \exp^{2(W_t^2 - t)}$

Упражнение 8. №3 с пересдачи 2015 года.

Найти: $E(X_t)$ и $Var(X_t)$

Решение:

$$X_t = X_0 + 2\int\limits_0^t u du + \int\limits_0^t u^2 dW_u = 2016 + t^2 + \int\limits_0^t u^2 dW_u$$

$$E(X_t) = 2016 + t^2$$

$$Var(X_t) = Var\left(\int\limits_0^t u^2 dW_u\right) = \int\limits_0^t E(u^4)du = \int\limits_0^t u^4 du = \left.\frac{u^5}{5}\right|_0^t = \frac{t^5}{5}$$