## Pulsos y espectros cuadrados

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## 1. Espectro cuadrado

 $\psi(\omega)$  es un espectro cuadrado, esto es, presenta un valor constante,  $\frac{1}{\Delta\omega}$ , en un intervalo de frecuencias  $\Delta\omega$  centrado en un  $\omega_0$  y éste es nulo para cualquier otra  $\omega$ .

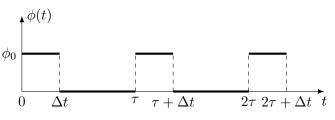
a) Verifique que el correspondiente  $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\psi(\omega)$  está dado por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \right] e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i\omega_0 t}.$$

- b) Grafique  $\psi(\omega)$  y  $|\phi(t)|$ .
- c) Sea T un intervalo de tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T\ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que T,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase casi constantes.

## 2. Tren de pulsos cuadrados

- a) Muestre que  $\mathcal{F}$  es lineal, por tanto  $\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)]$ , donde a, b son constantes.
- b)  $\phi(t)$  es una serie de pulsos cuadrados de duración  $\Delta t$  que se repiten N veces con un período  $\tau$  ( $\Delta t < \tau$ ). Si f(n,t) describe la función en cualquiera de los intervalos  $[n\tau,(n+1)\tau]$  que contiene estos pulsos de amplitud no nula  $\phi_0$  en  $[n\tau,n\tau+\Delta t]$  de forma que  $\phi(t)=\sum_{n=0}^N f(n,t)$ , compruebe que

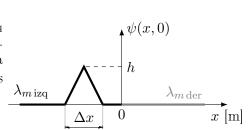


$$\mathcal{F}\left[\phi(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{N} f(n,t)\right] = \sum_{n=0}^{N} e^{-in\omega\tau} \mathcal{F}\left[f(0,t)\right].$$

- c) Resuelva  $\mathcal{F}[f(0,t)]$  para obtener la expresión completa de  $\psi(\nu)=\mathcal{F}[\phi(t)]$ .
- d) El rasgo más prominente de  $\psi(\nu)$  son picos en  $\nu_p = p\nu_1$   $(p \in \mathbb{N})$  donde  $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$ , es decir, una serie de armónicos de  $\nu_1$ . Encuentre en la expresión de  $\psi(\nu)$  el término que depende de  $\tau$  responsable de este comportamiento y verifique  $\nu_p$ .
- e) De similar análisis identifique qué término con dependencia en  $\Delta t$  hace que los armónicos más importantes se detecten en  $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$ .
- f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es  $\delta \nu = \frac{2}{(N+1)\tau}$ , y calcule cuánto más pequeño es que el  $\Delta \nu$  entre sucesivos  $\nu_p$ .

## 3. Interfaz entre medios no dispersivos

Dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa,  $\lambda_{m \, \text{izq}}$  y  $\lambda_{m \, \text{der}}$ , están unidas en un punto y sometidas a una tensión  $T_0$ . Sobre la primera se propaga hacia la derecha el pulso que muestra la figura. Se conocen  $\lambda_{m \, \text{izq}}$ ,  $\lambda_{m \, \text{der}}$ ,  $T_0$ ,  $\Delta x \, y \, h$ , y se considera que los medios son no dispersivos.



- a) Hallar el desplazamiento  $\psi(x,t)$ .
- b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el medio es dispersivo.