Cálculo de Jones

Pablo E. Etchemendy

Física 2

2020

Planteo del problema

- Expresiones largas, con factores que se arrastran sin cambios:

$$\mathbf{E} = Ae^{i(kz-\omega t)}[\mathbf{h} + i\mathbf{v}]$$

- Hallar una notación **vectorial** que contenga la única información relevante:
  - la relación de amplitudes...
  - ...y de fases

  entre las componentes horizontal h y vertical v.

Planteo del problema

- Expresiones largas, con factores que se arrastran sin cambios:

$$\mathbf{E} = Ae^{i(kz-\omega t)}[\mathbf{h} + i\mathbf{v}]$$

- Hallar una notación **vectorial** que contenga la única información relevante:
  - la relación de amplitudes...
  - ...y de fases

  entre las componentes horizontal h y vertical v.
- Evitar escribir:
  - Término propagante $e^{i(kz-\omega t)}$
  - Versores
  - Y *a veces*: amplitud

Planteo del problema

- Definir **matrices** que permitan operar sobre los vectores y den como resultado los mismos efectos que las láminas y los polarizadores.
- Por ejemplo, en vez de obtener el efecto de un polarizador mediante:

$$\mathbf{E}_{\mathsf{s}} = (\mathbf{E}_{\mathsf{e}} \cdot \mathbf{t}(\theta))\mathbf{t}(\theta)$$

hallar una matriz $\mathbf{P}(\theta)$ tal que su aplicación al vector $\mathbf{E}_{\mathsf{e}}$ dé el mismo resultado:

$$\mathbf{E}_{\mathsf{s}} = \mathbf{P}(\theta)\mathbf{E}_{\mathsf{e}}$$

JULY, 1941 J. O. S. A. VOLUME 31

A New Calculus for the Treatment of Optical Systems

I. Description and Discussion of the Calculus

R. CLARK JONES*
Research Laboratory, Polaroid Corporation, Cambridge, Massachusetts, and Research Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received April 23, 1941)

The effect of a plate of anisotropic material, such as a crystal, on a collimated beam of polarized light may always be represented mathematically as a linear transformation of the components of the electric vector of the light. The effect of a retardation plate, of an anisotropic absorber (plate of tourmaline; Polaroid sheeting), or of a crystal or solution possessing optical activity, may therefore be represented as a matrix which operates on the electric vector of the incident light. Since a plane wave of light is characterized by the phases and amplitudes of the two transverse components of the electric vector, the matrices involved are two-by-two matrices, with matrix elements which are in general complex. A general theory of optical systems containing plates of the type mentioned is developed from this point of view.

https://doi.org/10.1364/JOSA.31.000488

Ejemplo

- Consideremos luz linealmente polarizada horizontal:

$$\mathbf{E} = Ae^{i(kz-\omega t)}\mathbf{h}$$

- Vamos a escribir la parte vectorial como un vector columna:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Este es el vector de Jones asociado.

Vectores de Jones normalizados para campos de energía $\frac{1}{2}A^2$

Estado	**Campo E**	**Vector de Jones**
Lineal		
Horizontal	$\mathbf{h}Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
Vertical	$\mathbf{v}Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
Inclinación θ	$[\cos(\theta)\mathbf{h}+\sin(\theta)\mathbf{v}]Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{bmatrix}$
Circular		
Izq. $+$, der. $-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{h}+e^{\pm i\pi/2}\mathbf{v}]Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm i\end{bmatrix}$
Elíptica		
Izq. $+$, der. $-$ inclinación 0	$[\cos(\phi)\mathbf{h}\pm i\sin(\phi)\mathbf{v}]Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}\cos(\phi)\\\pm i\sin(\phi)\end{bmatrix}$
Izq. $+$, der. $-$ inclinación θ	$\mathbf{R}(\theta)[\cos(\phi)\mathbf{h}\pm i\sin(\phi)\mathbf{v}]Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta)\mp i\sin(\phi)\sin(\theta)\\\cos(\phi)\sin(\theta)\pm i\sin(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}$
Relación arbitraria de amplitudes y fases	$[\cos(\zeta)\mathbf{h}+e^{i\epsilon}\sin(\zeta)\mathbf{v}]Ae^{i(kz-\omega t)}$	$\begin{bmatrix}\cos(\zeta)\\e^{i\epsilon}\sin(\zeta)\end{bmatrix}$

Para luz **linealmente** polarizada, θ es el ángulo que forma el plano de polarización con la horizontal. Para luz **elípticamente** polarizada, el parámetro ϕ controla la excentricidad. Los semiejes son $a=\cos(\phi)$ y $b=\sin(\phi)$. Para que los semiejes sean positivos, ϕ debe restringirse al intervalo $(0,\pi/2)$, de modo que $\tan(\phi)=b/a\in(0,\infty)$. En el caso alineado, el semieje de tamaño a coincide con el eje horizontal. En el caso rotado, dicho semieje forma un ángulo θ con la horizontal. $\mathbf{R}(\theta)$ es la matriz de rotación.

Factores globales

- Muchos vectores diferentes pueden describir el mismo estado de polarización.
- Causa: un factor común a ambos componentes no modifica dicho estado.
- Ejemplos:

  Lineal horizontal

$$\left\{\begin{bmatrix}\pm 1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\pm i\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\pm i\\0\end{bmatrix}\right\}=\rho e^{i\epsilon}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

  Circular izquierda

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1+i\\i-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3+i\\i(3+i)\end{bmatrix}\right\}=\rho e^{i\epsilon}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

En ambos ejemplos, $\rho e^{i\epsilon}$ es un factor *global*, y por lo tanto no modifica la relación de amplitudes y fases entre componentes.

Matrices de Jones

- Como hemos visto, los estados de polarización se describen mediante vectores complejos de $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix}$$
- Los elementos ópticos actúan sobre un estado de polarización y generan uno nuevo:
$$\begin{bmatrix} E_{h,1} \\ E_{v,1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_{h,2} \\ E_{v,2} \end{bmatrix}$$
- Las transformaciones de vectores se realizan mediante matrices:
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{h,1} \\ E_{v,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{h,2} \\ E_{v,2} \end{bmatrix}$$
- El problema consiste en hallar los coeficientes a, b, c y d, posiblemente complejos, e independientes de $E_{h,k}$ y $E_{v,k}$, que verifiquen la relación.

Ejemplo: polarizador lineal horizontal

- Polarizador lineal horizontal actuando sobre un estado arbitrario:

$$((E_h\mathbf{h} + E_v\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h})\mathbf{h} = E_\mathsf{h}\mathbf{h}$$

- Vectores de Jones a la entrada y a la salida:

$$\begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} E_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Busco una matriz que relacione ambos vectores:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aE_h + bE_v \\ cE_h + dE_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz debe cumplir $a = 1$ y $b = c = d = 0$:

$$\mathbf{P}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: polarizador lineal inclinado

- Siguiendo el mismo razonamiento, obtenemos el caso vertical:

$$\mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para un ángulo de inclinación arbitrario, usamos la matriz de rotación:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

- Si tomamos como referencia el caso horizontal ($\theta = 0$):

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{P}_h\mathbf{R}(-\theta)$$

- El resultado es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: polarizador lineal inclinado

- Evaluemos la matriz para diferentes valores de θ:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- Si $\theta = 0$ recuperamos el polarizador horizontal:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si $\theta = \pi/2$ recuperamos el polarizador vertical:

$$\mathbf{P}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Notar además que $\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{P}(\theta + m\pi)$: rotar un polarizador 180º no modifica el eje de transmisión. (Solo importa la dirección del eje, no el sentido).

Ejemplo: lámina retardadora de cuarto de onda

- Para una lámina de $\lambda/4$ con el eje rápido horizontal/vertical:

$$\begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_h \\ \pm i E_v \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\mathbf{L}_{\lambda/4,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \mathbf{L}_{\lambda/4,v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

- Para el caso rotado:

$$\mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/4,h}\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i\sin^2(\theta) & (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) + i\cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- Verificar que $\mathbf{L}_{\lambda/4}(0) = \mathbf{L}_{\lambda/4,h}$, y que $L_{\lambda/4}(\pi/2) = \mathbf{L}_{\lambda/4,v}$.
- Verificar que $\mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta) = \mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta + m\pi)$.

Ejemplo: lámina retardadora de media onda

- Para una lámina de $\lambda/2$ con el eje rápido horizontal/vertical:

$$\begin{bmatrix} E_h \\ E_v \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \pm E_h \\ \mp E_v \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{L}_{\lambda/2,v}$$

- Para el caso rotado:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,h}\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

- Verificar que $\mathbf{L}_{\lambda/2}(0) = \mathbf{L}_{\lambda/2,h} = -\mathbf{L}_{\lambda/2}(\pi/2)$.
- Verificar que $\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta + m\pi)$.

Matrices de Jones para polarizadores y láminas retardadoras

Elemento	Símbolo	Matriz de Jones
Polarizador lineal	$\mathbf{P}_h$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{P}_v$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{P}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$
Lámina de cuarto de onda	$\mathbf{L}_{\lambda/4,h}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
	$\mathbf{L}_{\lambda/4,v}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
	$\mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i\sin^2(\theta) & (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) \\ (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) + i\cos^2(\theta) \end{bmatrix}$
Lámina de media onda	$\mathbf{L}_{\lambda/2,h}$, $\mathbf{L}_{\lambda/2,v}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta)$	$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$

Para polarizadores la inclinación θ es la del eje de transmisión. Para láminas, la del eje rápido. En ambos casos, θ se mide respecto al eje horizontal.

Fases globales

- De manera similar que con los vectores de Jones, una fase común a todos los elementos de una matriz no altera su efecto.
- Causa: dicha fase afecta a ambos componentes del estado *por igual*.
- Ejemplos:

Polarizador horizontal

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = e^{i\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lámina de $\lambda/4$ horizontal

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \right\} = e^{i\epsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

En ambos ejemplos, $e^{i\epsilon}$ es una *fase global*, y por lo tanto no modifica el efecto de las matrices sobre un estado de polarización.

Fases globales

Diferencia importante con los vectores:

- Las matrices están definidas con una norma determinada, por lo que distintas matrices equivalentes solo pueden diferir en sus fases globales.
- Ejemplos de matrices **inválidas**:

  Polarizador horizontal

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \pm i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho e^{i\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Lámina de $\lambda/4$ horizontal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho_1 e^{i\epsilon} & 0 \\ 0 & \rho_2 e^{i(\epsilon+\pi/2)} \end{bmatrix}$$

Propiedades de las matrices

Matriz $\mathbf{P}(\theta)$:

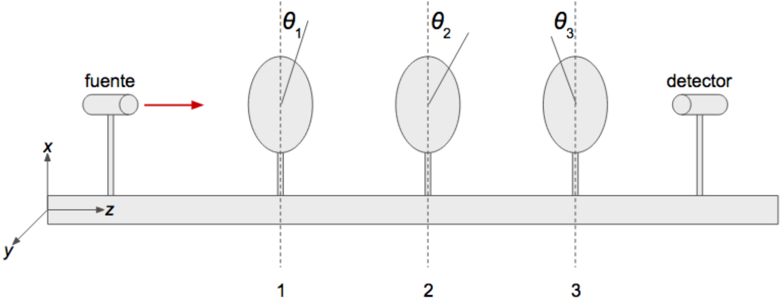
- Absorbe la componente perpendicular al eje de transmisión.
- El estado resultante siempre es lineal.
- La energía resultante siempre es menor o igual a la original.

Matrices $\mathbf{L}_{\lambda/n}(\theta)$:

- Aplican un cierto desfasaje a las proyecciones sobre los ejes rápido y lento.
- El estado resultante puede ser cualquiera.
- Preservan la energía.

Modo de uso

Luz emitida por una fuente incide sobre un arreglo ordenado de N elementos diversos:



Los elementos pueden ser láminas, polarizadores, etc., cada uno orientado en cierto ángulo θ_i.

Modo de uso

- Escribir el estado inicial $\mathbf{E}_0$.
- Escribir las matrices $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_N$, y evaluarlas para los correspondientes ángulos $\theta_1, \ldots, \theta_N$.
- El estado final se halla mediante multiplicación de matrices y vectores:

$$\mathbf{E}_N = \mathbf{M}_N(\theta_N) \ldots \mathbf{M}_1(\theta_1)\mathbf{E}_0 = \prod_N^{i=1} \mathbf{M}_i(\theta_i)\mathbf{E}_0$$

- Los estados intermedios se hallan truncando la serie: $\mathbf{E}_n = \prod_n^{i=1} \mathbf{M}_i(\theta_i)\mathbf{E}_0$
- El producto de todas las matrices es una nueva matriz:

$$\mathbf{M}(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \prod_N^{i=1} \mathbf{M}_i(\theta_i)$$

que contiene el efecto del sistema óptico completo.

Producto de matrices

El producto de matrices nos da el efecto de varios elementos consecutivos:

- Dos polarizadores perpendiculares impiden el paso de energía:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Dos polarizadores paralelos son redundantes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dos láminas de $\lambda/4$ paralelas equivalen a una lámina de $\lambda/2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

- Dos láminas de $\lambda/2$ equivalen a una lámina de onda entera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  y no modifican al estado incidente.

- Dos láminas de $\lambda/4$ perpendiculares tampoco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mp i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Producto de matrices

- Una lámina seguida de un polarizador da como resultado un estado lineal:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_v\mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta) &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2(\theta)+i\sin^2(\theta) & (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta)\\ (1-i)\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta)+i\cos^2(\theta)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos^2(\theta)+i\sin^2(\theta) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \left[\cos^2(\theta)+i\sin^2(\theta)\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

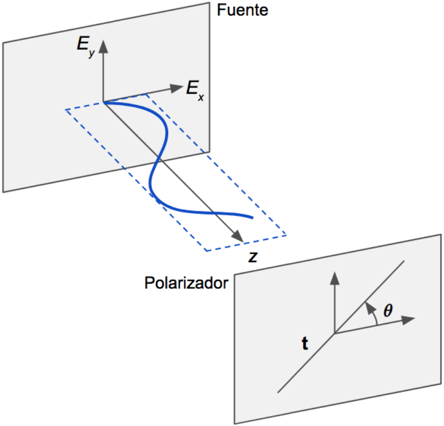
- El orden de los productos es importante (álgebra de matrices):

$$\mathbf{P}_v\mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta) \neq \mathbf{L}_{\lambda/4}(\theta)\mathbf{P}_v$$

- Esto muestra que *algunas* transformaciones no pueden ser deshechas mediante una transformación inversa.

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

Una fuente emite luz lineal horizontal de amplitud A_0 que incide sobre un polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con la horizontal.



Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- El campo eléctrico emitido es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{h} A_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

- Identificamos el vector de Jones asociado:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- El campo eléctrico emitido es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{h} A_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

- Identificamos el vector de Jones asociado:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La energía media emitida I_0 se obtiene mediante:

$$I_0 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \tfrac{1}{2} A_0^2 (\mathbf{J}_0^{\intercal} \cdot \mathbf{J}_0^*)$$

- Como el vector de Jones está normalizado:

$$I_0 = \tfrac{1}{2} A_0^2 (1^2 + 0^2) = \tfrac{1}{2} A_0^2$$

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- El estado a la salida del polarizador es:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{P}(\theta)\mathbf{J}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)\mathbf{t} \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- El estado a la salida del polarizador es:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{P}(\theta)\mathbf{J}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)\mathbf{t} \end{aligned}$$

- El estado final es un estado lineal de inclinación θ, modulado en amplitud por el factor $\cos(\theta)$.
- $\mathbf{t}$ es el mismo versor que describe la orientación del eje de transmisión.

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- El campo eléctrico resultante se obtiene agregando la amplitud y el término propagante:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{J_1} A_0 e^{i(kz-\omega t)} \\ &= \cos(\theta)[\cos(\theta)\mathbf{h} + \sin(\theta)\mathbf{v}] A_0 e^{i(kz-\omega t)}\end{aligned}$$

- La energía media resultante es:

$$\begin{aligned}I_1 &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^*) = \tfrac{1}{2} A_0^2 (\mathbf{J}_1^\intercal \cdot \mathbf{J}_1^*) \\ &= \tfrac{1}{2} A_0^2 \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= I_0 \cos^2(\theta)\end{aligned}$$

- θ es el ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{J}_0$: ley de Malus.

Ejemplo 1: Luz lineal y polarizador

- El único parámetro relevante es la orientación relativa entre la luz incidente y el eje de transmisión.
- Formas equivalentes de resolver el mismo problema:
  - Ejes de coordenadas fijos al plano de polarización, polarizador libre:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - Ejes de coordenadas fijos al polarizador, plano de polarización libre:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

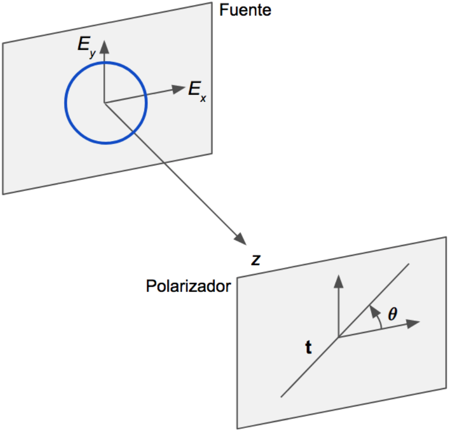
  - La luz y el polarizador tienen inclinaciones arbitrarias:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin(\phi)\cos(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) & \sin^2(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi \pm \theta) \\ \sin(\phi \pm \theta) \end{bmatrix}$$

- Moraleja: **NUNCA** resolver sin antes reducir parámetros innecesarios.

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

Una fuente emite luz circular de amplitud $\frac{1}{\sqrt{2}}A_0$ que incide sobre un polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ con la horizontal.



Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- El campo eléctrico emitido es:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{h} \pm i\mathbf{v}]A_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

- Identificamos el vector de Jones asociado:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- El campo eléctrico emitido es:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{h} \pm i\mathbf{v}]A_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

- Identificamos el vector de Jones asociado:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

- La energía media emitida I_0 se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} I_0 &= \tfrac{1}{2}A_0^2(\mathbf{J}_0^{\intercal} \cdot \mathbf{J}_0^*) \\ &= \tfrac{1}{2}A_0^2\tfrac{1}{2}(1^2 + (\pm i)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}A_0^2\tfrac{1}{2}(1+1) = \tfrac{1}{2}A_0^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- El estado a la salida del polarizador es:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{P}(\theta)\mathbf{J}_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \pm i\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \pm i\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- La matriz del polarizador es:

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- El estado a la salida del polarizador es:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{P}(\theta)\mathbf{J}_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \pm i\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \pm i\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Sabemos que este estado debe ser lineal, además debe estar alineado con el eje de transmisión $\mathbf{t}$.
- ¿Cómo podemos darnos cuenta?

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- Estudiemos la expresión del estado resultante:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) \pm i\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \pm i\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

- Vamos a sacar factor común $\cos(\theta)$ en la componente h, y $\sin(\theta)$ en la componente v:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\theta)(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)) \\ \sin(\theta)(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)) \end{bmatrix}$$

- Obtenemos una fase global $\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$, de modo que:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- Analicemos el estado resultante:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

- El coeficiente $\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ tiene módulo 1: es una fase global. Podemos ignorarla:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

- Análisis del estado:
    - Es lineal, y está alineado al eje de transmisión.
    - No depende del sentido de giro.
    - Amplitud reducida en un factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, independiente de θ.
    - Por lo tanto, su energía es la mitad de la incidente:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{\mathbf{J}_1^{\intercal} \cdot \mathbf{J}_1^*}{\mathbf{J}_0^{\intercal} \cdot \mathbf{J}_0^*} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2: Luz circular y polarizador

- Como la luz incidente tiene simetría circular, el ángulo de inclinación del polarizador no es un parámetro relevante.
- Formas equivalentes de resolver el problema:
  - El polarizador tiene una inclinación arbitraria:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

  - El sistema de coordenadas coincide con los ejes del polarizador:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Láminas de media onda

- Una fuente emite luz lineal inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

- La misma incide sobre una lámina de $\lambda/2$ cuyo eje rápido forma un ángulo ϕ con la horizontal:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{bmatrix}$$

- Hallar el estado resultante si $\phi = 0$:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

- Hallar el estado resultante si $\phi = \pi/4$:

$$\mathbf{J}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Láminas de media onda

- Una fuente emite luz elípticamente polarizada:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} A_x \\ iA_y \end{bmatrix}$$

- La misma incide sobre una lámina de $\lambda/2$ cuyo eje rápido forma un ángulo ϕ con la horizontal:

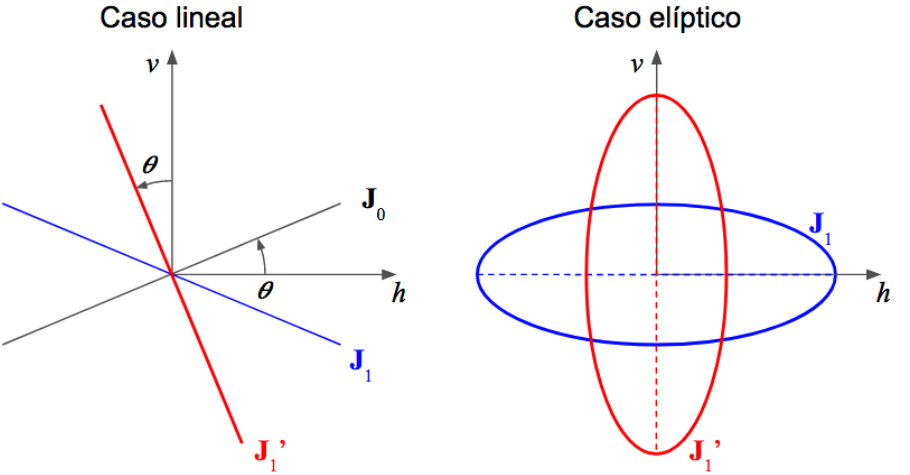
$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{bmatrix}$$

- Hallar el estado resultante si $\phi = 0$:

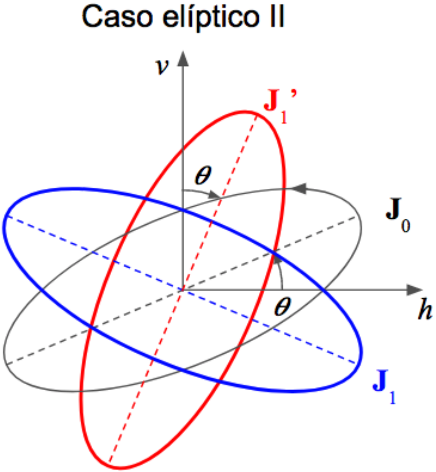
$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ iA_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ -iA_y \end{bmatrix}$$

- Hallar el estado resultante si $\phi = \pi/4$:

$$\mathbf{J}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ iA_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iA_y \\ A_x \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} A_y \\ -iA_x \end{bmatrix}$$


Caso lineal
v
θ
J0
θ
h
J1
J1'
Caso elíptico
v
J1
h
J1'

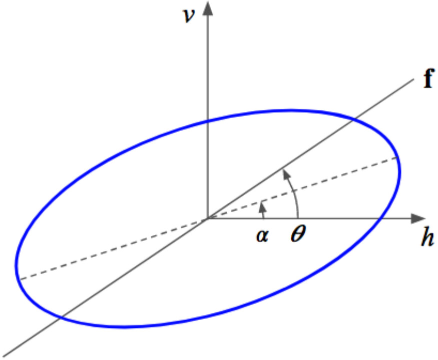
¿Qué ocurre si la elipse está inclinada?



BONUS TRACK

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

Una fuente emite luz elíptica, uno de cuyos semiejes forma un ángulo $\alpha = \pi/12$ con la horizontal. La misma incide sobre una lámina de media onda cuyo eje rápido forma un ángulo $\theta = \pi/3$ con la horizontal.



Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

- El campo eléctrico para luz elíptica cuyos semiejes **coinciden** con el sistema de coordenadas es:

$$\mathbf{E}' = [\cos(\phi)\mathbf{h}' + i\sin(\phi)\mathbf{v}']Ae^{i(kz-\omega t)}$$

Variar ϕ permite cambiar la excentricidad.

- El vector de Jones correspondiente es:

$$\mathbf{J}_0' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ i\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

- El siguiente paso es rotar este vector un ángulo α:

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{J}_0' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ i\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

Tengo la descripción de la fuente en dos sistemas de coordenadas diferentes:

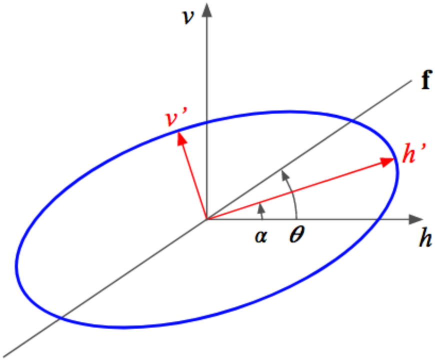
- El original $\{\mathbf{h}, \mathbf{v}\}$:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\alpha) - i\sin(\phi)\sin(\alpha) \\ \cos(\phi)\sin(\alpha) + i\sin(\phi)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

- El rotado un ángulo α respecto al original $\{\mathbf{h}', \mathbf{v}'\}$:

$$\mathbf{J}_0' = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ i\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

- Ambos describen el mismo estado de polarización en distintos sistemas de coordenadas.
- ¿Cuál es preferible?


v
f
v'
h'
α
θ
h

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

- La matriz para la lámina inclinada en $\theta = \pi/3$ es:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

- Recordemos que esta matriz se obtiene a partir de:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(-\theta)$$

- El estado resultante es:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta)\mathbf{J}_0$$

- Tenemos todo para obtener $\mathbf{J}_1$; sin embargo vamos a pensar lo que estamos haciendo.

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

- Partimos de:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta)\mathbf{J}_0$$

- Tanto la matriz como el estado inicial provienen de aplicar rotaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1 &= \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{J}_0' \\
&= \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(\alpha-\theta)\mathbf{J}_0' \\
&= \mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(\alpha-\theta)\mathbf{J}_0' \\
&= \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(\alpha-\theta)\mathbf{J}_0' \\
&= \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\theta-\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(\alpha-\theta)\mathbf{J}_0' \\
&= \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta-\alpha)\mathbf{J}_0'
\end{aligned}$$

- $\theta - \alpha$ es el ángulo que forma uno de los semiejes de la elipse con el eje rápido de la lámina!

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina

- Podemos obtener el efecto de la lámina en el sistema h',v':

$$\mathbf{J}_1' = \mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}(\theta - \alpha)\mathbf{J}_0'$$

- Obtener $\mathbf{J}_1'$ es más cómodo, ya que $\theta - \alpha = \pi/4$, por lo tanto:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\pi/4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Luego:

$$\mathbf{J}_1' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ i\sin(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ -i\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

- El resultado es luz elíptica con los semiejes intercambiados (rotados 90º) y el sentido de giro invertido.
- Si nos interesa obtener el estado en el sistema h,v: $\mathbf{J}_1 = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{J}_1'$

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina (bonus track$^+$)

- La matriz para la lámina inclinada en $\theta = \pi/3$ es:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

- Puedo llevar esta matriz al otro sistema de coordenadas aplicando una rotación en -α:

$$\mathbf{L}'_{\lambda/2} = \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta)\mathbf{R}(\alpha)$$

- A su vez, $\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta)$ es $\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}$ rotada un ángulo θ:

$$\mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(-\theta)$$

- Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_{\lambda/2} &= \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{R}(\alpha) \\ &= \mathbf{R}(\theta-\alpha)\mathbf{L}_{\lambda/2,\mathsf{h}}\mathbf{R}(\alpha-\theta) \\ &= \mathbf{L}_{\lambda/2}(\theta-\alpha)! \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Luz elíptica y lámina (bonus track^{++})

- El cálculo en el sistema original h,v es:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.96\cos(\phi) - i0.26\sin(\phi) \\ 0.26\cos(\phi)\sqrt{3} - i0.96\sin(\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.23 + 0.43i] \\ 0.86 + 0.12j \end{bmatrix}$$

Implementación en Python

```
import numpy as np

# rotation matrix
def rot(x=0):
    return np.array( ((np.cos(x), -np.sin(x)),
                      (np.sin(x),  np.cos(x))) )

# linear polarizer
def lp(x=0):
    return np.matmul(rot(x),
           np.matmul(np.array( ((1, 0), (0, 0)) ),
                     rot(-x)))

# quarter-wave plate
def qw(x=0):
    return np.matmul(rot(x),
           np.matmul(np.array( ((1, 0), (0, 1j)) ),
                     rot(-x)))

# half-wave plate
def hw(x=0):
    return np.matmul(rot(x),
           np.matmul(np.array( ((1, 0), (0, -1)) ),
                     rot(-x)))
```

Implementación en Python

```
alpha = np.pi/12
theta = np.pi/3
phi   = theta - alpha

J0     = np.array(((2),(1j)), ndmin=2).T
J1     = np.matmul(hw(theta - alpha), J0)

J0_rot = np.matmul(rot(alpha), J0)
J1_rot = np.matmul(hw(theta), J0_rot)
```

Implementación en Python

```
import matplotlib.pyplot as plt

fig, ax = plt.subplots(ncols=2)

phases  = np.linspace(start=0,stop=np.pi*2,num=200)
osc_exp = np.exp(1j*phases)

ax[0].plot(np.real(osc_exp*J0[0]),
           np.real(osc_exp*J0[1]), label='J0')

ax[0].plot(np.real(osc_exp*J1[0]),
           np.real(osc_exp*J1[1]), label='J0')

ax[0].set_ylim((-2,2))

ax[1].plot(np.real(osc_exp*J0_rot[0]),
           np.real(osc_exp*J0_rot[1]), label='J0_rot')

ax[1].plot(np.real(osc_exp*J1_rot[0]),
           np.real(osc_exp*J1_rot[1]), label='J0_rot')
```