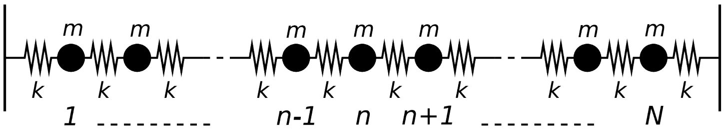
N»1 GRADOS DE LIBERTAD

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Cadenas periódicas de N osciladores acoplados



1. Enlazadas por resortes de coeficiente de dureza k y longitud natural l_0 unas N partículas de masa m en reposo están equiespaciadas en a.
   a) Escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula enésima usando la aproximación de ángulos pequeños.

   b) Proponga una solución de la forma:

   $$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos\left(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}\right) \cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$$

   Halle la relación de dispersión y grafíquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

   c) En la figura se muestra el caso de extremos fijos en que una virtual partícula $n = 0$ estaría en la pared izquierda y una $n = N+1$ en la derecha. Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales de oscilación transversal para este y escriba la solución general para la partícula enésima.

   d) Ídem. anterior, pero con ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un "extremo libre" en esta configuración?).

   e) (*) Ídem. anterior, pero con el extremo izquierdo libre y el derecho fijo a la pared.

   f) Particularice los resultados de $1c$, $1d$ y $1e$ para el caso en que $N = 3$.

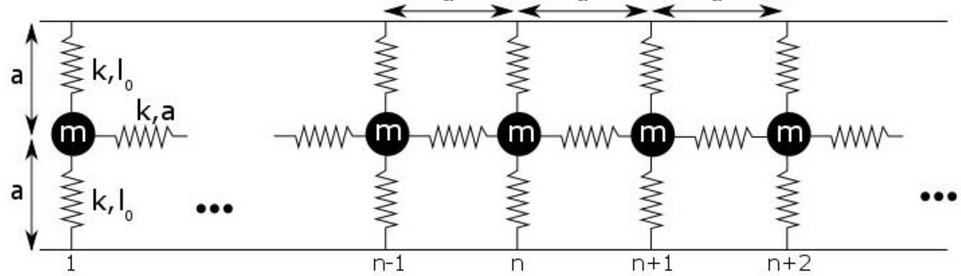
2. En el sistema de la figura hay N partículas de masa m alineadas a una distancia a. Las mismas están sujetas a las paredes mediante resortes de constante k y longitud natural l_0. A su vez, están vinculadas mediante resortes de constante también del mismo k y longitud natural $l_0 < a$. Hay movimiento sólo en la dirección longitudinal a las partículas.

   a) Escriba la ecuación de movimiento para la partícula énesima. Indique todas las aproximaciones que realiza.

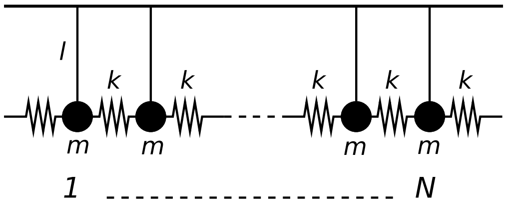
   b) Proponga una solución adecuada y halle la relación de dispersión. ¿Cuál es la frecuencia más baja posible?

   c) Imponga las condiciones de contorno apropiadas para el sistema y calcule las frecuencias propias del mismo. Escriba la solución para el movimiento de cada partícula.

   d) Particularice para el caso $N = 2$ y compare con el resultado que obtiene resolviendo el problema "matricialmente". Esquematice los modos normales de oscilación.



3. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura donde todos los resortes tienen longitud natural l_0.

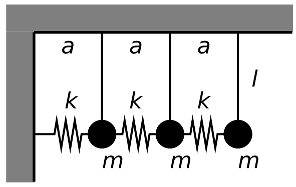


a) Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 1 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en tal problema. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

b) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.

c) Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

d) Especifique el problema 3c para 3 péndulos como muestra la figura.



e) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Utilizando los modos normales para el sistema sin forzar, halle la solución estacionaria del problema forzado. Considere el problema sin amortiguamiento. Utilice lo aprendido en la guía anterior. ¿Cuáles sonlas frecuencias de resonancia?