Condiciones de contorno en la Ecuación de Ondas Clásica

Ecuación de ondas clásica (EOC):

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial^2 x}$$

- Propuesta de solución:

$$\psi(x,t) = A \sin(kx + \varphi)\cos(\omega t + \theta)$$

- Parámetros de la solución:

  A

  Omega, k (frecuencias angulares)

  Phi y tita (fases)

¿Estos parámetros pueden tomar cualquier valor?

Condiciones de contorno en la Ecuación de Ondas Clásica

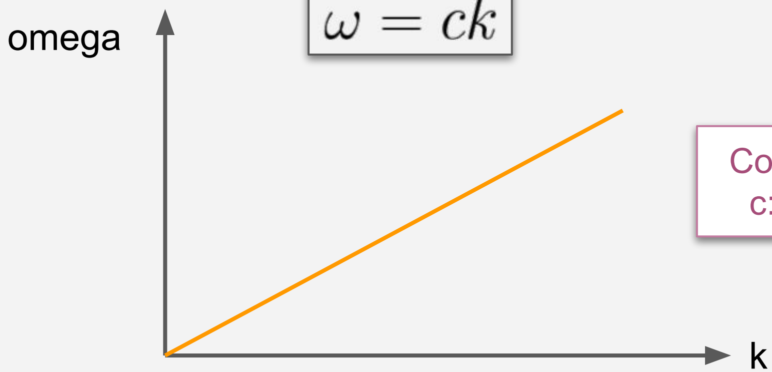
Relación de dispersión

- Se obtiene reemplazando la solución propuesta en la ecuación

$$\psi(x,t) = A \sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\theta) \Rightarrow \frac{\partial \psi^2}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial^2 x}$$

- Relación de proporcionalidad entre omega y k:

$$\boxed{\omega = ck}$$



Constante de proporcionalidad
c: velocidad de propagación

- “Si me das k, te digo cuando vale omega (y viceversa)”
- Ambos pueden tomar cualquier valor entre 0 e Inf.

Un parámetro libre menos: ¿Qué pasa con los demás?

Condiciones de contorno en la Ecuación de Ondas Clásica

Condiciones de contorno (o de borde) (CC o CB)

- La solución propuesta vale en todo el tiempo y espacio: “cuerda infinita”
- Muchos sistemas están limitados en el espacio: tienen bordes

- Planteamos que la función de onda toma un valor fijo en cada borde, en función de las características del sistema:

Para extremos fijos: $$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

Obtendremos valores permitidos para el número de onda (k) y la fase espacial

Los demás parámetros (amplitud A y fase temporal) se obtienen planteando condiciones iniciales -> Próxima clase

Dos tipos de condiciones de contorno

Para la función de onda ψ que describe el desplazamiento transversal

- Extremo fijo en x = a:

$$\psi(x = a, t) = 0$$ (para todo tiempo)

- Extremo libre en x = a:

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=a,t} = 0$$ (para todo tiempo)

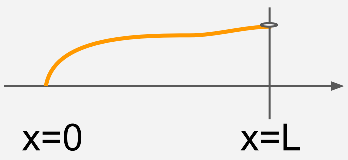
Es la pendiente de la función de onda

Combinaciones de condiciones de contorno

(a) fijo-fijo

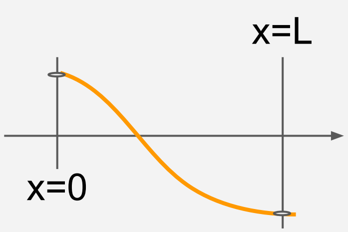
$$\psi(x=0,t)=\psi(x=L,t)=0$$

(b) mixto



$$\begin{cases} \psi(x=0,t)=0 \\ \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L,t}=0 \end{cases}$$

(c) libre-libre



$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0,t}=\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L,t}=0$$

Caso mixto

Solución propuesta: $\psi(x,t) = A\sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$ (Con omega = ck)

Forma alternativa: $\psi(x,t) = (B\sin(kx) + C\cos(kx))\cos(\omega t+\theta)$

Debe cumplir:

$$\begin{cases} \psi(x=0,t) = 0 & \text{(Ec. 1)} \\ \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=L,t} = 0 & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

Ec. 1: $0 = C\cos(\omega t+\theta)$ ⇒ $C = 0$

Luego: $\psi(x,t) = B\sin(kx)\cos(\omega t+\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = Bk\cos(kx)\cos(\omega t+\theta)$$

Ec. 2: $0 = Bk\cos(Lk)\cos(\omega t+\theta)$ ⇒ $\cos(Lk) = 0$ kL = pi/2, 3pi/2, 5pi/2

⇒ $kL = \frac{\pi}{2} + \cancel{2}n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$

$$k = \frac{\frac{\pi}{2} + \cancel{2}n\pi}{L}$$

*errata: el 2 no va, por eso está tachado!

Caso mixto

Pasando en limpio, tenemos infinitas soluciones dadas por los valores de n

$$\psi(n,x,t) = B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \theta_n)$$

$$\omega_n = ck_n$$

*errata: el 2 no va, por eso está tachado!

$$k_n = \frac{\cancel{2}n\pi + \frac{\pi}{2}}{L}$$

La solución general es la combinación lineal con amplitudes B_n y fases $tita_n$

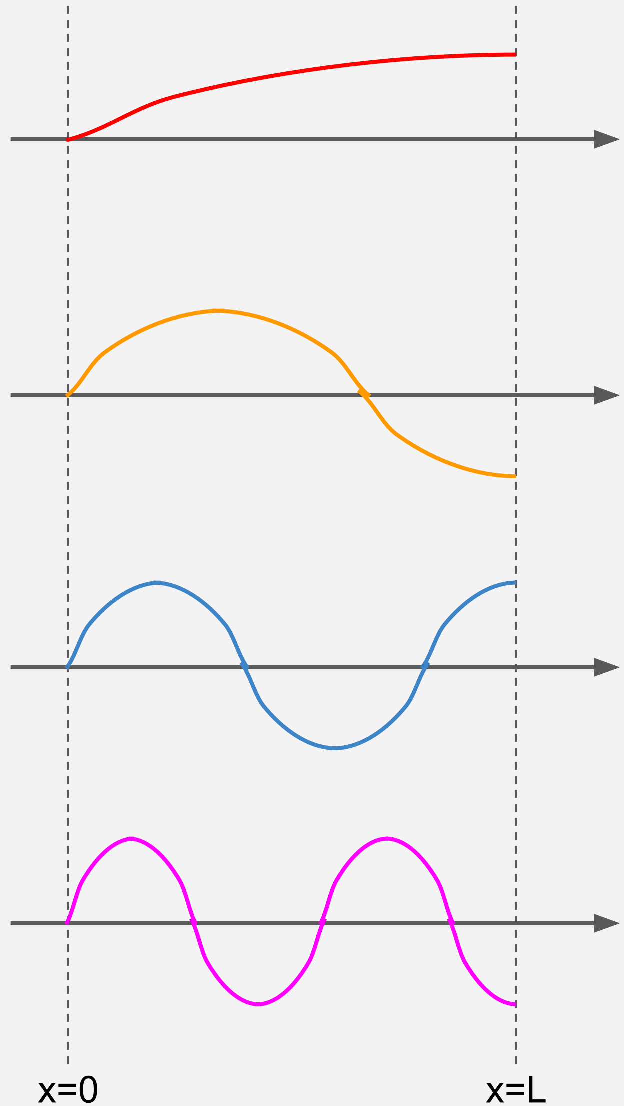
$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \theta_n)$$

Esos parámetros pueden tomar cualquier valor, dependiendo de las condiciones iniciales a plantear (próxima clase!!)

Modos normales

		Longitud de onda
Modo 1 (n=0)	k_0 = pi / (2L)	4L
Modo 2 (n=1)	k_1 = 3pi / (2L)	4/3 L
Modo 3 (n=2)	k_2 = 5pi / (2L)	4/5 L
Modo 4 (n=3)	k_2 = 7pi / (2L)	4/7 L

etc



Cambio del sistema de coordenadas

Al mirar los modos desde otro sistema de coordenadas, cambian las funciones que usamos para describirlos (pero los modos son los mismos: tienen los mismos k_n).

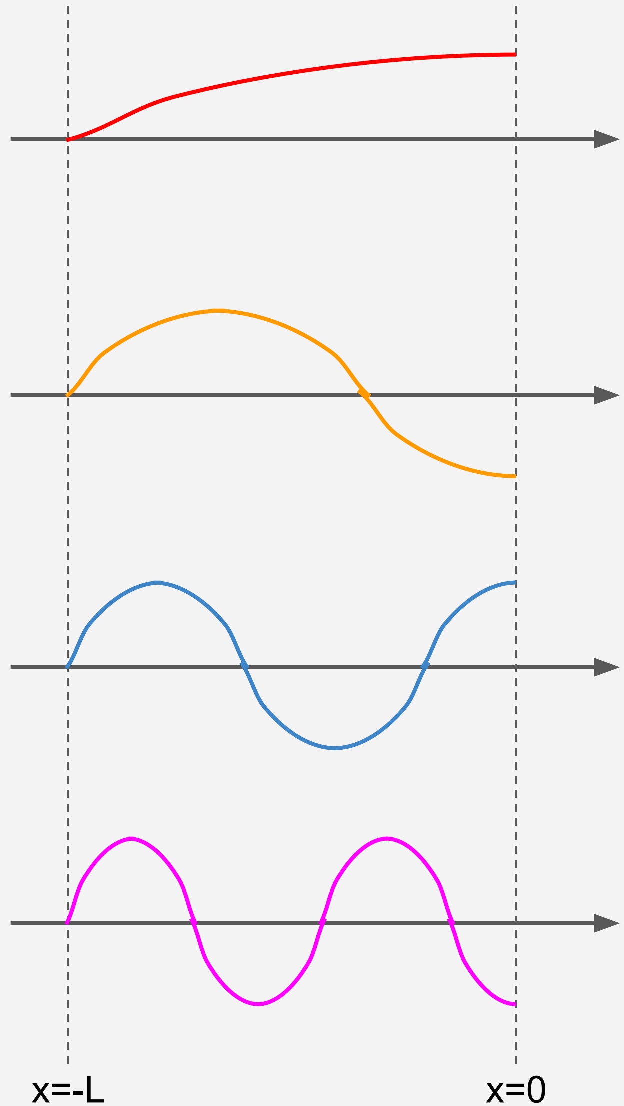
Modo 1 (n=0) — k_0 = pi / (2L) — ← coseno

Modo 2 (n=1) — k_1 = 3pi / (2L) — ← -coseno

Modo 3 (n=2) — k_2 = 5pi / (2L) — ← coseno

Modo 4 (n=3) — k_2 = 7pi / (2L) — ← -coseno

etc



Sonido

Ahora tenemos tres variables relevantes (todas definidas respecto al valor de equilibrio):

$\psi(x,t)$: Desplazamiento

$\delta p(x,t)$: Presión

$\delta \rho(x,t)$: Densidad

Las tres verifican la ecuación de ondas clásica (EOC)

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial^2 x}$$

Con c dada por: $\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$,

aire

p0 = 1 atmósfera
rho0 = 1.2 kg / m^3
gamma = 7/5

Luego c ~ 344 m/s [link]

Más info: [link]

Sonido

¿Cómo se relacionan las magnitudes?

$$\delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$\delta p = -\gamma p_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Las funciones de onda de la densidad y la presión son proporcionales a la derivada espacial de psi

$$\delta p = \kappa \delta\rho$$

Densidad y presión son proporcionales

$$\kappa = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

Tener en cuenta que un micrófono mide diferencias de presión

Dos tipos de condiciones de contorno

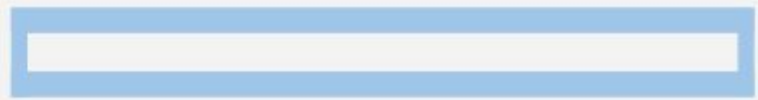
En un tubo, podemos tener dos tipos de extremo

- Extremo cerrado
- Extremo abierto

No confundir con extremo fijo y libre!!

Combinaciones de condiciones de contorno

Ambos cerrados



x = 0 x = L

Presión

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x}\right|_{(x=L,t)} = 0 \end{cases}$$

Desplazamiento

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \psi(L,t) = 0 \end{cases}$$

Combinaciones de condiciones de contorno

Ambos abiertos

Presión

$$\begin{cases} \delta P(0,t) = 0 \\ \delta P(L,t) = 0 \end{cases}$$

Desplazamiento

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{(x=L,t)} = 0 \end{cases}$$

Combinaciones de condiciones de contorno

Mixto

x = 0 x = L

Presión

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \\ \delta P(L,t) = 0 \end{cases}$$

Desplazamiento

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{(x=L,t)} = 0 \end{cases}$$

Este caso para la función Psi es equivalente al que ya resolvimos para la cuerda!

Mixto

x = 0 x = L

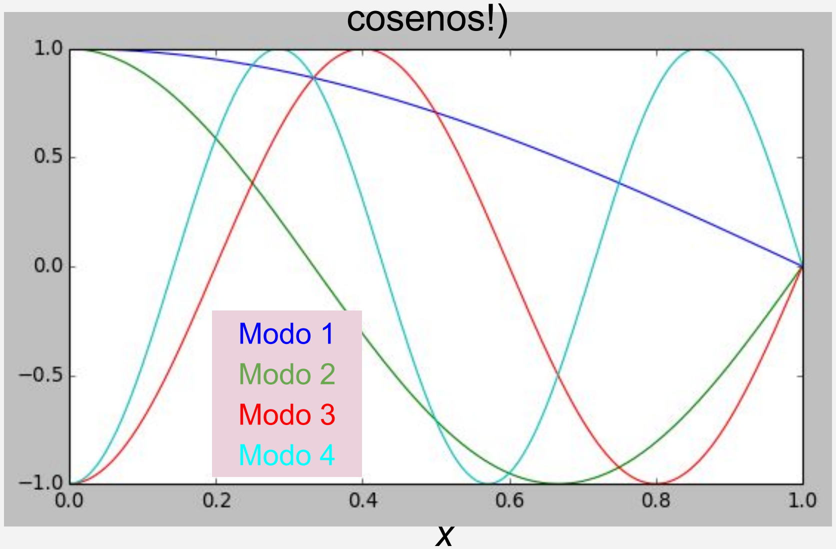
Presión

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\delta P)}{\partial x}\Big|_{(x=0,t)} = 0 \\ \delta P(L,t) = 0 \end{cases}$$

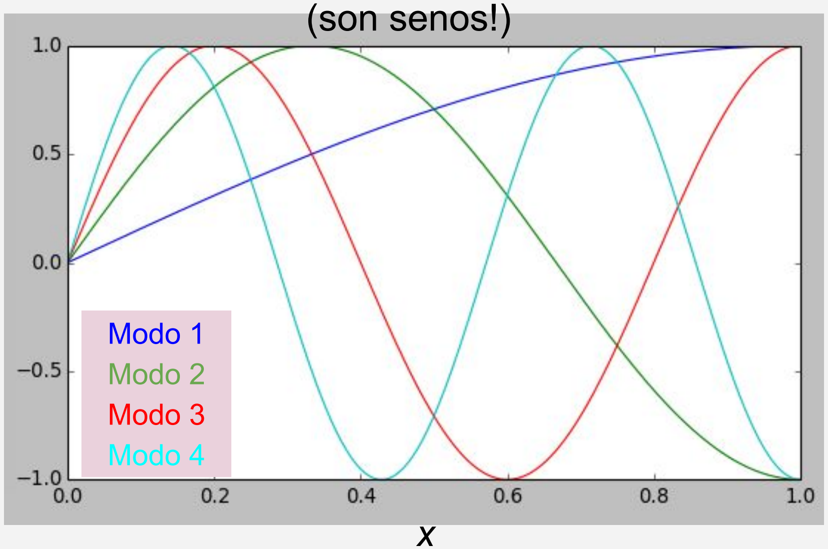
Desplazamiento

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{(x=L,t)} = 0 \end{cases}$$

Modos de presión (son cosenos!)



Modos de desplazamiento (son senos!)



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


L = 1

def my_k(n):
return (n + 0.5)*np.pi / L

x_valores = np.linspace(0, L, 1000)


fig, ax1 = plt.subplots()

ax1.plot(x_valores, np.sin(my_k(0)*x_valores))
ax1.plot(x_valores, np.sin(my_k(1)*x_valores))
#ax1.plot(x_valores, -np.sin(my_k(1)*x_valores))
ax1.plot(x_valores, np.sin(my_k(2)*x_valores))
ax1.plot(x_valores, np.sin(my_k(3)*x_valores))

fig, ax2 = plt.subplots()

ax2.plot(x_valores, np.cos(my_k(0)*x_valores))
ax2.plot(x_valores, np.cos(my_k(1)*x_valores))
#ax2.plot(x_valores, -np.cos(my_k(1)*x_valores))
ax2.plot(x_valores, -np.cos(my_k(2)*x_valores))
ax2.plot(x_valores, -np.cos(my_k(3)*x_valores))
```