

## PULSOS Y ESPECTROS CUADRADOS

Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## 1. Espectro plano acotado

$\hat{\phi}(\omega)$  en un  $\Delta\omega$  centrado en un  $\omega_0$  presenta una amplitud constante  $\frac{1}{\Delta\omega}$ . En otras  $\omega$  es nula.

a) Verifique que el correspondiente  $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\phi}(\omega)$  está dado por:

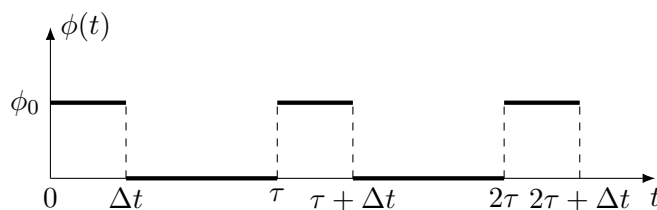
$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}} \right] e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \text{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) e^{i\omega_0 t}.$$

- b) Grafique  $\hat{\phi}(\omega)$  y  $|\phi(t)|$  para  $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$  y  $\Delta\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ . ¿Qué parte de la expresión de  $\phi(t)$  impone límites temporales para el paquete de mayor amplitud? Determine tales límites.
- c) Sea  $T$  un intervalo de tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T \ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que  $T$ ,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase casi constantes.

## 2. Tren de pulsos cuadrados

a) Muestre que  $\mathcal{F}$  es lineal, por tanto  $\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{F}f(x) + b\mathcal{F}g(x)$ , donde  $a, b$  son constantes.

b)  $\phi(t)$  es una serie de pulsos cuadrados de duración  $\Delta t$  que se presentan  $N$  veces con un período  $\tau$  ( $\Delta t < \tau$ ). Si  $f(n, t)$  describe la función en cualquiera de los intervalos  $[n\tau, (n+1)\tau]$  que contiene estos pulsos de amplitud no nula  $\phi_0$  en  $[n\tau, n\tau + \Delta t]$  de forma que  $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n, t)$ , compruebe que

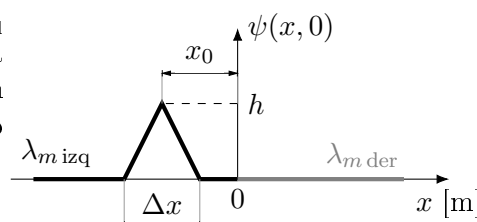


$$\hat{\phi}(\nu) = \mathcal{F}\phi(t) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n, t)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\omega\tau} \mathcal{F}f(0, t).$$

- c) Resuelva  $\mathcal{F}f(0, t)$  para obtener la expresión completa de  $\hat{\phi}(\nu) = \mathcal{F}\phi(t)$ .
- d) El rasgo más prominente de  $\hat{\phi}(\nu)$  son picos en  $\nu_p = p\nu_1$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) donde  $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$ , es decir, una serie de armónicos de  $\nu_1$ . Encuentre en la expresión de  $\hat{\phi}(\nu)$  el término que depende de  $\tau$  responsable de este comportamiento y verifique  $\nu_p$ .
- e) De similar análisis identifique qué término con dependencia en  $\Delta t$  hace que los armónicos más importantes se detecten en  $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$ .
- f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es  $\delta\nu = \frac{2}{N\tau}$ , y calcule cuánto más pequeño es que el  $\Delta\nu$  entre sucesivos  $\nu_p$ .

## 3. (\*) Interfaz entre medios no dispersivos

Dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa,  $\lambda_{m \text{ izq}}$  y  $\lambda_{m \text{ der}}$ , están unidas y sometidas a una tensión  $T_0$ . Sobre la primera se propaga hacia  $+\hat{x}$  la perturbación que muestra la figura. Se conocen  $\lambda_{m \text{ izq}}$ ,  $\lambda_{m \text{ der}}$ ,  $T_0$ ,  $x_0$ ,  $\Delta x$  y  $h$ , y se considera que los medios son no dispersivos.



- a) Hallar el desplazamiento  $\psi(x, t)$ .
- b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el medio es dispersivo.