

# PROPAGACIÓN EN MEDIOS DISPERSIVOS | TRANSFORMADA DE FOURIER

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## Transformada de Fourier

1. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen.

Ayuda:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

- a) Tome el siguiente pulso con un espectro Gaussiano de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}.$$

Calcule  $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)]$  y vea que tiene una envolvente Gaussiana que modula una portadora de frecuencia  $k_0$ . Note que el pulso está centrado en  $x = 0$  y que se cumple la relación  $\Delta x \Delta k = 1/2$  (el paquete Gaussiano es el de mínima incerteza).

- b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{i\alpha(k-k_0)}.$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es el mismo pulso que en la parte a), pero desplazado en  $\alpha$  hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

- c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{i\beta(k-k_0)^2}.$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es un pulso Gaussiano centrado en  $x = 0$  pero con un ancho  $\Delta x$  que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar  $\Delta k$ ? Derive  $\Delta x$  con respecto a  $\Delta k$  de la expresión anterior y analice lo pedido.

2. (\*) Muestre que si  $\phi(t) \in \mathcal{R}$  y  $\psi(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)]$  es su transformada de Fourier, esta última cumple que  $\overline{\psi(\omega)} = \psi(-\omega)$ , es decir, que para obtener su conjugada basta con invertir el signo de  $\omega$ . Aproveche esto para escribir a  $\phi(t)$  como superposición de senos y cosenos.

## Propagación en medios dispersivos

3. Se tiene un pulso de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2,$$

donde  $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  y  $\omega'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ . Si en  $t = 0$  el pulso se propaga hacia  $x < 0$ , y se escribe

$$\psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{ikx} dk + \text{c.c.} \quad .$$

Calcule  $\psi(x, t)$ . Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?