16. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

   a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right].$$

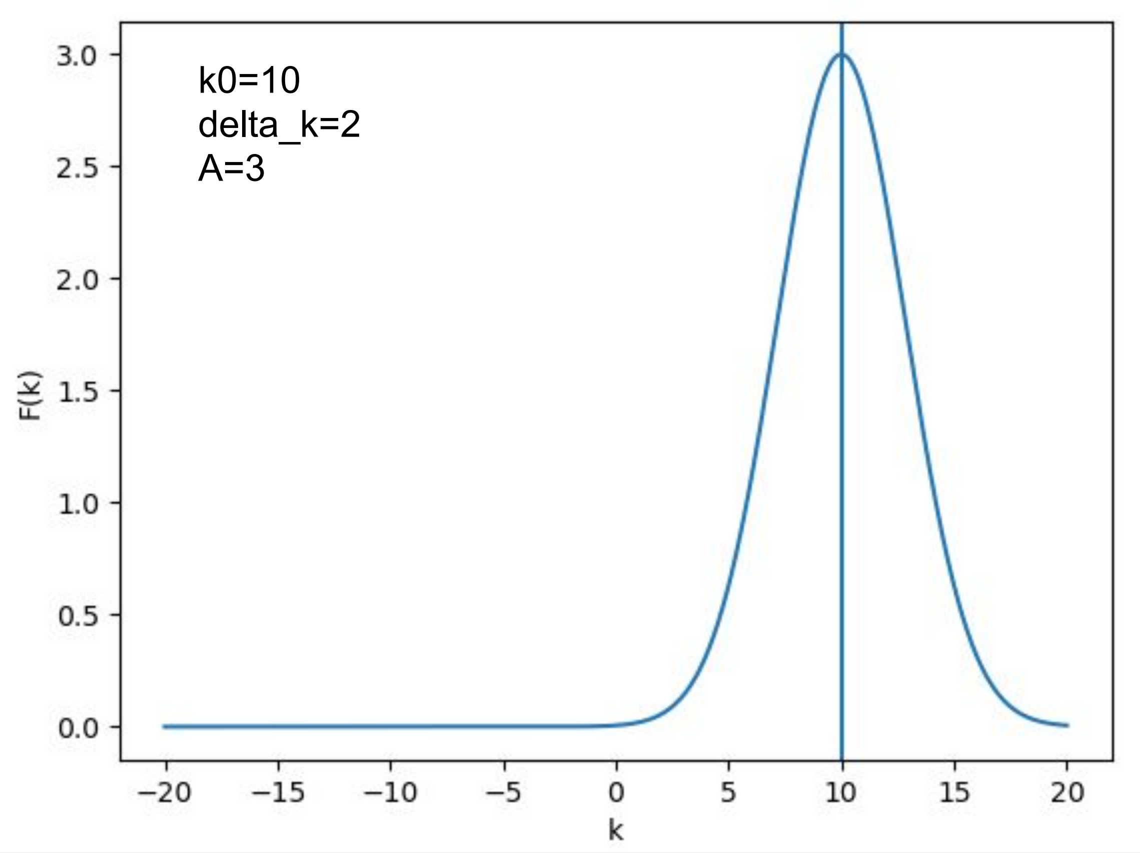
   Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$ (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

etc.

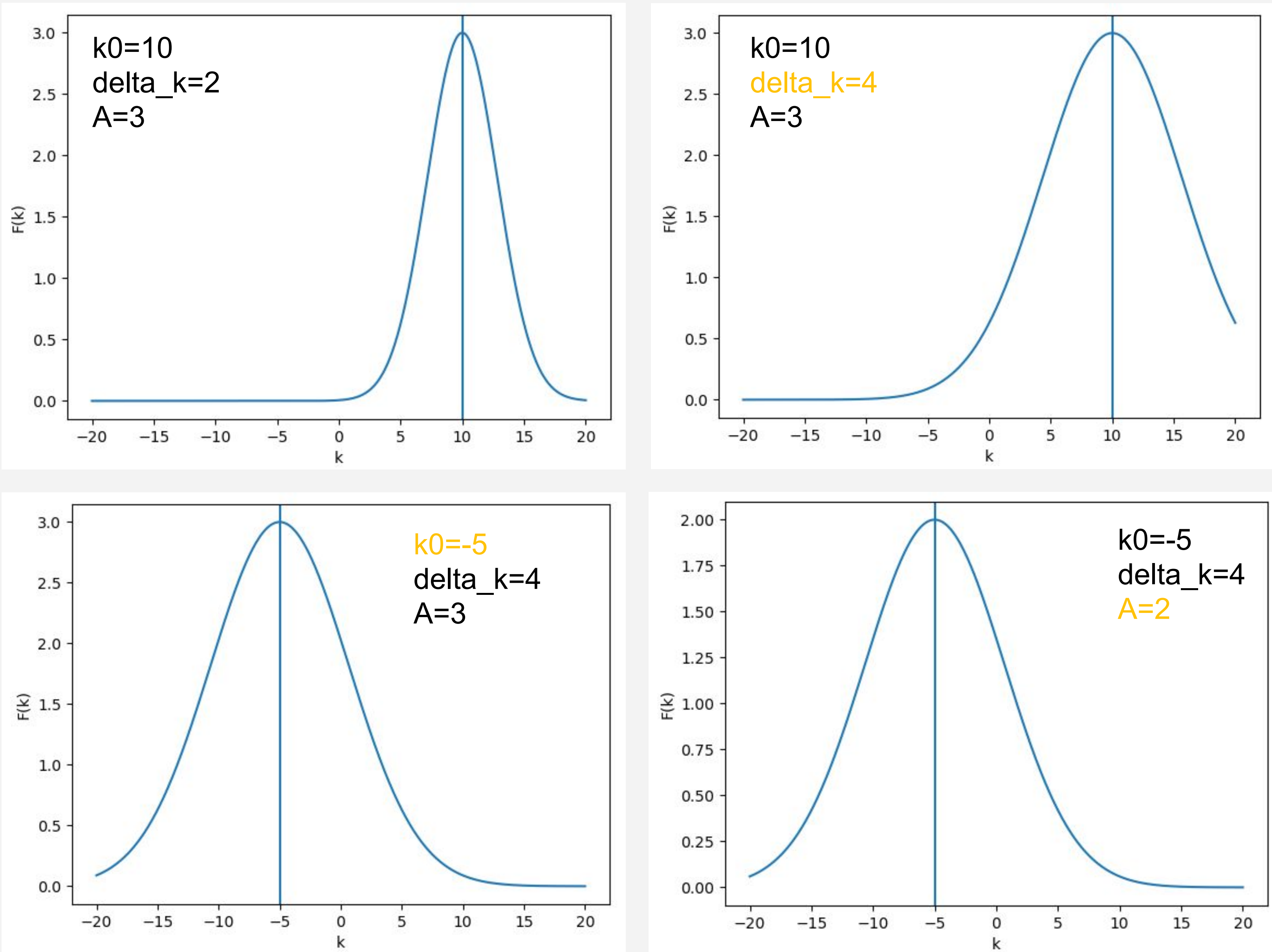
¿Qué es un paquete de ondas?

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]$$

Paquete de ondas Gaussiano (aka campana de Gauss, curva normal, etc.)



$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]$$



Dos parámetros

- Ubicación:
    - nos dice alrededor de qué valor de k se encuentra concentrado el paquete
    - posición del máximo, k0
- Dispersión:
    - Nos dice qué tan cerca/lejos alrededor de k0 se encuentra disperso el paquete
    - ancho de la campana, delta_k

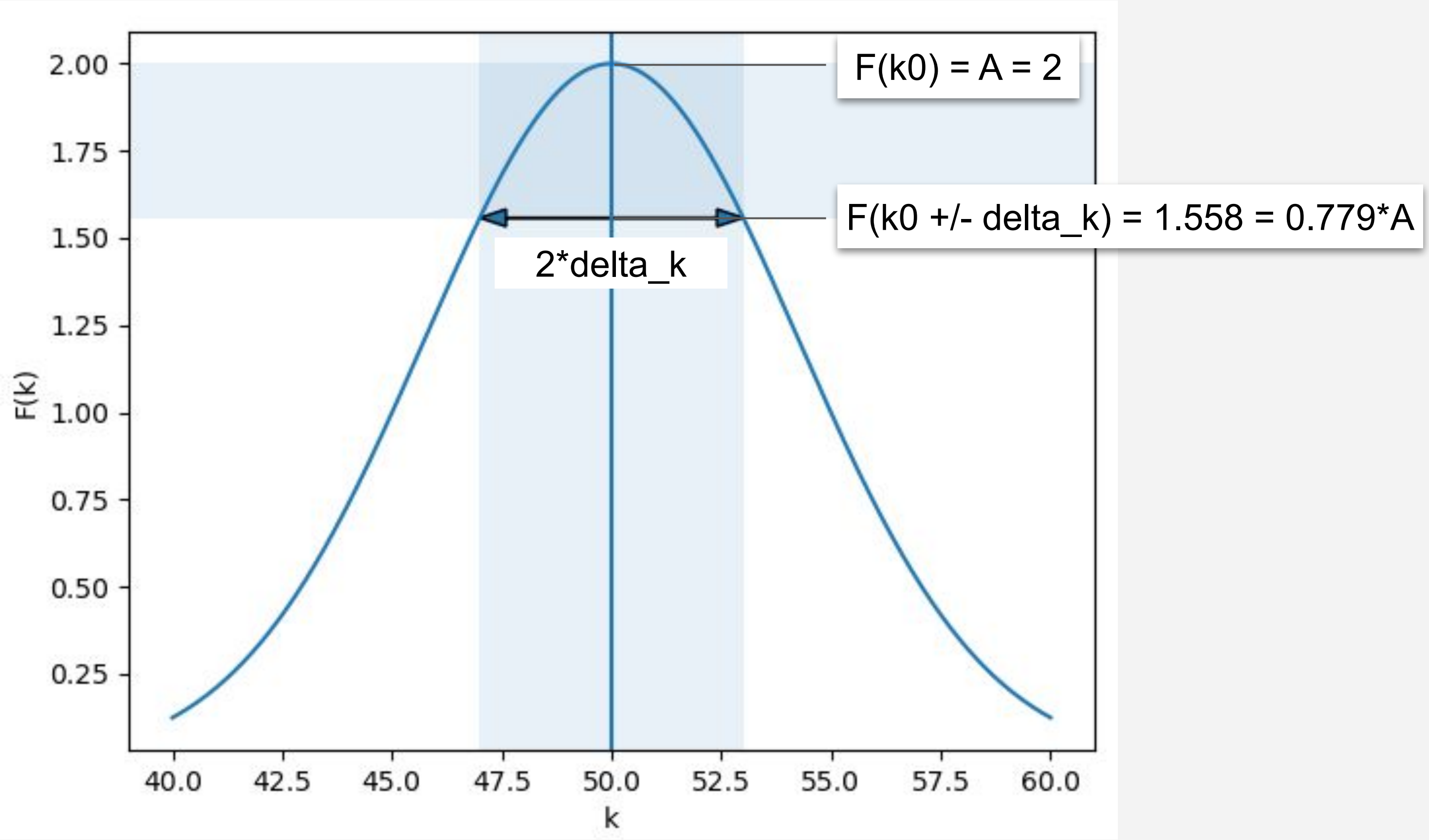
Análogo a la distribución estadística:

- k0 da la misma información que la media
- delta_k da la misma info que la desviación estándar (aunque la definición no es la misma…)

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]$$

¿Cual es el ancho de la campana?

A=2
k0=50
delta_k=3



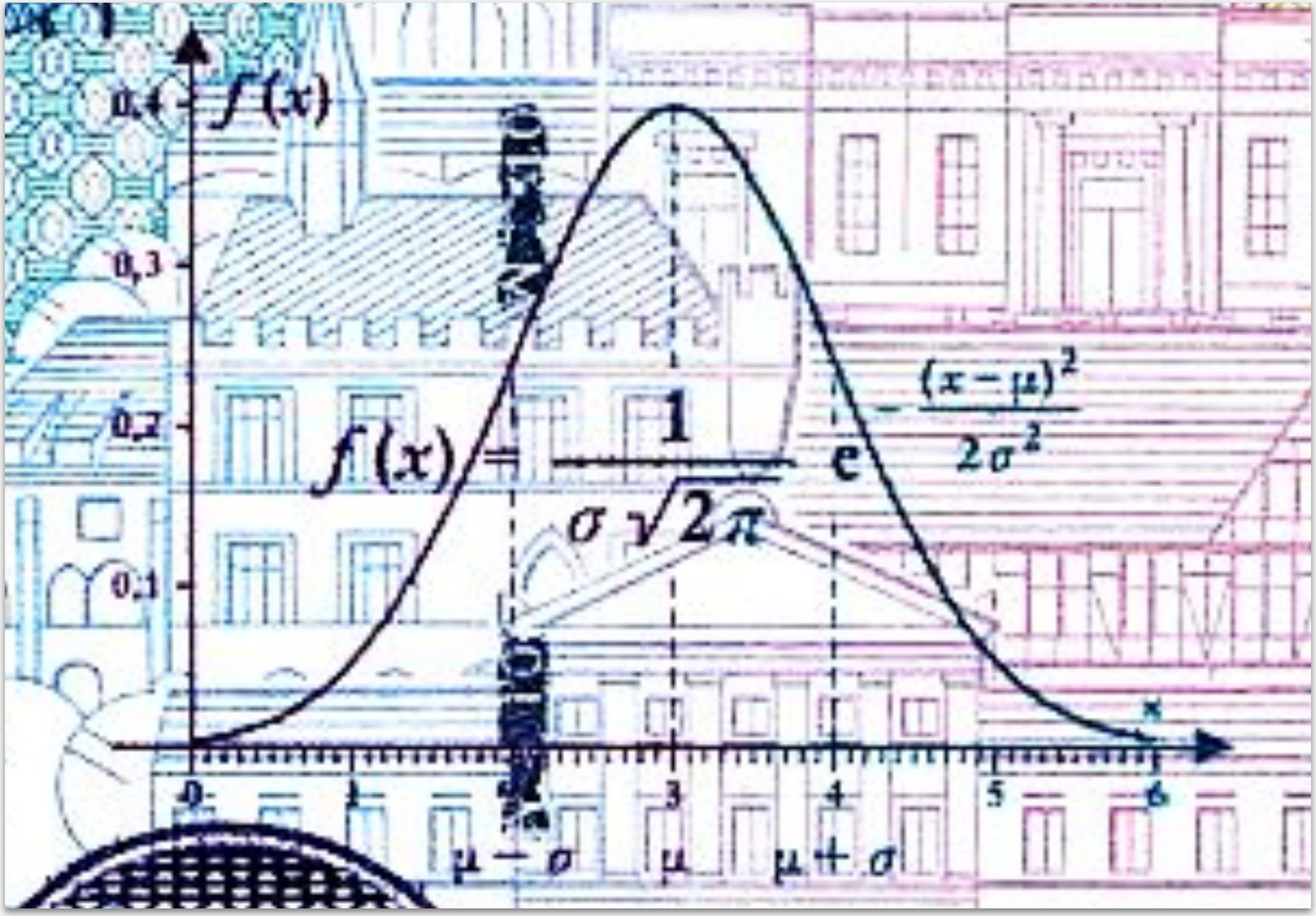
El ancho delta_k está definido como el desplazamiento relativo a k0 tal que F valga 0.779 veces su valor pico

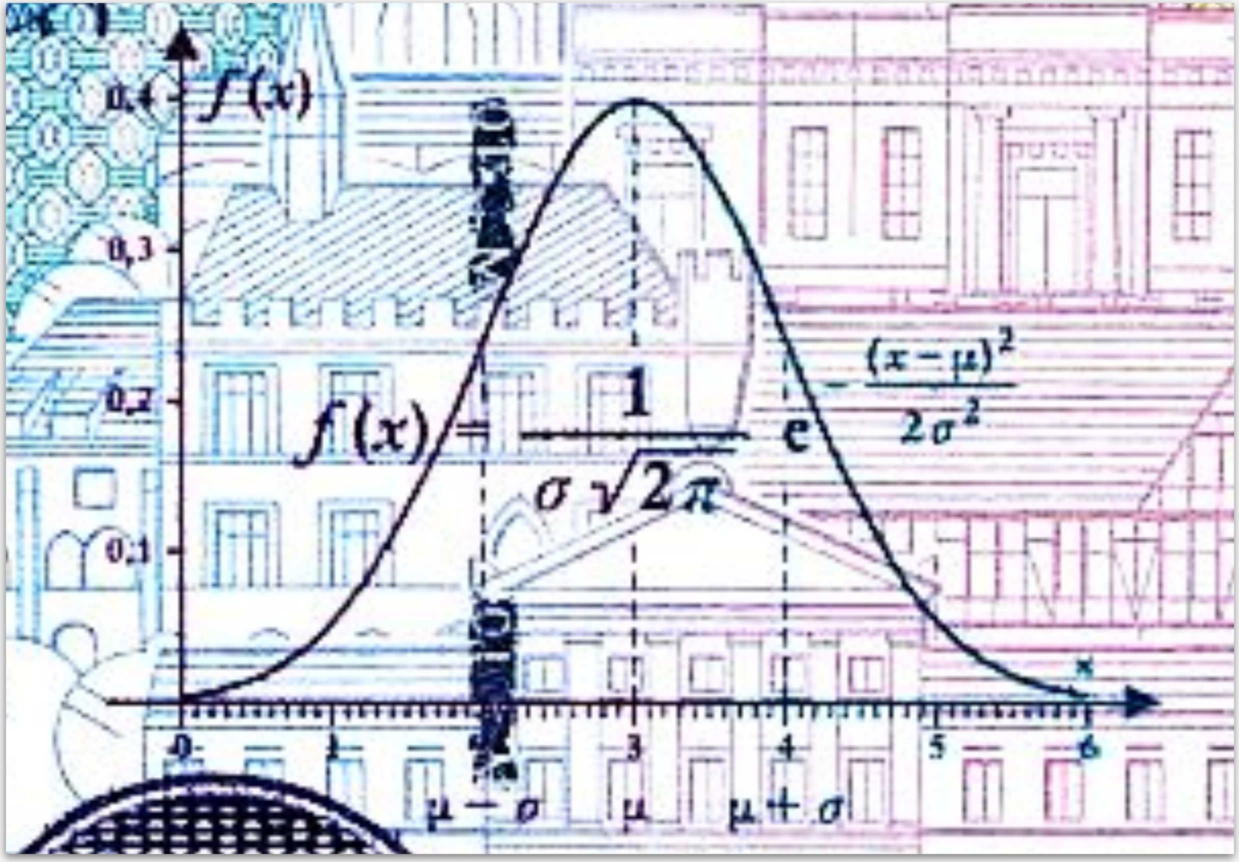
(Una de entre tantas definiciones igualmente buenas o malas…)

C.F. Gauss

GN4480100S8
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
$f(x)$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$\mu - \sigma$ μ $\mu + \sigma$
10
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. September 1999
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
ZEHN DEUTSCHE MARK
10
GN4480100S8

Aquí el ancho está definido mediante el parámetro sigma





Sigma = 1 en el gráfico

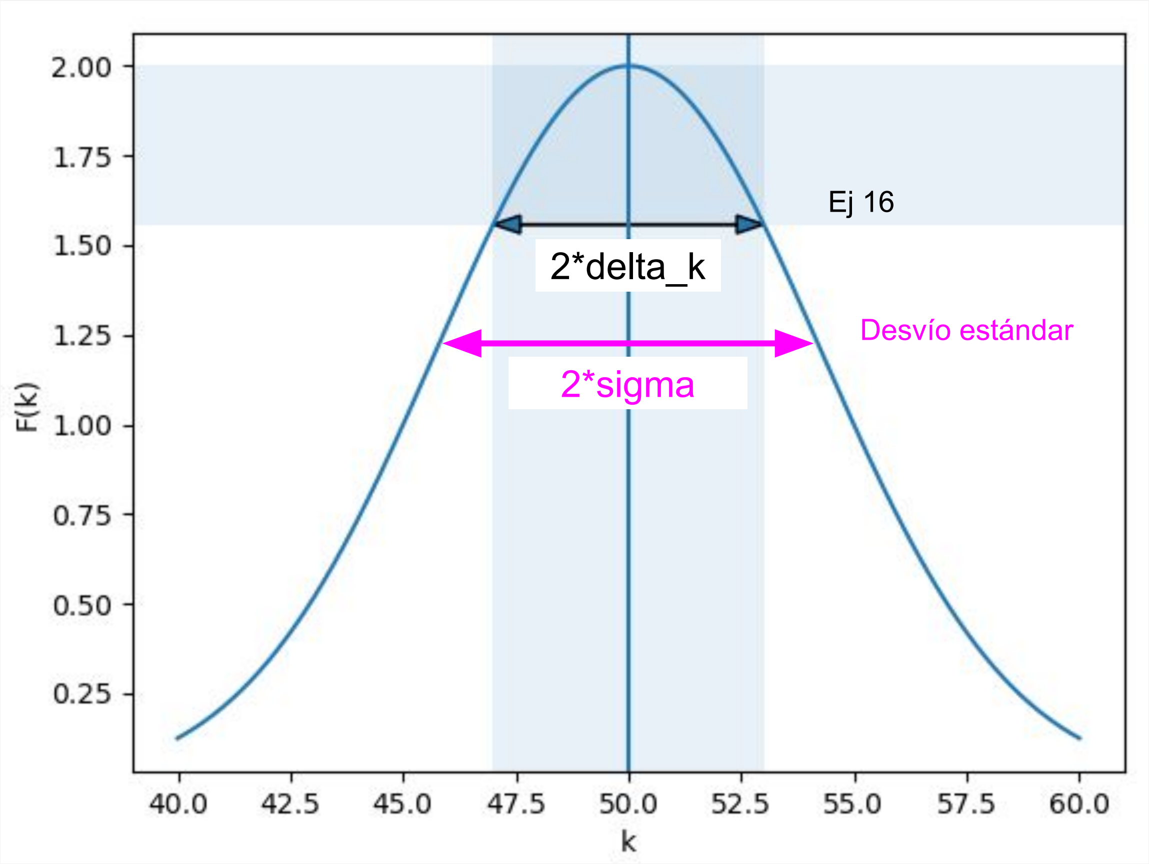
Luego A =.399

Expresemos delta k en función del desvío estándar (sigma)

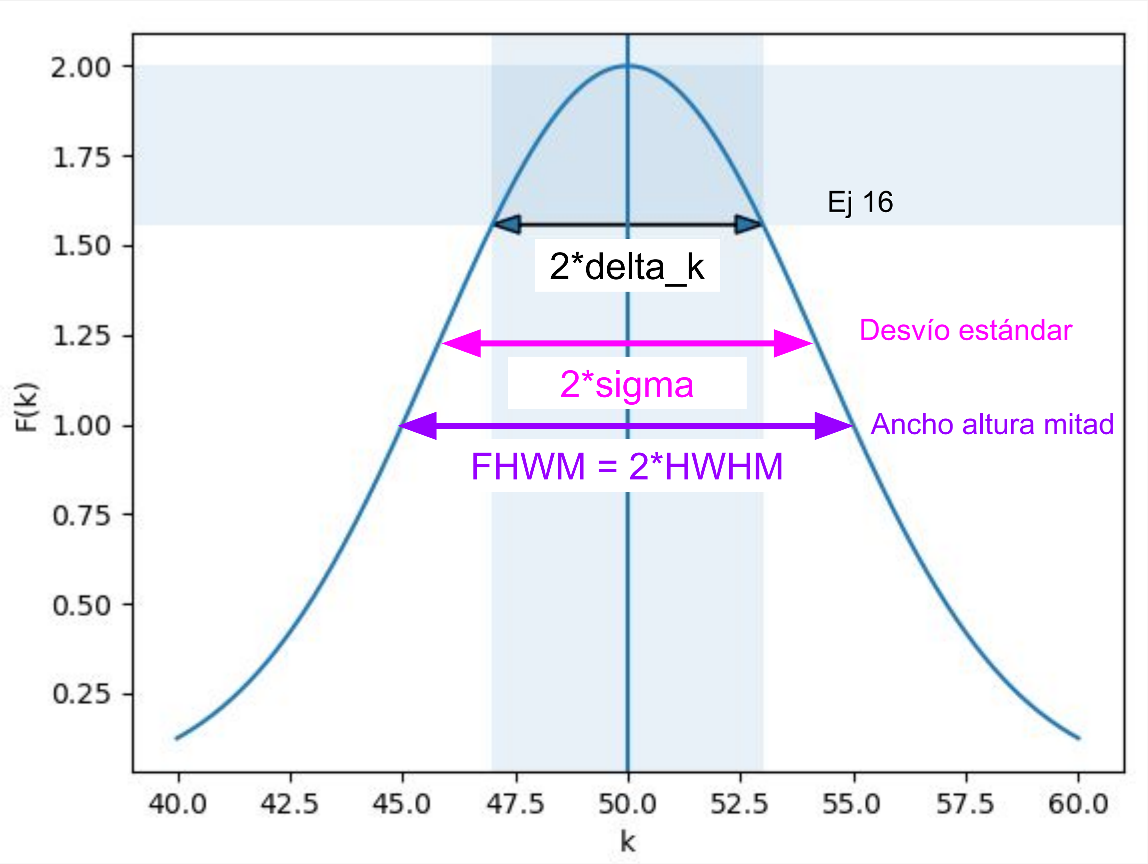
$$4\,\Delta k^2 = 2\,\sigma^2$$
$$2\,\Delta k^2 = \sigma^2$$
$$\Delta k = 2^{-1/2}\,\sigma$$

La desviación estándar expresa el ancho de la curva pero tomando una altura de referencia diferente

Diferentes definiciones para medir el ancho

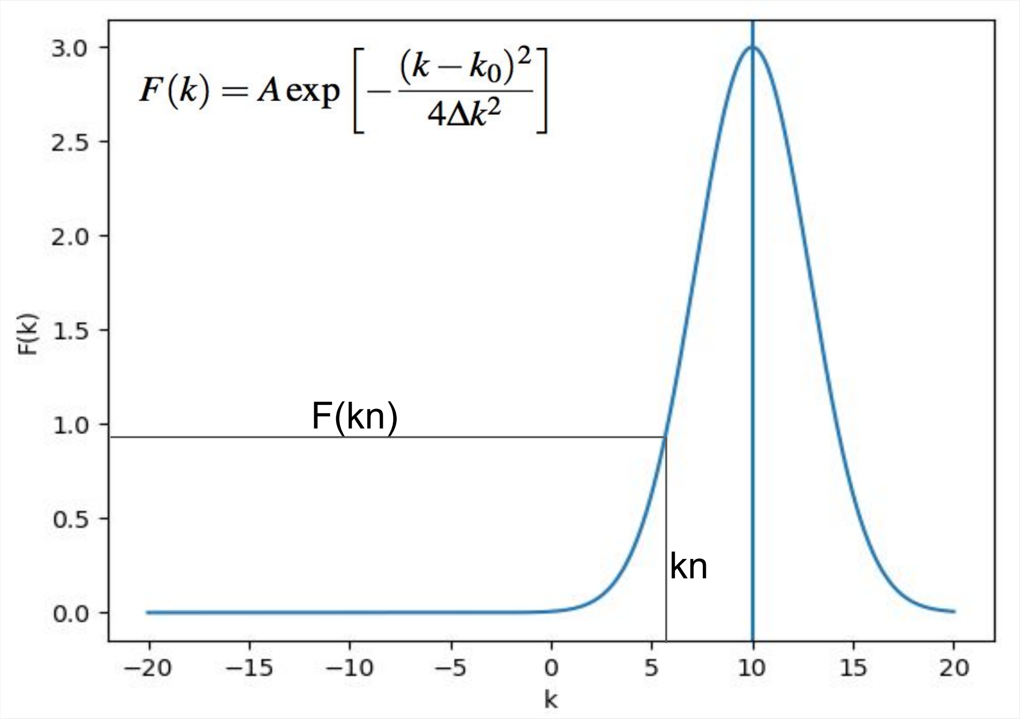


Diferentes definiciones para medir el ancho



Comentario en clase:
FWHM = full-width half maximum = ancho altura mitad
HWHM = half-width half maximum = 0.5* FWHM

Un paquete de ondas es la superposición de muchas ondas viajeras
F(k) nos da la amplitud de la onda asociada al nro de onda k



$$\Psi = F(k_1)\cos(k_1 x - \omega_1(k_1)t) + F(k_2)\cos(k_2 x - \omega_2(k_2)t) + \ldots$$

Paquete:

- superposición de ondas viajeras con frecuencias k_n y omega_n
- k es continuo: superposición infinita
- F(k_n) es el peso del modo n-ésimo
- En este caso F(k_n) es real pero podría ser complejo

Pasando al continuo

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk$$

- Expresión general para F(k) y relación de dispersión **arbitrarios.**

- Vamos a **linealizar** la relación de dispersión \omega(k) para poder integrar.

- ¿Qué precio debo pagar?

Aproximación

F(k) está concentrada alrededor de un cierto valor k0. Luego, solo me importan los valores de k en un entorno pequeño alrededor de k0.

Desarrollo de w(k) a primer orden alrededor de k0:

$$\begin{aligned} \omega(k) &\sim \omega(k_0) + (k - k_0) \left.\frac{\partial \omega(k)}{\partial k}\right|_{k=k_0} \\ &\sim k_0 v_{\mathrm{f}} + (k - k_0) v_{\mathrm{g}} \end{aligned}$$

Taylor a primer orden

velocidad de fase $v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$

$v_{\mathrm{g}} = \left.\frac{\partial \omega(k)}{\partial k}\right|_{k=k_0}$ velocidad de grupo

- vf y vg son constantes.
- Dependen de la relación de dispersión y de k0
- Vamos a ver qué interpretación tienen vf y vg al finalizar el cálculo

Caso: Ecuación de ondas clásica

Notar que si la relación de dispersión es lineal

omega = c*k

no necesito linealizar.

Además (si es homogénea):

$$v_f = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = c$$

$$v_g = \left.\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right|_{k=k_0} = c$$

ambas velocidades coinciden

A integrar!

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{i(kx - t\overbrace{[k_0 v_f + (k-k_0)v_g]}^{\text{omega(k)}})}$$

Separo las exponenciales, luego multiplico por 1

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} e^{-itv_f k_0} e^{-itv_g(k-k_0)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} \underbrace{\overbrace{e^{ik_0 x} e^{-ik_0 x}}^{= 1} e^{-itv_f k_0}}_{\text{No depende de k}} e^{-itv_g(k-k_0)}$$

$$= \underbrace{e^{ik_0(x - v_f t)}}_{\text{Onda armónica viajera, vf, k0}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) \underbrace{e^{i(k-k_0)(x - v_g t)}}_{\text{Onda armónica viajera, vg, k-k0}}}_{f(x - v_g t)}$$

Todavía no hicimos la integral, ni siquiera empleamos la forma de F(k). Sin embargo:

$$\Psi = \underbrace{g(x - v_{\mathrm{f}}t; k_0)}_{\text{portadora}}\underbrace{f(x - v_{\mathrm{g}}t)}_{\text{envolvente}}$$

Portadora:

- Onda viajera armónica
- Nro de onda k0
- Modulación rápida!

Envolvente:

- Paquete de ondas, depende de F(k)
- Superposición de k's dados por k - k0 << k0 (es decir, k's <u>muy pequeños</u>!)
- Menor frecuencia que la portadora...
- Modulación lenta!

(Cada una sirve como modulación de la otra: Si no pudiéramos separar claramente la frecuencia de cada modulación, no tendría mucho sentido distinguir la portadora de la moduladora)

Reemplacemos F(k)

$$\Psi = g(x - v_{\mathrm{f}}t; k_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk A e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\Delta k}\right)^2} e^{i(k-k_0)(x-v_{\mathrm{g}}t)}$$

Identidad útil de tabla de integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$$

Sustitución: $$\begin{cases} k - k_0 = -u \\ dk = -du \\ 4\Delta k^2 = 2\sigma^2 \end{cases}$$

$$\Psi = -g(x - v_{\mathrm{f}}t; k_0) A \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{-iu(x-v_{\mathrm{g}}t)}$$

Usando la identidad

$$\Psi = -g(x - v_f t; k_0) A \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} e^{-iu(x-v_g t)}$$

$$= -g(x - v_f t; k_0) A \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (x-v_g t)^2}$$

Errata: falta un signo menos

Reemplazando Delta k:

$$\Psi = (\sqrt{4\pi} A \Delta k) \underbrace{e^{ik_0(x-v_f t)}}_{\text{portadora}} \underbrace{e^{-\Delta k^2 (x-v_g t)^2}}_{\text{envolvente}}$$

- Tal como habíamos dicho antes, la envolvente es un paquete de ondas
- Su forma es la de una campana de Gauss cuyo pico toma la posición vg*t en cada momento del tiempo

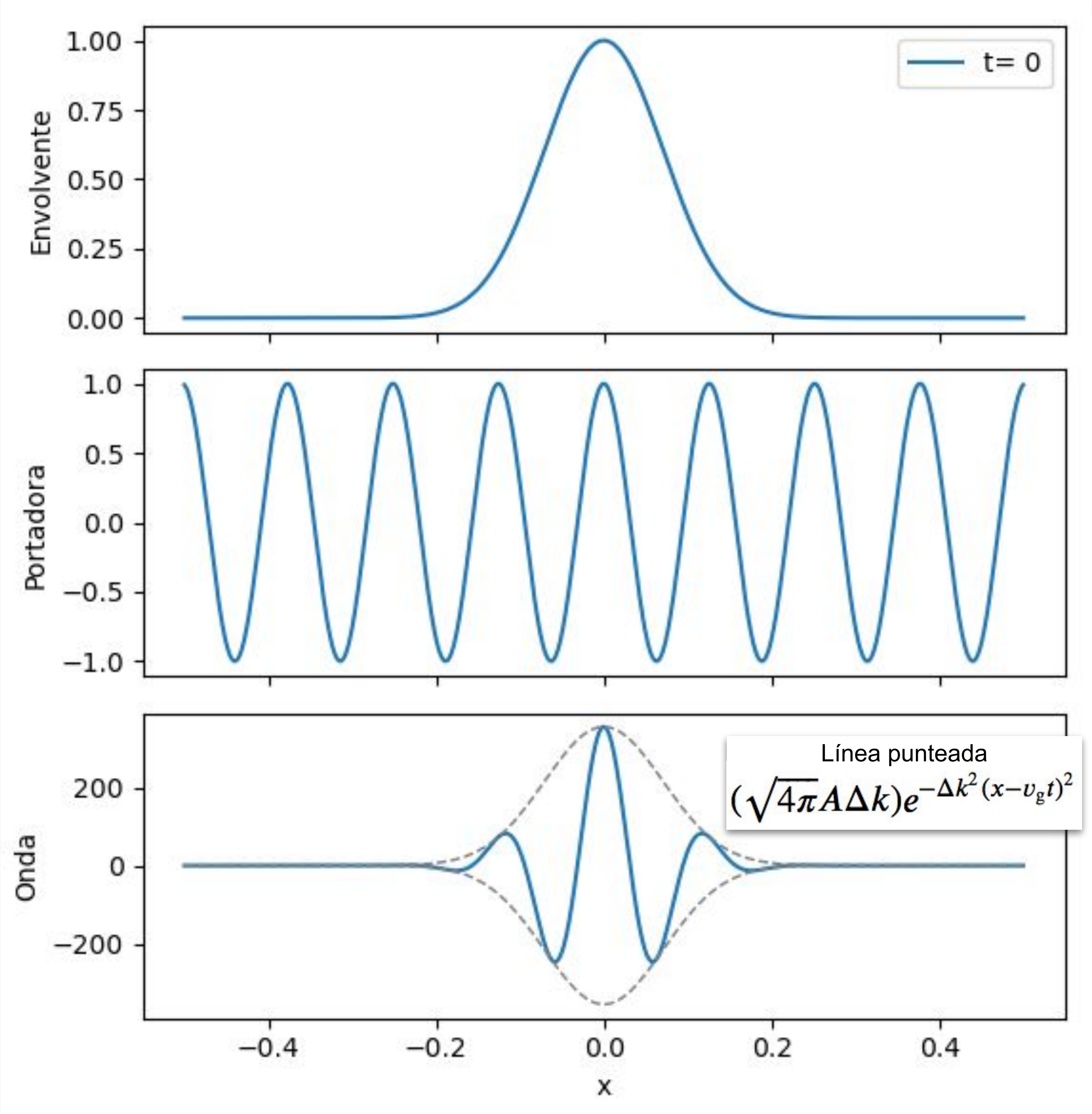
$$\Psi = (\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{ik_0(x-v_{\mathrm{f}}t)}e^{-\Delta k^2(x-v_{\mathrm{g}}t)^2}$$

$$e^{-\Delta k^2(x-v_{\mathrm{g}}t)^2}$$

Parte real de:

$$e^{ik_0(x-v_{\mathrm{f}}t)}$$

$$\Psi$$



Línea punteada

$$(\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{-\Delta k^2(x-v_{\mathrm{g}}t)^2}$$

k0 = -50
delta_k = 10
A = 10
vf = vg = 1

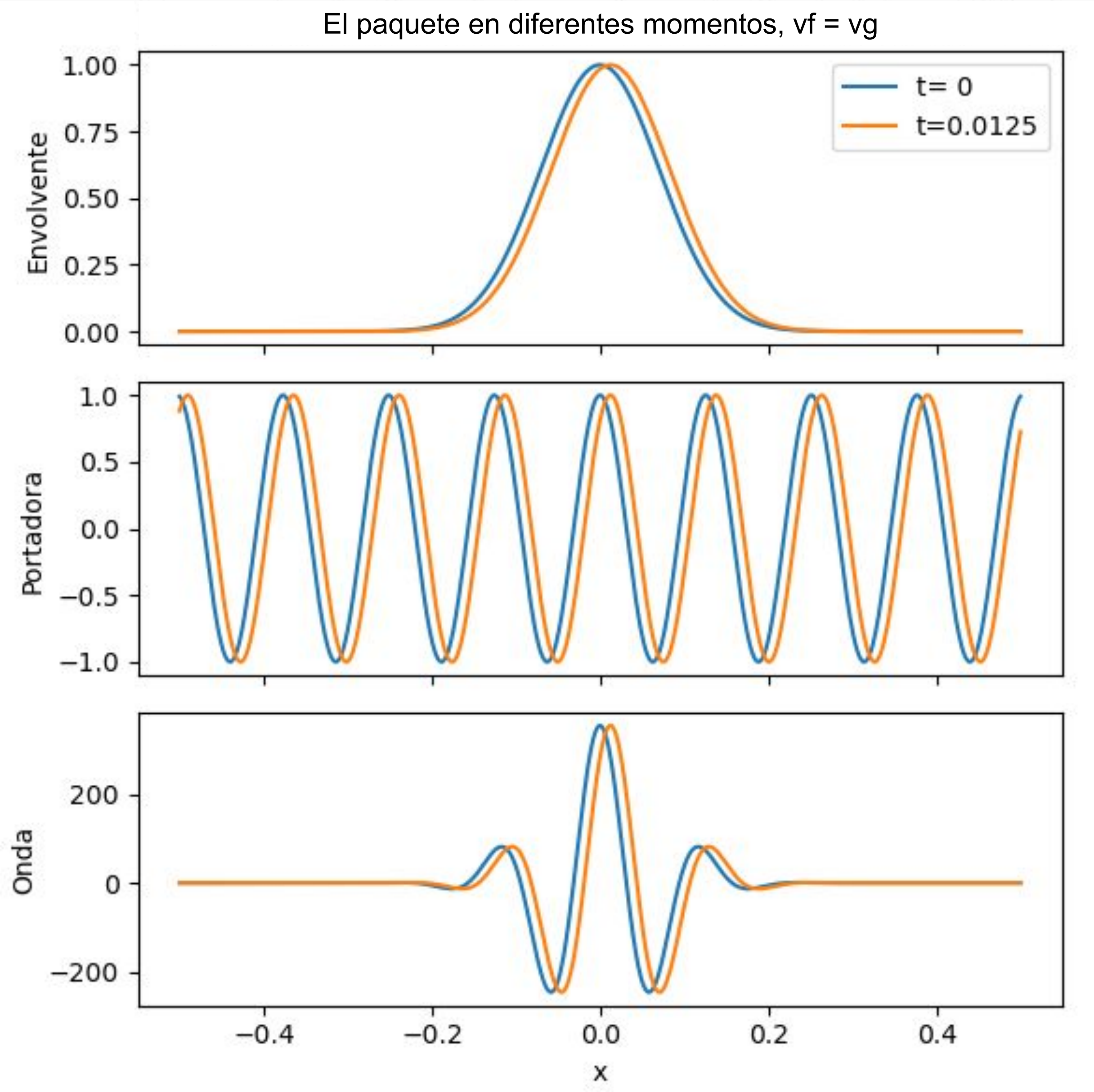
$$\Psi = (\sqrt{4\pi} A \Delta k) e^{ik_0(x - v_f t)} e^{-\Delta k^2 (x - v_g t)^2}$$

$$e^{-\Delta k^2 (x - v_g t)^2}$$

Parte real de:

$$e^{ik_0(x - v_f t)}$$

$$\Psi$$



k0 = 50
delta_k = 10
A = 10
vf = vg = 1

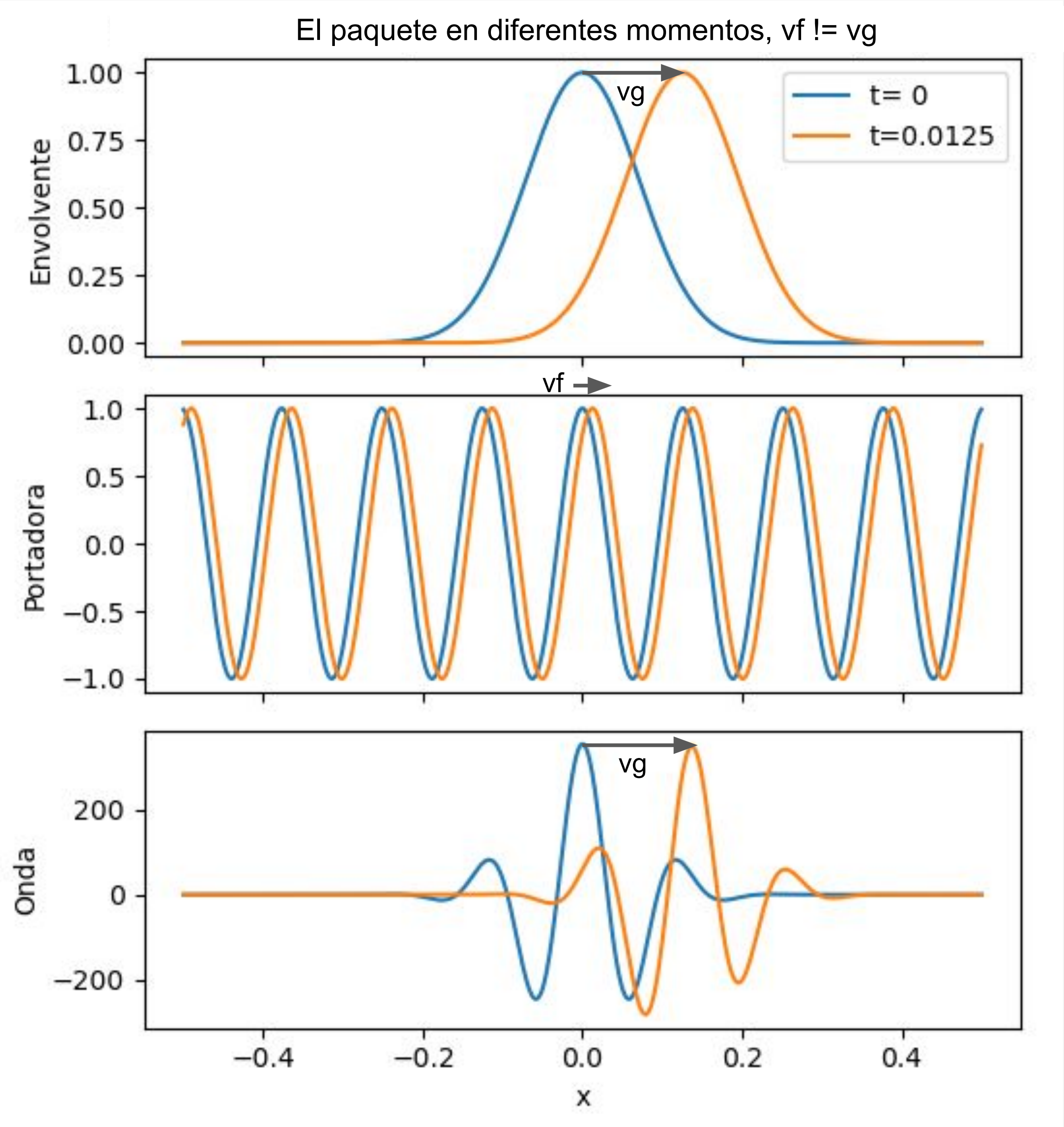
$$\Psi = (\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{ik_0(x-v_f t)}e^{-\Delta k^2(x-v_g t)^2}$$

$$e^{-\Delta k^2(x-v_g t)^2}$$

Parte real de:

$$e^{ik_0(x-v_f t)}$$

$$\Psi$$

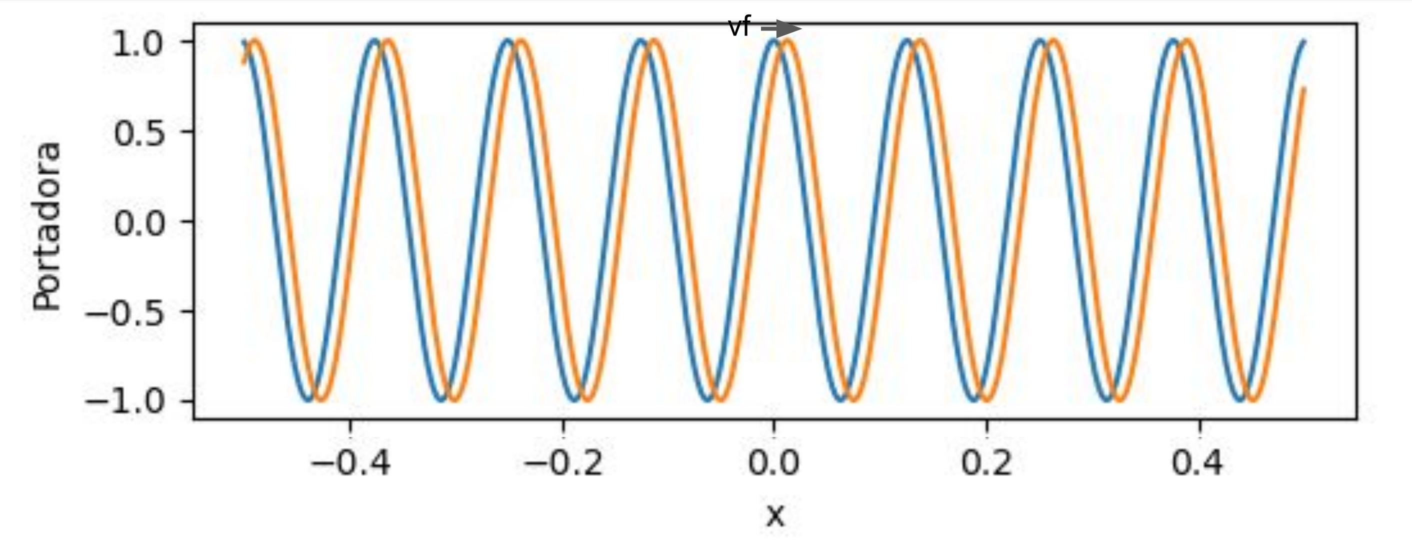


k0 = 50
delta_k = 10
A = 10
vf = 1
vg = 10

La velocidad de fase es la velocidad a la que avanza la portadora.

$$e^{ik_0(x-v_f t)}$$

¿Por qué la llamamos así?



Es la velocidad a la que avanza la fase

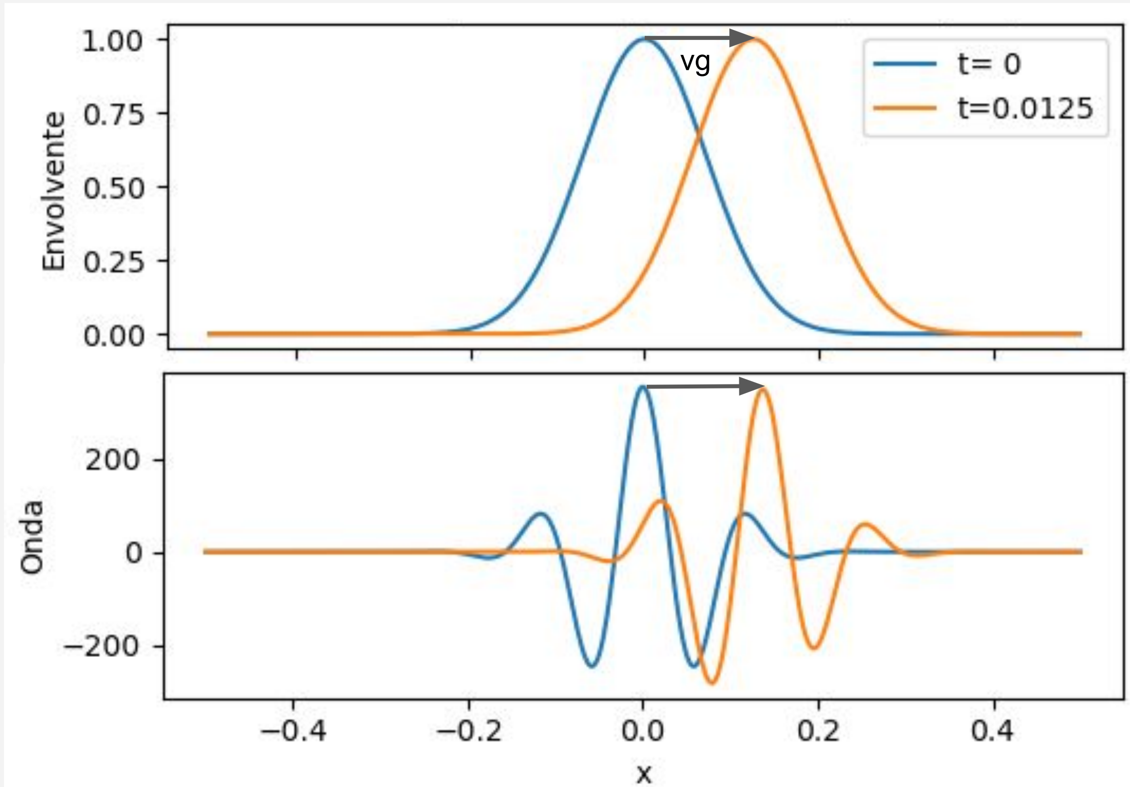
La única información que propaga la portadora es la fase

La clave es que la portadora es igual en todo punto del tiempo y el espacio

La velocidad de grupo es la velocidad a la que avanza la envolvente.

$$e^{-\Delta k^2 (x - v_g t)^2}$$

¿Por qué la llamamos así?

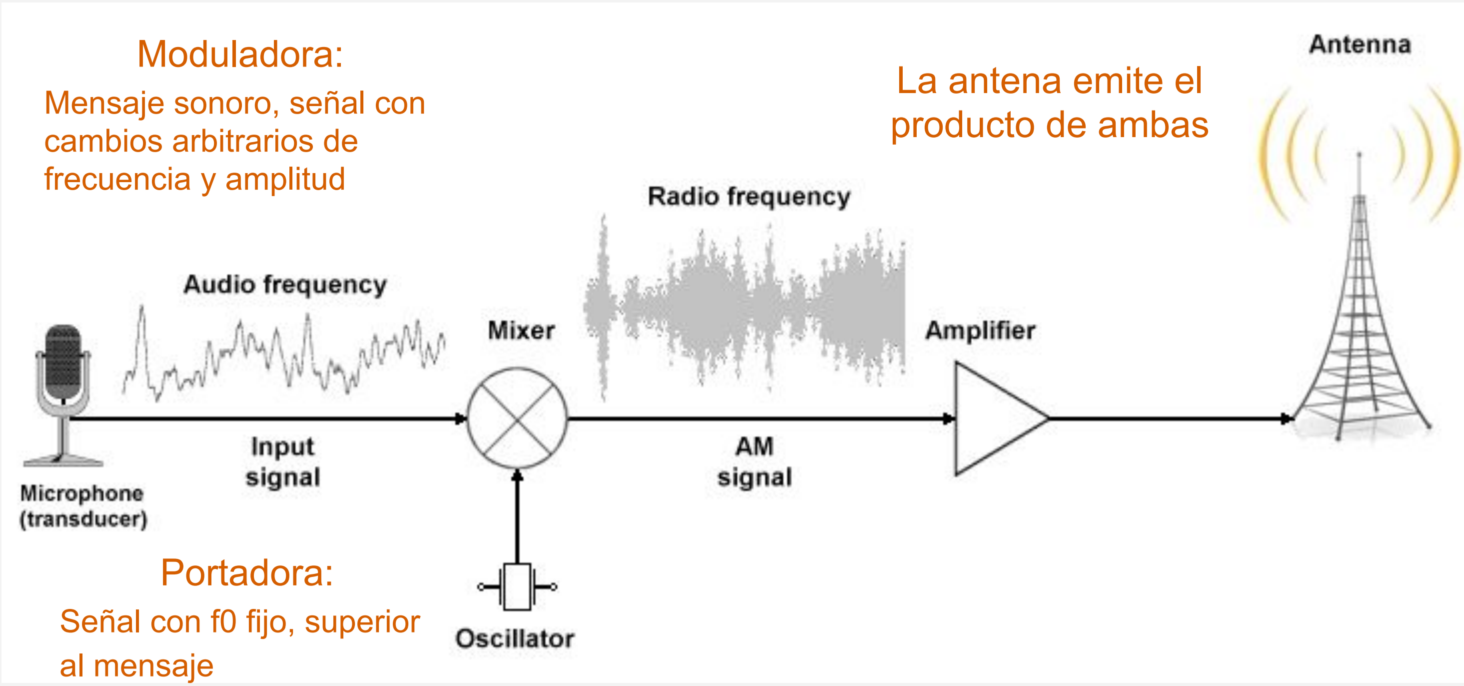


Es la velocidad a la que avanza el paquete

La envolvente permite la transmisión de información. La clave es que la envolvente ocupa una determinada región del espacio en un dado momento del tiempo. (Está localizada).

Además, podemos manipularla para que tome la forma que nosotros querramos. Por ejemplo, puede tomar la forma de una señal de audio

Transmisión de radio AM



Radio AM de onda media:
Señal* con f0 entre 540 y 1700 kHz
(recordar f = omega / (2pi))

*Señal electromagnética, c = 300 000 km/s,
¿cuánto vale la longitud de onda?

¿Cual es el ancho de la envolvente?

F(k): $$\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right)$$ El ancho es Δk (es dato)

Envolvente: $$\underbrace{\overset{(1)}{\exp\left(-\frac{(x-v_g t)^2}{4\Delta x^2}\right)}}_{\text{Expresión análoga a la de F(k), el ancho es }\Delta x} = \underbrace{\overset{(2)}{\exp\left(-\Delta k^2 (x-v_g t)^2\right)}}_{\text{Expresión que obtuve para la envolvente}}$$

Comparando (1) con (2), puedo hallar Δx en función de Δk:

$$\frac{1}{4\Delta x^2} = \Delta k^2$$

El ancho del espectro se relaciona con el ancho del pulso

$$\frac{1}{4\Delta x^2} = \Delta k^2$$

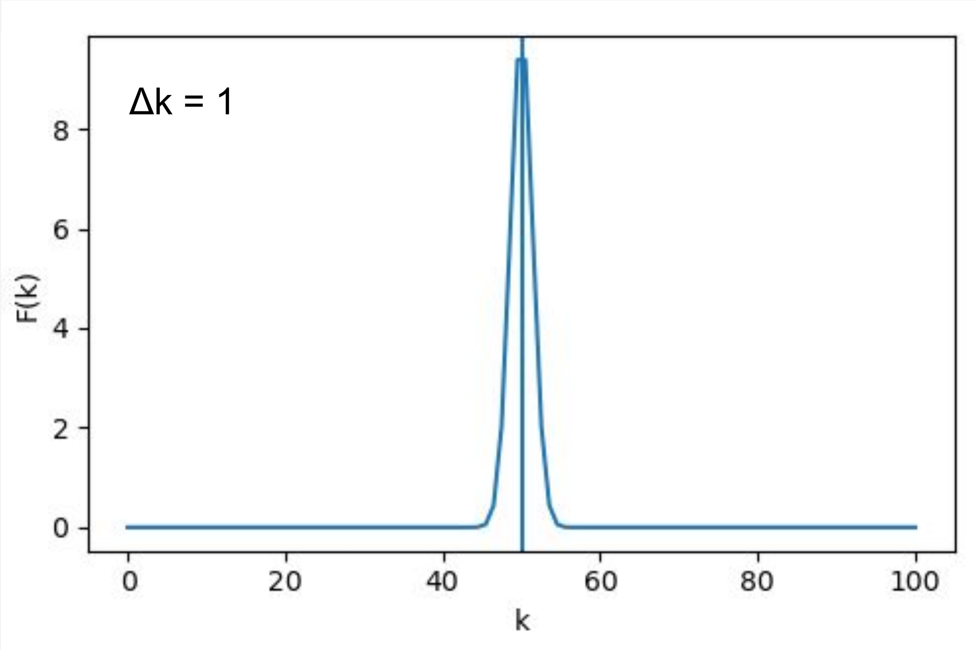
- A mayor ancho espectral (Δk), más angosto en el espacio es el pulso.
- (Es decir, más corta en el tiempo es la señal.)

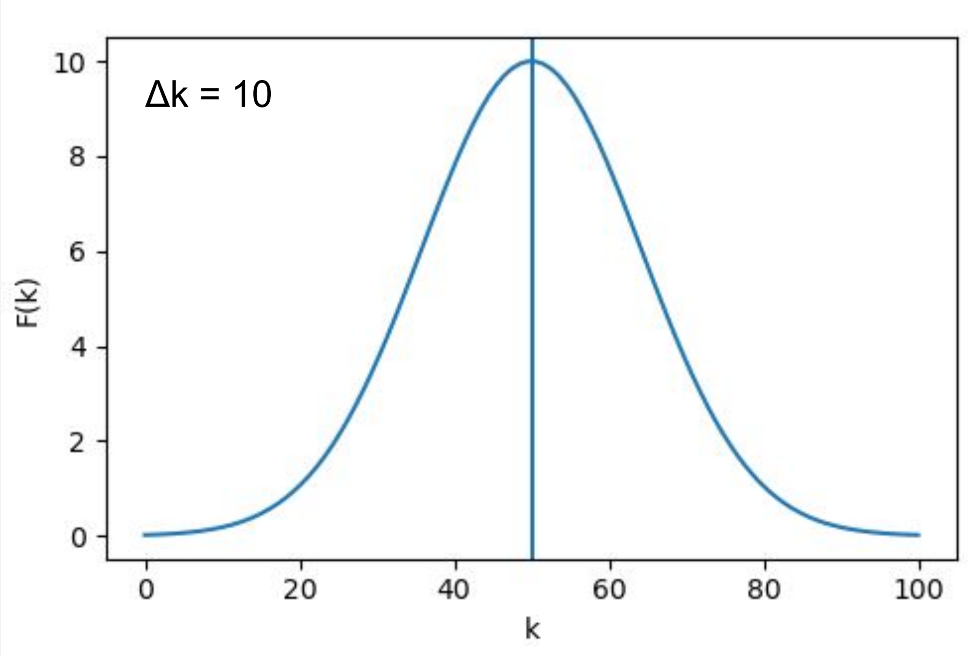
- Inversamente, cuanto más angosto es el espectro, más ancho en el espacio es el pulso…
- (Es decir, más tiempo dura la señal.)

Forma usual:

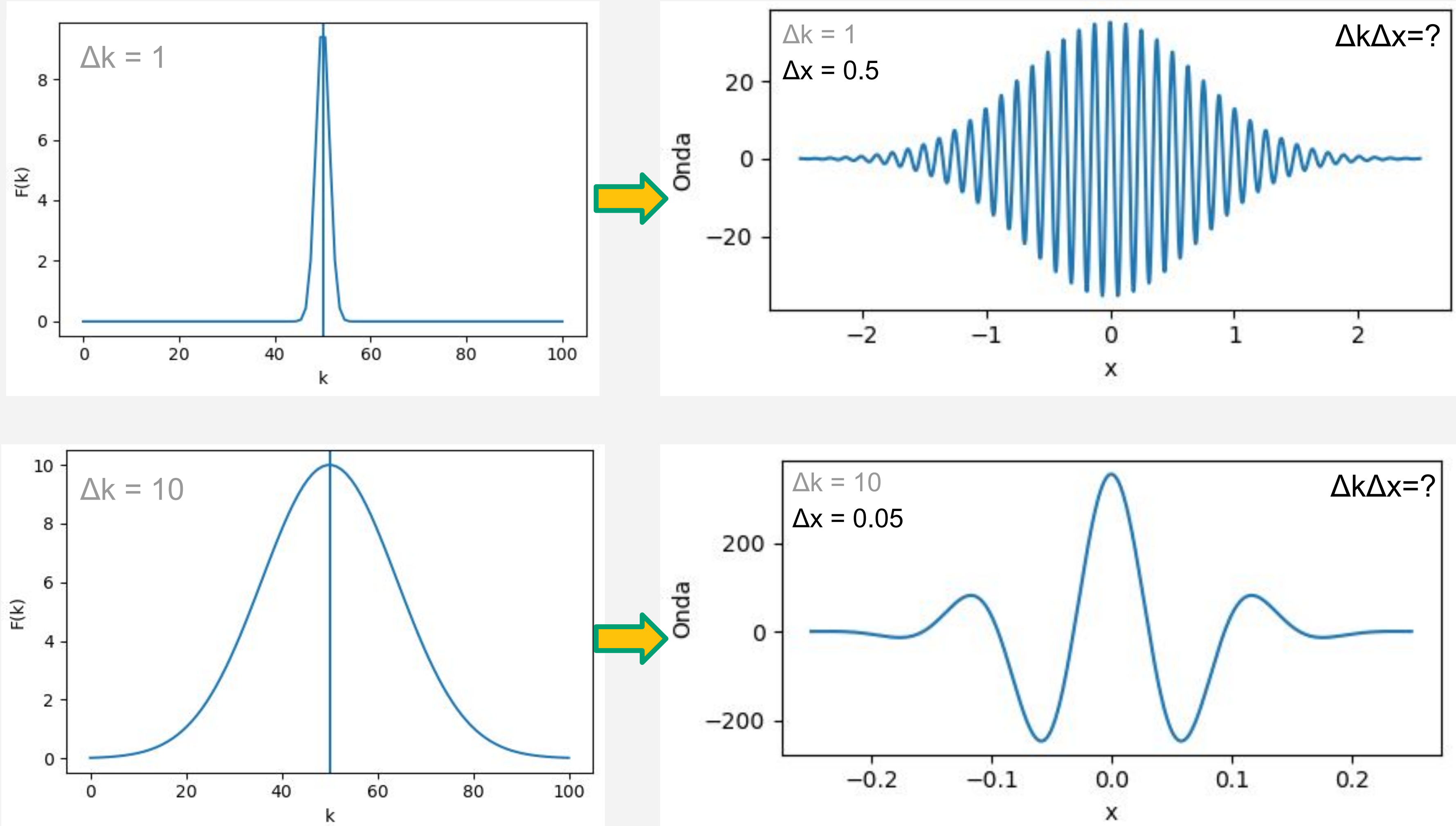
$$\Delta k \Delta x = 1/2$$

k0=50
A=10



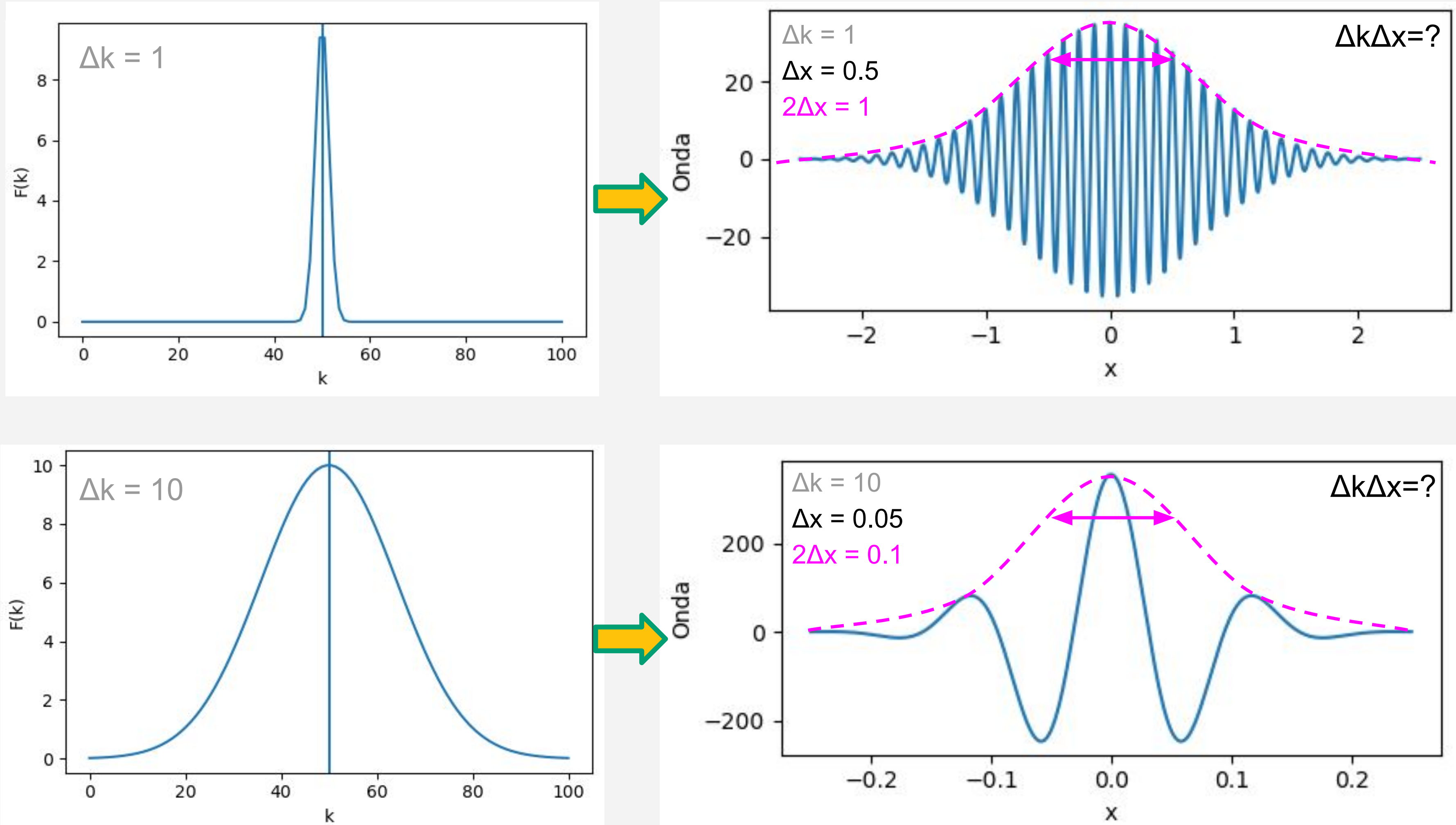


k0=50
A=10



Notar que la portadora es la misma en ambos casos

k0=50
A=10



Notar que la portadora es la misma en ambos casos

Gráfico de colores de la función de onda en función de x y t

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=1

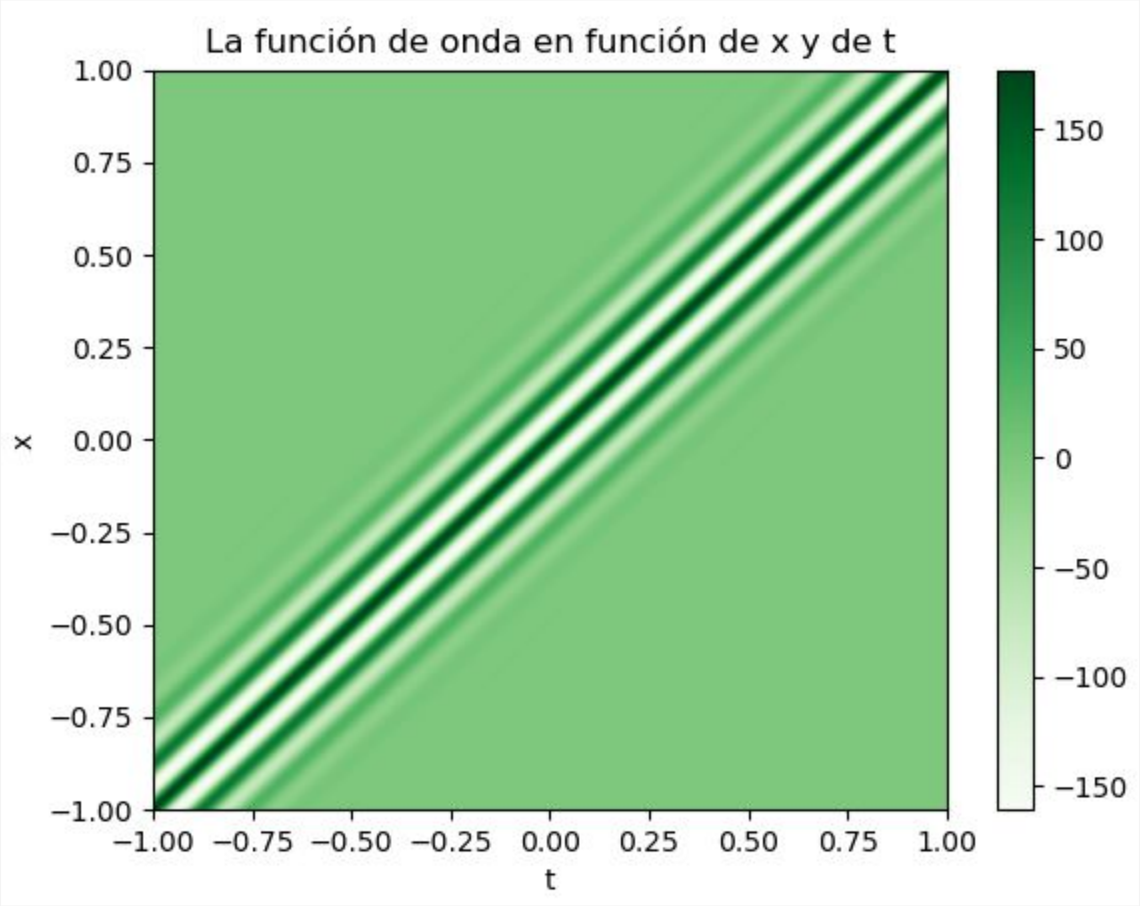


Gráfico de colores de la función de onda en función de x y t

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=1

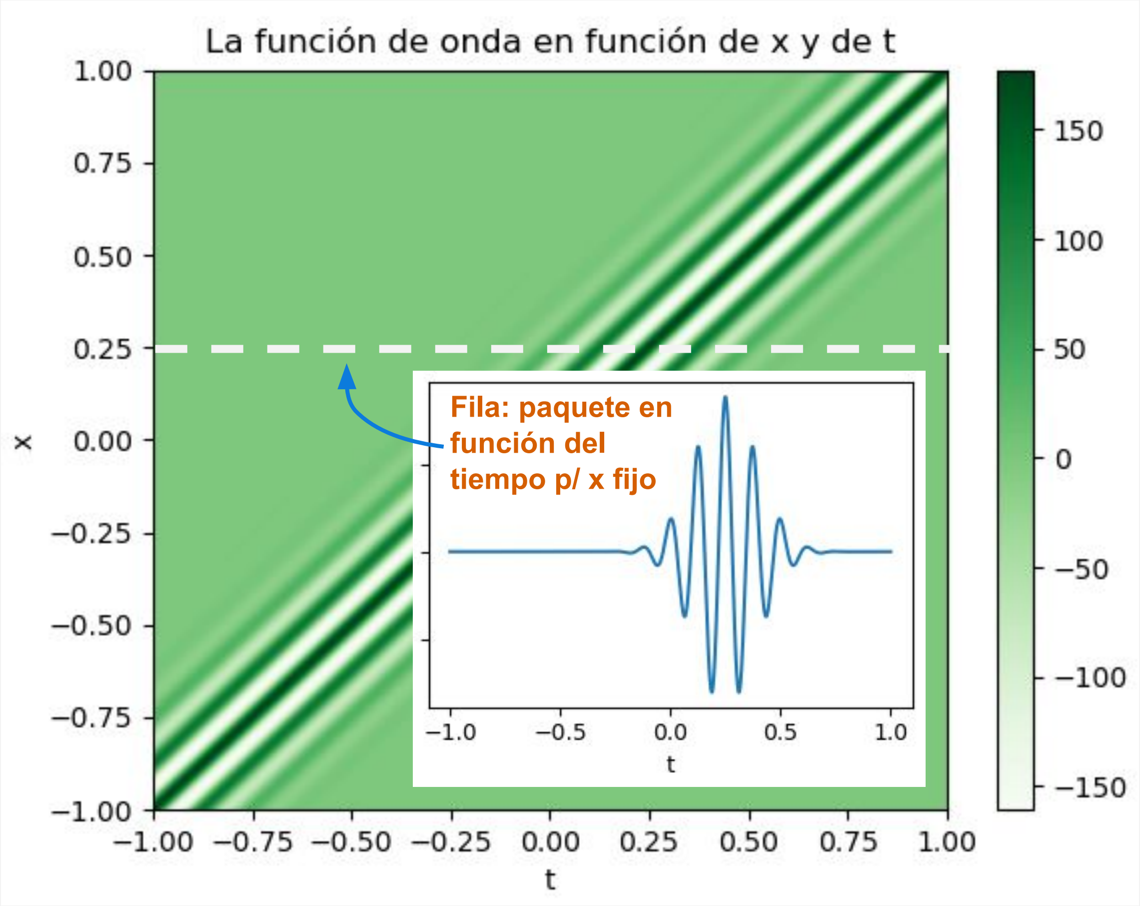


Gráfico de colores de la función de onda en función de x y t

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=1

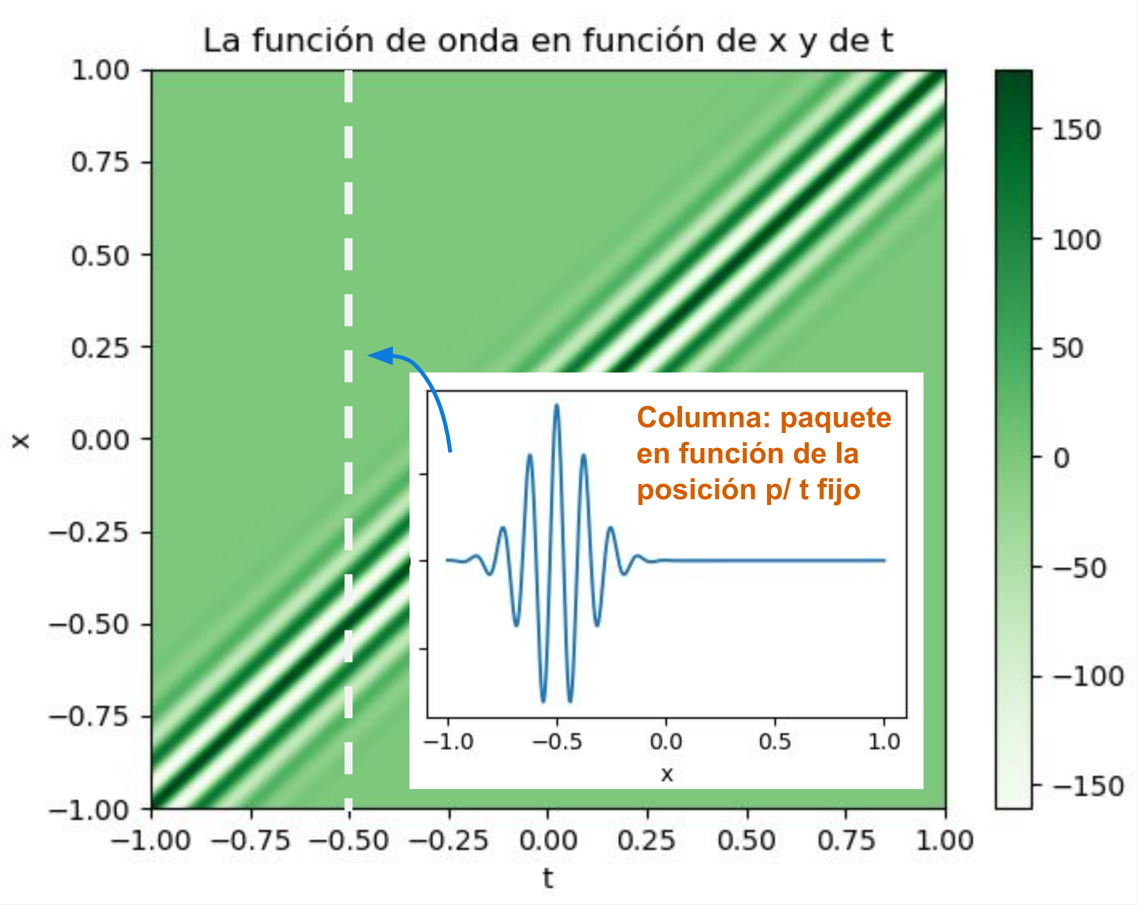


Gráfico de colores de la función de onda en función de x y t

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=2

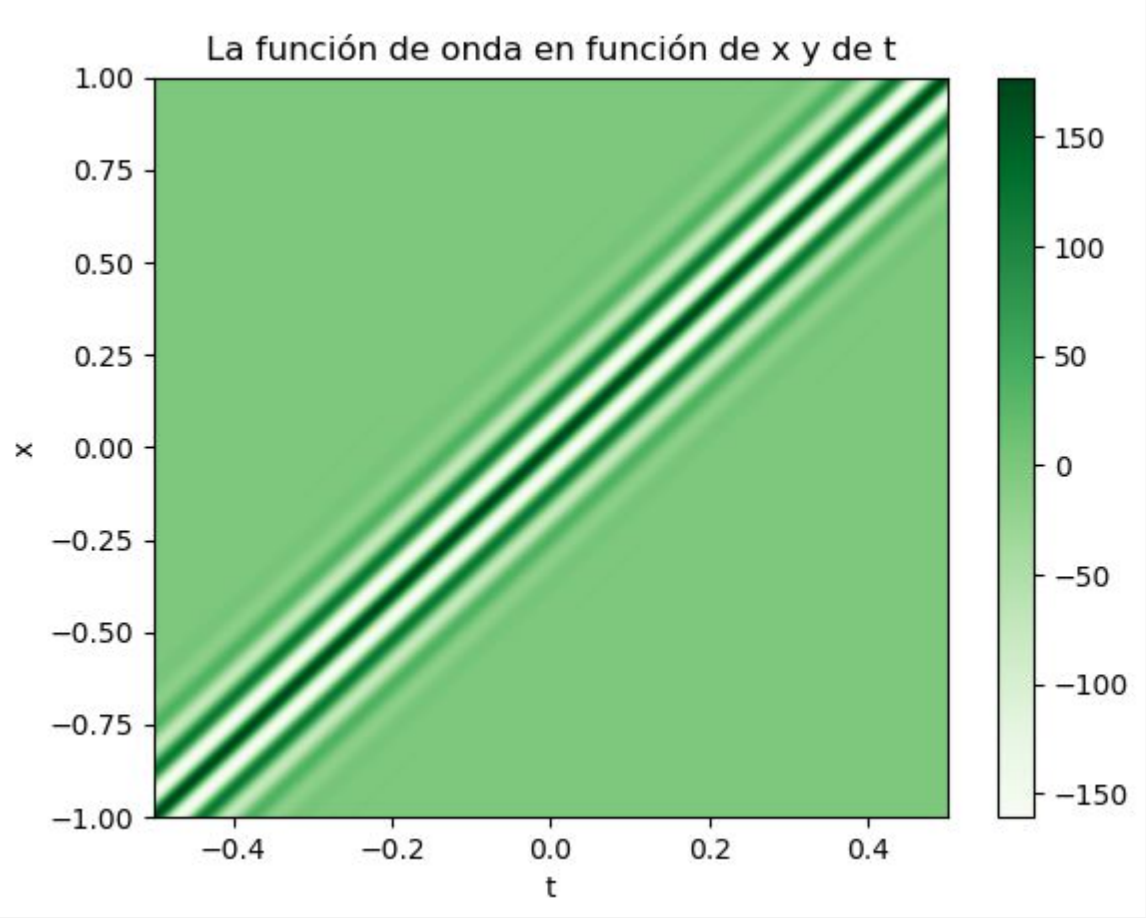
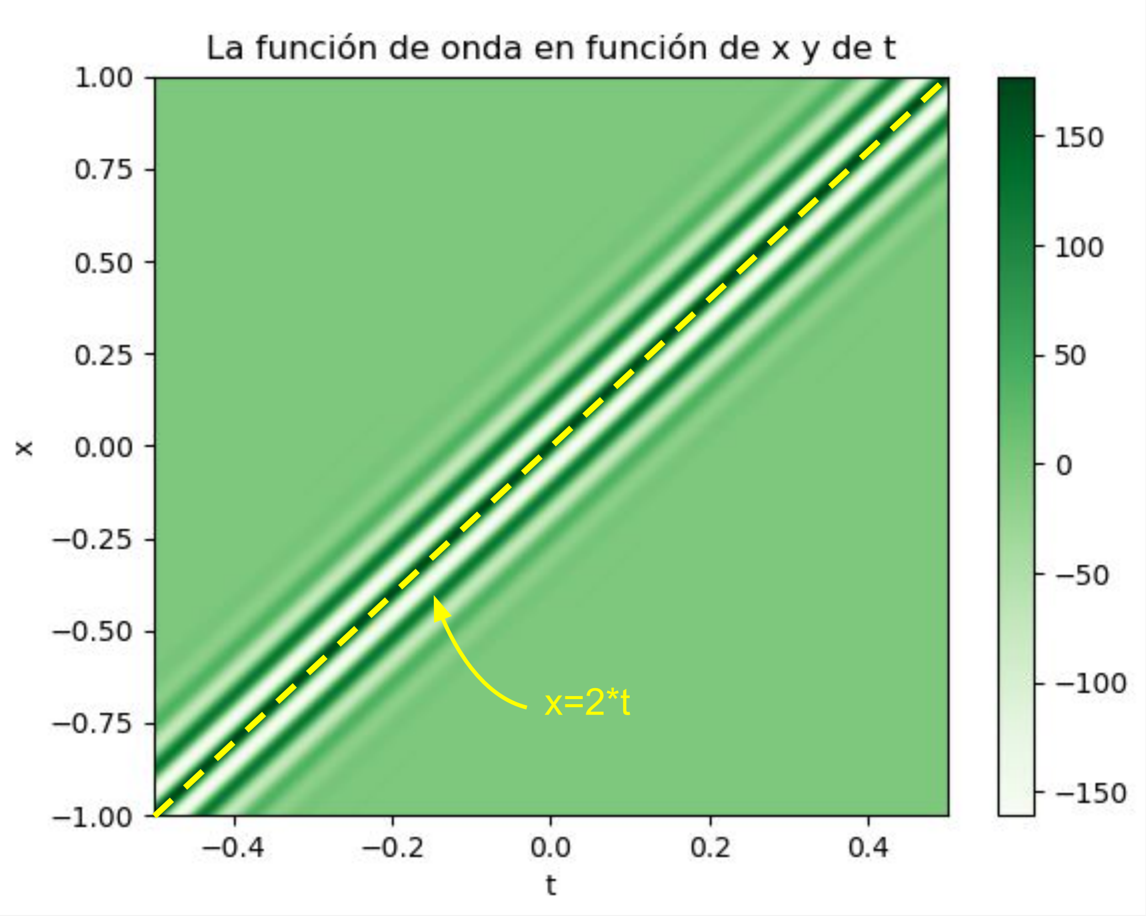


Gráfico de colores de la función de onda en función de x y t

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=2



Hacer el gráfico de colores para vf != vg

Tratar de determinar vf y vg a partir del gráfico

Luego revisar este ejercicio

¿Cuál de estos métodos determina la velocidad de fase y cuál la de grupo?

a) Golpear las manos y determinar el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.

b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).

c) Medir el tiempo en que el pulso de un láser recorre una distancia conocida.

d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en modo y frecuencia conocidos.

Para pensar…

Cómo obtengo el ancho del paquete en el tiempo Δt?

$$\exp\left(-\frac{(x - v_g t)^2}{4\Delta x^2}\right) = \exp\left(-\Delta k^2 (x - v_g t)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{4\Delta t^2}\right)$$

???

Ancho temporal de la envolvente

$$\exp\left(-\frac{(x - v_g t)^2}{4\Delta x^2}\right)$$

$$\exp\left(-v_g^2 \frac{(x/v_g - t)^2}{4\Delta x^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x/v_g - t)^2}{4\Delta x^2/v_g^2}\right)$$

$$\Delta t^2 = \Delta x^2/v_g^2$$

x/vg = t0, es el tiempo en que el pulso atraviesa la posición dada por x (aka tiempo de arribo)

¿Cual es el espectro F(omega)?

¿Es gaussiano?

¿Podemos hallar su ancho $\Delta\omega$?

¿Cómo se relaciona $\Delta\omega$ con Δt? ¿Será la misma relación que hay entre Δk y Δx?

b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp\left[i\alpha(k-k_0)\right].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

El espectro ahora se describe por dos números (antes en realidad también, pero no lo habíamos notado)

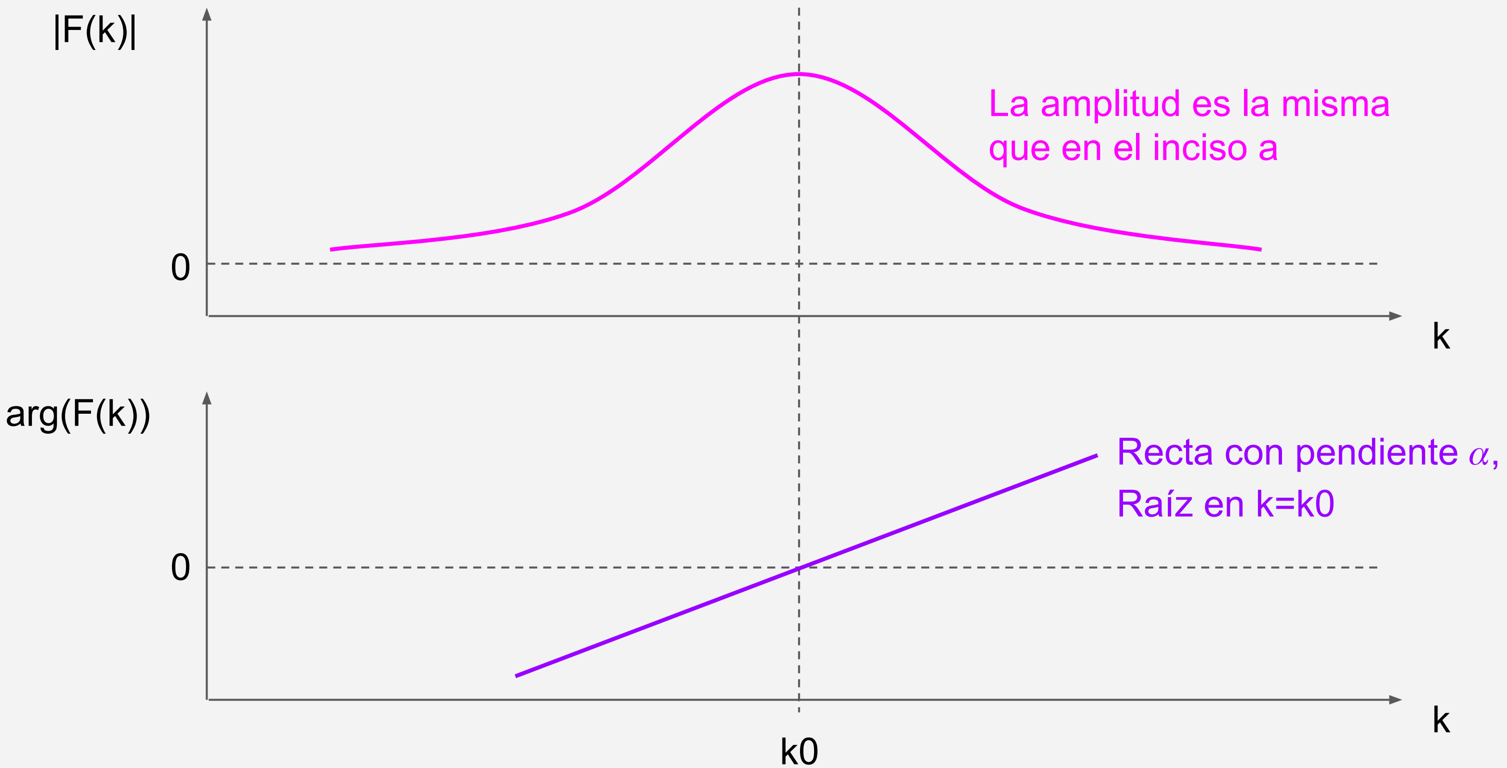
- Módulo de F(k)
- Fase de F(k)

También es válido:

- Parte real de F(k)
- Parte compleja de F(k)

Espectro complejo

$$F(k) = \underbrace{A\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]}_{\text{Módulo}} \exp\left[\underbrace{i\alpha(k-k_0)}_{\text{Fase}}\right]$$



Inciso b

El espectro ahora incluye un desfasaje lineal entre componentes

$$F(k) = A \exp\left[-\left(\frac{k-k_0}{2\Delta k}\right)^2\right] \exp[i\alpha(k-k_0)]$$

El desfasaje es relativo a la diferencia k - k0

Arranco desde acá:

$$\Psi = e^{ik_0(x-v_f t)} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{i(k-k_0)(x-v_g t)}$$

$$= g(x - v_f t; k_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk A e^{-\left(\frac{k-k_0}{2\Delta k}\right)^2} e^{i(k-k_0)(x-v_g t+\alpha)}$$

La integral se resuelve de la misma manera que antes

Antes de seguir: ¿qué unidades tiene α?

[k] = [distancia]$^{-1}$

Luego [α] = [distancia]

El resultado es un desplazamiento α en la coordenada espacial para la envolvente

$$(\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{ik_0(x-v_f t)}e^{-\Delta k^2(x-v_g t)^2} \rightarrow (\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{ik_0(x-v_f t)}e^{-\Delta k^2(x-v_g t+\alpha)^2}$$

La posición del pulso en un momento t está dada por:

x0 = vg*t - α

$$\Psi = (\sqrt{4\pi}A\Delta k)e^{ik_0(x-v_f t)}e^{-\Delta k^2(\underbrace{x-(v_g t-\alpha)}_{\text{La diferencia está acá}})^2}$$

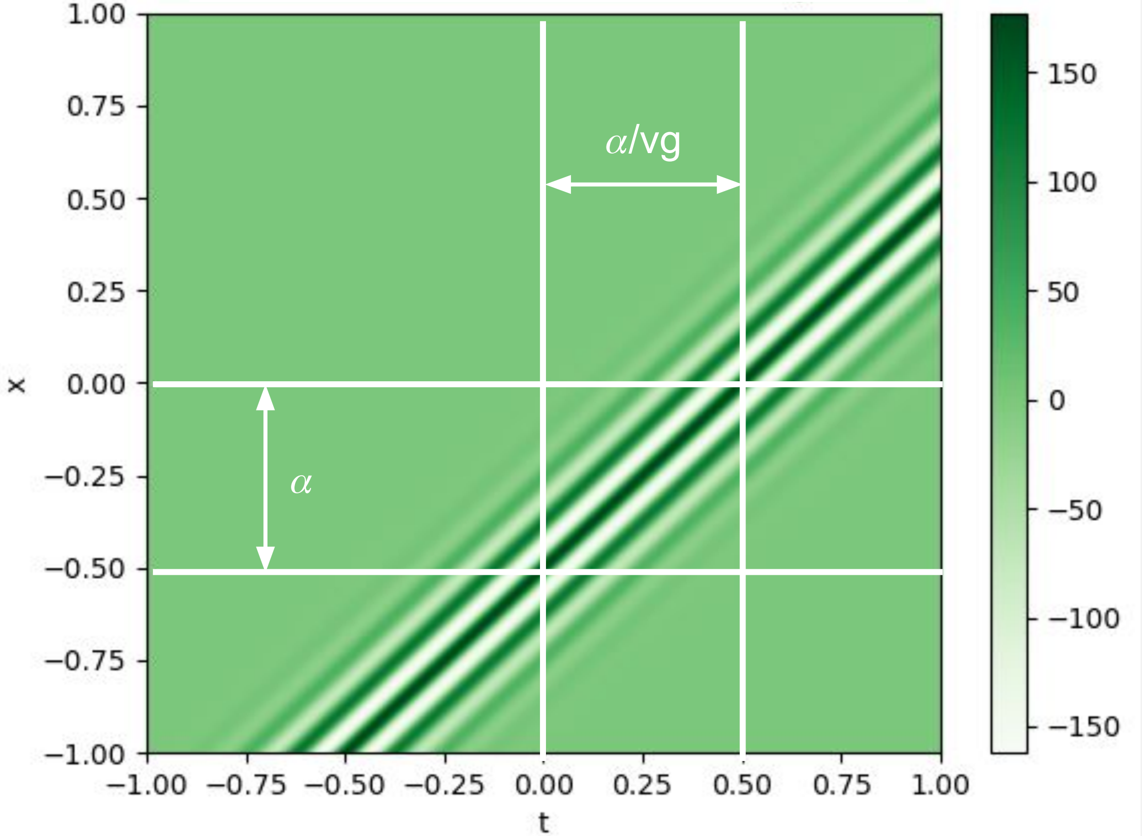
Recordar que [α] = [distancia]

¿es dimensionalmente correcto el resultado?

k0=50, Δk = 5, A = 10, vf=vg=1

α = 0.5

Como dice el enunciado: “una fase lineal solo corre la función”



α: corrimiento espacial en t=0 respecto a x=0

α/vg: demora para llegar a x=0 respecto a t=0 *c*) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]\exp\left[i\beta(k-k_0)^2\right].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x=0$ pero con un ancho Δx que cumple:

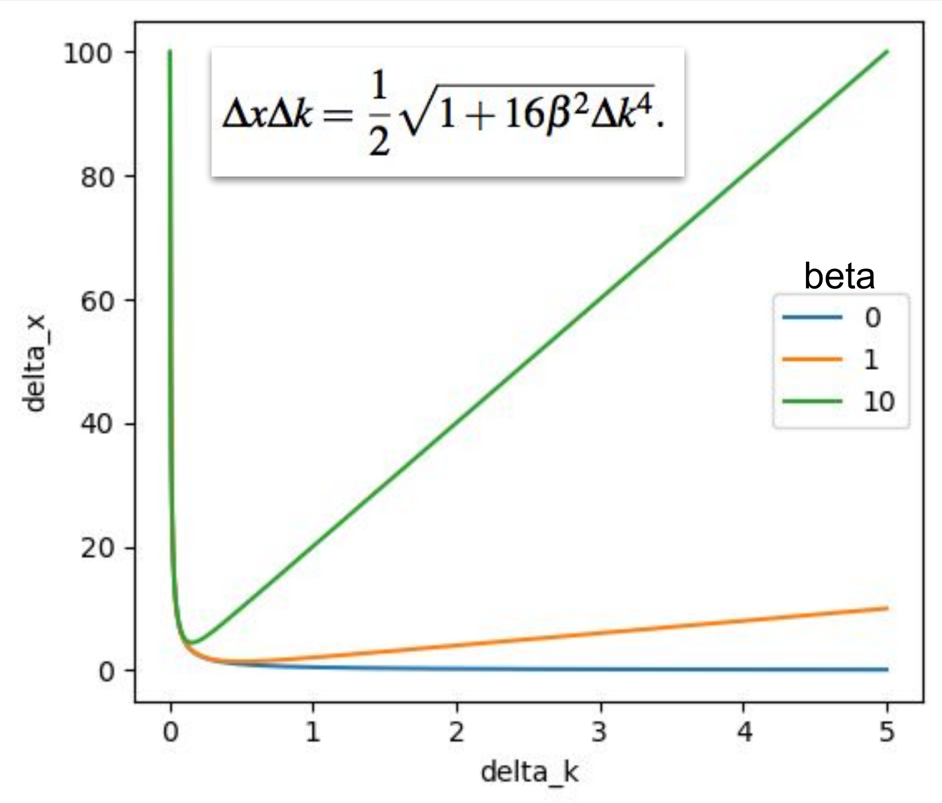
$$\Delta x\Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1+16\beta^2\Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

Inciso c

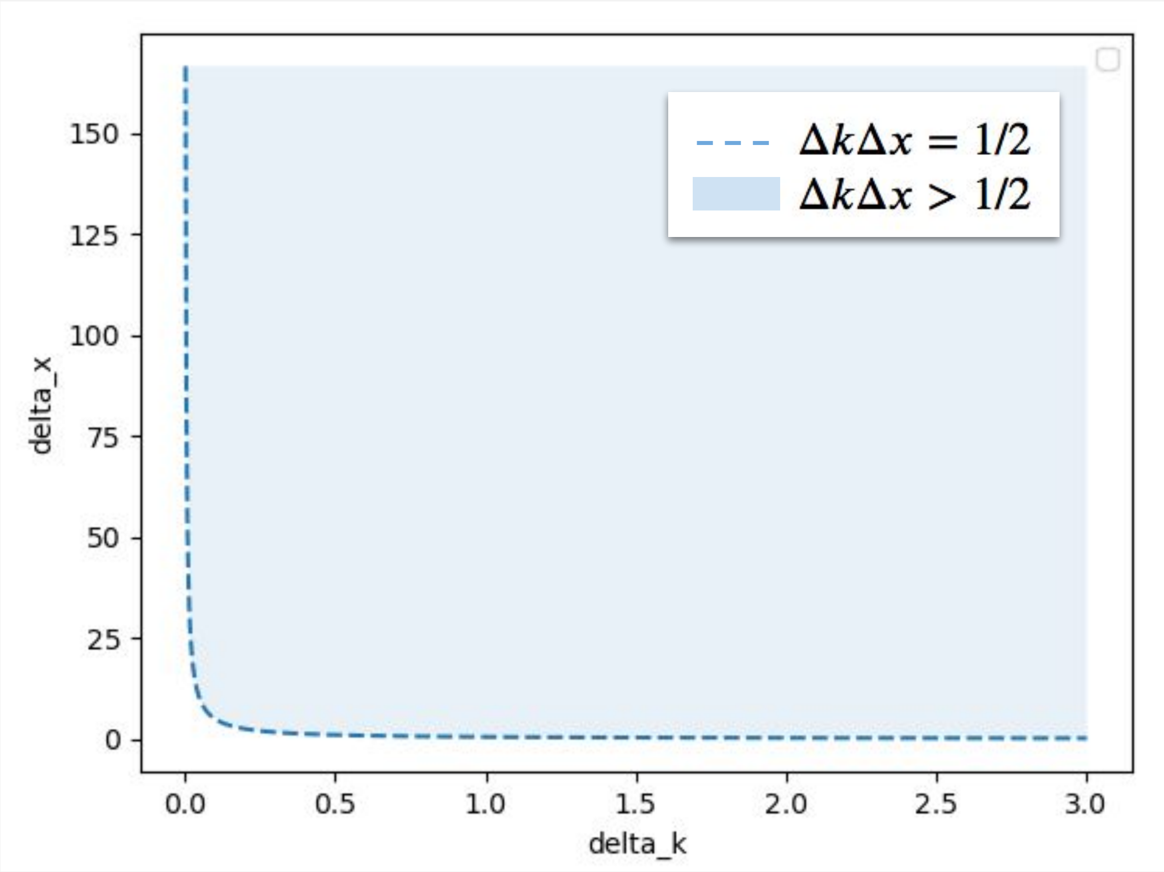
El espectro ahora incluye un desfasaje cuadrático entre componentes (relativo a la onda k0)

¿Es siempre cierto que aumentar Δk disminuye el ancho del paquete?



Notar que: $\beta = 0 \rightarrow \Delta k \Delta x = 1/2$ (relación del inciso a)

Inciso c



- El paquete de onda gaussiano del inciso "a" nos da la relación "límite" entre Δx y Δk
- Dentro de la zona sombreada, la relación entre Δx y Δk puede ser cualquiera

Relación de mínima incerteza

$$\Delta k \Delta x = 1/2$$ espacial

$$\Delta \omega \Delta t = 1/2$$ temporal

Principio de incerteza de Fourier:

- La dispersión del paquete en el dominio de números de onda (o de frecuencia angular) está limitada por la dispersión en el dominio espacial (o temporal).
- Para un paquete gaussiano como el de los ítems a y b, se cumplen las fórmulas de arriba (la relación de incerteza es mínima)
- Para el caso general, la relación es:

$$\Delta k \Delta x \geq 1/2$$

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1/2$$

Relación de mínima incerteza

Solo en el caso gaussiano, y para fases lineales, es correcto decir que “aumentar el ancho de bando implica disminuir la duración temporal/espacial” y viceversa.

En los demás casos, puede no cumplirse…

…siempre que se respete que:

$$\Delta k \Delta x \geq 1/2$$

$$\Delta \omega \Delta t \geq 1/2$$

Relación de mínima incerteza

¿Por qué se habla de incerteza?

Para establecer la relación, se considera a la señal (en el dominio del tiempo/espacio y de frecuencia/nro de onda) como una distribución de probabilidad.

La dispersión se obtiene calculando el desvío estándar del módulo al cuadrado (esto nos da la pauta para calcular el ancho del paquete para señales arbitrarias, por ejemplo ej 17).

La analogía es con un proceso de medición:

- Dada una señal en el tiempo / espacio, “mido” su frecuencia / nro de onda mediante la transformada de Fourier.
- Dado un espectro, mido la dispersión espacial / temporal transformando el espectro en una señal mediante el proceso inverso.
- La desviación estándar nos da la incerteza del valor medio.

¿La relación de mínima incerteza es una propiedad de las señales o del proceso de “medición”?

Solución del problema

Se emplea una versión un poco más general de la integral gaussiana [Fuente: Wikipedia]

Integrals with a complex argument of the exponent [edit]

The integral of interest is (for an example of an application see Relation between Schrödinger's equation and the path integral formulation of quantum mechanics)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}iax^2 + iJx\right)dx.$$

We now assume that a and J may be complex.

Completing the square

$$\left(\frac{1}{2}iax^2 + iJx\right) = \frac{1}{2}ia\left(x^2 + \frac{2Jx}{a} + \left(\frac{J}{a}\right)^2 - \left(\frac{J}{a}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{a}{i}\left(x + \frac{J}{a}\right)^2 - \frac{iJ^2}{2a}.$$

By analogy with the previous integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}iax^2 + iJx\right)dx = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-iJ^2}{2a}\right).$$

This result is valid as an integration in the complex plane as long as a is non-zero and has a semi-positive imaginary part. See Fresnel integral.

Vamos a simplificar el paquete:

- Caso no propagante (solo obtengo la oscilación espacial, tal como pide el enunciado original)
- k0 = 0 (k0 no interviene en la relación de incerteza)

$$f(x) = A \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\left(\frac{-1}{4\Delta k^2} + i\beta\right) k^2\right) \exp(ikx)dk$$

La primitiva es

$$\int_{\mathbb{R}} dx \exp\left(i\frac{ax^2}{2} + iJx\right) = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{iJ^2}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} x &\to k \\ J &\to x \\ \frac{ia}{2} &\to \frac{-1}{4\Delta k^2} + i\beta \\ &\to \frac{i}{2}\left(\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta\right) \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \exp\left(i\frac{ax^2}{2} + iJx\right) = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{iJ^2}{2a}\right)$$

$$\begin{aligned} x &\to k \\ J &\to x \\ \frac{ia}{2} &\to \frac{-1}{4\Delta k^2} + i\beta \\ &\to \frac{i}{2}\left(\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta\right) \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{2\pi i}{\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta}\right)^{1/2}}_{\text{Coef complejo}} \underbrace{\exp\left(\frac{-ix^2}{2\left(\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta\right)}\right)}_{\text{Gaussiana en el espacio, con coeficiente complejo}}$$

Como ahora la gaussiana tiene exponente complejo, significa que una parte de ella es oscilatoria. La envolvente está dada por la parte real (en el exponente!) de la gaussiana

$$f(x) = \left(\frac{2\pi i}{\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{-ix^2}{2\left(\frac{i}{2\Delta k^2} + 2\beta\right)} \right)$$

Voy a escribir el exponente gaussiano separando en parte real e imaginaria:

$$\frac{-ix^2}{\frac{i}{\Delta k^2} + 4\beta} = \frac{-ix^2}{4\beta + \frac{i}{\Delta k^2}} \cdot \frac{4\beta - \frac{i}{\Delta k^2}}{4\beta - \frac{i}{\Delta k^2}} = \frac{-4\beta i + i^2 \Delta k^{-2}}{16\beta^2 + \Delta k^{-4}} x^2 = \frac{-4\beta i - \Delta k^{-2}}{16\beta^2 + \Delta k^{-4}} x^2$$

1. Solo quiero la parte real del coeficiente de la gaussiana

$$\frac{-\Delta k^{-2}}{16\beta^2 + \Delta k^{-4}} x^2 = \frac{-x^2}{4\Delta x^2}$$

2. Obtengo el ancho espacial Δx en función de Δk

$$\begin{aligned} 4\Delta x^2 &= (16\beta^2 + \Delta k^{-4})\Delta k^2 \\ \Delta x &= \frac{1}{2}\sqrt{(16\beta^2 + \Delta k^{-4})\Delta k^2} \\ &= \frac{1}{2}\Delta k\sqrt{(16\beta^2 + \Delta k^{-4})} \end{aligned}$$

3. Por último, escribo la relación de incerteza:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta k &= \frac{1}{2}\Delta k\sqrt{(16\beta^2 + \Delta k^{-4})}\Delta k \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\Delta k^4(16\beta^2 + \Delta k^{-4})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16\beta^2\Delta k^4 + 1} \end{aligned}$$

Ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \omega_0^2 \Psi$$

- Solución: ondas viajeras
- Si omega_0 = 0, recuperamos la ecuación de ondas clásica
- Límite al continuo del sistema de N péndulos acoplados
- (Describe otros sistemas también)

Relación de dispersión

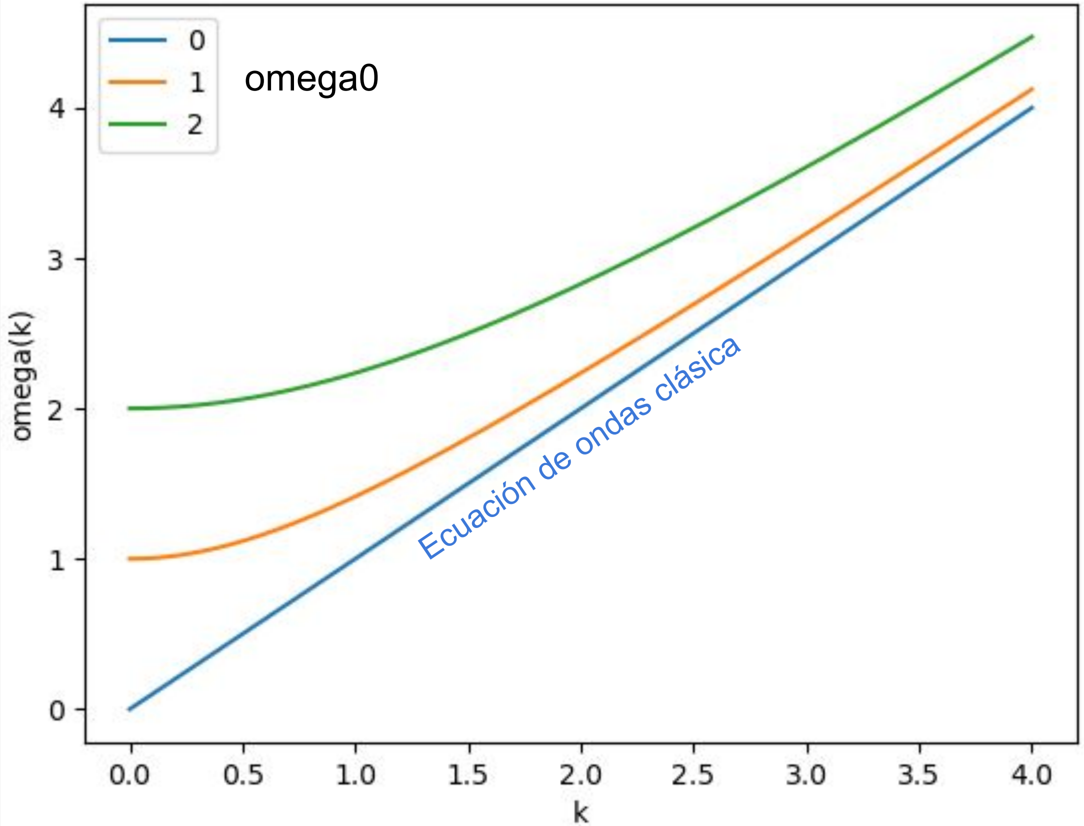
$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$$

Sin hacer cuentas:
dt^2 -> -omega^2
dx^2 -> -k^2
Psi -> 1

- omega(k) no sigue una relación lineal

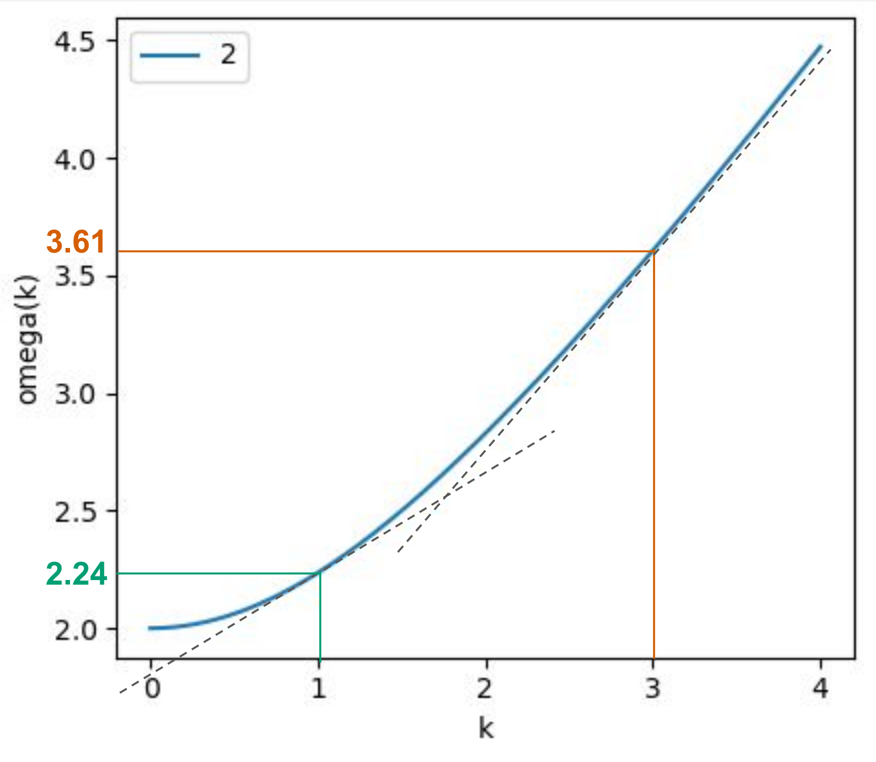
Relación no lineal para k pequeño

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}$$ (c = 1)



Para obtener la onda a partir del espectro, necesito linealizar alrededor de k0

Supongamos paquetes con distintos k0



$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}}$$

k0 = 1

- vf = 2.24 / 1
- vg = 0.48

vg ~ 2 vf

k0 = 3

- vf = 3.61 / 3 = 1.12
- vg = 0.83

vg ~ 1.3 vf

Pasando en limpio

- A altas frecuencias el medio se comporta linealmente
- La aproximación lineal es cada vez mejor...
- ...es decir, puedo considerar anchos espectrales cada vez más grandes
- Además vf y vg se hacen cada vez más parecidas
- Como con cualquier aproximación, la elección depende del error que quiero/puedo cometer (que a su vez va a depender de la distancia que debe viajar el pulso)

Mismo ejercicio versión solamente espacial (es decir sin propagación)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k)$$

- Suma continua de ondas con frecuencia k, pesadas por F(k)
- No considero la propagación en un medio: no uso la relación de dispersión
- Por lo tanto, no necesito linealizar para integrar
- Se calcula la integral repitiendo el procedimiento del Ej 16a
- El resultado es análogo, pero con ondas estacionarias en vez de viajeras:

$$\left(\sqrt{4\pi}A\Delta k\right) e^{ik_0(x-v_f t)} e^{-\Delta k^2 (x-v_g t)^2} \rightarrow \left(\sqrt{4\pi}A\Delta k\right) e^{ik_0 x} e^{-\Delta k^2 x^2}$$