resortesColgantes

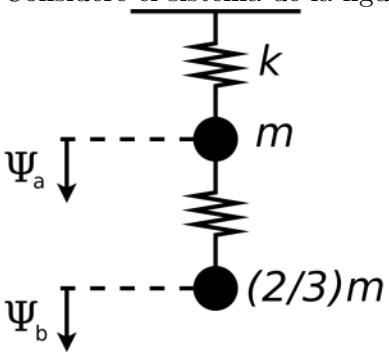
March 28, 2021

1 Dos resortes colgantes

---

2 Enunciado

Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad



a) Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.

c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.

3 Obtención de frecuencias y modos normales de oscilación

3.1 Potenciales en el sistema

Empezamos preguntandonos que potenciales están en juego. En este caso los de los resortes. En la figura está indicada como coordenadas sugeridas las ψ_i, notación que se usa para notar un pequeño desplazamiento. Pero antes de ver el porqué de esta sugerencia hagamos el análisis el potencial elástico de cada resorte que como sabemos depende de la longitud de los mismos.

Tomamos el origen del sistema de coordenadas en el "techo" del que pende el resorte superior, de allí apuntando hacia abajo orientamos $\hat{y}$. Para el resorte unido a este techo la posición de la masa superior $\vec{y}_a$ determina su longitud

$$l_1 = |y_a\hat{y} - 0| = y_a.$$

Para el que pende debajo de esta masa tiene en su otro extremo en $\vec{y}_b$ otra masa. La posición de ambas establece su longitud

$$l_2 = |y_b\hat{y} - y_a\hat{y}| = y_b - y_a.$$

Si ambos tienen la misma longitud natural l_0, aquella que tendrían si ninguna fuerza se aplicara a ellos, el potencial del sistema es

$$V(y_a, y_b) = \frac{k}{2}\left[(y_a - l_0)^2 + (y_b - y_a - l_0)^2\right].$$

[1]:
```
import sympy as sym
from sympy.physics.mechanics import init_vprinting
init_vprinting() # notación con punto para la velocidad y punto punto para la␣
 ↪aceleración
```

[2]:
```
m, k = sym.symbols('m, k') # parámetros físicos
t = sym.Symbol('t')
l_0 = sym.symbols('l_0')
y_a = sym.Function('y_a')(t)
y_b = sym.Function('y_b')(t)
```

[3]:
```
V = sym.Eq(sym.symbols('V'), (k/2)* ((y_a- l_0)**2 + (y_b- y_a- l_0)**2 ) )
V
```

[3]:
$$V = \frac{k\left((-l_0 + y_a)^2 + (-l_0 - y_a + y_b)^2\right)}{2}$$

3.2 Fuerzas y planteo de 2.a ley de Newton

Para escribir la 2.a ley de Newton para cada masa obtenemos las fuerzas sobre ellas. Para la superior

$$m\ddot{y}_a = m\ddot{\vec{y}}_a \cdot \hat{y} = -\vec{\nabla}_a V \cdot \hat{y} = -\frac{\partial}{\partial y_a}V(y_a, y_b) = -k(y_a - l_0) + k(y_b - y_a - l_0) = -k(2y_a - y_b).$$

[4]:
```
sym.Eq(m* y_a.diff(t,2), -V.rhs.diff(y_a).simplify() )
```

[4]:
$$m\ddot{y}_a = -k\,(2y_a - y_b)$$

Para la masa inferior lo mismo

$$\frac{2m}{3}\ddot{y}_b = \frac{2m}{3}\,\ddot{\vec{y}}_b \cdot \hat{y} = -\vec{\nabla}_b V \cdot \hat{y} = -\frac{\partial}{\partial y_b} V(y_a, y_b) = -k(y_b - y_a - l_0).$$

[5]:
```
sym.Eq(sym.Rational(2,3)* m* y_b.diff(t,2), -V.rhs.diff(y_b).simplify() )
```

[5]:
$$\frac{2m\ddot{y}_b}{3} = -k\,(-l_0 - y_a + y_b)$$

En este sistema no afectado por la aceleración $\vec{g}$, resulta que las longitudes de equilibrio de las fuerzas corresponden a cuando la longitud de los resortes coincide con l_0, pues ninguna otra fuerza que la elástica existe en este modelo. Esto es fácilmente comprobable obteniendo el mínimo de potencial en función de las longitudes de los resortes. l_1 y l_2. Entonces

$$y_a = l_o + \psi_a,$$

siendo ψ_a el pequeño desplazamiento en torno a la posición de equilibrio, y lo mismo para el extremo inferior del segundo resorte.

$$y_b = 2l_o + \psi_b.$$

[6]:
```
psi_a = sym.Function('psi_a')(t) # se declaran símbolos a medida que se␣
 ↪requieren
psi_b = sym.Function('psi_b')(t)
psis ={
    y_a : l_0 + psi_a,
    y_b : 2* l_0 + psi_b,
}
Vpsi = V.subs(psis)
Vpsi
```

[6]:
$$V = \frac{k\left((-\psi_a + \psi_b)^2 + \psi_a^2\right)}{2}$$

Si quiere re-escribirse las ecuaciones de la 2.a ley en funcion de estos pequeños desplazamientos al derivar dos veces respecto al tiempo $\ddot{y}_a = \ddot{\psi}_a$ y $\ddot{y}_b = \ddot{\psi}_b$. Se obtendrá

$$m\ddot{\psi}_a = -k\,[(l_o + \psi_a) - l_0] + k\,[(2l_0 + \psi_b) - (l_0 + \psi_a) - l_0] = -k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a) = -k(2\psi_a - \psi_b)$$
$$\frac{2m}{3}\ddot{\psi}_b = -k\,((2l_o + \psi_b) - (l_o + \psi_a) - l_0) = -k(\psi_b - \psi_a)$$

[7]:
```
sym.Eq(m* y_a.subs(psis).diff(t,2), -Vpsi.rhs.diff(psi_a).simplify() )
```

[7]:
$$m\ddot{\psi}_a = -k\,(2\psi_a - \psi_b)$$

[8]:
```
sym.Eq(sym.Rational(2,3)* m* y_b.subs(psis).diff(t,2), -Vpsi.rhs.diff(psi_b).
↪simplify() )
```

[8]:
$$\frac{2m\ddot{\psi}_b}{3} = -k\left(-\psi_a + \psi_b\right)$$

Queda un sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_a = -k(2\psi_a - \psi_b) \\ \frac{2m}{3}\ddot{\psi}_b = -k(\psi_b - \psi_a) \end{cases},$$

que puede escribirse en forma matricial

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{\Psi}} = -\mathbb{K}\vec{\Psi},$$

donde operan sobre el vector columna con los desplazamientos y su aceleración

[9]:
```
vecPsi = sym.Eq( sym.Function(r'\vec{\Psi}')(t), sym.Matrix([[psi_a], [psi_b]␣
↪]) , evaluate= False )
vecPsi, sym.Eq(vecPsi.lhs.diff(t,2), vecPsi.rhs.diff(t,2), evaluate = False)
```

[9]:
$$\left(\vec{\Psi} = \begin{bmatrix}\psi_a \\ \psi_b\end{bmatrix},\ \ddot{\vec{\Psi}} = \begin{bmatrix}\ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b\end{bmatrix}\right)$$

la matrices con la información de las masas, $\mathbb{M}$, y los coeficientes de dureza de los resortes, $\mathbb{K}$

[10]:
```
matM = sym.Eq(sym.Symbol('\mathbb{M}'), sym.Matrix([
                [1, 0],
                [0,'2/3']
                ] ),
              evaluate= False
             )
matK = sym.Eq(sym.Symbol('\mathbb{K}'), sym.Matrix([
                [2, -1],
                [-1,1]
                ] ),
              evaluate= False
             )
matM, matK
```

[10]:
$$\left(\mathbb{M} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix},\ \mathbb{K} = \begin{bmatrix}2 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

[11]:
```
sym.Eq(sym.MatMul(matM.rhs* m, vecPsi.rhs.diff(t,2) ), sym.MatMul(-1,k* matK.
↪rhs, vecPsi.rhs) )
```

[11]:
$$\begin{bmatrix}m & 0 \\ 0 & \frac{2m}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}2k & -k \\ -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_a \\ \psi_b\end{bmatrix}$$

Como $\mathbb{M}$ siempre es diagonal es sencillo despejar $\ddot{\vec{\Psi}}$ y llevar a la forma

$$\ddot{\vec{\Psi}} = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\vec{\Psi} = -\mathbb{K}'\vec{\Psi},$$

donde

[12]:
```
matKPrima= sym.Eq(sym.Symbol("\mathbb{K}'"), (k/m)* matM.rhs.inv()* matK.rhs,␣
↪evaluate= False )
matKPrima
```

[12]:
$$\mathbb{K}' = \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{3k}{2m} & \frac{3k}{2m} \end{bmatrix}$$

Queda la expresión sobre la que se operará

[13]:
```
sym.Eq(vecPsi.rhs.diff(t,2) , sym.MatMul(-1, matKPrima.rhs, vecPsi.rhs) )
```

[13]:
$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi}_a \\ \ddot{\psi}_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{3k}{2m} & \frac{3k}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}$$

3.3 Resolución del sistema de ecuaciones diferenciales

Proponiendo la solución $\psi = \psi_0 e^{i\omega t}$, se llega a que

$$\ddot{\psi} = (-i\omega)^2 \psi = -\omega^2 \psi$$

lo que permite escribir el sistema como

[14]:
```
omega= sym.Symbol('omega', positive=True)
sym.Eq(sym.MatMul(- omega**2, vecPsi.rhs), sym.MatMul(-1, matKPrima.rhs, vecPsi.
↪rhs))
```

[14]:
$$-\omega^2 \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{3k}{2m} & \frac{3k}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix}$$

Esto nos permite agrupar todo a un lado del signo de igualdad

[15]:
```
sistema = omega**2* sym.eye(2)- matKPrima.rhs # ¡OJO! Que se resta K prima
sym.Eq(sym.MatMul(sistema, vecPsi.rhs), 0, evaluate= False)
```

[15]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} + \omega^2 & \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{2m} & -\frac{3k}{2m} + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = 0$$

Para evitar la solución trivial $\psi_1 = \psi_2 = 0$ el determinante de la matriz debe ser nulo. Se obtiene así un polinomio característico correspondiente a la matríz $\mathbb{K}'$ en función de los ω^2 que son los autovalores para esta matríz,

[16]:
```
detSistema = sym.det(sistema)
sym.Eq(detSistema, 0, evaluate= False).simplify()
```

[16]:
$$\frac{3k^2}{2m^2} - \frac{7k\omega^2}{2m} + \omega^4 = 0$$

De las raices se obtienen las ω de los modos normales

[17]:
```
frecModos = sym.solve(detSistema,omega)
frecModos
```

[17]:
$$\left[-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}{2},\ -\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}},\ \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\right]$$

Las ω negativas no tienen sentido físico, por lo que nos quedamos con las dos correspondientes a este sistema de sendos grados de libertad:

[18]:
```
omega_1, omega_2 = sym.symbols('omega_1, omega_2', positive=True)
omega1 = sym.Eq(omega_1, sym.simplify(frecModos[1]) )
omega2 = sym.Eq(omega_2, sym.simplify(frecModos[3]) )
omega1, omega2
```

[18]:
$$\left(\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}{2},\ \omega_2 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

Se hace usualmente un ordenamiento de menor a mayor de las frecuencias, pues como se verá luego, una mayor frecuencia está asociada a un movimiento *más violento*.

3.4 Autovalores sin tanto esfuerzo

Por supuesto sympy puede calcular los ω_i sin que deba calcularse el polinomio característico de $\mathbb{K}'$ y obtener sus raices.

[19]:
```
omegasCuadrado = (matKPrima.rhs).eigenvals(multiple=True) # múltiple: devuelve lista
omegasCuadrado
```

[19]:
$$\left[\frac{k}{2m},\ \frac{3k}{m}\right]$$

[20]:
```
sym.Eq(omega_1, sym.sqrt(omegasCuadrado[0]) ), sym.Eq(omega_2, sym.sqrt(omegasCuadrado[1]) )
```

[20]:
$$\left(\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}{2},\ \omega_2 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

3.5 Modos normales

Con cada una de las ω obtenidas da una solución válida al sistema de ecuaciones diferenciales del estilo que obtuvimos para el oscilador de un solo grado de libertad. Pero con dos grados de libertad habrá que definir la relación de amplitudes entre cada uno de estos, lo que escribiremos como un vector $\vec{\xi}_i$.

3.5.1 Modo 1

Para ω_1 corresponderá una relación de amplitudes para cada masa

[21]:
```
xi1, xi1a, xi1b = sym.physics.mechanics.dynamicsymbols(r'\vec{\xi}_1, xi_1_a,␣
↪xi_1_b')
vecXi1 = sym.Eq(xi1, sym.Matrix([[xi1a], [xi1b] ] ), evaluate= False )
vecXi1
```

[21]:
$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \xi_{1a} \\ \xi_{1b} \end{bmatrix}$$

y una fase ϕ_1 en su solucíon general:

[22]:
```
phi_1 = sym.Symbol('phi_1')
t = sym.Symbol('t')
soluciónOmega1 = vecXi1.lhs* sym.cos(omega1.lhs* t+ phi_1)
sym.Eq(sym.MatMul(vecPsi.rhs), soluciónOmega1, evaluate=False)
```

[22]:
$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \vec{\xi}_1 \cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right)$$

¿Como obtener este vector $\vec{\xi}_1$? Si reemplazamos esta solución en

[23]:
```
sym.Eq(sym.MatMul(sistema, vecPsi.rhs), 0, evaluate=False)
```

[23]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} + \omega^2 & \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{2m} & -\frac{3k}{2m} + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = 0$$

[24]:
```
sym.Eq(sym.MatMul(sistema.subs(omega, omega1.lhs), soluciónOmega1 ), 0,␣
↪evaluate=False)
```

[24]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} + \omega_1^2 & \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{2m} & -\frac{3k}{2m} + \omega_1^2 \end{bmatrix} \left(\vec{\xi}_1 \cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right)\right) = 0$$

Ya que el coseno no debe ser nulo en todo t nos encontramos que reemplazando por el valor de ω_1

[25]:
```
sysXi1= sym.Eq(sym.MatMul(sistema.subs(omega, omega1.rhs), vecXi1.rhs ), 0,␣
↪evaluate=False)
sysXi1
```

[25]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{3k}{2m} & \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{2m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1a} \\ \xi_{1b} \end{bmatrix} = 0$$

Despejando de la primera o segunda ecuación nos queda idéntica relación, $\xi_{1b} = \frac{3}{2}\xi_{1a}$, por tanto

[26]:
```
vecXi1Subs= sym.Eq(vecXi1.lhs, vecXi1.rhs.subs([(xi1a, '2/3'), (xi1b, 1 ) ] ),␣
↪evaluate= False )
vecXi1Subs
```

[26]:
$$\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si el sistema oscilará con $\omega = \omega_1$ ambas masas subirían o bajarían, solo que la de más abajo se distanciaría de su posición de equilibrio 3/2 veces más que la de arriba.

3.5.2 Modo 2

Seguimos el mismo procedimento para ω_2

[27]:
```
xi2, xi2a, xi2b = sym.physics.mechanics.dynamicsymbols(r'\vec{\xi}_2, xi_2_a,␣
↪xi_2_b')
vecXi2 = sym.Eq(xi2, sym.Matrix([[xi2a], [xi2b] ] ), evaluate= False )
vecXi2
```

[27]:
$$\vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \xi_{2a} \\ \xi_{2b} \end{bmatrix}$$

[28]:
```
phi_2 = sym.Symbol('phi_2')
soluciónOmega2 = vecXi2.lhs* sym.cos(omega2.lhs* t+ phi_2)
sym.Eq(sym.MatMul(vecPsi.rhs), soluciónOmega2, evaluate=False)
```

[28]:
$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \vec{\xi}_2 \cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)$$

[29]:
```
sysXi2= sym.Eq(sym.MatMul(sistema.subs(omega, omega2.rhs), vecXi2.rhs ), 0,␣
↪evaluate=False)
sysXi2
```

[29]:
$$\begin{bmatrix} \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{3k}{2m} & \frac{3k}{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{2a} \\ \xi_{2b} \end{bmatrix} = 0$$

Despejando de la primera o segunda ecuación nos queda idéntica relación, $\xi_{2b} = -\xi_{2a}$, con lo que obtuvimos

[30]:
```
vecXi2Subs= sym.Eq(vecXi2.lhs, vecXi2.rhs.subs([(xi2a, -1),(xi2b, 1) ]),␣
↪evaluate= False )
vecXi2Subs
```

[30]:
$$\vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si el sistema oscilara con $\omega = \omega_2$ cuando una masa sube la otra baja y visceversa con ídentica separacion de su posición de equilibrio.

3.6 Autovectores

los $\vec{\xi}_1$ son los autovectores asociados a los autovalores ω_i^2 de la matríz $\mathbb{K}'$. Nuevamente, sympy puede obtenerlos con poco sufrimiento para el operador de la computadora.

[31]:
```
autovectores = (matKPrima.rhs).eigenvects()
autovectores
```

[31]:
$$\left[\left(\frac{k}{2m},\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}\right]\right),\ \left(\frac{3k}{m},\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

Donde se indica (autovalor, multiplicidad y autovector). Por tanto

[32]:
```
sym.Eq(vecXi1.lhs, autovectores[1][2][0], evaluate= False), sym.Eq(vecXi2.lhs,␣
↪autovectores[0][2][0], evaluate= False)
```

[32]:
$$\left(\vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\ \vec{\xi}_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}\right)$$

3.7 Solución general

Sabemos que la solución al sistema es la combinación lineal de ambas soluciones es

[33]:
```
A_1, A_2 = sym.symbols('A_1, A_2') # símbolos varios
soluciónGeneral= sym.Eq(vecPsi, A_1* soluciónOmega1 + A_2* soluciónOmega2,␣
↪evaluate= False)
soluciónGeneral
```

[33]:
$$\vec{\Psi} = \begin{bmatrix}\psi_a\\\psi_b\end{bmatrix} = A_1\vec{\xi}_1\cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right) + A_2\vec{\xi}_2\cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)$$

con A_i y ϕ_i las amplitudes y fases de cada modo que deben responder a las condiciones iniciales.

[34]:
```
sustitucionesDinámica = {
    omega1.lhs: omega1.rhs,
    omega2.lhs: omega2.rhs,
    vecXi1.lhs: vecXi1Subs.rhs,
    vecXi2.lhs: vecXi2Subs.rhs
}
dinámica= sym.Eq(vecPsi.rhs, soluciónGeneral.rhs.subs(sustitucionesDinámica),␣
↪evaluate= False)
dinámica
```

[34]:
$$\begin{bmatrix}\psi_a\\\psi_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2A_1\cos\left(\phi_1+\frac{\sqrt{2}t\sqrt{\frac{k}{m}}}{2}\right)}{3} - A_2\cos\left(\phi_2+\sqrt{3}t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\\ A_1\cos\left(\phi_1+\frac{\sqrt{2}t\sqrt{\frac{k}{m}}}{2}\right) + A_2\cos\left(\phi_2+\sqrt{3}t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\end{bmatrix}$$

4 Condiciones iniciales

Segun el enunciado en $t = 0$

[35]:
```
dinámica.subs(t,0)
```

[35]:

$$\begin{bmatrix}\psi_a(0)\\ \psi_b(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2A_1\cos(\phi_1)}{3} - A_2\cos(\phi_2)\\ A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)\end{bmatrix}$$

se sabe que las posiciones son

[36]:
```
condicionesPosición = {
    dinámica.lhs[0].subs(t,0): 1,
    dinámica.lhs[1].subs(t,0): 0,
}
condicionesPosición
```

[36]:
$$\{\psi_a(0) : 1,\ \ \psi_b(0) : 0\}$$

Pero aún tras esta substitución el número de incógnitas dobla el de ecuaciones.

[37]:
```
dinámicaCondiciónPosición = dinámica.subs(t,0).subs(condicionesPosición)
dinámicaCondiciónPosición
```

[37]:
$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2A_1\cos(\phi_1)}{3} - A_2\cos(\phi_2)\\ A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)\end{bmatrix}$$

El enunciado da otra información al afirmar que el sistema ``se encuentra originalmente en reposo''. Esto significa que las velocidades inciales son nulas

[38]:
```
condicionesVelocidad = {
    dinámica.lhs[0].diff().subs(t,0): 0,
    dinámica.lhs[1].diff().subs(t,0): 0,
}
condicionesVelocidad
```

[38]:
$$\left\{\dot{\psi}_a\Big|_{t=0} : 0,\ \ \dot{\psi}_b\Big|_{t=0} : 0\right\}$$

[39]:
```
sym.Eq( sym.Matrix([[0], [0] ] ), dinámica.rhs.diff(t).subs(t, 0) )
```

[39]:
$$\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}A_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\phi_1)}{3} + \sqrt{3}A_2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\phi_2)\\ -\frac{\sqrt{2}A_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\phi_1)}{2} - \sqrt{3}A_2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\phi_2)\end{bmatrix}$$

Pero hay un camino más sencillo que resolver un sistema que contemple estas dos ecuaciones de la condición para la velocidad y las otras tantas para la condición de la posición.

De establecerse $\phi_1 = \phi_2 = 0$ esto asegura que las velocidades son nulas pues estas fases son argumento de los senos en todos los términos. Volviendo entonces a las condiciones sobre la posición con este dato.

[40]:
```
amplitudesSistema= dinámicaCondiciónPosición.subs([(phi_1, 0), (phi_2, 0) ] )
amplitudesSistema
```

[40]:
$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2A_1}{3} - A_2\\ A_1 + A_2\end{bmatrix}$$

No es difícil obtener que $A_1 = \frac{3}{5}$ y $A_2 = -\frac{3}{5}$. Con lo que finalmente obtenemos una solución para estas condiciones iniciales:

[41]:
```
coeficientesCondicionesIniciales = {
    A_1: '3/5',
    A_2: '-3/5',
    phi_1: 0,
    phi_2: 0,
}
dinámicaCondicionesIniciales = dinámica.subs(coeficientesCondicionesIniciales)
dinámicaCondicionesIniciales
```

[41]:
$$\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2\cos\left(\frac{\sqrt{2}t\sqrt{\frac{k}{m}}}{2}\right)}{5} + \frac{3\cos\left(\sqrt{3}t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{5}\\ \frac{3\cos\left(\frac{\sqrt{2}t\sqrt{\frac{k}{m}}}{2}\right)}{5} - \frac{3\cos\left(\sqrt{3}t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}{5}\end{bmatrix}$$

4.1 Graficación de la dinámica

Resulta útil que las funciones simbólica de sympy puedan ser convertidas en otras estrictamente numéricas compatibles con otras funciones básicas de Python o de la biblioteca numérica numpy.

Para esto se usa el comando lambdify que retorna la función en un formato compatible con el módulo de Python indicado. Por defecto este módulo es el numpy que es la que usaremos a continuación. Obligatoriamente hay que indicar al menos una variable de la que depende la función. En este caso se indicó t, que se indicó en el momento de definir que las $\Psi_i = \Psi_i(t)$.

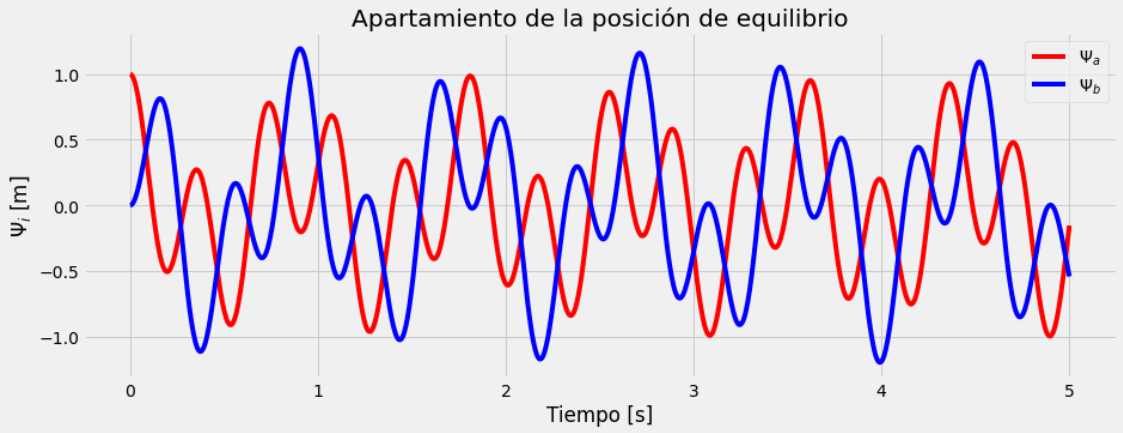
[42]:
```
k_magnitud = 100 # [N m-1]
m_magnitud = 1 # [kg]
parámetrosFísicos ={
    k : k_magnitud,
    m : m_magnitud,
}

psiA_numpy = sym.lambdify(t, dinámicaCondicionesIniciales.rhs[0].
 ↪subs(parámetrosFísicos) )
psiB_numpy = sym.lambdify(t, dinámicaCondicionesIniciales.rhs[1].
 ↪subs(parámetrosFísicos) )
```

[43]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# plt.style.use('fivethirtyeight') #estilo
import matplotlib as mpl
mpl.style.use('fivethirtyeight') # estilo de gráficos con grilla y letras␣
 ↪grandes
```

[44]:
```
tiempos = np.linspace(0, 5, 1000) # [s]
fig = plt.figure(figsize=(12, 4))
ax = fig.add_axes([0, 0, 1, 1])
ax.plot(tiempos, psiA_numpy(tiempos), 'r-', label= '$\Psi_a$')
ax.plot(tiempos, psiB_numpy(tiempos), 'b-', label= '$\Psi_b$' )
ax.set_xlabel('Tiempo [s]')
ax.set_ylabel('$\Psi_i$ [m]')
ax.set_title('Apartamiento de la posición de equilibrio')
ax.legend()
```

[44]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fc3537a25f8>
```



Esta complejísima dinámica es fruto de que la condición inicial hizo que ambos $A_i \neq 0$ por lo que vemos una superposición de los modos normales.

4.2 Visualizando los modos normales

Adaptación del notebook de María Luz Martínez Ricci, teórica de Depine, 2.o cuat. 2020

4.2.1 Modo 1

[45]:
```
sym.Eq(sym.MatMul(vecPsi.rhs), soluciónOmega1, evaluate=False)
```

[45]:
$$\begin{bmatrix}\psi_a \\ \psi_b\end{bmatrix} = \vec{\xi}_1 \cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right)$$

[46]:
```
omega1, sym.Eq(vecXi1.lhs, autovectores[0][2][0], evaluate=False )
```

[46]:
$$\left(\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}{2},\ \vec{\xi}_1 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} \\ 1\end{bmatrix}\right)$$

[47]:
```
modo1auto={
    vecXi1.lhs: autovectores[0][2][0],
    omega1.lhs : omega1.rhs,
    phi_1 : 0,
}
modo1 = sym.Eq(sym.MatMul(vecPsi.rhs), soluciónOmega1.subs(modo1auto).
 ↪subs(parámetrosFísicos), evaluate=False)
modo1
```

[47]:
$$\begin{bmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2\cos\left(5\sqrt{2}t\right)}{3}\\ \cos\left(5\sqrt{2}t\right)\end{bmatrix}$$

[48]:
```
psiA_modo1_numpy = sym.lambdify(t, modo1.rhs[0])
psiB_modo1_numpy = sym.lambdify(t, modo1.rhs[1])
```

[49]:
```
from matplotlib import animation, rc
from IPython.display import HTML
# rc('animation', html='html5')
rc('animation', html='jshtml')
```

[50]:
```
l0 = 3 # [m] longitud natural de los resortes
figuraAnimación, ax = plt.subplots()
# figuraAnimación = plt.figure()
# ax = figuraAnimación.add_axes([0,0,1,1]) # agrega ejes como atributo de la␣
 ↪figura
ax.set_ylabel('y [t]' )
ax.set_xlim((-1,1))
ax.set_ylim((-9,1))
ax.grid(True)
ax.plot((-1.5,1.5), [-l0,-l0],  '--',color  = 'green') # linea horizontal
ax.plot((-1.5,1.5), [-2*l0,-2*l0], '--',color  = 'green')
ax.text(1,-3.02,'$l_0$',color = 'green')
ax.text(1,-6.02,'$2 l_0$',color = 'green')
plt.close()
```

[51]:
```
linea, = ax.plot([],[],'o',ms = 10,color = 'r', label = 'Movimiento particula␣
 ↪a',zorder = 3)
lineResa, = ax.plot([],[],ls = '--',color = 'r', lw = 2, zorder = 2)
lineb, = ax.plot([],[],'o',ms = 10,color = 'b', label = 'Movimiento particula␣
 ↪b',zorder = 3)
lineResb, = ax.plot([],[],ls = '--',color = 'b', lw = 2, zorder = 1)

tiempos= np.linspace(0, 10, 200)
y_a_modo1= psiA_modo1_numpy(tiempos) + l0
y_b_modo1= psiB_modo1_numpy(tiempos) + 2* l0

def actualiza(i):
```

```
    linea.set_data(0, -y_a_modo1[i])
    lineResa.set_data([0,0],[0, -y_a_modo1[i]]) # linea desde el origen
    lineb.set_data(0, -y_b_modo1[i])
    lineResb.set_data([0,0],[0, -y_b_modo1[i]])

anim_modo1 = animation.FuncAnimation(figuraAnimación, actualiza, frames=␣
 ↪len(tiempos), interval= 200)
```

[52]:
```
anim_modo1
```

[52]:
```
<matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x7fc35370f128>
```

4.2.2 Modo 2

[53]:
```
modo2auto={
    vecXi2.lhs: autovectores[1][2][0],
    omega2.lhs : omega2.rhs,
    phi_2 : 0,
}
modo2auto
```

[53]:
$$\left\{\omega_2 : \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}},\ \ \phi_2 : 0,\ \ \vec{\xi}_2 : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

[54]:
```
modo2 = sym.Eq(sym.MatMul(vecPsi.rhs), soluciónOmega2.subs(modo2auto).
 ↪subs(parámetrosFísicos), evaluate=False)
modo2
```

[54]:
$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\left(10\sqrt{3}t\right) \\ \cos\left(10\sqrt{3}t\right) \end{bmatrix}$$

[55]:
```
l0 = 3 # [m] longitud natural de los resortes
figuraAnimación, ax = plt.subplots()
# figuraAnimación = plt.figure()
# ax = figuraAnimación.add_axes([0,0,1,1]) # agrega ejes como atributo de la␣
 ↪figura
ax.set_ylabel('y [t]' )
ax.set_xlim((-1,1))
ax.set_ylim((-9,1))
ax.grid(True)
ax.plot((-1.5,1.5), [-l0,-l0],  '--',color  = 'green') # linea horizontal
ax.plot((-1.5,1.5), [-2*l0,-2*l0], '--',color  = 'green')
ax.text(1,-3.02,'$l_0$',color = 'green')
ax.text(1,-6.02,'$2 l_0$',color = 'green')
plt.close()
```

[56]:
```
psiA_modo2_numpy = sym.lambdify(t, modo2.rhs[0])
psiB_modo2_numpy = sym.lambdify(t, modo2.rhs[1])
```

[57]:
```
linea, = ax.plot([],[],'o',ms = 10,color = 'r', label = 'Movimiento particula␣
 ↪a',zorder = 3)
lineResa, = ax.plot([],[],ls = '--',color = 'r', lw = 2, zorder = 2)
lineb, = ax.plot([],[],'o',ms = 10,color = 'b', label = 'Movimiento particula␣
 ↪b',zorder = 3)
lineResb, = ax.plot([],[],ls = '--',color = 'b', lw = 2, zorder = 1)

tiempos= np.linspace(0, 10, 200)
y_a_modo2= psiA_modo2_numpy(tiempos) + l0
y_b_modo2= psiB_modo2_numpy(tiempos) + 2* l0

def actualiza(i):
    linea.set_data(0, -y_a_modo2[i])
    lineResa.set_data([0,0],[0, -y_a_modo2[i]]) # linea desde el origen
    lineb.set_data(0, -y_b_modo2[i])
    lineResb.set_data([0,0],[0, -y_b_modo2[i]])

anim_modo2 = animation.FuncAnimation(figuraAnimación, actualiza, frames=␣
 ↪len(tiempos), interval= 200)
```

[58]:
```
anim_modo2
```

[58]:
```
<matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x7fc351cc4f28>
```

5 ¿Qué modifica la presencia de gravedad?

Sin tratar de ser perspicaces empecemos a resolver ``mecánicamente''. Al potencial anteriormente calculado agregamos el potencial gravitatorio

$$V(y_a, y_b) = \frac{k}{2}\left[(y_a - l_0)^2 + (y_b - y_a - l_0)^2\right] - g(m_a y_a + m_b y_b).$$

Habrá nuevas posiciones de equilibrio. Basta realizar $\frac{\partial}{\partial y_i} V = 0$

$$\begin{cases} k(y_a - l_0) - k(y_b - y_a - l_0) - g m_a = 2k y_a - k y_b - g m_a = 0 \\ k(y_b - y_a - l_0) - g m_b = 0 \end{cases}$$

de donde puede obtenerse fácilmente las posiciones de equilibrio $y_{a0} = \frac{g}{k}(m_a + m_b) + l_0$ e $y_{b0} = \frac{g}{k}(m_a + 2m_b) + 2l_0$.

Bien, tenemos nuevas posiciones de equilibrio, y entonces para escribir en función de los apartamientos de estas ψ_a y ψ_b tenemos

$$y_a = y_{a0} + \psi_a = \frac{g}{k}(m_a + m_b) + l_0 + \psi_a$$
$$y_b = y_{b0} + \psi_a = \frac{g}{k}(m_a + 2m_b) + 2l_0 + \psi_b,$$

¿Qué seguía? Para obtener las fuerzas derivar el potencial potencial… ¡pero si lo acabamos de hacer! Si reemplazo estos y_a y y_b

$$\begin{cases} m_a\ddot{\psi}_a = 2k\left[\frac{g}{k}(m_a+m_b)+l_0+\psi_a\right] - k\left[\frac{g}{k}(m_a+2m_b)+2l_0+\psi_b\right] - gm_a \\ \qquad = 2g(m_a+m_b)+2kl_0+2k\psi_a - g(m_a+2m_b)-2kl_0-k\psi_b-gm_a \\ \qquad = -k(2\psi_a-\psi_b) \\ m_b\ddot{\psi}_b = k\left[\left(\frac{g}{k}(m_a+2m_b)+2l_0+\psi_b\right) - \left(\frac{g}{k}(m_a+m_b)+l_0+\psi_a\right) - l_0\right] - gm_b \\ \qquad = g(m_a+2m_b)+2kl_0+k\psi_b - g(m_a+m_b)+kl_0+k\psi_a-kl_0-gm_b \\ \qquad = -k(\psi_b-\psi_a) \end{cases}$$

Exactamente lo que teníamos para el caso sin gravedad. ¿Qué es lo que cambia? No hay que olvidar de que si se quiere expresar las posiciones no desde el equilibrio sino como y_i hay que sumar la posición de equilibrio, que ahora es mayor en módulo que las de los resortes libres, l_0 y $2l_0$ respectivamente.

Siendo perspicaces tendríamos que haber recordado que nada de lo que obtuvimos, en particular las frecuencias de oscilación, tenían dependencia en las longitudes de los resortes, si de k y las m.

[ ]: