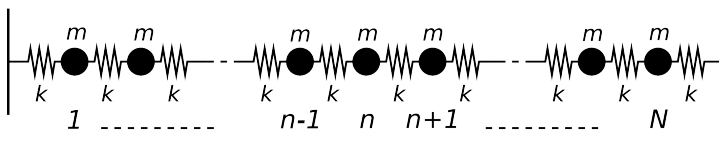


N»1 GRADOS DE LIBERTAD

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Cadenas periódicas de N osciladores acoplados

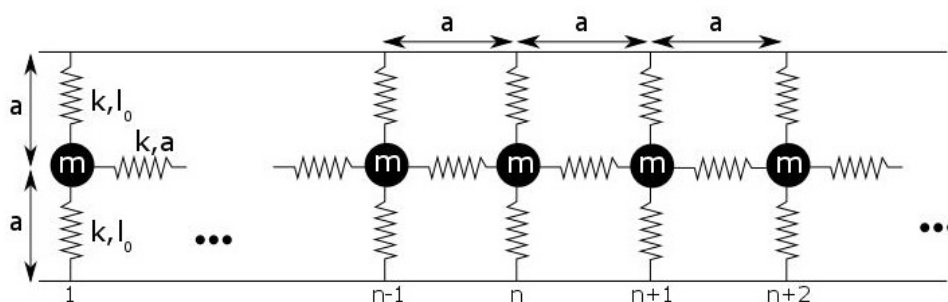
1. Enlazadas por resortes de coeficiente de dureza k y longitud natural l_0 unas N partículas de masa m en reposo están equiespaciadas en a .
- 

- a) Escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula n -ésima usando la aproximación de ángulos pequeños.
- b) Se propone una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}) \cos(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)})$$

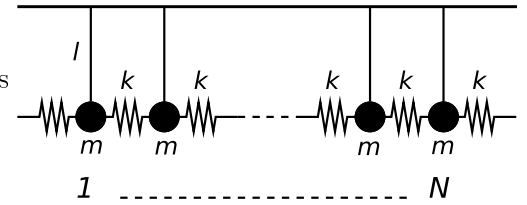
Con ella halle la relación de dispersión. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno?

- c) En la figura se muestra el caso de extremos fijos en que una virtual partícula $n = 0$ estaría en la pared izquierda y una $n = N + 1$ en la derecha. Escriba la solución general para la partícula n -ésima. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? Haga un dibujo cualitativo del movimiento en dicho modo.
- d) Ídem. anterior, pero con ambos extremos están libres. Tal condición de contorno, a diferencia de la fija, no ejerce ninguna fuerza. Esto implica que la longitud de los resortes en los extremos es siempre a . Puede modelizarse esto imponiendo que $\Psi_{n=0} = \Psi_{n=N}$ y $\Psi_{n=N} = \Psi_{n=N+1}$.
- e) (*) Ídem. anterior, pero con el extremo izquierdo libre y el derecho fijo a la pared.
- f) (*) Particularice los resultados de 1c, 1d y 1e para el caso en que $N = 3$.
- g) (*) Grafique cualitativamente para $N = 9$ la relación de dispersión, es decir, $\omega^{(p)}$ en función de $k^{(p)}$.
2. N partículas de masa m están equiespaciadas en una distancia a . Están sujetas a paredes mediante resortes de coeficiente de dureza k y longitud natural l_0 . A su vez, en la dirección en que pueden desplazarse están vinculadas por resortes con el mismo k pero de longitud natural $a > l_0$.



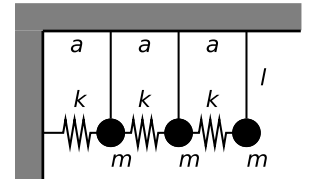
- a) Escriba la ecuación de movimiento para la partícula n -ésima. Indique todas las aproximaciones que realiza.
- b) Proponga una solución adecuada y halle la relación de dispersión. ¿Cuál es la frecuencia más baja posible?
- c) Imponga las condiciones de contorno apropiadas para el sistema y calcule las frecuencias propias del mismo. Escriba la solución para el movimiento de cada partícula.
- d) (*) Particularice para el caso $N = 2$ y compare con el resultado que obtiene resolviendo el problema “matricialmente”. Esquematice los modos normales de oscilación.

3. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura donde todos los resortes tienen longitud natural l_0 .



- Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 1 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en tal problema. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?
- Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.
- Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

- d) (*) Particularice el problema 3c para 3 péndulos como muestra la figura.



- (*) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Utilizando los modos normales para el sistema sin forzar, halle la solución estacionaria del problema forzado. Considere el problema sin amortiguamiento. Utilice lo aprendido en la guía anterior. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?