

PULSOS Y ESPECTROS CUADRADOS

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

1. Espectro cuadrado

$\psi(\omega)$ es un *espectro cuadrado*, esto es, presenta un valor constante, $\frac{1}{\Delta\omega}$, en un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ centrado en un ω_0 y éste es nulo para cualquier otra ω .

a) Verifique que el correspondiente $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\psi(\omega)$ está dado por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \right] e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i\omega_0 t}.$$

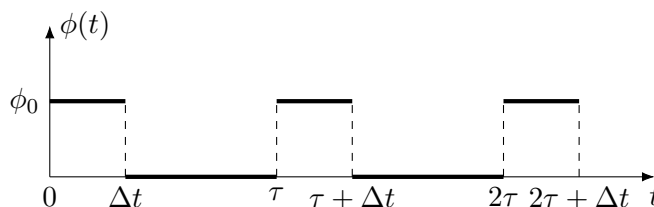
b) Grafique $\psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.

c) Sea T un intervalo de tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T , $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constantes.

2. Tren de pulsos cuadrados

a) Muestre que \mathcal{F} es lineal, por tanto $\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)]$, donde a, b son constantes.

b) $\phi(t)$ es una serie de pulsos cuadrados de duración Δt que se repiten N veces con un período τ ($\Delta t < \tau$). Si $f(n, t)$ describe la función en cualquiera de los intervalos $[n\tau, (n+1)\tau]$ que contiene estos pulsos de amplitud no nula ϕ_0 en $[n\tau, n\tau + \Delta t]$ de forma que $\phi(t) = \sum_{n=0}^N f(n, t)$, compruebe que



$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^N f(n, t)\right] = \sum_{n=0}^N e^{-in\omega\tau} \mathcal{F}[f(0, t)].$$

c) Resuelva $\mathcal{F}[f(0, t)]$ para obtener la expresión completa de $\psi(\nu) = \mathcal{F}[\phi(t)]$.

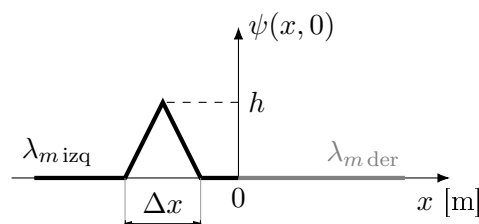
d) El rasgo más prominente de $\psi(\nu)$ son picos en $\nu_p = p\nu_1$ ($p \in \mathbb{N}$) donde $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$, es decir, una serie de armónicos de ν_1 . Encuentre en la expresión de $\psi(\nu)$ el término que depende de τ responsable de este comportamiento y verifique ν_p .

e) De similar análisis identifique qué término con dependencia en Δt hace que los armónicos más importantes se detecten en $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$.

f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es $\delta\nu = \frac{2}{(N+1)\tau}$, y calcule cuánto más pequeño es que el $\Delta\nu$ entre sucesivos ν_p .

3. Interfaz entre medios no dispersivos

Dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, $\lambda_{m \text{ izq}}$ y $\lambda_{m \text{ der}}$, están unidas en un punto y sometidas a una tensión T_0 . Sobre la primera se propaga hacia la derecha el pulso que muestra la figura. Se conocen $\lambda_{m \text{ izq}}$, $\lambda_{m \text{ der}}$, T_0 , Δx y h , y se considera que los medios son no dispersivos.



a) Hallar el desplazamiento $\psi(x, t)$.

b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el medio es dispersivo.