

## PULSOS Y ESPECTROS CUADRADOS

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## Pulsos y espectros cuadrados

## 1. Espectro cuadrado

$\psi(\omega)$  es un *espectro cuadrado*, esto es, presenta un valor constante,  $\frac{1}{\Delta\omega}$ , en un intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$  centrado en un  $\omega_0$  y éste es nulo para cualquier otra  $\omega$ .

- a) Verifique que el correspondiente  $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\psi(\omega)$  está dado por:

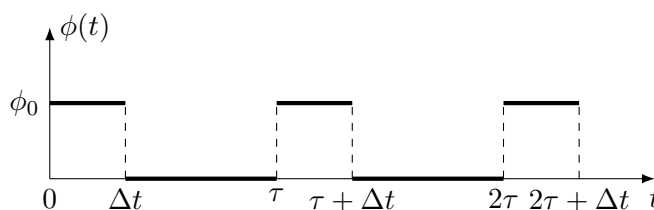
$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \right] e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i\omega_0 t}.$$

- b) Grafique  $\psi(\omega)$  y  $|\phi(t)|$ .
- c) Sea  $T$  un intervalo de tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T \ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que  $T$ ,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase casi constantes.

## 2. Tren de pulsos cuadrados

- a) Muestre que  $\mathcal{F}$  es lineal, por tanto  $\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)]$ , donde  $a, b$  son constantes.

- b)  $\phi(t)$  es una serie de pulsos cuadrados de duración  $\Delta t$  que se repiten  $N$  veces con un período  $\tau$  ( $\Delta t < \tau$ ). Si  $f(n, t)$  describe la función en cualquiera de los intervalos  $[n\tau, (n+1)\tau]$  que contiene estos pulsos de amplitud no nula  $\phi_0$  en  $[n\tau, n\tau + \Delta t]$  de forma que  $\phi(t) = \sum_{n=0}^N f(n, t)$ , compruebe que



$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^N f(n, t)\right] = \sum_{n=0}^N e^{-in\omega\tau} \mathcal{F}[f(0, t)].$$

- c) Resuelva  $\mathcal{F}[f(0, t)]$  para obtener la expresión completa de  $\psi(\nu) = \mathcal{F}[\phi(t)]$ .
- d) El rasgo más prominente de  $\psi(\nu)$  son picos en  $\nu_p = p\nu_1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) donde  $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$ , es decir, una serie de armónicos de  $\nu_1$ . Encuentre en la expresión de  $\psi(\nu)$  el término que depende de  $\tau$  responsable de este comportamiento y verifique  $\nu_p$ .
- e) De similar análisis identifique qué término con dependencia en  $\Delta t$  hace que los armónicos más importantes se detecten en  $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$ .
- f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es  $\delta\nu = \frac{2}{(N+1)\tau}$ , y calcule cuánto más pequeño es que el  $\Delta\nu$  entre sucesivos  $\nu_p$ .