# redN»1GdL

April 15, 2021

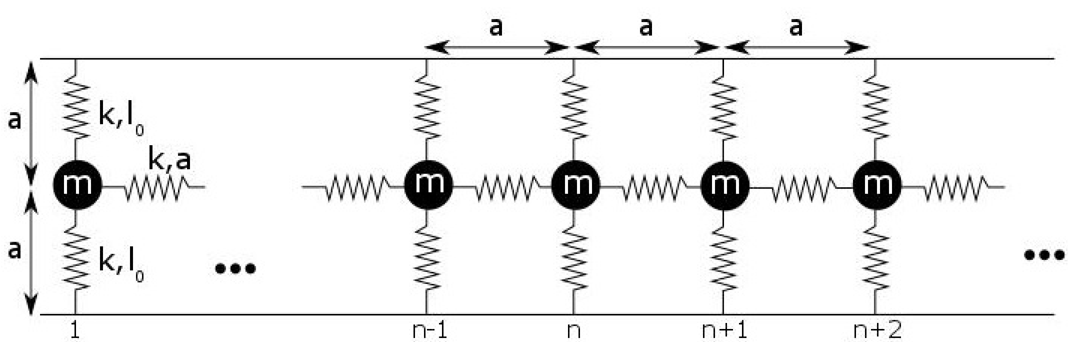
# 1 Red con $N \gg 1$ grados de libertad



---

## 1.1 Enunciado

$N$ partículas de masa $m$ están equiespaciadas en una distancia $a$. Están sujetas a paredes mediante resortes de coeficiente de dureza $k$ y longitud natural $l_0$. A su vez, en la dirección en que pueden desplazarse, están vinculadas por resortes con el mismo $k$ pero de longitud natural $a > l_0$.




1. Escriba la ecuación de movimiento para la partícula énésima. Indique todas las aproximaciones que realiza. 1. Proponga una solución adecuada y halle la relación de dispersión. ¿Cuál es la frecuencia más baja posible? 1. Imponga las condiciones de contorno apropiadas para el sistema y calcule las frecuencias propias del mismo. Escriba la solución para el movimiento de cada partícula. 1. (*) Particularice para el caso $N = 2$ y compare con el resultado que obtiene resolviendo el problema "matricialmente". Esquematice los modos normales de oscilación.

## 1.2 1. Ecuación de movimiento para partícula $n$

### 1.2.1 Potencial asociado a la partícula $n$

Las longitudes de los resortes son

$l_{\text{superior}} = \sqrt{a^2 + \psi_n^2}$

$l_{\text{inferior}} = \sqrt{a^2 + \psi_n^2}$

$l_{\text{izquierdo}} = a - \Psi_{n-1} + \psi_n$

$l_{\text{derecho}} = a + \psi_{n+1} - \psi_n$

**Resortes verticales y horizontales por separado** Para hacer las cosas más claras escribo el potencial de los resortes dispuestos verticalmente y horizontalmente por separado. Comienzo con los verticales.

$$\mathrm{V}_{\text{resortes verticales}}\left(\psi_n\right) = k\left(-l_0 + \sqrt{a^2 + \psi_n^2}\right)^2$$

Ante un corrimiento **horizontal**, en $\hat{x}$, desde la posición de equilibrio de la masa $n$, $\psi_n$, estos resortes orientados en sentido **vertical** ejercen en $\hat{x}$ una

$$F_{x,\text{resortes verticales}} = -\frac{2k\left(-l_0 + \sqrt{a^2 + \psi_n^2}\right)\psi_n}{\sqrt{a^2 + \psi_n^2}}$$

Si solo existieran estos resortes la dinámica estaría determinada por la 2.a ley de Newton

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{2k\left(-l_0 + \sqrt{a^2 + \psi_n^2}\right)\psi_n}{\sqrt{a^2 + \psi_n^2}}$$

No tengo herramientas analíticas para resolver una ecuación diferencial no lineal (hay $\psi_n^2$ involucrados). Para resolverla la linealizo. Hago esto con un desarrollo en serie en torno a la posición de equilibrio.

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{2k\left(a - l_0\right)\psi_n}{a}$$

Otro tanto debo hacer con los resorten dispuestos **horizontalmente**

$$\mathrm{V}_{\text{resortes horizontales}}\left(\psi_n\right) = \frac{k\left(\left(-\Psi_{n-1} + \psi_n\right)^2 + \left(\psi_{n+1} - \psi_n\right)^2\right)}{2}$$

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{k\left(-2\Psi_{n-1} - 2\psi_{n+1} + 4\psi_n\right)}{2}$$

No hubo necesidad de linealizar nada aquí por lo que la 2.a ley contemplando todos los resortes es

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{k\left(-2\Psi_{n-1} - 2\psi_{n+1} + 4\psi_n\right)}{2} - \frac{2k\left(a - l_0\right)\psi_n}{a}$$

Que puede simplificarse en

$$m\ddot{\psi}_n = k\Psi_{n-1} + k\psi_{n+1} + \left(-4k + \frac{2kl_0}{a}\right)\psi_n$$

**Único potencial** Realmente no hay necesidad de separar por orientación los aportes al potencial. De hecho pienso que además de poder traer confusión es sin duda más laborioso.

Resuelvo ahora partiendo del término del potencial del sistema que atañe a las fuerzas actuando sobre la partícula $n$.

$$V(\Psi_{n-1},\psi_n,\psi_{n+1}) = \frac{k\left(2\left(-l_0+\sqrt{a^2+\psi_n^2}\right)^2+(-\Psi_{n-1}+\psi_n)^2+(\psi_{n+1}-\psi_n)^2\right)}{2}$$

$$m\ddot{\psi}_n = -\frac{k\left(-2\Psi_{n-1}-2\psi_{n+1}+4\psi_n+\frac{4\left(-l_0+\sqrt{a^2+\psi_n^2}\right)\psi_n}{\sqrt{a^2+\psi_n^2}}\right)}{2}$$

$$m\ddot{\psi}_n = \frac{2kl_0\psi_n}{\sqrt{a^2+\psi_n^2}} + k\Psi_{n-1} + k\psi_{n+1} - 4k\psi_n$$

Como discutí previamente, debo linealizar esta 2.a ley de Newton para desplazamientos desde la posición de equilibiro de la masa $n$ en $\hat{x}$.

$$m\ddot{\psi}_n = k\Psi_{n-1} + k\psi_{n+1} + \left(-4k+\frac{2kl_0}{a}\right)\psi_n$$

Obteniendo idéntico resultado.

## 1.3 2. Relación de dispersión

### 1.3.1 Propuesta de solución

Podemos probar con una solución como la del enunciado del problema anterior donde la parte espacial

$$A_n^{(p)} = A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)}+ak^{(p)}n\right)$$

está modulada por otra dependiente del tiempo para dar una expresión

$$\psi_n^{(p)} = A_n^{(p)}\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)$$

$$\psi_n^{(p)} = A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)}+ak^{(p)}n\right)\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)$$

### 1.3.2 Reemplazando en la 2.a ley de Newton

En la 2.a ley reemplazo las expresiones para $\psi_n^{(p)}, \psi_{n-1}^{(p)}$ y $\psi_{n+1}^{(p)}$

$$m\left(-A_n^{(p)}\left(\omega^{(p)}\right)^2\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)\right) = -4A_n^{(p)}k\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right) + \frac{2A_n^{(p)}kl_0\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)}{a} + A_{n+1}^{(p)}k\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right) + A_{n-1}^{(p)}k\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)$$

En esta expresión hago la sustitución

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\left(1-\frac{l_0}{a}\right)$$

$$\left(-A_n^{(p)}\left(\omega^{(p)}\right)^2\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)\right) = -4A_n^{(p)}\omega_0^2\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right) + \frac{2A_n^{(p)}\omega_0^2l_0\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)}{a} + A_{n+1}^{(p)}\omega_0^2\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right) + A_{n-1}^{(p)}\omega_0^2\cos\left(\omega^{(p)}t+\phi^{(p)}\right)$$

y quito de ambos lados de la igualdad la dependencia temporal

$\cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$

llegando así a esta expresión

$$-A_n^{(p)}\left(\omega^{(p)}\right)^2 = A_n^{(p)}\left(-4\omega_0^2 + \frac{2\omega_0^2 l_0}{a}\right) + A_{n+1}^{(p)}\omega_0^2 + A_{n-1}^{(p)}\omega_0^2$$

De aquí puede despejarse una **relación recursiva de amplitudes**

$$A_n^{(p)} = -\frac{\omega_0^2 a\left(A_{n+1}^{(p)} + A_{n-1}^{(p)}\right)}{\left(\omega^{(p)}\right)^2 a - 4\omega_0^2 a + 2\omega_0^2 l_0}$$

$$\frac{A_{n+1}^{(p)} + A_{n-1}^{(p)}}{A_n^{(p)}} = -\frac{\left(\omega^{(p)}\right)^2}{\omega_0^2} + 4 - \frac{2l_0}{a}$$

A la derecha de la igualdad en un cada modo $p$ las $\omega$ son constantes sin dependencia con $n$. Por tanto la relación de amplitudes a la izquierda se cumple en las $N$ partículas. Con tres parámetros, $\omega^{(p)}$ y dos $A^{(p)}$ de partículas adyacentes, se pueden obtener las $A^{(p)}$ de todas las demás.

Volvemos a expresar la función de las $A_n^{(p)}$

$$A_n^{(p)} = A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}n\right)$$

reemplazando en las tres expresiones con el $n$ correspondiente

$$\frac{A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}(n-1)\right) + A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}(n+1)\right)}{A^{(p)}\cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}n\right)} = -\frac{\left(\omega^{(p)}\right)^2}{\omega_0^2} + 4 - \frac{2l_0}{a}$$

Usando en el numerador la identidad trigonométrica

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

con el argumento $b = k^{(p)}a$ se obtiene

$$2\cos\left(ak^{(p)}\right) = -\frac{\left(\omega^{(p)}\right)^2}{\omega_0^2} + 4 - \frac{2l_0}{a}$$

Despejo $\left(\omega^{(p)}\right)^2$

$$\left(\omega^{(p)}\right)^2 = \frac{2\omega_0^2\left(a\left(2 - \cos\left(ak^{(p)}\right)\right) - l_0\right)}{a}$$

Que con la identidad trigonométrica

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

puede re-escribirse como

$$\left(\omega^{(p)}\right)^2 = \frac{2\omega_0^2\left(a\left(2\sin^2\left(\frac{ak^{(p)}}{2}\right) + 1\right) - l_0\right)}{a}$$

$$\left(\omega^{(p)}\right)^2 = \omega_0^2\left(4\sin^2\left(\frac{ak^{(p)}}{2}\right) + 2 - \frac{2l_0}{a}\right)$$

$$\omega^{(p)} = \omega_0 \sqrt{4\sin^2\left(\frac{ak^{(p)}}{2}\right) + 2 - \frac{2l_0}{a}}$$

Para responnder cuál es la frecuencia más baja posible habría que obtener una expresión para el número de onda $k^{(p)}$. Pero uno podría ser astuto y recordar que el modo de frecuencia más baja es aquel en que todas las partículas del sistema se mueven al unisono, es decir con un $\lambda \to \infty$ o lo que es lo mismo un $k^{(p)} = 0$. En tal caso la frecuencia más baja posible es

$$\omega^{(p)} = \omega_0 \sqrt{2 - \frac{2l_0}{a}}$$

Que obviamente no es nula como en un sistema completamente libre pues los resortes verticales mantienen aferradas a todas las $N$ partículas oscilando al unisono en este modo.

## 1.4 3. Determinando $k^{(p)}$ con condiciones de contorno

Si tal solución propuesta debe ser válida para toda $1 \leq n \leq N$ estoy forzado a imaginar que desde $n = 1$ se extiende a izquierda un resorte a $n = 0$ y a derecha de $n = N$ uno hasta $N = n + 1$.

Pero si mantengo $\psi_{n=0} = 0$ como en el problema anterior, en que pensaba que $n = 0$ estaba fija a una pared, la fuerza del resorte que la enlaza con la $n = 1$ no respondería al dibujo del actual sistema.

La solución pasa por establecer que $\psi_{n=0} = \psi_{n=1}$. Y lo mismo para $\psi_{n=N} = \psi_{n=N+1}$. Esto es lo que posibilitaría imaginar que estos extremos son "libres" pero manteniendo la validez de la solución propuesta para toda $1 \leq n \leq N$.

Analizo solo la parte espacial de la solución

$$A_n^{(p)} = A^{(p)} \cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}n\right)$$

### 1.4.1 Condición sobre $n = 1$

$$A^{(p)} \cos\left(\alpha^{(p)}\right) = A^{(p)} \cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}\right)$$

¿Cuando los cosenos de estos argumentos son iguales sin necesariamente ser los argumentos iguales? El coseno tiene simetría en el eje de las abcisas $\implies cos(x) = \cos(2\pi - x)$

$$\begin{aligned} \alpha^{(p)} &= 2\pi - \alpha^{(p)} - ak^{(p)} + q2\pi \qquad (q \in \mathbb{Z}) \\ 2\alpha^{(p)} &= -ak^{(p)} + (q-1)2\pi, \end{aligned}$$

donde agregamos la posibilidad de sumar o restar $q2\pi$ a un argumento.

### 1.4.2 Condición sobre $n = N$

En la derecha haremos lo mismo con la misma identidad.

$$A^{(p)} \cos\left(Nak^{(p)} + \alpha^{(p)}\right) = A^{(p)} \cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}\left(N+1\right)\right)$$

$$\begin{aligned} Nak^{(p)} + \alpha^{(p)} &= 2\pi - \alpha^{(p)} - Nak^{(p)} - ak^{(p)} + r2\pi \qquad (r \in \mathbb{Z}) \\ 2Nak^{(p)} + 2\alpha^{(p)} &= -ak^{(p)} + (r+1)2\pi \end{aligned}$$

Si se reemplaza $2\alpha^{(p)}$ por lo obtenido en la relación anterior

$$\begin{aligned} 2Nak^{(p)} + \left(-ak^{(p)} + (q-1)2\pi\right) &= -ak^{(p)} + (r-1)2\pi \\ 2Nak^{(p)} &= (r-q+2)2\pi \qquad , \\ 2Nak^{(p)} &= p2\pi \qquad (0 \leq p < N) \end{aligned}$$

aquí $p < N$ porque si fuera $p = N$ se está repitiendo un valor de $k^{(p)}$.

Un sistema con ambos extremos libres puede desplazarse a velocidad constante sin oscilar. A tal modo normal se le asocia una $\omega^{(p)} = 0$ con $p = 0$. A diferencia del caso con algún extremo fijo aquí $0 \leq p < N$, para dar cuenta que habiendo $N$ grados de libertad, este es el número de posibles modos normales.
$k^{(p)} = \dfrac{\pi p}{Na}$

### 1.4.3 Frecuencias propias del sistema

Ahora con la expresión de \(k^{(p)}\) puedo escribir la expresión de la frecuencia

$\omega^{(p)} = \omega_0 \sqrt{4\sin^2\left(\dfrac{\pi p}{2N}\right) + 2 - \dfrac{2l_0}{a}}$

### 1.4.4 Solución para el movimiento de cada partícula

En

$\psi_n^{(p)} = A^{(p)} \cos\left(\alpha^{(p)} + ak^{(p)}n\right) \cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$

falta determinar $\alpha^{(p)}, A^{(p)}, \phi^{(p)}$. Los dos últimos se obtienen de condiciones iniciales del sistema, pero $\alpha^{(p)}$ se determina de las condiciones de contorno.

De la condición sobre $n = 1$ teníamos

$$\begin{aligned} 2\alpha^{(p)} &= -ak^{(p)} + (q-1)2\pi \\ \alpha^{(p)} &= -\frac{ak^{(p)}}{2} + (q-1)\pi, \end{aligned}$$

podemos elegir el $\alpha^{(p)}$ para $q - 1 = 0$

$\alpha^{(p)} = -\dfrac{\pi p}{2N}$

Entonces se arriba a que en cada modo $p$ la oscilación longitudinal al sistema de la partícula $n$ es

$$\psi_n^{(p)} = A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi p\left(n - \frac{1}{2}\right)}{N}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0 t \sqrt{-a\cos\left(\frac{\pi p}{N}\right) + 2a - l_0}}{\sqrt{a}} + \phi^{(p)}\right)$$

No hay que olvidar que su movimiento será dado por el conjunto de los modos normales

$$\sum_{p=0}^{N-1} \psi_n^{(p)} = \sum_{p=0}^{N-1} A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi p\left(n - \frac{1}{2}\right)}{N}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0 t \sqrt{-a\cos\left(\frac{\pi p}{N}\right) + 2a - l_0}}{\sqrt{a}} + \phi^{(p)}\right)$$

## 1.5 4. Particularizando para $N = 2$

Con $N = 2$ en este caso son posibles $p = 0, 1$

$$\sum_{p=0}^{1} \psi_n^{(p)} = \sum_{p=0}^{1} A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi p \left(n - \frac{1}{2}\right)}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0 t \sqrt{-a\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right) + 2a - l_0}}{\sqrt{a}} + \phi^{(p)}\right)$$

$$\sum_{p=0}^{1} \psi_n^{(p)} = A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{N}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0 t \sqrt{-a\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + 2a - l_0}}{\sqrt{a}} + \phi^{(p)}\right) + A^{(p)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\omega_0 t \sqrt{a - l_0}}{\sqrt{a}} + \phi^{(p)}\right)$$

Para el análisis de como son los modos normales con los $A_n^{(p)}$ puede formarse el vector de amplitudes $\vec{A}^{(p)}$.

$$A_n^{(p)} = A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi p \left(n - \frac{1}{2}\right)}{N}\right)$$

$$\vec{A}^{(p)} = \begin{bmatrix} A^{(p)} \cos\left(\frac{\pi p}{4}\right) \\ A^{(p)} \cos\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \end{bmatrix}$$

Si de este extraemos $A^{(p)}$ tendremos los autovectores $\vec{\xi}^{(p)}$, que podemos comparar con los que conocemos del análisis matricial.

$$\vec{\xi}^{(p)} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi p}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi p}{4}\right) \end{bmatrix}$$

Para el modo $p = 0$ esperamos que todos tengan el mismo desplazamiento.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el modo $p = 1$, el de menor frecuencia (energía), las partículas debieran desplazarse en contrafase.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$