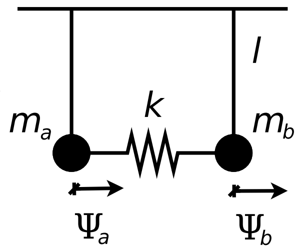
N Grados de libertad forzados | Pulsaciones

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional y puede considerarlos opcionales.

Pulsaciones



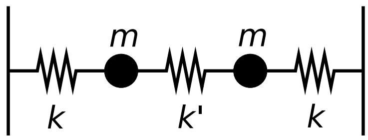
1. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es *slinky*?

   b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

   c) Suponga que el acoplamiento es débil ($k \ll \frac{g}{l}\frac{m_a m_b}{m_a+m_b}$) y que las condiciones iniciales son: $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$. Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.

   d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b, donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.



2. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k'.

   a) Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.

   b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Sistemas de N grados de libertad forzados

3. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 1, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.

   b) Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.

   c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.

   d) Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\Omega^2}$$

   donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

e) (*) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.

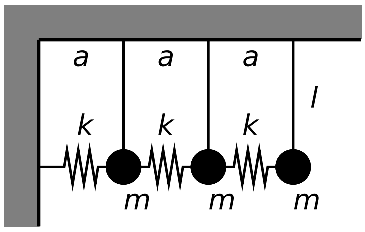
4. Considere el sistema del problema 2, pero en este caso en considere las oscilaciones longitudinales.

   a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante $F(t) = F_0 cos(\Omega t)$. ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?

   b) (*) Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad

   c) (*) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema

5. Considere el sistema de 3 péndulos acoplados que se muestra en la figura.



   a) Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

   b) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?