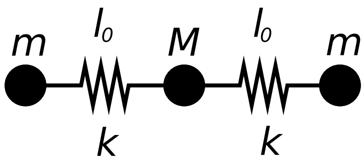
Sistemas de múltiples grados de libertad

Los ejercicios con (*) son opcionales.

Modos normales de oscilación

1. **Molécula triatómica** Se esquematiza en la figura una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0. Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales, supondremos que las masas se encuentran dentro de una canaleta que impide todo tipo de movimiento en la dirección transversal.



   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.

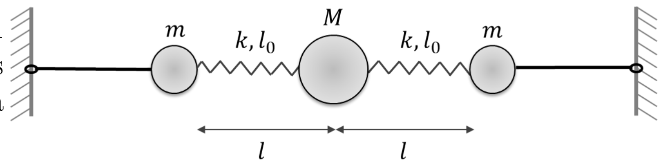
   b) Halle las frecuencias de los modos normales.

   c) Dibuje las configuraciones de cada modo.

   d) Si el centro de masa de la molécula se mueve con $v_o = cte$, halle la solución para $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$ y $\psi_c(t)$.

   e) Determine las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

2. Analice las oscilaciones transversales del problema anterior. Para su mejor comprensión puede imaginarlo como el esquema de la figura, en el cual las masas de los extremos pueden subir/bajar pero solidarios a la barra enhebrada a los vástagos laterales.



   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas. ¿Qué diferencias hay entre la ecuación de movimiento para resortes *slinky* y resortes con $l_0 \neq 0$ en la aprox. de pequeñas oscilaciones?

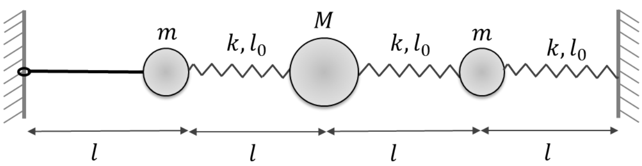
   b) Halle las frecuencias de los modos normales.

   c) Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal. Determine los desplazamientos de cada masa como función del tiempo (solución más general posible para cada masa).

   d) ¿Qué condiciones iniciales que permiten excitar sólo el segundo modo?

   e) Si se fuerza la masa del centro con frecuencias incrementalmente mayores, ¿qué modos se van observando?

   f) ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared como se indica en la figura a continuación?.



Sistemas forzados

3. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema **??**, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.

   b) Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.

   c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.

d) Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}+\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2-\Omega^2}-\frac{1}{\omega_2^2-\Omega^2}\right]$$
$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\Omega^2}$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

e) (*) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.

4. Considere el sistema del problema **??**, pero en este caso en considere las oscilaciones longitudinales.

   a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante del tipo $f(t) = f_0\ cos(\Omega t)$ ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?

   b) (*) Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad

   c) (*) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema