

SISTEMAS CONTÍNUOS LIMITADOS

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Condiciones de contorno para una Cuerda

- Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0 . Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión: $\Psi(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$. Tome el sistema de coordenadas con $x = 0$ en un extremo de la cuerda y $x = L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:
 - $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$ (ambos extremos están fijos).
 - $\Psi(0, t) = 0$ y $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre “libre” es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo “libre” para la cuerda?
 - $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de ese modo?
 - Ahora tome un sistema de coordenadas con $x = 0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2, t) = \Psi(L/2, t) = 0$ (ambos extremos fijos).
- Cuerdas de un violín.** Consideremos que las cuatro cuerdas de un violín son de igual longitud, y que emiten en su modo fundamental las notas: $\text{sol}_2 = 196 \text{ Hz}$, $\text{re}_3 = 294 \text{ Hz}$, $\text{la}_3 = 440 \text{ Hz}$ y $\text{mi}_4 = 659 \text{ Hz}$. De la primera a la cuarta las cuerdas son de distinto material y diámetro:
 - Al $\rho = 2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $d_1 = 0,09 \text{ cm}$
 - Aleación Al-Ni $\rho = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $d_2 = 0,12 \text{ cm}$
 - Aleación Al-Ni $\rho = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $d_3 = 0,1 \text{ cm}$
 - Acero $\rho = 7,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $d_4 = 0,1 \text{ cm}$.

Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la de la_3 .

- Modos audibles.** Se somete a una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano ($20 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$)?
- Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Considere que parte del reposo.
 - Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.
 - ¿Con qué período se repite el movimiento?
 - Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

Condiciones de contorno para el gas en un tubo unidimensional

- Tubo con aire** En un tubo de longitud L hay aire sin humedad. Considere las siguientes posibilidades:
 - cerrado en ambos extremos,
 - uno abierto el otro cerrado, y
 - ambos extremos abiertos.

Halle para cada una de dichas situaciones:

- Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
- Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\Psi(x, t)$. ¿Qué parámetros conoce de dicha expresión? ¿De qué dependen los que no conoce?
- A partir de la expresión de $\Psi(x, t)$, hallar el apartamiento de la presión respecto a la atmosférica $\delta p(x, t)$. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuál es la amplitud máxima de presión?
- Hallar la función de densidad $\rho(x, t)$. ¿Cuál es amplitud máxima?

Asuma conocidos: L , v_{sonido} , la presión atmosférica p_0 , $\rho_0 = \frac{\gamma p_0}{v_{\text{sonido}}^2}$ y que $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$ para un gas diatómico (¿Cuales son las dos moléculas preponderantes en la atmósfera?).

6. Tubo de órgano.

- a)* ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano de extremos abiertos para producir un sonido de 440 Hz?
 - b)* Si uno de sus extremos está cerrado y se desea producir el mismo tono en su primer armónico, ¿qué longitud deberá tener?
7. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1 m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con $\nu = 440$ Hz. Considere $v_{\text{sonido}} = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - a)* Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
 - b)* Repita lo anterior para un tubo de extremos abiertos.