Oscilador armónico amortiguado y forzado

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Oscilador armónico amortiguado

1. Una pesa de masa m está sujeta a un resorte de constante elástica k, por lo que la frecuencia natural de oscilación es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Actúa en este sistema un amortiguador que provee una amortiguación lineal con la velocidad de constante de amortiguamiento c que por unidad de masa es $\Gamma = c/m$.

   a) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = C\mathrm{e}^{-t/2\tau}\cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1. ¿De qué depende los valores de C y θ? ¿Porqué no es lícito imponer las condiciones iniciales a la solución homogénea?

   b) Repase las condiciones de Γ y ω_0 en que se obtienen soluciones:

   - sub-amortiguadas,
   - críticamente amortiguadas, y
   - sobre-amortiguadas,

   graficando $x(t)$ para distintos valores de estos parámetros.

   c) Verifique que la solución general para el oscilador libre *sobre-amortiguado*

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cosh\left(|\omega|t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{senh}\left(|\omega|t\right)}{|\omega|}\right\},$$

   puede obtenerse a partir de esta para el *sub-amortiguado*

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cos\left(\omega t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{sen}\left(\omega t\right)}{\omega}\right\},$$

   donde $\omega = \pm i|\omega|$, $|\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$. Aproveche las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\operatorname{sen}(ix) = i\operatorname{senh}(x)$.

   d) Para la condición inicial $x(0) = x_0$ que parte del reposo, es decir $\dot{x}(0) = 0$, escriba las expresiones de la trayectoria $x(t)$ y calcule la energía en $x(0)$.

   e) A partir de la solución general para el *sub-amortiguado*, muestre que la solución para el *amortiguamiento crítico* es

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]t\right\}.$$

   Verifique que también podría haberle obtenido a partir de la solucíon para oscilaciones *sobre-amortiguadas*.

2. (*) Si Ψ_1 y Ψ_2 son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre la combinación lineal $\Psi = A\Psi_1 + B\Psi_2$ también lo es.

   a) Verifique que esto tambiénn es valido si actua una fuerza disipativa proporcional a la velocidad.

   b) ¿Vale si es un rozamiento constante?

3. (*) Para un péndulo con fuerza de disipación proporcional a la velocidad calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento y compárelo con la pérdida de energía.

Oscilador armónico forzado

4. Cualquier oscilador armónico *sub-amortiguado* de cierta frecuencia natural ω_0 tras someterle a un forzado externo y esperar cierto tiempo ajustará su dinámica que responde solo a la forma del forzado. Siempre la amplitud de la solución homogénea decae pasado un *transitorio*.

Ya veremos más adelante que cualquier forzado lo podremos descomponer en componentes armónicas, es decir en sumas de términos de senos y cosenos. Por ahora analizaremos un forzado perféctamente armónico $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

El movimiento resultante tras el *transitorio* responde a la solución particular $x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$. Los coeficientes dependerán de la relación entre Ω y ω_0.

a) Obtenga expresiones para $A(\Omega)$ y $B(\Omega)$.

b) Grafique $A(\Omega)$ y $B(\Omega)$. ¿Qué sucede con ambas funciones cuando $\Omega \simeq \omega_0$? ¿Es justo para la igualdad que esto sucede? ¿Que haría que no fuera así?

c) (*) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.

d) (*) Proponga ahora como solución particular la solución compleja $x_p(t) = A\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ y explique porque se denoniman así $A_{\text{elástico}} = \mathbb{R}(A)$ y $A_{\text{absorbente}} = \mathbb{I}(A)$.