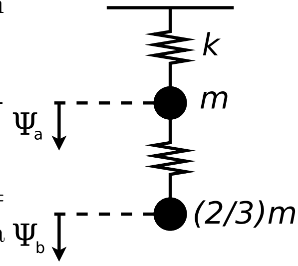
Sistemas con dos grados de libertad

Los ejercicios con (*) son opcionales.

1. **Resortes colgantes**. Asuma que el sistema de la figura no está bajo el efecto de un campo gravitatorio

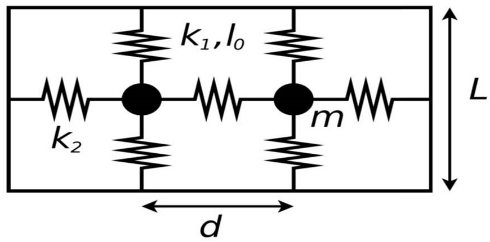


   a) Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada partícula.

   b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.

   c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad en la superficie de la Tierra.

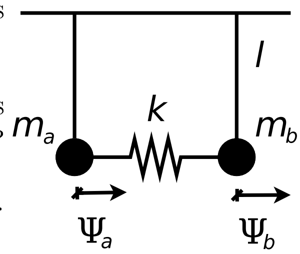
2. En el sistema de la figura se tienen dos partículas de masa m unidas a las paredes con resortes dispuestos verticalmente de longitud natural l_0 ($l_0 < L/2$) y constante elástica k_1, y con otros dispuestos horizontontalmente de $l_0 = 0$ (*slinkies*) y constante k_2. Imagine que las partículas tienen la libertad de moverse en el plano y que el sistema no está en un campo gravitatorio.



   a) ¿Bajo qué aproximaciones es posible decir que el movimiento más general posible de cada una de las masas es una superposición lineal del movimiento más general posible de las oscilaciones longitudinales y de las oscilaciones transversales? Demuestre su afirmación.

   b) Considerando la aproximación del punto anterior, determine las frecuencias propias y los modos normales de oscilación: longitudinales, transversales y de la solución más general posible para un movimiento arbitrario en el plano.

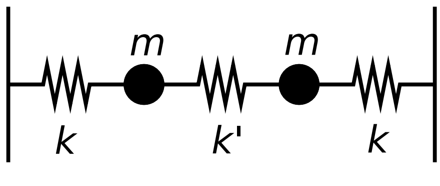
3. De dos péndulos de igual longitud l penden pesos de masas diferente m_a y m_b. Estas están acopladas entre sí mediante un resorte de constante elástica k.



   a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es *slinky*?

   b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

4. Dos pesas de idéntica masa están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante elástica k y unidas entre sí por otro con distianta constante k'. Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.



Sistemas forzados

5. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 3, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.

   b) Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.

   c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.

d) Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\Omega^2}$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

e) (*) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.

6. Considere el sistema del problema 4, pero en este caso en considere las oscilaciones longitudinales.

   a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante $F(t) = F_0 cos(\Omega t)$. ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?

   b) (*) Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad

   c) (*) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema