Reflexión y transmisión de ondas

Caso 1: Cuerdas

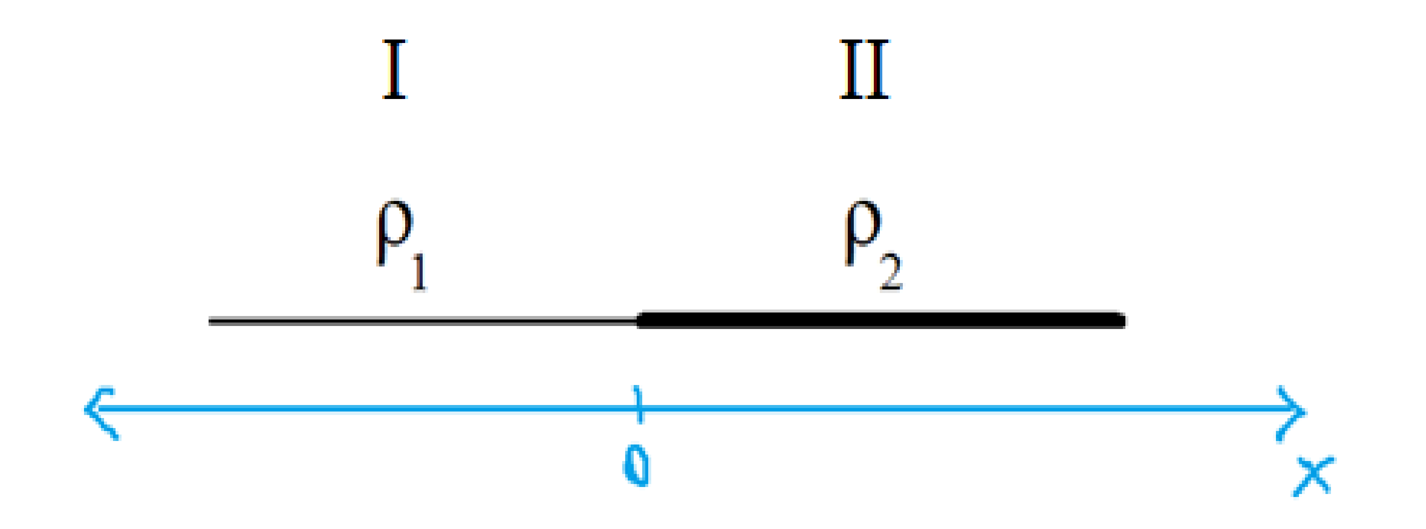
1. Nos interesa estudiar la unión de dos cuerdas de distinta densidad lineal ρ_1 y ρ_2, por lo que las consideraremos semi–infinitas. Mientras se las somete a una tensión T constante incide desde la primera una onda $\Psi_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$. Se conocen ρ_1, ρ_2, T, ω y A_i.

   a) Calcule k_1 y k_2, es decir, los números de onda de cada lado de la unión.

   b) Plantee la solución más general para $\Psi(x,t)$ de cada lado de la unión.

   c) ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?

   d) Usando b) y c), calcule la perturbación $\Psi(x,t)$ en cada una de las cuerdas.



Relación de dispersión

¿Valdrá la misma relación de dispersión para ambos tramos de la cuerda?

- Para el tramo con densidad ρ_1 vale:

$$\omega_1(k_1) = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}\, k_1$$

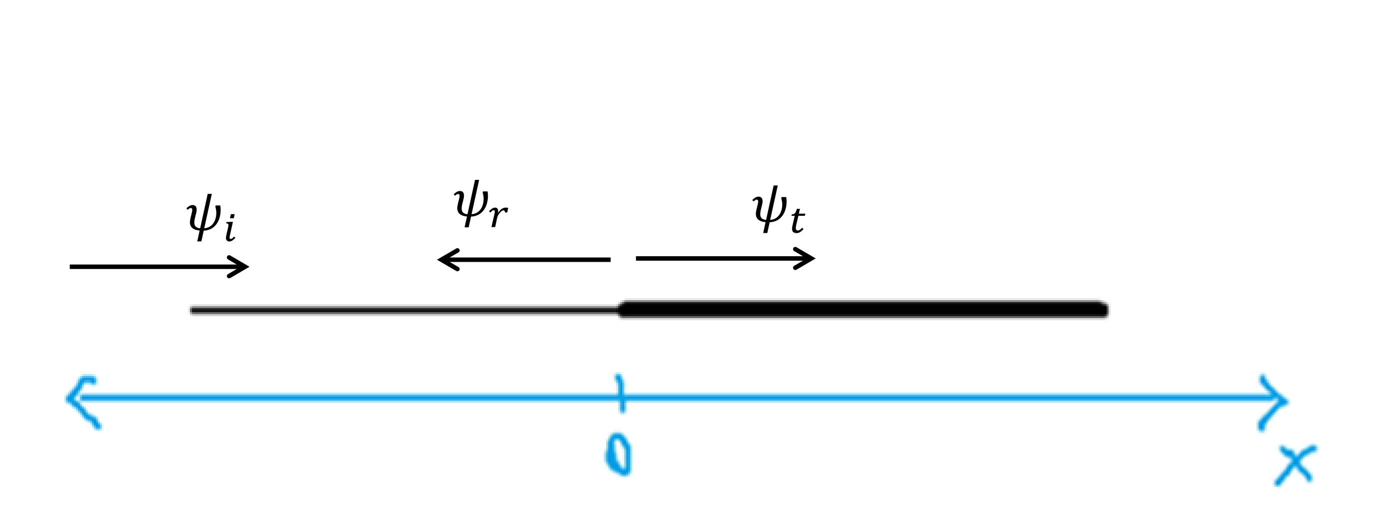
- Para el tramo con densidad ρ_2 vale:

$$\omega_2(k_2) = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}\, k_2$$

Pero además, hace falta una condición más: la frecuencia debe ser la misma de ambos lados de la unión. Luego, la relación de dispersión la podemos escribir de forma más compacta:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{T}{\rho_1}}\, k_1 & en\ el\ tramo\ I \\ \sqrt{\dfrac{T}{\rho_2}}\, k_2 & en\ el\ tramo\ II \end{cases}$$

Solución general y condiciones de contorno



$$\psi_i(x,t) = A_i\, cos(k_1\, x - \omega\, t)$$

$$\psi_r(x,t) = A_r\, cos(k_1\, x + \omega\, t)$$

$$\psi_t(x,t) = A_t\, cos(k_2\, x - \omega\, t)$$

Y la solución general para cada tramo será la superposición de estas ondas:

$$\psi\,(x,t) = \begin{cases} \psi^{(I)}(x,t) = A_i\, cos(k_1\, x - \omega\, t) + A_r\, cos(k_1\, x + \omega\, t) & si\ x < 0 \\ \psi^{(II)}(x,t) = A_t\, cos(k_2\, x - \omega\, t) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Establezcamos las condiciones de empalme que debe verificar nuestra solución en el punto de unión de las cuerdas:

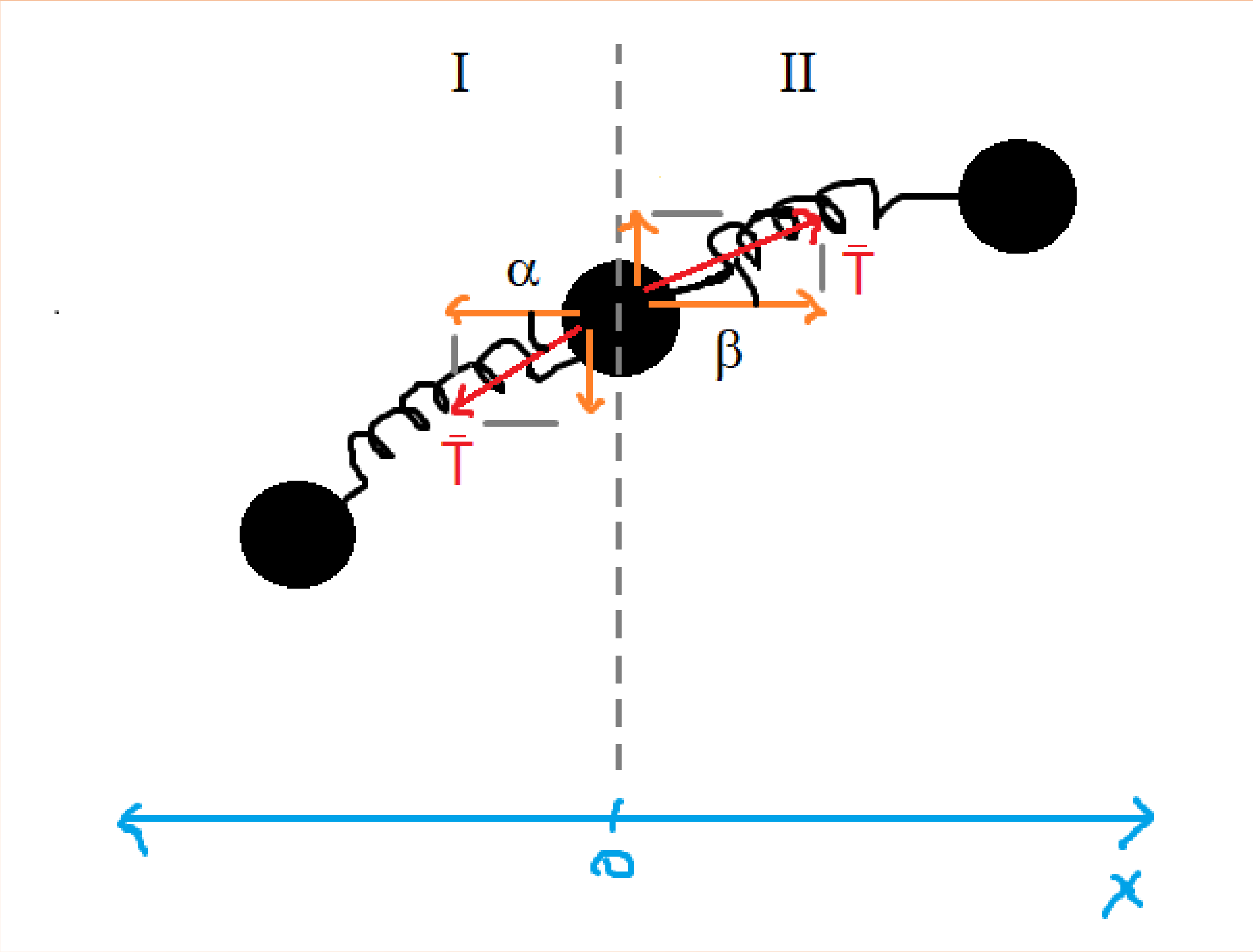
- La solución debe ser continua en la unión:

$$\boldsymbol{\psi^{(I)}(0,t) = \psi^{(II)}(0,t)}$$

Reemplazando en la solución general, se nos genera una relación entre las amplitudes de cada onda:

$$A_i + A_r = A_t$$

- En la unión deben valer las ecuaciones de Newton:



$$\cancel{T}\, sen(\beta) - \cancel{T}\, sen(\alpha) = \underbrace{\delta m}_{\longrightarrow\ \mathbf{0}}\, a$$

$$\Rightarrow \quad sen(\alpha) = sen(\beta)$$

Como los ángulos y los desplazamientos son pequeños...

$$\Rightarrow \quad tg(\alpha) = tg(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta {\psi_0}^{(I)}(0,t)}{\delta x} = \frac{\delta {\psi_0}^{(II)}(0,t)}{\delta x}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi^{(II)}}{\partial x}(0,t)}$$

$$\downarrow$$

$$A_i - A_r = \frac{k_2}{k_1} A_t$$

Nos ha quedado el siguiente sistema 2 de ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} -A_r + A_t = A_i \\ A_r + \dfrac{k_2}{k_1} A_t = A_i \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos:

$$A_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_i = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A_i$$

$$k_j \propto \sqrt{\rho_j} \quad (j = 1,2)$$

$$A_t = \frac{2\, k_1}{k_1 + k_2} A_i = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A_i$$

$$k_j \propto \sqrt{\rho_j} \quad (j = 1,2)$$

Demos finalmente la solución general:

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{A_i}\left\{\boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{\omega}\left(\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\rho_1}}{\boldsymbol{T}}}\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}\right)\right] + \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{\rho_1}}-\sqrt{\boldsymbol{\rho_2}}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho_1}}+\sqrt{\boldsymbol{\rho_2}}}\,\boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{\omega}\left(\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\rho_1}}{\boldsymbol{T}}}\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}\right)\right]\right\} & \boldsymbol{si\ x<0} \\ \dfrac{\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{\rho_1}}}{\sqrt{\boldsymbol{\rho_1}}+\sqrt{\boldsymbol{\rho_2}}}\,\boldsymbol{A_i}\,\boldsymbol{cos}\left[\boldsymbol{\omega}\left(\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\rho_2}}{\boldsymbol{T}}}\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}\right)\right] & \boldsymbol{si\ x\geq 0} \end{cases}$$

Coeficiente de transmisión (T)

Coeficiente de reflexión (R)

$$R = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}} \quad , \quad T = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}$$

$$\boxed{-\boldsymbol{R}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{1}}$$

Casos límites

- Si $\rho_1 \ll \rho_2$:

$$R = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = -1$$

$$T = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = 0$$

$$\psi(x,t) = A_i \left\{ cos\left[\omega\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, x - t\right)\right] - cos\left[\omega\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, x + t\right)\right]\right\} =$$
$$= 2\, A_i\, sen\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, \omega\, x\right) sen(\omega\, t)$$

- Si $\rho_1 \gg \rho_2$:

$$R = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = 1$$

$$T = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = 2$$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} 2\, A_i\, cos\left(\sqrt{\frac{\rho_1}{T}}\, \omega\, x\right) cos(\omega\, t) & si\ x < 0 \\ 2\, A_i\, cos\left[\omega\left(\sqrt{\frac{\rho_2}{T}}\, x - t\right)\right] & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $\rho_1 = \rho_2$ $(= \rho)$:

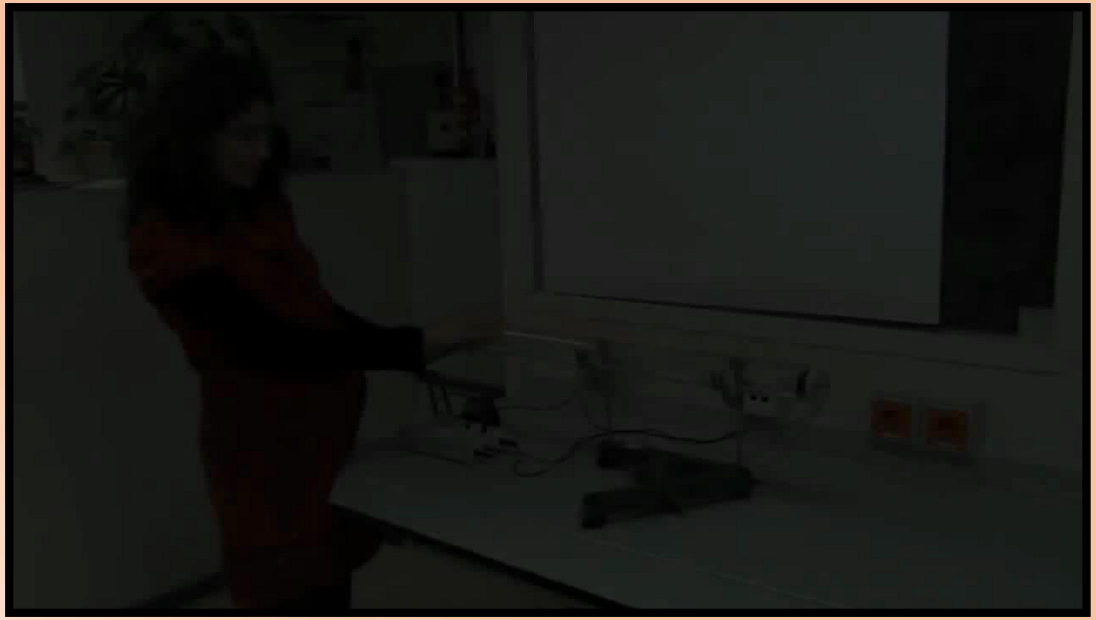
$$R = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = 0$$

$$T = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} = 1$$

$$\psi(x,t) = A_i \cos\left[\omega\left(\sqrt{\frac{\rho}{T}}\, x - t\right)\right]$$

Se recupera el caso de la cuerda homogénea,
notar que $\psi(x,t) = \psi_i(x,t)$

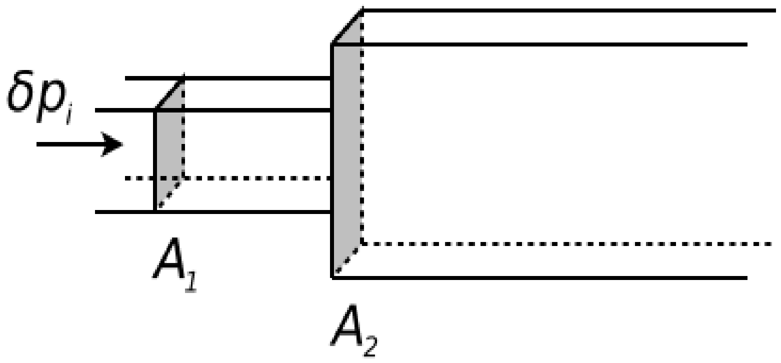
Caso 2: Tubos

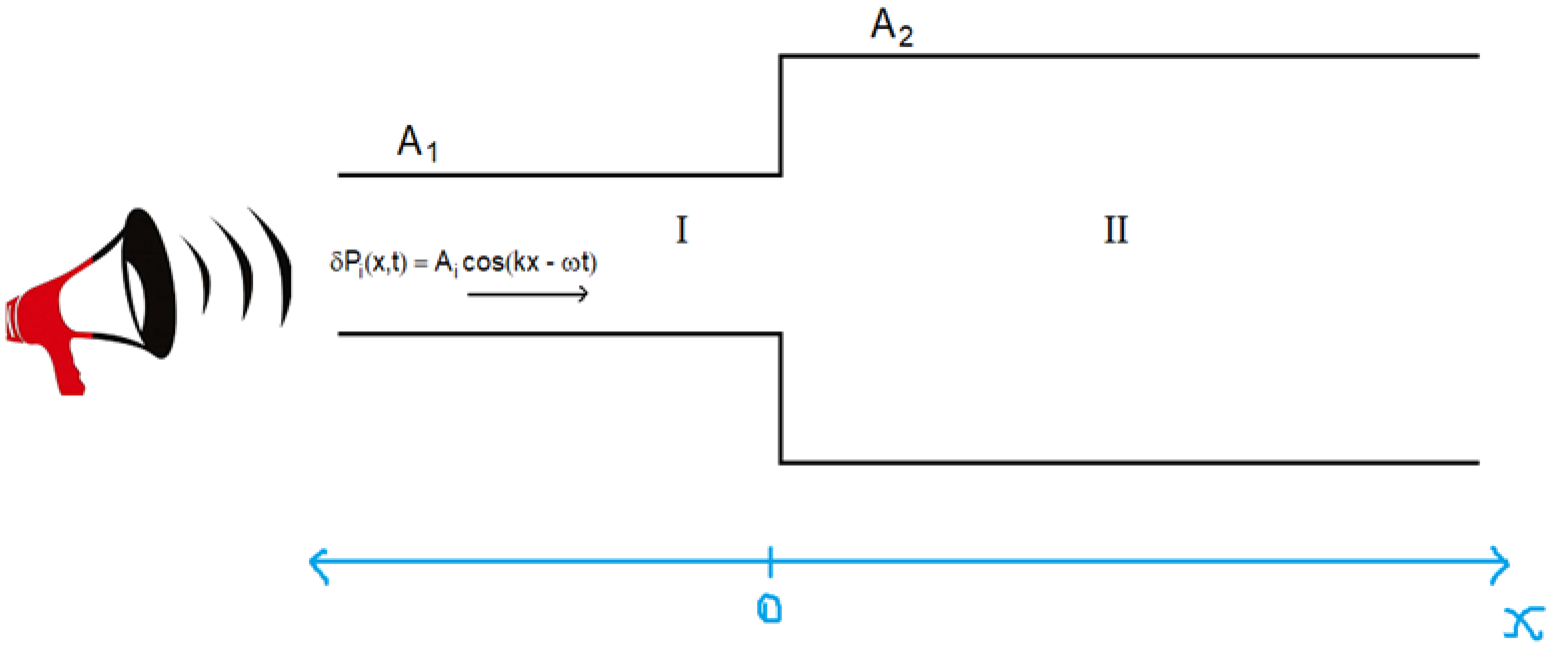


Experiencia 1: tubo con partículas macroscópicas

Experiencia 2: tubo con gas

2. Como nos interesa estudiar la unión de dos caños cuadrados de área transversal A_1 y A_2 los consideramos semi–infinitos. Desde el izquierdo incide una onda acústica $\delta p_i(x,t) = a_i \cos(k_i x - \omega t)$. Suponga despreciables los efectos de la viscosidad y dé por conocidos A_1, A_2, presión media P_0, densidad media ρ_0, v_s, ω, a_i. Halle amplitudes de presión y desplazamiento de moléculas a causa de las ondas reflejadas y transmitidas.





Relación de dispersión

¿Es la misma que antes?

Sí

No

El medio en el cual se propaga la onda es único en todo el tubo.

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma\, P_0}{\rho_0}}\; k$$

Solución general

Como incide una onda de presión, trabajaremos con dicha variable:

$$\delta P_i(x,t) = A_i\, cos(k\, x - \omega\, t)$$

$$\delta P_r(x,t) = A_r\, cos(k\, x + \omega\, t)$$

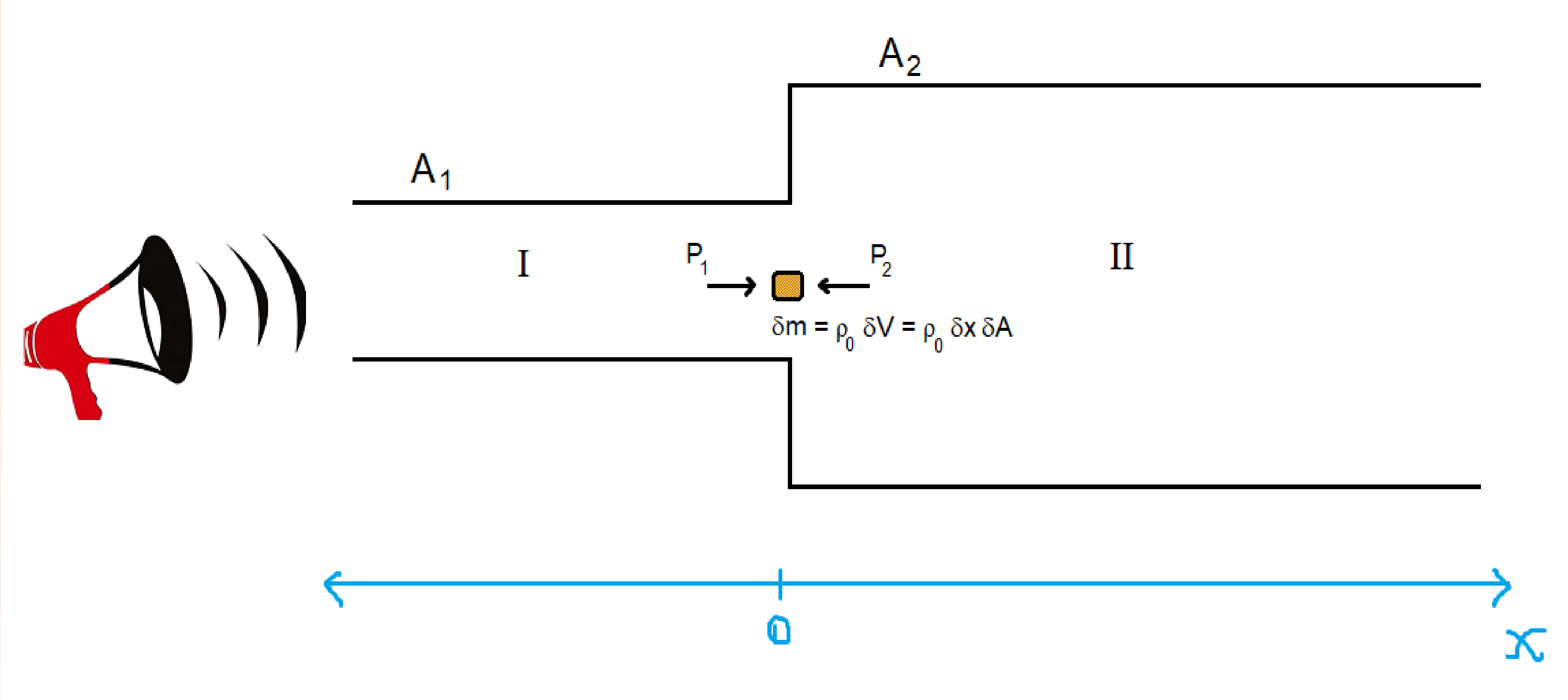
$$\delta P_t(x,t) = A_t\, cos(k\, x - \omega\, t)$$

La expresión general es conocida:

$$\delta P(x,t) = \begin{cases} \delta P^{(I)}(x,t) = A_i\, cos(k\, x - \omega\, t) + A_r\, cos(k\, x + \omega\, t) \\ \delta P^{(II)}(x,t) = A_t\, cos(k\, x - \omega\, t) \end{cases}$$

Continuamos de momento como antes, y proponemos las condiciones de empalme de soluciones:

- En la unión de los tubos tiene que valer Newton:



Planteemos Newton en $x = 0$:

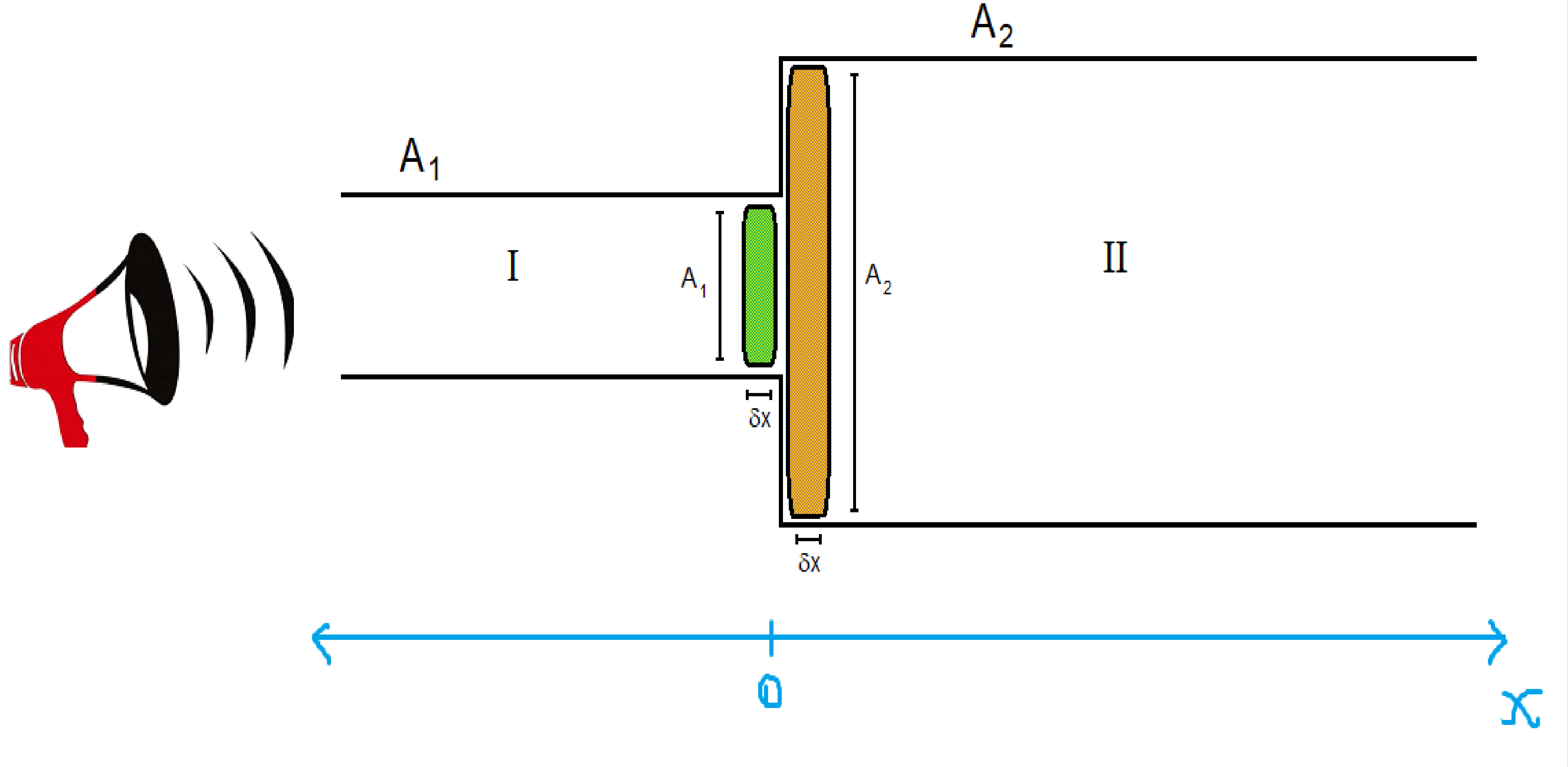
$$\sum F = \underbrace{\delta m}_{\substack{= \rho_0\, \delta V \\ = \rho_0\, (\delta x\, \delta A)}} \ddot{x} \;\Rightarrow\; \left(P^{(II)}(0,t) - P^{(I)}(0,t)\right) \cancel{\delta A} = \rho_0\, \underbrace{\delta x}_{0}\, \cancel{\delta A}\, \ddot{x} \;\Rightarrow\; P^{(II)}(0,t) - P^{(I)}(0,t) = 0$$

Entonces nuestra primera condición de contorno es la siguiente:

$$P^{(I)}(0,t) = P^{(II)}(0,t) \;\Rightarrow\; \cancel{P_0} + \delta P^{(I)}(0,t) = \cancel{P_0} + \delta P^{(II)}(0,t)$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{\delta P^{(I)}(0,t) = \delta P^{(II)}(0,t)}$$

- En el tubo entero debe conservarse la masa del gas:



Planteemos la conservación de la masa cuando se atraviesa la unión de tubos:

$$\delta m^{(I)}(0,t) = \delta m^{(II)}(0,t)$$

Pero la masa la podemos escribir en función del desplazamiento del gas:

$$\cancel{\rho_0}\, \delta x^{(I)}(0,t)\, A_1 = \cancel{\rho_0}\, \delta x^{(II)}(0,t)\, A_2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial t}(0,t)\, \cancel{\delta t}\, A_1 = \frac{\partial \psi^{(II)}}{\partial t}(0,t)\, \cancel{\delta t}\, A_2}_{\text{Conservación del caudal de gas}}$$

Y presentamos finalmente la segunda condición:

$$\boldsymbol{A_1 \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial t}(0,t) = A_2 \frac{\partial \psi^{(II)}}{\partial t}(0,t)}$$

Nos quedaron las siguientes condiciones de empalme:

$$\delta P^{(I)}(0,t) = \delta P^{(II)}(0,t) \qquad , \qquad A_1 \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial t}(0,t) = A_2 \frac{\partial \psi^{(II)}}{\partial t}(0,t)$$

Tenemos el problema de que nos han quedado dos condiciones para variables diferentes. Como trabajamos con la presión, lo más conveniente es llevar todo a dicha variable.

Recordemos:

$$\delta P(x,t) = -\gamma\, P_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)$$

Obsérvese que nuestra condición depende de la derivada temporal del desplazamiento, y nuestra relación depende de la derivada espacial.

	INCIDENTE	REFLEJADA	TRANSMITIDA
ψ	$\lambda_i\ sen(k\ x-\omega\ t)$	$\lambda_r\ sen(k\ x+\omega\ t)$	$\lambda_t\ sen(k\ x-\omega\ t)$
$\frac{\partial\psi}{\partial x}$	$k\ \lambda_i\ cos(k\ x-\omega\ t)$	$k\ \lambda_r\ cos(k\ x+\omega\ t)$	$k\ \lambda_t\ cos(k\ x-\omega\ t)$
$\frac{\partial\psi}{\partial t}$	$-\omega\ \lambda_i\ cos(k\ x-\omega\ t)$	$\omega\ \lambda_r\ cos(k\ x+\omega\ t)$	$-\omega\ \lambda_t\ cos(k\ x-\omega\ t)$

λ es una cantidad con unidades de desplazamiento.

Observando cuidadosamente esta tabla, podemos llegar a establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(x,t)=-\frac{\omega}{k}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}(x,t)\quad,\quad\frac{\partial\psi_r}{\partial t}(x,t)=\frac{\omega}{k}\frac{\partial\psi_r}{\partial x}(x,t)\quad,\quad\frac{\partial\psi_t}{\partial t}(x,t)=-\frac{\omega}{k}\frac{\partial\psi_t}{\partial x}(x,t)$$

Actividad (10-15 min.): Reemplazar estas expresiones en la conservación del caudal, y utilizar la relación entre ψ y δP para hallar la segunda condición en función de la diferencia de presión:

$$A_1 \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial t}(0,t) = A_2 \frac{\partial \psi^{(II)}}{\partial t}(0,t) \quad \Rightarrow \quad A_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(0,t) + A_1 \frac{\partial \psi_r}{\partial t}(0,t) = A_2 \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(0,t)$$

$$\Rightarrow \quad -A_1 \left[\cancel{\frac{\omega}{k}} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(0,t)\right] + A_1 \left[\cancel{\frac{\omega}{k}} \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(0,t)\right] = -A_2 \left[\cancel{\frac{\omega}{k}} \frac{\partial \psi_t}{\partial x}(0,t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_1}{\cancel{\gamma P_0}}\, \delta P_i(0,t) - \frac{A_1}{\cancel{\gamma P_0}}\, \delta P_r(0,t) = \frac{A_2}{\cancel{\gamma P_0}}\, \delta P_t(0,t)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\delta P_i(0,t) - \delta P_r(0,t) = \frac{A_2}{A_1}\, \delta P_t(0,t)}$$

En resumen, las dos condiciones de empalme a aplicar son:

$$\begin{cases} \delta P_i(0,t) + \delta P_r(0,t) = \delta P_t(0,t) \\ \delta P_i(0,t) - \delta P_r(0,t) = \dfrac{A_2}{A_1}\, \delta P_t(0,t) \end{cases}$$

Finalmente, y luego de cuentas análogas a las del problema anterior, damos la solución final para la presión en todo el tubo:

$$\boldsymbol{\delta P(x,t) = \begin{cases} A_i \left\{ cos\left[\omega\left(\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\gamma\, P_0}}\; x - t\right)\right] + \dfrac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\; cos\left[\omega\left(\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\gamma\, P_0}}\; x + t\right)\right]\right\} & si\; x \leq 0 \\ \dfrac{2\, A_1}{A_1 + A_2}\, A_i\; cos\left[\omega\left(\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\gamma\, P_0}}\; x - t\right)\right] & si\; x > 0 \end{cases}}$$