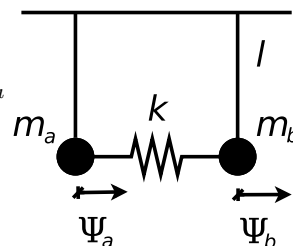


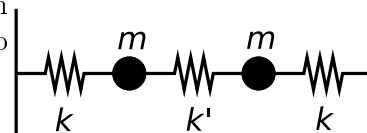
PULSACIONES, BATIDOS (O LATIDOS, *beats*)

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional y puede considerarlos opcionales.

1. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b , acoplados mediante un resorte de constante k .



- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa, considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es *slinky*?
 - Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
 - Suponga que el acoplamiento es débil ($k \ll \frac{g}{l} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$) y que las condiciones iniciales son: $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$. Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.
 - Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b , donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.
2. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k' .



- Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.
- ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Sistemas forzados de N grados de libertad

3. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 1, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.
- Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.
 - Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.
 - Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.
 - Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}\Psi_a &\approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right] \\ \Psi_b &\approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right] \\ \frac{\Psi_b}{\Psi_a} &\approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2}\end{aligned}$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

- (*) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.
4. Considere el sistema del problema 2, pero en este caso considere las oscilaciones longitudinales.

- a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante del tipo $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$ ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?
- b) (*) Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad
- c) (*) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema

5. Considere el sistema de 3 péndulos acoplados que se muestra en la figura.

- a) Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.
- b) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

