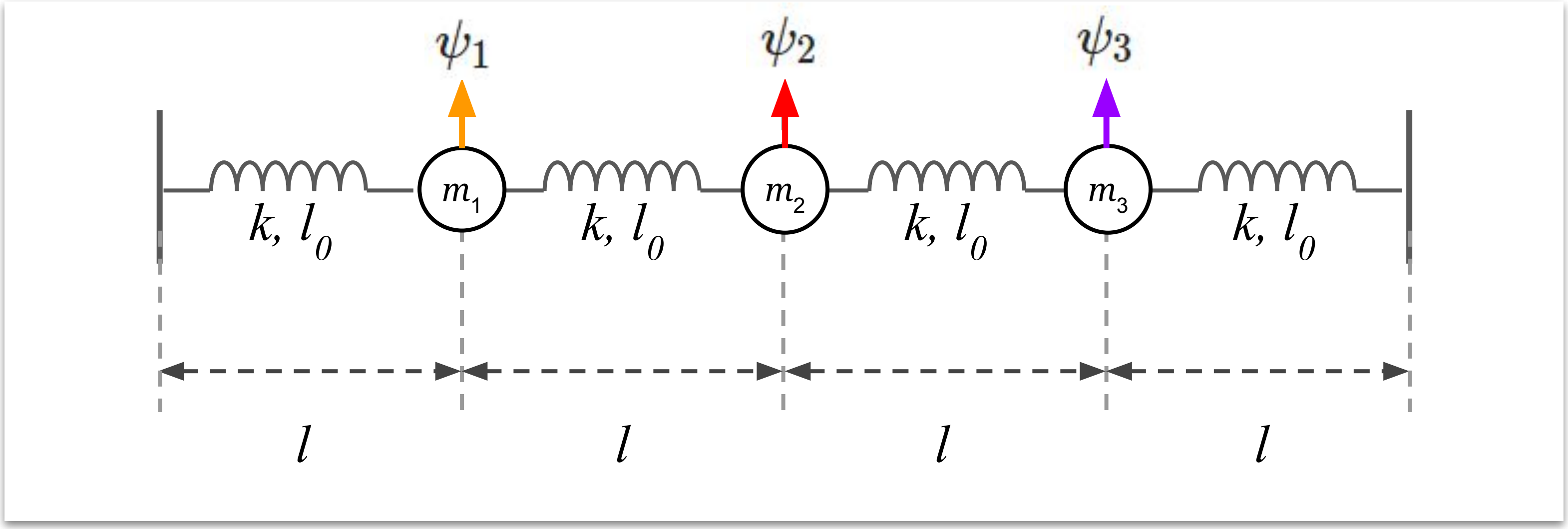
Sistemas con más de dos grados de libertad



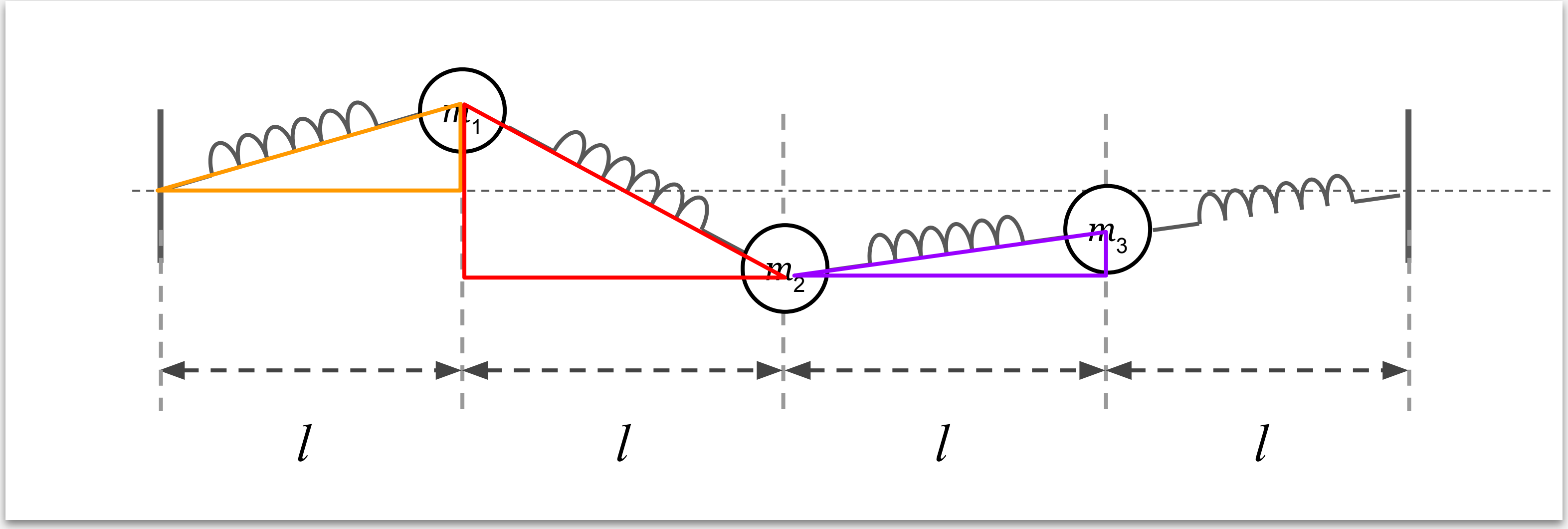
a) Escriba la ecuación diferencial de movimiento de cada masa en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

b) Obtenga las frecuencias naturales de oscilación y los correspondientes modos normales.

c) Determine la solución si en el tiempo inicial el sistema se encuentra en el equilibrio y su velocidad es [-1, 0, 1] m/s.

d) Determine todas las condiciones iniciales tales que el sistema oscile solo en los dos modos de mayor frecuencia.

Escribir la energía potencial



Energía potencial de **todo** el sistema

$$V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2+(\psi_1)^2}-l_o\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2+(\psi_2-\psi_1)^2}-l_o\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2+(\psi_3-\psi_2)^2}-l_o\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2+(\psi_3)^2}-l_o\right)^2$$

- Depende de todas las coordenadas
- Un término para cada resorte
- Cada término ∝ estiramiento^2
- Fuerza sobre cada masa = menos gradiente respecto a su coordenada

Fuerzas

Fuerza sobre la primera masa

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial \psi_i} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \Rightarrow m_1 \ddot{\psi}_1 = (-1)\left(\frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \psi_1}\right)$$

Contribución del resorte 1:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} = k\left(1 - \frac{l_o}{l\sqrt{1+(\frac{\psi_1}{l})^2}}\right)\psi_1 \simeq k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)\psi_1$$

Pequeñas oscilaciones

$$\boxed{\frac{\psi_1}{l} \ll 1}$$

(Queremos fuerza lineal)

Contribución del resorte 2:

$$\frac{\partial V_2}{\partial \psi_1} = k\left(1 - \frac{l_o}{l\sqrt{1+(\frac{\psi_2-\psi_1}{l})^2}}\right)(\psi_1 - \psi_2) \simeq k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(\psi_1 - \psi_2)$$

Resortes 3 y 4: no contribuyen ya que no están conectados a la masa 1

Fuerzas

Fuerza sobre la primera masa

$$m_1\ddot{\psi}_1 = (-1)\left(\frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \psi_1}\right)$$

restitutivos "anti"

$$m_1\ddot{\psi}_1 = (-1)k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(\psi_1 + \psi_1 - \psi_2) = -k\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)(2\psi_1 - \psi_2)$$

Chequeo de signos:

- Coordenada **propia**: signo menos, fuerza restitutiva

    Desplazamiento propio es devuelto a la posición de equilibrio

- Coordenadas de **otras** masas: signo más, “antirrestitutivas”

    Movimiento de masas vecinas desplaza a la masa de su equilibrio

Segunda ley de Newton

Sistema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} m_1\ddot{\psi}_1 = -k\left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right)(2\psi_1 - \psi_2) \\ m_2\ddot{\psi}_2 = -k\left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right)(2\psi_2 - \psi_1 - \psi_3) \\ m_3\ddot{\psi}_3 = -k\left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right)(2\psi_3 - \psi_2) \end{cases}$$

Sistema: el movimiento de una masa afecta a las demás

Lineal: linealizamos la fuerza

Segunda ley de Newton

Sistema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$
\begin{cases}
m_1 \underline{\ddot{\psi}_1} = -k \left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right) (2\underline{\psi_1} - \psi_2) \\
m_2 \underline{\ddot{\psi}_2} = -k \left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right) (2\underline{\psi_2} - \psi_1 - \psi_3) \\
m_3 \underline{\ddot{\psi}_3} = -k \left(1 - \dfrac{l_o}{l}\right) (2\underline{\psi_3} - \psi_2)
\end{cases}
$$

Términos restitutivos

Chequeo de signos

Simetría de las ecuaciones ↔ Simetría del sistema

Asumiendo masas iguales:

- Ecs. masas 1 y 3: tienen misma estructura
- Ec. masa 2: Psi1 y Psi3 simétricas (mismos coeficientes)

Forma matricial

$$m\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_1\\ \ddot{\psi}_2\\ \ddot{\psi}_3\end{pmatrix} = -k\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_1\\ \ddot{\psi}_2\\ \ddot{\psi}_3\end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

Se ve a simple vista la simetría del sistema!

(a lo largo de la diagonal: masas, resortes y condiciones de contorno iguales)

(Además: la matriz es simétrica ya que **siempre** debe cumplirse el principio de acción y reacción)

Forma matricial

$$m\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_1\\ \ddot{\psi}_2\\ \ddot{\psi}_3\end{pmatrix} = -k\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\ddot{\psi}_1\\ \ddot{\psi}_2\\ \ddot{\psi}_3\end{pmatrix}}_{\ddot{\vec{\Psi}}} = \underbrace{-\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}}_{\mathbf{K'}}\underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}}_{\vec{\Psi}}$$

$\vec{\Psi}$ $\ddot{\vec{\Psi}}$ ⇨ Vectores de coordenadas y aceleraciones

$\mathbf{K'}$ ⇨ Matriz de NxN con la información de masas e interacciones del sistema, unidades de frecuencia angular = s^{-2}

$$\ddot{\vec{\Psi}} = -\mathbf{K'}\vec{\Psi}$$

Solución de modos normales

Todas las masas oscilan a la **misma frecuencia** y **en fase**

$$\vec{\Psi} = \vec{\mathbf{a}} \exp(i\omega t)$$

$$\ddot{\vec{\Psi}} = (i\omega)^2 \vec{\mathbf{a}} \exp(i\omega t) = -\omega^2 \vec{\Psi}$$

$\vec{\mathbf{a}}$**:** vector real con la *amplitud relativa* del movimiento de cada masa en el modo normal

$\vec{\mathbf{a}}$ y ω son incógnitas a determinar:

⇨ **Ambos dependen de las características del sistema.**

Solución de modos normales

Todas las masas oscilan a la **misma frecuencia** y **en fase**

$$\vec{\Psi} = \vec{a}\exp(i\omega t)$$

$$\ddot{\vec{\Psi}} = (i\omega)^2\vec{a}\exp(i\omega t) = -\omega^2\vec{\Psi}$$

$$\ddot{\vec{\Psi}} = -\mathbf{K'}\vec{\Psi}$$

Reemplazamos la solución de modos en el sistema

$$-\omega^2\vec{\mathbf{a}}\exp(i\omega t) = -\mathbf{K}'\vec{\mathbf{a}}\exp(i\omega t)$$

$$\omega^2\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{K}'\vec{\mathbf{a}}$$

Hallar $\vec{\mathbf{a}}$ y ω^2 tales que $\mathbf{K'}\vec{\mathbf{a}}$ sea proporcional a $\vec{\mathbf{a}}$ $\longrightarrow$ Problema de autovalores y autovectores

autovector autovalor

Problema de autovalores y autovectores

Nos permite hallar $\vec{\mathbf{a}}$ y ω tales que la propuesta sea solución

$$\mathbf{K}'\vec{\mathbf{a}} = \omega^2\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$$
$$(\mathbf{K}' - \omega^2\mathbf{I})\vec{\mathbf{a}} = 0$$
$$\det(\mathbf{K}' - \omega^2\mathbf{I}) = 0$$

Autovalor λ se relaciona con ω mediante: $\lambda = \omega^2$

Esperamos tantas soluciones como masas en el sistema

- Escribir el determinante de la matriz $\mathbf{K}' - \omega^2\mathbf{I}$
- Obtener el polinomio característico en función de ω^2
- Resolver las raíces del polinomio
- Hallar $\vec{\mathbf{a}}$ para cada ω

Problema de autovalores y autovectores

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0 \\ \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) \\ 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 \end{pmatrix}}_{\omega^2\mathbf{I}-\mathbf{K}'} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\mathbf{a}}} = 0$$

Determinante para matrices de 3x3

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\cdot\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b\cdot\det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\cdot\det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Problema de autovalores y autovectores

Polinomio característico en ω^2 (orden 3)

$$\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]^3-\left[2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]\right]=0$$

$$\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]\left[\left[-2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2\right]^2-2\left(\frac{k}{m}\right)^2\left(1-\frac{l_o}{l}\right)^2\right]=0$$

Hallar las tres raíces $\longrightarrow$ Tres valores para ω^2

Autovalores: Frecuencias características

Obtenemos <u>tres</u> frecuencias angulares, una para cada modo

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$ ← mayor

$$\omega_3 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_o}{l}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$ ← menor

Autovectores: Modos normales

Reemplazar cada ω en:

$$\begin{pmatrix} -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0 \\ \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) \\ 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}}^{\vec{\mathbf{a}}} = 0$$

y resolver para Psi1, Psi2 y Psi3.

De este modo tendremos:

- Modo 1: $\vec{\mathbf{a}}_1$, ω_1
- Modo 2: $\vec{\mathbf{a}}_2$, ω_2
- Modo 3: $\vec{\mathbf{a}}_3$, ω_3

Autovectores: Modos normales

Para ω_1:

$$\begin{pmatrix} -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & 0 \\ \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) \\ 0 & \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right) & -2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)+\omega^2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}}^{\vec{\mathbf{a}}} = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0$$

Tres ecuaciones linealmente dependientes

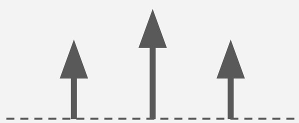
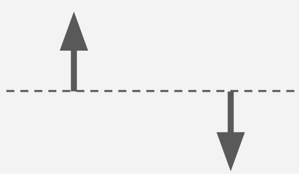
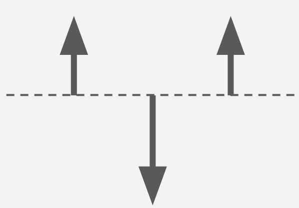
- Ec. 1 o 3: Psi1*0 + Psi2*1 + Psi3*0 = 0, luego Psi2 = 0
- Ec. 2: Psi1 + Psi3 = 0, luego Psi1 = -Psi3

Autovector normalizado:

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Modos normales hallados

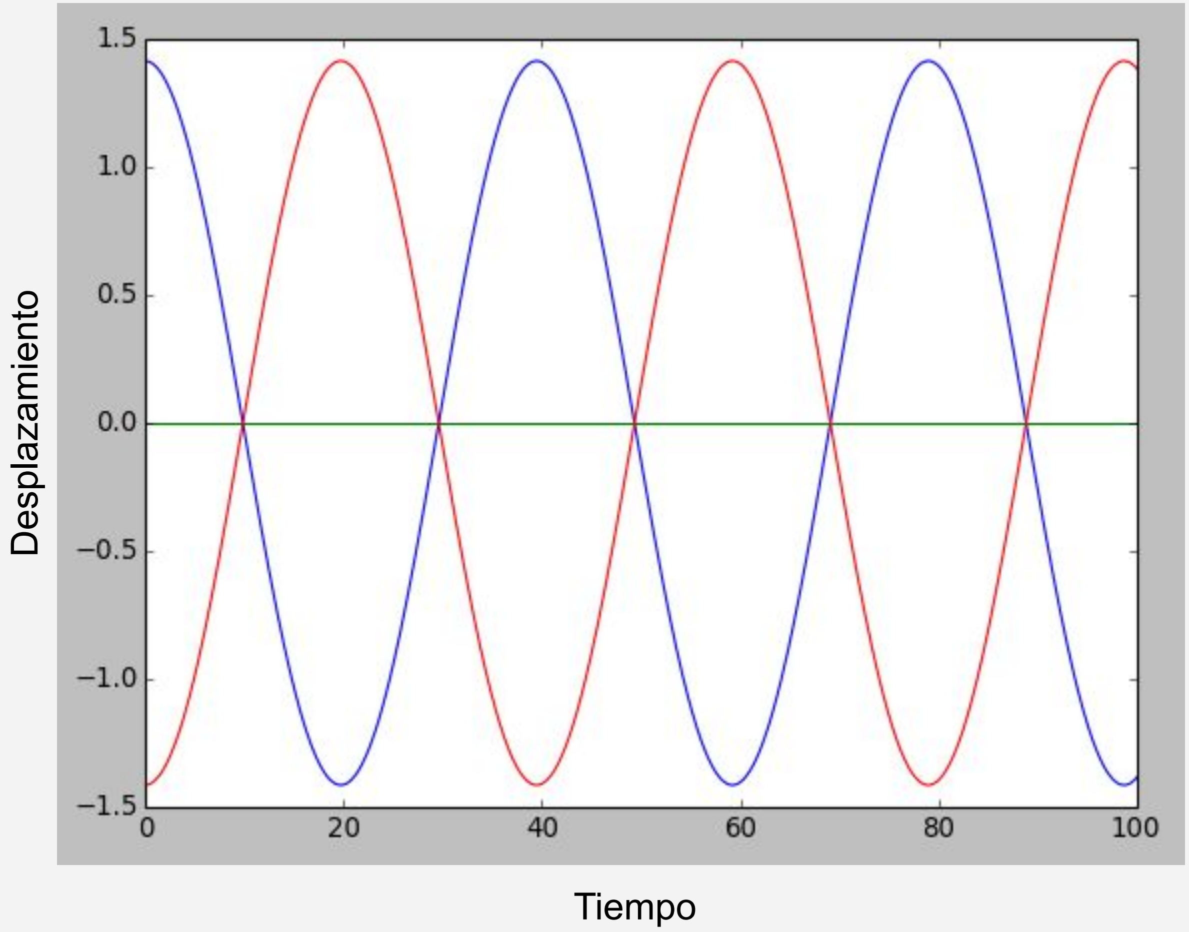
Reordenados comenzando por la frecuencia más baja

Modo	Frec. angular (ω_i)	Autoversor ($\vec{\mathbf{a}}_i$)	
1	$\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	
2	$\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	
3	$\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{l_o}{l}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	

Notar que los autovectores forman una base ortogonal $\vec{\mathbf{a}}_i \cdot \vec{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij}$

Soluciones posibles

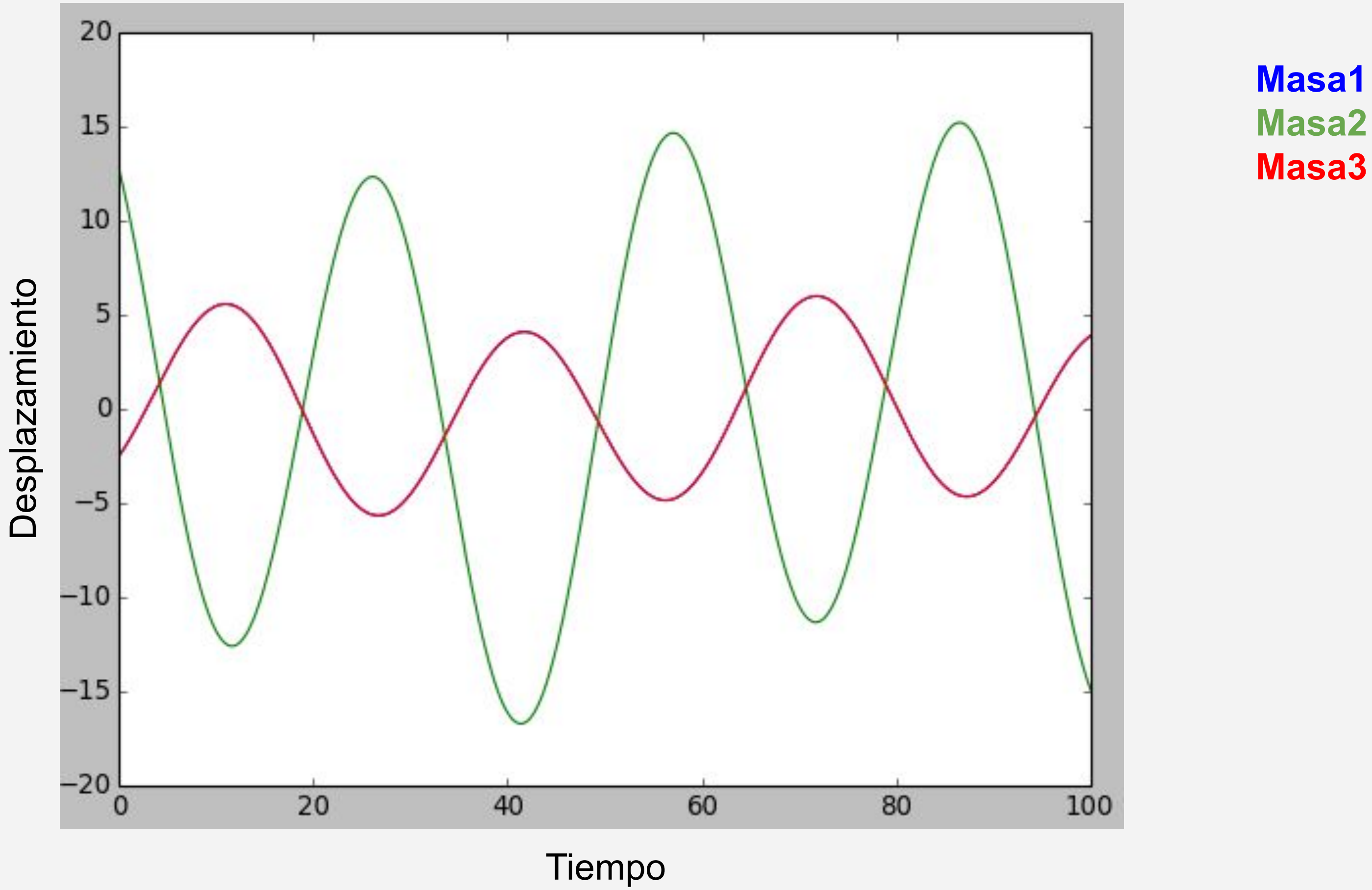
$$\vec{\Psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t)$$



Masa1
Masa2
Masa3

Soluciones posibles

$$\vec{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \pi) - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_3 t - \pi/4)$$



Acabamos de ver dos ejemplos de soluciones del sistema, hechos a partir de combinaciones lineales de los modos hallados, con coeficientes de amplitud y fases arbitrarias.

¿Cómo puedo obtener esas soluciones a partir de condiciones iniciales?

Solución general

Combinación lineal de todos los modos hallados

$$\vec{\Psi} = c_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_3 t}$$

$$\dot{\vec{\Psi}} = i(c_1 \omega_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \omega_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \omega_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_2 t})$$

Los c_i son pesos complejos

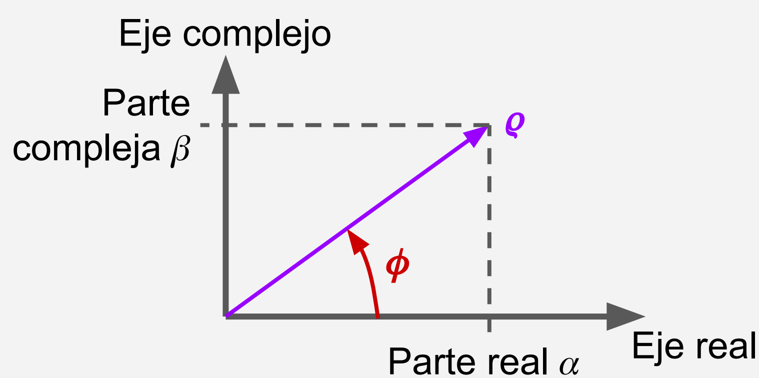
- Módulo: peso del modo en la solución general
- Fase: fase inicial relativa a los demás modos

$$c_j = \alpha_j + i\beta_j = \rho_j \exp(i\phi_j)$$

Si: $z = \alpha + i\beta$

Módulo: $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Fase: $\phi = \arctan 2(\beta, \alpha)$



Arcotangente de 2 parámetros:
https://es.wikipedia.org/wiki/Arcotangente_de_dos_par%C3%A1metros

Solución general

Combinación lineal de todos los modos hallados

$$\vec{\Psi} = c_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_3 t}$$
$$\dot{\vec{\Psi}} = i(c_1 \omega_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \omega_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \omega_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_2 t})$$

Veamos la parte escalar de un término:

$$c_j \exp(i\omega_j t) = \rho_j \exp(i\phi_j) \exp(i\omega_j t) = \rho_j \exp(i(\omega_j t + \phi_j))$$

Luego la parte real para la posición es: $\rho_j \cos(\omega_j t + \phi_j)$

peso del modo

fase inicial

Solución general

Combinación lineal de todos los modos hallados

$$\vec{\Psi} = c_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_3 t}$$
$$\dot{\vec{\Psi}} = i(c_1 \omega_1 \vec{\mathbf{a}}_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 \omega_2 \vec{\mathbf{a}}_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 \omega_3 \vec{\mathbf{a}}_3 e^{i\omega_2 t})$$

Los c_i son SEIS incógnitas en total

- Tres partes reales y tres partes imaginarias, ó
- Tres módulos y tres fases

Se hallan planteando condiciones iniciales en

- La posición de cada masa -> Tres ecuaciones
- La velocidad de cada masa -> Tres ecuaciones más

SEIS incógnitas con SEIS ecuaciones LI -> sistema determinado

Condiciones iniciales

posición $\vec{\Psi}(t=0) = \vec{\Psi}_0 = c_1\vec{\mathbf{a}}_1 + c_2\vec{\mathbf{a}}_2 + c_3\vec{\mathbf{a}}_3$

velocidad $\dot{\vec{\Psi}}(t=0) = \vec{\Xi}_0 = i(c_1\omega_1\vec{\mathbf{a}}_1 + c_2\omega_2\vec{\mathbf{a}}_2 + c_3\omega_3\vec{\mathbf{a}}_3)$

Datos que me dan:

- Posición inicial de cada masa: Psi0
- Velocidad inicial de cada masa: Xi0

2 vectores reales, 3 números cada uno

Para resolver voy a tomar parte real:

$$\vec{\Psi}_0 = \Re[c_1\vec{\mathbf{a}}_1 + c_2\vec{\mathbf{a}}_2 + c_3\vec{\mathbf{a}}_3]$$
$$\vec{\Xi}_0 = \Re[i(c_1\omega_1\vec{\mathbf{a}}_1 + c_2\omega_2\vec{\mathbf{a}}_2 + c_3\omega_3\vec{\mathbf{a}}_3)]$$

$$\vec{\Psi}_0 = \Re[c_1]\vec{\mathbf{a}}_1 + \Re[c_2]\vec{\mathbf{a}}_2 + \Re[c_3]\vec{\mathbf{a}}_3$$
$$\vec{\Xi}_0 = \Re[ic_1]\omega_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \Re[ic_2]\omega_2\vec{\mathbf{a}}_2 + \Re[ic_3]\omega_3\vec{\mathbf{a}}_3$$

Notar que: si z = a + i*b → i*z = i*a - b. LUEGO Re[i*z] = -b = -Im[z]

Luego:

$$\vec{\Psi}_0 = \Re[c_1]\vec{\mathbf{a}}_1 + \Re[c_2]\vec{\mathbf{a}}_2 + \Re[c_3]\vec{\mathbf{a}}_3$$
$$\vec{\Xi}_0 = -\Im[c_1]\omega_1\vec{\mathbf{a}}_1 - \Im[c_2]\omega_2\vec{\mathbf{a}}_2 - \Im[c_3]\omega_3\vec{\mathbf{a}}_3$$

Notar que parte real e imaginaria de c_i están desacopladas:

$$\vec{\mathbf{\Psi}}_0 = \Re[c_1]\vec{\mathbf{a}}_1 + \Re[c_2]\vec{\mathbf{a}}_2 + \Re[c_3]\vec{\mathbf{a}}_3$$
$$\vec{\mathbf{\Xi}}_0 = -\Im[c_1]\omega_1\vec{\mathbf{a}}_1 - \Im[c_2]\omega_2\vec{\mathbf{a}}_2 - \Im[c_3]\omega_3\vec{\mathbf{a}}_3$$

Luego, llevo todo a notación matricial

$$\vec{\mathbf{\Psi}}_0 = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_1 & \vec{\mathbf{a}}_2 & \vec{\mathbf{a}}_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \Re[c_1] \\ \Re[c_2] \\ \Re[c_3] \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{\Xi}}_0 = -\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_1 & \vec{\mathbf{a}}_2 & \vec{\mathbf{a}}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1\Im[c_1] \\ \omega_2\Im[c_2] \\ \omega_3\Im[c_3] \end{pmatrix}$$

- La matriz de autovectores columna $\mathbf{A}$ relaciona mis incógnitas (los pesos c_i) con mis datos (las cond inic.)
- Debo invertir el sistema para hallar partes reales e imag de los pesos c_i

Invirtiendo el sistema

$$\begin{pmatrix} \Re[c_1] \\ \Re[c_2] \\ \Re[c_3] \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{\Psi}}_0$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \Im[c_1] \\ \omega_2 \Im[c_2] \\ \omega_3 \Im[c_3] \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{\Xi}}_0$$

¿Cual es el sentido físico de $\mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{\Psi}}_0$ y $\mathbf{A}^{-1}\vec{\boldsymbol{\Xi}}_0$?

Como los autovectores son ortogonales: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

Matriz $\mathbf{A}$ = autovectores columna

Matriz $\mathbf{A}$ inversa = autovectores fila

La matriz inversa me permite proyectar las condiciones iniciales en posición y velocidad sobre los modos normales

Matriz de autovectores columna

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

¿O autovectores fila?

Matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\intercal} = \mathbf{A}$$

Parte del reposo

$$\vec{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Re[c_1] \\ \Re[c_2] \\ \Re[c_3] \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Los coef’s c_i tienen parte real nula

Velocidad inicial

$$\vec{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \Im[c_1] \\ \omega_2 \Im[c_2] \\ \omega_3 \Im[c_3] \end{pmatrix} = -\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solo el coef c2 es no nulo (además es imaginario puro)

$$\Im[c_2] = \frac{\sqrt{2}}{\omega_2}$$

Solución compleja

$$\vec{\Psi} = \underbrace{i\frac{\sqrt{2}}{\omega_2}}_{c2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \exp(i\omega_2 t) = \frac{i}{\omega_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\omega_2 t)$$

Tomo la parte real

$$\Re[\vec{\Psi}] = \frac{1}{\omega_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Re\left[i\cos(\omega_2 t) + i^2\sin(\omega_2 t)\right] = -\frac{1}{\omega_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t)$$

Verificar que en tiempo = 0,
Posición = (0,0,0)
Velocidad = (-1,0,1)

Proyección de condiciones iniciales en posición y velocidad sobre los modos normales:

1. Quiero al modo i **presente**: solo necesito que alguna de las dos condiciones iniciales (posición o velocidad) tenga la forma de ese modo.

2. Quiero al modo i **ausente**: solo necesito que ambas condiciones iniciales **no** tengan proyección sobre el modo i-ésimo (ambas = posición y velocidad).

3. Si quiero más de un modo, necesito la CL de los modos que quiero.

$$\Re[c_j] = \vec{\mathbf{a}}_j \cdot \vec{\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{0}}$$
$$\Im[c_j] = -\omega_j^{-1} \vec{\mathbf{a}}_j \cdot \vec{\mathbf{\Xi}}_{\mathbf{0}}$$

(Para autovectores ortogonales)

Para pensar...

Supongamos que obtenemos una condición inicial que permite introducir al modo j mediante la posición (y que parte del reposo).

¿Es posible eliminar al modo j modificando la velocidad inicial?

Repo del cuatri pasado: https://github.com/petcheme/fisica

Notebook para sistemas de N masas
https://github.com/petcheme/fisica/blob/master/sistemas_discretos/sd_solucion_libre.ipynb

(Buscar versión actualizada en el repo de este cuatri!)

BONUS TRACK

El planteo de condiciones iniciales se puede hacer también planteando trigonométricas, de las dos siguientes maneras

Amplitud y fase: c_i*cos(omega$_i$*t + fase$_i$)

Mis incógnitas son la amplitud y la fase para cada modo (ambos son reales)

Dos amplitudes: c_i*cos(omega$_i$*t) + d_i*sen(omega$_i$*t)

Mis incógnitas son la amplitud del seno y del coseno (ambas son reales también)

Todo lo que discutimos sobre la proyección de las C.I. sobre los modos normales para obtener o evitar un determinado modo NO CAMBIA si usamos cualquiera de estas alternativas

FIN