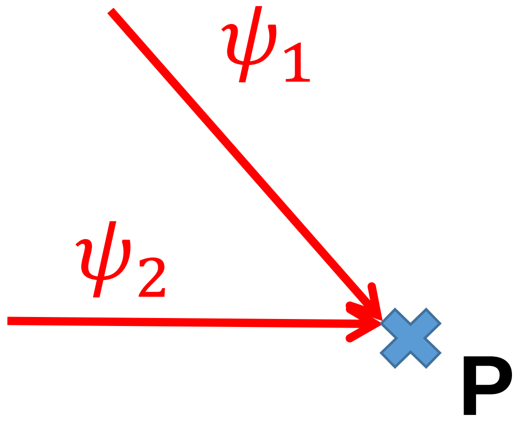
Difracción por una abertura:

Recordemos de donde veníamos:

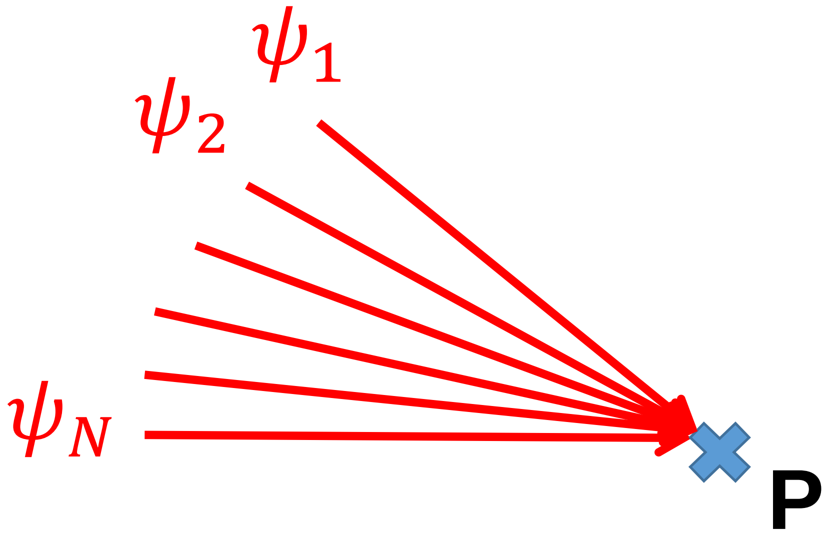
CASO 1 (INTERFERENCIA)

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2$$



CASO 2 (INTERFERENCIA)

$$\psi_P = \sum_{n=1}^{N} \psi_n$$

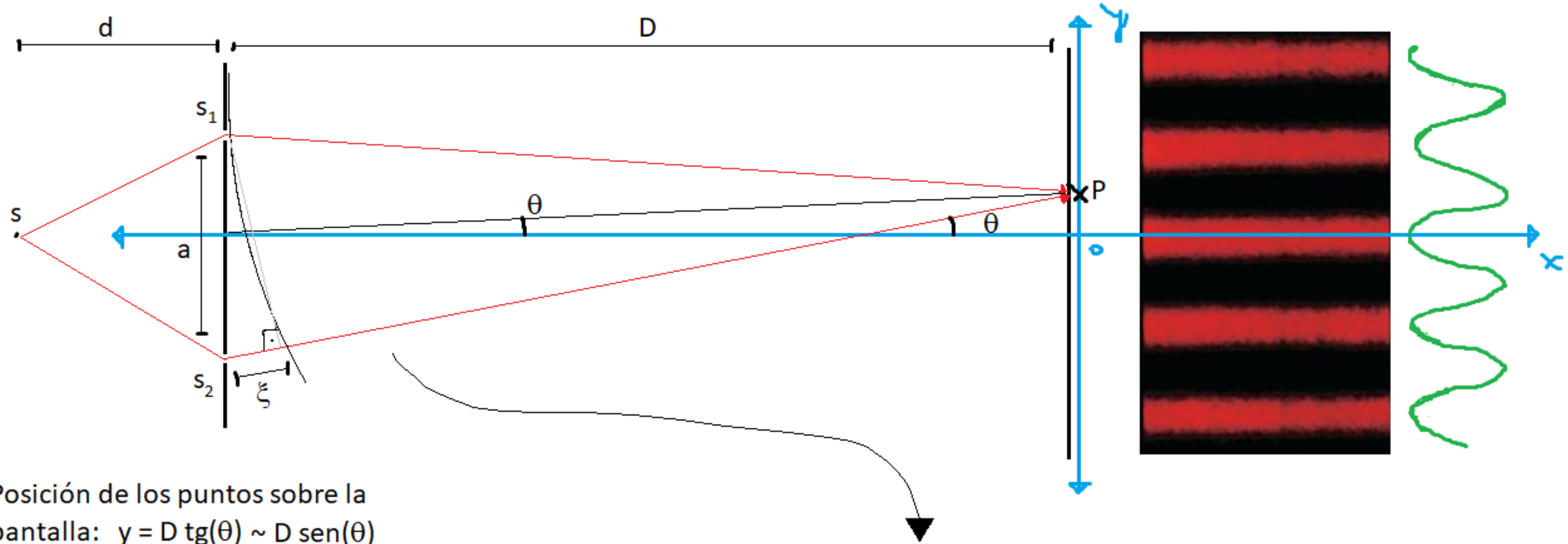


CASO 3 (DIFRACCIÓN)

$$\psi_P = \int_{fuentes} d\psi$$

¡CUIDADO!

Recordemos ahora el interferómetro de Young:



Posición de los puntos sobre la pantalla: $y = D\,\mathrm{tg}(\theta) \sim D\,\mathrm{sen}(\theta)$

Pero también: $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\xi}{a}$

Entonces llegamos a la forma general para las posiciones:

$$y = \frac{D\,\xi}{a}$$

Se traza un arco de circunferencia que, al ser "D" mucho mayor que "a", puede verse como una perpendicular que cae sobre el rayo inferior. Luego, el segmento que une este punto con la segunda fuente es la diferencia de camino óptico de los rayos.

$$\psi_P = \psi_1 + \psi_2$$

$$I \propto A^2 = 4\, I_0\, cos^2(\delta)$$

Para los máximos pedimos que la interferencia sea constructiva, es decir que valga: $\xi = m\,\lambda$. De ese modo, obtenemos:

$$y_M = \frac{m\,\lambda\,D}{a}$$

Para los mínimos pedimos que la interferencia sea destructiva, es decir: $\xi = (2m+1)\,\lambda/2$. De ese modo, obtenemos:

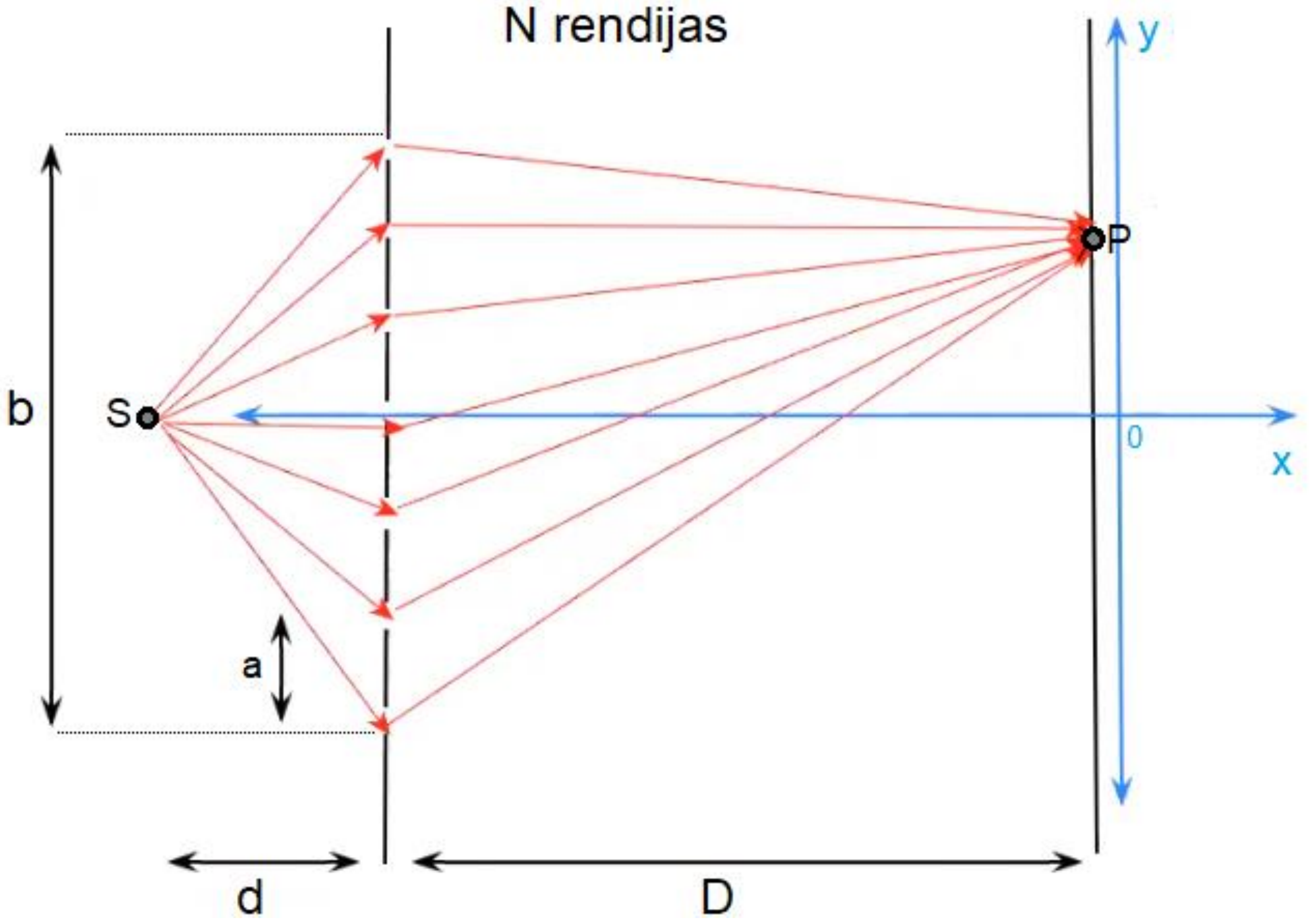
$$y_M = \frac{(2m+1)\,\lambda\,D}{2\,a}$$

Finalmente damos la interfranja, que es la distancia entre dos de las franjas luminosas:

$$i = \frac{\lambda\,D}{a}$$

Ahora, intentemos realizar la misma analogía para llegar al dispositivo para la difracción ("Young para infinitas rendijas"):

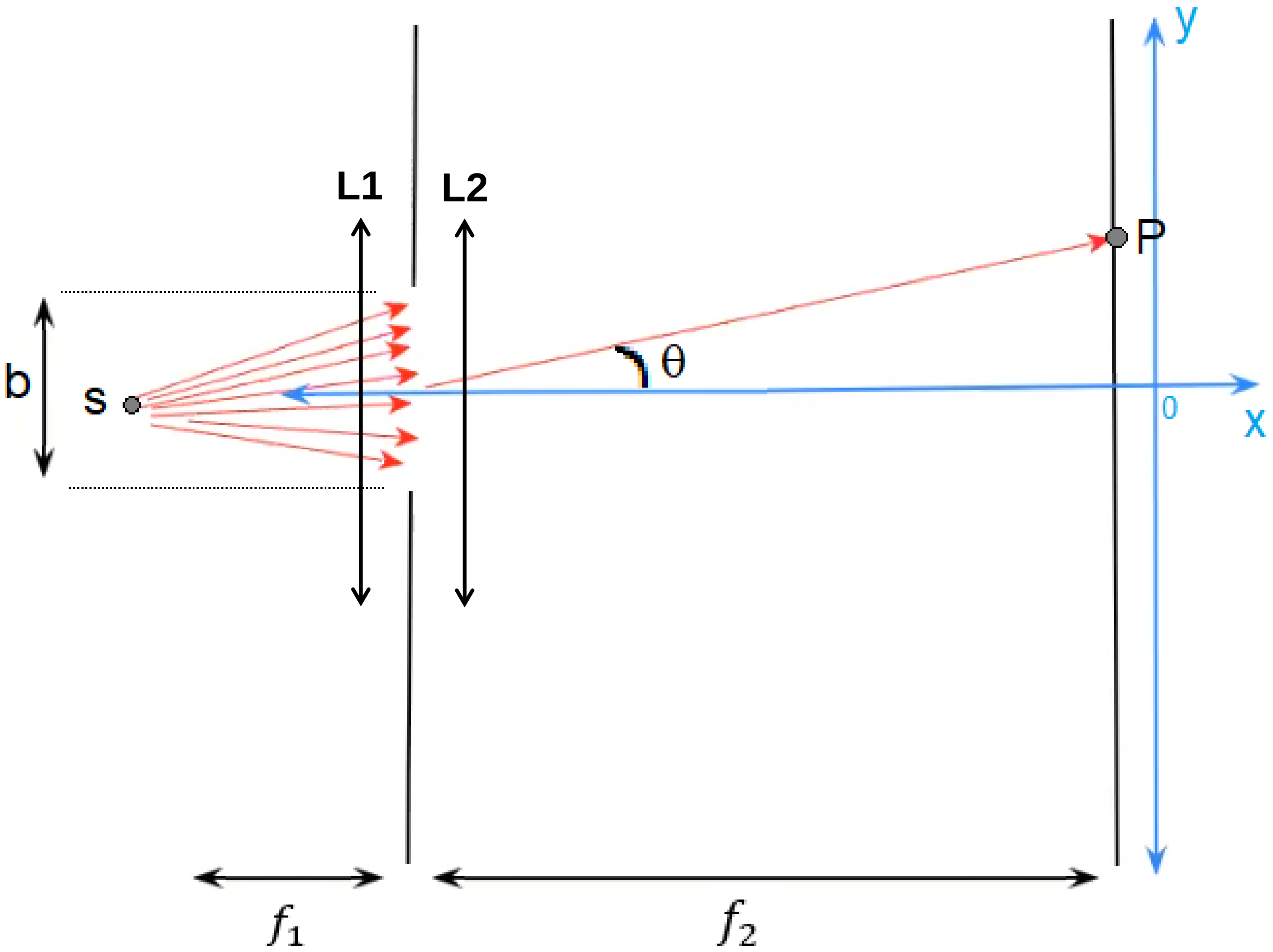
Veamos primero cual sería el dispositivo "madre" para generar interferencia de N ondas:



El paso al límite para obtener el dispositivo para la difracción involucra un límite continuo:

- El número de rendijas debe tender a infinito.
- La separación a entre rendijas debe tender a cero.
- La longitud de la cadena de rendijas debe mantenerse constante.
- La intensidad registrada en la pantalla debe ser constante.

La abertura de la difracción:

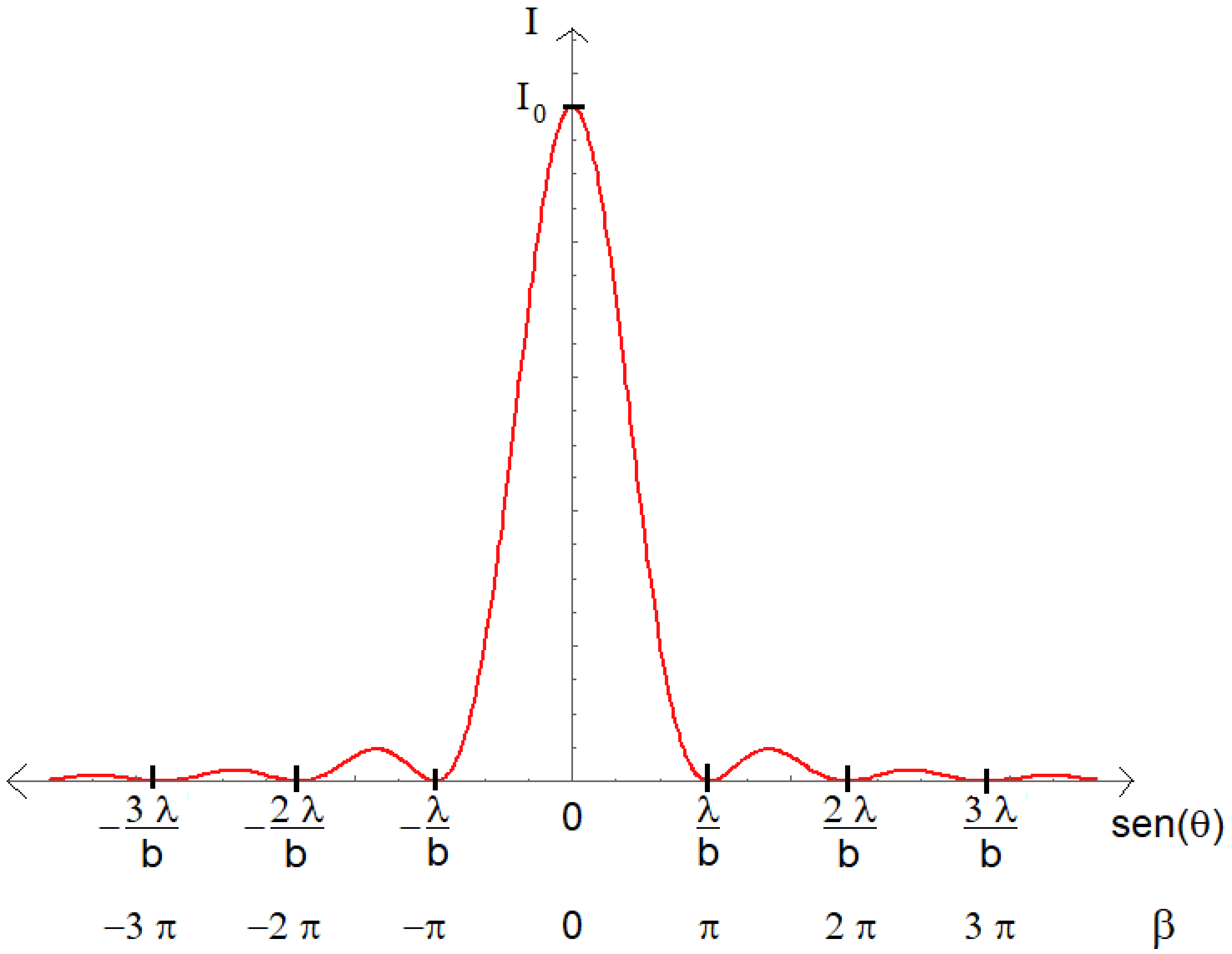


$$\psi_P = \int_{fuentes} d\psi$$

$$I \propto A^2 = I_0 \, \frac{sen^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\pi \, b}{\lambda} \, sen(\theta)$$

Patrón de intensidades en una abertura



Máximos y mínimos de intensidad en el patrón:

Dada la función de intensidad en el punto P: $I_P(\theta) = I_0 \dfrac{sen^2(\beta)}{\beta^2}$

Vamos a extremarla:

$$\frac{d\,I_P}{d\beta}(\beta) = \frac{2\Big[\underbrace{\boxed{\beta\,cos(\beta) - sen(\beta)}}_{\text{me da los máximos}}\Big]\,\underbrace{\boxed{sen(\beta)}}_{\text{me da los mínimos}}}{\beta^3} = 0$$

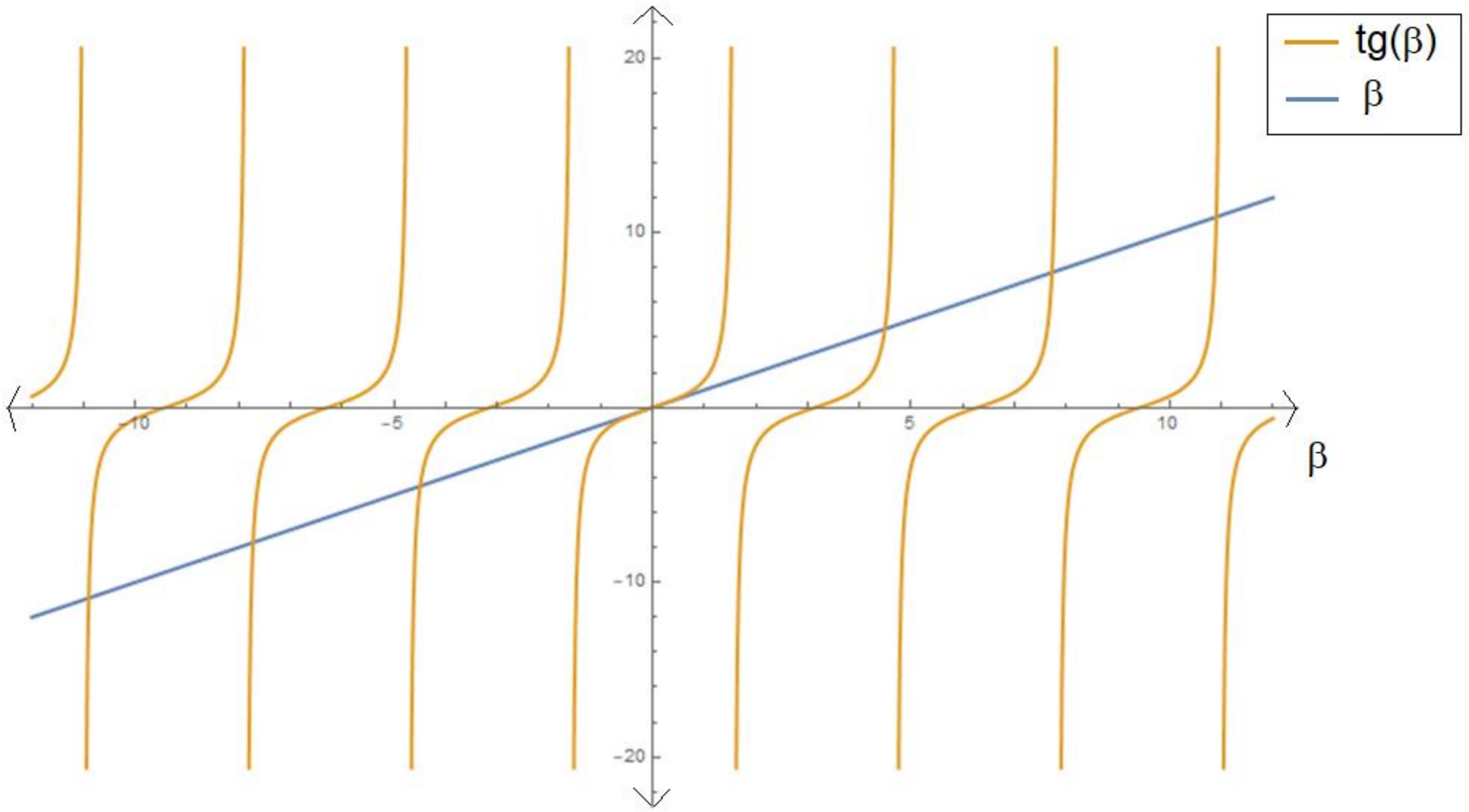
- Mínimos: $sen[\beta_m] = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta_m = m\,\pi}$

  Si $\beta = \frac{\pi\,b}{\lambda}\,sen(\theta) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{sen(\theta_m) = \frac{m\,\lambda}{b}} \quad (\boldsymbol{m \neq 0})$

- Máximos: $\beta\,cos[\beta] - sen[\beta] = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta = tg[\beta]}$

  Si $\beta = \frac{\pi\,b}{\lambda}\,sen(\theta) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\frac{\pi\,b}{\lambda}\,sen(\theta) = tg\left[\frac{\pi\,b}{\lambda}\,sen(\theta)\right]}$

Graficando esta relación tenemos:



$$\beta = \{\dots,\ -14.0662,\ -10.9041,\ -7.7252,\ -4.4934,\ 0,\ 4.4934,\ 7.7252,\ 10.9041,\ 14.0662,\ \dots\}$$

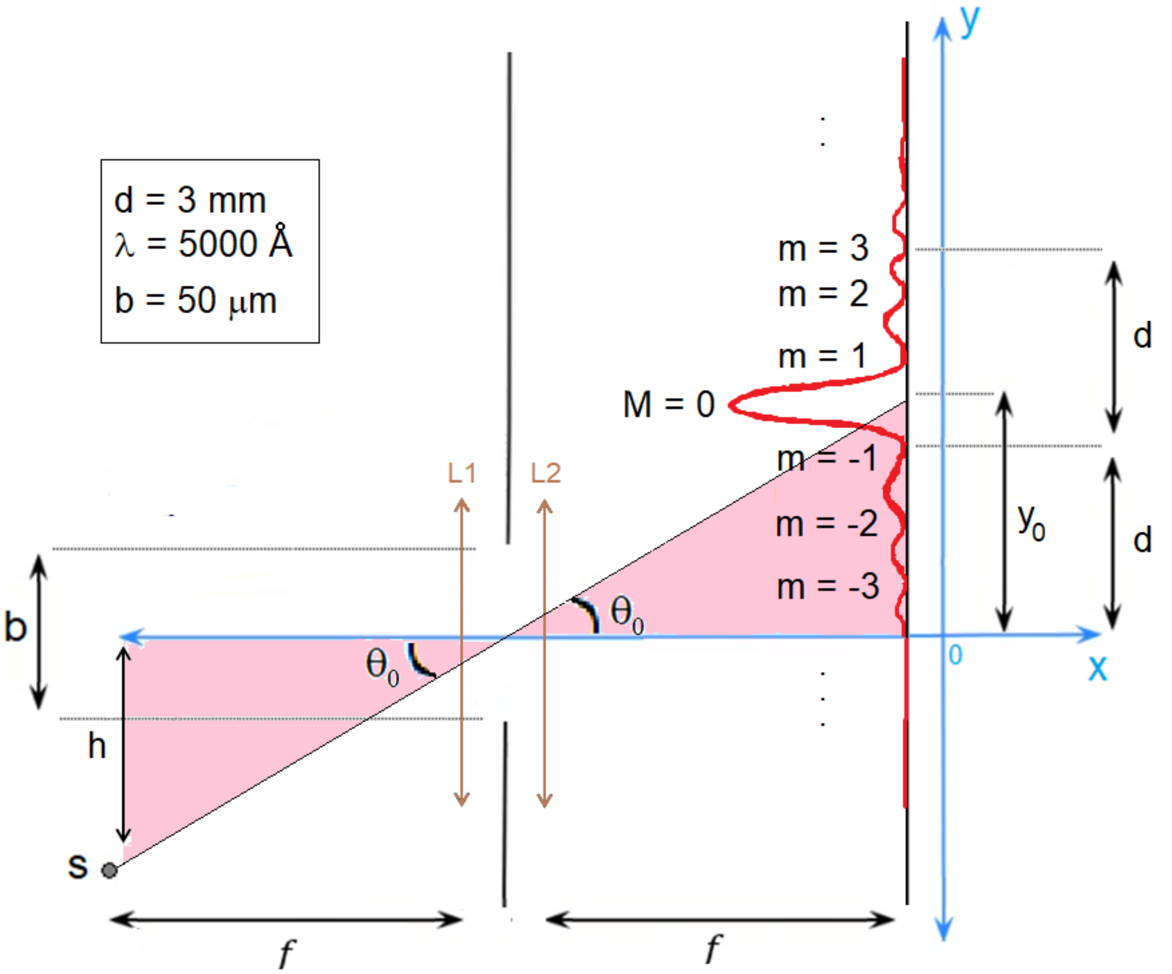
Resolvamos un problema…

2. Una rendija de $50\,\mu m$ de ancho se encuentra entre dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal, y está iluminada por ondas planas, de longitud de onda $\lambda = 5000\,\text{Å}$. La distancia entre el primer mínimo a la izquierda del máximo principal y el tercer mínimo a su derecha es de $3\,mm$. Además, el primer mínimo a la izquierda está ubicado $3\,mm$ a la derecha del eje óptico.

   a) ¿Cuál es la distancia focal de las lentes?

   b) ¿Dónde se encuentra la fuente? ¿Dónde el máximo principal?

Lo planteamos…



Lo resolvemos…

a) Nos piden la distancia focal de las lentes (que son iguales). Mirando el esquema tenemos:

$$tg(\theta_3) \approx sen(\theta_3) = \frac{2\,d}{f} \quad , \quad tg(\theta_{-1}) \approx sen(\theta_{-1}) = \frac{d}{f}$$

La condición de mínimos para estos dos puntos de la pantalla es:

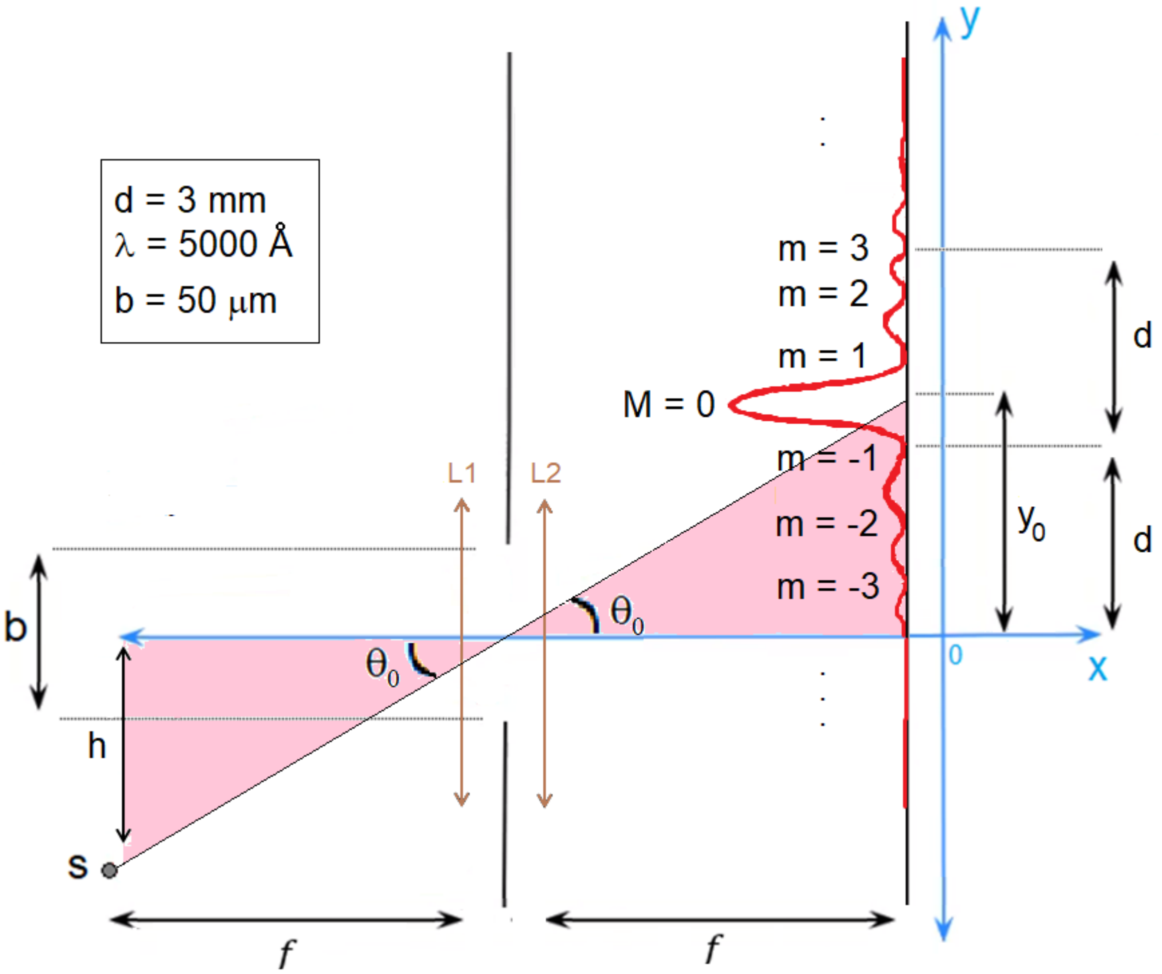
$$\frac{\pi\, b}{\lambda}\,[sen(\theta_3) - sen(\theta_0)] = 3\,\pi$$

$$\Rightarrow \quad sen(\theta_3) = \frac{3\,\lambda}{b} + sen(\theta_0)$$

$$\frac{\pi\, b}{\lambda}\,[sen(\theta_{-1}) - sen(\theta_0)] = -\pi$$

$$\Rightarrow \quad sen(\theta_{-1}) = -\frac{\lambda}{b} + sen(\theta_0)$$

Lo planteamos…



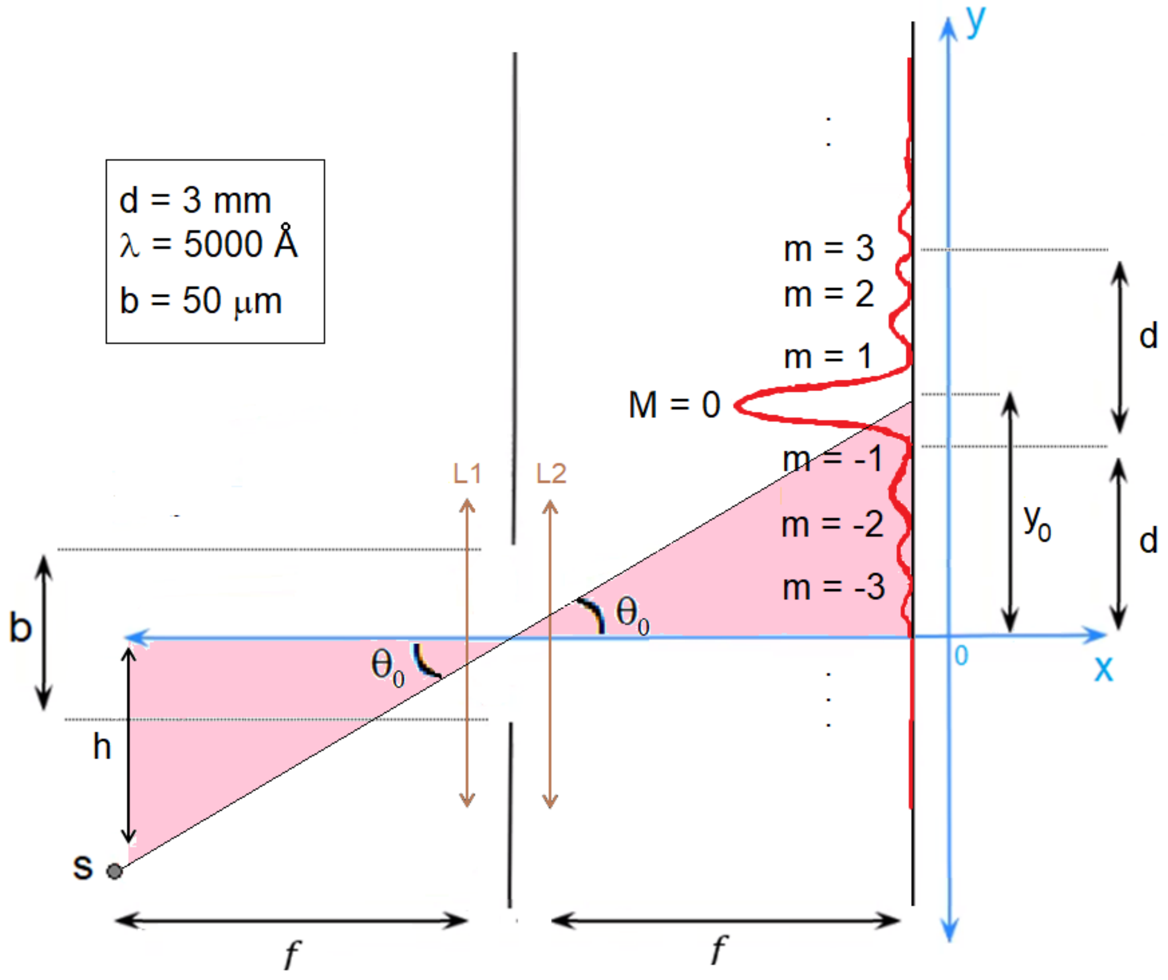
Reemplazando:

$$\frac{2\,d}{f} = \frac{3\,\lambda}{b} + sen(\theta_0) \quad , \quad \frac{d}{f} = -\frac{\lambda}{b} + sen(\theta_0)$$

Restando ambas ecuaciones, despejamos la distancia focal:

$$\frac{d}{f} = \frac{4\,\lambda}{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f = \frac{b\,d}{4\,\lambda}}$$

Lo planteamos…



b) Ahora nos preguntan dónde se encuentra la fuente. Para ello miraremos los triángulos coloreados. En principio:

$$tg(\theta_0) \approx \theta_0 = \frac{h}{f} \qquad \Rightarrow \qquad h = f\,\theta_0$$

Necesitamos θ_0. Para ello podemos trabajar con las expresiones para θ_{-1}:

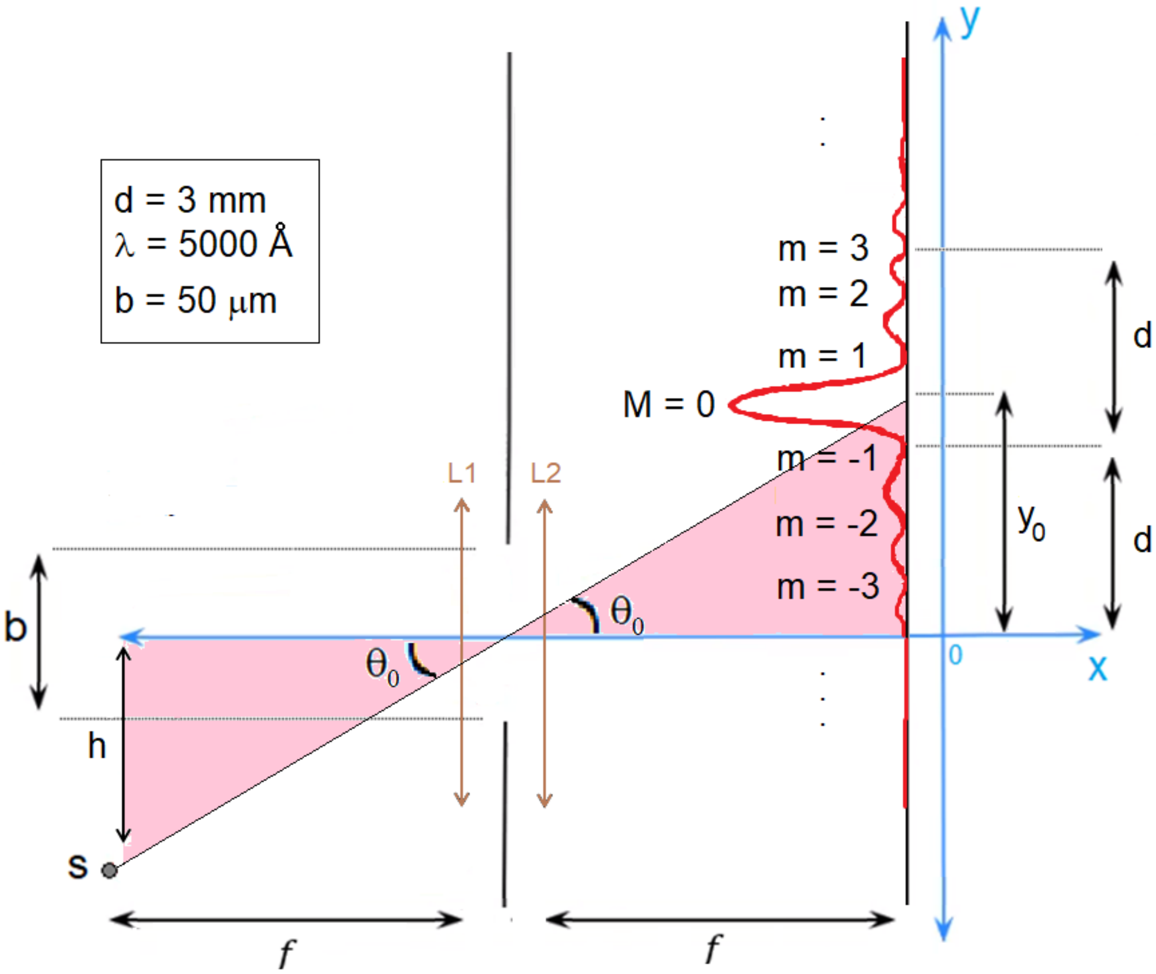
$$sen(\theta_{-1}) = \frac{d}{f} \quad , \quad sen(\theta_{-1}) = -\frac{\lambda}{b} + sen(\theta_0)$$

Igualando nos queda:

$$sen(\theta_0) \approx \theta_0 = \frac{d}{f} + \frac{\lambda}{b}$$

Finalmente, damos h: $\boldsymbol{h = d + \frac{f\,\lambda}{b}}$

Lo planteamos…



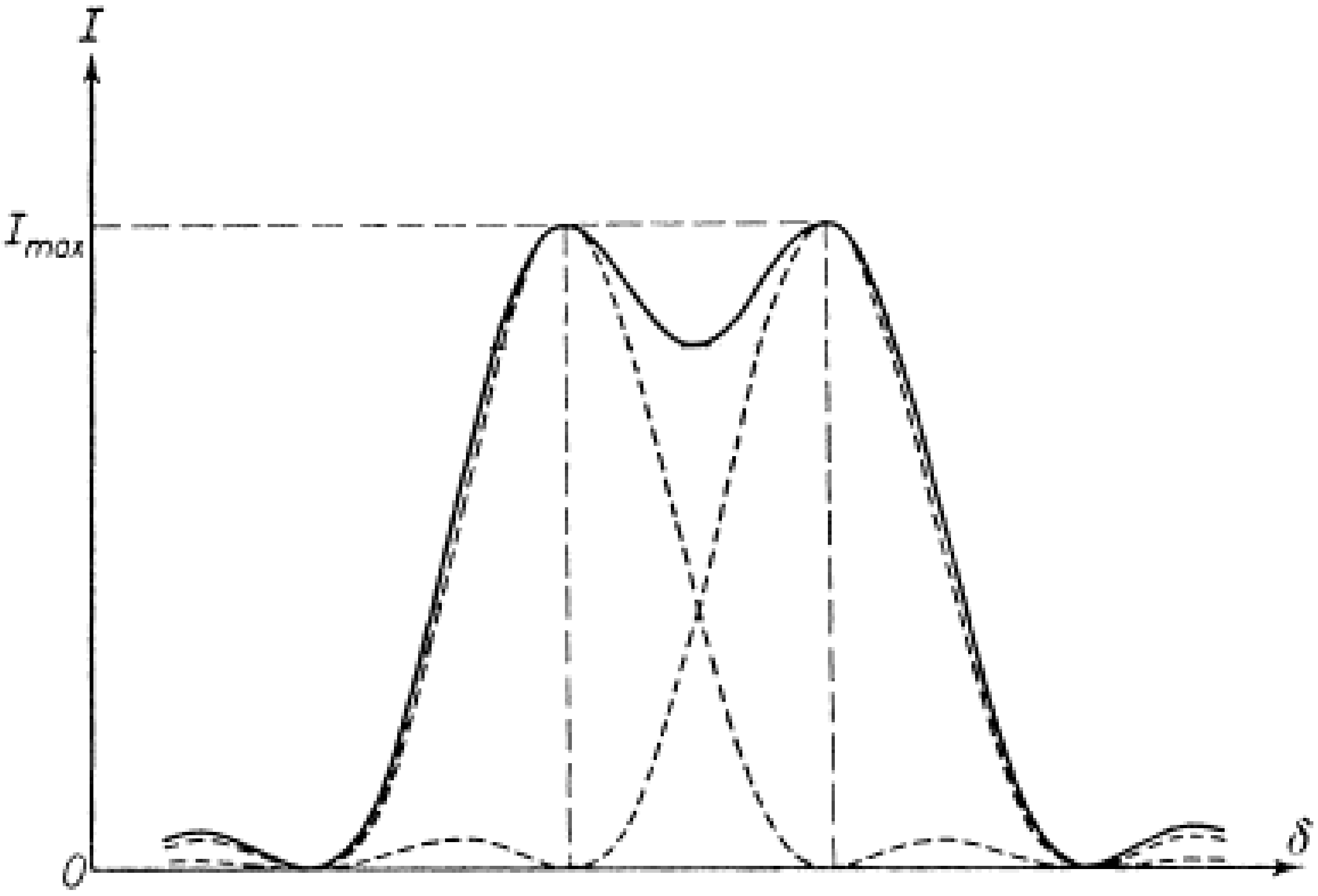
Por último, nos preguntan dónde aparece el máximo principal. Es decir, nos piden dar y_0.

Pregunta: ¿habrá que hacer alguna cuenta?

La respuesta es “no”. Los triángulos coloreados son iguales, dado que los ángulos destacados son iguales y las distancias focales de las lentes lo son. Entonces, trivialmente podemos responder:

$$\boldsymbol{y_0} = h = \boldsymbol{d} + \frac{\boldsymbol{f\,\lambda}}{\boldsymbol{b}}$$

Límite de resolución por difracción:



Criterio de Rayleigh para la correcta resolución de franjas:

Dos franjas estarán bien resueltas siempre y cuando el máximo principal de un patrón coincida con un mínimo de la campana principal del otro patrón.

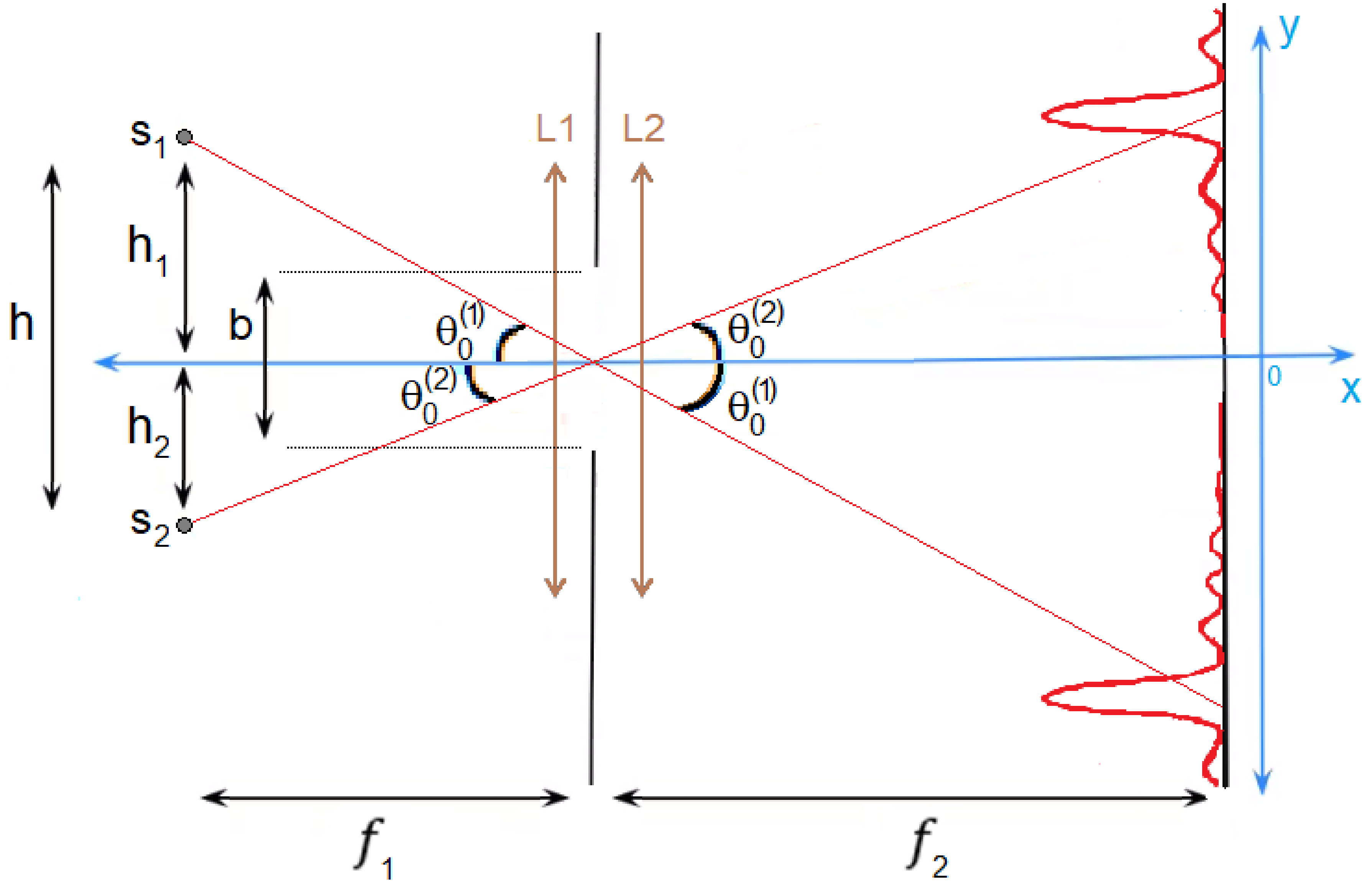
Resolvamos un problema…

5. Sean dos fuentes puntuales incoherentes colocadas en el plano focal objeto de una lente convergente; ambas emiten la misma λ. A la derecha de la lente hay una ranura de ancho b, y luego una segunda lente. Se observa la figura de difracción de Fraunhofer de las fuentes.

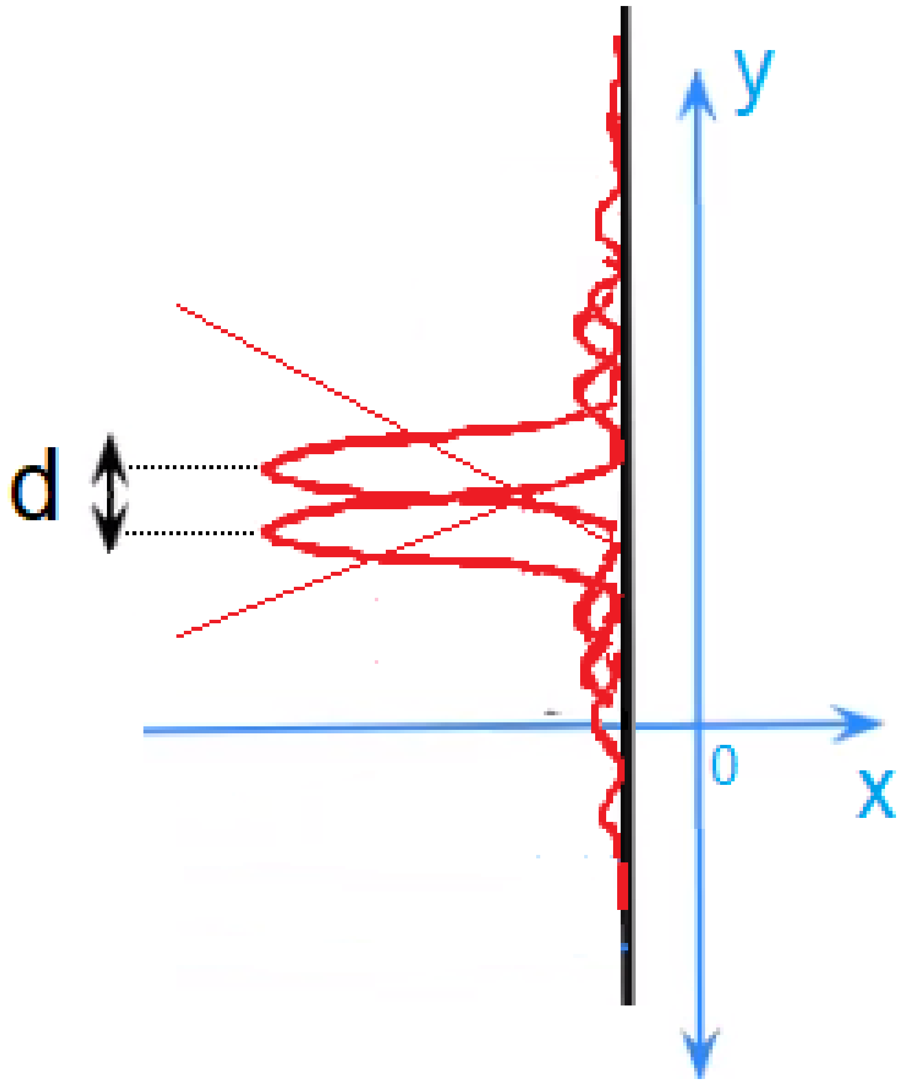
   a) Calcule la mínima separación angular entre las fuentes, y la correspondiente mínima separación lineal, para que las imágenes estén justamente resueltas según el criterio de Rayleigh. Discuta los casos en que ambas fuentes emiten con la misma irradiancia, y en que no.

   b) Repita el cálculo efectuado en a) si la rendija se reemplaza por una abertura circular de diámetro d.

Veamos un esquema general…

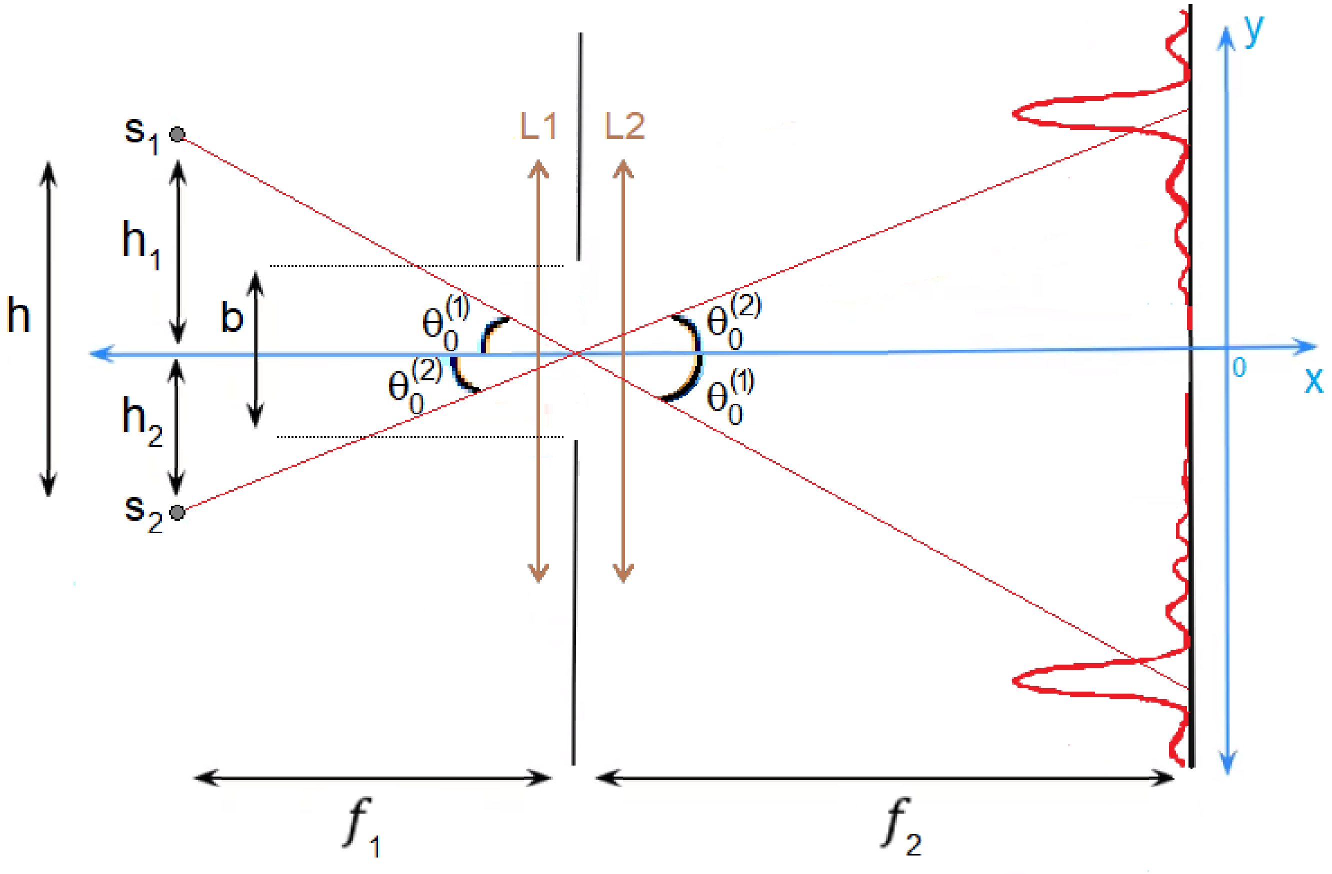


En el caso crítico que plantea el criterio, tenemos esta situación…



Y lo que nos piden es encontrar la distancia que debe haber entre las fuentes para llegar a esta situación.

Resolvamos…



a) En variables angulares trivialmente se tiene:

$$\left[sen\left({\theta_0}^{(1)}\right) + sen\left({\theta_0}^{(2)}\right)\right]_{crit} = \frac{\lambda}{b}$$

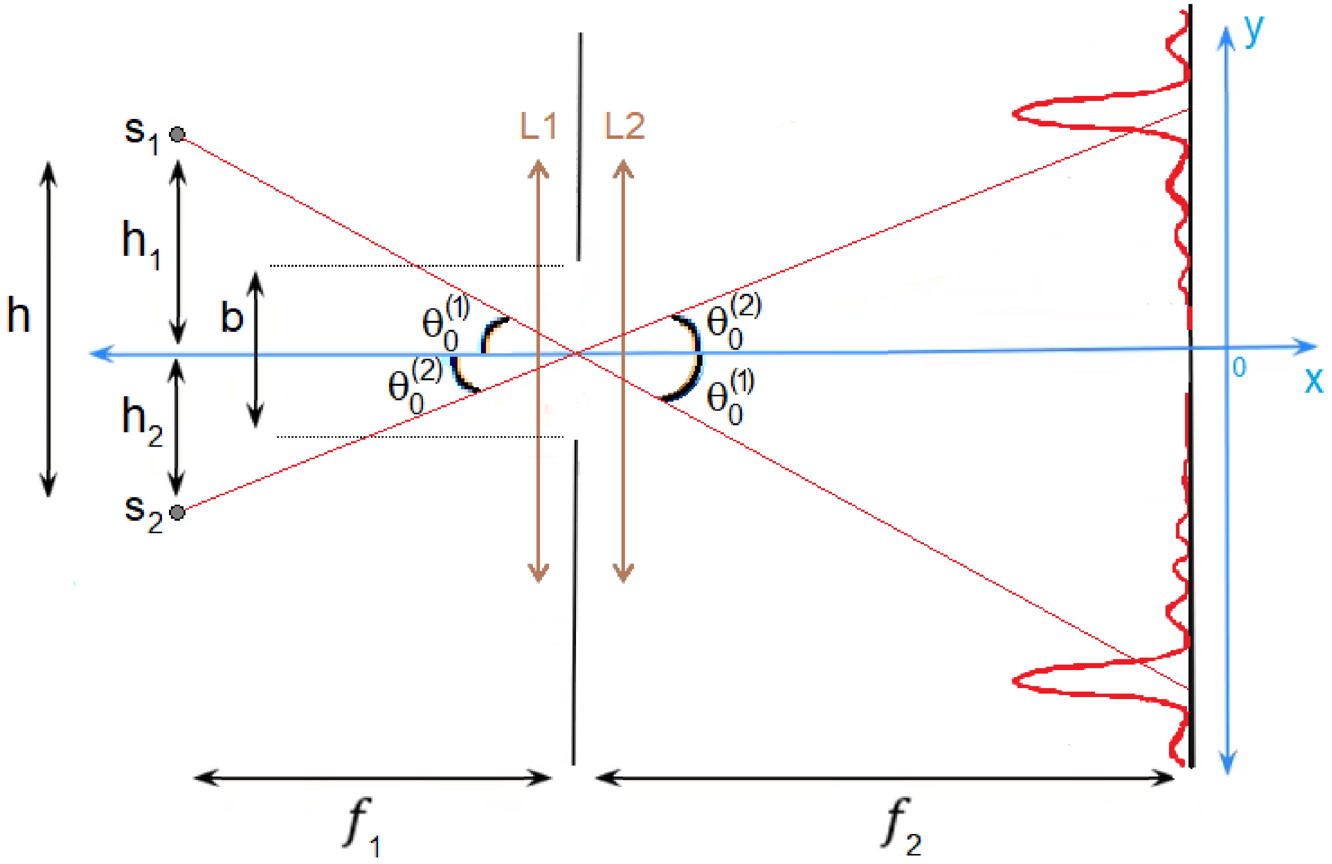
Y como los ángulos son pequeños:

$$\left[{\theta_0}^{(1)} + {\theta_0}^{(2)}\right]_{crit} \approx \frac{\lambda}{b}$$

Ahora pasemos a variables de distancia. Miremos ahora del lado izquierdo de la abertura:

$$tg\left({\theta_0}^{(1)}\right) = \frac{h_1}{f_1} \quad , \quad tg\left({\theta_0}^{(2)}\right) = \frac{h_2}{f_1}$$

Resolvamos…



Si sumamos ambas expresiones podemos obtener la distancia h_{crit} que estamos buscando:

$$tg\left(\theta_0{}^{(1)}\right) + tg\left(\theta_0{}^{(2)}\right) = \frac{h_1 + h_2}{f_1} = \frac{h}{f_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \left[tg\left(\theta_0{}^{(1)}\right) + tg\left(\theta_0{}^{(2)}\right)\right] f_1$$

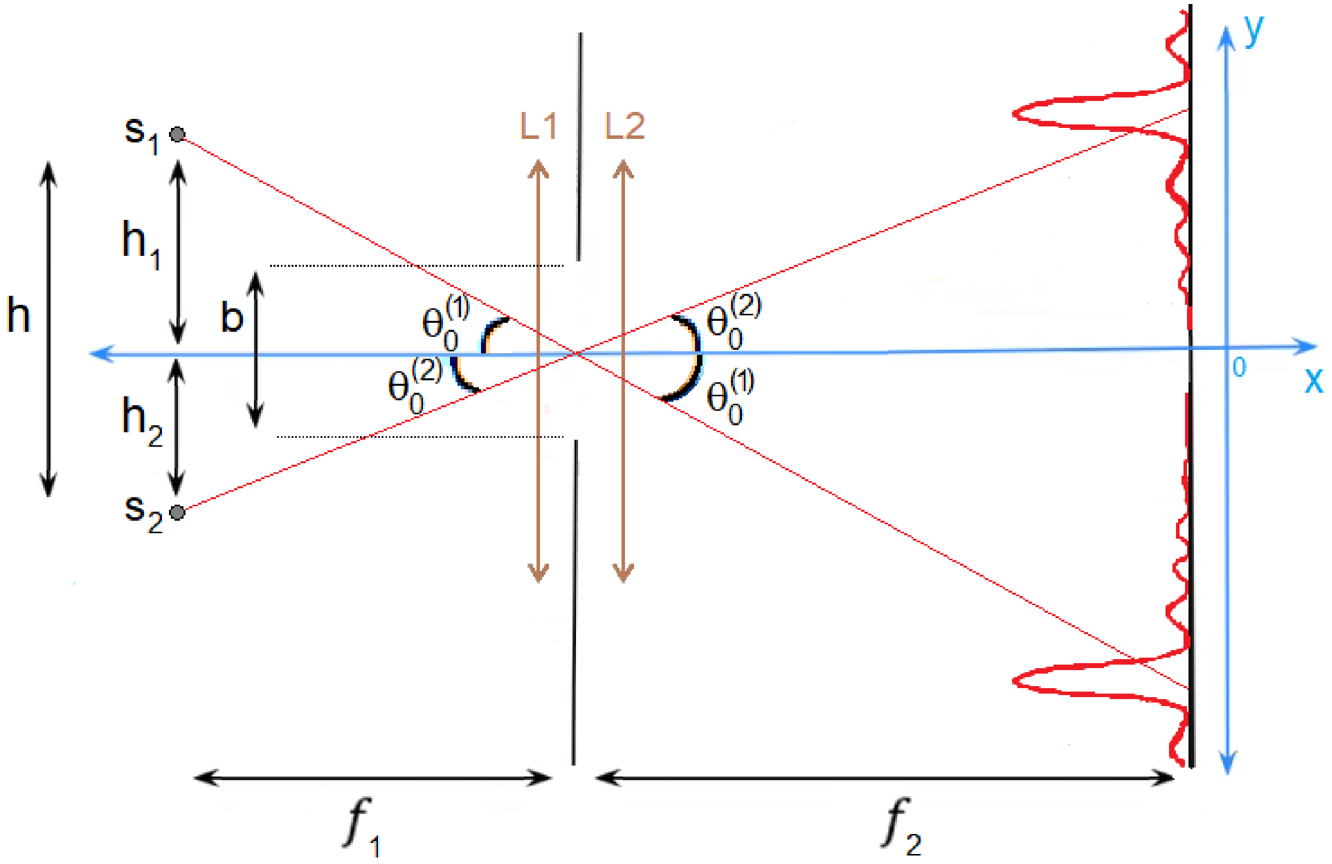
Nuevamente, los ángulos son pequeños…

$$h = \left(\theta_0{}^{(1)} + \theta_0{}^{(2)}\right) f_1$$

Y en el caso crítico vale…

$$h_{crit} = \left[\theta_0{}^{(1)} + \theta_0{}^{(2)}\right]_{crit} f_1$$

Resolvamos…



Pero recordemos que también:

$$\left[\theta_0{}^{(1)} + \theta_0{}^{(2)}\right]_{crit} = \frac{\lambda}{b}$$

Entonces reemplazando nos queda:

$$\boldsymbol{h_{crit} = \frac{\lambda f_1}{b}}$$

b) Opcional (sugerencia Sec. 10.2.5 del Hecht, Difracción - Abertura Circular).

distancia de separación angular entre máximos:

$$\left[\theta_0{}^{(1)} + \theta_0{}^{(2)}\right]_{crit} = \frac{1.22\,\lambda}{a}$$

con a el diámetro de la abertura.