

## OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO Y FORZADO

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## Oscilador armónico amortiguado

- 1. Una pesa de masa m está sujeta a un resorte de constante elástica k, por lo que la frecuencia natural de oscilación es  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Actúa en este sistema un amortiguador que provee una amortiguación lineal con la velocidad de constante de amortiguamiento c que por unidad de masa es  $\Gamma = c/m$ .
  - a) Proponga la siguiente solución homogénea:  $x_h(t) = C e^{-t/2\tau} \cos(\omega_1 t + \theta)$  y halle los valores de  $\tau$  y de  $\omega_1$ . ¿De qué depende los valores de C y  $\theta$ ? ¿Porqué no es lícito imponer las condiciones iniciales a la solución homogénea?
  - b) Repase las condiciones de  $\Gamma$  y  $\omega_0$  en que se obtienen soluciones:
    - sub-amortiguadas,
    - críticamente amortiguadas, y
    - sobre-amortiguadas,

graficando x(t) para distintos valores de estos parámetros.

c) Verifique que la solución general para el oscilador libre sobre-amortiquado

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) \cosh\left(|\omega|t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2} \Gamma x(0)\right] \frac{\sinh\left(|\omega|t\right)}{|\omega|} \right\},\,$$

puede obtenerse a partir de esta para el sub-amortiquado

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0)\cos(\omega t) + \left[ \dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0) \right] \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right\},\,$$

donde  $\omega = \pm i|\omega|, |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$ . Aproveche las identidades  $\cos(ix) = \cosh(x)$  y  $\sin(ix) = i \sinh(x)$ .

- d) Para la condición inicial  $x(0) = x_0$  que parte del reposo, es decir  $\dot{x}(0) = 0$ , escriba las expresiones de la trayectoria x(t) y calcule la energía en x(0).
- e) A partir de la solución general para el sub-amortiguado, muestre que la solución para el amortiguamiento crítico es

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) + \left[ \dot{x}(0) + \frac{1}{2} \Gamma x(0) \right] t \right\}.$$

Verifique que también podría haberle obtenido a partir de la solución para oscilaciones sobre-amortiguadas.

- 2. (\*) Si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre la combinación lineal  $\Psi = A\Psi_1 + B\Psi_2$  también lo es.
  - a) Verifique que esto tambiénn es valido si actua una fuerza disipativa proporcional a la velocidad.
  - b) ¿Vale si es un rozamiento constante?
- 3. (\*) Para un péndulo con fuerza de disipación proporcional a la velocidad calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento y compárelo con la pérdida de energía.

## Oscilador armónico forzado

4. Cualquier oscilador armónico sub-amortiguado de cierta frecuencia natural  $\omega_0$  tras someterle a un forzado externo y esperar cierto tiempo ajustará su dinámica que responde solo a la forma del forzado. Siempre la amplitud de la solución homogénea decae pasado un transitorio.

## Física 2 (Físicos)



Ya veremos más adelante que cualquier forzado lo podremos descomponer en componentes armónicas, es decir en sumas de términos de senos y cosenos. Por ahora analizaremos un forzado perféctamente armónico  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ .

El movimiento resultante tras el transitorio responde a la solución particular  $x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t) + B \operatorname{cos}(\Omega t)$ . Los coeficientes dependerán de la relación entre  $\Omega$  y  $\omega_0$ .

- a) Obtenga expresiones para  $A(\Omega)$  y  $B(\Omega)$ .
- b) Grafique  $A(\Omega)$  y  $B(\Omega)$ . ¿Qué sucede con ambas funciones cuando  $\Omega \simeq \omega_0$ ? ¿Es justo para la igualdad que esto sucede? ¿Que haría que no fuera así?
- c) (\*) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.
- d) (\*) Proponga ahora como solución particular la solución compleja  $x_p(t) = A e^{-i\omega t}$  y explique porque se denoniman así  $A_{\text{elástico}} = \mathbb{R}(A)$  y  $A_{\text{absorbente}} = \mathbb{I}(A)$ .