Aide-mémoire mathématiques

Sommes

$$\forall |x| < 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall x,\ \sum_{n=a}^{b} x^n = \frac{x^a - x^{b+1}}{1-x}$$

$$\forall x,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Binôme de Newton

$$\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(A+B)^n = \binom{n}{k} A^n B^{n-k}$$

Intégration par parties

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Formules

$$P\left[A \mid B\right] = \frac{P\left[A \cap B\right]}{P\left[B\right]}$$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Développements limités

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

Transformée en z

$$\forall |z| < 1,\ F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) z^n$$

f_n	$A\alpha^n$	$n\alpha^n$	$(n+1)\alpha^n$
Tz	$\frac{A}{1-\alpha z}$	$\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$	$\frac{1}{(1-\alpha z)^2}$

Transformée de Laplace

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f_X(t)\, dt$$

f_T	$\lambda e^{-\lambda t}$	t	te^{-at}
LP	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{(1+a)^2}$

Variables aléatoires

Loi de Bernouilli p $(0 < p < 1)$

$$P\left[X = n\right] = \begin{cases} p & \text{pour } n = 1 \\ 1-p & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Moyenne	$E\left[X\right] = p$
Variance	$V\left[X\right] = p\left(1-p\right)$
Transformée en z	$F\left(z\right) = 1 - p + pz$

Loi binomiale $n,\ p$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$)

$$\forall k \in [0,\, n],\ P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Moyenne	$E\left[X\right] = np$
Variance	$V\left[X\right] = np\left(1-p\right)$
Transformée en z	$F\left(z\right) = \left(1 - p + pz\right)^n$

Loi géométrique a $(0 < a < 1)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[X = n] = (1-a)a^n$$

Moyenne	$E\left[X\right] = \frac{a}{1-a}$
Variance	$V\left[X\right] = \frac{a}{(1-a)^2}$
Sans mémoire	$P\left[X \leqslant n + n_0 \mid X \geqslant n_0\right] = P[X \leqslant n]$
Transformée en z	$F\left(z\right) = \frac{1-a}{1-az}$

Loi de Poisson λ $(\lambda > 0)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Moyenne	$E\left[X\right] = \lambda$
Variance	$V\left[X\right] = \lambda$
Transformée en z	$F\left(z\right) = e^{\lambda(z-1)}$

Loi exponentielle λ $(\lambda > 0)$

$$\forall T \geqslant 0,\ f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \iff F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Moyenne	$E\left[X\right] = \frac{1}{\lambda}$
Variance	$V\left[X\right] = \frac{1}{\lambda^2}$
cv^2	$cv^2 = 1$
Sans mémoire	$P\left[T \leqslant t + t_0 \mid T > t_0\right] = P[T \leqslant t]$
Transformée de Laplace	$F^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

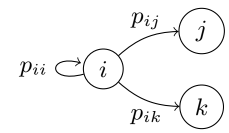
$$E\left[X^n\right] = (-1)^n \left.\frac{d^n B^*\left(s\right)}{ds^n}\right|_{s=0}$$

$$V\left[X\right] = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2$$

$$cv^2 = \frac{V\left[X\right]}{E\left[X\right]^2} = \frac{E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2}{E\left[X\right]^2}$$

CMTD homogène

Processus stochastique
- Espace d'états discret
- Temps **discret**
- Sans mémoire



Propriété. Le temps passé dans un état est **géométrique** (nombre étapes passées dans un état)

Etat j
- Périodique
- Apériodique
- Transitoire : $f_{jj} < 1$
- Récurrent
  - Nul : $f_{jj} = 1,\ M_j = \infty$
  - Non nul : $f_{jj} = 1,\ M_j < \infty$

Régime transitoire : $\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(n-1)} P = \vec{\pi}^{(0)} P^n$

$P_{ij}^{(n)}$: proba de transition de l'état i à j

$f_{ij}^{(n)}$: $i \to j$ en exactement n étapes

$f_{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}^{(n)}$: proba $i \to j$ en un nombre qcq d'étapes

$M_j = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{jj}^{(n)},\ (f_{jj} = 1)$: temps moyen de retour en j

$R_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}},\ (f_{ij} < 1)$: nombre moyen de passage par j, venant de i

Déf. CMTD irréductible : $\forall i,\ j \in E,\ \exists m$ tel que $p_{ij}^{(m)} \neq 0$

Déf. Etat périodique, période k : $\exists k > 1$ tel que $p_{ij}^{(m)} = 0,\ k \nmid m$
$\implies$ Apériodique : période $k = 1$

Propriété. La période d'une CMTD est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe associé.

CMTD irréductible : tous ses états sont de même nature :

- Transitoires,
- Récurrents nuls,
- Récurrents non nuls.

CMTD irréductible & finie : tous ses états récurrents non nuls.

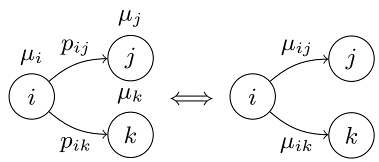
Régime permanent, condition : CMTD irréductible.
CMTD irréductible & apériodique :

$$\vec{\pi} = \lim_{n \to \infty} \vec{\pi}^{(n)}$$

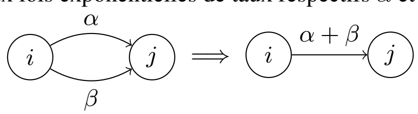
- $\vec{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ — Transitoire, Récurrent nul
- $\begin{cases} \vec{\pi} = P\vec{\pi} \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$ — Récurrent non nul

CMTC homogène

Processus stochastique — Espace d'états discret / Temps **continu** / Sans mémoire



Propriété. Le temps passé dans un état i est **exponentiel** de taux μ_i (de moyenne $1/\mu_i$)
Soient deux lois exponentielles de taux respectifs α et β.



Régime permanent, condition : CMTC irréductible
(Pas de périodicité)

CMTC irréductible : tous ses états sont de même nature

Etat — Récurrent nul / Transitoire $\Big\}$ "$\pi_\infty = 1$" / Récurrent non nul

CMTC irréductible & finie : tous ses états récurrents non nuls

$$\vec{\pi} = \lim_{n\to\infty} \vec{\pi}^{(n)} \quad
\begin{cases}
\vec{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \text{Transitoire, Récurrent nul} \\
\begin{cases} \vec{\pi} = Q\vec{\pi} \\ \sum_{i\in E} \pi_i = 1 \end{cases} & \text{Récurrent non nul}
\end{cases}$$

Equations de frontières : Flux $E_1 \to E_2 =$ Flux $E_2 \to E_1$
Régime transitoire : vecteur $\vec{\pi}(t)$ des probabilités d'état $\pi_i(t)$

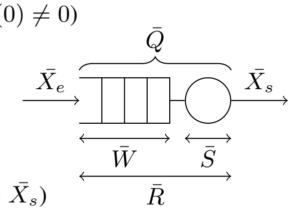
$$\begin{cases} \frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{\pi}(t)\,Q \\ \sum_{i\in E} \pi_i(t) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s\vec{F^*}(t) - \vec{\pi}(0) = \vec{F^*}(t)\,Q \\ \sum_{i\in E} F_i^*(s) = 1/s \end{cases}$$

Transformée de Laplace des dérivées $\dfrac{d\pi_i(t)}{dt}$: $sF_i^*(s) - \pi_i(0)$

Stabilité
$\Longleftrightarrow$ $\bar{X}_e = \bar{X}_s$
$\Longleftrightarrow$ Système limité toujours stable
$\Longleftrightarrow$ Taux d'arrivée < Capacité de traitement (ie. $\lambda < \mu$)
$\Longleftrightarrow$ Tous les états sont récurrents non nuls
$\Longleftrightarrow$ La file peut se vider (ie. $p(0) \neq 0$)

Performances d'un système

$\bar{Q}$ Nombre moyen de clients
$\bar{R}$ Temps moyen de séjour
$\bar{W}$ Temps moyen d'attente
$\bar{U}$ Taux d'utilisation du serveur
$\bar{X}$ Débit (système stable : $\bar{X}_e = \bar{X}_s$)



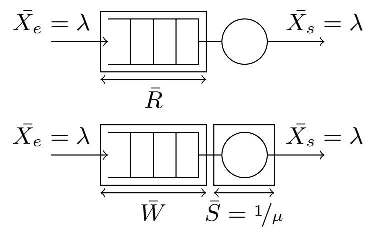
Files simples

Notation de Kendall : $T/X/C/K/m/Z$

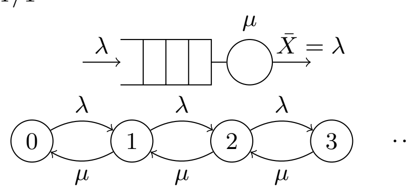
Arrivée	VA T : inter-arrivées	T exp de taux λ
Service	VA X : temps de service	X exp de taux μ
Nombre serveurs	C	$C = 1$
Capacité	K	$k = \infty$
Discipline de service	Z	FCFS (FIFO)

Loi de Little. $\bar{Q} = \bar{R} \cdot \bar{X}$
Régime permanent seulement et système stable.

$$\bar{Q} = \bar{R}\lambda$$
$$\bar{Q_W} = \bar{W}\lambda$$
$$\bar{U} = \bar{S}\lambda$$
$$\bar{Q} = \bar{Q_W} + \bar{U}$$
$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{S}$$



File $M/M/1$

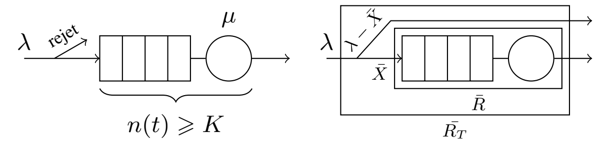


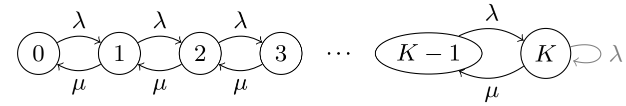
Stabilité : $\lambda < \mu$
Equations d'équilibre (de frontière) :
$\forall n \geqslant 0,\ p(n)\lambda = p(n+1)\mu$
Probabilités d'état : $\forall n \geqslant 0,\ p(n) = p(0)\rho^n$
avec $p(0) = (1-\rho)$
Performances moyennes :

$$\bar{X} = \lambda$$
$$\bar{U} = \rho \text{ (pas de distribution)}$$
$$\bar{Q} = \frac{\rho}{1-\rho}$$
$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
$$\bar{W} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Distribution des performances :
- Débit de sortie X : processus de Poisson de taux λ
- Nombre de clients Q : loi géométrique de paramètre ρ
- Temps de séjour R : loi exponentielle de taux $\mu - \lambda$
- Temps d'attente W : loi générale-exponentielle de paramètres ρ et μ, donc de taux $\dfrac{\mu-\lambda}{\rho}$

File $M/M/1/K$

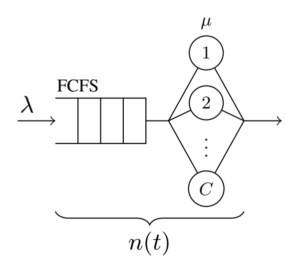


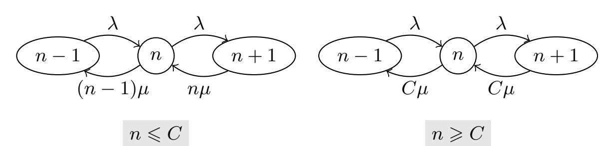


Stabilité : toujours stable (système limité)
Probabilités d'état : $\forall n \in \{1, \ldots, K\},\ p(n) = \rho^n p(0)$
avec $p(0) = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$
Performances moyennes :

$$\bar{X}_s = \big(1 - p(0)\big)\mu = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\mu$$
$$\bar{X}_e = \lambda\big(1 - p(K)\big) = \lambda\frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$
$$\bar{U} = 1 - p(0) = \rho\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}\right)$$
$$\bar{Q} = \sum_{n=1}^{K} np(n) = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1-(K+1)\,\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}\right)$$
$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}}$$
$$\bar{R}_t = \frac{\bar{Q}}{\lambda}$$
$$P_r = p(K) = \frac{\lambda - \bar{X}}{\lambda} = \frac{\rho^K - \rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

File $M/M/C$





Stabilité : $\lambda < C\mu$
Equations d'équilibre (de frontière) :

$$\begin{cases} p(n-1)\,\lambda = p(n)\,n\mu & \text{pour } n = 1, \ldots, C \\ p(n-1)\,\lambda = p(n)\,C\mu & \text{pour } n = C, C+1, \ldots \end{cases}$$

Probabilités d'état :

$$\begin{cases} p\,(n) = \frac{\rho^n}{n!}\,p\,(0) & \text{pour } n = 1,\,\ldots,\,C \\ p\,(n) = \frac{\rho^n}{C!C^{n-C}}\,p\,(0) & \text{pour } n = C,\,C+1,\,\ldots \end{cases}$$

avec $p\,(0) = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{(C-1)!(C-\rho)}}$

Performances moyennes :

$$\bar{X} = \lambda$$

$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{C-1} p\,(n)\,\frac{n}{C} + \sum_{n=C}^{\infty} p\,(n)$$

$$\bar{Q_W} = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\,(C-\rho)^2}\,p\,(0)$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q_W}}{\bar{X}} = \frac{\rho^C}{\mu\,(C-1)!\,(C-\rho)^2}\,p\,(0)$$

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{S} = \frac{\rho^C}{\mu\,(C-1)!\,(C-\rho)^2}\,p\,(0) + \frac{1}{\mu}$$

$$\bar{Q} = \bar{R}\bar{X} = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\,(C-\rho)^2}\,p\,(0) + \rho$$

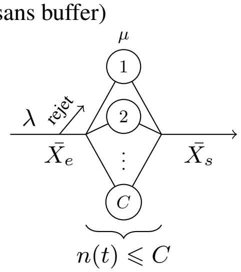
$$P_W = \frac{\rho^C}{(C-1)!\,(C-\rho)}\,p\,(0)$$

Distribution des performances :

– Débit de sortie X : processus de Poisson de taux λ

– Temps d'attente W : loi générale-exponentielle de paramètres P_W et $C\mu - \lambda$, donc de taux $\dfrac{C\mu - \lambda}{P_W}$

File $M/M/C/C$ (sans buffer)



Stabilité : toujours stable (système limité)

Equations d'équilibre (de frontière) :

$\forall n \in \{1,\,\ldots,\,C\},\; p(n-1)\lambda = p(n)n\mu$

Probabilités d'état :

$\forall n \in \{1,\,\ldots,\,C\},\; p(n) = \dfrac{\rho^n}{n!}p(0)$

avec $p(0) = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{C}\frac{\rho^n}{n!}}$

Performances moyennes :

$$\bar{X}_s = \frac{\sum_{n=1}^{C}\frac{\rho^n}{(n-1)!}}{\sum_{n=0}^{C}\frac{\rho^n}{n!}}\mu = \bar{X}$$

$$\bar{X}_e = \lambda\frac{\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{C}\frac{\rho^n}{n!}} = \bar{X}$$

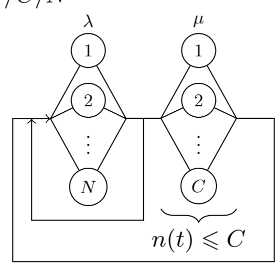
$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{C} p\,(n)\,\frac{n}{C}$$

$$\bar{Q} = \sum_{n=1}^{C} np\,(n)$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \frac{1}{\mu} \text{ (client accepté à entrer)}$$

$$P_r = p\,(C) = \frac{\frac{\rho^C}{C!}}{\sum_{n=0}^{C}\frac{\rho^n}{n!}} \text{ (Erlang-B)}$$

File $M(n)/M/C/C/N$



Stabilité : toujours stable (système fermé)

Equations d'équilibre (de frontière) :

$\forall n \in \{1,\,\ldots,\,C\},\; p(n-1)(N-n+1)\lambda = p(n)n\mu$

Probabilités d'état :

$\forall n \in \{1,\,\ldots,\,C\},\; p(n) = C_N^n\rho^n p(0)$

avec $p(0) = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{C} C_N^n\rho^n}$

PASTA ne peut plus être appliqué : $p_a(n) \neq p(n)$

Probabilités aux instants d'arrivée :

$$p_a(n) = \frac{p(n)(N-n)\lambda}{\sum_{k=0}^{C} p(k)(N-k)\lambda}$$

Performances moyennes :

$$\bar{X} = \sum_{n=1}^{C} p\,(n)\,n\mu$$

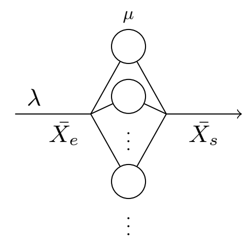
$$\bar{U} = \sum_{n=1}^{C} p\,(n)\,\frac{n}{C}$$

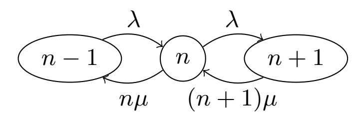
$$\bar{Q} = \sum_{n=1}^{C} np\,(n)$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \frac{1}{\mu} \text{ (client accepté à entrer)}$$

$$P_r = p_a\,(C) = \frac{C_{N-1}^C\rho^C}{\sum_{k=0}^{C} C_{N-1}^k\rho^k} \text{ (Engset)}$$

File $M/M/\infty$ (retard pur $\approx$ temps de propagation d'un lien)





Régime transitoire :

$$p\,(n,\,t) = \frac{\left[\left(1 - e^{-\mu t}\right)\frac{\lambda}{\mu}\right]^n}{n!}e^{-\left(1 - e^{-\mu t}\right)\frac{\lambda}{\mu}}$$

Stabilité (RP) : toujours stable (capacité de traitement infinie)

Equations d'équilibre (de frontière) :

$\forall n \geqslant 1,\; p(n-1)\lambda = p(n)n\mu$

Probabilités d'état :

$\forall n \geqslant 1,\; p(n) = \dfrac{\rho^n}{n!}p(0)$

avec $p(0) = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}}\dfrac{\rho^n}{n!} = e^{-\rho}$

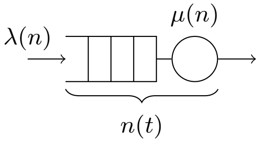
Performances moyennes :

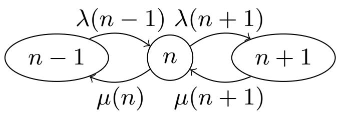
$$\bar{X} = \lambda$$

$$\bar{Q} = \rho$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \frac{1}{\mu}$$

File markovienne





Stabilité :

$\iff$ Tous les états de la CMTC associée sont récurrents non nuls

$\iff$ $p(0) > 0$

$\iff$ Le somme converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)}\right) < \infty$

Equations d'équilibre (de frontière) :

$\forall n \in \mathbb{N},\ p(n-1)\lambda(n-1) = p(n)\mu(n)$

Probabilités d'état :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p(n) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)}p(0)$$

avec $p(0) = \dfrac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)}\right)}$

Performances moyennes en régime stationnaire :

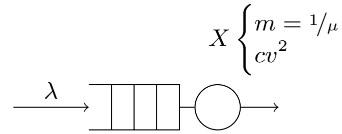
$$\bar{X}_s = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\,\mu(n)$$

$$\bar{X}_e = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,\lambda(n)$$

$$\bar{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n)$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} \text{ (Little)}$$

File $M/GI/1$



Caractérisation partielle de la distribution de service X :

$$\begin{cases} m = m_1 = E[X] = \int_0^\infty t f_X(t)\,dt \\ cv^2 = \frac{m_2 - m^2}{m^2},\ \text{avec } m_2 = E\left[X^2\right] = \int_0^\infty t^2 f_X(t)\,dt \end{cases}$$

Stabilité : $\lambda < \mu$, $\mu = {}^1\!/\!_m$ taux moyen de service de la file

"CMTD incluse" : $p_d(n) = p_a(n) = p(n)$

Probabilités stationnaires $p(n)$:

– Calculer $B^*(s)$, la transformée de Laplace de $f_X(t)$

– En déduire $P(z)$:

$$P(z) = \frac{(1-\rho)\,B^*(\lambda - \lambda z)\,(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \text{ où } \rho = \lambda m = \frac{\lambda}{\mu}$$

– Inverser $P(z)$ ($z = 1$ est solution du dénominateur)

Performances moyennes ($P(1) = 1 \implies p(0) = 1 - \rho$) :

$$\bar{X} = (1 - p(0))\,\mu = \lambda$$

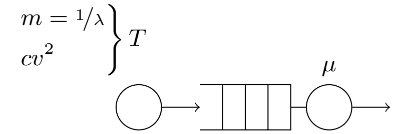
$$\bar{U} = 1 - p(0) = \rho$$

$$\bar{Q} = \left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} = \rho + \frac{\rho^2\left(1 + cv^2\right)}{2(1-\rho)} \text{ (P-K)}$$

$$\bar{W} = \frac{\lambda\left(1 + cv^2\right)}{2\mu^2(1-\rho)} = \frac{\lambda m^2\left(1 + cv^2\right)}{2(1 - \lambda m)}$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \bar{S} + \bar{W} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda\left(1 + cv^2\right)}{2\mu^2(1-\rho)}$$

File $GI/M/1$



Caractérisation partielle de la distribution d'inter-arrivée T :

$$\begin{cases} m = m_1 = E[X] = \int_0^\infty t f_X(t)\,dt \\ cv^2 = \frac{m_2 - m^2}{m^2},\ \text{avec } m_2 = E\left[X^2\right] = \int_0^\infty t^2 f_X(t)\,dt \end{cases}$$

Stabilité : $\lambda < \mu$, $\lambda = {}^1\!/\!_m$ taux moyen d'arrivée des clients

Chaîne de Markov incluse : $p_a(n) = (1-\sigma)\sigma^n \neq p(n)$

où $0 < \sigma < 1$ est l'unique solution de l'équation :

$\sigma = A^*(\mu - \mu\sigma)$

Probabilités aux instants d'arrivée $p_a(n)$:

– Calculer $A^*(s)$, la transformée de Laplace de $f_T(t)$

– Résoudre l'équation $\sigma = A^*(\mu - \mu\sigma)$

$\sigma = 1$ solution de l'équation (factorisation par $(\sigma - 1)$)

– En déduire $p_a(n) = (1-\sigma)\sigma^n$

Performances moyennes :

$$\bar{X} = \lambda$$

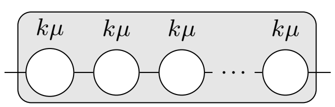
$$\bar{U} = \bar{S}\bar{X} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\mu}(1-\sigma)\sigma^n = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)}$$

$$\bar{R} = \bar{W} + \bar{S} = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)} + \frac{1}{\mu}$$

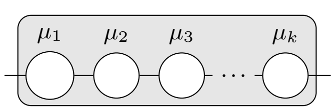
$$\bar{Q} = \bar{R}\bar{X} = \frac{\lambda\sigma}{\mu(1-\sigma)} + \frac{\lambda}{\mu} \text{ (Little)}$$

Loi de Erlang-k : $cv^2 \sim {}^1\!/\!_k$



$$F^*(s) = \left(\frac{k\mu}{k\mu + s}\right)^k$$

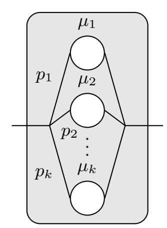
Loi hypo-exponentielle-k : $cv^2 < 1$



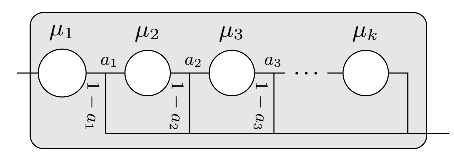
$$F^*(s) = \prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\mu_i + s}$$

Loi hyper-exponentielle-k : $cv^2 > 1$

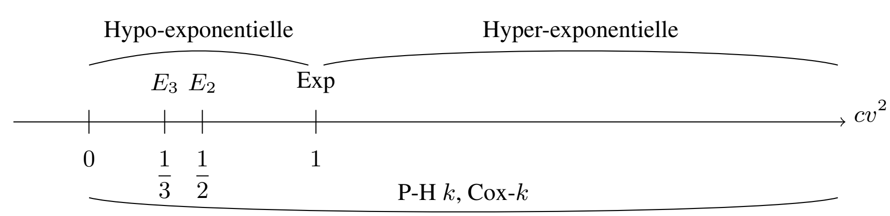
$$F^*(s) = \sum_{i=1}^{k} p_i\frac{\mu_i}{\mu_i + s}$$



Loi de Cox-k : $cv^2 \geqslant {}^1\!/\!_k$



$$F^*(s) = \sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{j} a_i\frac{\mu_i}{\mu_i + s}\right)(1 - a_j)$$



Réseaux de file d'attente à forme produit

- RFA
  - Monoclasse
    - Ouvert
    - Fermé
  - Monoclasse
    - Ouvert
    - Fermé
    - Mixte

Soit un réseau composé de M stations, avec les *hypothèses* :

- Arrivées Poissoniennes
- Temps de service exponentiel
- Routage probabiliste
- Buffer infini

Soit e_i le taux de visite de la station i (nombre moyen de passages par la station i)

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} e_j p_{ji},\ i = 1, \ldots, M$$

Stabilité : $\lambda_i < \mu_i$ pour tout $i = 1, \ldots, M$
Soit p_{ij} la probabilité qu'un client qui termine son service à la station i se rende à la station j.
Taux d'arrivée des clients :

- λ : dans le réseau
- $\lambda_i = \lambda e_i$: à la station i

Soit λ_i le trafic à la station i :

- λp_{0i} : trafic venant de l'extérieur
- $\lambda_j p_{ji}$: trafic venant à la station j, $j = 1, \ldots, M$

En particulier, $\lambda_i = \lambda e_i$

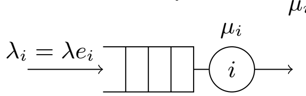
$$\lambda_i = \lambda p_{0i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j p_{ji},\ i = 1, \ldots M$$

Régime permanent (*Théorème de Jackson*) :

$$p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i)$$

où $p_i(n_i)$ est la probabilité stationnaire d'une file $M/M/1$ ayant un taux d'arrivée λ_i et un taux de service μ_i.

$$p_i(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i} \text{ où } \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$



Performances

Pour la station i

$$\bar{U}_i = \rho_i$$

$$\bar{X}_i = \lambda_i$$

$$\bar{Q}_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

$$\bar{R}_i = \frac{Q_i}{X_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

Pour le réseau tout entier

$$\bar{X} = \lambda$$

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^{M} \bar{Q}_i$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{M} e_i \bar{R}_i$$