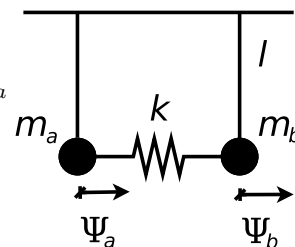


## N=2 GRADOS DE LIBERTAD FORZADOS | PULSACIONES

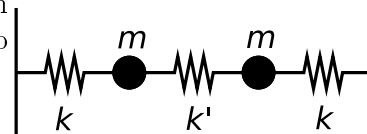
Los ejercicios con (\*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

## Pulsaciones

1. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud  $l$  pero de masas diferentes  $m_a$  y  $m_b$ , acoplados mediante un resorte de constante  $k$ .



- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa, considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar  $l_0 \neq 0$ ? ¿Qué cambia si el resorte es *slinky*?
  - Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
  - Suponga que el acoplamiento es débil ( $k \ll \frac{g}{l} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ ) y que las condiciones iniciales son:  $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$ . Obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.
  - Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de  $T_a$  y  $T_b$ , donde  $T$  indica energía cinética. Grafique  $\langle T_a \rangle$  y  $\langle T_b \rangle$ , y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ( $m_a = m_b$  y  $m_a$  muy diferente de  $m_b$ ). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.
2. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante  $k$  y unidas por otro resorte de constante  $k'$ .



- Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.
- ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

## Sistemas de N grados de libertad forzados

3. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 1, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza  $F = F_0 \cos(\Omega t)$ .
- Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.
  - Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.
  - Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.
  - Muestre que considerando  $m_a = m_b = m$  y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right]$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[ \frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right]$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2}$$

donde  $\omega_1$  es la menor de las frecuencias modales,  $\omega_2$  es la mayor y  $\Omega$  es la frecuencia de excitación.

- e) (\*) Grafique  $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$ , ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.
4. Considere el sistema del problema 2, pero en este caso considere las oscilaciones longitudinales.
- a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ . ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?
- b) (\*) Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad
- c) (\*) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema