Propagación en medios dispersivos

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Transformada de Fourier

1. **Relación entre ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen**

   a) Tome el siguiente pulso con un espectro Gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

   $$\hat{f}(k) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}\,.$$

   Calcule $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(k)$ y vea que tiene una envolvente Gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x\Delta k = 1/2$ (el paquete Gaussiano es el de mínima incerteza). Ayuda: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+a)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

   b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

   $$\hat{f}(k) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}\,\mathrm{e}^{i\alpha(k-k_0)}\,.$$

   Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

   c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

   $$\hat{f}(k) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}\,\mathrm{e}^{i\beta(k-k_0)^2}\,.$$

   Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso Gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

   $$\Delta x\Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2\Delta k^4}.$$

   ¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

2. **Conjugación de la transformada de Fourier**
   Muestre que si $\phi(t) \in \mathcal{R}$ y $\hat{\phi}(\omega) = \mathcal{F}\left[\phi(t)\right]$ es su transformada de Fourier, esta última cumple que $\overline{\hat{\phi}(\omega)} = \hat{\phi}(-\omega)$, es decir, que para obtener su conjugada de la transformada basta con invertir el signo de ω.

   Aproveche esto para escribir $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

Propagación en un medio dispersivo

3. **Pulso cuadrado en un medio dispersivo**
   Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

   $$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2,$$

   donde $\omega' = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ y $\omega'' = \frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$. Si en $t = 0$ el pulso se propaga hacia $x < 0$, y se escribe

   $$\psi(x,0) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k + \quad \text{c.c.} \quad .$$

   Calcule $\psi(x,t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?