

PROPAGACIÓN EN MEDIOS DISPERSIVOS

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

Transformada de Fourier

1. Relación entre ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen

- a) Tome el siguiente pulso con un espectro Gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$\hat{f}(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}}.$$

Calcule $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)]$ y vea que tiene una envolvente Gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0 . Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$ (el paquete Gaussiano es el de mínima incerteza). Ayuda: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi}$.

- b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$\hat{f}(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{i\alpha(k-k_0)}.$$

Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

- c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$\hat{f}(k) = A e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{i\beta(k-k_0)^2}.$$

Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso Gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk ? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

2. Conjugación de la transformada de Fourier

Muestre que si $\phi(t) \in \mathcal{R}$ y $\hat{\phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)]$ es su transformada de Fourier, esta última cumple que $\overline{\hat{\phi}(\omega)} = \hat{\phi}(-\omega)$, es decir, que para obtener su conjugada de la transformada basta con invertir el signo de ω .

Aproveche esto para escribir $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

Propagación en un medio dispersivo

3. Pulso cuadrado en un medio dispersivo

Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2,$$

donde $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ y $\omega'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$. Si en $t = 0$ el pulso se propaga hacia $x < 0$, y se escribe

$$\psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}} e^{ikx} dk + \text{c.c.} \quad .$$

Calcule $\psi(x, t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?