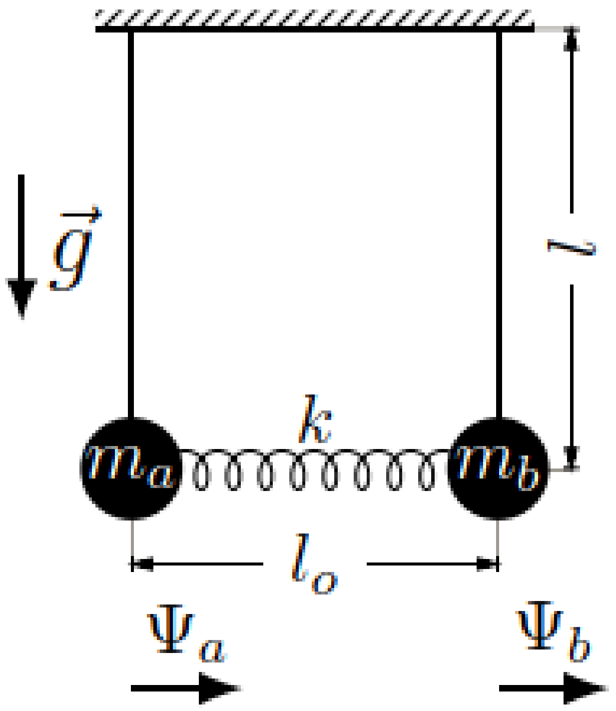
Pulsaciones y Batidos / Sistemas forzados con 2 GDL

Péndulos acoplados

(Problemas 1 y 3 de la Guía)

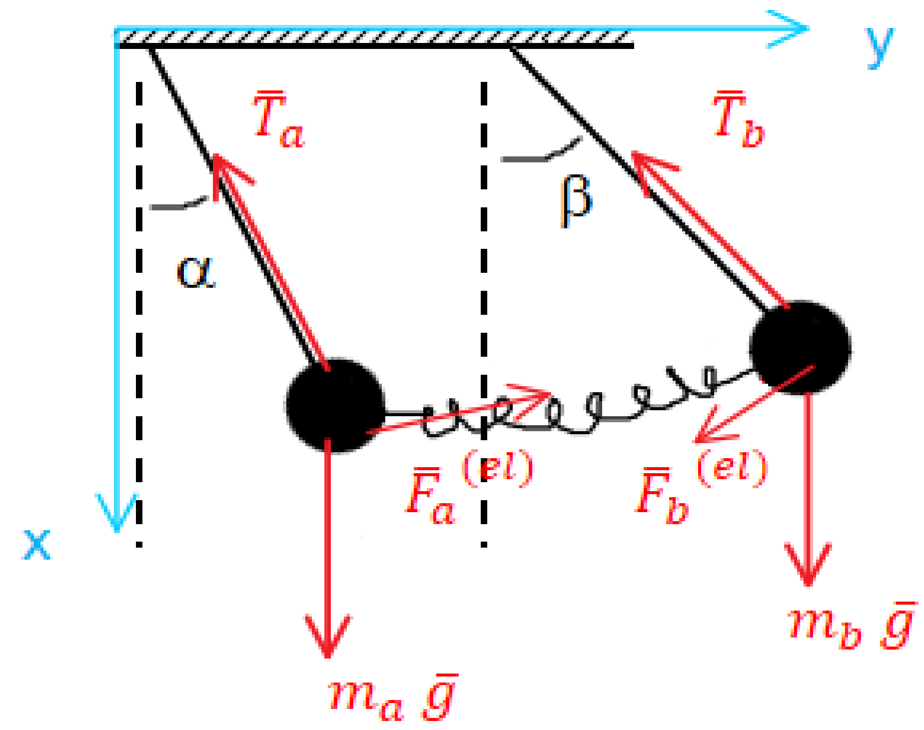


1. Anteriormente se pidió obtener frecuencias y sus modos normales de oscilación de este sistema con dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k.

a) Suponga que el acoplamiento es débil ($k \ll \frac{g}{l}\frac{m_a m_b}{m_a+m_b}$) y que las condiciones iniciales son: $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$. Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.

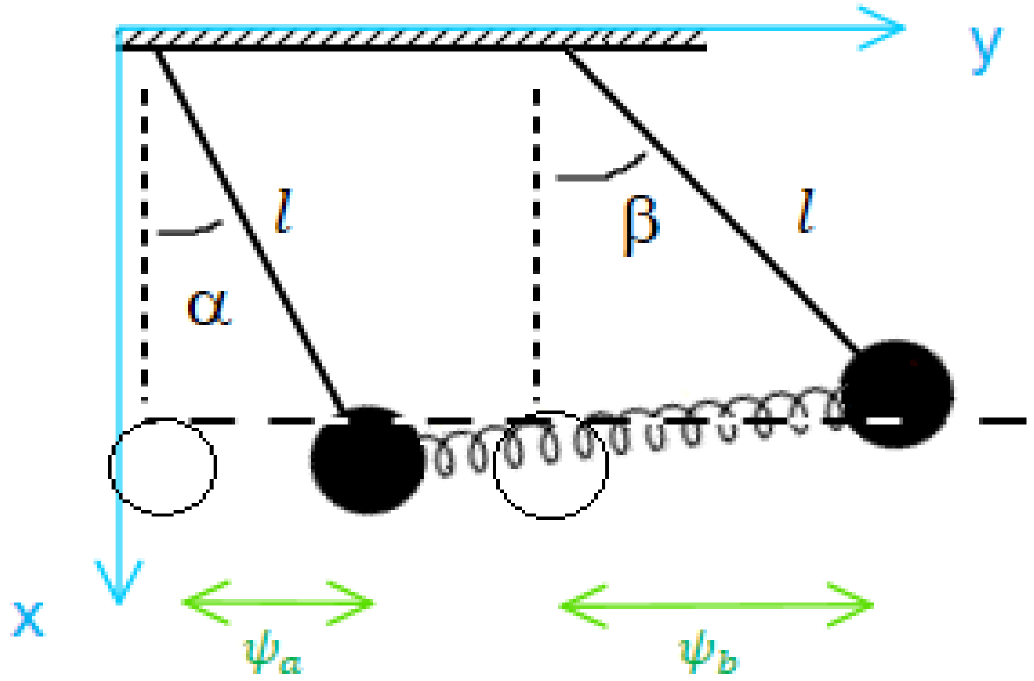
b) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b, donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

Ecuación de movimiento



$$\begin{cases} k\ (\psi_b - \psi_a) - m_a\ g\ sen(\alpha) = m_a\ \ddot{\psi}_a \\ -k\ (\psi_b - \psi_a) - m_b\ g\ sen(\beta) = m_b\ \ddot{\psi}_b \end{cases}$$

Veamos cómo reescribir las proyecciones de los pesos en términos de la perturbación:



$$sen(\alpha) = \frac{\psi_a}{l} \quad , \quad sen(\beta) = \frac{\psi_b}{l}$$

Reordenando llegamos al sistema de ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_a = -\left(\frac{k}{m_a}+\frac{g}{l}\right)\psi_a + \frac{k}{m_a}\psi_b \\ \ddot{\psi}_b = \frac{k}{m_b}\psi_a - \left(\frac{k}{m_b}+\frac{g}{l}\right)\psi_b \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{k}{m_a}+\frac{g}{l} & -\frac{k}{m_a} \\ -\frac{k}{m_b} & \frac{k}{m_b}+\frac{g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

Para resolver este problema, plantearemos la forma más general de las soluciones ψ_a y ψ_b para un modo normal:

$$\begin{matrix} \psi_a(t) = A\, e^{i\,(\omega\, t+\varphi)} \\ \psi_b(t) = B\, e^{i\,(\omega\, t+\varphi)} \end{matrix} \longrightarrow \bar{\psi}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\,(\omega\, t+\varphi)}$$

Reemplazando en nuestro sistema matricial nos queda el problema de autovalores y autovectores:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m_a}+\frac{g}{l}-\omega^2 & -\frac{k}{m_a} \\ -\frac{k}{m_b} & \frac{k}{m_b}+\frac{g}{l}-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo la cuenta, llegamos a los siguientes resultados:

	MODO 1	MODO 2
FRECUENCIAS	$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m_a} + \frac{k}{m_b}}$
AUTOVECTORES	$\langle\omega_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\langle\omega_2\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{m_b}{m_a} \\ 1 \end{pmatrix}$

Recordemos, la solución general del problema es la combinación lineal de los dos modos normales encontrados (recordar terminar el cálculo tomando la parte real de nuestra solución compleja):

$$\bar{\psi}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t + \varphi_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{m_b}{m_a} \\ 1 \end{pmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m_a} + \frac{k}{m_b}}\ t + \varphi_2\right)$$

Sobre esta solución se pueden introducir las condiciones iniciales:

$$\bar{\psi}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\bar{\psi}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Evaluando estas condiciones se llega a un sistema de 4×4:

$$\begin{cases} C_1\, cos(\varphi_1) - \dfrac{m_b}{m_a}\, C_2\, cos(\varphi_2) = 0 & (1) \\ C_1\, cos(\varphi_1) + C_2\, cos(\varphi_2) = 1 & (2) \\ -\sqrt{\dfrac{g}{l}}\, C_1\, sen(\varphi_1) + \dfrac{m_b}{m_a}\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m_a} + \dfrac{k}{m_b}}\, C_2\, sen(\varphi_2) = 0 & (3) \\ -\sqrt{\dfrac{g}{l}}\, C_1\, sen(\varphi_1) - \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m_a} + \dfrac{k}{m_b}}\, C_2\, sen(\varphi_2) = 0 & (4) \end{cases}$$

De (1): $C_2\, cos(\varphi_2) = \frac{m_a}{m_a + m_b}$

De (2): $C_1\, cos(\varphi_1) = \frac{m_b}{m_a + m_b}$

De (3) y (4):

$$C_1\, sen(\varphi_1) = C_2\, sen(\varphi_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{m_b}{m_a + m_b} \ , \ C_2 = \frac{m_a}{m_a + m_b}$$

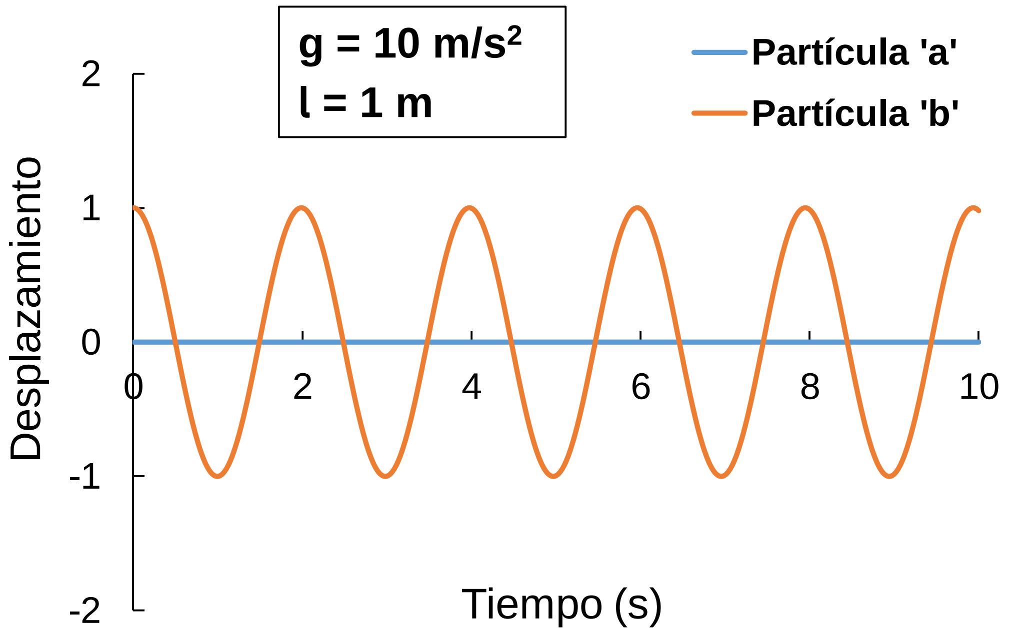
Presentamos la solución general para estas condiciones iniciales:

$$\bar{\psi}(t) = \frac{m_b}{m_a + m_b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right) + \frac{m_a}{m_a + m_b} \begin{pmatrix} -\frac{m_b}{m_a} \\ 1 \end{pmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m_a} + \frac{k}{m_b}}\ t\right)$$

Si consideramos que el acoplamiento del resorte es débil:

$$\bar{\psi}(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} m_b + \begin{pmatrix} -m_b \\ m_a \end{pmatrix}\right] \frac{cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right)}{m_a + m_b}$$

$$\boldsymbol{\psi_a(t) = 0} \qquad \boldsymbol{\psi_b(t) = cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\ t\right)}$$



Pulsaciones y Batidos

Cuando las frecuencias de los modos normales son muy parecidas entre sí, ocurre el fenómeno de batidos, en el cual el carácter oscilatorio de las soluciones sufre una modulación en amplitud.

Vamos a definir:

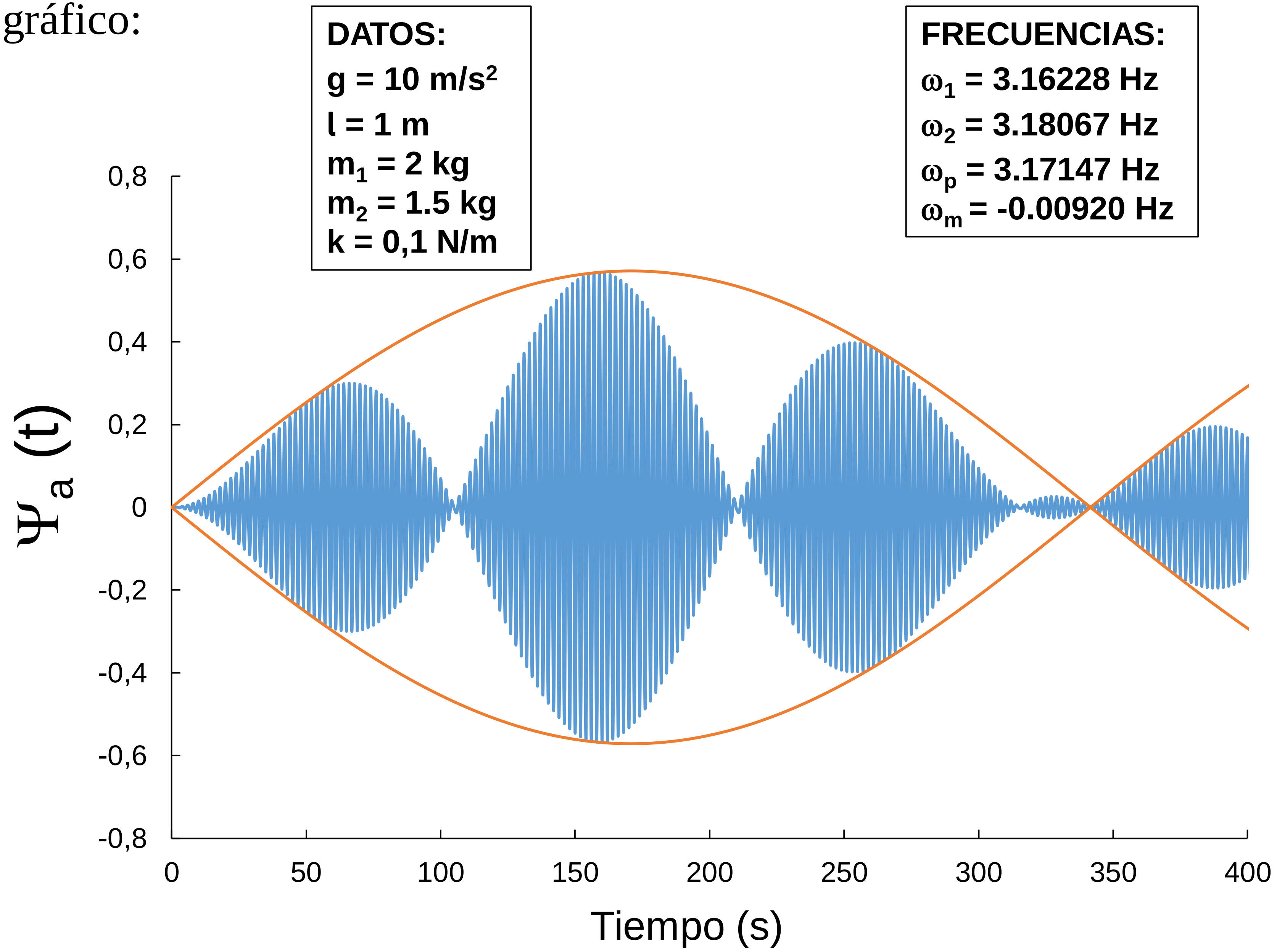
$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad (\omega_m \ll \omega_p)$$

Entonces: $\omega_1 = \omega_p + \omega_m$ y $\omega_2 = \omega_p - \omega_m$. Reescribamos las soluciones:

$$\psi_a(t) = -\frac{2\, m_b}{m_a + m_b}\, sen(\omega_p\, t)\, sen(\omega_m\, t)$$

$$\psi_b(t) = cos(\omega_p\, t)\, cos(\omega_m\, t) + \frac{m_a - m_b}{m_a + m_b}\, sen(\omega_p\, t)\, sen(\omega_m\, t)$$

Veamos un gráfico:



Algunos cálculos pueden simplificarse si uno considera el valor medio en un ciclo rápido de oscilación (a la frecuencia ω_p):

VALOR MEDIO DE $f(\omega\, t)$ periódica:

$$\langle f(\omega\, t)\rangle_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(\omega\, t)\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\omega\tau} \frac{f(\omega\, t)}{\omega}\, d(\omega\, t) =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\pi}{\tau}\,\tau}\int_0^{\frac{2\pi}{\tau}\tau} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

Algunos ejemplos:

$$\left\langle sen^2(\omega\, t)\right\rangle = \left\langle cos^2(\omega\, t)\right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle sen(\omega\, t)\, cos(\omega\, t)\rangle = 0$$

Obtengamos las energías cinéticas de cada partícula:

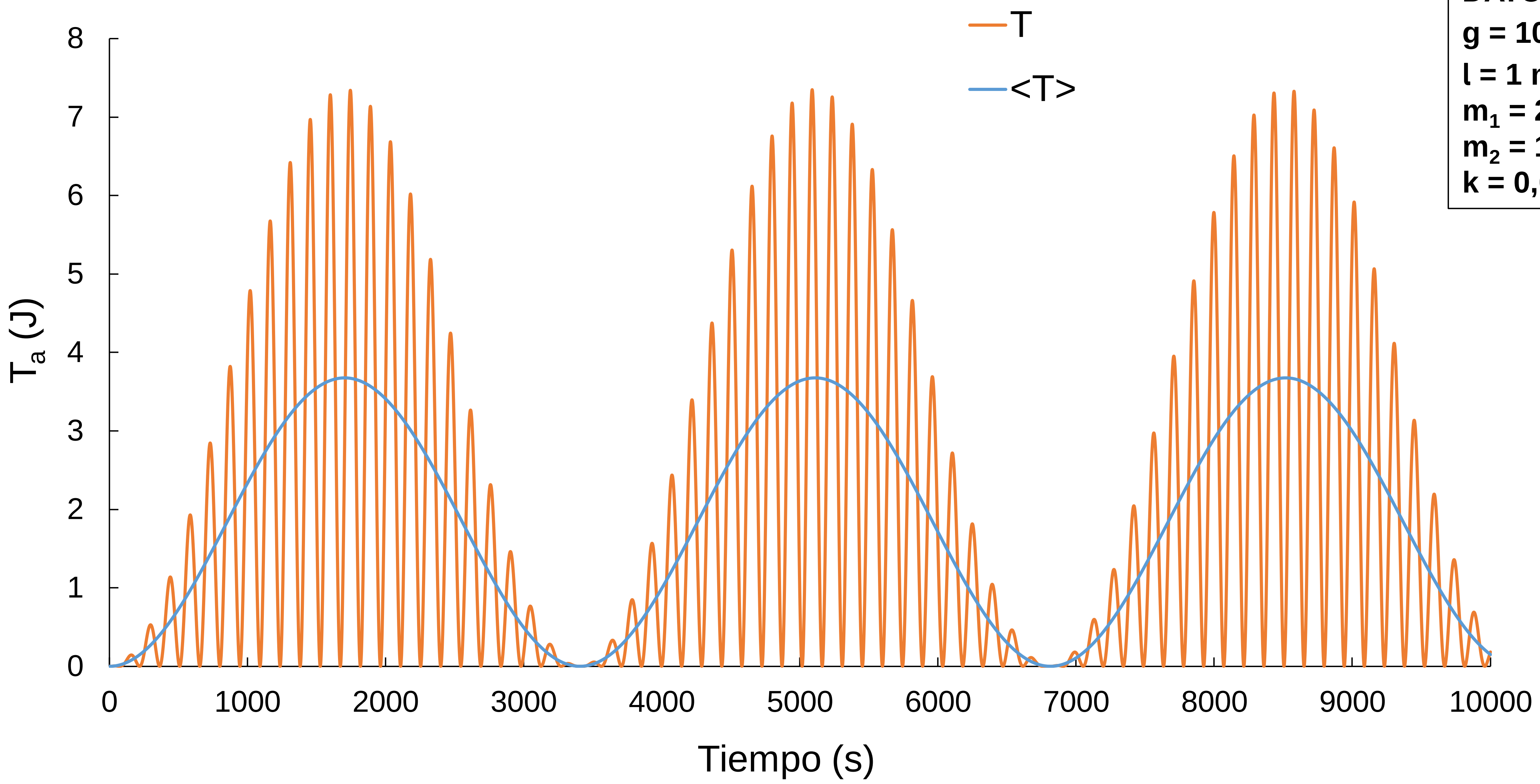
$$T_a = \frac{1}{2}\, m_a\, \dot{\psi}_a(t)^2 = \frac{1}{2}\, m_a \left[-\frac{2\, m_b\, \omega_p}{m_a + m_b}\, cos\left(\omega_p\, t\right) sen(\omega_m\, t) - \frac{2\, m_b\, \omega_m}{m_a + m_b}\, sen\left(\omega_p\, t\right) cos(\omega_m\, t) \right]^2 =$$

$$= \frac{2\, m_a\, {m_b}^2}{(m_a + m_b)^2} \left[{\omega_p}^2\, cos^2\left(\omega_p\, t\right) sen^2(\omega_m\, t) + 2\, \omega_p\, \omega_m\, cos\left(\omega_p\, t\right) sen\left(\omega_p\, t\right) cos(\omega_m\, t)\, sen(\omega_m\, t) \right.$$

$$\boldsymbol{\langle T_a \rangle = \frac{m_a\, {m_b}^2}{(m_a + m_b)^2} \left[{\omega_p}^2\, sen^2(\omega_m\, t) + {\omega_m}^2\, cos^2(\omega_m\, t) \right]}$$

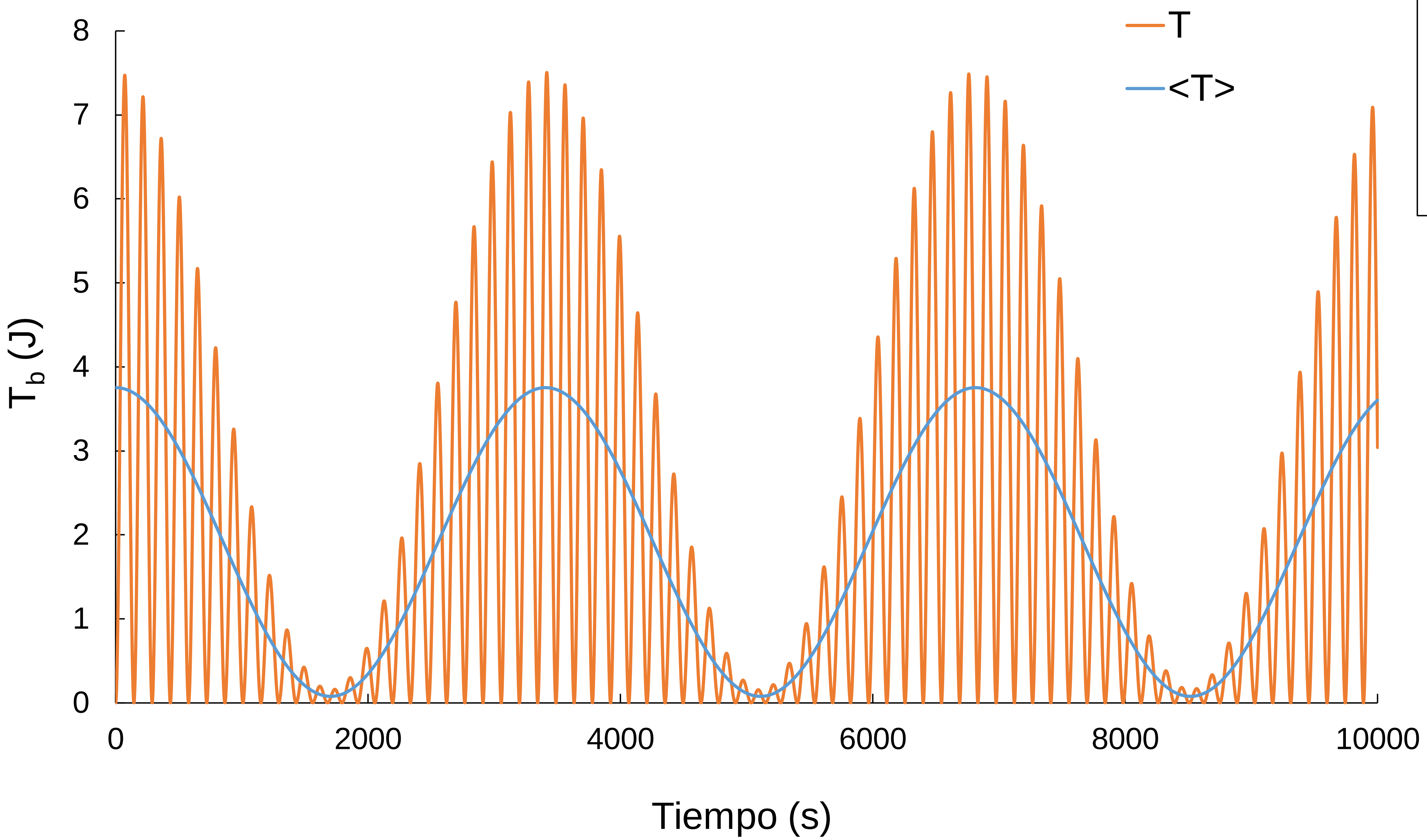
$$\boldsymbol{\langle T_b \rangle = \frac{m_b}{4} \left[\left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b}\, \omega_m - \omega_p \right)^2 cos^2(\omega_m\, t) + \left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b}\, \omega_p - \omega_m \right)^2 sen^2(\omega_m\, t) \right]}$$

Veamos un gráfico de T_a y de $\langle T_a \rangle$ en función del tiempo:



DATOS:
g = 10 m/s^2
l = 1 m
m_1 = 2 kg
m_2 = 1.5 kg
k = 0,01 N/m

Y ahora un gráfico de T_b y $\langle T_b \rangle$:



DATOS:
$g = 10\ m/s^2$
$l = 1\ m$
$m_1 = 2\ kg$
$m_2 = 1.5\ kg$
$k = 0,01\ N/m$

3. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 1, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.

   b) Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.

   c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.

   d) Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right]$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right]$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2}$$

   donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

   e) (*) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.

Vamos a reescribir las ecuaciones de movimiento desde Newton:

$$\begin{cases} k\,(\psi_b - \psi_a) - m_a\,g\,sen(\alpha) + F_0\,cos(\Omega\,t) - \gamma\,\dot{\psi}_a = m_a\,\ddot{\psi}_a \\ -k\,(\psi_b - \psi_a) - m_b\,g\,sen(\beta) - \gamma\,\dot{\psi}_b = m_b\,\ddot{\psi}_b \end{cases}$$

Siguiendo un camino análogo al del problema anterior, se llega a:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \\ \ddot{\psi}_b \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{m_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_a \\ \\ \dot{\psi}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{m_a} + \frac{g}{l} & -\frac{k}{m_a} \\ -\frac{k}{m_b} & \frac{k}{m_b} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m_a}\,cos(\Omega\,t) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de una forma más compacta:

$$\ddot{\bar{\psi}} + \bar{\bar{\Gamma}}\,.\,\dot{\bar{\psi}} + \bar{\bar{M}}.\,\bar{\psi} = \bar{a}$$

Algo que nos piden en este problema es que desacoplemos las ecuaciones mediante algo que se llama "coordenadas normales". Vamos a introducirlas…

$$\bar{\psi} = \bar{\bar{A}}\,.\,\bar{\eta} \qquad , \qquad \bar{\bar{A}} = (\langle\omega_1\rangle \quad \langle\omega_2\rangle)$$

donde $\bar{\eta}$ es el vector de coordenadas normales. Reemplacemos esto en nuestra ecuación:

$$\bar{\bar{A}}\,.\,\ddot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{\Gamma}}\,.\,\bar{\bar{A}}\,.\,\dot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{M}}.\,\bar{\bar{A}}\,.\,\bar{\eta} = \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{A}}^{-1}\,.\,\bar{\bar{A}}\,.\,\ddot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{A}}^{-1}\,.\,\bar{\bar{\Gamma}}\,.\,\bar{\bar{A}}\,.\,\dot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{A}}^{-1}\,.\,\bar{\bar{M}}.\,\bar{\bar{A}}\,.\,\bar{\eta} = \bar{\bar{A}}^{-1}\,.\,\bar{a}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{C}}\,.\,\dot{\bar{\eta}} + \bar{\bar{D}}\,.\,\bar{\eta} = \bar{\bar{A}}^{-1}\,.\,\bar{a}$$

donde $\bar{\bar{D}}$ es una matriz diagonal, con los autovalores al cuadrado de nuestro sistema en la diagonal. Tanto la matriz que acompaña a $\dot{\bar{\eta}}$ como el término del segundo miembro deben ser calculados, pues son datos del problema.

Haciendo las cuentas llegamos a nuestro nuevo sistema de ecuaciones, ahora desacoplado…

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \bar{\bar{C}} \, . \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{k}{m_a} + \frac{k}{m_b} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{m_b}{m_a + m_b} \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m_a} \ cos(\Omega \ t) \\ -\frac{F_0}{m_a} \ cos(\Omega \ t) \end{pmatrix}$$

Las soluciones para las coordenadas normales son las ya conocidas de la primera clase. Deberíamos desacoplar la parte que es proporcional a la velocidad, pero pasado un tiempo esa parte desaparecerá, y nos sobrevivirán los términos estacionarios:

$$\ddot{\eta}_1 + \left[\bar{\bar{C}}\,.\dot{\eta}\right]_1 + {\omega_1}^2\,\eta_1 = \frac{m_b}{m_a\,(m_a + m_b)}\,F_0\,cos(\Omega\,t) \quad \Rightarrow \quad \eta_1(t) \approx {A_{abs}}^{(1)}\,sen(\Omega\,t) + {A_{el}}^{(1)}\,cos(\Omega\,t)$$

$$\ddot{\eta}_2 + \left[\bar{\bar{C}}\,.\dot{\eta}\right]_2 + {\omega_2}^2\,\eta_2 = \frac{m_b}{m_a\,(m_a + m_b)}\,F_0\,cos(\Omega\,t) \quad \Rightarrow \quad \eta_2(t) \approx {A_{abs}}^{(2)}\,sen(\Omega\,t) + {A_{el}}^{(2)}\,cos(\Omega\,t)$$

donde:

$$A_{abs}{}^{(1)} = \frac{m_b\, F_0 \frac{\gamma}{m_a} \Omega}{m_a\,(m_a + m_b)\,[({\omega_1}^2 - \Omega^2)^2 + (\Gamma\,\Omega)^2]}$$

$$A_{el}{}^{(1)} = \frac{m_b\, F_0\,({\omega_1}^2 - \Omega^2)}{m_a\,(m_a + m_b)\,[({\omega_1}^2 - \Omega^2)^2 + (\Gamma\,\Omega)^2]}$$

$$A_{abs}{}^{(2)} = \frac{m_b\, F_0 \frac{\gamma}{m_b} \Omega}{m_a\,(m_a + m_b)\,[({\omega_2}^2 - \Omega^2)^2 + (\Gamma\,\Omega)^2]}$$

$$A_{el}{}^{(2)} = \frac{m_b\, F_0\,({\omega_2}^2 - \Omega^2)}{m_a\,(m_a + m_b)\,[({\omega_2}^2 - \Omega^2)^2 + (\Gamma\,\Omega)^2]}$$

Ahora, multiplicando por la matriz $\bar{\bar{A}}$ recuperamos nuestras soluciones físicas:

$$\psi_a(t) = {A_{el}}^{(1)} \, cos(\Omega \, t) + {A_{abs}}^{(1)} \, sen(\Omega \, t) + {A_{el}}^{(2)} \, cos(\Omega \, t) + {A_{abs}}^{(2)} \, sen(\Omega \, t)$$

$$\psi_b(t) = {A_{el}}^{(1)} \, cos(\Omega \, t) + {A_{abs}}^{(1)} \, sen(\Omega \, t) - \frac{m_a}{m_b} \left[{A_{el}}^{(2)} \, cos(\Omega \, t) + {A_{abs}}^{(2)} \, sen(\Omega \, t) \right]$$

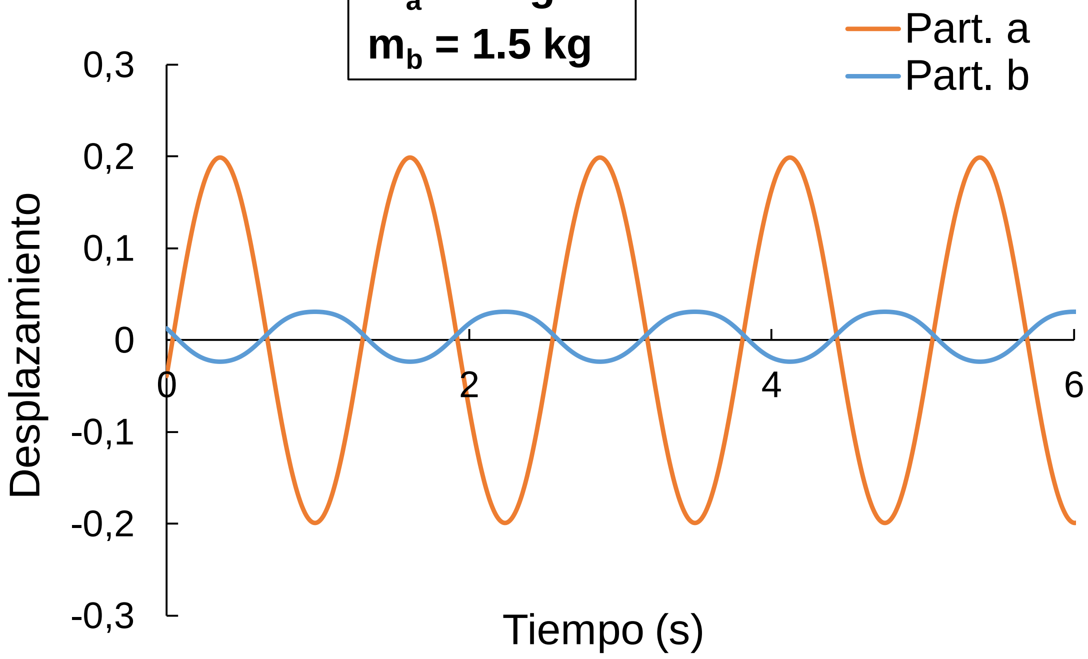
Vamos a ver ahora un gráfico de estas soluciones para un caso más simple (solución estacionaria), y veamos en qué casos las partículas oscilan en fase y en qué casos lo hacen en contrafase:

$$\psi_a(t) = \left(A_{el}{}^{(1)} + A_{el}{}^{(2)}\right) cos(\Omega\, t) + \left(A_{abs}{}^{(1)} + A_{abs}{}^{(2)}\right) sen(\Omega\, t)$$

$$\psi_b(t) = \left(A_{el}{}^{(1)} - \frac{m_a}{m_b} A_{el}{}^{(2)}\right) cos(\Omega\, t) + \left(A_{abs}{}^{(1)} - \frac{m_a}{m_b} A_{abs}{}^{(2)}\right) sen(\Omega\, t)$$

DATOS:
$g = 10\ m/s^2$
$l = 1\ m$
$k = 0.01\ N/m$
$F_0 = 20\ N$
$\Gamma = 5\ s^{-1}$
$\Omega = 5\ Hz$

$m_a = 2\ kg$
$m_b = 1.5\ kg$



$m_a = 1.5\ kg$
$m_b = 2\ kg$