Física 2 (Físicos) ©DF, FCEyN, UBA

## Sistemas contínuos | Condiciones de Contorno

Los ejercicios con (\*) son opcionales.

## Condiciones de contorno para una Cuerda

- 1. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa  $\mu$  sometida a una tensión  $T_0$ . Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión:  $\Psi(x,t) = A \operatorname{sen}(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$ . Tome el sistema de coordenadas con x=0 en un extremo de la cuerda y x=L en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:
  - a)  $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$  (ambos extremos están fijos).
  - b)  $\Psi(0,t)=0$  y  $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t)=0$  (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre "libre" es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo "libre" para la cuerda?
  - c)  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(L,t) = 0$  (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de ese modo?
  - d) Ahora tome un sistema de coordenadas con x=0 en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si  $\Psi(-L/2,t) = \Psi(L/2,t) = 0$  (ambos extremos fijos).
- 2. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano  $(20\,\mathrm{Hz} < \nu < 20\,\mathrm{kHz})$ ?
- 3. Consideremos que las cuatro cuerdas de un violín son de igual longitud, y que emiten en su modo fundamental las notas:  $sol_2 = 196 \, Hz$ ,  $re_3 = 294 \, Hz$ ,  $la_3 = 440 \, Hz$  y  $mi_4 = 659 \, Hz$ . De la primera a la cuarta las cuerdas son de distinto material y diámetro:

1. Al 
$$\rho = 2.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$
,  $d_1 = 0.09 \text{ cm}$ 

2. Aleación Al-Ni 
$$\rho = 1, 2 \frac{g}{cm^3}, d_2 = 0, 12 \text{ cm}$$

3. Aleación Al-Ni 
$$\rho = 1.2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, d_3 = 0.1 \text{ cm}$$
 4. Acero  $\rho = 7.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, d_4 = 0.1 \text{ cm}.$ 

4. Acero 
$$\rho = 7.5 \frac{g}{cm^3}$$
,  $d_4 = 0.1 \text{ cm}$ .

Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la de la<sub>3</sub>.

- 4. Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Considere que parte del reposo.
  - a) Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.
  - b) ¿Con qué período se repite el movimiento?
  - c) Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

## Condiciones de contorno para el gas en un tubo unidimensional

- 5. Se tiene un tubo lleno de aire de longitud L. Considere las siguientes posibilidades:
  - b) uno abierto el otro cerrado, y c) ambos extremos abiertos. a) cerrado en ambos extremos,

Asuma conocidos: L,  $v_{\rm sonido}$ , la presión atmosférica  $p_0$ ,  $\rho_0 = \frac{\gamma p_0}{v_{\rm sonido}^2}$  y que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$  para un gas diatómico. Halle para cada una de dichas situaciones:

- a) Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
- b) Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas  $\Psi(x,t)$ . ¿Qué parámetros conoce de dicha expresión? ¿De qué dependen los que no conoce?
- c) A partir de la expresión de  $\Psi(x,t)$ , hallar el apartamiento de la presión respecto a la atmosférica  $\delta p(x,t)$ . ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuál es la amplitud máxima de presión?

- d) Hallar la función de densidad  $\rho(x,t)$ . ¿Cuál es amplitud máxima?
- 6. a) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano de extremos abiertos para producir un sonido de 440 Hz?
  - b) Si uno de sus extremos está cerrado y se desea producir el mismo tono en su primer armónico, ¿qué longitud deberá tener?
- 7. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1 m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con  $\nu=440\,\mathrm{Hz}$ . Considere  $v_{\mathrm{sonido}}=330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ .
  - a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
  - b) Repita lo anterior para un tubo de extremos abiertos.