

## SISTEMAS CONTÍNUOS LIMITADOS

Los ejercicios con (\*) son opcionales.

## Condiciones de contorno para una Cuerda

- Se tiene una cuerda de longitud  $L$  y densidad lineal de masa  $\mu$  sometida a una tensión  $T_0$ . Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión:  $\Psi(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$ . Tome el sistema de coordenadas con  $x = 0$  en un extremo de la cuerda y  $x = L$  en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:
  - $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$  (ambos extremos están fijos).
  - $\Psi(0, t) = 0$  y  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$  (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre “libre” es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo “libre” para la cuerda?
  - $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$  (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de ese modo?
  - Ahora tome un sistema de coordenadas con  $x = 0$  en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si  $\Psi(-L/2, t) = \Psi(L/2, t) = 0$  (ambos extremos fijos).
- Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano ( $20 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$ )?
- Consideremos que las cuatro cuerdas de un violín son de igual longitud, y que emiten en su modo fundamental las notas:  $\text{sol}_2 = 196 \text{ Hz}$ ,  $\text{re}_3 = 294 \text{ Hz}$ ,  $\text{la}_3 = 440 \text{ Hz}$  y  $\text{mi}_4 = 659 \text{ Hz}$ . De la primera a la cuarta las cuerdas son de distinto material y diámetro:
  - Al  $\rho = 2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $d_1 = 0,09 \text{ cm}$
  - Aleación Al-Ni  $\rho = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $d_2 = 0,12 \text{ cm}$
  - Aleación Al-Ni  $\rho = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $d_3 = 0,1 \text{ cm}$
  - Acero  $\rho = 7,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $d_4 = 0,1 \text{ cm}$ .

Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la de  $\text{la}_3$ .

- Una cuerda de longitud  $L$  fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Considere que parte del reposo.
  - Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.
  - ¿Con qué período se repite el movimiento?
  - Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

## Condiciones de contorno para el gas en un tubo unidimensional

- Se tiene un tubo lleno de aire de longitud  $L$ . Considere las siguientes posibilidades:
  - cerrado en ambos extremos,
  - uno abierto el otro cerrado, y
  - ambos extremos abiertos.

Asuma conocidos:  $L$ ,  $v_{\text{sonido}}$ , la presión atmosférica  $p_0$ ,  $\rho_0 = \frac{\gamma p_0}{v_{\text{sonido}}^2}$  y que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$  para un gas diatómico. Halle para cada una de dichas situaciones:

- Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
- Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas  $\Psi(x, t)$ . ¿Qué parámetros conoce de dicha expresión? ¿De qué dependen los que no conoce?
- A partir de la expresión de  $\Psi(x, t)$ , hallar el apartamiento de la presión respecto a la atmosférica  $\delta p(x, t)$ . ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuál es la amplitud máxima de presión?

- d)* Hallar la función de densidad  $\rho(x, t)$ . ¿Cuál es amplitud máxima?
6. *a)* ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano de extremos abiertos para producir un sonido de 440 Hz?  
*b)* Si uno de sus extremos está cerrado y se desea producir el mismo tono en su primer armónico, ¿qué longitud deberá tener?
7. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1 m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con  $\nu = 440$  Hz. Considere  $v_{\text{sonido}} = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .  
*a)* Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?  
*b)* Repita lo anterior para un tubo de extremos abiertos.