Soluzioni Mantegazzario

Federico Franceschini, Dario Ascari, Dario Balboni, Umberto Pappalettera
Andrea Marino, Gianluca Tasinato, Marco Costa

23 giugno 2015

Convenzioni

Nel seguito useremo le seguenti convenzioni:

- $\sim$ verrà usato per indicare l'equipotenza tra cardinalità insiemistiche.
- Verranno spesso usate $\geq$ e $\leq$ per disuguaglianze tra cardinalità insiemistiche.
- La **NINI** (Non-empty Intersection of Nested Intervals) dice che, data una successione di intervalli chiusi e limitati, ciascuno contenuto nel precedente, essi hanno intersezione non vuota. (Nota: in generale vale per i compatti)
- Alle volte faremo uso della cosiddetta *"notazione intuitiva"* ideata dal grande teorico $\mathcal{D}.\mathcal{C}.\mathcal{B}.$, cioè: se trovate una n è un naturale (eventualmente nullo), ma se trovate un $1/n$, n è un naturale positivo, e via dicendo...

1 Teoria degli Insiemi

1.30 $\Psi\Psi\Psi\Psi$

Riportiamo solo il polinomio bigettivo: $p(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + 1)(x + y) + x$. Questo polinomio conta i punti a coordinate intere sul piano per diagonali del tipo $x + y = k$.

1.31

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$:
($\geq$) Ad ogni numero reale nell'intervallo $(0, 1)$ si associa la successione delle sue cifre.
($\leq$) Scriviamo le cifre in base due dell' i-esimo numero della successione nell' i-esima colonna di una tabella (a partire dalla cifra delle unità). Leggiamo ora queste cifre per diagonali come le cifre dopo la virgola di un numero reale in base dieci in $[0, 1)$.

1.36

Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$: basta conoscere i valori della funzione sui razionali ed estenderla per continuità. Dunque la cardinalità è $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}$.

1.39

Uso come lemma **1.44**.

1.40

Uso come lemma la prima metà di **1.42**.

1.41

Dimostro per prima cosa che $A \times A \sim A$: Considero l'insieme ordinato

$$\mathcal{F} := \{(f, X) \mid f : X \times X \to X,\ X \subseteq A,\ f \text{ bigettiva },\ X \text{ infinito}\}$$

Osservo che è non vuoto. La relazione d'ordine $\preceq$ definita da

$$(f, X) \preceq (g, Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge g\mid_{X \times X} = f$$

.
Applico Zorn ed ottengo l'esistenza di un massimale (h, M). Se $\mathbf{card}(A \setminus M) < \mathbf{card}(M)$ trovo una bigezione da A in M. Altrimenti trovo un elemento più grande del massimale. (Non immediato)

1.42

Per la prima metà usate Zorn. Per il punto 2 uso il lemma **1.40**.

1.43

Uso come lemma **1.42** e leggo *per colonne e non per righe*.

1.44

Usate Zorn.

1.46

Devo dimostrare un po' di disuguaglianze tra cardinalità: ogni volta sostituisco dal lato che voglio dimostrare essere maggiore $X \times Y$ al posto di X (o Y) (usando **1.41** a palla).
Ad esempio: supponiamo $\mathbf{card}(Y) \geq \mathbf{card}(X)$; voglio trovare una funzione iniettiva Φ da $\{f : X \to Y\}$ in $\{g : X \to Y \mid g \text{ iniettiva }\}$: noto che, essendo $X \times Y \sim Y$, vale

$$\{g : X \to Y \mid g \text{ iniettiva }\} \sim \{g : X \to X \times Y \mid g \text{ iniettiva }\}$$

Definisco $\Phi(f)$ come la funzione g che manda $x \mapsto (x, f(x))$.

1.50

Supponiamo esista una funzione iniettiva da RHS in LHS: fissato un indice $i \in \mathcal{I}$, considero la controimmagine di X_i: l'insieme delle componenti lungo Y_i di tali controimmagini non può essere tutto Y_i (perchè $\mathbf{card}(X_i) < \mathbf{card}(Y_i)$); quindi esiste $\check{y}_i \in Y_i$ che non è la i-esima componente di nessun elemento della controimmagine di X_i. Dove viene mandato $\prod_{i \in \mathcal{I}} \{\check{y}_i\}$?

2 Numeri Reali e Disuguaglianze

2.5

Pigeonhole sull'insieme delle parti frazionarie di $a, 2a, \ldots$

2.13

AM-GM. Induzione. Il passo base per $n = 2$ si verifica facilmente. Assumiamo ora che la disuguaglianza sia vera per n termini e mostriamola per $n+1$.

$$\left(\prod_{i=0}^{n+1} a_i\right)^{1/n+1} = \left(\prod_{i=0}^{n} a_i\right)^{1/n+1} \cdot a_{n+1}^{1/n+1} = \left(\prod_{i=0}^{n} a_i^{1/n}\right)^{n/n+1} \cdot a_{n+1}^{1/n+1}$$

. Si noti ora che gli esponenti dei due fattori sommano ad 1. Applichiamo dunque Young.

$$\left(\prod_{i=0}^{n} a_i^{1/n}\right)^{n/n+1} \cdot a_{n+1}^{1/n+1} \leq \frac{n}{n+1} \prod_{i=0}^{n} a_i^{1/n} + \frac{1}{n+1} a_{n+1} \leq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n+1} = AM$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è fatto uso dell'ipotesi induttiva di AM-GM su n termini

HM-GM. Anche qui si procede come prima cercando un modo furbo di applicare Young

QM-AM Il passo base per $n = 2$ è verificato. La tesi equivale a mostrare

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i^2 \geq \frac{1}{n+1} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n+1} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\right)$$

Moltiplicando ambo i membri della disuguaglianza e spezzando alcuni addendi abbiamo

$$n \sum_{i=0}^{n+1} a_i^2 + \sum_{i=0}^{n} a_i^2 + n a_{n+1}^2 \geq \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)^2 + 2a_n \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

Si noti ora che

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 + n a_{n+1}^2 \geq 2a_{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i$$

in quanto portando a sinistra la sommatoria otteniamo la somma di n quadrati Ma

$$n \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \geq (\sum_{i=0}^{n} a_i)^2$$

per ipotesi induttiva. Dunque tutti gli addendi a LHS maggiorano quelli a RHS e dunque la tesi è verificata.

2.15

La disuguaglianza a sinistra è ovvia. Per mostrare la disuguaglianza a destra si riscrive come $\frac{x+n-1}{n} > x^{1/n}$ che è AM-GM sulla n-upla costituita da x e $n-1$ volte 1.

2.22

Riscriviamo come

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \Leftrightarrow 2\sum_{i \neq j}^{n} a_i a_j \leq (n-1)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)$$

che può essere riscritto portando RHS a sinistra come

$$\sum_{i=0,\, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)^2$$

ossia come somma dei quadrati delle $n(n-1)$ differenze. Pertanto la tesi è verificata.

2.24

La tesi equivale a $(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i)^p \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i^p$. Dato che la disugaglianza è omogenea prendiamo come ipotesi di comodo

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^p = 1 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$$

Effettuiamo il seguente cambio di variabile: $a_i \to 1 + b_i$, con $\sum_{i=0}^{n} b_i = 0, b_i \geq 0$. Otteniamo

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} (1+b_i)^p \geq 1$$

che è vera applicando ad ogni addendo di LHS la disuguaglianza di Bernoulli con le ipotesi sulla somma descritte in precedenza.

2.29

Disuguaglianza a sinistra: usare come ipotesi di comodo $abcd = 1$. Effettuare il cambio di variabili $a \to \frac{1}{a}$ e cicliche. Si conclude dopo un passaggio per per la disuguaglianza fra medie $M_{1/3} \geq M_0 = GM$.
Disuguaglianza centrale: effettuare il seguente cambio di variabile: $a \to a^6$ e cicliche. Otteniamo

$$3(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2) \leq 2(a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3+c^3d^3)$$

Si noti ora che
$$3a^2b^2c^2 \leq a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3$$
per AM-GM. Ripetendo il procedimento per ogni addendo a LHS e sommando le disuguaglianze otteniamo proprio la tesi.
Disuguaglianza a destra: effettuare il cambio di variabile $a \to a^2$ e cicliche. Otteniamo
$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0$$
che è vera.

2.30

Legare la lunghezza delle proiezioni a quella dei rispettivi lati in una formula che indichi l'area complessiva del triangolo. L'espressione ottenuta è prodotto scalare fra due vettori particolari. Finire con Cauchy-Schwarz.

3 Successioni

3.3

Per $|p| < 1$ è vera. Altrimenti ci sono controesempi.

3.4

Posto $\Delta_k := a_k - a_{k-1}$ l' ipotesi si riscrive come: $2\Delta_n + \Delta_{n-1} < 0$. Osservo che i due addendi non possono essere entrambi positivi. Osserviamo inoltre che preso un $\Delta_k < 0$ si ha che le somme $\Delta_k + \ldots + \Delta_{k+N} < 0$ perchè posso accoppiare ogni termine positivo col precedente che deve essere negativo. Questo significa che ogni volta che la successione si abbassa sotto un certo livello (fa un salto negativo) vi rimane sotto definitivamente. Cioè che $\Delta_k < 0 \Rightarrow a_{k-1} > a_n$ con $n \geq k$. Posto $\ell := \liminf_n a_n$ (é un numero reale perché la successione é limitata inferiormente) e fissato $\epsilon > 0$ definisco $I_\epsilon := [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$. Per definizione posso mettermi nella zona in cui la successione sta definitivamente sopra $\ell - \epsilon$ e frequentemente sotto $\ell + \epsilon$, preso qui un certo a_k ci sono due casi, se $\Delta_k \geq 0$ so che $\Delta_{k+1} < 0$ dunque a_{k+1} sta in I_ϵ e tutta la successione ci sta. Se invece $\Delta_k < 0$ si ha che necessariamente $a_{k-1} \in I_{3\epsilon}$ (perchè sia a_{k-1} che a_{k-2} erano sopra $\ell - \epsilon$) dunque la successione sta definitivamente in $I_{3\epsilon}$. Per l' arbitrarietà di ϵ si conclude.

3.7

Stimare fattoriali (dopo essere passati al logaritmo) e serie con gli integrali o alla peggio usate brutalmente la formula di Stirling.
Oppure usate Stolz-Cesaro.

3.17

Mostrare che gli intervalli $I_n = [x_n, y_n]$ sono inscatolati i.e. $I_{n+1} \subseteq I_n$ e che l'ampiezza di tali intervalli tende a zero. (Si conclude per la **NINI**).

3.18

La successione è evidentemente positiva e strettamente crescente. Supponiamo sia finito $L := \limsup_n x_n$. Scelgo $\epsilon < 1/L$ e prendo (grazie alla definizione di $\limsup$) un $L - \epsilon < x_N < L$ e scrivo:

$$L > x_{N+1} = x_N + \frac{1}{x_N} > L - \epsilon + \frac{1}{L}$$

Guardando primo e ultimo membro si ha un assurdo. Per valutare l' ordine di crescita interpreto x come funzione di n variabile reale e osservo che

$\frac{dx}{dn} \sim x_{n+1} - x_n$ l' equazione ricorsiva diventa: $\frac{dn}{x} = dx$ integrando ottengo soluzioni del tipo $x_n = \sqrt{n}$. Il risultato è corretto a meno di costanti moltiplicative/additive come si può verificare per induzione.

4 Serie Numeriche

4.5

Usare la formula per $\tan(\alpha - \beta)$ e telescopizzzare.

4.13

Moltiplicate per 3 ...

4.17

Usate la sommazione per parti di Abel, ovvero **1.25**. (Non è affatto inutile come sembra)

4.19

Usate nuovamente la sommazione per parti di Abel (**1.25**)

4.21

Ancora sommazione per parti (**1.25**)

4.22

Pongo $\frac{b_n}{a_n} = 1 + \epsilon_n$: serve che $\sum(-1)^n a_n$ converga e $\sum(-1)^n \epsilon_n a_n$ diverga. Trovare tali a_n e ϵ_n.

4.27

Osservare che $\frac{1}{n-1} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{n^j}$ e fattorizzare.

4.32

Dare la formula chiusa per $\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$ scrivendola come geometrica di esponenziali complessi. Poi usare sommazione per parti di Abel (**1.25**).

5 Topologia di $\mathbb{R}$

5.12

Usando **5.16** si ha che $\mathbf{card}(\text{aperti}) \leq \mathbf{card}\left((\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}}\right) = \mathbf{card}(\mathbb{R})$.

5.15

Controesempio alla seconda domanda: $A = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \mathbb{Z}$.

5.16

A aperto di $\mathbb{R}$. Definiamo $\forall a \in A \quad I_a := \bigcup\{(x, y) \mid a \in (x, y) \subseteq A\}$; gli I_a sono intervalli e partizionano A. Una famiglia di intervalli disgiunti di $\mathbb{R}$ ha cardinalità al più numerabile; per provarlo intersecarli con $\mathbb{Q}$ oppure osservare che per ogni lunghezza positiva fissata ℓ ve ne sono al più una quantità numerabile di lunghezza maggiore di ℓ. A questo punto si sceglie $\ell = \frac{1}{n}$ e si numerano.

5.17

Passare al complementare e usare **5.16**

5.18

Usare la **NINI** per dire che esistono punti che non vengono coperti dai chiusi del ricoprimento. (passare al complementare ed usare la **NINI** sugli aperti)

5.19

Passare al complementare e usare **5.20**

5.20

NINI

5.21

Contarli come in **5.16**

5.22

Caratterizzare i chiusi come gli insiemi che contengono i loro punti di accumulazione.

5.23

Bisezionare ed ogni volta e scegliere negli intervalli creati un qualsiasi elemento (se c'è) di F. (si generalizza ad $\mathbb{R}^n$)

5.30

Seconda parte: supponiamo per assurdo $\mathbf{card}(A) > \mathbf{card}(\mathbb{N})$. Operiamo una bisezione su A per vedere dove ci sono una quantità più che numerabile di punti: ad ogni bisezione sono ad un bivio e la scelta può essere *libera* o *obbligata*. Può essere *libera* se da entrambi i lati ci sono una quantità più che numerabile di punti. Non si possono presentare definitivamente scelte *obbligate*: qualunque successione di scelte *libere* io faccia prima o poi mi si presenterà un'altra scelta *libera* (se no in quell'intervallo avrei solo una quantità numerabile di punti). Ma allora ho libertà $\mathbf{card}(\mathbb{N})$ volte di scegliere tra due possibilità: almeno $\mathbf{card}(2^{\mathbb{N}}) \sim \mathbf{card}(\mathbb{R})$ punti di accumulazione.
Alternativa: considero i punti di A. Aut sono isolati (dunque hanno cardinalità al più numerabile) aut sono di accumulazione (dunque stanno in A' e hanno ancora cardinalità al più numerabile).

5.31

Prima parte: consideriamo $A_0 := \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ quest' insieme chiaramente si accumula in 0 ed è composto da soli punti isolati. Costruiamo A_1 traslando e omotetizzando copie di A_0 in modo che si accumulino sui punti del tipo $1/n$ e che si abbia quindi $A_1' = A_0$. Ricorsivamente si riesce ad ottenere la tesi. Seconda parte: incollare nell'intervallo $[2n, 2n+1]$ la soluzione della prima parte con n.

5.32

Sia X il mio insieme. Considero un suo punto x_o: trovo una successione di punti di X che tende a x_o; reitero il procedimento per ogni punto di tale successione e così via: ho trovato $\mathbf{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ punti.

6 Spazi metrici, normati e topologici

6.1

Osservo che dato un $c \in C_1$ deve esistere $r > 0$ tale che $\overline{B_r}(c) \cap C_2 = \emptyset$. Se così non fosse c sarebbe di accumulazione per C_2, dunque vi apparterrebbe, assurdo per disgiunzione. Unendo tali B_r ottengo il mio aperto.

6.4

Scrivo il mio aperto come unione numerabile di palle aperte: $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$. Ogni palla aperta si scrive come successione strettamente crescente di palle compatte: $B_{r_n}(x_n) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_{n,k}$ dove abbiamo posto $Y_{n,k} := B_{\frac{k}{k+1}r_n}(x_n)$. Pongo $K_n := \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} Y_{k,n-k}$ e funziona.

6.5

Controesempio: mettere quattro punti su una sfera con la metrica delle geodetiche.

6.7

Controesempio $X = \mathbb{R}$, $A = \{n + 1/n\}$, $B = \mathbb{N}$.

6.13

Se una sottosuccessione $(x_{k(n)})$ converge a x_∞, allora per ogni n ed m vale:

$$d(x_\infty, x_n) \leq d\left(x_\infty, x_{k(m)}\right) + d\left(x_{k(m)}, x_n\right)$$

che è infinitesimo per la convergenza di $\left(x_{k(n)}\right)$ e il fatto che la successione sia di Cauchy ($k(m)$ è un naturale $\geq n$).

6.24

Se (X, d) è compatto allora anche $(\mathcal{K}(X), \delta)$ è compatto.

Data una successione $\langle K_i | i \in \mathbb{N}\rangle$ di compatti, voglio trovare una sottosuccessione convergente. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Definisco $K_\infty := \{x \in X : \forall$ intorno U di x vale $\{i : K_i \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{U}\}$. É semplice vedere che K_∞ è un sottoinsieme chiuso di X, e quindi appartiene a $\mathcal{K}(X)$. Definisco ricorsivamente la sottosuccessione di compatti in questo modo: fisso n.

Dato che K_∞ è compatto, per totale limitatezza degli spazi metrici compatti esiste un ricoprimento finito di K_∞ con palle aperte di raggio $\frac{1}{2n}$: per ogni palla P tra queste considero l'insieme degli indici $\{i : K(X) \cap P \neq \emptyset\} \in \mathcal{U}$: per proprietà di filtro, detta A l'intersezione di questa famiglia finita di insiemi, $A \in \mathcal{U}$.

Considero ora l'insieme dei punti lontani almeno $\frac{1}{n}$ da K_∞, ovvero $L_{\frac{1}{n}} := \{x \in X : d(x,y) \geq \frac{1}{n} \forall y \in X_\infty\}$: è facile accorgersi che questo è un chiuso (dunque è compatto); per definizione di K_∞ e per proprietà di ultrafiltro vale $\forall x \in L_{\frac{1}{n}} \exists B(x, r_x)$ (B palla aperta di centro x e raggio $r_x \leq \frac{1}{n}$) tale che $I_x := \{i : K_i \cap B(x, r_x) = \emptyset\} \in \mathcal{U}$. Essendo $B(x, r_x)$ un ricoprimento del compatto $L_{\frac{1}{n}}$, ammette in sottoricoprimento finito: considero l'intersezione B della famiglia finita degli insiemi I_x relativi alle palle del ricoprimento finito: per proprietà di filtro $B \in \mathcal{U}$.

Definisco per ricorsione $j(n)$ (l'indice dell'n-esimo elemento della sottosuccessione) come il minimo dell'insieme $(A \cap B) \setminus \{j(1), ..., j(n-1)\}$: essendo A, B e $\mathbb{N} \setminus \{j(1), ..., j(n-1)\} \in \mathcal{U}$ (perchè l'ultrafiltro non è principale), l'insieme di cui voglio prendere il minimo $\in \mathcal{U}$, quindi in particolare è non vuoto. Inoltre $\delta(K_{j(n)}, K_\infty) \leq \frac{1}{n}$: infatti

- dato che $j(n) \in A$, ogni punto di K_∞ sta in una palla di raggio $\frac{1}{2n}$ che contiene almeno un punto di $K_{j(n)}$, quindi ogni punto di K_∞ dista meno di $\frac{1}{n}$ da $K_{j(n)}$;
- dato che $j(n) \in B$, $K_{j(n)} \cap L_{\frac{1}{n}} = \emptyset$ quindi ogni punto di $K_{j(n)}$ dista al più $\frac{1}{n}$ da K_∞.

Quindi la successione $K_{j(n)}$ tende a K_∞ e la tesi è dimostrata.

6.27

Supponiamo che, nelle ipotesi date, K non sia connesso. Allora K si spezza nell' unione di due aperti disgiunti A_1 e A_2. Osservo che definitivamente si deve avere $K_n \cap A_1 \neq \emptyset$ e $K_n \cap A_2 \neq \emptyset$ altrimenti frequentemente $\delta(K_n, K) > r$ dove r è il raggio (fissato) di una palla centrata in un certo $k \in K$ tale che $B_r(k) \subseteq A_1$ (usiamo il fatto che se esiste una palla di raggio r centrata in $k \in K$ che è sempre disgiunta da K_n allora $\delta(K, K_n) \geq r$). A questo punto esiste una successione di x_n tali che $x_n \in K_n \setminus (A_1 \cup A_2) \subseteq (A_1 \cup A_2)^c$. Questa successione per il **6.22** converge ad un elemento $x_\infty \in K$; ma $(A_1 \cup A_2)^c$ è chiuso e quindi contiene i limiti delle proprie successioni, assurdo.

6.37

"Solo se". Supponiamo vera l' identità del parallelogramma. L' unica definizione sensata a posteriori è:

$$2\langle x|y\rangle := \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

Le proprietà immediate da verificare (usando l' equivalenza delle definizioni) sono:

$$\langle x|x\rangle = \|x\|^2\,, \qquad \langle x|-y\rangle = -\langle x|y\rangle, \qquad \langle x+y|y\rangle = \langle x|y\rangle+\|y\|^2\,, \qquad \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$$

Usando la subadditività della norma poi:

$$|\langle x|y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$$

Da questa disuguaglianza si ha che la funzione definita è continua su $V\times V$. Proviamo l' additività. Scriviamo la seguente espressione:

$$\|x+2z\|^2 = \|(x+z)+z\|^2 = \|x\|^2+2\,\|z\|^2+2\langle x|z\rangle+2\langle x+z|z\rangle = \|x\|^2+4\,\|z\|^2+4\langle x|z\rangle \qquad (\star)$$

Scrivo ora la tesi:

$$4\langle x+y|z\rangle = 4\langle x|z\rangle + 4\langle y|z\rangle$$

Usando la terza uguaglianza della definizione e portando le cose dello stesso segno dalla stessa parte ottengo:

$$\|x+y+z\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 = \|x+y-z\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2$$

Ora moltiplico per due e applico l' identità del paralleogramma ai primi due addendi di ogni membro, ottenendo:

$$\|2x+y\|^2 + \|y+2z\|^2 + 2\,\|y-z\|^2 = \|2x+y\|^2 + \|y-2z\|^2 + 2\,\|y+z\|^2$$
$$\Leftrightarrow \|y+2z\|^2 + 2\,\|y-z\|^2 = \|y-2z\|^2 + 2\,\|y+z\|^2$$

da qui si conclude usando $(\star)$ per aprire le norme. Manca adesso l' omogeneità. Si ha subito per omogeneità della norma che:

$$\langle \lambda x|\lambda y\rangle = \lambda^2\langle x|y\rangle \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

usando induttivamente l' additività ottengo che:

$$\left\langle \frac{a}{b}\,x \,\middle|\, \frac{c}{d}\,y \right\rangle = \frac{1}{b^2d^2}\,\langle ad\,x|cb\,y\rangle = \frac{ac}{bd}\,\langle x|y\rangle \qquad a,b,c,d\in\mathbb{N}$$

questo prova l' omogeneità sui razionali, per continuità ciò è vero su $\mathbb{R}$.

6.39

Essendo V a dimensione finita esiste, fissata una base, un isomorfismo ψ con un certo $\mathbb{R}^d$:

$$\psi:\ V \ni \lambda_1\vec{e_1}+\ldots+\lambda_d\vec{e_d} \ \mapsto\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)\in\mathbb{R}^d$$

Pongo ora su V la norma *euclidea*:

$$\|v\|_{\mathcal{E}} := \max_i\{|\lambda_i|\}$$

mostriamo che $B_{\mathcal{E}}$, la sfera unitaria, è compatta per successioni. Data una successione di vettori unitari in V le loro componenti sono d successioni di reali in $[-1, 1]$ dunque per Bolzano-Weierstrass hanno una sottosuccessione convergente. Considero ora un' altra generica norma su V e la penso come funzione dalla sfera unitaria in $\mathbb{R}$:

$$\|\cdot\| : B_{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}$$

Questa funzione è continua rispetto alla metrica indotta da $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, in effetti si ha che è lipschitziana:

$$\|u - v\| \leq \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| \, \|\vec{e_i}\| \leq d \cdot \max_i\{|u_i - v_i|\} \cdot \max_i\{\|\vec{e_i}\|\} = K \|u - v\|_{\mathcal{E}}$$

Quindi per Weierstrass ammette $\max = M$ e $\min = m$, che devono essere positivi. Dunque si ha, per un generico $u \in B_{\mathcal{E}}$:

$$m \|u\|_{\mathcal{E}} \leq \|u\|_2 \leq M \|u\|_{\mathcal{E}}$$

Abbiamo mostrato che ogni norma è equivalente a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$; e poichè relazione di bi-lipschitz equivalenza gode della proprietà transitiva abbiamo finito.
Per la seconda domanda si prenda V come l' insieme delle successioni a valori reali assolutamente sommabili, le seguenti norme non sono equivalenti:

$$\|x_n\|_1 = \sup_k |x_k| \quad \text{e} \quad \|x_n\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} |x_k|$$

in effetti non inducono neppure la stessa topologia poichè esistono successioni di vettori di V che rispetto alla prima non convergono mentre rispetto alla seconda si. (ad esempio $(x_n)_k = \delta_{n,k}$).

6.40

Controesempio: nello spazio V delle successioni la cui somma dei valori assoluti converge considero il sottospazio W delle successioni definitivamente nulle. Se prendo le successioni del tipo $x_n = 2^{-n}\chi_{[0,k]}$ queste vivono in W ma il loro limite (rispetto a k si intende, cioè la successione $y_n = 2^{-n}$) chiaramente no.

6.41

Completezza ⇒ Convergenza assoluta. Poichè la serie converge il termine generale è infinitesimo, per completezza di $\mathbb{R}$ questo vuol dire che, posto $S_k = \sum_{i=0}^{k} x_i$, si ha:

$$\epsilon > \sum_{i=M}^{N} \|x_i\| \geq \left\| \sum_{i=M}^{N} x_i \right\| = \|S_N - S_M\| \qquad N, M \geq n_\epsilon$$

Dunque la successione $S_N \in V$ e di Cauchy e per completezza converge. *Convergenza assoluta* $\Rightarrow$ *Completezza.* Supponiamo V incompleto. Esiste dunque (x_n) che ha la proprietà di Cauchy ma non converge in V. Usando nella definizione di Cauchy $\epsilon = 2^{-j}$ estraggo una sottosuccessione $(x_{n(j)})$ tale che la successione di partenza stia definitivamente in $B_{2^{-j}}(x_{n(j)})$ e scelgo sempre $x_{n(j+1)} \in B_{2^{-j}}(x_{n(j)})$. Osservo che anche $(x_{n(j)})$ ha la proprietà di Cauchy e per **6.13** neanche lei converge. Posto $y_j := x_{n(j+1)} - x_{n(j)}$ ho che:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n(k)} - x_{n(0)} = \sum_{i=1}^{k} y_j \to \ell \;\Rightarrow\; x_{n(k)} \text{ converge}$$

ma questo è assurdo.

6.50

Numero di Lebesgue. Sia dato un ricoprimento aperto $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Supponiamo che l' $\inf$ dei raggi sia 0. Questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una palla $B_\epsilon(x_\epsilon)$ che non è contenuta interamente in nessun aperto del ricoprimento. Per ogni n, mi gioco questa proprietà con $\epsilon = 1/n$ e definisco come x_n il centro della palla $B_\epsilon(x_\epsilon)$. Questa successione ammette una sottosuccessione convergente (x_{n_k}) ad un certo elemento $x_\infty \in X$, ma questo punto limite deve stare in un certo A_λ (perchè sono un ricoprimento); dunque esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_\infty) \subseteq A_\lambda$. In particolare ci saranno infiniti punti della mia sottosuccessione nell' intorno $B_{r/2}(x_\infty)$. Ma allora scelgo un elemento della sottosuccessione abbastanza avanti in modo che $n_k > 2/r$, ottengo quindi che

$$B_{1/n_k}(x_{n_k}) \subseteq B_r(x_\infty) \subseteq A_\lambda$$

ma questo è assurdo perchè viola la proprietà caratteristica di x_{n_k} (ha la palla di raggio dato interamente contenuta in un aperto del ricoprimento).

6.51

(**NINI** in spazi metrici) Scelgo una successione tale che $x_n \in F_n$. Tale successione vive in F_1 che è compatto dunque qui ammette una sottosuccessione convergente a x_∞. Per ogni naturale N osservo che la sottosuccessione vive definitivamente in F_N e per compattezza qui vive il suo limite x_∞, ciò prova che $x_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

6.54

Compattezza per ricoprimenti $\Rightarrow$ *Compattezza sequenziale*

Supponiamo per assurdo che esista una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. Questo significa che l' immagine di

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha punti di accumulazione, cioè che:

$$\forall x \in X\ \exists \epsilon_x > 0 :\ (B_{\epsilon_x}(x) \setminus \{x\}) \cap (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$$

Chiaramente $\bigcup_{x\in X} B_{\epsilon_x}(x) \supseteq X$ dunque $\{B_{\epsilon_x}(x)\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto; ma per ipotesi deve ammettere un sottoricoprimento finito che avrà centri $y_1, \dots, y_k$. Per pigeonhole per almeno un $1 \leq i \leq k$ ho che $B_{\epsilon_{y_i}}(y_i)$ contiene infiniti termini della successione, ma per costruzione ne può contenere al più uno. Assurdo.

Compattezza sequenziale $\Rightarrow$ *Totale limitatezza*

Fissato un $\epsilon > 0$ e scelto un $x_0 \in X$ definisco ricorsivamente una sequenza (x_n) scegliendo ogni termine in modo che:

$$x_n \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} B_\epsilon(x_i)$$

Opero una dicotomia (*cit.*):

- Se esiste N tale che $X \setminus \bigcup_{i=0}^{N} B_\epsilon(x_i) = \emptyset$ ho trovato un ricoprimento finito;
- Se un tale N non esiste allora ho ottenuto una successione (x_n). Per compattezza deve avere una sottosuccessione convergente (dunque di Cauchy): ma questo è assurdo perché comunque presi $m > n$ ho che:
$$x_m \notin B_\epsilon(x_n)\ \Rightarrow\ d(x_m, x_n) > \epsilon$$

Compattezza sequenziale $\Rightarrow$ *Completezza*

Sia (x_n) una successione di Cauchy; per compattezza ammette una sottosuccessione convergente ma, essendo di Cauchy (x_n) converge per **6.13**.

Completezza $\wedge$ *Totale limitatezza* $\Rightarrow$ *Compattezza sequenziale*

Prendo una qualsiasi successione $(x_n) \subseteq X$; voglio definire ricorsivamente una sua sottosuccessione convergente; per completezza mi basta farla di Cauchy. Per totale limitatezza posso ricoprire tutto X con numero finito di palle di raggio arbitrariamente fissato (diciamo $r_0 = 1$). La mia successione dovrà cadere infinite volte in almeno una di queste palle (per pigeonhole); ne prendo una e la chiamo B_0 e, poichè un sottoinsieme di un totalmente limitato è totalmente limitato, anche B_0 è totalmente limitato. Ma B_0 contiene infiniti termini della successione quindi, dato un qualunque suo ricoprimento finito posso trovare una $B_1 \subset B_0$ di raggio arbitrario ($r_1 = 1/2$) che contiene ancora infiniti elementi della successione. Definisco così induttivamente i B_k e li scelgo ogni volta di raggio 2^{-k}. Definisco ora la mia sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ così:

$$n_k := \min\{j \in \mathbb{N} \mid j > n_{k-1} \wedge x_j \in B_k\}$$

perchè l' insieme di cui prendo il minimo non è mai vuoto. Ma la sottosuccessione così definita è chiaramente di Cauchy.

Compattezza sequenziale ⇒ Compattezza per ricoprimenti

Sia dato un ricoprimento aperto $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Per compattezza sequenziale esiste un *numero di Lebesgue* ρ positivo (**6.50**). Per totale limitatezza esiste un ricoprimento finito con palle di raggio ρ; sia $\{B_\rho(x_1), \ldots, B_\rho(x_n)\}$ tale ricoprimento finito. Per definizione di numero di Lebesgue ho che ognuna di queste palle $B_\rho(x_i)$ è contenuta in almeno un aperto A_{λ_i} del mio ricoprimento; si ha dunque che $\{A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n}\}$ è ancora un ricoprimento del mio insieme ed è chiaramente finito.

Totale limitatezza ⇒ Separabilità

Voglio costruire un sottoinsieme denso e numerabile. Per ogni $\epsilon_k = 2^{-k}$ ho un ricoprimento finito di ϵ_k-palle. Sia $C_k = \{c_1, \ldots, c_{n(k)}\}$ l' insieme dei centri di queste palle. L' insieme $C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ è numerabile (in quanto unione numerabile di insiemi finiti) e denso, infatti dato un qualsiasi $x \in X$ ed $\epsilon > 0$ so che x è contenuto in una palla del mio $\epsilon-$ricoprimento finito, cioè dista meno di ϵ dal un centro di queste palle, che è un elemento di C. Per l'arbitrarietà di ϵ ogni palla centrata in x interseca C.

6.55

Separabilità ⇒ Topologia a base numerabile

Per ipotesi esiste D un sottoinsieme denso e numerabile. Voglio mostrare che

$$\mathcal{B} = \{B_q(d) \mid q \in \mathbb{Q}^+ \wedge d \in D\}$$

è una base per la mia topologia, essendo chiaramente $|\mathcal{B}| = |D \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. Prendo un generico $A \subseteq X$ aperto e un generico $a \in A$. So che esiste $r > 0$ tale che $B_{2r}(a) \subseteq A$. Ma per densità posso scegliere un b in $B_r(a) \cap D$; a questo punto scelgo un razionale q tale che $d(a, b) < q < r$ ed ho che:

$$\{a\} \subseteq B_q(b) \subseteq B_{2r}(a) \subseteq A$$

prendendo a primo e ultimo membro l' unione per ogni $a \in A$ ottengo che A si scriveva come unione di palle di raggio razionale e centro in D cioè come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Osserviamo che in realtà l' unione che abbiamo fatto è *sovrabbondante*, in effetti si può fare numerabile perchè stiamo unendo elementi di una famiglia numerabile ($\mathcal{B}$).

Topologia a base numerabile ⇒ Separabilità

Scegliamo un rappresentante per ogni insieme in $\mathcal{B}$. Mostriamo che quest' insieme è denso (è ovviamente numerabile essendolo $\mathcal{B}$), per farlo basta osservare che ogni palla aperta centrata in ogni punto è un aperto, dunque si scrive come unione di elementi di $\mathcal{B}$, dunque contiene un elemento che avevo scelto in partenza.

6.57

Supponiamo sia separabile, esiste dunque un insieme D denso e numerabile, sia poi $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la nostra famiglia di aperti disgiunti. Per densità si ha che per ogni λ esiste $d_\lambda \in D$ tale che $d_\lambda \in D \cap A_\lambda$. Ho dunque una mappa da Λ a D, si vede che è iniettiva per disgiunzione, da cui l' assurdo per cardinalità.

6.59

Posso fare delle funzioni continue che sugli interi valgono solo $\{0,1\}$. Per ogni numero reale $\xi \in [0,1)$ considero la sua rappresentazione binaria, e gli associo la funzione φ_ξ che nell' n esimo intero vale l' $n-$esima cifra binaria di ξ. Ma le palle aperte di raggio $1/2$ centrate in tali funzioni sono digiunte (infatti la distaza tra due di queste diverse è sempre 1), si conclude per **6.57**.

6.60

(Teorema di Lindelof). Sia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ il mio ricoprimento aperto e D il mio denso e numerabile, per **6.55** ho $\mathcal{B}$ una base numerabile per la topologia. Prendo ora un generico $x \in X$ e osservo che appartiene ad un A_{λ_x}, ma quest' ultimo si scrive come unione *numerabile* di elementi di $\mathcal{B}$; dunque esiste $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq A_{\lambda_x}$. Resta dunque definita una funzione:

$$\varphi:\ X \to \mathcal{B} \to \Lambda$$

$$\varphi : x \ \mapsto\ B_x\ \mapsto\ \lambda_x$$

Essendo i B_x numerabili ho che $\varphi(X)$ è numerabile, ma praticamente per definizione $\bigcup_{\lambda\in\varphi(X)} A_\lambda \supseteq X$.

6.62

(*Lemma di Baire*) Passando al complementare, voglio mostrare che non è possibile ottenere l'insieme vuoto come intersezione numerabile di aperti densi (qualsiasi palla B non è tutta contenuta in X, quindi esiste almeno un $y \in X^c \cap B$). Supponiamo per assurdo esista $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ collezione di aperti densi a intersezione vuota; costruiamo una successione (x_n) t.c. $x_1 \in A_1 \wedge \exists\delta_1 > 0 \quad B_{\delta_1}(x_1) \subseteq A_1, x_2 \in A_2 \cap B_{\delta_1}(x_1) \wedge \exists\delta_2 > 0$ t.c. $B_{\delta_2}(x_2) \subset$

$B_{\delta_1}(x_1), \ldots$. La successione (x_n) così costruita è di Cauchy (è dentro una palla di raggio $\delta_k \forall n \geq k$ e posso scegliere la successione del δ_k in modo che sia infinitesima e ogni y nel bordo di $B_{\delta_{n+1}}(x_{n+1})$ sia un punto interno di $B_{\delta_n}(x_n)$). Quindi $x_n \to x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, assurdo.

7 Continuità

7.6

Osserviamo che una formulazione equivalente è:

$$f \text{ surgettiva} \wedge (f(x_n) \text{ converge} \Rightarrow (x_n) \text{ converge}) \Rightarrow f \text{ continua}$$

Intanto mostriamo che f è iniettiva. Se non lo fosse avrei $f(x) = f(x') := f$ con $x \neq x'$, prendo la successione:

$$x_{2n} = x \;\text{ e }\; x_{2n+1} = x' \;\;\Rightarrow\;\; f(x_n) \to f \;\;\wedge\;\; (x_n) \text{ non converge}$$

Assurdo, dunque f è bigettiva, considero ora la sua inversa g e riscrivo il problema come:

$$g \text{ bigettiva} \wedge ((y_n) \text{ converge} \Rightarrow g(y_n) \text{ converge}) \Rightarrow f \text{ continua}$$

Posto ora che $y_n \to y_\infty$ e che $g(y_n) \to g_\infty$ considero la successione:

$$z_{2n} = y_\infty \;\text{ e } z_{2n+1} = y_n \;\Rightarrow\; g(z_{2n+1}) \to g_\infty \text{ e } g(z_{2n}) = g(y_\infty)$$

Per ipotesi di convergenza e per unicità del limite ho: $g_\infty = g(y_\infty)$. Ma questa è la continuità di g. Essendo g continua e bigettiva è monotòna e dunque la sua inversa, cioè f, è continua.

7.17

Mostriamo che f manda chiusi in chiusi (dunque f^{-1} controporta chiusi in chiusi dunque è continua). Prendo C chiuso in X, per compattezza di X anche C è compatto, dunque la sua immagine tramite f è compatta (Weierstrass), ma, in spazi metrici, ogni compatto è chiuso.

7.21

Mostriamo che se f è continua ed ha la proprietà richiesta allora è costante. Sia A l' insieme dei punti su cui f è localmente costante:

$$A = \{x \in \mathbb{R} | \; \exists \, r(x) > 0 \;\; \text{t.c. } y \in (x - r, x + r) \;\Rightarrow\; f(y) = f(x)\}$$

è facile vedere che A è aperto. Dunque se consideriamo l' insieme $R := \mathbb{R} \backslash A$ otteniamo un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$, che dunque è completo; prendiamo poi la restrizione di f a R e chiamiamola $g := f|_R$: è chiaro che tutti i punti di R sono o di massimo o di minimo per g.
Supponiamo per assurdo che $R \neq \emptyset$. Consideriamo i sopralivelli di g:

$$C_n := \{x \in R \mid g(x) \geq -n\} \qquad\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Se mostriamo che hanno tutti parte interna vuota abbiamo trovato un assurdo, perchè, essendo chiaramente la loro unione un ricoprimento numerabile di R, possiamo applicare il Lemma di Baire (R è completo).
Di nuovo per assurdo supponiamo che esista m tale che C_m ha parte interna non vuota; possiamo quindi prendere un intervallo $(a,b) \subseteq C_m \subseteq R$. Poichè su R la g non è localmente costante esistono due punti nel mio intervallo dove la g assume due valori distinti: siano $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ e sia $\overline{y}$ la loro media aritmetica. Consideriamo i due insiemi:

$$S^+ := \{x \in (a,b) \mid \exists\, r(x) > 0 \ \text{ t.c. } z \in (x-r, x+r) \ \Rightarrow g(z) \geq \overline{y}\,\} \supseteq \{g > \overline{y}\} \neq \emptyset$$

$$S^- := \{x \in (a,b) \mid \exists\, r(x) > 0 \ \text{ t.c. } z \in (x-r, x+r) \ \Rightarrow g(z) \leq \overline{y}\,\} \supseteq \{g < \overline{y}\} \neq \emptyset$$

Per prima cosa osserviamo che sono entrambi aperti (immediato dalla loro definizione), per seconda cosa notiamo che la loro intersezione è vuota: se ci fosse $\overline{x} \in S^+ \cap S^-$ avrei che g sarebbe localmente costante in $\overline{x}$ che dunque apparterrebbe ad A, assurdo.
Questo dimostra che (a,b) ha elementi che non stanno nè in S^+ nè in S^- altrimenti violerei il fatto che è connesso. Esiste allora $m \in (a,b) \setminus (S^+ \cup S^-)$, ciò significa intanto che $g(m) = \overline{y}$ e inoltre che m è di accumulazione per punti sia strettamente più grandi di $\overline{y}$ che strettamente più piccoli; ma questo è assurdo perchè m, come tutti i punti di R, deve essere estremante locale.
Da ciò deduciamo che l' assurdo era stato supporre R nonvuoto, dunque ricaviamo: $\mathbb{R} = A$. Ma per la connessione di $\mathbb{R}$ una funzione localmente costante su un insieme connesso (in questo caso tutto $\mathbb{R}$) è globalmente costante.

7.40

Controsempio cannonoso: Fissiamo una base di Hamel di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Ora ogni reale x si scrive come combinazione lineare *finita*: $x = \sum_{i=0}^{n_x} \frac{p_i}{q_i}\, b_i$. Definisco:

$$f : x \mapsto \frac{1}{\gcd(p_1, \ldots, p_{n_x})}$$

questa f è effettivamente un controesempio.
Controesempio alternativo: sia $A = \{\pi, \pi^2, \ldots\}$ definisco f costantemente 1 su A e nulla altrove. Fissato $\check{x}$ la sua progressione aritmetica casca al più una volta in A (che si riesca anche a fare continua sulla base di questa?)...
Se f è uniformemente continua invece il limite di f è nullo. Prendo $L = \limsup f$ e so che frequentemente c'è qualcuno (sia x_k) sopra $L - \epsilon$. Prendo il δ dell' uniforme continuità e ho che $f([x_k - \delta, x_k + \delta]) \geq L - 2\epsilon$. Scelgo ora $\check{x} < 2\delta$ e applico la prima ipotesi ottenendo un assurdo perchè capito negli intorni di tutti gli x_k ed ho $\limsup_n n\check{x} \geq L - 2\epsilon > 0$ per l' arbitrarietà di ϵ.

7.42

Negando formalmente la continuità in un punto otteniamo la seguente caratterizzazione dei punti di $D(f)$:

$$x \in D(f) \Leftrightarrow \exists \epsilon(x) > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x_\delta \text{ t.c. } |x_\delta - x| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x)| \geq \epsilon(x) \ [\star]$$

è chiaro che se un certo $\epsilon(x)$ verifica $[\star]$ allora la verificano anche quelli più piccoli; per non avere ambiguità scegliamo, per ogni x, il $\sup$ degli ϵ che verificano la condizione $[\star]$. In simboli: definiamo una funzione:

$$\eta : D(f) \to (0, +\infty)$$

$$\eta : x \mapsto \sup\{\epsilon(x) \mid \epsilon(x) \text{ soddisfa } [\star]\}$$

Ora definiamo, per ogni k positivo, i seguenti insiemi:

$$E_k := \{x \in D(f) \mid \eta(x) \geq 1/k\}$$

risulta chiaro che $D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k$; vorremo che tali insiemi fossero chiusi; in generale non lo sono, ma mostriamo che per ogni k esiste un $n(k)$ tale che:

$$\overline{E_k} \subseteq E_{n(k)}$$

Questo è vero scegliendo, ad esempio, $n(k) > 4k$, verifichiamolo.
Sia $\overline{x}$ di accumulazione per E_k. Supponiamo per assurdo che $\eta(\overline{x}) < 1/4k$ ciò significa che in un intervallino abbastanza piccolo intorno a $\overline{x}$ (chiamiamolo J) la funzione dista dal suo valore in $\overline{x}$ meno di $1/3k$ (convincersene: se non fosse così $\eta(\overline{x}) \geq 1/3k$).
Sia ora $(x_j) \subseteq E_k$ successione convergente a $\overline{x}$; per ogni j scelgo y_j ponendo nella definizione $\delta = 1/j$ dimodochè valga:

$$|x_j - y_j| < 1/j \qquad \wedge \qquad |f(x_j) - f(y_j)| \geq \eta(x_j) \geq \frac{1}{k}$$

dalla prima è evidente che $y_j \to \overline{x}$ perciò, almeno definitivamente, (x_j) ed (y_j) stanno in J, dunque, per j abbastanza grande vale:

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} \geq |f(\overline{x}) - f(x_j)| + |f(y_j) - f(\overline{x})| \geq |f(x_j) - f(y_j)| \geq \eta(x_j) \geq \frac{1}{k}$$

che è assurdo. A questo punto abbiamo finito perchè unire gli E_k equivale a unire gli $\overline{E_k}$:

$$D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{E_k}$$

7.43

Supponiamo che una tale funzione esista; ricordando che i punti di discontinuità di una funzione sono una F_σ avremmo che gli irrazionali si scrivono come unione numerabile di chiusi:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

è evidente che questi C_n non contengono razionali, dunque non hanno parte interna. Ma evidentemente anche i razionali si scrivono come unione numerabiole di chiusi a parte interna vuota, basta numerarli e scrivere:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{q_k\}$$

ma allora avremmo che:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{q_k\}$$

che è assurdo per il lemma di Baire.

7.48

Utilizziamo le notazioni del problema **7.39** e i risultati provati ai punti (3) e (4). Sia A l' insieme dei punti di discontinuità di f. Osserviamo che per ogni n la funzione $f|_{A_n}$ è ancora SCI e dunque i suoi sottolivelli, definiti per ogni reale M come:

$$B_{(n,M)} := \{x \in A_n : f(x) \leq M\}$$

sono dei chiusi (si vede velocemente utilizzando la caratterizzazione sequenziale di chiusura e la SCI). Osserviamo che in particolare:

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap B_{(k,k)} \text{ poichè } A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A \ \wedge \ B_{(k,k)} \subseteq B_{(k+1,k+1)}$$

infatti un punto di discontinuità ha necessariamente oscillazione non nulla e immagine finita. Abbiamo scritto così A come unione numerabile di chiusi, se facciamo vedere che hanno tutti parte interna vuota abbiamo finito. Supponiamo che esista n naturale e I intervallo aperto tale che $I \subseteq A_n \cap B_{(n,n)}$. Mostriamo ora che riusciamo a far assumere ad f ristretta ad I valori arbitrariamente grossi. Prendo un generico $x_0 \in I$ ricordando che per le funzioni SCI vale:

$$f(x) = \lim_{r \to 0^+} \inf_{y \in B_r(x)} f(y)$$

ho che affinchè l' oscillazione sia $\geq 1/n$ deve esistere in ogni palla centrata in x_0 di centro r_0 un punto x_1 tale che:

$$f(x_1) \geq f(x_0) + 1/2n$$

costruisco così ricorsivamente una successione (x_k), posso costruirla stando in I semplicemente scegliento i raggi in maniera tale che $\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i < \epsilon$, ma chiaramente:

$$f(x_N) \geq f(x_0) + \frac{N}{2n}$$

facendo tendere N all' infinito ho che gli (x_k) non possono stare in $B_{(n,n)} \supseteq I$. Assurdo.

7.63

Consideriamo $f_\epsilon(x) := f(x) + \epsilon x$ in modo che la monotonia locale sia stretta. Se supponessimo per assurdo che f_ϵ non sia monotona, avremmo che non è iniettiva (per continuità) e dunque ha un massimo locale in (a, b), ma questo è assurdo perchè nessun punto interno può essere di massimo locale (ha alla sua destra punti in cui la funzione ha un valore strettamente maggiore). Dunque le f_ϵ sono monotone, passando al limite per $\epsilon \to 0$ tale proprietà si preserva.

8 Successioni e Serie di Funzioni

8.12

$K \subseteq \mathbb{R}$ compatto e f_n continue su K, convergenti puntualmente ad f continua, $f_n \geq f_{n+1}$. Allora la convergenza è uniforme.

Supponiamo che non sia uniforme: allora esistono un $h > 0$ ed una successione di funzioni e di punti, siano f_i ed x_i rispettivamente ($i \in I \subseteq \mathbb{N}$ con I infinito), tali che $f_i(x_i) - f(x_i) > h$. Essendo K compatto, esiste una sottosuccessione x_j ($j \in J \subseteq I$) convergente ad x_∞. Per ipotesi vale $f_j(x_\infty) - f(x_\infty) \to 0$, quindi esiste $j_* \in J$ tale che $f_{j_*}(x_\infty) - f(x_\infty) < \frac{h}{4}$; inoltre, essendo f_{j_*} e f continue in x_∞, esiste δ tale che $[|x - x_\infty| < \delta \Rightarrow |f_{j_*}(x) - f_{j_*}(x_\infty)| < \frac{h}{4} \quad |f(x) - f(x_\infty)| < \frac{h}{4}]$; dal momento che $x_j \to x_\infty$ esiste $\bar{j} \geq j_*$ tale che $\left|x_{\bar{j}} - x_\infty\right| < \delta$. Infine, mettendo tutto assieme vale: $h < f_{\bar{j}}(x_{\bar{j}}) - f(x_{\bar{j}}) \leq f_{j_*}(x_{\bar{j}}) - f(x_{\bar{j}}) < (f_{j_*}(x_\infty) + \frac{h}{4}) - (f(x_\infty) - \frac{h}{4}) = f_{j^*}(x_\infty) - f(x_\infty) + \frac{h}{2} < \frac{3h}{4}$, assurdo.

8.15

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, (Y, δ) uno spazio metrico qualsiasi, e $f = \lim_{n \to infty} f_n$ una funzione da X in Y limite puntuale di funzioni. Allora le discontinuità di f sono un unione numerabile di chiusi a parte interna vuota. **Caratterizzazione delle discontinuità**. Intuitivamente f è discontinua in x se le x vicine 'tardano ad arrivare' al loro valore limite. Formalmente, negando la convergenza uniforme in ogni palletta di raggio $1/n$ centrata in x si può dimostrare che $x \in \mathrm{disc}(f)$ sse esiste un $\varepsilon(x) > 0$ e una successione $x_n \to x$ tale che $\delta(f_n(x_n), f(x_n)) \geq \epsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Via perciò con l'esaustione: detto $E_k := \{x \in \mathrm{disc}(f) : \varepsilon(x) \geq 1/k\}$, abbiamo

$$\mathrm{disc}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$$

Se gli E_k fossero chiusi e a parte interna vuota, allora $\mathrm{open}(\mathrm{disc}(f)) = \emptyset$, da cui $\mathrm{close}(\mathrm{disc}(f)^c) = \emptyset^c = X$, ossia f sarebbe continua su un denso.

E_k **è chiuso.** Se $x_n \to x$, $x_n \in E_k$, allora esiste $\forall n$ una successione $(z_m^n)_{m \in \mathbb{N}} \to x_n$ tale che $\delta(f(z_m^n), f_m(z_m^n)) \geq 1/k$.
Ma allora $(z_n^n) \to x$ e $\delta(f(z_n^n), f_n(z_n^n)) \geq 1/k$.

E_k **è a parte interna vuota.** Supponiamo esista un aperto $B_\varepsilon(x_0) \subseteq E_k$. In particolare c'è anche la palla chiusa $J := \mathrm{close}(B_{\varepsilon/2}(x_0))$, che è anche completa perchè sottospazio chiuso di X completo.
Per ogni $x \in J$, sia $r(x) := \min\{r \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq r \ \ \delta(f_m(x), f_n(x)) \leq 1/2k\}$.
Esiste perchè $(f_n(x))$ è convergente, perciò di Cauchy.
Siano adesso $C_s = \{x \in J : r(x) \leq s\}$ per ogni $s \in \mathbb{N}$.
In pratica stiamo esaurendo i punti di J in base a 'quanto ci mettono' per

arrivare abbastanza vicini al loro valore limite. Dimostriamo che i C_s sono chiusi. Sia $(x_i) \to x$ una successione in C_s. Allora, per ogni $m, n \geq s$ abbiamo

$$\delta(f_m(x_i), f_n(x_i)) \geq 1/2k$$

da cui passando al limite in i si ha $\delta(f_m(x), f_n(x)) \geq 1/2k$ per ogni $m, n \geq s$, e dunque $r(x) \leq s \ \Rightarrow x \in C_s$. Visto che

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}} C_s = J, \ J \text{ completo}$$

per il lemma di Baire esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che C_r contiene una palletta aperta $B_\rho(y)$. Eh, ma adesso in B_ρ si sta vicini al valore limite, e in E_k c'è qualcuno che sta lontano! Formalmente, abbiamo

$$(1) \ \ y \in J \subseteq E_k \ \Rightarrow \exists (z_n) \to y : \delta(f_n(z_n), f(z_n)) \geq 1/k$$

$$(2) \ \ \text{definitivamente } z_n \in B_\rho(y) \subseteq C_r \Rightarrow \forall i, j \geq r \quad \delta(f_i(z_n), f_j(z_n)) \leq 1/2k$$

ma per $n \geq r$, usando la (2) con $i = n$, $j \to \infty$ otteniamo
$\delta(f_n(z_n), f(z_n)) \leq 1/2k$, in contraddizione con la (1).
E_k **è a parte interna vuota.**

8.15 *Seconda Soluzione*

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convergono puntualmente ad f. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di f è di prima categoria.

Voglio scrivere l'insieme dei punti di discontinuità di f come unione numerabile di chiusi a parte interna vuota. Considero al variare di $n \in \mathbb{N}$ gli insiemi $O_f(\frac{1}{n}) := \{x \in \mathbb{R} : \theta_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$: ovviamente l'unione di tale famiglia numerabile di insiemi è l'insieme dei punti di discontinuità di f. Dimostro ora che sono chiusi e a parte interna vuota.

$O_f(\frac{1}{n})$ è chiuso: presa una successione di punti $\langle x_i \in O_f(\frac{1}{n}) | i \in \mathbb{N} \rangle$ tali che $x_i \to x_\infty$, voglio dimostrare che $\theta_f(x_\infty) \geq \frac{1}{n}$: dato che $x_i \to x_\infty$ ho che $\forall \epsilon \exists k_\epsilon [|x_{k_\epsilon} - x_\infty| < \epsilon]$; inoltre, dato che $\theta_f(x_i) \geq \frac{1}{n}$, ho che $\forall i \forall \epsilon \forall \delta \exists a(i, \epsilon, \delta) b(i, \epsilon, \delta)$ tali che $|a(i, \epsilon, \delta) - x_i| < \epsilon \quad |b(i, \epsilon, \delta) - x_i| < \epsilon$ e $|f(a(i, \epsilon, \delta)) - f(b(i, \epsilon, \delta))| > \frac{1}{n} - \delta$. Ma allora ho che $\left| a(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta) - x_\infty \right| \leq \left| a(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta) - x_{k_{\frac{\epsilon}{2}}} \right| + \left| x_{k_{\frac{\epsilon}{2}}} - x_\infty \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ (e disuguaglianza analoga per la b) da cui si ha che $\forall \epsilon \forall \delta \exists a(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta) b(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta)$ tali che $\left| f(a(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta)) - f(b(k_{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2}, \delta)) \right| > \frac{1}{n} - \delta$ che per definizione vuol dire $\theta_f(x_\infty) \geq \frac{1}{n}$.

$O_f(\frac{1}{n})$ è a parte interna vuota: supponiamo che ci sia un intervallo chiuso I completamente contenuto in $O_f(\frac{1}{n})$: all'interno di quell'intervallo definisco gli insiemi $E(m_*, \lambda) := \{x \in I : \forall m \geq m_* [|f_m(x) - f(x)| \leq \lambda]\}$. Dimostro ora che la chiusura di $E(m_*, \frac{1}{6n})$ ha parte interna vuota $\forall m_*$.

$\overline{E}(m_*, \frac{1}{6n}) \subseteq E(m_*, \frac{1}{3n})$: infatti se $x_i \in E(m_*, \frac{1}{6n})$ è una successione di punti che convergono ad x_∞, allora, per ogni $p \geq m_*$ e per ogni μ, per continuità di f_p ho un indice $i(p,\mu)$ tale che $\forall i \geq i(p,\mu) \quad |f_p(x_i) - f_p(x_\infty)| < \mu$; quindi, fissato un arbitrario $m \geq m_*$ (ed essendo $x_i \in E(m_*, \frac{1}{6n})$) vale $|f_m(x_\infty) - f(x_\infty)| = \lim_{p\to\infty} |f_m(x_\infty) - f_p(x_\infty)|$ ma, detto $\phi := \max\{i(m,\mu), i(p,\mu)\}$, vale $|f_m(x_\infty) - f_p(x_\infty)| \leq |f_m(x_\infty) - f_m(x_\phi)| + |f_m(x_\phi) - f_p(x_\phi)| + |f_p(x_\phi) - f_p(x_\infty)| < \mu + |f_m(x_\phi) - f_p(x_\phi)| + \mu \leq 2\mu + |f_m(x_\phi) - f(x_\phi)| + |f(x_\phi) - f_p(x_\phi)| \leq 2\mu + 2\frac{1}{6n} = 2\mu + \frac{1}{3n}$ quindi $\lim_{p\to\infty} |f_m(x_\infty) - f_p(x_\infty)| \leq \frac{1}{3n}$ quindi $x_\infty \in E(m_*, \frac{1}{3n})$: basta dunque dimostrare che $E(m_*, \frac{1}{3n})$ ha parte interna vuota. Supponiamo per assurdo che $E(m_*, \frac{1}{3n})$ abbia parte interna (diciamo un intervallo $J \subseteq I$): allora, scelto $l \in J$, essendo $\theta_f(l) \geq \frac{1}{n}$ (perchè siamo in I), esistono in J due successioni (eventualmente costanti uguali ad l) x_j e z_j convergenti ad l e tali che $\lim_{j\to\infty} |f(x_j) - f(z_j)| \geq \frac{1}{n}$. Inoltre $|f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(z_j)| \leq |f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(l)| + |f_{m_*}(l) - f_{m_*}(z_j)|$ quindi per i carabinieri (e per continuità di f_{m_*}) $\lim_{j\to\infty} |f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(z_j)| = 0$. Ma (dato che siamo in J) $|f(x_j) - f(z_j)| \leq |f(x_j) - f_{m_*}(x_j)| + |f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(z_j)| + |f_{m_*}(z_j) - f(z_j)| \leq \frac{1}{3n} + |f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(z_j)| + \frac{1}{3n}$ e quindi ancora per i carabinieri $\frac{1}{n} \leq \lim_{j\to\infty} |f(x_j) - f(z_j)| \leq \frac{2}{3n} + \lim_{j\to\infty} |f_{m_*}(x_j) - f_{m_*}(z_j)| = \frac{2}{3n}$ assurdo. Quindi $\overline{E}(m_*, \frac{1}{6n})$ ha parte interna vuota; ma al variare di $m_* \in \mathbb{N}$ $\overline{E}(m_*, \frac{1}{6n})$ ricoprono I: avrei dunque che I si scrive come unione numerabile di chiusi a aprte interna vuota, assurdo per Baire. Quindi $O_f(\frac{1}{n})$ è a parte interna vuota.

Quindi la tesi è dimostrata.

8.26

K spazio metrico compatto, $S \subseteq C(K)$. Allora

$$S \text{ compatto} \Leftrightarrow [S \text{ chiuso}, f \in S \text{ equicontinue}, f \in S \text{ equilimitate}]$$

($\Rightarrow$) Se S è compatto allora ovviamente S chiuso.

Le funzioni di S sono equicontinue: infatti fissato un punto $\overline{x} \in K$ ed un $\epsilon > 0$, ricopro S con la seguente famiglia di aperti: $A_n := \{f \in S : [d(x,\overline{x}) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon]\}$ (è abbastanza semplice verificare che A_n è aperto); questo è un ricoprimento in quanto $S \subseteq C(K)$, ed essendo S compatto ammette un sottoricoprimento finito, da cui $\forall x \forall \epsilon \exists \frac{1}{n} \forall f \in S[d(x,\overline{x}) < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon]$, che è la definizione di equicontinuità.

Le funzioni di S sono equilimitate: infatti ricopro S con la seguente famiglia di aperti: $A_n := \{f \in S : ||f|| < n\}$ (anche in questo caso la verifica che A_n è aperto è semplice); essendo S compatto, esiste un sottoricoprimento finito, cioè un n che limita contemporaneamente tutte le F, che è la definizione di equilimitatezza.

($\Leftarrow$) Supponiamo S chiuso e contenente funzioni equicontinue ed equilimitate. Consideriamo una successione di funzioni $f_n \in S$ e vogliamo trovare un sottosuccessione convergente (dalla chiusura di S avremo che il limite appartiene ad S). Essendo K compatto, è separabile (siano x_m densi in K): inoltre, per ogni punto $x \in K$ e per ogni successione di funzioni in S, essendo queste equilimitate, la successione dei valori delle funzioni in x è di Cauchy, quindi c'è una sottosuccessione di funzioni convergenti nel punto x. Ora costruisco una sottosuccessione T delle f_n convergente su tutti i punti x_m: Prendo la prima delle f_n e la uso come prima funzione della successione T che voglio costruire, poi scelgo tra le restanti una sottosuccessione convergente nel punto x_1 e prendo la prima funzione come seconda funzione della successione T, poi scelgo una sotto-sottosuccessione convergente nel punto x_2 e uso la prima di tali funzioni come terza funzione della successione T, e così via. La sottosuccessione $f_i \in T$ che ottengo converge in tutti i punti x_m del denso e numerabile ad una funzione f (che per ora è definita sono sugli x_m). Dimostro ora che la convergenza avviene puntualmente anche negli altri punti e che è uniforme.

Preso un punto $\overline{x}$ ed un $\epsilon > 0$, essendo le funzioni $f_i \in T$ equicontinue in $\overline{x}$ esiste $\delta(\epsilon, \overline{x})$ tale che $\forall i[||x - \overline{x}|| < \delta(\epsilon, \overline{x}) \Rightarrow |f_i(x) - f_i(\overline{x})| < \epsilon]$; essendo x_m densi, per ogni δ esiste un $m(\delta)$ tale che $\left|\left|x_{m(\delta)} - \overline{x}\right|\right| < \delta$; inoltre per ogni m e per ogni ϵ, essendo le funzioni f_i convergenti in x_m, esiste un indice $i(m, \epsilon)$ tale che $\forall j > i(m, \epsilon)$ vale $|f_j(x_m) - f(x_m)| < \epsilon$. Quindi, scelti ϵ ed $\overline{x}$, si ha $\forall j, k > i(m(\delta(\frac{\epsilon}{3}, \overline{x})), \frac{\epsilon}{3})$ vale $|f_j(\overline{x}) - f_k(\overline{x})| \leq \left|f_j(\overline{x}) - f_j(x_{m(\delta(\frac{\epsilon}{3},\overline{x}))})\right| + \left|f_j(x_{m(\delta(\frac{\epsilon}{3},\overline{x}))}) - f_k(x_{m(\delta(\frac{\epsilon}{3},\overline{x}))})\right| + \left|f_k(x_{m(\delta(\frac{\epsilon}{3},\overline{x}))}) - f_k(\overline{x})\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Quindi la successione $f_i(\overline{x})$ è di Cauchy, quindi converge, e posso definire f su tutto K.

Mostro ora che f così definita è continua. Preso $\overline{x}$, sia $\delta(\epsilon)$ il modulo di continuità comune delle f_i in $\overline{x}$. Allora $\forall i[||x - \overline{x}|| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f_i(x) - f_i(\overline{x})| < \epsilon]$ e passando al limite in i in questa disuguaglianza si ottiene $[||x - \overline{x}|| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon]$ quindi f è continua con lo stesso modulo di continuità delle f_i.

Infine mostro che la convergenza è uniforme: per ogni δ esiste un $m(\delta)$ tale che ogni punto del compatto dista meno di δ da almeno uno dei punti $x_1, ..., x_{m(\delta)}$; inoltre, fissati m ed ϵ, essendo tali punti in numero finito ed essendoci convergenza puntuale in quei punti, esiste $i(m, \epsilon)$ tale che $\forall j \geq i \forall l \leq m[|f_j(x_l) - f(x_l)| < \epsilon]$ (notare che queso non è lo stesso $i(m, \epsilon)$ di prima, ma è il massimo tra gli $i(l, \epsilon)$ di prima al variare di $l \leq m$). Ora, chamando $\delta(\epsilon)$ il modulo di continuità comune della f_i e di f, vale: preso un ϵ, per ogni x vale $\exists l \leq m(\delta(\frac{\epsilon}{3})) \quad ||x - x_l|| < \delta(\frac{\epsilon}{3})$ da cui $\forall j \geq i(m(\delta(\frac{\epsilon}{3})), \frac{\epsilon}{3})$ vale $|f_j(x) - f(x)| \leq |f_j(x) - f_j(x_l)| + |f_j(x_l) - f(x_l)| + |f(x_l) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ e dunque la convergenza è uniforme.

8.46

Teorema della mappa aperta. Siano X e Y due Banach, $T : X \to Y$ mappa lineare, continua e bigettiva. Vogliamo mostrare che T manda aperti in

aperti. Per linearità basta mostrare che manda palle centrate nell' origine in aperti.
Passo (1): *Esiste $c > 0$ tale che $\overline{T(B_X(0,1))} \subseteq B_Y(0,2c)$.*
Per surgettività si ha:

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{T(B_X(0,k))}$$

ma Y è completo, dunque, per il Lemma di Baire, almeno un elemento dell' unione ha parte interna nonvuota. Esistono dunque $r > 0$, $y_o \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\overline{T(B_X(0,n))} \supseteq B_Y(y_o, r)$$

trasliamo ora questo contenimento nell' origine; posto $x_o := T^{-1}(y_o)$ abbiamo, per ogni y di norma più piccola di r:

$$y_o + y = \lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x_o) + \lim_{k\to\infty} T(x_k - x_o)$$

cioè:

$$y = \lim_{k\to\infty} T(x_k - x_o) \quad \Rightarrow \quad B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,2n))}$$

infatti $\|x_k - x_o\|_X \leq 2n$. Per omogeneità possiamo omotetizzare questo contenimento ottenendo la tesi con $c = r/4n$.

Passo (2): *Vale in realtà $T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,c)$.*
Prendiamo un generico $y \in B_Y(0,c) \subseteq \overline{T(B_X(0,1/2))}$ per definizione posso trovare $y_1 = T(x_1)$ più vicino di $c/2$ ad y, ossia tale che valgano le seguenti:

$$\|y - y_1\|_Y < \frac{c}{2} \quad \text{e} \quad \|x_1\|_X < \frac{1}{2}$$

Ora osservo che intanto:

$$B_Y(0,c/2) \subseteq \overline{T(B_X(0,1/4))}$$

inoltre il vettore $(y - y_1) \in B_Y(0,c/2)$, dunque come prima trovo $y_2 = T(x_2)$ tale che:

$$\|y - y_1 - y_2\|_Y < \frac{c}{4} \quad \text{e} \quad \|x_2\|_X < \frac{1}{4}$$

Continuando a ragionare così trovo due successioni $(y_k) \in Y$ e $(x_k) \in X$ tali che per ogni k valga $y_k = T(x_k)$ e che valgano, per ogni m, le due seguenti:

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{m} y_i \right\|_Y < \frac{c}{2^m} \quad \text{e} \quad \|x_m\|_X < \frac{1}{2^m} \qquad (\star)$$

Ora osservo che la serie $\sum_{m\in\mathbb{N}} \|x_m\|_X$ converge dunque per completezza di X ho che esiste x tale che:

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \qquad \text{inoltre} \qquad \|x\|_X \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|_X < 1 \quad \Rightarrow x \in B_X(0,1)$$

inoltre la prima equazione di $(\star)$ ci dice (per definizione) che $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.
Usando la continuità di T abbiamo finito:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = T(x)$$

cioè $y \in T(B_X(0,1))$.
Applicando alla tesi del passo (2) l' operatore T^{-1} e usando l'omegenità si ha:

$$T^{-1}(B_Y(0,1)) \subseteq B_X(0,1/c)$$

Ossia T^{-1} è limitato, dunque continuo.

9 Calcolo Differenziali in più Variabili

3

Scierzo

10 Equazioni Differenziali Ordinarie

10.5

Unicità. Immediata.
Esistenza. Considero la funzione h da K a $\mathbb{R}$ definita da $h(x) = d(x, f(x))$; è facile vedere che h è continua (usando la continuità di f) su K e dunque ammetterà minimo $m = h(z)$ per un certo $z \in K$. Se $m = 0$ avremmo finito per nondegenericità della distanza, supponiamo dunque $m > 0$. Si ha subito un assurdo:

$$m = h(z) = d(z, f(z)) > d(f(z), f^2(z)) = h(f(z)) \quad \Rightarrow \quad \text{assurdo perchè } z \text{ era un minimo per } h$$

Mostriamo ora che tale z è il limite delle ricorrenze del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ indipendentemente da x_0. Si vede subito che la successione $(d(z, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente e non negativa, ammette dunque un limite $\rho \geq 0$. Per compattezza estraiamo una sottosuccessione $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ covergente ad un certo $\overline{x}$; per continuità è chiaro che $d(z, \overline{x}) = \rho$. Si vede anche che la successione $(x_{n(k)+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\overline{x})$ e sempre per continuità $d(z, f(\overline{x})) = \rho$, ma se $z \neq \overline{x}$ potrei applicare l' ipotesi ed ottenere:

$$\rho = d(z, \overline{x}) < d(f(z), f(\overline{x})) = d(z, f(\overline{x})) = \rho \quad \Rightarrow \quad \text{assurdo}$$

e dunque la tesi: $z = \overline{x}$. Inoltre non abbiamo usato mai il valore di x_0, da cui questa dimostrazione non dipende.

10.10

Per il problema 10.1 esiste a in $[0, 1]$ punto fisso per f. Considero la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza da:

$$a_0 = a; \qquad a_{n+1} = g(a_n)$$

osservo che tutti i punti di questa successione sono fissi per f, infatti induttivamente si ha:

$$f(a_{k+1}) = f(g(a_k)) = g(f(a_k)) = g(a_k) = a_{k+1}$$

Supponiamo ora che per assurdo valga $f > g$ identicamente in $[0, 1]$, da questo si ricava che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente descrescente infatti:

$$a_k = f(a_k) > g(a_k) = a_{k+1} \geq 0$$

da cui esiste $\overline{a}$ limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Per continuità di f anche $\overline{a}$ è punto fisso per f, mentre per continuità di g si ha che $\overline{a}$ è punto fisso anche per g, come si vede passando al limite la ricorrenza; ma allora $f(\overline{a}) = g(\overline{a})$, assurdo perchè $f > g$.