

Конспект лекции 17.11.16

Фомина Александра

Мотивация. σ -алгебра - это способ описать наделенность информации: есть рациональный агент и список событий, про которые агент *точно* знает, произошли они или нет.

Упражнение 1. Подбрасывают кубик два раза. Случайная величина X_1 - сколько выпало в первый раз, случайная величина X_2 - сколько выпало во второй раз. Винни Пух знает результаты обоих подбрасываний. Джеймс Бонд знает результат только второго подбрасывания. Если \mathcal{F}_W и \mathcal{F}_J - это списки событий, которые точно различают Винни Пух и Джеймс Бонд соответственно, то

1. $\mathcal{F}_J \subset \mathcal{F}_W$;
2. Примеры события A , $A \in \mathcal{F}_W$, $A \notin \mathcal{F}_J$: $A = \{X_1 = 4\} \in \mathcal{F}_W$, $A = \{X_1 = 4\} \notin \mathcal{F}_J$;
Примеры события B , $B \in \mathcal{F}_W$, $B \in \mathcal{F}_J$: $B = \{X_2 > 4\} \in \mathcal{F}_W$, $B = \{X_2 > 4\} \in \mathcal{F}_J$.

Упражнение 2. Тот же эксперимент, что и в Упражнении 1, те же \mathcal{F}_W и \mathcal{F}_J . Какова мощность множества (cardinality) \mathcal{F}_W и \mathcal{F}_J ?

Пусть Ω - множество исходов. Тогда $\Omega = 36$, т.к. всего 36 элементарных события, которые нельзя разбить на более мелкие события.

$X_1 \setminus X_2$	1	2	...
1	(1,1)	(1,2)	...
2	(2,1)	(2,2)	...
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Большие события получаются путем объединения маленьких событий. Например:

$$\{X = 4\} = \{X_1 = 4, X_2 = 1\} \cup \{X_1 = 4, X_2 = 2\} \cup \{X_1 = 4, X_2 = 3\} \cup \dots$$

$X_1 \setminus X_2$	1	2	3	4	5	6
1	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-
4	+	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-

Так как всего в таблице 36 клеток, в каждой из которых может стоять либо "+" либо "-", то всего может быть 2^{36} вариантов. Следовательно, $\text{card } \mathcal{F}_W = 2^{36}$.

Для Джеймса Бонда $\{X_2 = 4\}$ не разбивается на более элементарные события \Rightarrow у него 6 элементарных события, то есть $\text{card } \mathcal{F}_J = 2^6$.

- Если агент знает, что $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$, то он знает, что $A^c \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$.

- \emptyset не происходит никогда, Ω происходит всегда $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$.

Определение. \mathcal{F} - σ -алгебра, если

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;
2. если взять счётное (countable) количество событий из \mathcal{F} и выполнить любые операции $(\cdot \cup \cdot, \cdot \cap \cdot, \cdot \setminus \cdot, \cdot^c)$, то в результате получится событие из списка \mathcal{F} .

Альтернативное определение. \mathcal{F} - σ -алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

2. если $A \in \mathcal{F}$, то и $A^c \in \mathcal{F}$;
 3. если $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Определение. $\sigma(B, C)$ – минимальная σ -алгебра, содержащая события B и C .

Упражнение 3. $\Omega = \mathbb{R}$, $A = [-10; -5]$, $B = [-7; 0)$. Найти: $\sigma(A)$, $\sigma(A, B)$.

$$\sigma(A) = \{\emptyset, \mathbb{R}, [-10; -5], (-\infty; -10) \cup (-5; +\infty)\}$$

$$\begin{aligned} \sigma(A, B) = \{ & \emptyset, \mathbb{R}, [-10; -5], [-7; 0), [-10; 0), (-\infty; -10) \cup (-5; +\infty), (-\infty; -7) \cup [0; +\infty), (-\infty; -10) \cup [0; +\infty), \\ & [-7; -5], (-\infty, -7) \cup (-5; +\infty), [-10; -7], (-\infty; -10) \cup (-7; +\infty), [-5, 0), (-\infty; -5) \cup [0; +\infty), \\ & (-\infty; -10) \cup (-7; -5) \cup [0; +\infty), (-10, -7) \cup (-5; 0] \} \end{aligned}$$

Так как -10 , -7 , -5 и 0 делят числовую прямую на 4 "куска", то в $\sigma(A, B)$ всего 2^4 элементов.

Случайные величины

Определение (интуитивное). Случайная величина X называется измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{F} , если информации в \mathcal{F} достаточно, чтобы определить, чему равно X .

Определение (формальное). Случайная величина X называется измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{F} , если $\forall t$ событие $\{X \leq t \in \mathcal{F}\}$.

Упражнение 4.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

$$\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega, \{a, d\}, \{b, c\}\}$$

а) Является ли X измеримой случайно величиной относительно \mathcal{F} ? Нет, так как, если произошло а, мы не можем отличить а от с, потому что у них разные значения. Значит, мы не знаем, чему равна X .

б) Является ли Y измеримой случайно величиной относительно \mathcal{F} ? Нет.

с) Является ли X измеримой случайно величиной относительно \mathcal{H} ? Нет.

д) Является ли Y измеримой случайно величиной относительно \mathcal{F} ? Да.

Обозначение. X , Y – случайные величины. Тогда $\sigma(X, Y)$ – минимальная σ -алгебра, содержащая все события вида $\{X \leq t\}$ и $\{Y \leq t\}$.

Упражнение 5.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1
W	7	1	2	2

а) Найти явно $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

б) Определить, сколько событий входит в $\sigma(X, Y)$.

Если мы знаем X и Y , мы знаем, что произошло: а, b, c или d. Следовательно, $\text{card } \sigma(X, Y) = 2^4$.

с) Найти явно $\sigma(W)$.

$$\sigma(W) = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

Определение (интуитивное). Условное матожидание:

1. $E(Y|\mathcal{F})$ – случайная величина;
2. $E(Y|\mathcal{F})$ – наилучший (с т. з. минимизации ожидаемого квадрата ошибки) прогноз Y , сделанный агентом, различающим события из \mathcal{F} .

Обозначение. $E(Y|X) = E(Y|\sigma(X))$

Упражнение 6. Кубик подбрасывается два раза. X_i – результат i -го подбрасывания. $\mathcal{F}_J = \sigma(X_2)$.

- а) Найти $E(X_2|\mathcal{F}_J)$. $E(X_2|\mathcal{F}_J) = X_2$;
- б) Найти $E(X_2^2|\mathcal{F}_J)$. $E(X_2^2|\mathcal{F}_J) = X_2^2$;
- с) Найти $E(X_1|X_2)$. Так как X_1 и X_2 независимы, то знание про X_2 бесполезно. Следовательно, $E(X_1|X_2) = E(X_1) = 3,5$;
- д) Найти $E(X_1 + X_2|X_2)$. $E(X_1 + X_2|X_2) = E(X_1|X_2) + E(X_2|X_2) = 3,5 + X_2$.

Свойства матожидания

Если X и Y – случайные величины, $E(X)$ и $E(Y)$ существуют, а a и b – константы, \mathcal{F} , \mathcal{H} – σ -алгебры, $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$:

1. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$.
2. Если X и \mathcal{F} независимы, то $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.
3. Если X измерима относительно \mathcal{F} и $g(\cdot)$ – кусочно-непрерывная функция, то $E(g(X)|\mathcal{F}) = g(X)$.
4. Если $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, то $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.
5. $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$.
6. Если $\mathcal{F} \leq \mathcal{H}$, то $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F})$ и $E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{F})$.
7. Неравенство Йенсен: если f – выпуклая, то $E(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(E(X|\mathcal{F}))$.

Дополнительные понятия:

Определение. A – событие, $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло} \end{cases}$ – индикатор A , $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$. Тогда $P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})$.

Определение. Условная дисперсия: $Var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - (E(X|\mathcal{F}))^2$.

Свойства условной дисперсии:

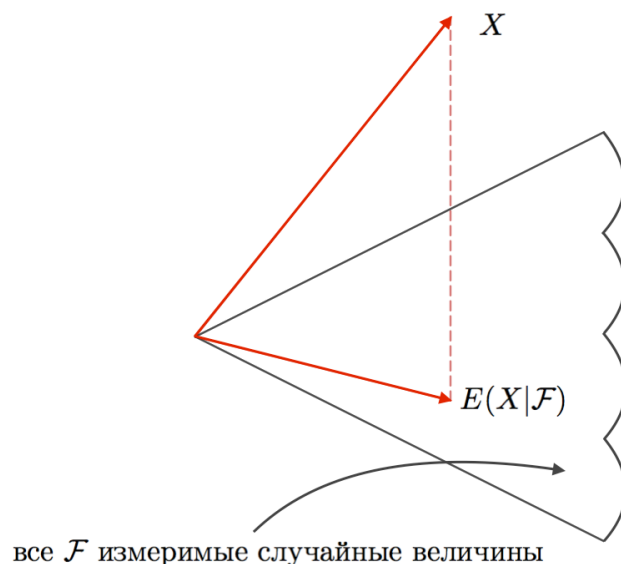
8. Если g – кусочно-непрерывная функция и X измерима относительно \mathcal{F} , то $Var(g(X)|\mathcal{F}) = 0$.
9. Теорема Пифагора: $Var(X) = Var(E(X|\mathcal{F})) + E(Var(X|\mathcal{F}))$.

Геометрический взгляд:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \text{9 класс} \\ \text{a, b – векторы} \end{array} & & \text{1 курс магистратуры} \\ \cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{|a| \cdot |b|} & \longrightarrow & \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = corr(X, Y) \end{array}$$

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle &\longleftrightarrow \text{Cov}(X, Y) \\ |a|^2 = \langle a, a \rangle &\longleftrightarrow \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \\ |a| &\longleftrightarrow \sigma_X\end{aligned}$$

Если $X \perp Y$ ($\text{Cov}(X, Y) = 0$), то $\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \text{Var}(X + Y)$ (т. Пифагора).



$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E(X|\mathcal{F})) + \text{Var}(X - E(X|\mathcal{F}))$$

Определение (формальное). Если $E(X)$ существует, то $E(X|\mathcal{F})$ – это случайная величина, которая

1. \mathcal{F} измерима;
2. $E(X) = E(E(X|\mathcal{F}))$;
3. $X - E(X|\mathcal{F}) \perp$ любой \mathcal{F} измеримой случайной величине, т.е. $\text{Cov}(X - E(X|\mathcal{F}), Z) = 0$ для любой случайной величины Z , являющейся \mathcal{F} измеримой.

Определение. Случайная величина W называется условным матожиданием $E(X|\mathcal{F})$ если

1. W является \mathcal{F} измеримой;
2. $E(X) = E(W)$;
3. $\text{Cov}(X - W, Z) = 0$ для любой \mathcal{F} измеримой Z .

Упражнение 7.

Ω	a	b	c	d
X	1	1	2	2
Y	1	3	3	1
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти $\text{Var}(X|\sigma(Y))$.

$$\text{Var}(X|\sigma(Y)) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2 = \begin{cases} \frac{17}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2, & \text{если } Y = 1 \\ \frac{14}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2, & \text{если } Y = 3 \end{cases} = \left(\frac{17}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2\right) \cdot \mathbb{1}_{Y=1} + \left(\frac{14}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2\right) \cdot \mathbb{1}_{Y=3}$$

$$E(X|Y = 1) = 1 \cdot \frac{0,1}{0,1+0,4} + 2 \cdot \frac{0,4}{0,1+0,4} = \frac{9}{5}$$

$$E(X|Y = 3) = \frac{8}{5}$$

$$E(X^2|Y = 1) = \frac{17}{5}$$

$$E(X^2|Y = 3) = \frac{14}{5}$$