

1. Рассмотрим множество последовательностей из произвольных натуральных чисел, обозначим его буквой A . Например, одним элементом A является последовательность $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Определим подмножество $B \subset A$, последовательностей в которых единица упомянута не больше 1 раза, двойка — не более двух раз, тройка — не более трёх и так далее. Определим подмножество $C \subset A$, последовательностей, в которых все числа кроме числа 2016 упоминаются конечное количество раз, а число 2016 может упоминаться любое количество раз.

Найдите $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card } C$

2. У Буратино есть три монетки: одна целиком зелёная, вторая — целиком красная и третья — с одной стороны зелёная, с другой — красная. Сначала Буратино подбрасывает цветную монетку. Если цветная монетка выпадает красной стороной, то Буратино подбрасывает красную монетку, если зелёной — то зелёную. Вероятности выпадения орла равны: 0.2 для красной, 0.4 для зелёной, 0.7 для цветной. Пусть X — индикатор того, выпал ли орёл на цветной монетке, а Y — индикатор того, выпал ли орёл при втором броске.

Найдите $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $\text{Var}(X|Y)$

3. Величины X_1, \dots, X_{100} независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{80}\}$ а $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \dots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \dots, X_{100}\}$

Найдите

(a) $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$

(b) $E(X_1|L)$, $E(X_1|\min\{X_1, \dots, X_{100}\})$

4. You throw a fair coin infinite number of times. Let's denote the result of the second toss by Y_2 (0 for tail and 1 for head) and the number of throws to get the first «head» by N . Find $E(Y_2|N)$, $\text{Var}(Y_2|N)$ and $E(N|Y_2)$
5. It is known that $E(Y|X) = 0$. Which of the following quantities must be zero: $E(Y)$? $E(X)$? $\text{Cov}(X, Y)$? $\text{Cov}(X^2, Y)$? $\text{Cov}(X, Y^2)$? Prove or provide a counter-example.
6. The random variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ are independent uniformly distributed on $[0; 1]$. I am summing them until the first X_i greater than 0.5 is added. After this term I stop. Let's denote by S the total sum and by N — the number of terms added. Find $E(S|N)$, $\text{Var}(S|N)$, $E(S)$