Oscilador armónico amortiguado y forzado

Oscilador armónico amortiguado

1. Una pesa de masa m está sujeta a un resorte de constante elástica k y un amortiguador que provee una amortiguación lineal con la velocida de constante de amortiguamiento c que por unidad de masa es $\Gamma = c/m$.

   a) Si $k = m\omega_0^2$ verifique que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) \cosh\left(\tilde{\Omega} t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right] \frac{\operatorname{senh}\left(\tilde{\Omega} t\right)}{\tilde{\Omega}} \right\}$$

   se deduce de

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) \cos\left(\tilde{\omega} t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right] \frac{\operatorname{sen}\left(\tilde{\omega} t\right)}{\tilde{\omega}} \right\}$$

   $$\tilde{\omega} = \pm i\tilde{\Omega}, \qquad \tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

   Sugerencia: verifique las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh}(x)$; luego úselas.

   b) Comenzando con la ecuación general para oscilaciones libres subamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución es:

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right] t \right\}$$

   Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones sobreamortiguadas.

Oscilador armónico forzado

2. *a*) Escriba la ecuación de movimiento para una masa m sujeta a un resorte de constante elástica k y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ, sobre la que se realiza una fuerza dependiente del tiempo $F(t)$.

   b) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = C\mathrm{e}^{-t/2\tau} \cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1. ¿De qué depende el valor de C y de θ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?

   c) Considere que $F(t)$ tiene la forma $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ (discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma) y proponga la siguiente solución particular: $x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$. Obtenga A y B. Grafique cualitativamente A y B en función de ω.

   d) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.

   e) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.

   f) Verifique que si $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es $F_1(t)$ y $x_2(t)$ lo es cuando la fuerza externa es $F_2(t)$, entonces $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.

   g) Proponga ahora como solución particular la solución compleja $x_p(t) = A\mathrm{e}^{-i\omega t}$ y demuestre que $\mathrm{Re}(A) = A_{\text{elástico}}$ y que $\mathrm{Im}(A) = A_{\text{absorbente}}$. ¿Por qué es así?

3. Sea un oscilador armónico con una frecuencia de oscilación $\nu_0 = 10\,\mathrm{Hz}$ y con un tiempo de decaimiento muy largo. Si este oscilador es alimentado con una fuerza armónicamente oscilante y con una frecuencia de $10\,\mathrm{Hz}$, adquirirá una gran amplitud, es decir, "resonará" en la frecuencia de excitación. Ninguna otra fuerza motriz oscilante en forma armónica producirá una gran amplitud (una resonancia).

a) Justifique el enunciado anterior.

b) Luego suponga que el oscilador está sujeto a una fuerza que es una pulsación cuadrada repetida periódicamente y cuya duración es 0,01 s repetida una vez por segundo.

c) ¿"Resonará" el oscilador armónico (adquirirá una gran amplitud) bajo la influencia de esta fuerza motriz?

d) Suponga que la fuerza motriz es la misma pulsación cuadrada (de ancho 0,01 s) pero repetida dos veces por segundo. ¿Resonará el oscilador? Responder a la misma pregunta para velocidades de repetición de 3 s a 9 s.