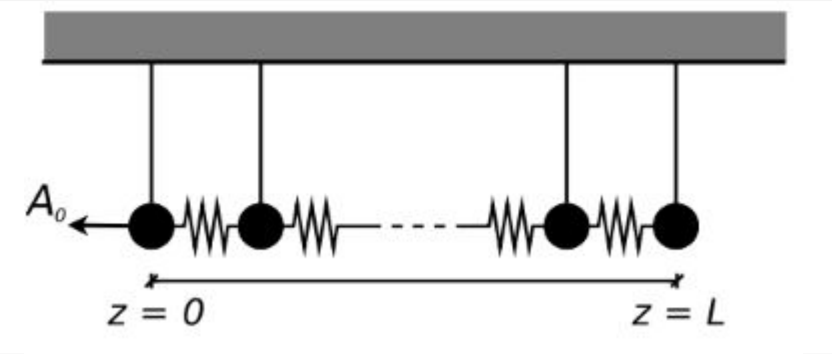
# Sistemas discretos forzados




Segunda ley de Newton + condiciones de contorno (sistema libre):

$$\begin{cases} m_n \ddot{\psi}_n = -(2k + m_n g/l)\psi_n + k(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) \\ \left.\begin{array}{l} \psi_0 = \psi_1 \\ \psi_N = \psi_{N+1} \end{array}\right\} \text{Extremos libres} \end{cases}$$

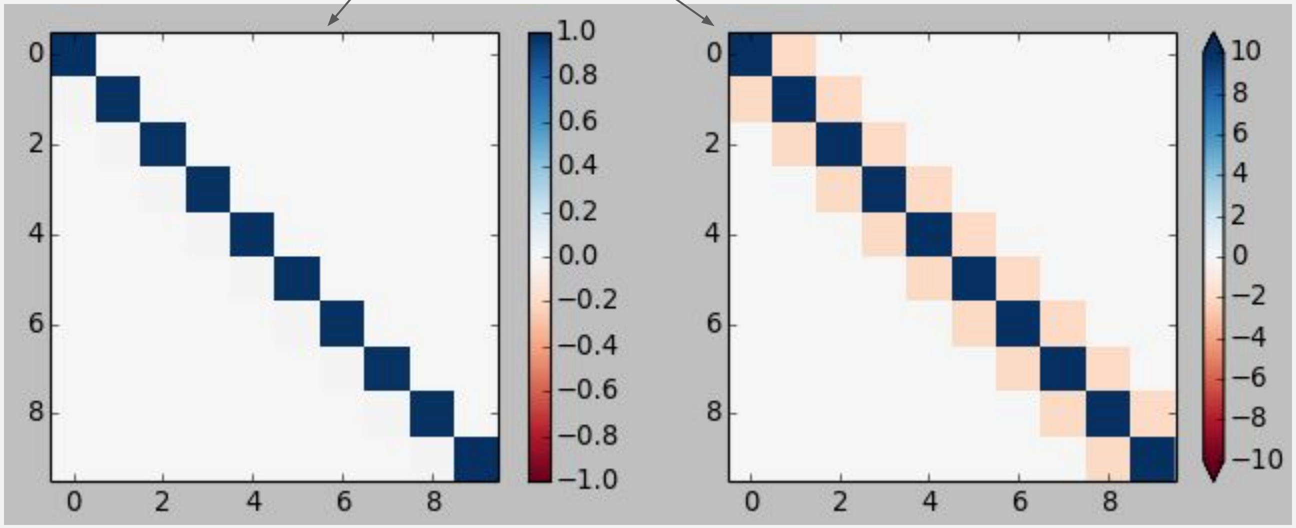
Forzante:

$$\psi_1(t) = A_0 \cos(\Omega t)$$

Tenemos dos estrategias para resolver este tipo de problemas

# Estrategia 1: matrices, autovalores y autovectores

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{\Psi}} = -\mathbf{K}\vec{\Psi} + \vec{\mathbf{F}}_0 \cos(\Omega t)$$




Resolvemos el sistema libre y obtenemos la matriz de autovectores.

Luego resolvemos el sistema forzado usando la diagonalización.

(Notar que el forzante se define por su frecuencia pero también por el vector F0 que nos dice cuáles masas son forzadas)

Resolución del forzado:

$$\ddot{\vec{\Psi}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\vec{\Psi} = \mathbf{M}^{-1}\vec{\mathbf{F}}_0\cos(\Omega t)$$

$$\mathbf{A}^{-1}\ddot{\vec{\Psi}} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\vec{\Psi} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{a}}_0\cos(\Omega t)$$

Matriz de autovectores columna invertida

Matriz del sistema libre

Aceleración externa

La matriz de autovectores columna $\mathbf{A}$ permite:

- Transformar de coordenadas de masas a coordenadas normales

$$\mathbf{A}^{-1}\vec{\Psi} = \vec{\chi}$$

- Diagonalizar a la matriz $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

← Matriz diagonal con las frecuencias de modos normales (al cuadrado)

Las coordenadas de modos están desacopladas:

$$\begin{cases} \ddot{\chi}_1 + \omega_1^2 \chi_1 = f_1 \cos(\Omega t) \\ \ddot{\chi}_2 + \omega_2^2 \chi_2 = f_2 \cos(\Omega t) \\ \vdots \\ \ddot{\chi}_N + \omega_N^2 \chi_N = f_N \cos(\Omega t) \end{cases}$$

Cada coordenada modal cumple un movimiento armónico simple con frecuencia característica, forzado a frecuencia $\Omega$

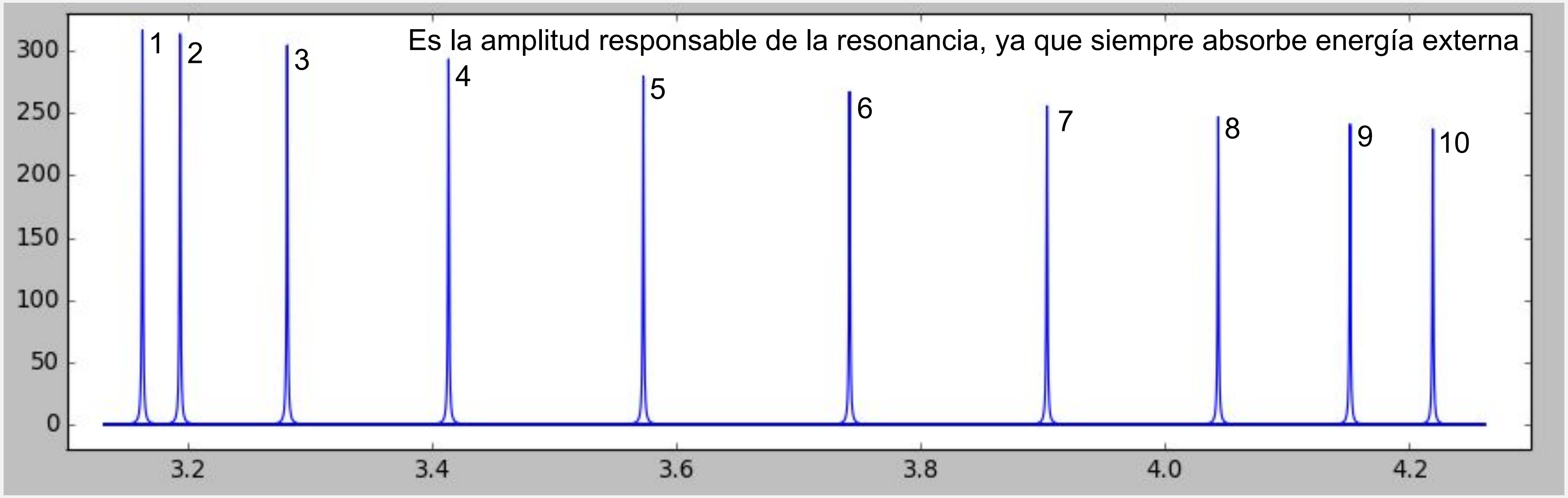
La solución estacionaria ya la conocemos:

$$\begin{cases} \chi_n(t) = A_n^{\text{elas}}(\Omega)\cos(\Omega t) + A_n^{\text{abs}}(\Omega)\sin(\Omega t) \\ A_n^{\text{elas}}(\Omega) = \dfrac{(\omega_n^2 - \Omega^2) f_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \quad \text{(En fase)} \\ A_n^{\text{abs}}(\Omega) = \dfrac{\gamma\Omega f_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2} \quad \text{(En cuadratura)} \end{cases}$$

Recuperamos las coordenadas de masas:

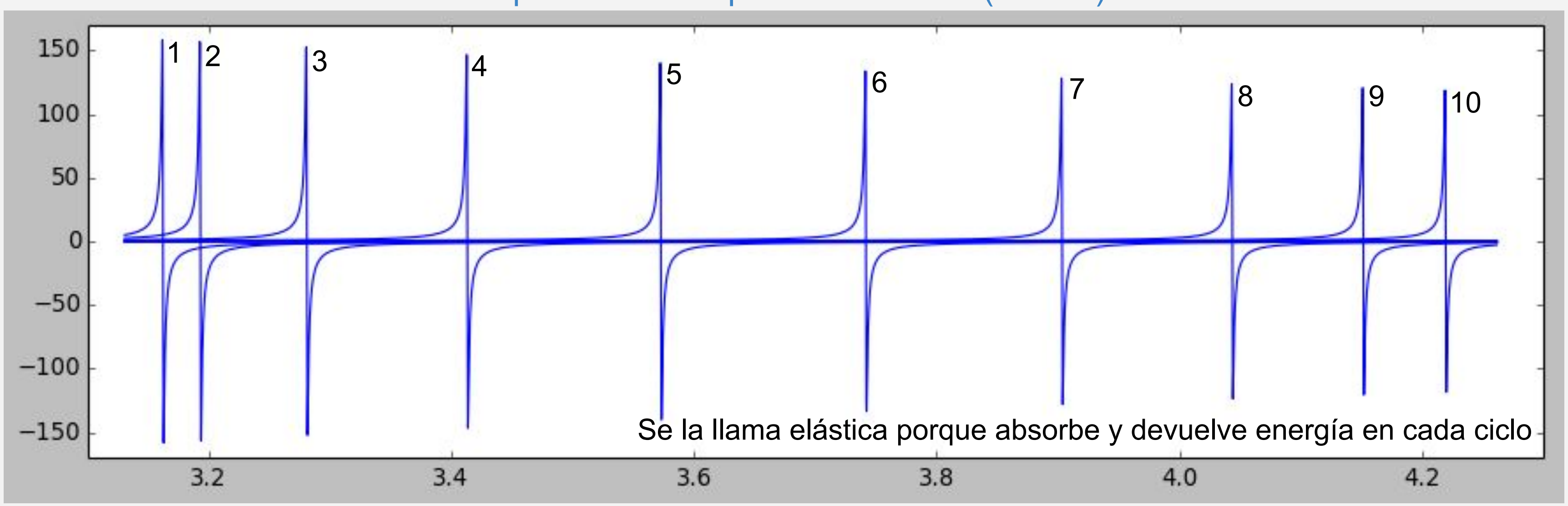
$$\vec{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{A}\vec{\chi}$$

Amplitud absorbente para cada modo (N = 10)




Frecuencia angular del forzante

Amplitud elástica para cada modo (N = 10)




Frecuencia angular del forzante

## Estrategia 1: matrices, autovalores y autovectores

La respuesta del sistema es la superposición de la respuesta de todos los modos normales excitados, transformada en coordenadas de masas.

- Si la frecuencia externa es cercana a una resonancia, el sistema oscilará con una forma similar a la del modo normal correspondiente, ya que en ese caso ese modo absorbe la mayor parte de la energía.
- Si no lo es, la forma de la oscilación será la superposición de los modos que reciben más energía.
- Requisito necesario para poder excitar un determinado modo: que exista proyección del vector F0 sobre el autovector correspondiente.
- En todos los casos el sistema oscila a la frecuencia externa.

Dificultad: Si la frecuencia está muy por encima o muy por debajo de las frecuencias modales, no es sencillo determinar la forma espacial de la oscilación.

# Estrategia 2: propuesta de solución en la ec. diferencial

$$\begin{cases} m_n\ddot{\psi}_n = -(2k + m_n g/l)\psi_n + k(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) \\ \psi_0 = \psi_1 \\ \psi_N = \psi_{N+1} \end{cases}$$

a es la separación entre masas

Proponer solución $\psi_n(t) = A\cos(kan + \phi)\cos(\omega t + \theta)$

Permite hallar la relación entre omega y k (relación de dispersión)

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Las condiciones de contorno permiten hallar los nro de onda permitidos

$$k_p = \frac{(p-1)\pi}{aN}$$

p = 1, 2, …, N
(p = 1: modo con k = 0)

Solución libre para el modo p, para la masa n en tiempo t:

$$\psi_n^p(t) = A_p\cos(k_p a(n - 1/2))\cos(\omega_p t + \theta_p)$$

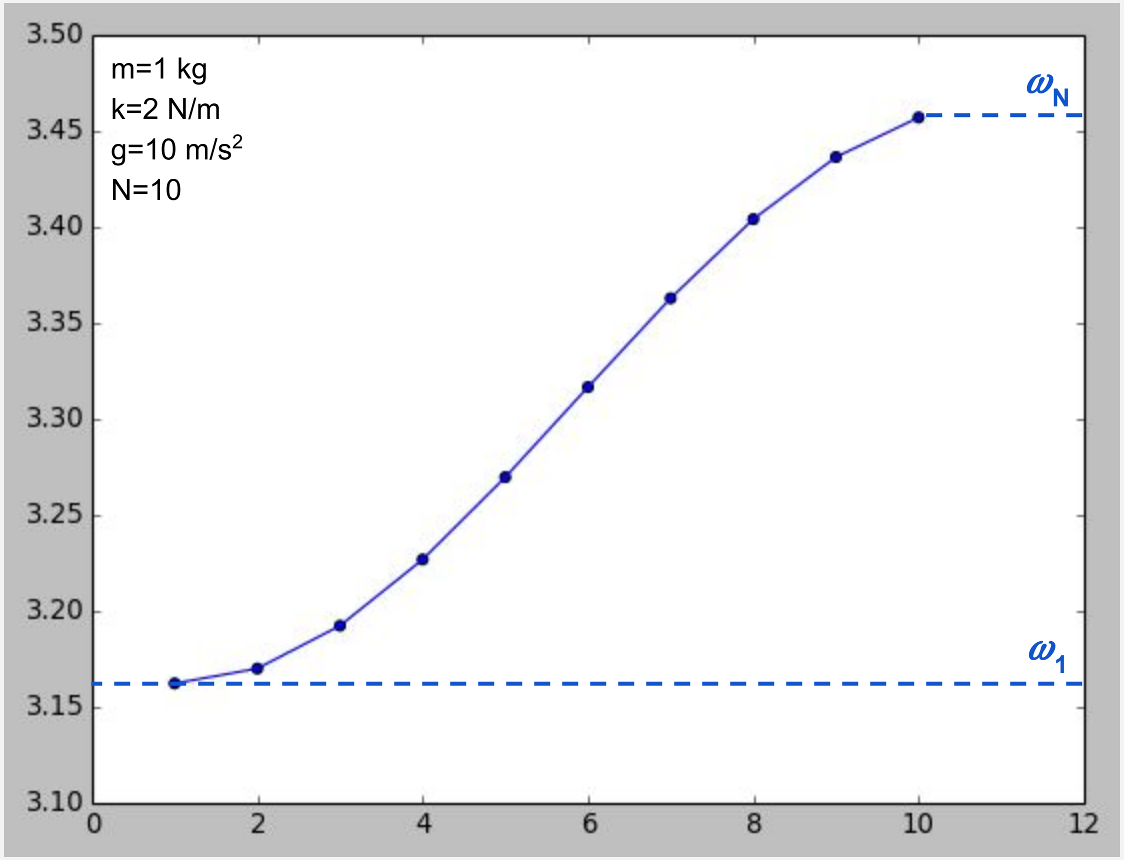
Solución completa:

$$\psi_n(t) = \sum_{p=1}^{N} A_p\cos(k_p a(n - 1/2))\cos(\omega_p t + \theta_p)$$

## Relación de dispersión

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{p-1}{2N}\pi\right)}$$

Frec. del modo



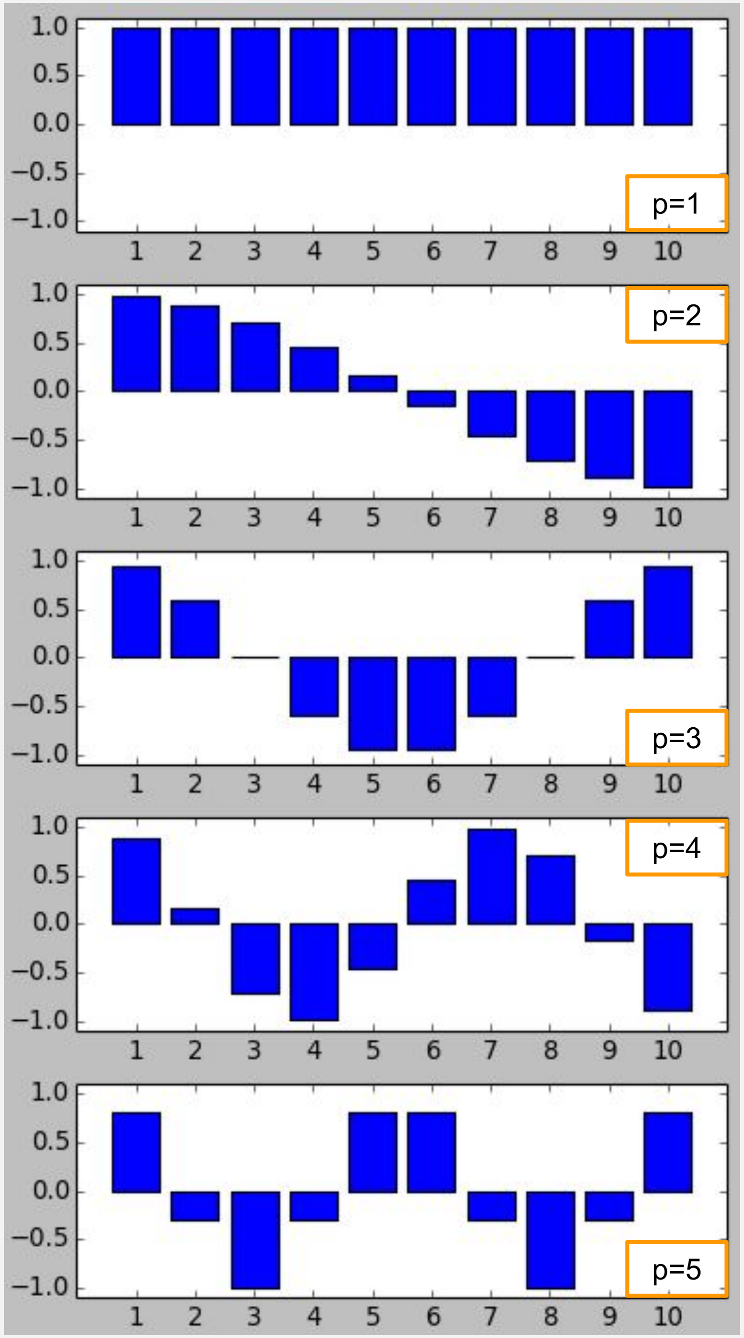

<- Modo zig-zag

<- Modo péndulo

Nro de modo (p)

# Modos normales

$$A_n^p = \cos\left(\frac{p\pi}{N}(n-1/2)\right)$$




Nro de modo (p)

Nro de masa (n)

# ¿Cómo deduje la expresión?

Nro. de onda para extremos libres

$$k_p = \frac{(p-1)\pi}{aN}$$

Relación de dispersión para péndulos acoplados

$$\omega^2(k) = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

**Relación de dispersión discretizada en función del número de modo *p***

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{p-1}{2N}\pi\right)}$$

## ¿Cómo deduje la expresión?

$$k_p = \frac{(p-1)\pi}{aN}$$

Nro. de onda para extremos libres

$$\phi = -\frac{ka}{2} + m\pi$$

Fase espacial para extremos libres

Propuesta de solución

$$\psi_n(t) = A\cos(kan + \phi)\cos(\omega t + \theta)$$

**Amplitud para la masa n en el modo p**

$$A_n^p = \cos\left(\frac{p\pi}{N}(n - 1/2)\right)$$

¿Qué pasa cuando forzamos con una frecuencia fuera del rango definido por la relación de dispersión?

Proponemos otra solución:

Perfil exponencial en el espacio

$$\psi_n(t) = A \underbrace{\exp(\pm kan)} \cos(\omega t + \theta)$$

Ondas exponenciales

Hallamos una nueva relación de dispersión:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}(1 - \cosh(ka))$$

Notar que k tiene un significado diferente en las ondas exponenciales:

- No es un número de onda
- Es un coeficiente de crecimiento o decaimiento exponencial
- OJO, tiene las mismas unidades, pero tener las mismas unidades no significa que sea la misma cosa!!

¿Qué pasa cuando forzamos con una frecuencia fuera del rango definido por la relación de dispersión?

Proponemos otra solución:

$$\psi_n(t) = A\underbrace{(-1)^n}^{\text{Signo alternante}} \exp(\pm kan)\cos(\omega t + \theta)$$

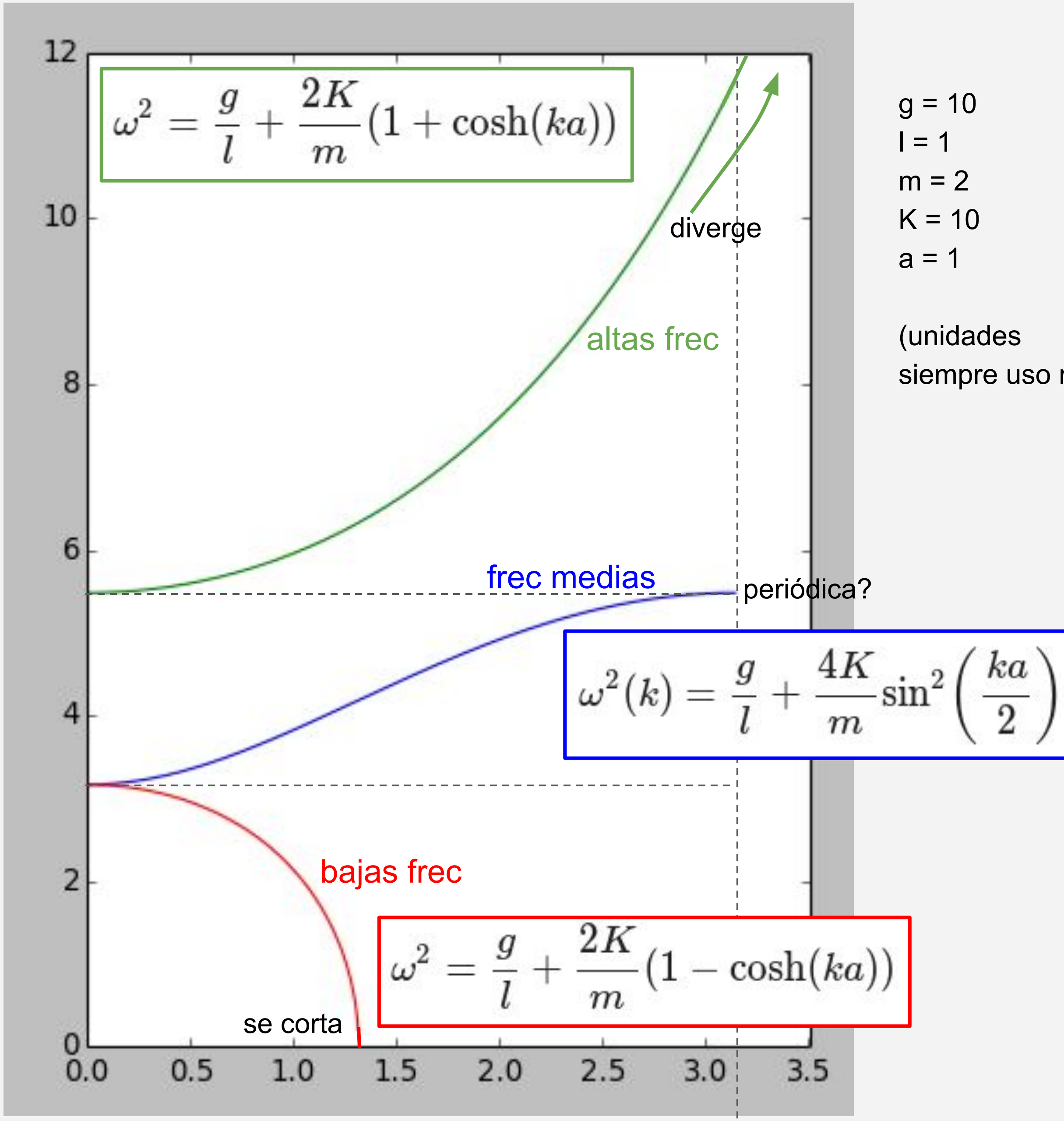
Ondas exponenciales zig-zag

Hallamos una nueva relación de dispersión:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}(1 + \cosh(ka))$$

Igual que en el caso anterior, k no es un número de onda.

*Estas funciones no corresponden a modos normales pero son soluciones de la ecuación diferencial en el régimen forzado* omega




k*a

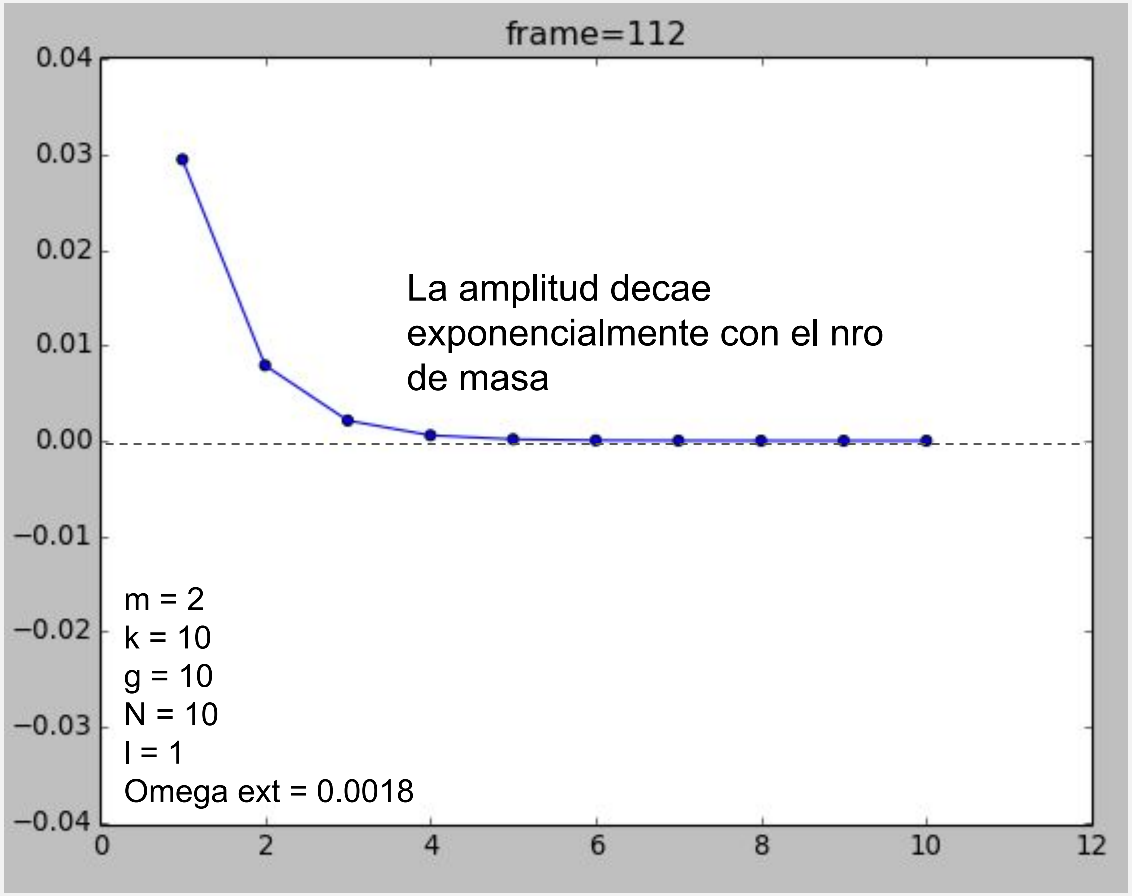
pi

g = 10
l = 1
m = 2
K = 10
a = 1

(unidades
siempre uso mks)

Suele usarse la letra kappa en vez de k para ondas exponenciales, elegí k para poder armar un gráfico único de todo

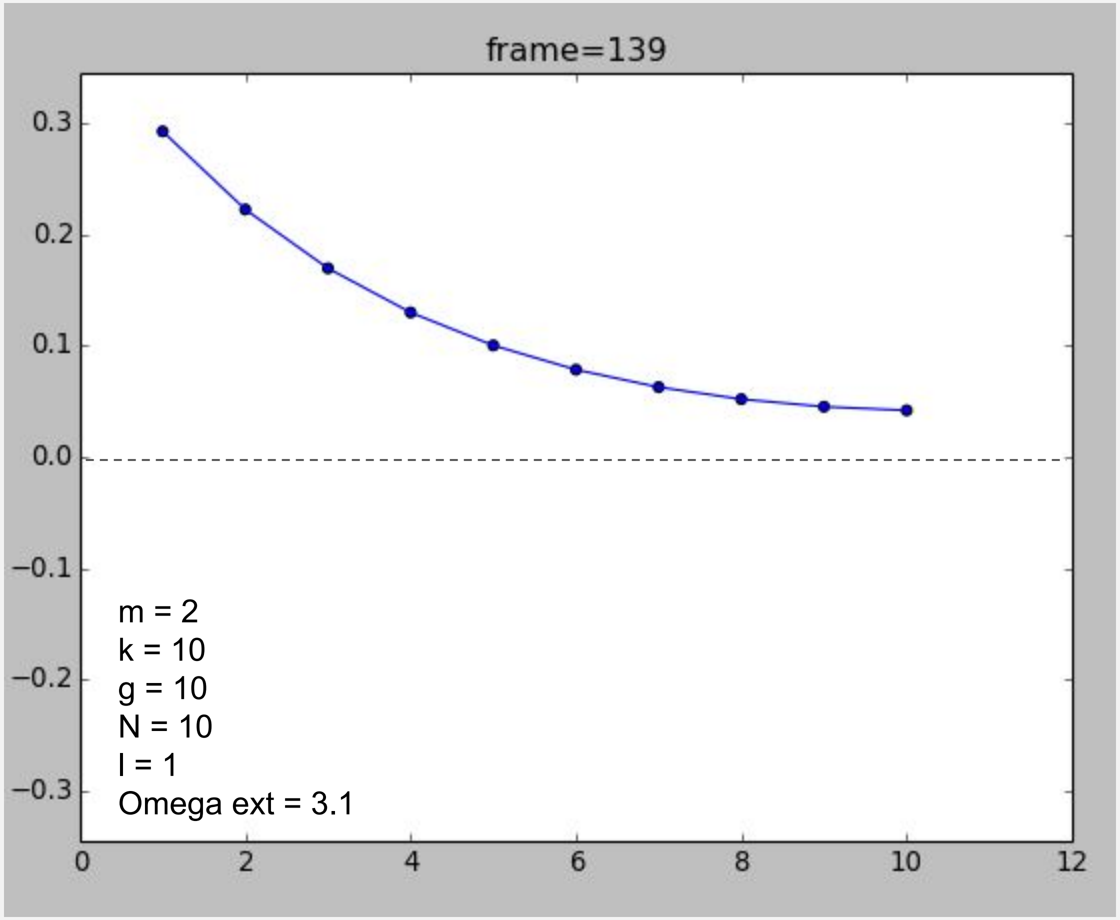
## Oscilaciones exponenciales de baja frecuencia




Psi

Nro de masa

## A medida que aumenta la frecuencia, la tasa de decaimiento disminuye



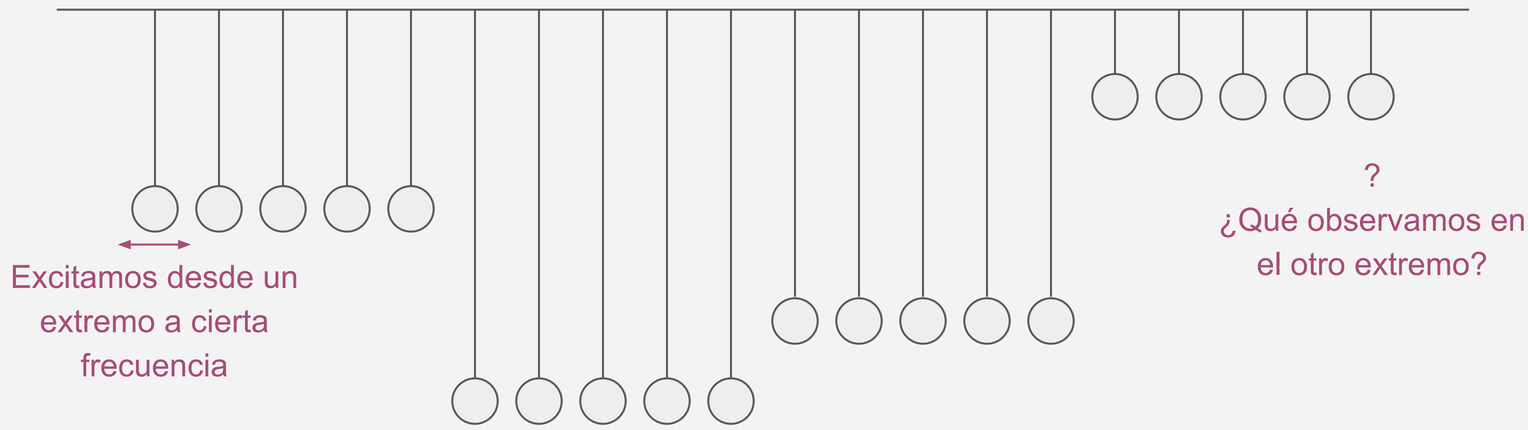

Psi

Nro de masa

Al entrar en el rango dispersivo, comenzamos a ver los modos normales

Al superar la frecuencia del último modo normal, volvemos a ver ondas exponenciales (pero ahora son zig-zag)

## ¿Qué ocurre si tenemos una cadena de péndulos con regiones de distintos l's?

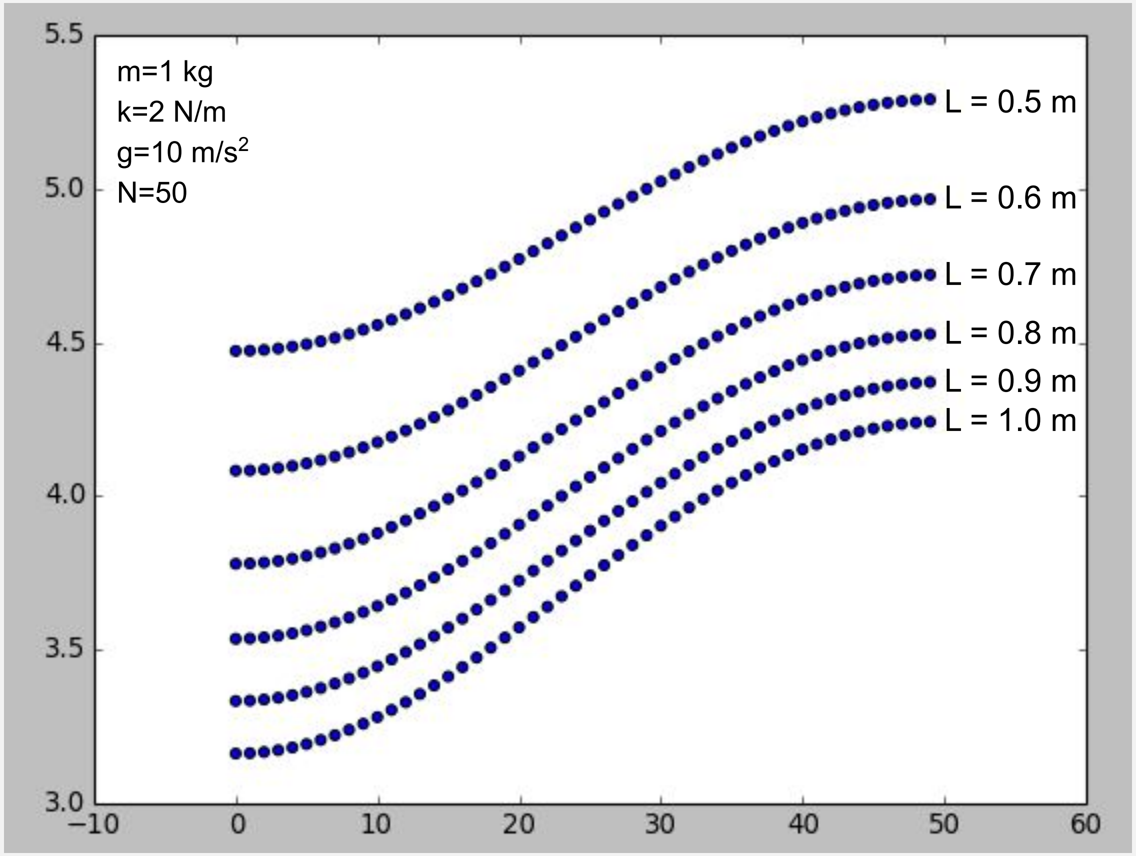



La clave es pensar si la frecuencia de excitación es compatible con las frecuencias de los modos normales de cada región

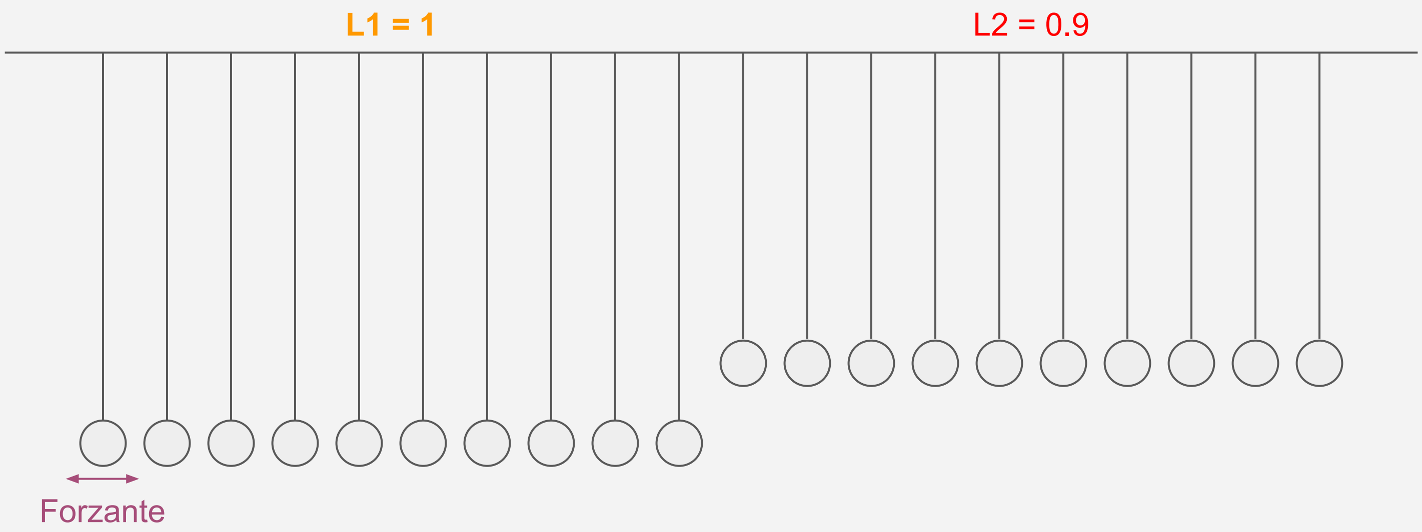
- Si en alguna de las regiones esa frecuencia produce ondas exponenciales, tendremos una atenuación de la onda transmitida.
- Si la atenuación es suficientemente grande, puede ocurrir que no observemos una onda transmitida en el otro extremo.

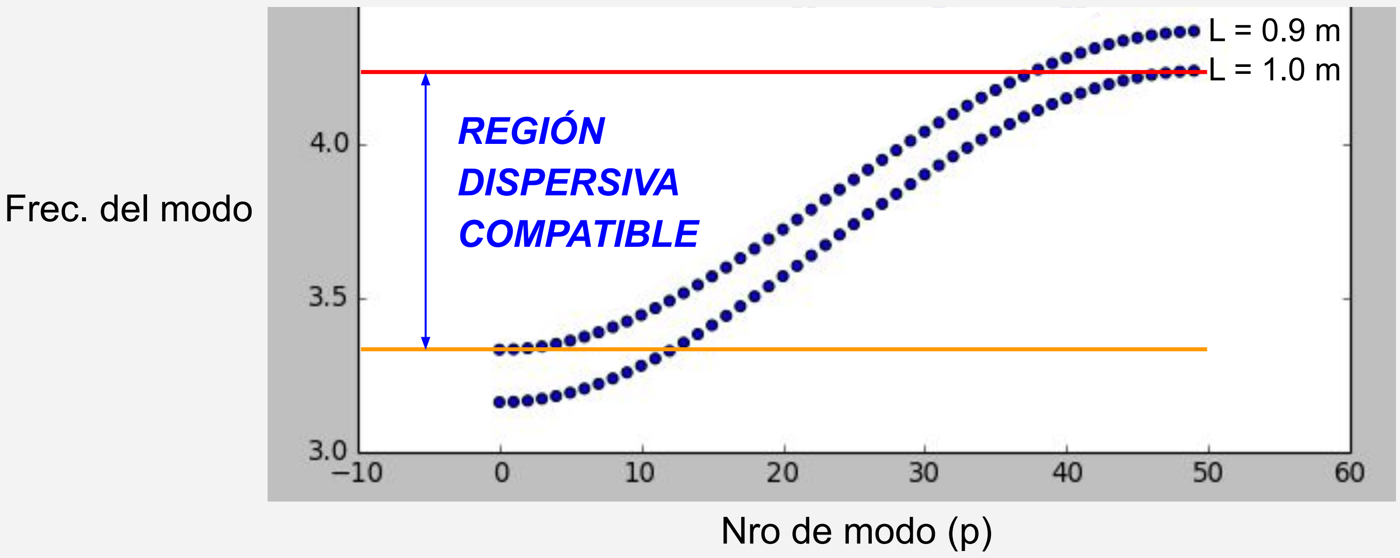
# Frecuencias de modos para péndulos acoplados con extremos libres y distinto L

Frec. del modo




Nro de modo (p)

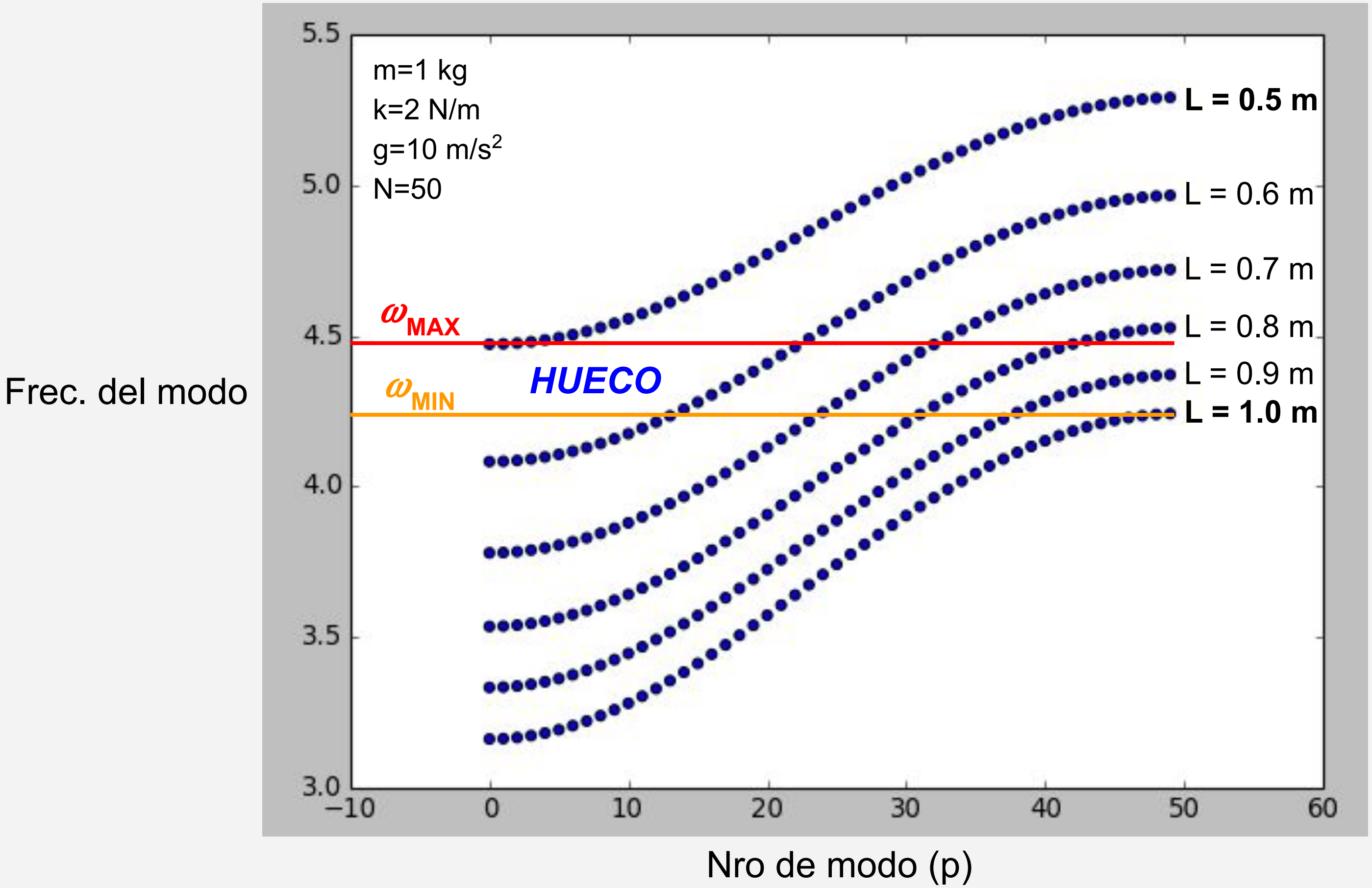

L1 = 1
L2 = 0.9
Forzante


Frec. del modo
L = 0.9 m
L = 1.0 m
REGIÓN
DISPERSIVA
COMPATIBLE
4.0
3.5
3.0
−10
0
10
20
30
40
50
60
Nro de modo (p)

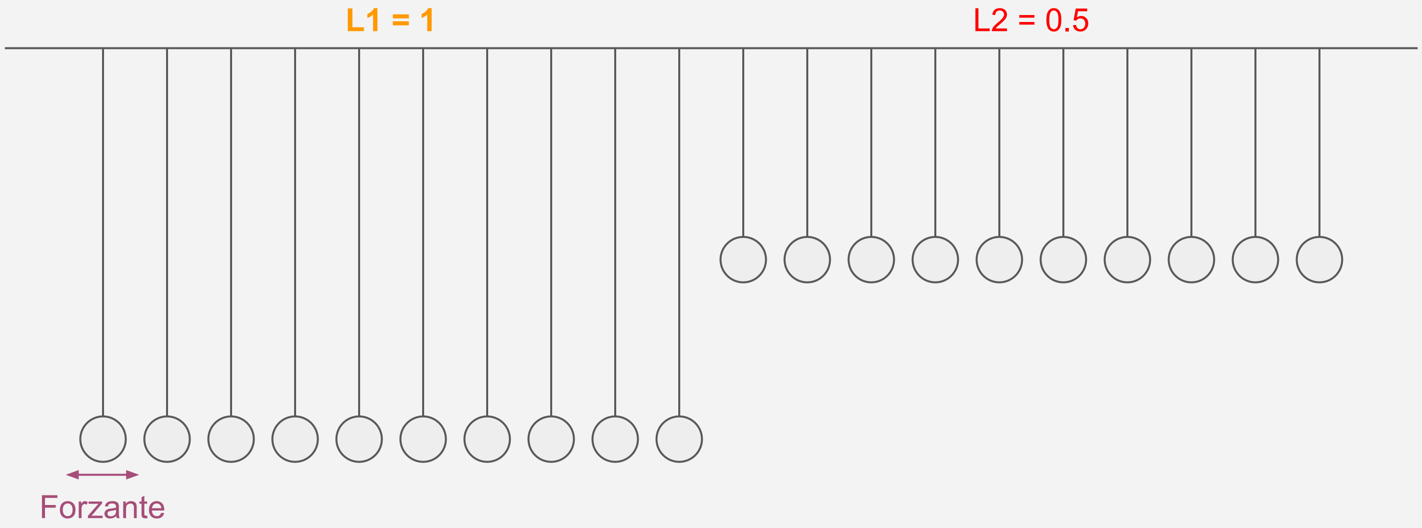
Frecuencia del forzante:

- Si corresponde al modo fundamental de la región izquierda, en la región derecha se propaga una onda exponencial.
- Si corresponde a los modos normales de **ambas** regiones, vemos propagación de modos normales **sin atenuación**.
- Si es superior a la más alta de la región izquierda, pero compatible con los modos normales de la derecha, vemos atenuación en la región izquierda. En la derecha hay una onda de modos normales pero muy atenuada.
- Si es superior a la más alta de la región derecha, se propagan ondas exponenciales en todo el sistema.

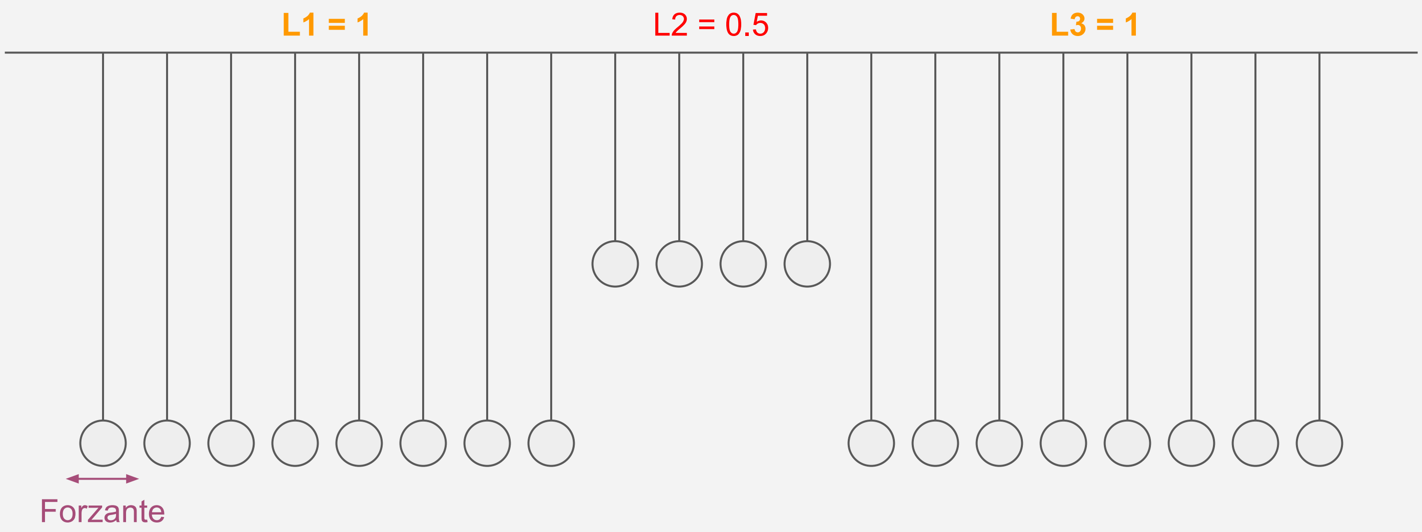
## Frecuencias de modos para péndulos acoplados con extremos libres y distinto L




Los sistemas con L = 1 m y 0.5 m no tienen frecuencias de modos en común




- Las regiones no tienen modos normales con frecuencias compatibles
- No tengo manera de propagar una señal sin sufrir atenuación




*¿Puede una onda exponencial en la región intermedia propagar un modo normal en la derecha?*

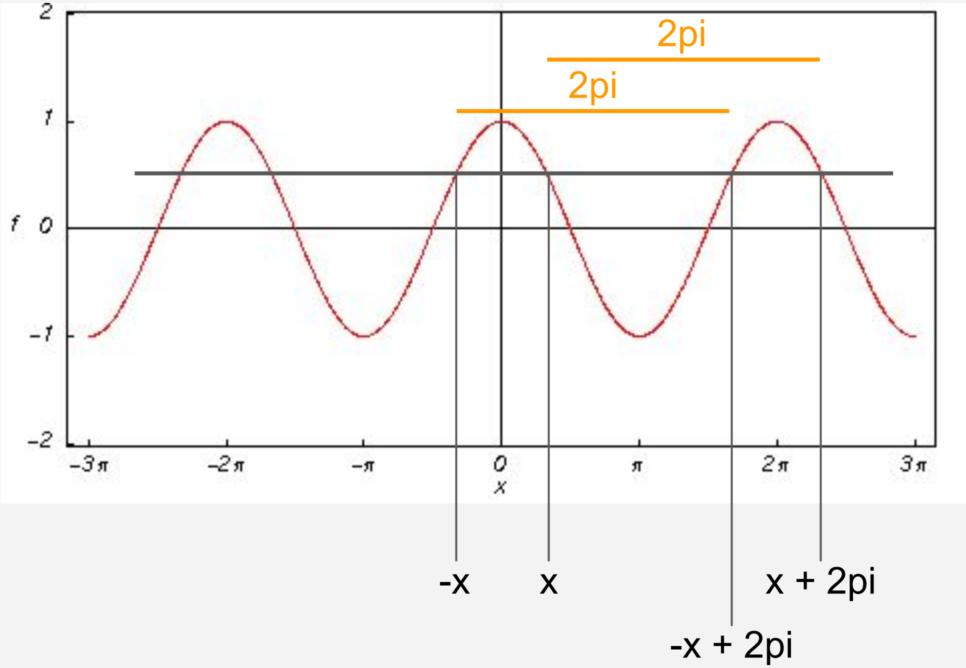
Borrador con cuentas

$$\psi_n(t) = A\cos(kan + \phi)\cos(\omega t + \theta)$$

Psi_0 = Psi_1

$$\cos(\phi) = \cos(ka + \phi)$$

$$\begin{cases} ka + \phi - \phi = 2m\pi \\ ka + \phi - (-\phi) = 2m'\pi \end{cases}$$




Hay dos maneras de cumplir la ecuación

$$\begin{cases} ka + \phi - \phi = 2m\pi \\ ka + \phi - (-\phi) = 2m'\pi \end{cases}$$

La primera ecuación no sirve para nada, ya que nos dice que
k_m = 2m*pi/a

De donde resulta que el k más bajo corresponde a una longitud de onda igual a la separación entre masas, lo cual no nos sirve para resolver nuestro sistema (es una oscilación que ocurre entre masa y masa, pero no “a lo largo” de las masas)

La segunda ecuación nos permite obtener la fase en función de k

$$\begin{aligned} ka + 2\phi &= 2m'\pi \\ \phi &= \frac{2m'\pi - ka}{2} \\ &= m'\pi - \frac{ka}{2} \end{aligned}$$

Usando la fase, podemos reescribir la solución propuesta

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= A\cos(kan - \frac{ka}{2} + m\pi)\cos(\omega t + \theta) \\ &= A\cos(ka(n - 1/2) + m\pi)\cos(\omega t + \theta) \\ &= A(-1)^m \cos(ka(n - 1/2))\cos(\omega t + \theta)\end{aligned}$$

Notar que la fase m*pi solo le cambia el signo al modo normal, es una fase global que no nos importa

Nos queda hallar k, y para eso vamos a usar la otra condición de borde

Psi_N = Psi_N+1

$$\cos(kaN + \phi) = \cos(kaN + ka + \phi)$$

$$\begin{cases} kaN + ka + \phi - kaN - \phi = 2m\pi \\ kaN + ka + \phi - (-kaN - \phi) = 2m'\pi \end{cases}$$

Al igual que antes, la primera ecuación nos da un k absurdo. La segunda en cambio:

$$\begin{aligned} 2kaN + 2\phi + ka &= 2m\pi \\ 2kaN + 2(-ka)/2 + ka &= 2m\pi \\ 2kaN &= 2m\pi \\ k_m &= \frac{m\pi}{aN} \end{aligned}$$

Uso m en vez de m' como índice para escribir menos

Finalmente:

$$\begin{aligned}\psi_n^p(t) &= A_p \cos(k_p a(n-1/2)) \cos(\omega_p t + \theta_p) \\ &= A_p \cos(p \frac{\pi(n-1/2)}{N}) \cos(\omega_p t + \theta_p)\end{aligned}$$

n: indica la masa
p: indica el modo