

Конспект лекции 22.11.16

Марданов Тимур

Упражнение 8. Пошла Маша в лес и собрала 100 грибов: L лисичек, R рыжиков и M мухоморов.Пусть p_L, p_R, p_M - вероятности найти гриб определенного типа, такие что
$$\begin{cases} p_L, p_R, p_M > 0 \\ p_L + p_R + p_M = 1 \end{cases}.$$

Пусть также расположение каждого гриба не зависит от расположения других.

Найдите:

1. $E(R + L | M), E(M | R + L)$;
2. $E(R | L)$;
3. $Var(R | L)$;
4. $E(R + L | L + M)$;
5. $P(E(R | L)) = 0$;
6. $P(R = 0 | L)$;
7. $E((\frac{p_M}{p_R + p_L})^{100-L})$;
8. $P(R = 7 | L)$.

Решение:

1. Если известно, что Маша собрала M мухоморов, то очевидно, что она собрала $100 - M$ лисичек и рыжиков. $E(R + L | M) = 100 - M$. Аналогично $E(M | R + L) = 100 - R - L$.
2. Если Маша собрала L лисичек, то тогда $R \in \{0, 1, \dots, 100 - L\}$. Заметим, что случайная величина R имеет биномиальное распределение $R \sim Bin(n = 100, p = p_R) \rightarrow (R | L) \sim Bin(n = 100 - L, p = \frac{p_R}{p_R + p_M})$.
Матожидание биномиального распределения $E(R) = np$. Тогда $E(R | L) = (100 - L)(\frac{p_R}{p_R + p_M})$.
3. Дисперсия биномиального распределения $Var(R) = np(1 - p)$.
Тогда $Var(R | L) = (100 - L)(\frac{p_R}{p_R + p_M})(1 - \frac{p_R}{p_R + p_M})$.
4. $E(R + L | L + M) = E(R | L + M) + E(L | L + M) = (100 - (L + M)) + ((L + M)\frac{p_L}{p_L + p_M})$. Здесь главное заметить, что $L | L + M$ имеет биномиальное распределение.
5. Необходимо просто подставить ответ из пункта 2)
 $P(E(R | L) = 0) = P((100 - L)(\frac{p_R}{p_R + p_M}) = 0) = P(L = 100) = p_L^{100}$.
6. Иногда для нахождения общего решения удобно подставлять конкретные значения вместо случайных величин и находить частное решение. Попробуем найти не $P(R = 0 | L)$, а $P(R = 0 | L = 7) = P(M = 93 | L = 7) = (\frac{p_M}{p_M + p_R})^{93}$. Тогда $P(R = 0 | L) = (\frac{p_M}{p_M + p_R})^{100-L}$.
7. $E((\frac{p_M}{p_M + p_R})^{100-L}) = E(P(R = 0 | L)) = \{E(E(X | \mathcal{F})) = E(X)\} = P(R = 0) = (1 - p_R)^{100}$.
8. Вспомнив формулу для биномиального распределения $P(R = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$ и результаты пункта 2), получим
$$P(R = 7 | L) = \begin{cases} 0 & \text{if } L > 93 \\ C_{100-L}^7 (\frac{p_R}{p_R + p_M})^7 (1 - \frac{p_R}{p_R + p_M})^{100-L-7} & \text{if } L \leq 93 \end{cases}$$

Упражнение 9 (8.58 из задачника). $x_1, \dots, x_{100} \sim \mathcal{U}[0; 1]$ и независимые. $L = \max\{x_1, \dots, x_{80}\}; R = \max\{x_{81}, \dots, x_{100}\}; M = \max\{L, R\}$.

Найдите:

1. $P(L > R | L)$;
2. $E(x_1 | L)$;

$$3. E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid M);$$

$$4. E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid x_1).$$

Решение:

$$\begin{aligned} 1. \text{Предположим } L = 0.7. \text{ Тогда } P(L > R \mid L = 0.7) &= P(0.7 > R \mid L = 0.7) = \{R \text{ и } L - \text{независимы}\} = \\ &= P(R < 0.7) = P(x_{81} < 0.7, \dots, x_{100} < 0.7) = \\ &= \{x_i - \text{независимы}\} = P(x_{81} < 0.7) * \dots * P(x_{100} < 0.7) = 0.7^{20} \rightarrow P(L > R \mid L) = L^{20} \\ (*) E(L^{20}) &= E(P(L > R \mid L)) = \{E(E(X \mid \mathcal{F})) = E(X)\} = P(L > R) = \frac{80}{100}. \end{aligned}$$

$$2. \text{Попробуем сначала найти } E(x_1 \mid \max \{x_1, x_2, x_3\} = 0.7) = p_{x_1=\max} 0.7 + p_{x_1 \neq \max} E(x_1) = \frac{1}{3} 0.7 + \frac{2}{3} 0.35.$$

$$\text{Тогда } E(x_1 \mid L) = \frac{1}{80} L + \frac{79}{80} \frac{L}{2}.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{Попробуем сначала найти } E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid M = 0.7) &= \{y \sim \mathcal{U}[0; 0.7]\} = E(\min \{y_1, \dots, y_{99}\}). \\ \text{Проведём мысленный эксперимент: возьмём отрезок } [0, 0.7] \text{ и отметим на нём 99 точек случайным} \\ \text{образом. Так мы поделим отрезок на 100 маленьких отрезков. И хотя их длина различна, в} \\ \text{среднем она равна } \frac{0.7}{100}. \text{ А величина, которую мы ищем, равна расстоянию от нуля до первой точки} \\ = \text{средняя длина маленького отрезка. Тогда } E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid M = 0.7) = \frac{0.7}{100}, \text{ а в общем} \\ \text{случае } E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid M) = \frac{M}{100}. \end{aligned}$$

$$4. E(\min \{x_1, \dots, x_{100}\} \mid x_1) = p_{x_1=\min} x_1 + p_{x_1 \neq \min} E(\min \{x_2, \dots, x_{100}\}) = \frac{1}{100} x_1 + \frac{99}{100} \frac{1}{100}.$$

Мартингалы

Определение. Фильтрация (\mathcal{F}_n) — последовательность σ -алгебр таких, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n$. Иногда фильтрацию называют потоком σ -алгебр.

Определение. Случайный процесс (X_n) — последовательность случайных величин X_n .

Определение. Случайный процесс (X_n) адаптирован к фильтрации (\mathcal{F}_n) , если $\forall n$ величина X_n является \mathcal{F}_n -измеримой.

Определение. Случайный процесс (X_n) — мартингал по отношению к фильтрации (\mathcal{F}_n) , если

1. $E(X_n)$ - существует $\forall n$;
2. (X_n) адаптирован к фильтрации (\mathcal{F}_n) ;
3. $\forall n E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ (лучший прогноз на завтра - сегодняшнее значение).

Пример 1. Имеется колода из 52 карт. Достаем по очереди одну карту. $X_n \equiv$ доля тузов в неоткрытой части колоды после открытия n карт. Тогда:

X_0	$\frac{4}{52}$	X_1	$\frac{3}{51}$	$\frac{4}{51}$	X_{51}	1	0
Р	1	Р	$\frac{4}{52}$	$\frac{48}{52}$	Р	$\frac{48}{52}$	$\frac{4}{52}$

Является ли X_n мартингалом? Первые два условия выполняются. Проверим третье:

	сейчас	следующий момент
извлечено карт	n	$n + 1$
осталось карт	$52 - n$	$51 - n$
доля тузов в колоде	X_n	X_{n+1}
штук тузов в колоде	$X_n(52 - n)$	$X_{n+1}(51 - n)$
тузов открыто	$4 - X_n(52 - n)$	$4 - X_{n+1}(51 - n)$

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \{X_n - \text{условная вероятность извлечь туза}\} = X_n \left(\frac{X_n(52-n)-1}{51-n} \right) + (1-X_n) \left(\frac{X_n(52-n)}{51-n} \right) = \\ &= \frac{X_n(52-n)(X_{n+1}-X_n)-X_n}{51-n} = X_n \rightarrow X_n - \text{мартингал.} \end{aligned}$$

Пример 2. $\mathcal{F}_n = \sigma(z_1, \dots, z_n)$; z_i – случайные величины, независимые и одинаково распределённые. $P(z_i = -1) = P(z_i = 1) = \frac{1}{2}$. Являются ли мартингалами следующие случайные процессы?

1. (z_n) ;
2. (X_n) , $X_n = \sum_{i=1}^n z_i$;
3. (R_n) , $R_n = X_n^2$;
4. (L_n) , $L_n = X_n^2 - n$.

Решение: все процессы адаптированы к (\mathcal{F}_n)

1. $E(z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(z_{n+1} | z_1, \dots, z_n) = \{z_i - \text{независимы}\} = E(z_{n+1}) = 0 \neq z_n = 1 \text{ or } -1 \rightarrow (z_n) - \text{не мартингал.}$
2. $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(\sum_{i=1}^{n+1} z_i | z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i + E(z_{n+1} | z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i = X_n \rightarrow (X_n) - \text{мартингал.}$
3. $E(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 | z_1, \dots, z_n) = \{X_{n+1} = X_n + z_{n+1}\} = E((X_n + z_{n+1})^2 | z_1, \dots, z_n) = E(X_n^2 | z_1, \dots, z_n) + E(2X_n z_{n+1} | z_1, \dots, z_n) + E(z_{n+1}^2 | z_1, \dots, z_n) = X_n^2 + 0 + 1 \neq R_n \rightarrow (R_n) - \text{не мартингал.}$
4. $E(L_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2 - (n+1) | z_1, \dots, z_n) = E(X_{n+1}^2 | z_1, \dots, z_n) - E((n+1) | z_1, \dots, z_n) = E(R_{n+1} | z_1, \dots, z_n) - n - 1 = X_n^2 + 1 - n - 1 = X_n^2 - n = L_n \rightarrow (L_n) - \text{мартингал.}$

Свойства мартингалов

Если (X_n) – мартингал, то:

1. $E(X_n) = \text{const}$
Доказательство: $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \rightarrow E(E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = E(X_n) \rightarrow E(X_{n+1}) = E(X_n)$ для $\forall n$.
2. $E(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$ для $\forall k \geq 1$
Доказательство:
 - Случай $k = 1$: $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$
 - Предположим $E(X_{n+i} | \mathcal{F}_n) = X_n$: $E(X_{n+i+1} | \mathcal{F}_n) = \{ \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+i} \} = E(E(X_{n+i+1} | \mathcal{F}_{n+i}) | \mathcal{F}_n) = \{E(X_{n+i+1} | \mathcal{F}_{n+i}) = X_{n+i}\} = E(X_{n+i} | \mathcal{F}_n) = X_n$.

Определение. Случайная величина τ называется моментом остановки (stopping time) по отношению к фильтрации (\mathcal{F}_n) , если:

1. $\tau \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{+\infty\}$.
2. $\forall n$ индивид, различающий события из \mathcal{F}_n , способен понять: наступил момент τ или нет. Формально: событие $\{\tau \leq n\}$ лежит в σ -алгебре \mathcal{F}_n .

Пример: внук играет с кошкой во дворе. Предположим, что у внука есть часы и он знает, убежала ли кошка и во сколько. Бабушка может установить следующие правила, когда нужно идти домой:

1. τ_1 = вернуться через час после того, как кошка убежит.
2. τ_2 = вернуться за час до того, как кошка убежит.

Величина τ_1 является моментом остановки, так как внук всегда может сказать, когда убежала кошка и сколько времени прошло.

Величина τ_2 не является моментом остановки, так как внук не может сказать, когда убежит кошка, не заглядывая в будущее.

Теорема об остановке мартингала (теорема Дуба или stopping time theorem). Если (X_n) – мартингал по отношению к (\mathcal{F}_n) ; τ – момент остановки по отношению к (\mathcal{F}_n) и выполнено хотя бы одно из условий 1-3, то $E(X_\tau) = E(X_1)$

Условия:

1. Существует число m такое, что $\tau < m$.
2. $P(\tau = +\infty) = 0$ и при это существует такое число m , что $|X_{\min\{n, \tau\}}| < m$
3. $E(\tau) < \infty$ и существует такое число m , что $E(|X_{\min\{n+1, \tau\}} - X_{\min\{n, \tau\}}| | \mathcal{F}_n) < m$