18 января 2014 года

$E(Y\|Z)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$1_{Z=1}$	0	0	1
Z	2	2	1
Y	1	0	4
X	-1	0	2
$P(\ldots)$	0.1	0.2	0.7
$P(\ldots\|A)$	0	$\frac{0.2}{0.9}$	$\frac{0.7}{0.9}$
$Y \cdot 1_{Z=1}$	0	0	4

Событие $A = \{x \geq 0\}$

$$E(Y|A) = (0 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.7)/0.9$$

$$E(Y|X) = X^2$$

Z принимает значение 1

$$E(Z|A) = (1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.7)/0.9 = 1$$

$$E(X) = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.7 =$$
$$= 0 \cdot -1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 0.7 =$$
$$= E(X \cdot 1_A)$$

$$E(Y|Z) = \begin{cases} 4, & \text{если } z = 1 \\ 1/3, & \text{если } z = 2 \end{cases}$$

Условное математическое ожидание $E(Y|A)$ – среднее значение Y, если известно, что

Y – случайная величина

A – событие

$E(Y|A)$ – const

$E(Y|X)$ – наилучший прогноз Y при известном X

Y – случайная величина

X – случайная величина

$E(Y|X)$ – случайная величина

Формальное определение (дискретной случайной)

Индикатор A, 1_A, $1\{A\}$ - случайная величина, которая равна 1, если A произошло и 0 иначе

$$E(Y|A) = \frac{E(Y \cdot 1_A)}{P(A)}$$

Ррл

Для дискретного случая

$$\boxed{E(Y|Z) = \sum E(Y|Z=z)\cdot 1_{Z=z}}$$

$$E(Y|Z) = 4\cdot 1_{Z=1} + \frac{1}{3}\cdot 1_{Z=2}$$

$E(Y|Z) \leftarrow$ случ. версия величины Y

В непрерывном случае

$f(x,z)$ — совместная ф-я плотности

$$P(X\in[x_0,x_1],\ Z\in[z_0,z_1]) = \int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x,z)\,dx\,dz$$

Совместная функция плотности
Графически

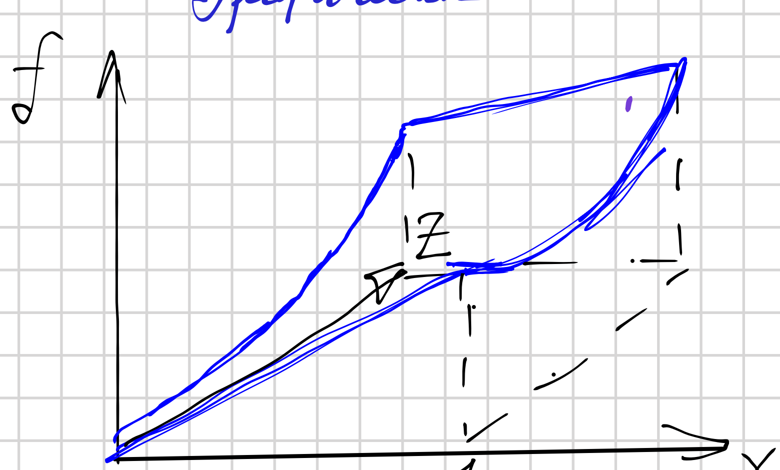
Опр. $E(Y|Z) = m(Z)$, где $m(\cdot)$ опр-ся по $m(z) = E(Y|Z=z) =$

$$= \int y\cdot f(y|z)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot \frac{f(y,z)}{f(z)}\,dy$$

Упр.

$$f(x,z) = \begin{cases} x+\frac{3}{2}\cdot z^2, & x\in[0;1] \\ 0, & y\in[0;1] \end{cases}$$

Графически



Найдите

$P(X \in [0; 0.5], Z > X)$

$E(X)$, $f(z)$, $E(X | Z = z)$, $E(X|Z)$

① $P(X \le 0.05, Z > X) = \int_0^{0.5} \left(\int_x^1 x + 3/2\, z^2 \, dz \right) dx =$

$= \int_0^{0.5} x \cdot z + \frac{3}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_{z=x}^{z=1} dx = \int_0^{0.5} \left(x + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) - \left(x^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right) dx =$

$= \int_0^{0.5} \left(x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \Big|_0^{0.5} =$

$= \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{2} - \frac{(0.5)^3}{3} - \frac{(0.5)^4}{8}$

② $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z)\, dx$

$f(z) = \int_0^1 x + 3/2\, z^2 \, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} z^2 \cdot x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} z^2$

③ $f(x) = \int_0^1 x + \frac{3}{2} z \, dz = xz + \frac{3}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{z=1} = x + \frac{1}{2}$

$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2 \cdot 2} \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

④ $P(X = x | Z = z) = \frac{P(X = x, Z = z)}{P(Z = z)}$

$f(x, z) = \frac{x + \frac{3}{2} z^2}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} z^2} = \frac{2x + 3z^2}{1 + 3z^2}$

$z = 0 \quad f(x|z) = 2x$

$z = 1/2 \quad f\left(x | z = \frac{1}{2}\right) = \frac{2x + \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{8x + \frac{1}{3}}{7}$

$z = 1 \quad f(x | z = 1) = \frac{2x + 3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}$

$E(X|z) = f(z)$

$E(X | Z = z) = \int_0^1 x \cdot f(x|z)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2x + 3z^2}{1 + 3z^2} dx =$

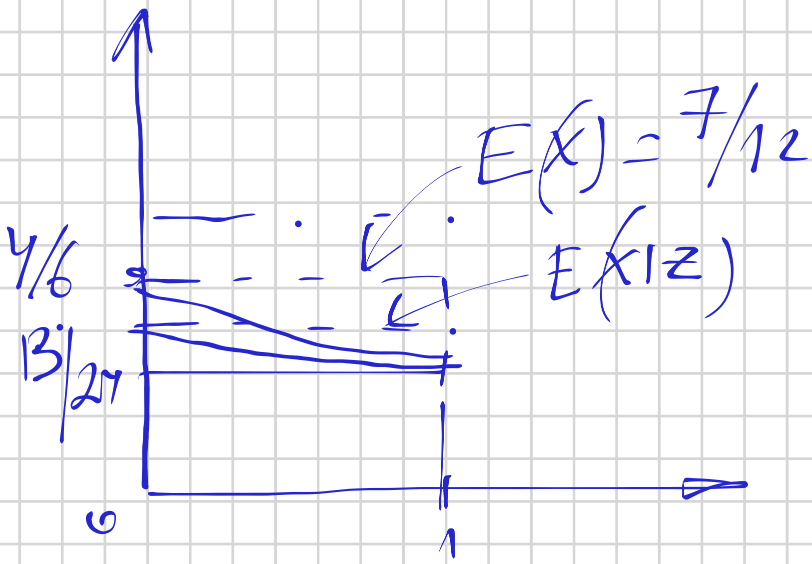
$= \frac{2\frac{x^3}{3} + 3z^2 \frac{x^2}{2}}{\ldots} \Big|^1 = \frac{2}{\ldots} + \frac{3z^2}{2} \ldots$

$$\ldots\frac{\ldots}{1+3z^2} \quad ! \quad = \frac{\ldots}{1+3z^2}$$

Как связаны $E(X)$ и $E(X|Z)$?

$$E(X) = 7/12$$

$$E(X|Z) = 1 + \frac{1/3}{1+3z^2} = 1 + \frac{1}{3+9z^2}$$

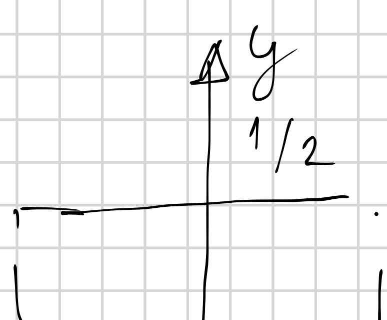


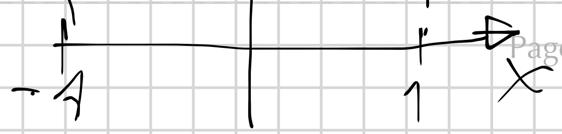
Общие свойства математического ожидания

1. $E(f(X)|X) = f(X)$
2. $E(Y|X) = E(Y)$, если Y и X независимы
3. $E(f(X)\cdot Y|X) = f(X)\cdot E(Y|X)$
4. $E(E(Y|X)) = E(Y)$
5. $E(E(Y|X,Z)|X) = E(Y|X)$
6. $E(Y_1+Y_2|X) = E(Y_1|X) + E(Y_2|X)$
   $E(a\cdot Y|X) = a\cdot E(Y|X) \qquad a\in R$
7. $Cov(Y, f(X)) = cov(\hat{Y}, f(X))$ для $\forall f(X)$

Упр.

$X \in U[-1;1]$





$$E(X)=0$$

$$E(X^2|X)=X^2$$

$$E(X|X^2)=\frac{1}{2}\sqrt{X^2}+\frac{1}{2}\left(-\sqrt{X^2}\right)=0$$

$$E(X|X^3)=(X^3)^{1/3}=X$$

Биномиальное распределение

Если X – кол-во „успехов" при n одинаковых независимых испытаниях, каждое из которых оканчивается успехом с вероятностью p, то мы говорим, что X имеет биномиальн. распределение $Bin(n,p)$

$$P(X=k)=C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(X)=n\cdot p \qquad Var(X)=n\cdot p(1-p)$$

Упр.

	p
Собираем 10 грибов	
X – кол-во подберезовиков	0.3
Y – кол-во мухоморов	0.5
Z – лисички	0.2

$$E(X)=10\cdot 0.3=3$$

$$E(X|Y)=(10-Y)\cdot 0.6$$

$$E(X+Y|Z)=10-Z$$

$$E(X|X,Z)=X$$

$$E(Y|X+Z)=10-X-Z$$

$$E(X|X+Z)=(10-Y)\cdot 0.6=(10-(10-X-Z))\cdot 0.6=(X+Z)\cdot 0.6$$

Упр.

Саша и Маша получили оценки 3, 4, 5

С 3 4 5

$p(\cdot)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$
M	3	4	5
$p(\cdot)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$E(S|M) = E(S) = 4$$
$$E(S+M\ |M) = E(S|M) + E(M|M) = E(S) + M = 4 + M$$
$$E(M\ |S+M) = \frac{M+S}{2}$$
$$E(\max\{S,M\}\ |M) = \begin{cases} 5 & \text{если } M=5 \\ 4\frac{1}{3} & \text{если } M=4 \\ 4 & \text{если } M=3 \end{cases}$$
$$E(\max\ |M=5) = 5$$
$$E(\max\ |M=4) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 = 4\frac{1}{3}$$
$$E(\max\ |M=3) = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 = 4$$
$$E(M\ |\max\{S,M\}) = \begin{cases} 3 & \text{если } M=3 \\ 3\frac{2}{5} & \text{если } M=4 \\ 5 & \text{если } M=5 \end{cases}$$

Упр.

Даны переменные X и Y

$E(X)=0$ $\quad Var(X) = 100$ $\quad Cov(X,Y) = -30$

$E(Y) = 1$ $\quad Var(Y) = 81$

$E(\hat{Y}^2) = 50$ $\quad E(\hat{X}^2) = 50$

$$Var(\hat{Y}) = E(\hat{Y}_2) - (E(\hat{Y}))^2 = 50 - (E(\hat{Y}))^2 = 50 - 1 = 49$$
$$Var(\hat{X}) = E(\hat{X}^2) - (E(\hat{X}))^2 = 60 - 0 = 60$$
$$Cov(\hat{Y},Y) = Cov(\hat{Y},\hat{Y}) = Var(\hat{Y}) = 49$$
$$Cov(\hat{Y},X) = Cov(Y,X) = -30$$

$$Var(Y-\hat{Y}) = Var(Y) + Var(\hat{Y}) - 2Cov(Y,\hat{Y}) = Var(Y) + Var(\hat{Y}) -$$
$$-2Cov(\hat{Y},\hat{Y}) = Var(Y) + Var(\hat{Y}) - 2Var(\hat{Y}) = Var(Y) - Var(\hat{Y}) =$$
$$= 81 - 49 = 32$$
$$Var(X-\hat{X}) = Var(X) - Var(\hat{X}) = 100 - 60 = 40$$
$$E(X-\hat{X}) = E(X) - E(\hat{X})$$
$$E(Y-\hat{Y}) = E(Y) - E(\hat{Y})$$

25 января 2013 года

$Y = X\cos(X) + e$, где X и e независимы $cov(h(x), f(e)) = 0$

$e \sim N(2014, 7^2)$

Перепишем Y: $Y = [X\cos(X) + 2014] + [e - 2014]$

Тогда $\hat{Y}$ это $E(Y|X)$ если и только если

$Y = \hat{Y} + e$, $E(e) = 0$, $\cos(\varepsilon, f(x)) = 0$ $\forall f$

Ответ: $E(Y|X) = X \cdot \cos(X) + 2014$

Z_1 и Z_2 независимые случайные величины

$Z_1 \sim N(2; 5)$ $Z_2 \sim U[0; 10]$ $Z_3 \sim N(-2; 7)$

$X = (Z_1 + Z_2)^2 + Z_3$ $Y = (Z_1 + Z_2)^3 + Z_3$

Найдите $E(X|Z_2)$ и $E(Y|Z_2)$

Разбиваем X на часть, что объясняется Z_2 и все остальное

$X = Z_1^2 + 2Z_1Z_2 + Z_2^2 + Z_3$

$E(Z_1^2 + 2Z_1Z_2 + Z_2^2 + Z_3 | Z_2) = E(Z_1^2 | Z_2) + E(2Z_1Z_2 | Z_2) +$
$E(Z_2^2 | Z_2) + E(Z_3 | Z_2) = E(Z_1^2) + 2Z_2 \cdot E(Z_1 | Z_2) + Z_2^2 + E(Z_3) =$
$= 9 + 2Z_2 \cdot 2 + Z_2^2 + (-2) = Z_2^2 + 4Z_2 + 7$

$Var(Z_1) = E(Z_1^2) - (E(Z_1))^2 \Rightarrow E(Z_1^2) = 5 + 4 = 9$

Мартингалы

Случайный процесс — упорядоченный набор случайных величин.

В дискретном времени X_1, X_2, X_3

В непрерывном времени $\{X_t\}$ $t \in [0, +\infty)$

Процесс $\{X_t\}$ - это мартингал, если:

дискр: $E(X_{t+1} | X_1, X_2, \ldots X_t) = X_t$

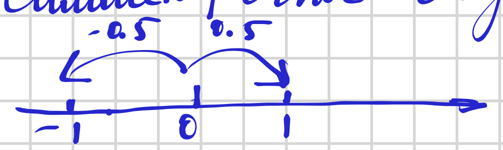
непр: $E(X_{t+s} | \text{все } X_t \in [0; t]) = X_t$ $\forall s \geq 0$

Техническое замечание

$E(Y|X)$ определено только тогда, когда $E(Y)$ существует, неявно определяется, что $E(X_t)$ конечно $\forall t$

Пример.

Симметричное случайное блуждание (Symmetric Random Walk)



$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ независимы

$X_0 = 0$

$X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1}$

Δ_{t+1}	-1	$+1$
$P(\dots)$	$1/2$	$1/2$

$$E(X_{t+1} | X_1 \dots X_t) = E(X_t + \Delta_{t+1} | X_1 \dots X_t) =$$

$$= X_t + E(\Delta_{t+1} | \Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \dots, \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_t) =$$

$$= X_t + E(\Delta_{t+1}) = X_t + 0 = X_t$$

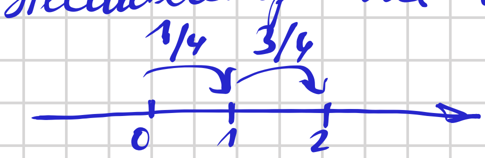
Как сделать мартингал?

Способ 1

Если $E(X_{t+1} | X_1 \dots X_t) = X_t + m(t)$, то может помочь преобразование $\underline{M_t = X_t - E(X_t)}$

Пример.

Несимметричное случайное блуждание



$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1} \end{cases}$$

$$E(X_{t+1} | X_1 \dots X_t) = X_t + E(\Delta_{t+1}) = X_t + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} =$$
$$= X_t + \frac{1}{2}$$

$$E(X_t) = E(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = t \cdot \frac{1}{2}$$

$M_t = X_t - \frac{t}{2}$

$M_{t+1} = X_{t+1} - \frac{t+1}{2}$

$M_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1} - \frac{t+1}{2} = X_t + \Delta_{t+1} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = M_t + \Delta_{t+1} - \frac{1}{2}$

$E(M_{t+1} | M_1 \dots M_t) = E(M_t + \Delta_{t+1} - \frac{1}{2} | M_1 \dots M_t) = M_t - \frac{1}{2} + E(\Delta_{t+1}) =$
$= M_t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = M_t$

Способ 2

Иногда помогает преобразование $M_t = a^{X_t}$ для нек-х $a \neq 1$
$M_t = e^{\lambda \cdot X_t}$

Пример.

X_t – несимметричное случайное блуждание

$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1} \end{cases}$

Найдите такое a, что $M_t = a^{X_t}$ – мартингал

$E(M_{t+1} | M_1 \dots M_t) = M_t$

$M_{t+1}: E(a^{X_{t+1}} | M_1 \dots M_t) = M_t$

$E(a^{X_t + \Delta_{t+1}} | M_1 \dots M_t) = M_t$

$E(a^{X_t} \cdot a^{\Delta_{t+1}} | M_1 \dots M_t) = M_t$

$M_t \cdot E(a^{\Delta_{t+1}} | M_1 \dots M_t) = M_t$

$E(a^{\Delta_{t+1}} | M_1 \dots M_t)$

↳ должно быть равно 1

↳ Δ_{t+1} не зависит от $\Delta_1, \dots \Delta_t$

↳ M_1 зависит и содержит в себе Δ_1

$E(a^{\Delta_{t+1}}) = 1$

Δ_{t+1}	a^{-1}	a^{1}
$P(\cdot)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} a^{-1} + \frac{3}{4} a^{1} = 1 \quad | \times 4a$

$1 + 3a^2 - 4a = 0$

$3a^2 - 4a + 1 = 0$

$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{3}$

$a_1 = 1 \qquad M_t = 1^{X_t} = 1$

$\boxed{a_2 = \frac{1}{3} \qquad M_t = \left(\frac{1}{3}\right)^{X_t}}$

Теорема Дуба (Doob's Theorem)

$\tilde{\tau}$ - случайная величина $\tilde{\tau} \in \{0, 1, 2, 3\} \cup \{+\infty\}$

Случайная величина $\tilde{\tau}$ наз-ся моментом остановки, если знание об $X_1, \dots X_t$ достаточно для того, чтобы определить, что $\{\tilde{\tau} = t\}$

Если 1) X_t - мартингал 2) $\tilde{\tau}$ - момент остановки

+ технические предпосылки

То: $E(X_{\tilde{\tau}}) = X_0$

Пример.

Вася играет в орлянку

X_t - благосостояние Васи по t-го подбрасывания

Ставка = 1р.

$X_0 = 100$ р.

Стратегия: $\tilde{\tau} = \min \begin{cases} t \mid X_t = 1000 р. \\ \text{или } X_t = 0 \end{cases}$

$P(X_{\tilde{\tau}} = 1000) - ?$

$X_{\tilde{\tau}} = \begin{cases} 1000 & \leftarrow p \\ 0 & \leftarrow (1-p) \end{cases}$

$E(X_{\tilde{\tau}}) = 0 \cdot (1-p) + 1000 \cdot p = 100$

$p = 0.1 \qquad (1-p) = 0.9$

Ответ: $P(X_{\tilde{\tau}} = 1000) = 0.1$

Упр.

Рулетка: 1...36 + zero

$X_0 = \$100$

$$\tilde{\tau} = \min \begin{cases} t \mid X_t = 0 \\ \text{или } X_t = 200 \end{cases}$$

Ставим \$1 на красное

$P(X_{\tilde{\tau}} = 200)$ - ?

Δt	-1	$+1$
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Соответственно, X_t - не мартингал

Найти такое a, чтобы

$M_t = a^{X_t}$ — мартингал

$$E(M_{t+1} \mid M_1 \dots M_t) = M_t$$

$$E(a^{\Delta_{t+1}}) = 1$$

$$E(a^{\Delta_{t+1}}) = a^{-1} \cdot \frac{19}{37} + a^{+1} \cdot \frac{18}{37} = 1$$

$$19 + a^2 \cdot 18 = 37a$$

$$18a^2 - 37a + 19 = 0$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{19}{18}$$

$M_t = \left(\frac{19}{18}\right)^{X_t}$ — мартингал

т. Дуба: $E(M_{\tilde{\tau}}) = M_0 = \left(\frac{19}{18}\right)^{X_0} = \left(\frac{19}{18}\right)^{100}$

$M_{\tilde{\tau}}$	1	$\left(\frac{19}{18}\right)^{200}$
$X_{\tilde{\tau}}$	0	200
$P(.)$	$1-p$	p

$$E(M_{\tilde{\tau}}) = 1(1-p) + \left(\frac{19}{18}\right)^{200} p$$

$$(1-p) + p \cdot \left(\frac{19}{18}\right)^{200} = \left(\frac{19}{18}\right)^{100} \Rightarrow p = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{100} - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{200} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{100} + 1} = 0.0044..$$

Классическая задача

(Теорема о бесконечных обезьянах)

„Обезьяна печатает „Война и Мир“" (Допущение: 33 буквы + пробел)

Обезьяна наугад нажимает клавиши, 1 нажатие / сек.

P (рано или поздно напечатает „В и М“) - ?

$E(\tau)$ - ?

τ = момент окончания написания В и М

$P(\text{„мир" с первых трех ударов}) = \left(\frac{1}{34}\right)^3 = \frac{1}{30000}$

$P(\text{не напечатает „мир" с 3-х ударов}) = 1 - \left(\frac{1}{34}\right)^3$

$P(\text{никогда не напечатает слово „мир"}) = \left(1-\left(\frac{1}{34}\right)^3\right) \cdot \left(1-\left(\frac{1}{34}\right)^3\right) \cdot \left(1-\left(\frac{1}{34}\right)^3\right) \cdot \left(1-\left(\frac{1}{34}\right)^3\right) \approx 0$

P (рано или поздно напечатает „В и М“) ≈ 1

В романе „В и М“ содер-ся 2517633 буквы

Обезьяна пишет слово Абракадабра

ν - первый момент времени, когда написано слово

$E(\nu)$ - ?

Нужно использовать мартингал

$M_\nu = \ldots \nu$

$E(M_\nu) = E(\ldots) + E(\nu) = M_\nu$

Организовываем тотализатор на обезьяну

Каждый участник ставит все деньги на каждый удар обезьяны.

$$W_t \xrightarrow{\text{угадал}} W_{t+1} = 34 \cdot W_t$$

$$W_t \xrightarrow{\text{не угад.}} W_{t+1} = 0$$

$W_{t_0} = 1$ — каждый трек имеет \$1

W_t - мартингал, т.к.:

$$E(W_{t+1} \mid W_1 \ldots W_t) = \frac{1}{34} \cdot 34\, W_t + \frac{33}{34} \cdot 0 = W_t$$

В каждый момент времени к нам приходит 1 трек

Y_t - суммарное благосостояние всех треков

$$Y_t = W_{1t} + W_{2t} + W_{3t} + \ldots + W_{tt}$$

Y_t - не мартингал, т.к.:

$$E(Y_t) = E(W_{1t}) + \ldots + E(W_{tt}) = t \cdot 1 = t$$

Делаем мартингал из Y_t след. образом: $M_t = Y_t - t$

По т. Дуба: $E(M_{\tau}) = M_0 = 0$

$$E(M_{\tau}) = E(Y_{\tau}) - E(\tau) = 0$$

У всех треков одна и та же стратегия: последовательно ставить на буквы в слове:

МБОНЖЙ L СН | АБРАКАДАБРА || конец

1-й | АБРАКАДАБРА

2-й | АБРА

3-й | А

$$Y_{\tau} = 34^{11} + 34^{4} + 34^{1}$$

$$E(Y_{\tau}) - E(\tau) = 0$$

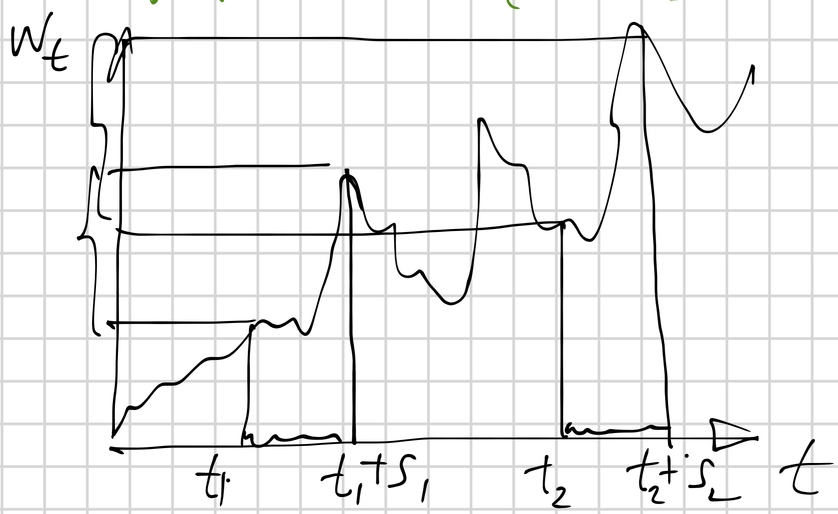
$$E(\tau) = 34^{11} + 34^{4} + 34 \approx 2.2 \text{ млрд. лет}$$

$E(\tau_{ВЧМ}) = 34^{2.5 \cdot 10^6} \approx$ число с 3 млн. нулей

Непрерывное время

Случайный процесс W_t называется Броуновским движением (Винеровским процессом), если:

1. $W_t = 0$
2. Траектория процесса W_t непрерывна с $P = 1$
3. Приращение $(W_{t+s} - W_t)$ на непересекающихся промежутках времени независимы
4. Приращение $(W_{t+s} - W_t) \sim N(0; s)$



Будущие изменения не зависят от прошлых изменений

Упр.

Как распределено:

1) $W_3 - W_2$ — ?
2) $W_{0.5} - W_{0.3}$ — ?
3) W_3 — ?
4) W_t — ?
5) $W_1 + W_2$ — ?
6) $7W_7 + 0.3\, W_{4.5}$ — ?

1) $\sim N(0, 1)$
2) $\sim N(0; 0.2)$
3) $W_3 - 0 = W_3 - W_0 \sim N(0; 3)$
4) $W_t \sim N(0; t)$
5) $W_1 + W_2 \sim N(0; 5)$

$E(W_1) = 0 \qquad Var(W_1) = 1$
$E(W_2) = 0 \qquad Var(W_2) = 2$

$cov(W_1 - W_0;\ W_2 - W_1) = 0$

$cov(W_1;\ W_2 - W_1) = 0$

$cov(W_1; W_2) - cov(W_1, W_1) = 0$

$cov(W_1; W_2) - Var(W_1) = 0$

$cov(W_1, W_2) = 1$

$cov(W_s, W_t) = s$, если $s < t$

$$Var(W_1 + W_2) = Var(W_1) + Var(W_2) + 2\,cov(W_1, W_2) = $$
$$= 1 + 2 + 2\cdot 1 = 5$$

$$E(W_1 + W_2) = E(W_1) + E(W_2) = 0 + 0 = 0$$

$$7W_7 + 0.3\,W_{4.5} = Z$$

$$Var(Z) = Var(7W_7 + 0.3\,W_{4.5}) = 49\,Var(W_7) + 0.09\,Var(W_{4.5}) +$$
$$+ 2\cdot 7\cdot 0.3\,cov(W_7, W_{4.5}) = 49\cdot 7 + 0.09\cdot 4.5 + 2\cdot 7\cdot 0.3\cdot 4.5$$

Д/З

Маша и Петя играют в шахматы

P(Маша выиграет) = 0.8

P(Петя выиграет) = 0.1

P(Ничья) = 0.1

а) Играют до преимущества в 2 победы: МПММ

б) Вероятность, что Маша выигр. серию игр – ?

X_t – разница (побед у Маши – побед у Пети)

$$X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1}$$

$M_t = a^{X_t}$ + т. Дуба

Что, если до двух побед подряд?

$E(\tau_{ABCD}) = 34^4$ $\quad E(\tau_{ABAB}) = 34^2 + 34^4$

Почему $E(\tau_{ABAB}) > E(\tau_{ABCD})$ – ?

01.02.14

Условная дисперсия

$$Var(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2$$ ← случайная величина

Является функцией от X

Свойства:

$Var(aY+b \mid X) = a^2 Var(Y|X)$

$Var(f(X) \mid X) = 0$

$Var(Y|X) = Var(Y)$, если X и Y независимы

Упр.

$$E(W_{10}|W_5) = E(W_5 + (W_{10}-W_5)|W_5) = W_5 + E(W_{10}-W_5|W_5) = W_5 + E(W_{10}-W_5) = W_5$$

$$Var(W_{10}|W_5) = Var(W_5 + (W_{10}-W_5)|W_5) = Var(W_{10}-W_5|W_5) = Var(W_{10}-W_5) = 5$$

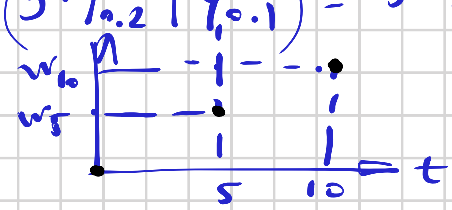
$E(W_5|W_{10})$

$Var(W_5|W_{10})$ ← применяем инверсию

$$Y_t = \begin{cases} t \cdot W_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$E(W_5|W_{10}) = E(5 \cdot Y_{1/5} \mid 10 \cdot Y_{1/10}) = E(5Y_{0.2}|Y_{0.1}) = 5E(Y_{0.2}|Y_{0.1}) =$$

$$= 5 \cdot Y_{0.1} = 5 \cdot 0.1 \cdot W_{10} = 0.5 W_{10}$$



$$Var(W_5|W_{10}) = Var(5 \cdot Y_{0.2} \mid 10 Y_{0.1}) = 5^2 \cdot Var(Y_{0.2}|Y_{0.1}) = 5^2 \cdot 0.1 = 2.5$$

Чудесные свойства Броуновского движения

① $P(W_t$ когда-нибудь достигнет заданной точки $a) = 1$

①+ $P(W_t$ ∞ кол-во раз посетит заданную точку $a) = 1$

(2) (H)-ǂ инверсия: $P(W_t \ \infty$ кол-во раз пересечет 0 в интервале $[0;\varepsilon)) = 1$

(3) Траектория нигде не дифференцируема (в $\forall$ точке излом)

Стохастический интеграл

Неформальное определение

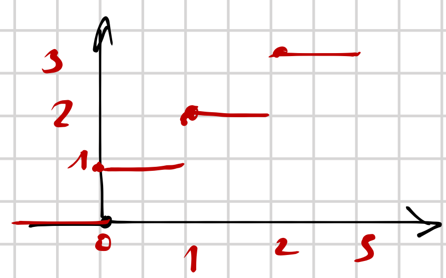
$\int_0^t f(s,W_s)\,dW_s$ — прибыль за время $s\in[0;t]$ если цена актива в момент s равна W_s, а кол-во $f(s,W_s)$

Пример.

$$\int_0^3 7\cdot dW_s = -7\cdot W_0 + 7W_3$$

$$\int_0^3 f(t)\,dt = -W_0 - W_1 - W_2 + 3W_3 = 3W_3 - W_1 - W_2$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t\in[0;1] \\ 2, & \text{если } t\in[1;2] \\ 3, & \text{если } t\in[2;3] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$



Пример.

$$\int_0^3 f(t,W_t)\,dW_t = -1\cdot W_0 + \underbrace{(1-W_1^2)}_{\text{иначе}}\cdot W_1 + (W_1^2 - |W_1|)\cdot W_2 + |W_1|\cdot W_3$$

$$f(t,W_t) = \begin{cases} 1 & t\in[0;1] \\ W_1^2 & t\in[1;2] \\ |W_1| & t\in[2;3] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_0^3 f(t,W_t)\,dW_t = -1\cdot W_0 - 1W_2\cdot 1_{W_1<1} + 1\cdot W_3 + 1\cdot W_3\cdot 1_{W_1<1}$$

$$f(W_t) = \begin{cases} 1 & t\in[0;2] \\ 2 & \text{если } W_1<1 \text{ и } t\in[2;3] \\ 1 & \text{если } W_1\geqslant 1 \text{ и } t\in[2;3] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Стохастический интеграл — случайная величина.

Интеграл Ито.

Идея: Описать случайную величину на компе можно с помощью большой выборки.

$X \sim N(2; 15)$ $\quad P(X > 2)$

$E(X) = 2$

$Var(X) = 15 = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = 15 + 2^2 = 19$

Упр.

$I = \int_0^1 W_t \cdot dW_t$ на компе

Оцените $E(I)$ - ? $Var(I)$ - ? $P(I > 0)$? ф. плотности

Свойства стохастического интеграла

① $E\left(\int_0^t f(s, W_s)\, dW_s\right) = 0$

② $Var\left(\int_0^t f(s, W_s)\, dW_s\right) = \int_0^t E(f^2(s, W_s))\, ds$ Изометрия

③ $\int_0^t f_1(s, W_s) + f_2(s, W_s)\, dW_s = \int_0^t f_1(s, W_s)\, dW_s + \int_0^t f_2(s, W_s)\, dW_s$

④ $cov\left(\int_0^t f_1\, dW_s, \int_0^t f_2\, dW_s\right) = \int_0^t E(f_1 \cdot f_2)\, ds$ Изометрия

⑤ $I_t = \int_0^t f(s, W_s)\, dW_s$ - это мартингал

в частности $E(I_{t+s} | I_t) = I_t$

$Var\left(\int_0^1 W_s\, dW_s\right) = \int_0^1 E(W_s^2)\, ds = \int_0^1 s \cdot ds = \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$E(W_s^2) = Var(W_s) = Var(W_s - W_0) = s$

Y_t - процесс. Что если

$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, W_s)\, ds + \int_0^t g(s, W_s)\, dW_s$

$\uparrow$ const

Для процессов Ито существует краткая форма записи:

$$dY_t = f(t,W_t)dt + g(t,W_t)dW_t$$

! как строгие объекты dY_t dW_t не существуют

Лемма Ито в краткой форме записи:

Если $X_t = f(t,W_t)$ и $f(t,x)$ – функция т. что f'_t – непрерывна, f''_{xx} – непрерывна, то $dX_t = f'_t dt + f'_x dW_t + \frac{1}{2} f''_{xx} dt$

Упр.

$Y_t = W_t^2 \qquad f(t,x) = x^2$

$dY_t = 0 \cdot d_t + 2W_t \cdot dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2\,dt$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t 2W_s\,dW_s + \int_0^t 1 \cdot ds$

$W_t^2 = W_0^2 + 2 \cdot \int_0^t W_s\,dW_s + t$

$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{W_t^2 - W_0^2 - t}{2}$

Д/з.

$Y = (Z_1 + Z_2)^3 + Z^3$

$E(Y \mid Z_2) = E(Z_1^3) + 27Z_2 + 6Z_2^2 + Z_2^3 - 2$

$E(Z_1^3) = E \qquad E((2 + \tilde{Z}_1)^3) = E(8 + \tilde{Z}_1^3 +$

$Z_1 = 2 + \underbrace{N(0,5)}_{\tilde{Z}_1}$

Дорешать

Упр.

Применить Лемма Ито и выяснить являются ли Y_t мартингалом

а) $Y_t = W_t^2 - t \qquad f(t,x) = x^2 - t$

$dY_t = -1dt + 2W_t \cdot dW + \frac{1}{2} \cdot 2dt$

$dY_t = 2W_t\, dW$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t 2W_s\, dW_s$ — мартингал

b) $Y_t = W_t^3 \qquad f(t,x) = x^3$

$dY_t = 3W_t^2\, dW_t + \frac{1}{2} 6W_t\, dt$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t 3W_s\, ds + \int_0^t 3W_s^2\, dW_s$ — не мартингал

Процесс Ито является мартингалом, если и только если

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t g(t, W_s)\, dW$$

c) $Y_t = e^{\sigma W_t} \qquad f(t,x) =$

$dY_t = 0 \cdot d_t + \sigma e^{\sigma W_t} dW + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma W_t} dt$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{\sigma W_s} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{\sigma W_s} ds$ — не мартингал

d) $Y_t = e^{t/2} \cdot \cos W_t \qquad f(t,x) = e^{t/2} \cdot \cos x$

$dY_t = \frac{1}{2} e^{t/2} \cdot \cos W_t\, d_t + (-\sin W_t) \cdot e^{t/2} \cdot dW_t - \frac{1}{2}\cos W_t \cdot e^{t/2} \cdot d_t$

$dY_t = -\sin W_t \cdot e^{t/2} \cdot dW_t$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t -\sin W_s\, e^{s/2}\, dW_s$

e) $Y_t = e^{-2\mu W_t + \mu^2 \cdot t} = e^{-2\mu W_t} \cdot e^{\mu^2 t}$

$dY_t = e^{-2\mu W_t} \cdot \mu^2 \cdot e^{\mu^2 t} dt + e^{\mu^2 t} \cdot (-2\mu) \cdot e^{-2\mu W_t} dW - \frac{1}{2} \cdot 2\mu e^{\mu^2 t} (-2\mu) \cdot e^{-2\mu}$

Y_t

Теорема Гирсанова

Если W_t - это стандартное броуновское движение относительно вероятности P и $\tilde{W}_t = W_t + \mu \cdot t$, то существует вероятность $\tilde{P}$ относительно которой $\tilde{W}_t$ - броуновское движение

Пример.

X	-1	3
p	0.5	0.5
$\tilde{p}$	0.75	0.25

$E_p(X) = \ldots = 1$

есть ли такое $\tilde{p}$, что $E_{\tilde{p}}(X) = 0$?

W_t — броуновское движение

$W_7 \overset{\tilde{p}}{\sim} N(0;7)$ $\qquad \tilde{W}_7 \overset{\tilde{p}}{\sim} N(14;7)$

$\tilde{W} = W_t \cdot 2 \cdot t$ $\qquad \tilde{W}_7 \; \tilde{\tilde{p}} \; (0;7)$

Модель Блэка-Шоулса

	цена		
Акции	S_t	$dS_t = \mu \cdot S_t \, d_t + \sigma S_t \cdot dW_t$	$S_t = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$
Облигации	B_t	$dB_t = r \cdot B_t \, d_t$	$B_t = e^{rt} \cdot B_0$

Упр.

Выписать S_t и B_t в явном виде

$$\frac{dB_t}{dt} = r \cdot B_t \qquad \int \frac{dB_t}{B_t} = \int r \cdot d_t$$

$$\ln B_t = r \cdot t + c$$

$$B_t = e^{rt} \cdot e^c$$

$$B_t = e^{rt} \cdot B_0$$

Лемма Ито-2 (в сокращ. форме)

Если $Y_t = f(t, X_t)$ и $dX_t = A_t \cdot d_t + B_t \cdot dW_t$

и f'_t, f''_{xx} — непрер., то $\quad dY_t = f'_t d_t + f'_x dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx} \cdot B_t^2 \cdot dt$

Пример.

$Y_t = \ln S_t \qquad dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \, dW_t$

dY_t?

$dY_t = 0 \, dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{S_t^2}\right) \cdot \sigma^2 S_t^2 \, dt = \frac{1}{S_t} \cdot \left(\mu S_t d_t + \sigma S_t W_t\right) -$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t = dY_t$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu - \frac{\sigma^2}{2}\, ds + \int_0^t \sigma \cdot dW_s$$

$$Y_0 = \ln S_0$$

$$Y_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t + \sigma \cdot W_t$$

$$S_t = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t + \sigma \cdot W_t}$$

Упр.

$$X_T = \begin{cases} 1 & \text{если } S_T \geq 100 \\ 0 & \text{если } S_T < 100 \end{cases}$$

Трюк: Заменим наш хитрый актив на комбинацию акций и облигаций так, чтобы: заменяющий портфель был неотличим от хитрого актива.

Портфель динамически меняется

N_t - кол-во акций
X_t - стоимость портфеля

X_t: ↗ стоим-ть акций $N_t \cdot S_t$; ↘ стоим-ть облигаций $X_t - N_t \cdot S_t$

N_t, $\frac{X_t - N_t S_t}{B_t}$

$$dX_t = N_t \cdot dS_t + \frac{X_t - N_t \cdot S_t}{B_t} \cdot dB_t$$

$$dX_t = N_t \cdot \mu S_t d_t + N_t \cdot \sigma S_t dW_t + (X_t - N_t S_t)\, r\, dt$$

Упр.

Найдите $d\left(e^{-rt} \cdot X_t\right)$

X_t - стоимость портфеля в t

$Z_t = e^{-rt} \cdot X_t$ - дисконт. стоимость портфеля в t к моменту $t=0$

$$Z_t = e^{-rt} \cdot X_t$$

$d Z_t = -r \cdot e^{-rt} X_t dt + e^{-rt} \cdot dX_t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \ldots = dt \cdot [-re^{-rt} X_t + e^{-rt} \cdot$

$(N_t \mu S_t + (X_t - N_t S_t) r)] + dW_t \cdot e^{-rt} \cdot N \cdot \sigma \cdot S_t =$

$= dt \cdot e^{-rt} \cdot N_t \cdot S_t (\mu - r) + e^{-rt} N_t S_t \cdot \sigma dW_t =$

$= e^{-rt} N_t S_t \sigma \left(dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right)$

W_t - броуновское дв.е

$d(e^{-rt} X_t) = e^{-rt} N_t S_t \sigma d\tilde{W}_t$

$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t$

$d\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot dt + 1 \cdot dW_t$

Относительно некоторой вероятности $\tilde{P}$

$Z_t = e^{-rt} \cdot X_t = Z_0 + \int_0^t e^{-ru} \cdot N_u \cdot S_u \sigma d\tilde{W}_u$ — мартингал

$E_{\tilde{P}} (Z_t | Z_0) = Z_0$

$X_0 = e^{-rt} \cdot E_{\tilde{P}} (X_t | X_0)$

$E_{\tilde{P}} (e^{-rt} \cdot X_t | X_0) = X_0$

$E_{\tilde{P}} (Z_t | Z_0) = Z_0$

(1) $X_0 = e^{-rt} \cdot E_{\tilde{P}} (X_t | X_0)$

$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma W_t}$

$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

$W_t = \tilde{W}_t + \frac{r - \mu}{\sigma} t$

(2) $S_t = S_0 \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma \tilde{W}_t}$

Пример.

$X_T = \ln S_t$

$X_0 = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}} (\ln S_T | X_0) = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}} \left(\ln \left(S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma \tilde{W}_T} \right) \Big| X_0 \right) =$

$= e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}} \left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \tilde{W}_T \right) = e^{-rT} \cdot \left(\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)$

Пример

$X_T = \begin{cases} 1, \text{ если } S_T \geqslant 100 \\ 0, \text{ если } S_T < 100 \end{cases}$

$X_0 = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}} (X_T) = e^{-rT} \cdot \tilde{P} (S_T \geqslant 100) = e^{-rT} \cdot \tilde{P} \left(S_0 \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma \tilde{W}_t} \geqslant 100 \right)$

$$S_0 \cdot e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma \tilde{W}_T} \geqslant 100$$

$$\ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \tilde{W}_t \geqslant \ln 100$$

$$\tilde{W}_T \geqslant \boxed{\frac{\ln 100 - \ln S_0 - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}} = a$$

$$\tilde{P}(\tilde{W}_t \geqslant a) = \tilde{P}(\tilde{W}_t \leqslant -a) = \tilde{P}\left(\frac{\tilde{W}_T}{\sqrt{T}} \leqslant -\frac{a}{\sqrt{T}}\right) = \underbrace{\tilde{P}\left(N(0;1) \leqslant \frac{-a}{\sqrt{T}}\right)}_{\text{Ответ}}$$

ДЗ

$$E\left(e^{\sigma W_t}\right) = e^{\frac{\sigma^2}{2}\cdot t} \quad \leftarrow \text{Доказать}$$

$$Y_t = e^{\sigma W_t} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}\cdot t}$$

* Найдите dY_t
* Мартингал ли это?
* Y_0?

* знаем, что у мартингал $E(Y_t) = Y_0$
  Найдите $E\left(e^{\sigma W_t}\right) = ?$

Упр.

$$X_T = \frac{1}{S_T}$$

$$X_0 = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\frac{1}{S_T}\right) = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\frac{1}{S_0 \cdot \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \tilde{W}_T\right)}\right) =$$

$$= e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\exp\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\cdot T - \sigma \tilde{W}_T\right) =$$

$$= e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot E_{\tilde{P}}\left(e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)T} \cdot e^{-\sigma \tilde{W}_T}\right) =$$

$$= e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)T + T\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{S_0} \cdot e^{T\sigma^2 - 2rT}} \quad \text{Ответ}$$