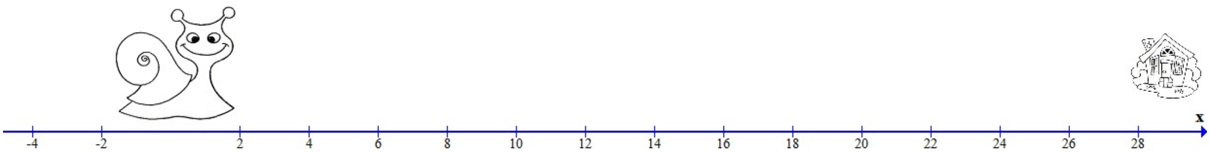
Конспект лекции 29.11.16

Интуиция (теорема об остановке мартингала): Если M_t (мартингал) $\equiv$ справедливая игра
То есть, если a) Правило входа из игры не "заглядывает"в будущее b) Ставки не растут слишком быстро (технические условия теоремы А,Б,В) то $E(M_\tau)$=$E(M_1)$, то есть ожидаемый выигрыш на момент выхода равен стартовому благосостоянию (невозможно повысить или понизить начальное благосостояние)

Упражнение 1: В начальный момент времени улитка находится в точке с координатой "0". Она



может передвигаться на один шаг вправо или влево в каждую следующую единицу времени. Ее передвижения ограничены: в точке с координатой "-5" находится пропасть, а в точке с координатой "30" – ее дом. Ходы улитки независимы друг от друга.
Введем процесс (X_t) – координата улитки в момент времени t и: 1. $X_0 = 0$; 2. $X_t = Z_1+Z_2+\cdots+Z_t$, где Z_i - случайная величина, отвечающая за перемещение улитки (влево или вправо соответственно) в момент i, распределение которой может быть представлено следующим образом: ($Z_i = -1$ – движение влево, $Z_i = 1$ – вправо)

Z_i	-1	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

a) (X_t) – мартингал?
Проверка по определению: $E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(X_t+Z_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t+E(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t+E(Z_{t+1}) = X_t + \frac{1}{2} \neq X_t$
Замечание: $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_t)$ и так как ходы независимы, то есть Z_{t+1} не зависит от $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$, то $E(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(Z_{t+1})$
Ответ: Нет

b) Найти такое b, что $Y_t = X_t - b*t$ будет мартингалом
По определению мартингала нужно получить: $E(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) = Y_t$
$E(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(X_{t+1} - b*(t+1)|\mathcal{F}_t) = X_t + \frac{1}{2} - b*t - b = Y_t + \frac{1}{2} - b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

c) Найти такое $c \neq 1$, что $R_t = c^{X_t}$ будет мартингалом
Аналогично предыдущему пункту:$E(R_{t+1}|\mathcal{F}_t) = R_t$

$E(R_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(c^{X_{t+1}}|\mathcal{F}_t) = E(c^{X_t+Z_{t+1}}|\mathcal{F}_t) = c^{X_t} * E(c^{Z_{t+1}|\mathcal{F}_t}) = c^{X_t} * E(c^{Z_{t+1}}) = c^{X_t} * (\frac{1}{4} * c^{-1} + \frac{3}{4} * c) = R_t = c^{X_t} \Rightarrow \frac{1}{4} * c^{-1} + \frac{3}{4} * c = 1 \Rightarrow 3 * c^2 - 4 * c + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{3}$

Ответ: $R_t = \frac{1}{3}^{X_t}$

d) $Pr($улитка дойдет до точки "30"$) = ?$

Введем момент остановки: $\tau = \min(t|X_t = 30$ или $X_t = -5)$

Для мартингала из пункта b) по теореме об остановке мартинагала: $E(Y_\tau) = E(Y_1) = E(X_1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

В то же время $E(Y_\tau) = E(X_\tau - \frac{1}{2} * \tau) = E(X_\tau) - \frac{1}{2} * E(\tau) = 0$

Аналогично для мартингала из пункта c): $E(R_\tau) = E(R_1) = E(\frac{1}{3}^{X_1}) = \frac{1}{4} * \frac{1}{3}^{-1} + \frac{3}{4} * \frac{1}{3} = 1$

В то же время $E(R_\tau) = E(\frac{1}{3}^{X_\tau}) = 1$

При этом X_τ – случайная величина, координата конечной точки улитки:

X_τ	30	-5
p	k	$1-k$

Где "k" – искомая вероятность

Таким образом, $E(R_\tau) = E(\frac{1}{3}^{X_\tau}) = k * \frac{1}{3}^{30} + (1-k) * \frac{1}{3}^{-5} = 1 \Rightarrow k * 3^{-30} + (1-k) * 3^5 = 1 \Rightarrow k * (3^5 - 3^{-30}) = 3^5 - 1 \Rightarrow k \approx 0.996$

Ответ: $Pr($улитка дойдет до точки "30"$) = 0.996$

e) Определить ожидаемое количество шагов до одной из конечных точек

Из предыдущего пункта знаем, что $E(X_\tau) - \frac{1}{2} * E(\tau) = 0 \Rightarrow E(X_\tau) = 30 * k - 5 * (1-k) = 30 * 0.996 - 5 * 0.004 = \frac{1}{2} * E(\tau) \Rightarrow E(\tau) = 2 * E(X_\tau) = 60 * 0.996 - 10 * 0.004 = 59.72$

Ответ: ожидаемое количество шагов до одной из конечных точек – 59.72

Упражнение 2 (Задача о мартышке): Мартышка нажимает кнопки на клавиатуре случайным образом, делая одно нажатие в секунду. Пусть τ – момент первого написания мартышкой слова "АБРАКАДАБРА". Найдите $E(\tau)$.

Решение: необходимо придумать мартингал.

Пусть существует "казино" в котором можно делать ставки на следующую букву, набранную мартышкой. Действуют следующие правила: 1. Если s – ставка, то в случае угадывания выигрыш составляет $33 * s$, в случае проигрыша $-s$; 2. Каждая следующая ставка равна всему предыдущему благосостоянию игрока (то есть все имеющиеся деньги ставятся на следующую букву); 3. В каждый момент времени в "казино"приходит один новый игрок со стартовым благосостоянием равным одному рублю.

Пусть (Y_t) – суммарное благосостояние всех игроков. $E(Y_1) = 1, E(Y_2) = 2, E(Y_3) = 3 \dots E(Y_t) = Y_t \Rightarrow$ можно получить мартингал из (Y_t): $(Z_t) = (Y_t - t)$ (проверка по определению)

Можем применить теорему об остановке мартингала: $E(Z_\tau) = E(Z_1) = 0,$ в то же время $E(Z_\tau) = E(Y_\tau - \tau) \Rightarrow E(Y_\tau - \tau) = 0 \Rightarrow E(Y_\tau) = E(\tau)$

Предположим теперь, что каждый игрок делает ставки последовательно на каждую букву слова

"АБРАКАДАБРА". Тогда в момент τ суммарное благосостояние всех игроков состоит из 1. благосостояния игрока который пришел в тот момент, когда мартышка начала писать слово и правильно угадал все 11 букв; 2. благосостояния игрока, который пришел в момент τ; 3. благосостояния игрока который пришел на восьмой букве слова и правильно угадал четыре буквы до момента τ. Все остальные игроки остались с 0 выигрышем. Таким образом, $Y_\tau = 33^{11} + 33^4 + 33 \Rightarrow E(Y_\tau) = Y_\tau = 33^{11} + 33^4 + 33 = 5.05 * \text{exp}^{16} = E(\tau)$
Ответ: $E(\tau) = 5.05 * \text{exp}^{16}$ (очень большое, но конечное значение)

Непрерывное время $t \in [0; +\infty)$
Определение Фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0;+\infty)}$ – упорядоченное множество σ-алгебр $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при $s \le t$
Определение Случайный процесс (X_t) – мартингал по отношению к фильтрации $(\mathcal{F}_t)$, если

1. Существует $E(X_t)\ \forall t$
2. X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой $\forall t$
3. $E(X_{t+\delta}|\mathcal{F}_t) = X_t\ \forall t,\ \delta \ge 0$

Определение (W_t) – винеровский процесс (или броуновское движение) по отношению к фильтрации $(\mathcal{F}_t)$, если

1. $W_0 = 0$
2. $Pr($траектория W_t непрерывна$) = 1$
3. Для двух моментов времени s и $t, s \ge 0, s < t, W_t - W_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$
4. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
5. W_t – измерима относительно $(\mathcal{F}_t)$

Альтернативное определение

1. $W_0 = 0$
2. $Pr($траектория W_t непрерывна$) = 1$
3. Случайные величины $W_{t_1} - W_{s_1}, W_{t_2} - W_{s_2} \dots$ – независимы
4. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

Упражнение 3 W_t – винеровский процесс. Найдите: 1. $E(W_t)$ 2. $E({W^2}_t)$ 3. $E({W^3}_t)$ 4. $E(W_t * W_s)$ 5. Cov$[W_t, W_s]$ 6. Corr$[W_t, W_s]$ 7. (W_t) – мартингал? 8. $({W^2}_t - t)$ – мартингал? 9. $Pr(W_7 > 9 * W_4)$ 10. $Pr(|W_{100}| > 20)$
Решение:

1. $E(W_t) = E(W_t - W_s) = E(W_t - W_0) = E(W_t - 0)$ (Примечание: поскольку s – произвольное, то выбираем его равным 0 и применяем свойства $1.$ и $4.$ из определения)

2. $E({W^2}_t) = \text{Var}(W_t) = t - s = t - 0 = t$

3. $E({W^3}_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^3 * f(w)dw = 0$

4. Для $s < t$: $E(W_t * W_s) = \text{Cov}[W_s + \delta, W_s] = \text{Cov}[W_s, W_s] + \text{Cov}[\delta, W_s] = \text{Var}(W_s) = s$ (Примечание: $\delta = W_t - W_s$, по свойству 3. определения $W_t - W_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$, а значит $\text{Cov}[\delta, W_s] = \text{Cov}[W_t - W_s, W_s] = 0$)
   Аналогично для $s > t$: $E(W_t * W_s) = t \Rightarrow$ в общем случае $E(W_t * W_s) = \text{min}[s, t]$

5. $\text{Cov}[W_t, W_s] = E(W_t * W_s) - E(W_t) * E(W_s) = \text{min}[s, t] - 0 * 0 = \text{min}[s, t]$

6. $\text{Corr}[W_t, W_s] = \frac{\text{Cov}[W_t, W_s]}{\sqrt{\text{Var}(W_s)} * \sqrt{\text{Var}(W_t)}} = \frac{\text{min}[s,t]}{\sqrt{t * s}}$

7. Проверка по определению: $E(W_{t+\delta}|\mathcal{F}_t) = E(W_{t+\delta} + W_t - W_t|\mathcal{F}_t) = W_t + E(W_{t+\delta} - W_t|\mathcal{F}_t) = W_t \Rightarrow (W_t)$ – мартингал. (Примечание: $E(W_{t+\delta} - W_t) = 0$ по свойству 4. определения)

8. Проверка по определению: $E({W^2}_{t+\delta} - t - \delta|\mathcal{F}_t) = -t - \delta + E({W^2}_{t+\delta}|\mathcal{F}_t) = -t - \delta + E((W_t + (W_{t+\delta} - W_t))^2|\mathcal{F}_t) = -t - \delta + {W^2}_t + 2W_t * E(W_{t+\delta} - W_t) + E((W_{t+\delta} - W_t)^2) = -t - \delta + {W^2}_t + \text{Var}(W_{t+\delta} - W_t) = {W^2}_t - t \Rightarrow\ ({W^2}_t - t)$ – мартингал

9. $Pr(W_7 > 9 * W_4) = Pr(W_7 - 9 * W_4 > 0) = Pr((W_7 - W_4) - 8 * W_4 > 0)$
   $W_7 - W_4 \sim \mathcal{N}(0, 3)$, $8 * W_4 \sim \mathcal{N}(0, 64 * 4) \Rightarrow \text{Var}((W_7 - W_4) - 8 * W_4) = 64 * 4 + 3 = 259 \Rightarrow (W_7 - W_4) - 8 * W_4 \sim \mathcal{N}(0, 259) \Rightarrow Pr((W_7 - W_4) - 8 * W_4 > 0) = \frac{1}{2}$

10. $Pr(|W_{100}| > 20) = Pr(\frac{|W_{100}|}{10} > 2)$
    $W_{100} \sim \mathcal{N}(0, 100) \Rightarrow \frac{|W_{100}|}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow= Pr(\frac{|W_{100}|}{10} > 2) \approx 0.05$