Condiciones iniciales | Serie de Fourier

Los ejercicios con (*) son opcionales.

Condiciones iniciales en cuerdas

1. Los extremos fijos de una cuerda de longitud L y densidad lineal μ_0 la someten a una tensión T_0.
   a) Escriba la expresión más general posible para un modo normal en dicha cuerda y diga cuál es la velocidad de propagación de las ondas en ella.
   b) Determine con las condiciones de contorno los números de onda k_p, frecuencias y fases. Con esto, escriba la expresión general para una perturbación arbitraria $\psi(x,t)$.
   c) Obtenga $\psi(x,t)$ para el caso que parte del reposo con $\psi(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$.

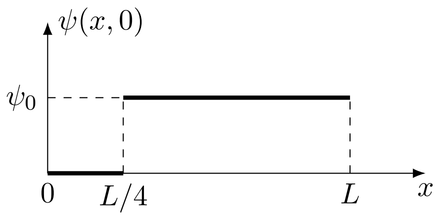
2. Una cuerda de longitud L, densidad de masa uniforme μ_0 está sujeta en ambos extremos lo que la somete a una tensión T_0. A $t = 0$ la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función

$$\psi(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right),$$

   si se toma un sistema de coordenadas tiene $x = 0$ en un extremo de la soga y $x = L$ en el otro. Si notamos la frecuencia fundamental como ω_1, grafique $\psi(x,t)$ en $\omega_1 t = 0$, $\pi/5$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Qué simetría tiene $\psi(x,t)$ en torno a $\omega_1 t = \pi/2$? ¿Y de π?. ¿Cómo sería $\psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$?

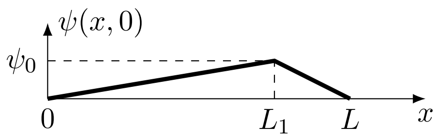
3. Para una cuerda de longitud L, densidad lineal μ_0 sometida a una tensión T_0 notamos su elongación transversal como $\psi(x,t)$.
   a) Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.
   b) Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en $x = 0$ y el extremo fijo está en $x = L$, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.
   c) Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n.
   d) Si $\psi(x,0) = 0$ y $\dot\psi(x,0) = V_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)$, obtenga amplitud y fase de cada modo y luego $\psi(x,t)$.

4. Una cuerda de densidad lineal de masa μ_0 está sujeta en un extremo mientras el otro oscila libre manteniendo una tensión T_0. En $t = 0$ se le impone la deformación dibujada (obvié el hecho de que eso es físicamente imposible sin modificar la homogeneidad de μ). La velocidad de propagación es $v = 80\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



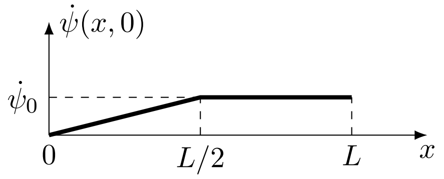
   a) Halle $\psi(x,t)$ y grafíquelo para $\omega_1 t = 0$, π y 2π.
   b) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente tal sistema?

5. ¿Cuál L_1 se maximiza la excitación del segundo modo? ¿Qué cambia musicalmente al cambiar L_1?



6. (*) Dada una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ, sometida a una tensión T_0 con ambos extremos fijos, demostrar que si $\psi(x,0)$ y $\dot\psi(x,0)$ son simétricas con respecto al centro de la cuerda, los modos con números de onda $k_p = 2p\pi/L$ no se excitan.

7. Un extremo de una cuerda de densidad lineal μ está fijo en tanto que está libre el que está a una distancia L. Siempre se manteniendo una tensión T_0, en $t = 0$ se la golpea sin deformarla pero imprimiéndole una velocidad $\dot\psi(x,0)$. Halle $\psi(x,t>0)$.



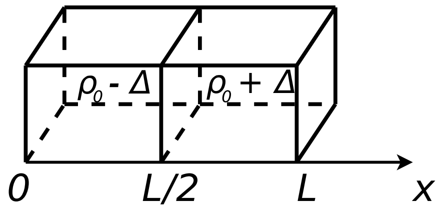
8. (*) Una cuerda de longitud L sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0 consta de dos tramos de longitudes L_1 y L_2 y densidades de masa uniformes μ_1 y μ_2.

   a) Halle la expresión más general para un modo normal en dicha cuerda. Plantee las condiciones de contorno y halle las condiciones que deben cumplir los distintos parámetros.

   b) Halle los modos normales en este caso que $L_1 = 3L_2$ y $\mu_2 = 9\mu_1$.

9. (*) Una cuerda de densidad de masa uniforme μ y longitud L está tensada T_0 entre extremos fijos. Actúa una fuerza de amortiguamiento proporcional a su velocidad de oscilación. Hallar la forma más general de $\psi(x, t)$.

Condiciones iniciales de un gas en un tubo unidimensional

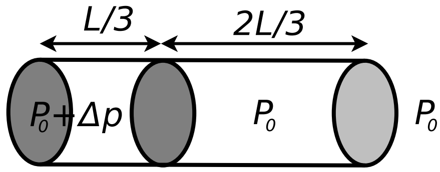


10. (*) Un tubo contiene dos secciones de gas en reposo separadas por un tabique. Antes de que se lo quite en $t = 0$ de un lado la densidad era $\rho_0 - \Delta$ y del otro $\rho_0 + \Delta$ (considere $\Delta \ll \rho_0$). Datos: ρ_0, Δ, L, v_{sonido}.

   a) Imponga condiciones de contorno al desplazamiento de moléculas ψ. A partir de estas obtenga la expresión para un modo normal $\psi_n(x, t)$. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas?

   b) Halle $\psi(x, 0)$ a partir de los datos sobre $\rho(x, 0)$.

   c) Calcule $\psi(x, t)$ y $\rho(x, t)$.



11. (*) Un tabique divide un tubo dividido en dos regiones. En la izquierda hay una presión constante $p = p_0 + \Delta p$ en tanto que en la derecha está a p_0 pues está abierta a la atmósfera. A $t = 0$ se remueve el tabique.
Halle $\delta p(x, t)$, $\psi(x, t)$ y $\delta\rho(x, t)$ conociendo p_0, $\Delta p \ll p_0$, L, v_{sonido} y que $\gamma = \frac{7}{5}$ para un gas diatómico.