resortesAntagónicos

March 23, 2021

1 Resortes antagónicos

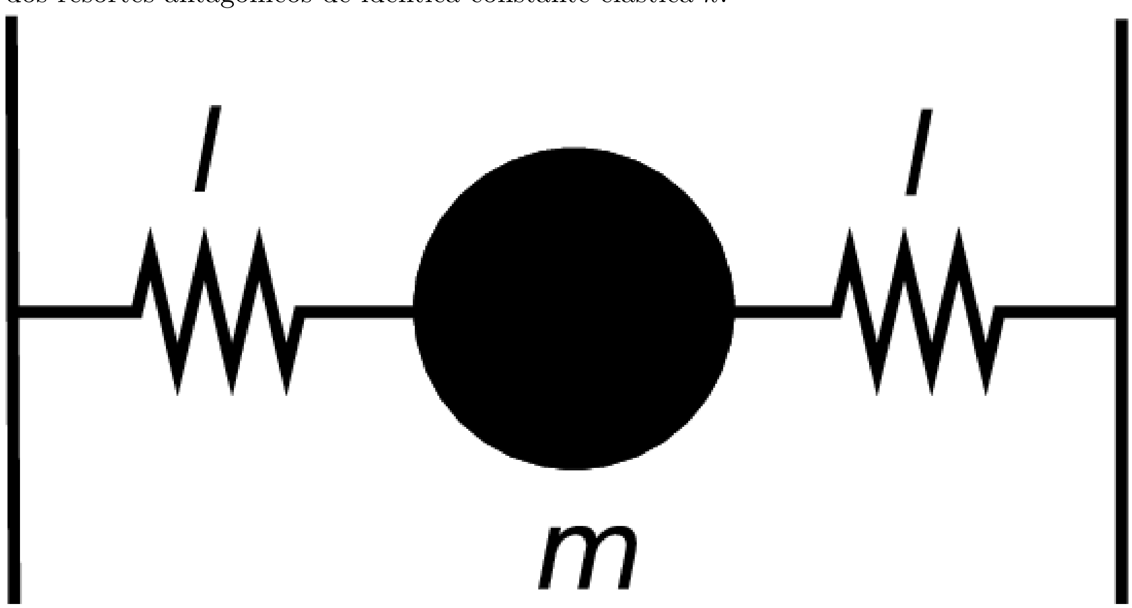
universidad de buenos aires - exactas
departamento de física
Juan José Giambiagi

2021 Víctor A. Bettachini

Bibliografía:
- Sección 1.2
Ondas es física
Oscar E. Martinez
EUdeBA, 2008

1.1 Enunciado

El sistema de la figura muestra un peso, de masa m, suspendido equidistante de dos paredes por dos resortes antagónicos de idéntica constante elástica k.



Asumiendo la artificiosa condición de que no hay aceleración gravitatoria escriba las ecuaciones de movimiento para:

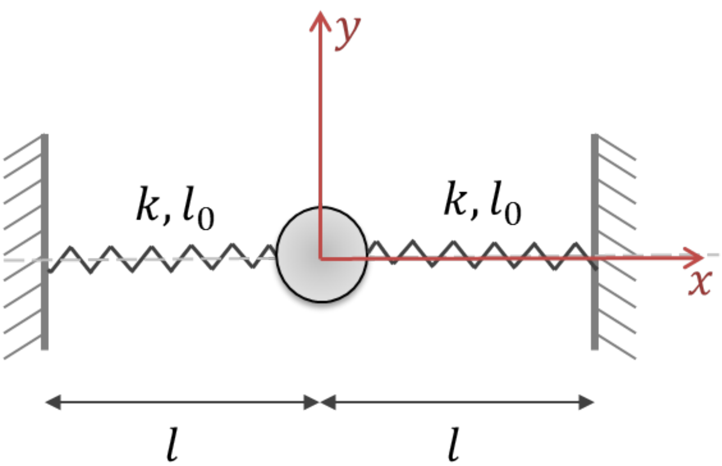
1. Oscilaciones longitudinales para los casos:
    1. longitud natural del resorte l_0 ($l_0 < l$),

    2. "slinky" ($l_0 = 0$).

2. Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior, discutiendo las diferencias entre los casos 1) y 2), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso 1) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ($l_0 < l$) o que están relajados en dicha posición ($l_0 = l$).

1.2 Oscilación longitudinal

Para las oscilaciones transversales solo nos preocupamos de la coordenada x de la masa. Siendo ambos resortes iguales es claro que en reposo la masa está equidistante de las paredes. Nos es "práctico" establer allí el origen del sistema de coordenadas.



Por ahora nos abstraemos de las opciones de la longitud natural de los resortes $l_0 $ y expresamos sus longitudes

$$l_{\text{izq}} = [x + (l - l_0)] \, , l_{\text{der}} = [-x + (l - l_0)] \, ,$$

siendo x la posición de la masa.

Por supuesto podemos obtener fácilmente la fuerza que ejercen sobre esta

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -k \, [l_{\text{izq}}] \, \hat{x} + k \, [l_{\text{der}}] \, \hat{x} \\ &= -k \, [x + (l - l_0)] \, \hat{x} + k \, [-x + (l - l_0)] \, \hat{x} \\ &= -2kx\hat{x}.\end{aligned}$$

Pero por el método que abogo que incorporen, el de plantear el potencial, no es mucho más trabajoso,

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{k}{2}\left[(x+(l-l_0))^2 + (-x+(l-l_0))^2\right],\\
\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial_x}V(x)\hat{x} &= -k\left[x+(l-l_0)+x-(l-l_0)\right]\hat{x} = -2kx\hat{x}.
\end{aligned}
$$

En este caso de oscilación transversal en que podemos imaginar que un resorte "compensa" al otro los casos "slinky" o realista arrojan la misma solución. Ojo, esto no será el caso con el caso de oscilaciones transversales.

Queda hacer uso de la 2.a ley de Newton:

$$
m\ddot{x}\hat{x} = -2kx\hat{x} \implies \ddot{x} = -\frac{2k}{m}x,
$$

de donde obtendremos una solución similar a la del péndulo pero con $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

1.3 Condiciones iniciales

En el problema del péndulo obtuvimos una solución que había que especializar en función de condiciones iniciales de amplitud máxima A y de una un tanto "esotérica" fase inicial ϕ_0, que para este problema sería

$$
x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0).
$$

Antes de llegar a esta versión compacta habriamos pasado por

$$
x(t) = A_1 \mathrm{e}^{\imath\omega t} + A_2 \mathrm{e}^{-\imath\omega t},
$$

pero aquí voy a ahorrar tiempo y utilizar las relaciones de Euler $\mathrm{e}^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta$ para escribir

$$
x(t) = (A_1 + A_2)\cos(\omega t) + \imath(A_1 - A_2)\sin(\omega t).
$$

Esta expresión es muy práctica si conocemos $x(0)$ y $\dot{x}(0)$, pues

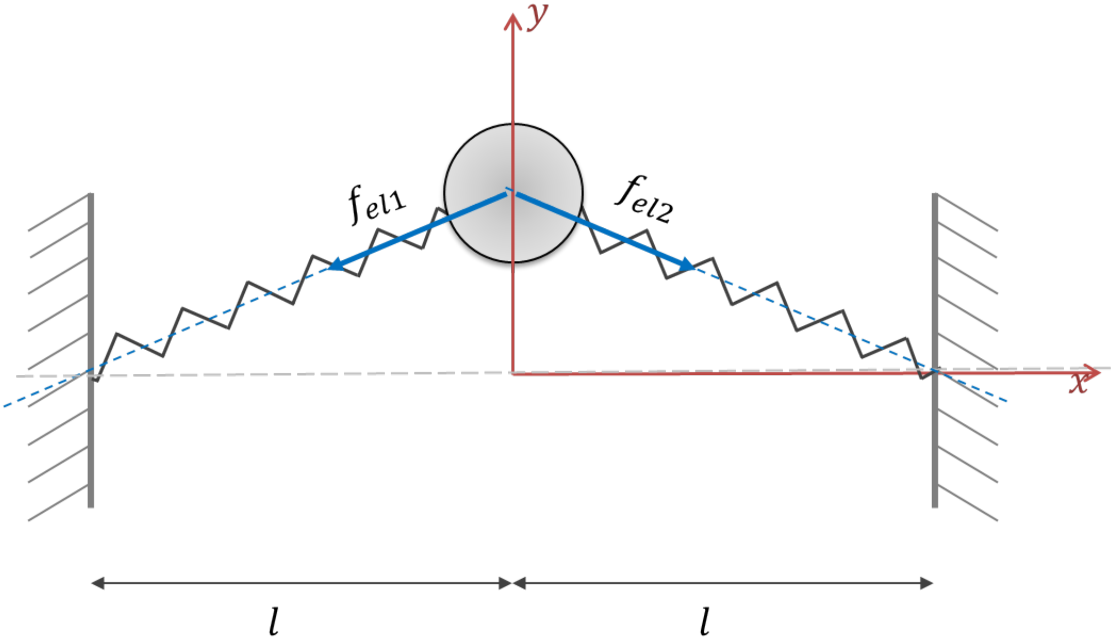
$$
\begin{aligned}
x(0) &= (A_1 + A_2)\\
\dot{x}(0) &= \imath\omega(A_1 - A_2).
\end{aligned}
$$

Es muy sencillo entonces escribir

$$
\boxed{x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin(\omega t).}
$$

1.4 Oscilaciones transversales

Ahora nos tenemos que ocupar del movimiento limitado a la dirección $\hat{y}$ mientras $x \equiv 0$.



Las longitudes de los resortes son

$$l_{\text{izq}} = \sqrt{y^2 + l^2}, l_{\text{der}} = \sqrt{y^2 + l^2},$$

y el potencial

$$V(y) = \frac{k}{2}\left[(l_{\text{izq}} - l_0)^2 + (l_{\text{der}} - l_0)^2\right] = k\left(\sqrt{y^2 + l^2} - l_0\right)^2$$

Para obtener la fuerza en $\hat{y}$

$$m\ddot{y} = \vec{F} \cdot \hat{y} = -\frac{\partial}{\partial_y} V(y) = -2k\left(\sqrt{y^2 + l^2} - l_0\right)\frac{1}{2\sqrt{y^2 + l^2}} 2y$$

$$m\ddot{y} = -2ky\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{y^2 + l^2}}\right)$$

Aquí es donde entra la variante de como suponer la longitud de reposo de los resortes: - Si son "slinkies", en cuyo caso $l_0 = 0 \implies \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$. - Si mantienen una $l_0 \neq 0$ se puede desarrollar a orden cero $\frac{l_0}{\sqrt{y^2+l^2}}$. Hacer esto dará idéntico resultado que plantear

$$\frac{l_0}{\sqrt{y^2 + l^2}} = \frac{l_0}{l\sqrt{\left(\frac{y}{l}\right)^2 + 1}},$$

y como nos atenemos a un régimen de pequeñas oscilaciones $y \ll l$ entonces

$$\frac{l_0}{l\sqrt{\left(\frac{y}{l}\right)^2+1}} \simeq \frac{l_o}{l},$$

con lo que en este caso $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1-\frac{l_0}{l}\right)}}$, una frecuencia menor que con “slinkies”. Esto es “físicamente razonable” pues hay menor “tirantez” de los resortes.

Esta última solucíon evidentemente “estalla en pedazos” para el caso de $l_0 = l$.
Tarea para el que quiera esmerarse: ¿Se te occure que aproximaciones efectuadas modificar para llegar a un modelo de la dinámica aunque no sea resoluble analíticamente?