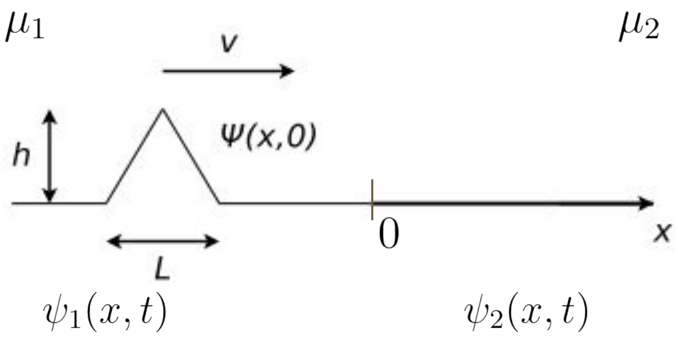
Clase Práctica N°14

Ondas Viajeras e Interfaces

Idea General

Primero que nada, a cada lado de la interfaz, tenemos que:

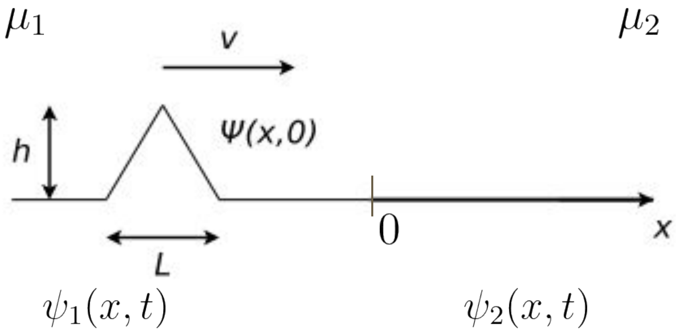
$$\partial_{tt}^2 \psi_i = c_i^2 \partial_{xx}^2 \psi_i \text{ con } i = 1, 2 \text{ y } c_i = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_i}}$$



Idea General

Por la ausencia de bordes y la condición inicial, podemos intuir que:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \psi_i(wt - k_1 x) + \psi_r(wt + k_1 x) \text{ para } x < 0 \\ \\ \psi_2(x,t) = \psi_t(wt - k_2 x) \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

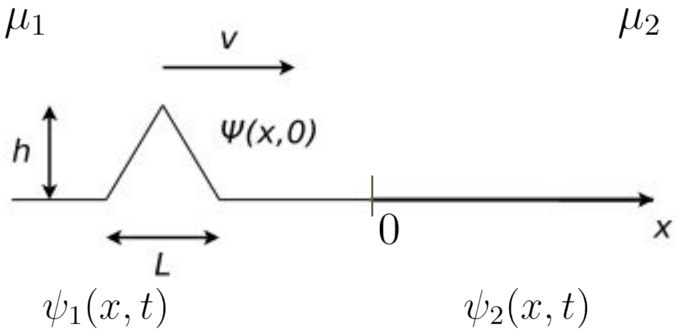


Idea General

Por la ausencia de bordes y la condición inicial, podemos intuir que:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \boxed{\psi_i(wt - k_1 x)} + \psi_r(wt + k_1 x) \text{ para } x < 0 \\ \\ \psi_2(x,t) = \boxed{\psi_t(wt - k_2 x)} \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

Se desplazan hacia la derecha

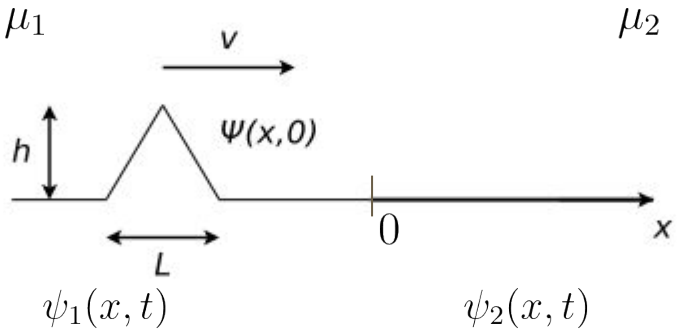


Idea General

Por la ausencia de bordes y la condición inicial, podemos intuir que:

Se desplaza hacia la izquierda

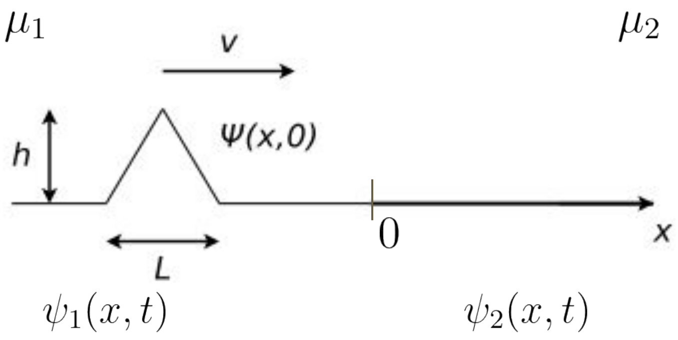
$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \psi_i(wt - k_1 x) + \psi_r(wt + k_1 x) \text{ para } x < 0 \\ \\ \psi_2(x,t) = \psi_t(wt - k_2 x) \text{ para } x > 0 \end{cases}$$



Idea General

Es importante discutir sobre la diferencia entre medios dispersivos y medios no dispersivos:

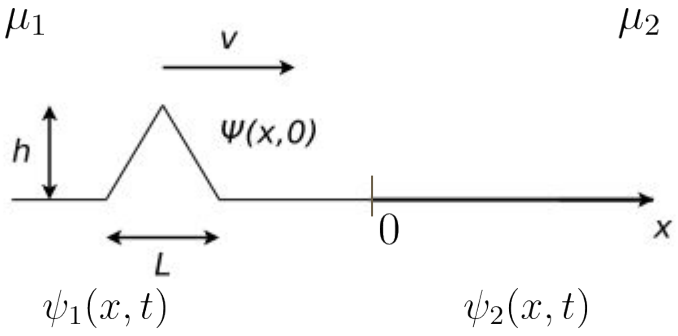
$$\phi = wt \pm kx = w\left(t \pm \frac{k}{w}x\right) = w\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = wt'$$



Idea General

Es importante discutir sobre la diferencia entre medios dispersivos y medios no dispersivos:

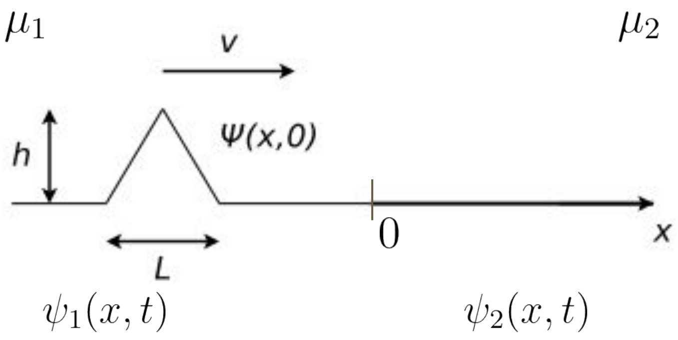
$$\phi = wt \pm kx = w\left(t \pm \frac{k}{w}x\right) = w\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = wt'$$



$c \neq c(k)$ **Medios No Dispersivos** → No importa en realidad dónde conocemos la perturbación, podemos extenderla fácilmente a todo el espacio

Idea General

Es importante discutir sobre la diferencia entre medios dispersivos y medios no dispersivos:



$$\phi = wt \pm kx = w\left(t \pm \frac{k}{w}x\right) = w\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = wt'$$

$c \neq c(k)$ **Medios No Dispersivos** ⟶ No importa en realidad dónde conocemos la perturbación, podemos extenderla fácilmente a todo el espacio

$c = c(k)$ **Medios Dispersivos** ⟶ Es necesario calcular explícitamente la dependencia espacial ya que existiría un desfasaje entre las distintas componentes de la señal

Propuesta de Solución

Atacando el problema de medio no dispersivo, y conociendo las generalidades del problema, podemos plantear que:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ A(w)e^{i(wt-k_1x)} + \int_{-\infty}^{\infty} dw\ B(w)e^{i(wt+k_1x)} \text{ para } x < 0 \\ \\ \psi_2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ C(w)e^{i(wt-k_2x)} \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

donde hacemos el barrido en frecuencias ya que, como veremos, resulta análogo en medios no dispersivos

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Ahora bien, los factores A(w), B(w) y C(w) no son independientes entre sí, sino que están atados a las condiciones de contorno en la interfaz:

$$\begin{cases} \psi_1(x=0,t) = \psi_2(x=0,t) \\ \\ \partial_x \psi_1 \Big|_{x=0,t} = \partial_x \psi_2 \Big|_{x=0,t} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Continuidad de la función de onda para todo tiempo

$\longrightarrow$ Conservación de los esfuerzos tangenciales (o suavidad de la función de onda)

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Tenemos entonces:

$$\psi_1(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left[A(w) + B(w)\right] e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \ C(w) e^{iwt} = \psi_2(x=0,t)$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Tenemos entonces:

$$\psi_1(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \; [A(w) + B(w)]\, e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \; C(w) e^{iwt} = \psi_2(x=0,t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dw \; [A(w) + B(w) - C(w)]\, e^{iwt} = 0$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Tenemos entonces:

$$\psi_1(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left[A(w) + B(w)\right] e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \ C(w) e^{iwt} = \psi_2(x=0,t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left[A(w) + B(w) - C(w)\right] e^{iwt} = 0$$

y por la ortogonalidad entre las exponenciales:

$$A(w) + B(w) - C(w) = 0 \text{ para todo } w$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Por otro lado:

$$\partial_x \psi_1\Big|_{0,t} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ k_1 \left[-A(w) + B(w)\right] e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ \ -k_2 C(w) e^{iwt} = \partial_x \psi_2\Big|_{0,t}$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Por otro lado:

$$\partial_x \psi_1 \Big|_{0,t} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \; k_1 \left[-A(w) + B(w)\right] e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \; - k_2 C(w) e^{iwt} = \partial_x \psi_2 \Big|_{0,t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dw \; \left\{k_1 \left[-A(w) + B(w)\right] + k_2 C(w)\right\} e^{iwt} = 0$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Por otro lado:

$$\partial_x \psi_1 \Big|_{0,t} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \; k_1 \left[-A(w) + B(w) \right] e^{iwt} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \;\; -k_2 C(w) e^{iwt} = \partial_x \psi_2 \Big|_{0,t}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dw \;\; \left\{ k_1 \left[-A(w) + B(w) \right] + k_2 C(w) \right\} e^{iwt} = 0$$

y por la ortogonalidad entre las exponenciales:

$$-k_1 \left[A(w) - B(w) \right] + k_2 C(w) = 0$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Juntando ambas expresiones y trabajando un poco, se tiene que:

$$B(w) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A(w) = R(w)A(w) \text{ , con } R(w) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ es el coeficiente de reflexión}$$

Cálculo de Coeficientes de Reflexión y Transmisión

Juntando ambas expresiones y trabajando un poco, se tiene que:

$$B(w) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A(w) = R(w)A(w) \text{ , con } R(w) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \text{ es el coeficiente de reflexión}$$

$$C(w) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A(w) = T(w)A(w) \text{ , con } T(w) = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \text{ es el coeficiente de transmisión}$$

con 1 = T(w) - R(w)

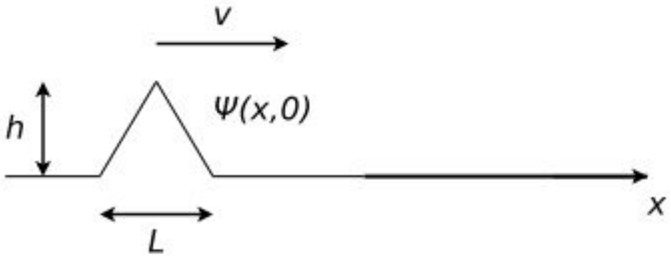
Solución Más General

Entonces, la solución más general al problema viene dada por:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ A(w)e^{i(wt-k_1x)} + \int_{-\infty}^{\infty} dw\ R(w)A(w)e^{i(wt+k_1x)} \text{ para } x<0 \\ \\ \psi_2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw\ T(w)A(w)e^{i(wt-k_2x)} \text{ para } x>0 \end{cases}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Según el enunciado, la condición inicial viene dada por:



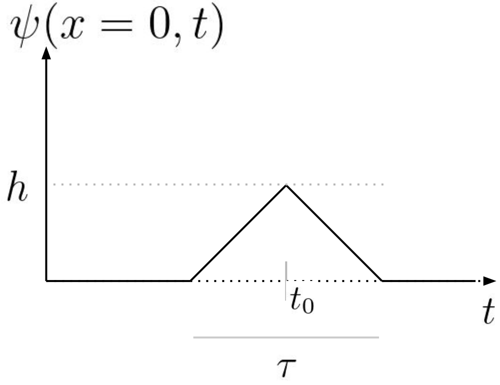
$$f(x) = \psi(x, t=0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}\left[x - \left(x_0 - \frac{L}{2}\right)\right] \text{ para } x_0 - \frac{L}{2} < x < x_0 \\ \\ \frac{-2h}{L}\left[x - \left(x_0 + \frac{L}{2}\right)\right] \text{ para } x_0 < x < x_0 + \frac{L}{2} \\ \\ 0 \text{ para } x \notin \left[x_0 - \frac{L}{2}, x_0 + \frac{L}{2}\right] \end{cases}$$

condición que demanda desarrollar la solución en términos de *k*

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Ahora bien, exprimiendo al máximo la condición de no dispersivos y sabiendo que, para algún momento, el centro de la cuerda se comportará como:

$$h(t) = \psi(x=0,t) = \begin{cases} \frac{2h}{\tau}\left[t - \left(t_0 - \frac{\tau}{2}\right)\right] & \text{para } t_0 - \frac{\tau}{2} < t < t_0 \\ \frac{-2h}{\tau}\left[t - \left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right] & \text{para } t_0 < t < t_0 + \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ para } t \notin \left[t_0 - \frac{\tau}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}\right] \end{cases}$$



con $t_0 = \dfrac{x_0}{c_1}$ y $\tau = \dfrac{L}{c_1}$. Y ahora sí, podemos usar la descripción en frecuencias

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Por lo tanto, y eligiendo la solución para el medio 1, tenemos:

$$h(t) = \psi_1(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \;\; [1 + R(w)]\, A(w) e^{iwt}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Por lo tanto, y eligiendo la solución para el medio 1, tenemos:

$$h(t) = \psi_1(x=0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left[1 + R(w)\right] A(w) e^{iwt}$$

Multiplicando a ambos lados por $e^{-iw't}$ e integrando en el tiempo tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \ h(t) e^{-iw't} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left[1 + R(w)\right] A(w) e^{i(w-w')t}$$

lo que en definitiva es averiguar la descomposición en frecuencias de *h(t)*

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Haciendo las cuentas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iw't} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\,[1+R(w)]\,A(w)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(w-w')t}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Haciendo las cuentas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iw't} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\,[1 + R(w)]\,A(w)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(w-w')t}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(w-w')t} = 2\pi\delta(w - w')}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iw't} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dw\,[1 + R(w)]\,A(w)\delta(w - w')$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Haciendo las cuentas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iw't} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\,[1+R(w)]\,A(w)\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(w-w')t}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i(w-w')t} = 2\pi\delta(w-w')}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iw't} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} dw\,[1+R(w)]\,A(w)\delta(w-w')$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dw\ g(w)\delta(w-w') = g(w')}$$

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ h(t)e^{-iwt}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Reemplazando la expresión de *h(t)*:

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0} dt\ \left[t-\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)\right] e^{-iwt} - \frac{2h}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\frac{\tau}{2}} dt\ \left[t-\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)\right] e^{-iwt}\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Reemplazando la expresión de *h(t)*:

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0} dt\ \left[t-\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{-iwt} - \frac{2h}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\frac{\tau}{2}} dt\ \left[t-\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{-iwt}\right\}$$

$$\boxed{u = t - t_0 \text{ y } du = dt}$$

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iw(u-t_0)} - \frac{2h}{\tau}\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iw(u-t_0)}\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Reemplazando la expresión de *h(t)*:

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0} dt\ \left[t-\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{-iwt} - \frac{2h}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\frac{\tau}{2}} dt\ \left[t-\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)\right]e^{-iwt}\right\}$$

$\boxed{u = t - t_0 \text{ y } du = dt}$

$$A(w) = \frac{1}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iw(u-t_0)} - \frac{2h}{\tau}\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iw(u-t_0)}\right\}$$

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} - \frac{2h}{\tau}\int_{0}^{\frac{\tau}{2}} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu}\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Dando vuelta los límites de integración de la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu}\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Dando vuelta los límites de integración de la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu}\right\}$$

tomando u’ = -u (y luego volviendo a u) en la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{iwu}\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Dando vuelta los límites de integración de la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu}\right\}$$

tomando u’ = -u (y luego volviendo a u) en la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)e^{iwu}\right\}$$

y así:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)\left[e^{-iwu}+e^{iwu}\right]\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Dando vuelta los límites de integración de la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right) e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-iwu}\right\}$$

tomando u' = -u (y luego volviendo a u) en la segunda integral:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right) e^{-iwu} + \frac{2h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right) e^{iwu}\right\}$$

o mejor:

$$A(w) = \frac{e^{iwt_0}}{2\pi[1+R(w)]}\left\{\frac{4h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right) \cos(wu)\right\}$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Trabajemos con el factor entre llaves

$$\frac{4h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du \;\left(u+\frac{\tau}{2}\right)\cos(wu) = \frac{4h}{\tau}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du \; u\cos(wu) + \frac{\tau}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du \;\cos(wu)\right] =$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Trabajemos con el factor entre llaves

$$\frac{4h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)\cos(wu) = \frac{4h}{\tau}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ u\cos(wu) + \frac{\tau}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \cos(wu)\right] =$$

$$= \frac{4h}{\tau}\left[\frac{u}{w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - \frac{1}{w}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \sin(wu) + \frac{\tau}{2w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\right] = \frac{4h}{\tau w^2}\cos(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} =$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Trabajemos con el factor entre llaves

$$\frac{4h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)\cos(wu) = \frac{4h}{\tau}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ u\cos(wu) + \frac{\tau}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \cos(wu)\right] =$$

$$= \frac{4h}{\tau}\left[\frac{u}{w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - \frac{1}{w}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \sin(wu) + \frac{\tau}{2w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\right] = \frac{4h}{\tau w^2}\cos(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{4h}{\tau w^2}\left[1-\cos\left(\frac{w\tau}{2}\right)\right] = \frac{8h}{\tau w^2}\sin^2\left(\frac{w\tau}{4}\right) = \frac{h\tau}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\tau w}{4}\right)^2} = \frac{h\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)$$

Condición Inicial y Medios No Dispersivos

Trabajemos con el factor entre llaves

$$\frac{4h}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \left(u+\frac{\tau}{2}\right)\cos(wu) = \frac{4h}{\tau}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ u\cos(wu) + \frac{\tau}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \cos(wu)\right] =$$

$$= \frac{4h}{\tau}\left[\frac{u}{w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} - \frac{1}{w}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{0} du\ \sin(wu) + \frac{\tau}{2w}\sin(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0}\right] = \frac{4h}{\tau w^2}\cos(wu)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{4h}{\tau w^2}\left[1-\cos\left(\frac{w\tau}{2}\right)\right] = \frac{8h}{\tau w^2}\sin^2\left(\frac{w\tau}{4}\right) = \frac{h\tau}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\tau w}{4}\right)^2} = \frac{h\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)$$

$$\boxed{A(w) = \frac{h\tau e^{iwt_0}}{4\pi T(w)}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)}$$

Expresión Final para el Desplazamiento

Volviendo a nuestra expresión original, tenemos:

$$\psi(x,t) = \frac{h\tau}{4\pi}\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dw\ \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)}{T(w)} e^{i[w(t+t_0)-k_1 x]} + \int_{-\infty}^{\infty} dw\ \frac{R(w)\ \text{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right)}{T(w)} e^{i[w(t+t_0)+k_1 x]} & \text{para } x < 0 \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} dw\ \text{sinc}^2\left(\frac{w\tau}{4}\right) e^{i[w(t+t_0)-k_2 x]} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Expresión Final para el Desplazamiento

Volviendo a nuestra expresión original, tenemos:

$$\boxed{R = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \text{ y } T = \frac{2c_2}{c_2 + c_1}}$$

$$\psi(x,t) = \frac{hL(c_2+c_1)}{8\pi c_1 c_2} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{wL}{4c_1}\right) e^{i[w(t+t_0)-k_1 x]} + \frac{c_2-c_1}{c_2+c_1} \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{wL}{4c_1}\right) e^{i[w(t+t_0)+k_1 x]} & \text{para } x < 0 \\ \\ \frac{2c_2}{c_2+c_1} \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{wL}{4c_1}\right) e^{i[w(t+t_0)-k_2 x]} & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

y podemos intuir lo que ocurre para determinados casos dependiendo de la relación entre las velocidades en ambos medios.

Notar que en realidad el *h* tiene otra interpretación en este caso.

Algunos Casos

$$\psi(x,t) = \frac{hL(c_2+c_1)}{8\pi c_1 c_2} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \left\{ \text{sinc}^2\left(\frac{wL}{4c_1}\right) \cos[w(t+t_0) - k_1 x] + \frac{c_2-c_1}{c_2+c_1} \cos[w(t+t_0)+k_1 x] \right\} & \text{para } x < 0 \\ \frac{2c_2}{c_2+c_1} \int_{-\infty}^{\infty} dw \ \text{sinc}^2\left(\frac{wL}{4c_1}\right) \cos[w(t+t_0) - k_2 x] \text{ para } x > 0 \end{cases}$$