Лекция 6.12.16

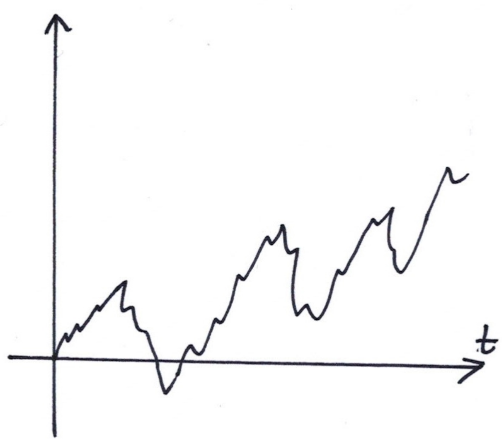
Демешев Б.Б.

Свойства Винеровского процесса, масштабирование, инверсия, стохастический интеграл.

Свойства винеровского процесса

Рассмотрим свойства Винероского процесса на примерах.

Рассмотрим Винеровский процесс W_t.



Упражнение 1

$X_t = -W_t$

Является ли X_t винеровским процессом?

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma((Y_s))_{s \leq t}$;

Проверим свойства винеровского процесса.

1) X(0)=0;

2) P(траектория X_t непрерывна)=1;

3) $X_t - X_s$не зависит от $\mathcal{F}_s$;

4) $X_t - X_s \sim N(0; t-s)$;

5) X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$

Упражнение 2

$Y_t = W_{8+t} - W_8$

Является ли Y_t винеровским процессом?

Естественная фильтрация: $\mathcal{F}_t = \sigma((Y_S))_{s \leq t}$;

Проверим свойства винеровского процесса.

1) Y(0) = 0;

2) P(траектория Y_t непрерывна)=1;

3) $Y_t - Y_s = W_{8+t} - W_8 - (W_{8+s} - W_8) = W_{8+t} - W_{8+s}$;
$\mathcal{H}_t = \sigma((W_s))_{s\leq t}$
$\mathcal{F}_t = \sigma((Y_s))_{s\leq t} = \sigma(W_{8+t} - W_8)_{s\leq t}$
$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{8+s}$
Сигма-алгебра $\mathcal{F}_{8+s}$ меньше, чем сигма-алгебра $\mathcal{F}_s$
4) $Y_t - Y_s = W_{8+t} - W_8 - (W_{8+s} - W_8) = W_{8+t} - W_8 - W_{8+s} + W_8 \sim N(0, t-s)$;
5) Y_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$

Независимоть величин

Случайные величины A и B независимы, если $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$;
Независимость сигма-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$
∀F∈F и ∀H∈H
$p(F \cap H) = p(F) \cdot p(H)$;
Независимость случайной величины X и сигма-алгебры $\mathcal{F}$:
$(X \leq t)$ и $\mathcal{F}$ - независимы;
$X = \sigma(x \leq t)$и $\mathcal{F}$ независимы;

Масштабирование

$Z_t = \alpha W_{2t}$
$F_t = \sigma((Z_s))_{s\leq t}$;
Найти α такое, чтобы Z_t был Винеровским процессом.
Проверим свойства:
1) Z(0)=0;
2) P(траектория Z_t непрерывна)=1;
3) $Z_t - Z_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ (независимость от прошлого);
4) Нормальность: $Z_t - Z_s = \alpha(W_{2t} - W_{2s}) \sim N(0; 2t - 2s)$; (Цель: $Z_t - Z_s \sim N(0; t-s)$);
$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
5) X_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$
Смысл свойства: сжатие по горизонтали в 2 раза, по вертикали в $\sqrt{2}$ раз.

Инверсия

$$R_t = \begin{cases} 1, & \text{при } t = 0 \\ f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}}, & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Найдите $f(t)$ такую, что R_t - Винеровский процесс
1) R(0)=0;
2) Траектория непрерывна;
$f(0) = 0$;
$f(t)$ непрерывна;
3) Нормальность распределения
$R_t \sim N(0; t)$
$R_t - R_s \sim N(0; t-s)$
$f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}} \sim N(0; \frac{1}{t})$
$var(f(t) \cdot W_{\frac{1}{t}}) = f^2(t) \cdot \frac{1}{t} = t$

$f^2(t) = t^2$

f(t)=t

4) Независимость от прошлого;

5) R_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$

Геометрическое понимание свойства: инвертирует всю историю и упаковывает ее в интервал [0;1];

$R_1 = W_1$

$R_2 = 2W_{\frac{1}{2}}$

$R_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}W_2$

Упражнение

$E(W_4|W_7) = \frac{4}{7}W_7$

Применим инверсию

$W_4 = 4R_{\frac{1}{4}}$

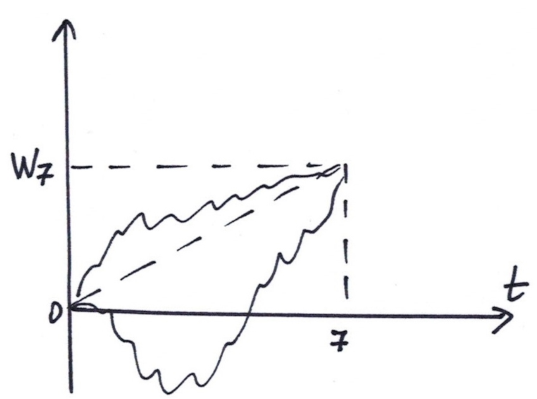
$W_7 = 7R_{\frac{1}{7}}$

$E(4R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}}) = 4E(R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}}) = 4R_{\frac{1}{7}} = \frac{4}{7}W_7$

$E(4R_{\frac{1}{4}}|7R_{\frac{1}{7}})$ - В данном случае мы можем не обращать внимание на семерку внутри условия. Зная величину, умноженную на 7, мы можем вычислить значение самой величины. Например, нам не важно, в каких единицах измерени мы знаем темпиратуру воздуха: мы понимаем истинное значение и в градусах Цельсия, и в градусах Фаренгейта.

Рассмотрим следующий пример:

Сравним дисперсии: $var(W_3|W_7)$ и $var(W_6|W_7)$. Какая дисперсия будет больше? Ближе к концу интервала дисперсия будет ниже ($var(W_6|W_7)$). Максимальная дисперсия: $var(W_{3,5}|W_6)$ (середина интервала).



Мы знаем, что в нуле значение было, нулевым, а также знаем значение в конце. Точность в середине интервала меньше (выше дисперсия).

Стохастический интергал

$$\int_a^b A_t dB_t$$

- прибыль инвестора за период времени от а до b;

B_t - цена акции
A_t - количество акций
Пример:
$\int_0^3 8dt = 8t|_0^3 = 24$
Изначальное богатство: $8 \cdot 0$
Конечное богатство: $8 \cdot 3$
Прибыль: конечное богатство-начальное богатство $= 24$.
Упражнение 1
W_t - Винеровский процесс;

$$X_t = \begin{cases} 7, & \text{при } t \in [0;2] \\ W_2, & \text{при } t \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{10} X_t dW_t$$

До второго момента:

$$\int_0^2 X_t dW_t$$

Стохастическая величина: изначальное богатство: 7 акций по W_0 ($W_0 = 0$);
Держали до второго момента, потом докупили или продали.
Докупили $(W_2 - 7)$ по цене W_2, потратили на это $W_2 \cdot (W_2 - 7)$.
Десятый момент времени: Конечное богатство $= W_2 \cdot W_{10}$;
Прибыль: Конечное богатство - Начальное богатство - Расходы на покупку.
$I = W_2 \cdot W_{10} - 7 \cdot 0 - W_2 \cdot (W_2 - 7) = W_2 \cdot W_{10} - W_2^2 + 7W_2$.
$E(W_2 \cdot W_{10}) = 2$;
$E(W_2^2) = 2$;
$E(7W_2) = 0$;
$E(I) = 0$.
Упражнение 2
Пусть $X_1; X_2; X_3 ... \to X$;
1) $X_1; X_2; X_3 ... X \in L^2$;
$E(X_1^2) < \infty$;
$E(X_L^2) < \infty$;
Множество случайных величин, у которых конечное ожидание квадрата.
2) $E((X_i - X)^2) \to 0$
$X_1 \sim N(5; 1)$;
$X_2 \sim N(5; \frac{1}{2})$;
$X_3 \sim N(5; \frac{1}{3})$;
$X_n \sim N(5; \frac{1}{n})$;
Сходится ли X_n к чему-то?
Догадка: X_n сходится к 5.
Проверка по определению:
$E((X_n - 5)^2) = var(X_n) = \frac{1}{n} \to 0$.
Доказали: сходится к константе 5.
Упражнение на дом:
W_t - Винеровский процесс;
$X_1 = W_{\frac{1}{n}} - W_0$;
$X_2 = W_{\frac{2}{n}} - W_{\frac{1}{n}}$;

Найти: $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to$? (в L2)