Pulsos y espectros cuadrados

Los ejercicios con (*) entrañan una dificultad adicional. Son para investigar después de resolver los demás.

1. **Espectro plano acotado**
$\hat{\phi}(\omega)$ en un $\Delta\omega$ centrado en un ω_0 presenta una amplitud constante $\frac{1}{\Delta\omega}$. En otras ω es nula.

 a) Verifique que el correspondiente $\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\phi}(\omega)$ está dado por:
$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}t}\right]\mathrm{e}^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\operatorname{senc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{e}^{i\omega_0 t}.$$

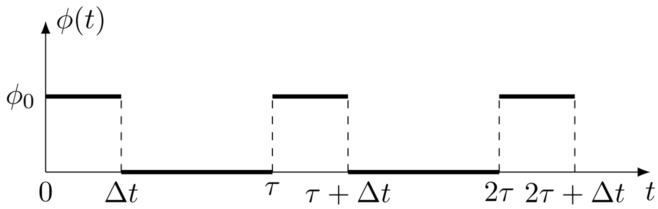
 b) Grafique $\hat{\phi}(\omega)$ y $|\phi(t)|$ para $\omega_0 = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ y $\Delta\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$. ¿Qué parte de la expresión de $\phi(t)$ impone límites temporales para el paquete de mayor amplitud? Determine tales límites.

 c) Sea T un intervalo de tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constantes.

2. **Tren de pulsos cuadrados**

 a) Muestre que $\mathcal{F}$ es lineal, por tanto $\mathcal{F}\left(af(x) + bg(x)\right) = a\mathcal{F}f(x) + b\mathcal{F}g(x)$, donde a, b son constantes.

 b) $\phi(t)$ es una serie de pulsos cuadrados de duración Δt que se repiten N veces con un período τ ($\Delta t < \tau$). Si $f(n,t)$ describe la función en cualquiera de los intervalos $[n\tau, (n+1)\tau]$ que contiene estos pulsos de amplitud no nula ϕ_0 en $[n\tau, n\tau + \Delta t]$ de forma que $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N} f(n,t)$, compruebe que



$$\mathcal{F}\phi(t) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{N} f(n,t)\right] = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-in\omega\tau}\,\mathcal{F}f(0,t).$$

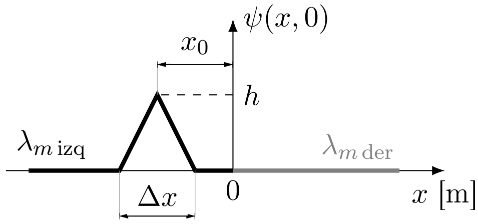
 c) Resuelva $\mathcal{F}f(0,t)$ para obtener la expresión completa de $\hat{\phi}(\nu) = \mathcal{F}\phi(t)$.

 d) El rasgo más prominente de $\hat{\phi}(\nu)$ son picos en $\nu_p = p\nu_1$ ($p \in \mathbb{N}$) donde $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$, es decir, una serie de armónicos de ν_1. Encuentre en la expresión de $\hat{\phi}(\nu)$ el término que depende de τ responsable de este comportamiento y verifique ν_p.

 e) De similar análisis identifique qué término con dependencia en Δt hace que los armónicos más importantes se detecten en $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$.

 f) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es $\delta\nu = \frac{2}{(N+1)\tau}$, y calcule cuánto más pequeño es que el $\Delta\nu$ entre sucesivos ν_p.

3. **Interfaz entre medios no dispersivos**
Dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, $\lambda_{m\,\mathrm{izq}}$ y $\lambda_{m\,\mathrm{der}}$, están unidas y sometidas a una tensión T_0. Sobre la primera se propaga hacia $+\hat{x}$ la perturbación que muestra la figura. Se conocen $\lambda_{m\,\mathrm{izq}}$, $\lambda_{m\,\mathrm{der}}$, T_0, x_0, Δx y h, y se considera que los medios son no dispersivos.



 a) Hallar el desplazamiento $\psi(x,t)$.

 b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el medio es dispersivo.