# Oscilador armónico amortiguado y forzado

## Oscilador armónico amortiguado

1. Considere el movimiento de una masa $m$ sujeta a un resorte de constante elástica $K = m\omega_0^2$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa $\Gamma$.
   Demuestre que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cosh\left(|\omega|\, t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{senh}\left(|\omega|\, t\right)}{|\omega|}\right\}$$

   se deduce de las siguientes

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cos\left(\omega t\right) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{sen}\left(\omega t\right)}{\omega}\right\}$$

$$\omega = \pm i\,|\omega|\,,\quad |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

   **Sugerencia**: verifique las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\operatorname{sen}(ix) = i\operatorname{senh}(x)$; luego úselas.

2. Comenzando con la ecuación general dada en el problema anterior para oscilaciones libres subamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución es:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]t\right\}$$

   Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones sobreamortiguadas.

## Oscilador armónico forzado

3. *a*) Escriba la ecuación de movimiento para una masa $m$ sujeta a un resorte de constante elástica $k$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa $\Gamma$, sobre la que se realiza una fuerza dependiente del tiempo $F(t)$.
   *b*) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = C\mathrm{e}^{-t/2\tau}\cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de $\tau$ y de $\omega_1$. ¿De qué depende el valor de $C$ y de $\theta$? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?
   *c*) Considere que $F(t)$ tiene la forma $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ (discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma) y proponga la siguiente solución particular: $x_p(t) = A\operatorname{sen}(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$. Obtenga $A$ y $B$. Grafique cualitativamente $A$ y $B$ en función de $\omega$.
   *d*) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.
   *e*) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.
   *f*) Verifique que si $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es $F_1(t)$ y $x_2(t)$ lo es cuando la fuerza externa es $F_2(t)$, entonces $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.
   *g*) Proponga ahora como solución particular la solución compleja $x_p(t) = A\mathrm{e}^{-i\omega t}$ y demuestre que $\mathrm{Re}(A) = A_{\text{elástico}}$ y que $\mathrm{Im}(A) = A_{\text{absorbente}}$. ¿Por qué es así?

4. Sea un oscilador armónico con una frecuencia de oscilación $\nu_0 = 10\,\mathrm{Hz}$ y con un tiempo de decaimiento muy largo. Si este oscilador es alimentado con una fuerza armónicamente oscilante y con una frecuencia de $10\,\mathrm{Hz}$, adquirirá una gran amplitud, es decir, "resonará" en la frecuencia de excitación. Ninguna otra fuerza motriz oscilante en forma armónica producirá una gran amplitud (una resonancia).

*a*) Justifique el enunciado anterior.

*b*) Luego suponga que el oscilador está sujeto a una fuerza que es una pulsación cuadrada repetida periódicamente y cuya duración es 0,01 s repetida una vez por segundo.

*c*) ¿"Resonará" el oscilador armónico (adquirirá una gran amplitud) bajo la influencia de esta fuerza motriz?

*d*) Suponga que la fuerza motriz es la misma pulsación cuadrada (de ancho 0,01 s) pero repetida dos veces por segundo. ¿Resonará el oscilador? Responder a la misma pregunta para velocidades de repetición de 3 s a 9 s.