PULSOS Y ESPECTROS CUADRADOS

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional y puede considerarlos opcionales.

1. **Espectro cuadrado** $\psi(\omega)$ es un *espectro cuadrado*, esto es presenta un valor constante, $\frac{1}{\Delta\omega}$, en un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ centrado en un ω_0 y este es nulo para cualquier otra ω.

   a) Verifique que el correspondiente $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\psi\omega$ está dado por:

   $$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t}\right]\mathrm{e}^{i\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\,.$$

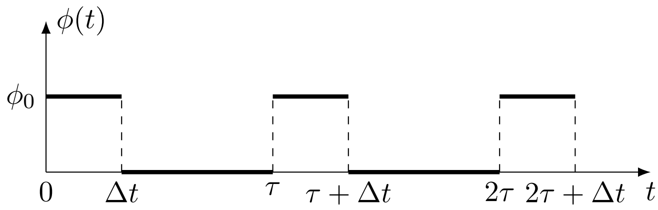
   b) Grafique $\psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.

   c) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

2. **Pulso cuadrado**

   a) Muestre que $\mathcal{F}$ es lineal, por tanto $\mathcal{F}\left[af(x) + bg(x)\right] = a\mathcal{F}\left[f(x)\right] + b\mathcal{F}\left[g(x)\right]$, donde a, b son constantes.

   b) $\phi(t)$ es una serie de pulsos cuadrados de duración Δt que se repiten N veces con un período τ ($\Delta t < \tau$). Si $f(n,t)$ describe la función en cualquiera de los intervalos $[n\tau, (n+1)\tau]$ que contiene estos pulsos de amplitud no nula ϕ_0 en $[n\tau, n\tau + \Delta t]$ de forma que $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N} f(n,t)$, compruebe que



   $$\mathcal{F}\left[\phi(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{N} f(n,t)\right] = \sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{-in\omega\tau}\,\mathcal{F}\left[f(0,t)\right].$$

   c) Resuelva $\mathcal{F}\left[f(0,t)\right]$ para obtener la expresión completa de $\psi(\nu) = \mathcal{F}\left[\phi(t)\right]$.

   d) El rasgo más prominente de $\psi(\nu)$ son picos en $\nu_p = p\nu_1$ ($p \in \mathbb{N}$) donde $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$, es decir una serie de armónicos de ν_1. Encuentre en la expresión de $\psi(\nu)$ el término que depende de τ responsable de este comportamiento y verifique ν_p.

   e) De similar análisis identifique que término con dependencia en Δt hace que los armónicos más importantes se detecten en $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$.

   f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es $\delta\nu = \frac{2}{(N+1)\tau}$, y calcule cuanto más pequeño es que el $\Delta\nu$ entre sucesivos ν_p.