

## CONDICIONES INICIALES DE SISTEMAS CONTÍNUOS

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

### Evolución temporal de condiciones iniciales

- Los extremos fijos de una cuerda de longitud  $L$  y densidad lineal  $\lambda_m$  la someten a una tensión  $T_0$ .
  - Escriba la expresión más general posible para un modo normal en dicha cuerda y diga cuál es la velocidad de propagación de las ondas en ella.
  - Determine con las condiciones de contorno los números de onda  $k_p$ , frecuencias y fases. Con esto, escriba la expresión general para una perturbación arbitraria  $\psi(x, t)$ .
  - Obtenga  $\psi(x, t)$  para el caso que parte del reposo con  $\psi(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$ .

- Una cuerda de longitud  $L$ , densidad de masa uniforme  $\lambda_m$  está sujeta en ambos extremos lo que la somete a una tensión  $T_0$ . A  $t = 0$  la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función

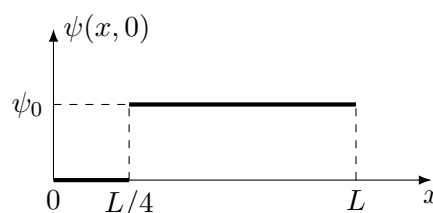
$$\psi(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right),$$

si se toma un sistema de coordenadas tiene  $x = 0$  en un extremo de la soga y  $x = L$  en el otro. Si notamos la frecuencia fundamental como  $\omega_1$ , grafique  $\psi(x, t)$  en  $\omega_1 t = 0, \pi/5, \pi/3$  y  $\pi/2$ . ¿Qué simetría tiene  $\psi(x, t)$  en torno a  $\omega_1 t = \pi/2$ ? ¿Y de  $\pi$ ? ¿Cómo sería  $\psi(x, t)$  para  $\omega_1 t = 2\pi$ ?

- Para una cuerda de longitud  $L$ , densidad lineal  $\lambda_m$  sometida a una tensión  $T_0$  notamos su elongación transversal como  $\psi(x, t)$ .
  - Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.
  - Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en  $x = 0$  y el extremo fijo está en  $x = L$ , imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.
  - Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales  $\nu_n$ .
  - Si  $\psi(x, 0) = 0$  y  $\dot{\psi}(x, 0) = V_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)$ , obtenga amplitud y fase de cada modo y luego  $\psi(x, t)$ .
- (\*) Una cuerda de longitud  $L$  sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión  $T_0$  consta de dos tramos de longitudes  $L_1$  y  $L_2$  y densidades de masa uniformes  $\lambda_{m1}$  y  $\lambda_{m2}$ .
  - Halle la expresión más general para un modo normal en dicha cuerda. Plantee las condiciones de contorno y halle las condiciones que deben cumplir los distintos parámetros.
  - Halle los modos normales en este caso que  $L_1 = 3L_2$  y  $\lambda_{m2} = 9\lambda_{m1}$ .
- (\*) Una cuerda de densidad de masa uniforme  $\lambda_m$  y longitud  $L$  está tensada  $T_0$  entre extremos fijos. Actúa una fuerza de amortiguamiento proporcional a su velocidad de oscilación. Hallar la forma más general de  $\psi(x, t)$ .

### Descomposición espectral de Condiciones iniciales

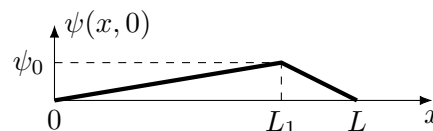
- Una cuerda de densidad lineal de masa  $\lambda_m$  está sujeta en un extremo mientras el otro oscila libre manteniendo una tensión  $T_0$ . En  $t = 0$  parte del reposo al tiempo que se le impone la deformación dibujada (obvie el hecho de que eso es físicamente imposible sin modificar la homogeneidad de  $\lambda_m$ ). La velocidad de propagación es  $v = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



- Halle  $\psi(x, t)$  y grafíquelo para  $\omega_1 t = 0, \pi$  y  $2\pi$ .

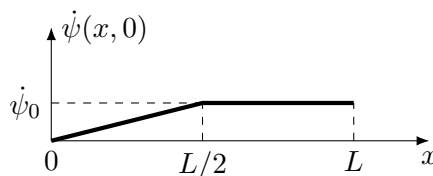
- b) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente tal sistema?

7. ¿Cuál  $L_1$  se maximiza la excitación del segundo modo? ¿Qué cambia musicalmente al cambiar  $L_1$ ?



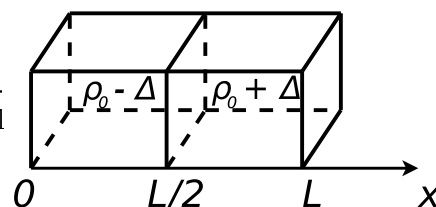
8. (\*) Dada una cuerda de longitud  $L$  y densidad de masa uniforme  $\lambda_m$ , sometida a una tensión  $T_0$  con ambos extremos fijos, demostrar que si  $\psi(x, 0)$  y  $\dot{\psi}(x, 0)$  son simétricas con respecto al centro de la cuerda, los modos con números de onda  $k_p = 2p\pi/L$  no se excitan.

9. Un extremo de una cuerda de densidad lineal  $\lambda_m$  está fijo en tanto que está libre el que está a una distancia  $L$ . Siempre se manteniendo una tensión  $T_0$ , en  $t = 0$  se la golpea sin deformarla pero imprimiéndole una velocidad  $\dot{\psi}(x, 0)$ . Halle  $\psi(x, t > 0)$ .



## Descomposición espectral para gas en un tubo

10. Un tubo contiene dos secciones de gas en reposo separadas por un tabique. Antes de que se lo quite en  $t = 0$  de un lado la densidad era  $\rho_0 - \Delta$  y del otro  $\rho_0 + \Delta$  (considere  $\Delta \ll \rho_0$ ). Datos:  $\rho_0$ ,  $\Delta$ ,  $L$ ,  $v_{\text{sonido}}$ .



- Imponga condiciones de contorno al desplazamiento de moléculas  $\psi$ . A partir de estas obtenga la expresión para un modo normal  $\psi_n(x, t)$ . ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas?
  - Halle  $\psi(x, 0)$  a partir de los datos sobre  $\rho(x, 0)$ .
  - Calcule  $\psi(x, t)$  y  $\rho(x, t)$ .
11. Un tabique divide un tubo dividido en dos regiones. En la izquierda hay una presión constante  $p = p_0 + \Delta p$  en tanto que en la derecha está a  $p_0$  pues está abierta a la atmósfera. A  $t = 0$  se remueve el tabique. Halle  $\delta p(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$  y  $\delta \rho(x, t)$  conociendo  $p_0$ ,  $\Delta p \ll p_0$ ,  $L$ ,  $v_{\text{sonido}}$  y que  $\gamma = \frac{7}{5}$  para un gas diatómico.

