Sistemas contínuos | Condiciones de contorno

Los ejercicios con (*) son opcionales.

Condiciones de contorno para una Cuerda

1. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0. Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión: $\Psi(x,t) = A\operatorname{sen}(kx+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$. Tome el sistema de coordenadas con $x=0$ en un extremo de la cuerda y $x=L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:

   a) $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$ (ambos extremos están fijos).

   b) $\Psi(0,t) = 0$ y $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre "libre" es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo "libre" para la cuerda?

   c) $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de ese modo?

   d) Ahora tome un sistema de coordenadas con $x=0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2,t) = \Psi(L/2,t) = 0$ (ambos extremos fijos).

2. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano ($20\,\mathrm{Hz} < \nu < 20\,\mathrm{kHz}$)?

3. Consideremos que las cuatro cuerdas de un violín son de igual longitud, y que emiten en su modo fundamental las notas: $\mathrm{sol}_2 = 196\,\mathrm{Hz}$, $\mathrm{re}_3 = 294\,\mathrm{Hz}$, $\mathrm{la}_3 = 440\,\mathrm{Hz}$ y $\mathrm{mi}_4 = 659\,\mathrm{Hz}$. De la primera a la cuarta las cuerdas son de distinto material y diámetro:

   1. Al $\rho = 2{,}6\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $d_1 = 0{,}09\,\mathrm{cm}$
   2. Aleación Al-Ni $\rho = 1{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $d_2 = 0{,}12\,\mathrm{cm}$
   3. Aleación Al-Ni $\rho = 1{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $d_3 = 0{,}1\,\mathrm{cm}$
   4. Acero $\rho = 7{,}5\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $d_4 = 0{,}1\,\mathrm{cm}$.

   Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la de la_3.

4. Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Considere que parte del reposo.

   a) Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.

   b) ¿Con qué período se repite el movimiento?

   c) Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

Condiciones de contorno para el gas en un tubo unidimensional

5. Se tiene un tubo lleno de aire de longitud L. Considere las siguientes posibilidades:

   a) cerrado en ambos extremos, b) uno abierto el otro cerrado, y c) ambos extremos abiertos.

   Asuma conocidos: L, v_{sonido}, la presión atmosférica p_0, $\rho_0 = \frac{\gamma p_0}{v_{\mathrm{sonido}}^2}$ y que $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$ para un gas diatómico. Halle para cada una de dichas situaciones:

   a) Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.

   b) Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\Psi(x,t)$. ¿Qué parámetros conoce de dicha expresión? ¿De qué dependen los que no conoce?

   c) A partir de la expresión de $\Psi(x,t)$, hallar el apartamiento de la presión respecto a la atmosférica $\delta p(x,t)$. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuál es la amplitud máxima de presión?

d) Hallar la función de densidad $\rho(x,t)$. ¿Cuál es amplitud máxima?

6. *a*) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano de extremos abiertos para producir un sonido de $440\,\mathrm{Hz}$?

   b) Si uno de sus extremos está cerrado y se desea producir el mismo tono en su primer armónico, ¿qué longitud deberá tener?

7. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a $1\,\mathrm{m}$. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$. Considere $v_{\mathrm{sonido}} = 330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

   a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?

   b) Repita lo anterior para un tubo de extremos abiertos.