Финансовые инструменты:

- опционы (простые)
- опционы на погоду
- произвольный спор на тему того, какой будет цена актива

Глобальная цель: изучить модель, которая позволяет оценивать, сколько должен стоить опцион с фиксированной датой выплаты (европейский опцион)

Теория вероятностей случайных процессов

Математическое ожидание

- дискретное - конечное или счетное количество значений
- непрерывное - с функцией плотности; бесконечное несчетное количество решений

*конвенция: большая буква - случайная величина; маленькая буква - константа

Дискр.: X - сл. вел.

X	-1	0	2
P	0,1	0,2	0,7

$E(X) = -1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}7 = 1{,}3$

$E(X^2) = 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}7 = 2{,}9$

$E(X) = \sum x P(X=x)$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

мера разброса

Непрер.

ф-ция плот-ти - способ описать непрер. сл. вел.

Опр.: вер-ть того, что $P(X\in[a;b]) = \int_a^b f(x)\,dx$

Пример: X - сл. вел. с ф-цией пл-ти $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x\in[0;2] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$P(x\in[0;1]) = 1\cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(x\in[1;2]) = \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}$

Для непрер. сл. вел. $P(X=\sqrt{3})=0$

Теор. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$

X - сл.вел., $E(X)$ - const

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Теор. $E(h(X))=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx$

$Var(X)$ = аналогично дискретному сл.

Условное мат.ожидание: среднее значение X, если известно, что A произошло

$E(Y/A)$, где Y - сл.вел., A - событие

$E(Y/A)$ - сл.вел.

Опр.: наилучший прогноз Y при известном X (функция от X)

X	-1	0	2
P_X	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}7$
Y	1	0	4
A	0	1	1
$P(\ldots/A)$	0	$0{,}2/0{,}9$	$0{,}7/0{,}9$
$1_{z=1}$	0	0	1
Z	2	2	1

$Y=X^2$

A - событие, что $X\geq 0$: $A=\{X\geq 0\}$

$E(Y/A)=0\cdot 0{,}2/0{,}9+4\cdot 0{,}7/0{,}9$

$E(Y/X)=X^2$

$E(Z/A)=(1\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}7)/0{,}9=1$

Опр.: $E(Y/A)=E(Y\cdot 1_A)/P(A)$

Общие св-ва мат. ожид. :

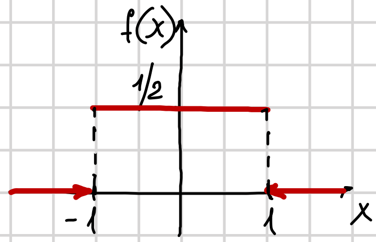
1. $E(f(x)/X) = f(x)$

Пр.: $E(X^2/X) = X^2$

2. Если X и Y незав., то $E(Y/X) = E(Y)$
3. $E(f(x)\cdot h(y)/X) = f(x)\cdot E(y/X)$
4. $E(\underbrace{E(Y/X)}_{\text{сл. вел.}}) = E(Y)$
5. $E(E(Y/X,Z)/X) = E(Y/X)$
6. $E(Y_1 + Y_2/X) = E(Y_1/X) + E(Y_2/X)$

   $E(aY/X) = aE(Y/X)$
7. $cov(Y, f(x)) = cov(\hat{Y}, f(x))$, для $\forall\ f(x)$

Упр.: $X \sim U[-1;1]$ равномерное



$E(X) = 0$

$E(X^2/X) = X^2$

$E(X/X^2) = \frac{1}{2}\sqrt{X^2} + \frac{1}{2}(-\sqrt{X^2}) = 0$

$E(X/X^3) = (X^3)^{1/3} = X$

Биномиальное распр.

Если X - количество успехов при n одинаковых и независимых испытаниях, каждое из которых оканчивается успехом с вероятностью P, то мы говорим, что X имеет биномиальное распределение Bin(n,p)

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $E(X) = n\cdot p$; $Var(X) = n\cdot p\cdot(1-p)$

Упр. Собираем 10 грибов

X - подбер. $p=0{,}3$

Y - мухоморы $p=0{,}5$

Z - лисички $p=0{,}2$

$E(X) = 10\cdot 0{,}3 = 3$

$E(X/Y) = (10-Y)\cdot 0{,}6$

$E(X+Y/Z) = 10-Z$

$E(X/X,Z) = X$

$E(X/X+Z) = (X+Z)\cdot 0{,}6$

$E(Y/X+Z) = 10-X-Z$

Упр.

Саша Маша (незав.

S,M	3	4	5
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$E(\max\{S,M\}/M) = *$

$E(M/\max\{S,M\}) = **$

$E(S+M/\max\{S,M\}, \min\{S,M\}) = \max\{S,M\} + \min\{S+M\}$

$E(\min\{S,M\}/\max\{S,M\}) =$

$E(S/M) = E(S) = 4$

$E(S+M/M) = E(S/M) + E(M/M) = E(S) + M = 4+M$

$E(M/S+M) = \frac{M+S}{2}$

$\max\{S,M\}$ \ M	3	4	5
3	$1/9$	0	0
4	$1/9$	$2/9$	0
5	$1/9$	$1/9$	$3/9$

$* \; E(\max/M=5) = 5$

$E(\max/M=4) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 = 4\frac{1}{3}$

$E(\max/M=3) = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 = 4$

$$E(\max\{S,M\}/M) = \begin{cases} 5, & \text{if } M=5 \\ 4\frac{1}{3}, & \text{if } M=4 \\ 4, & \text{if } M=3 \end{cases}$$

** $E(M/\max\{S,M\}=3)=3$

$E(M/\max\{S,M\}=4)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot 4$

$E(M/\max\{S,M\}=5)=\frac{1}{5}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 4+\frac{3}{5}\cdot 5$

Упр. X и Y

$E(X)=0,\ E(Y)=1$

$Var(X)=100,\ Var(Y)=81$

$cov(X,Y)=-30$

$E(Y/X)=\hat{Y}$

$E(X/Y)=\hat{X}$

$E(\hat{Y}^2)=50$

$E(\hat{X}^2)=60$

$Var(\hat{Y})=E(\hat{Y}^2)-(E(\hat{Y}))^2$

$cov(Y,f(X))=cov(\hat{Y},f(X))$

$Var(\hat{Y})=49$

$Var(\hat{X})=60$

$cov(\hat{Y};Y)=cov(\hat{Y},\hat{Y})=Var(\hat{Y})=49$

$cov(\hat{Y},X)=cov(Y,X)=-30$

$cov(\hat{X},Y)=cov(X,Y)=-30$

$cov(\hat{X},X)=cov(\hat{X},\hat{X})=Var(\hat{X})=60$

$Var(Y-\hat{Y})\underset{\text{т.П.}}{=}Var(Y)-Var(\hat{Y})=32$

$Var(X-\hat{X})=Var(X)-Var(\hat{X})=40$

$=Var(Y)+Var(\hat{Y})-2cov(Y,\hat{Y})=$

$=Var(Y)+Var(\hat{Y})-2cov(\hat{Y},\hat{Y})=$

$=Var(Y)+Var(\hat{Y})-2Var(\hat{Y})=$

$=Var(Y)-Var(\hat{Y})$

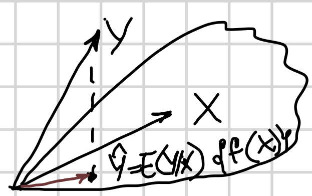
$E(Y-\hat{Y})=0$

$E(X-\hat{X})=0$

$E(Y)=E(\hat{Y})$

$\hat{Y}=E(Y/X)\{f(x)\}$

$Var(X)\leftarrow$ квадрат длины вектора



Упр.

пример X и Y, что

$cov(X,Y)=0$, но

$E(Y/X)\neq E(Y)$

Упр.

$X \sim U[0,1]$

$Y = X^2$

$A = \{X > \frac{1}{2}\}$

1. $E(Y/1_A)$
2. $E(Y/X) = X^2$
3. $E(1_A/Y)$

1. $\overbrace{E(Y/1_A)}^{\text{сл. вел.}} = \begin{cases} 7/12, & \text{if } 1_A = 1 \\ 1/12, & \text{if } 1_A = 0 \end{cases}$

$E(Y/1_A = 1) = \overbrace{E(Y/A)}^{\text{число}} = \frac{7/24}{1/2} = \frac{7}{12}$

сл.в.   событ

$P_A(A) = P(X > 1/2) = 0{,}5$

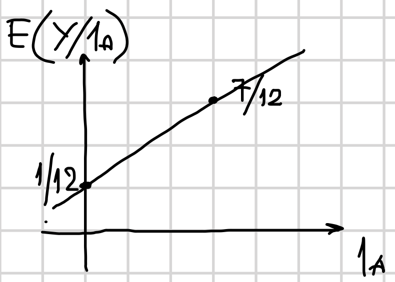
$E(X/A) = \frac{E(X\cdot 1_A)}{P(A)}$

$E(X\cdot 1_{X>1/2}) = \int_0^1 x\cdot 1_{X>0,5}\cdot f(x)\,dx$

$= \int_{0,5}^1 x\cdot 1_{X>0,5}\cdot 1dx = \int_{0,5}^1 xdx$

$E(Y/1_A=0) = E(Y/X<0{,}5) = \frac{E(X^2\cdot 1_{X<0,5})}{P(X<0{,}5)} = \frac{1/24}{1/2} = 1/2$

$E(X^2\cdot 1_{X<0,5}) = \int_0^{0,5} x^2\cdot 1\cdot dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,5} = 1/24$



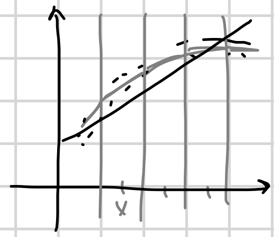
$E(Y/1_A) = \frac{1}{12} + \frac{6}{12}\cdot 1_A$

$E(Y/1_A) = E(X^2\cdot 1_{X>0,5}) = \int_{0,5}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0,5}^1 = \frac{7}{24}$

3. $E(1_A/Y) = \begin{cases} 1, & Y > 1/4 \\ 0, & 0 \le Y \le 1/4 \end{cases}$

$$\min_{\hat\beta_1,\hat\beta_2} \sum \left(y_i - \left(\hat\beta_1 + \hat\beta_i \cdot x_i\right)\right)^2$$

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ



REQURE (np) TOOLS – INSTALL PACKAGES np

REQURE (ggplot2)

X ← RUNIF (500, MIN = 0, MAX = 0)

E ← RNORM (500, MEAN = 0, SD = 4)

X [1.10]

y = X · COS (X) + E

qplot (X, Y)

d ← DATA. FRAME (X, Y, E)

HEAD (d)

M1 ← LM (y ~ X, DATA = d)

SUMMARY (M1)

M2 ← npREG (y ~ X, DATA = d) НЕПАРАМЕТР.

qplot (DATA = d, X, Y) + STAT_SMOOTH (METHOD = 'LM') + STAT_SMOOTH ( )

NEW ← DATA. FRAME (X = C (1, 2, 5))

NEW

PREDICT (M1, NEW, SE.FIT = TRUE)

PREDICT (M2, NEWDATA = NEW, SE.FIT = TRUE) СТ. ОШИБКА $\hat{y}$

$1{,}3 \pm 1{,}96 \times 0{,}45 \to 95\%$ УВЕР.

1) ПРОКЛЯТИЕ РАЗМЕРНОСТИ CURSE OF DIMENSIONALITY

2) ЕСЛИ МОДЕЛЬ В ДЕЙСТ. ЛИНЕЙНА, ТО $Var(\hat{y}_{лr}) < Var(\hat{y}_{np})$

Упр.

$Y = X\cdot\cos(x) + e$, где X и e незав $\leftarrow$ $\text{cov}(h(x), f(e)) = 0 \ \forall f$

$e \sim N(2014, 7^2)$

$E(Y/X)$ - ?

Теор. $\hat{Y}$ - это $E(Y/X)$, iff $Y = \hat{Y} + \varepsilon$ $\leftarrow E(Y/X)$

$E(\varepsilon) = 0$

$\text{cov}(\varepsilon, f(X)) = 0 \ \forall f$

$Y = [X\cdot\cos X + 2014] + (e - 2014)$

$\text{cov}(e - 2014, f(x)) = \text{cov}(e, f(x)) = 0$

$E(Y/X) = X\cdot\cos X + 2014$

Упр.

z_1, z_2, z_3 незав. сл. в.

$z_1 \sim N(2, 5)$

$z_2 \sim U(0, 10)$ $\quad$ $z_3 \sim N(-2; 7)$

$X = (z_1 + z_2)^2 + z_3$ $\quad$ $Y = (z_1 + z_2)^3 + z_3$

$E(X/z_2)$ - ? $\quad$ $E(Y/z_2)$ - ?

Разбить X в сумму $2^х$ объектов: I связан с z_2, II - нет $\leftarrow E(\text{II}) = 0$

$X = z_1^2 + 2z_2z_1 + z_2^2 + z_3$

$E(z_1^2 + 2z_2z_1 + z_2^2 + z_3 / z_2) = E(z_1^2/z_2) + \ldots = E(z_1^2) + 2z_2 \cdot E(z_1) + z_2^2 + E(z_3) =$

$= 9 + 2z_2\cdot 2 + z_2^2 - 2 = z_2^2 + 4z_2 + 7$

$\left[\underset{5}{\text{Var}(z_1)} = \underset{?}{E(z_1^2)} - (\underset{2}{E(z_1)})^2\right]$

$E(X/z_2) = z_2^2 + 4z_2 + 7$

$E(Y/z_2) = E(z_1^3) + 27z_2 + 6z_1^2 + z_2^3 - 2 = 38$

Мартингалы

Случайный процесс - упорядоченный набор случайных величин

В дискр. вр.: $X_1, X_2, X_3 \dots$

В непрер. вр.: $\{X_t\}$ $t \in [0, +\infty]$

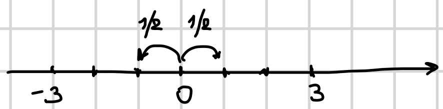
Процесс $\{X_t\}$ - это мартингал, если:

$$\text{дискр.}: E(X_{t+1} / X_1 \dots X_t) = X_t$$

$$\text{непрер.}: E(X_{t+s} \mid \text{все } X_r, r \in [0; t]) = X_t \qquad \forall s \geq 0$$

техническое замечание: $E(Y/X)$ определено только тогда, когда $E(Y)$ существует, то есть неявно предполагается, что $E(X_t)$ конечно $\forall t_i$

Пример 0. Симметричное случайное блуждание (symmetric random walk)



$X_0 = 0$

$X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1}$, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - незав.

Δ_{t+1}	-1	$+1$
$P(\dots)$	$1/2$	$1/2$

$$E(X_{t+1} / X_1 \dots X_t) = E(X_t + \Delta_{t+1} / X_1 \dots X_t) = X_t + E(\Delta_{t+1} / X_1 \dots X_t) =$$

$$= X_t + E(\Delta_{t+1} / \Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2, \dots, \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_t) = X_t + E(\Delta_{t+1}) = X_t$$

из табл. $-1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2$

Как сделать мартингал?

I. Если $E(X_{t+1} / X_1 \dots X_t) = X_t + m(t)$, то может помочь преобразование

$$M_t = X_t - E(X_t)$$

Пример. Несимм. блуждание

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1} \end{cases}$$

Δ_t	-1	$+1$
$P(\dots)$	$1/4$	$3/4$

$$E(X_{t+1} / X_1 \dots X_t) = \dots = X_t + E(\Delta_{t+1}) = X_t + 1/2$$

$$E(X_t) = E(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_t) = 1/2 + \ldots + 1/2 = t \cdot 1/2$$

$$M_t = X_t - \frac{t}{2}$$

$$E(M_{t+1} / M_1, M_2, \ldots, M_t)$$

$$M_{t+1} = X_{t+1} - \frac{t+1}{2} = X_t + \Delta_{t+1} - \frac{t+1}{2} = X_t + \Delta_{t+1} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = M_t + \Delta_{t+1} - \frac{1}{2}$$

$$= E(M_t + \Delta_{t+1} - 1/2 / M_1 \ldots M_t) = M_t - \frac{1}{2} + E(\Delta_{t+1} / M_1 \ldots M_t) = M_t - \frac{1}{2} + E(\Delta_{t+1}) =$$

$$= M_t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = M_t$$

II Мультипликативный мартингал

Иногда помогает преобразование: $M_t = a^{X_t}$ для нек. $a \neq 1$

$$M_t = e^{\alpha \cdot X_t}$$

Пр. X_t - несимм. сл. блужд.

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1} \end{cases}$$

Δ_t	-1	1
P	$1/4$	$3/4$

X_t - не мартингал, найти a, такой что M_t - март.

$$E(M_{t+1} / M_1 \ldots M_t) = M_t$$

$$E(a^{X_{t+1}} / M_1, \ldots, M_t) = M_t \longrightarrow E(a^{X_t + \Delta_{t+1}} / M_1 \ldots M_t) = M_t \longrightarrow$$

$$\rightarrow E(a^{X_t} \cdot a^{\Delta_{t+1}} / M_1 \ldots M_t) = M_t \rightarrow E(M_t \cdot a^{\Delta_{t+1}} / M_1 \ldots M_t) = M_t \rightarrow$$

$$\rightarrow M_t \cdot E(a^{\Delta_{t+1}} / M_1 \ldots M_t) = M_t$$

$$E(a^{\Delta_{t+1}} / M_1 \ldots M_t) = 1 \longrightarrow E(a^{\Delta_{t+1}}) = 1$$

Δ_{t+1} не зав. от $\Delta_1 \ldots \Delta_t$

$a^{\Delta_{t+1}}$	a^{-1}	a^{1}
Δ_{t+1}	-1	1
$P(\ldots)$	$1/4$	$3/4$

$$1 + 3a^2 = 4a$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1/3$$

$$M_t = 1^{X_t} = 1 \qquad M_t = \left(\frac{1}{3}\right)^{X_t}$$

Теорема (Дуб (Doob))

Опр. для дискр. | Случайная величина $\tau \in \{0, \dots\} \cup \{+\infty\}$ называется моментом остановки, если знание об $X_1, \dots, X_t$ достаточно для того, чтобы определить, что $\{\tau = t\}$

Если
1. X_t - мартингал
2. τ - момент остановки

[и техн. предп.]

то $\boxed{E(X_\tau) = X_0}$

Пример.

Вася играет в орлянку, ставка = 1₽

Пришел со 100₽

Решил уйти: $\tau = \min\{t \mid X_t = 1000₽, X_t = 0\}$, X_t - благосост. Васи

$P(X_\tau = 1000)$

X_τ	0	1000
$P(\dots)$	$1-p$	p

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \tau & 100 & 102 & 104 \\ P(\dots) & \frac{1}{2}^{100} & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

$0 \cdot (1-p) + 1000 \cdot p = 100$, $p = 0{,}1$

$1 - p = 0{,}9$

Упр. $X_0 = 100\$$ не мартингал $X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1}$

$\tau = \min\{t \mid X_t = 0$ или $X_t = 200\}$

ставит по \$ на красное

a^{Δ_t}	a^{-1}	a^{+1}
Δ_t	-1	$+1$
p	$19/37$	$18/37$

$P(X_\tau = 200)$?

$M_t = a^{X_t}$, найти a

$E(M_{t+1} / M_1 \dots M_t) = M_t$

$$E\left(a^{\xi_{t+1}}\right)=1$$

$$a^{-1}\cdot\frac{19}{37}+a^{1}\cdot\frac{18}{37}=1$$

$$19+18a^2=37a$$

$$a_1=1 \qquad a_2=\left\| a_2\cdot a_1=\frac{19}{18}\right\|=\frac{19}{18}$$

$$M_t=\left(\frac{19}{18}\right)^{X_t}$$ – МАРТИНГАЛ

$$E(M_\tau)=M_0=\left(\frac{19}{18}\right)^{X_0}=\left(\frac{19}{18}\right)^{100}$$

$$M_\tau=\left(\frac{19}{18}\right)^{X_\tau}$$

X_τ	0	200
p	$1-p$	p
M_τ	1	$\left(\frac{19}{18}\right)^{200}$

$$E(M_\tau)=1(1-p)+\left(\frac{19}{18}\right)^{200}\cdot p=\left(\frac{19}{18}\right)^{100}$$

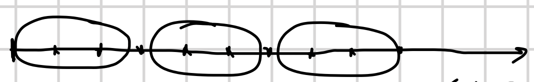
$$p=\frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{100}-1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{200}-1}=0{,}004466$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА „ОБЕЗЬЯНА ПЕЧАТАЕТ „ВОЙНУ И МИР""

Обезьяна наугад нажимает клавиши. Вопрос:1) какова вероятность того, что она рано или поздно напечатает ВиМ? 2) одно нажатие в секунду; τ - момент окончания написания ВиМ; найти $E(\tau)=?$

33 БУКВЫ + 1 ПРОБЕЛ

1) а) P(НИКОГДА НЕ НАПЕЧАЕТ СЛОВО "МИР")? = 0 (ЧИСЛО, МЕНЬШЕЕ 1, ВОЗВЕДЕННОЕ В ∞, РАВНО 0)



P(„МИР" С ПЕРВЫХ 3Х УДАРОВ) $=\left(1/34\right)^3=0{,}000025$

$$\left[1-\left(\frac{1}{34}\right)^3\right]$$

2) 2'517'633 СИМВОЛОВ

ν = ПЕРВЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ, КОГДА НАПИСАНО СЛОВО "АБРАКАДАБРА"

$$E(M_{t+1}/\ldots)=M_t$$

$$M_\nu=\ldots+\nu$$

$$E(M_\nu)=E(\ldots)+E(\nu)=M_0$$

Казино: на каждый удар по клавише нужно ставить всё свои деньги

$W_t \nearrow$ угадал $W_{t+1} = 34 \cdot W_t$

$\searrow$ не угадал $W_{t+1} = 0$

$W_{t_0} = \$1$

ДА!

W_t - мартингал? $E(W_{t+1} / W_1 \dots W_t) = W_t$

$$E(W_{t+1} / W_1 \dots W_t) = \frac{1}{34} \cdot 34 \cdot W_t + \frac{33}{34} \cdot 0 = W_t$$

В каждый момент времени к нам будет приходить 1 игрок

Y_t - суммарное благосост. всех игроков

$Y_t = W_{1,t} + W_{2,t} + W_{3,t} + \dots W_{t,t}$ - не мартингал

$$E(W_t) = 1$$

$E(Y_t) = t \cdot 1 = t$

$M_t = Y_t - t \leftarrow$ мартингал

по т. Дуба: $M_\tau = Y_\tau - \tau$

$$E(M_\tau) = M_0 = 0$$

$E(M_\tau)$ не зависит от стратегий игроков

$$E(M_\tau) = E(Y_\tau) - E\tau = 0$$

МБОНЖЙ_СН|АБРАКАД|АБР|А

34^{11} 34^4 34

$Y_\tau = 34^{11} + 34^4 + 34^1$ и $E(Y_\tau)$ - одно и то же

$E(\tau) \approx 2,2$ млрд. лет

$E(\tau_{ВиМ}) = 34^{2,5 \cdot 10^6}$

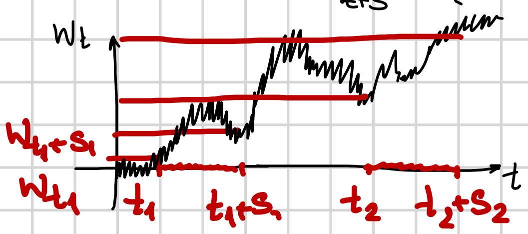
Почему $E(\tau_{АБОБ}) < E(\tau_{АБАБ})$?

34^4 $34^2 + 34^{11}$

Опр. Случайный процесс W_t наз. броун. движ. (винеровским пр.), если

1. $W_t = 0$
2. траектория процесса W_t непрер. с вер. 1
3. приращение $(W_{t+s} - W_t)$ на непересек. пром. вр. незав.
4. $W_{t+s} - W_t$ им. норм. распр. $\sim N(0; s)$ центр. пред. теор.

приращ. по вр.



Упр. Как распред.:

$W_3 - W_2 \sim N(0,1)$

$W_{0,5} - W_{0,3} \sim N(0, 0{,}2)$

$W_3 = W_3 - 0 = W_3 - W_0 \sim N(0, 3)$

$W_t \sim N(0, t)$

$W_1 + W_2 \sim N(0, 5)$

$7W_7 + 0{,}3W_{1,5} \sim N(0; \ldots)$

коэф. выносятся из Var в квадрате

$cov(W_1 - W_0, W_2 - W_1) = 0$

$cov(W_1, W_2 - W_1) = 0$

$cov(W_1, W_2) - cov(W_1, W_1) = 0$

$Cov(W_1, W_2) - Var(W_1) = 0$

$cov(W_1, W_2) = 1$

$E(W_1 + W_2) = 0$

$Var(W_1 + W_2) = Var(W_1) + Var(W_2) + 2\,cov(W_1, W_2) = 1 + 2 + 2 \cdot 1 = 5$

$t = c(0; 0{,}01; \ldots; 9{,}99; 10)$

вектор с шагом 0,01

построить график бр. дв.

```
t <- seq(from=0, to=10, by=0.01)
t[1:10]
```

$W_{0,01} - W_0 \sim N(0; 0{,}01)$

$delta\_w = (W_{0,01} - W_0; \ldots; W_{10,01} - W_{10})$ 1001 сл.в. $\sim N(0; 0{,}01)$

```
set.seed(3)
delta_w <- rnorm(1001, mean = 0, sd = 0,1)
```

сл. вел.

```
delta_w[1:20]
```

qplot(t, DELTA_W, GEOM = "LINE")

W <- CUMSUM(DELTA_W)

qplot(t, W, GEOM = "LINE")

Д/З Маша и Петя играют в шахматы

$P(\text{Маша выигр.}) = 0{,}8$

$P(\text{Петя выигр.}) = 0{,}1$

$P(\text{ничья}) = 0{,}1$

играют до преимущ. в 2 победы (не обяз. подряд)

$P(\text{Маша выигр. серию игр})$?

X_t – разница ("побед у М." – "побед у П.")

X_t – не мартингал

$X_{t+1} = X_t + \Delta_{t+1}$

Δ_t	$+1$	-1	0
	$0{,}8$	$0{,}1$	$0{,}1$

HINT: $M_t = a^{X_t}$ + т. Дуба = ОТВЕТ

$1 \cdot a^0 \cdot 0{,}1 + a^{-1} \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot a^1 = 1 \cdot a$

$8a^2 - 9a + 1 = 0, \quad a_1 = 1, \; a_2 = 0{,}125$

$X_t = П_М - П_П \qquad M_t = 0{,}125^{X_t}$

$X_0 = 0$

$X_1 = \Delta_1$

$X_2 = \Delta_1 + \Delta_2$

X_τ	2	-2
P	p	$1-p$

$X_0 = 0$

$M_\tau \quad (0{,}125)^2 \quad (0{,}125)^{-2}$

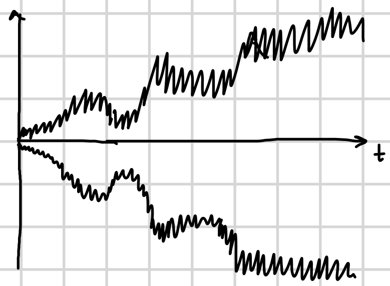
$E(M_\tau) = (0{,}125)^2 p + (0{,}125)^{-2} \cdot (1-p) = M_0 = 0{,}125$

$\frac{1}{64} p + 64(1-p) = 1$

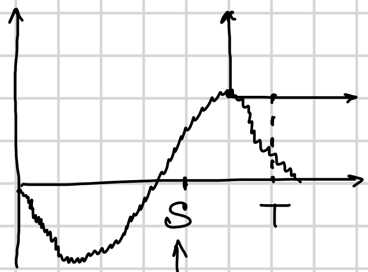
Свойства броуновского движения; преобразования

① W_t – станд. бр. движ.

Отр. относит. оси $Y_t = -1 \cdot W_t$ – тоже бр. дв.



② Начинаем отсчет времени с текущей точки



$$Y_t = W_{s+t} - W_s$$

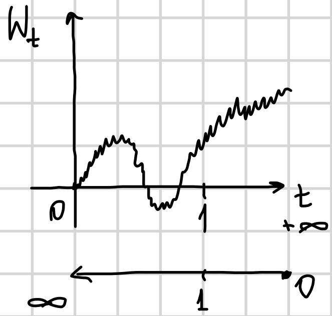
③ Смена масштаба

$$Y_t = a \cdot W_{t/a^2}$$

$$Var(a, Z) = a^2 \cdot Var(Z)$$

$$Y_t - Y_s = a \cdot W_{t/a^2} - aW_{s/a^2} = a\left(W_{t/a^2} - W_{s/a^2}\right) \sim N\left(0, t(a^2 - s(a^2)\right) = \sim N(0; t-s)$$

④ Инверсия



отложить время в обр. сторону

$$Y_t = \begin{cases} t \cdot W_{1/t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Опр. Условная дисперсия

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$Var(Y/X) = E(Y^2/X) - (E(Y/X))^2$$ – сл. вел., ф. от X

Св-ва: • $Var(aY + b \mid X) = a^2 Var(Y/X)$

• $Var(f(X)/X) = \underbrace{\| E(f^2(X)/X) - E(f(X)|X)^2 = f^2(X) - f^2(X) \|}_{=0}$

• $Var(Y/X) = Var(Y)$, если X и Y незав

Упр. $E(W_{10}/W_5) = E(W_5 + (W_{10}-W_5)/W_5) = W_5 + E(W_{10}-W_5/W_5) = W_5 + E(W_{10}-W_5) = W_5$

$Var(W_{10}/W_5) = Var(W_5 + (W_{10}-W_5/W_5)) = Var(W_{10}-W_5/W_5) = Var(W_{10}-W_5) = 5$

$E(W_5/W_{10}) = E(5\cdot Y_{1/5}/10\cdot Y_{1/10}) = 5E(Y_{0,2}/Y_{0,1}) = 5\cdot Y_{0,1} = 5\cdot 0,1\cdot W_{10} = 0,5W_{10}$

$Var(W_5/W_{10}) = Var(5Y_{0,2}/10Y_{0,1}) = 5^2\cdot Var(Y_{0,2}/Y_{0,1}) = 5^2\cdot 0,1 = 2,5$

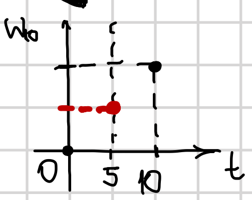
Трюк: записать в приращениях

инверсия: $Y_t = \begin{cases} t\cdot W_t, & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$

$Y_{1/5} = 1/5\cdot W_5$

$Y_{1/10} = 1/10\cdot W_{10}$

W, Y ~ броуновское дв.



Чудесные св-ва броуновского движения

① $P(W_t$ когда-нибудь достигнет заданной точки $a) = 1$

①+ $P(W_t$ ∞ кол-во раз посетит заданную точку $a) = 1$

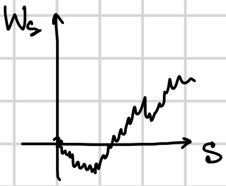
② – это ①+ + инверсия: $P(W_t$ ∞ кол-во раз пересечет 0 в интервале $[0; \varepsilon]) = 1$ $\forall \varepsilon$

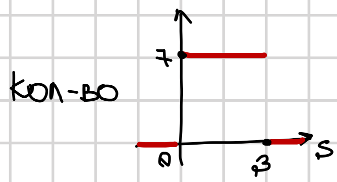
③ Траектория Винера не дифференцируема (в $\forall$ точке излом)

Стохастический интеграл

Неформ. опр.: $\int_0^t f(s,W_s)\,dW_s$ – прибыль за время $s\in[0;t]$, if Pr актива в момент s равна W_s, а кол-во $f(s,W_s)$

Пр. $\int_0^3 \underset{\text{\# акций}}{7}\cdot \underset{\text{Pr of share}}{dW_s} = -7W_0 + 7W_3 = 7W_3 \Big|$ Pr. акции





$\int_0^3 f(t)\,dW_t$, где $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t\in[0;1) \\ 2, & \text{if } t\in[1;2) \\ 3, & \text{if } t\in[2;3] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ $= -W_0 - W_1 - W_2 + 3W_3 = 3W_3 - W_1 - W_2$

Пр. $\int_0^3 f(t,W_t)\,dW_t$, где $f(t,W_t) = \begin{cases} 1, & t\in[0;1) \\ W_1^2, & t\in[1;2) \\ |W_1|, & t\in[2;3) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$= -1\cdot W_0 + \underbrace{(1-W_1^2)}_{\text{штук}}\cdot W_1 + (W_1^2 - |W_1|)\cdot W_2 + |W_1|\cdot W_2$

$\int_0^3 f(t,W_t)\,dW_t = -W_0 - 1\cdot W_2\cdot 1_{W_1<1} + 1\cdot W_3 + 1\cdot W_3\cdot 1_{W_1<1}$

$f(t,W_t) = \begin{cases} 1, & t\in[0;2) \\ 2, & W_1<1 \text{ и } t\in[2;3) \\ 1, & W_1\geq 1,\ t[2;3) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

Стохастич. инт. – сл. вел.

(Интеграл Ито)

Идея: описать сл. вел. на компьютере можно с помощью большой выборки

$X \sim N(2;15)$ ← вместо этого дали $X = (X_1, \dots, X_{10000})$

$P(X>2) = 1/2$

$E(X) = 2, \quad Var(X) = 15 = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = 19$

```
x <- rnorm(10000, mean=2, sd = sqrt(15))
x[1:20]
mean(x)
mean(x^2)
sum(x>2)/10^4
sum(x<5)/10^4
qplot(x)
```

Упр. $I = \int_0^1 W_t \cdot dW_t$ - сл.в. На комп. оцените $E(I)$, $Var(I)$, $P(I>0)$

ф. пл-ти

```
step <- 10^(-6)
t <- seq(from=0, to=1, by=step)
    II <- rep(0, 1000)
    for (j in 1:1000) {
deltaW <- rnorm(   n   , mean=0, sd=sqrt(step))
deltaW[1] <- 0    (начинаем с нуля)
W <- cumsum(deltaW)
```

deltaW	0	Δ_2	Δ_3	...
W	0	Δ_2	$\Delta_2 + \Delta_3$	
t	0	step	2step	

$I \approx \dots$

```
[ I[j] = sum(W[-n]*deltaW[-1])
}
I
```

14,36947

$E\left(\int_0^1 W_t\,dW_t\right) =$ MEAN (II)

VAR (II)

Св-ва стохастич. инт. Ито

① $E\left(\int_0^t f(s,W_s)\,dW_s\right)=0$

② $Var\left(\int_0^t f(s,W_s)\,dW_s\right)=\int_0^t E\left(f^2(s,W_s)\right)ds$ изометрия

③ $\int_0^t f_1(s,W_s)+f_2(s,W_s)\,dW_s = \int_0^t f_1(s,W_s)\,dW_s + \int_0^t f_2(s,W_s)\,dW_s$

④ $cov\left(\int_0^t f_1\,dW_s,\ \int_0^t f_2\,dW_s\right)=\int_0^t E(f_1\cdot f_2)\,ds$ изометрия

⑤ $I_t=\int_0^t f(s,W_s)\,dW_s$ – это мартингал

в част. $E(I_{t+s}/I_t)=I_t$

$$Var\left(\int_0^1 W_s\,dW_s\right)=\int_0^1 E(W_s^2)\,ds=\int_0^1 s\cdot ds=\frac{s^2}{2}\Big|_0^1=1/2$$

$$E(W_s^2)=Var(W_s)=Var(W_s-W_0)=s$$

Опр. Y_t – процесс Ито, if $\| Y_t=Y_0+\int_0^t f(s,W_s)\,ds+\int_0^t g(s,W_s)\,dW_s \|$

Y_0 – const, $\int_0^t f(s,W_s)\,ds$ – сл.в., $\int_0^t g(s,W_s)\,dW_s$ – сл.в.

Для процессов Ито сущ. краткая форма записи

$$\| dY_t = f(t,W_t)\,dt + g(t,W_t)\,dW_t \|$$

! как строгие мат. объекты dY_t, dW_t не сущ.

Лемма Ито в краткой форме: if $X_t=f(t,W_t)$ и $f(t,x)$ – ф., такая что f'_t и f''_{xx} – непрер., то $\| dX_t = f'_t\,dt + f'_x\,dW_t + \frac{1}{2} f''_{xx}\,dt \|$

Упр. $Y_t=W_t^2$

прим. л. Ито и восст. полн. запись

$dY_t = 0\cdot dt + 2W_t\cdot dW_t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot dt =$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t 2W_s\,dW_s + \int_0^t 1\cdot ds;$

$W_t^2 = W_0^2 + 2\int_0^t W_s\,dW_s + t$

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{W_t^2-W_0^2-t}{2}$$

Упр. Применить ф. Ито и выяснить, явл. ли Y_t март.

a) $Y_t = W_t^2 - t$ $\qquad f(t,x) = x^2 - t$; $dY_t = -1\cdot dt + 2\cdot W_t \cdot dW + \frac{1}{2}\cdot 2dt$

$dY_t = 2W_t dW$

$Y_t = Y_0 + \int_0^t 2W_s dW_s$ – мартингал

конст. $=0$

б) $Y_t = W_t^3$

в) $Y_t = e^{\sigma W_t}$

d) $Y_t = e^{t/2}\cdot \cos W_t$

e) $Y_t = -e^{-2\mu W_t + \mu^2 t}$

б) $f(t,x) = x^3$; $dY_t = 3W_t^2 dW_t + \frac{1}{2}\cdot 6W_t\cdot dt$

$Y_t = Y_0 + \underline{\underline{\int_0^t 3W_s ds}} + \int_0^t 3W_s^2 dW_s$ – не март.

Теорема Гирсанова

Если W_t – это станд. броун. дв. отн-но вер-ти P и $\tilde{W}_t = W_t + \mu\cdot t$, то сущ. вер-ть $\tilde{P}$, относит. кот. $\tilde{W}_t$ – броун. дв.

иллюстрация

X	-1	3	$E_P(X) = 1$
P	0.5	0.5	
$\tilde{P}$	0,75	0,25	$E_{\tilde{P}}(X) = 0$

W_t – бр. дв., $W_7 \sim N(0,7)$

$\tilde{W}_t = W_t + 2\cdot t$

$\tilde{W}_7 \underset{P}{\sim} N(14; 7)$ ← не бр. дв.

$\tilde{W}_7 \underset{\tilde{P}}{\sim} N(0; 7)$

Модель Блэка-Шоулза

	Цена		
Акции	S_t	$dS_t = \mu\cdot S_t\cdot dt + \sigma\cdot S_t\cdot dW_t$	$S_t = S_0\cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$
Безр.обл.	B_t	$dB_t = r\cdot B_t\cdot dt$	$B_t = e^{rt}\cdot B_0$

Лемма Ито - 2

Если $Y_t = f(t, X_t)$ и $dX_t = A_t dt + B_t dW_t$ и f'_t, f''_{xx} - непрер., то

$$dY_t = f'_t dt + f'_x dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx} \cdot B_t^2 \cdot dt$$

Пр. $Y_t = \ln S_t$

$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma S_t dW_t$

dY_t - ?

$$dY_t = 0 \cdot dt + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{S_t} \cdot (\mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu - \frac{\sigma^2}{2} ds + \int_0^t \sigma \cdot dW_s$$

$$Y_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot W_t$$

Хитрый актив

Актив, кот. в мом. вр. T (фикс.) выплачивает 1 руб., если $S_t \geq 100$ ₽ и 0 иначе

Цена: X_t $\quad X_0$?

$$X_T = \begin{cases} 1, & \text{if } S_t \geq 100 \\ 0, & \text{if } S_t < 100 \end{cases}$$

Трюк: Заменим хитрый актив на комбинацию акций и обл. так, чтобы этот замен. портфель был неотл. от хитрого актива

Портфель динам. меняется, N_t - #акций

X_t - ст-ть портф.

$\quad N_t$

$$\frac{X_t - N_t \cdot S_t}{B_t}$$

$$dX_t = N_t \cdot dS_t + \frac{X_t - N_t S_t}{B_t} \cdot dB_t$$

$$dX_t = N_t \cdot \mu \cdot S_t\,dt + N_t \cdot \sigma S_t \cdot dW_t + (X_t - N_t S_t) r\,dt$$

Найдите $d(e^{-rt} \cdot X_t)$

$Z_t = e^{-rt} \cdot X_t$ – дисконт. ст-ть портф.

$$dZ_t = \underset{f'_t}{-r \cdot e^{-rt} \cdot X_t\,dt} + \underset{f'_x}{e^{-rt} \cdot dX_t} + \underset{f''_{xx}}{\tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot \ldots} =$$

$$= -dt\left[-r \cdot e^{-rt} X_t + e^{-rt}\left(N_t \cdot \mu \cdot S_t + (X_t - N_t S_t) r\right)\right] + dW_t \cdot e^{-rt} \cdot N_t \cdot \sigma \cdot S_t =$$

$$= dt \cdot e^{-rt} \cdot N_t S_t \cdot (\mu - r) + e^{-rt} N_t S_t \cdot \sigma \cdot dW_t =$$

$$= e^{-rt} \cdot N_t \cdot S_t \cdot \sigma \cdot \left(dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt\right) = e^{-rt} \cdot N_t \cdot S_t \cdot \sigma \cdot d\tilde{W}_t$$

$d(e^{-rt} X_t) = e^{-rt} N_t S_t \sigma\,d\tilde{W}_t$ – мартингал

W_t – бр. дв.

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t$$

$$d\tilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma} dt + 1 \cdot dW_t$$

относит. нек. вер. $\tilde{P}$ процесс

$$Z_t = e^{-rt} \cdot X_t = Z_0 + \int_0^t e^{-ru} \cdot N_u \cdot S_u \cdot \sigma\,d\tilde{W}_u$$ – мартингал

$$E_{\tilde{P}}(Z_t / Z_0) = Z_0$$

$$E_{\tilde{P}}(e^{-rt} \cdot X_t / X_0) = X_0$$

(a) $X_0 = e^{-rt} \cdot E_{\tilde{P}}(X_t / X_0)$

(б) $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

$\tilde{W} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t \rightarrow W_t = \tilde{W}_t + \frac{r - \mu}{\sigma} t$

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + (r - \mu)t + \sigma \tilde{W}_t}$$

$$S_t = S_0 \cdot e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \tilde{W}_t}$$

Пр. 1

$$X_T = \ln S_T$$

$$X_0 = e^{-rT}\cdot E_{\tilde P}\left(S_T / X_0\right) = e^{-rT}\cdot E_{\tilde P}\left(\ln\left(S_0\cdot e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\tilde W_t}\right) / X_0\right) =$$

$$= e^{-rT}\cdot E_{\tilde P}\left(\ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde W_t\right) = e^{-rT}\cdot\left(\ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$$

Пр. 2

$$X_T = \begin{cases} 1, & \text{if } S_T \geq 100 \\ 0, & \text{if } S_0 < 100 \end{cases}$$

$$X_0 = e^{-r\cdot T}\cdot E_{\tilde P}(X_t) = e^{-r\cdot T}\cdot\tilde P(S_T \geq 100) =$$

$$S_0\cdot\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde W_t\right) \geq 100$$

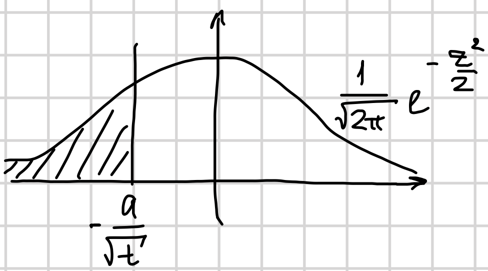
$$\ln S_0 + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde W_t \geq \ln 100$$

$$\tilde W_t \geq \underbrace{\frac{\ln 100 - \ln S_0 - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}}_{=a} \qquad \underset{\tilde P}{\sim} N(0;T)$$

$$\tilde P(\tilde W_T \geq a) = \tilde P(\tilde W_t \leq -a) = \tilde P\left(\frac{\tilde W}{\sqrt T} \leq -\frac{a}{\sqrt T}\right) = \underline{\tilde P\left(N(0;1) \leq \frac{-a}{\sqrt T}\right)}$$

ОТВЕТ

$F\left(-\frac{a}{\sqrt T}\right)$ – ц-ть актива сейчас



$$\Phi_{\text{акт}}: E\left(e^{\sigma W_t}\right) = e^{t\sigma^2/2},$$

Упр. $Y_t = e^{\sigma W_t}\cdot e^{-\sigma^2/2}$

- Найдите dY_t
- мартингал ли это?
- Y_0 - ?
- зная, что у мартингала $E(Y_t) = Y_0$

  Найдите $E\left(e^{\sigma W_t}\right) = ?$

Упр. $X_T = \frac{1}{S_T}$

X_0 - ?

$$X_0 = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\frac{1}{S_T}\right) = e^{-rT} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\frac{1}{S_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \tilde{W}_T\right)}\right) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\exp\left(\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)T - \sigma \tilde{W}_T\right)\right) =$$

$$= e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot E_{\tilde{P}}\left(\underbrace{e^{\left(\sigma^2/2 - r\right)\cdot T}}_{\text{const}} \cdot e^{-\sigma \cdot \tilde{W}_T}\right) = e^{-rT} \cdot \frac{1}{S_0} \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)T + \frac{T\sigma^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{S_0} \cdot e^{T\cdot\sigma^2 - 2rT} = X_0$$

S_0 – старт. ст-ть акц.

r – безр. % ст.

$\sigma \Leftarrow$ оценить по истор. данным (волат.)

T – время исп. контр.

$S_t \quad \ln S_t \quad \Delta \ln S_t$

$$\Delta \ln S_t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)/365;\ \frac{\sigma^2}{365}\right)$$

историч. вол-ть

хитрый актив платит в T $X_T = \sqrt{S_T}$, X_0 ?

$\sqrt{e^a} = e^{a/2}$