TFY4115 - Høst 2016
Øving 6
Vsevolod Karpov - vsevolok

1

Oppgave 1

a) $L = I \cdot \omega$

$L_{før} = L_{etter} \Rightarrow I_0 \omega_i = 2 I_0 \omega_f$

$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_f = \frac{\omega_i}{2}}}$

b) $E_{før} = \frac{1}{2} I_0 \omega_i^2$

$E_{etter} = I_0 \cdot \frac{\omega_i^2}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{E_{etter} = \frac{1}{2} E_{før}}}$

Oppgave 2

a) $I_{tot} = I_0 + n \cdot I_1$

$I_0 = \frac{1}{2} M R^2 \quad , \quad I_1 = m r^2$

$\Rightarrow I_{tot} = \frac{1}{2} M R^2 + n \cdot m r^2$

~~egenspinn må gjøres om til rotasjon rundt hovedaksen!~~

b) $L_{før} = I_0 \cdot \omega_f + n \cdot |L_0| \cancel{(1+r)}$

$L_{etter} = I_{tot} \cdot \omega_i$

$\Rightarrow \omega_i = \frac{I_0 \omega_f + n|L_0|\cancel{(1+r)}}{I_{tot}} = \underline{\underline{\frac{\frac{1}{2} M R^2 \omega_f + n|L_0|\cancel{(1+r)}}{\frac{1}{2} M R^2 + n m r^2}}}$

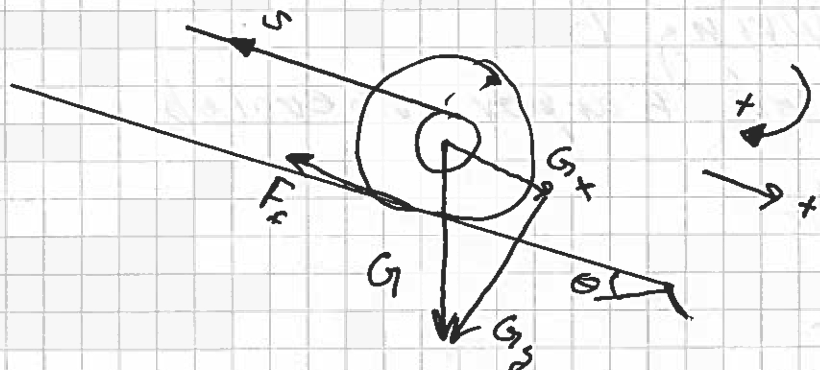
Her er det viktig å ta hensyn til om hvorvidt ω_f og ~~rota~~ egenspinn til kula har samme retning.

Hvis samme: $+n|L_0|$, motsatt: $-n|L_0|$

NB! I oppgaven er $\omega_f = 0$

Oppgave 3

a)



$G_x = G \cdot \sin(\theta)$, $G_y = G \cdot \cos(\theta)$

Ved θ_0, står snellen i ro.

$$\Rightarrow \sum F_x = 0 = G_x - F_f - S = G\sin(\theta_0) - \mu_s \cdot G \cdot \cos(\theta_0) - S$$

$$\sum \tau = 0 = F_f \cdot R - S \cdot r = \mu_s \cdot G\cos(\theta_0) \cdot R - S \cdot r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \frac{\mu_s M g \cos(\theta_0) \cdot R}{r}}}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_0) - \mu_s \cos(\theta_0) - \frac{\cos(\theta_0) \cdot R \mu_s}{r} = 0$$

$$r\sin(\theta_0) - r\mu_s\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0) \cdot R\mu_s = 0$$

$$r\sin(\theta_0) = \cos(\theta_0)(r\mu_s + R\mu_s)$$

$$\tan(\theta_0) = \mu_s\left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\theta_0 = \arctan\left(\mu_s\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)}}$$

b) $\theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$, vinkelakselerasjon i <u>negativ</u> rotasjonsretning.

$$\Rightarrow \sum F_x = Ma = G\sin(\theta_1) - \mu_k G\cos(\theta_1) - S$$

$$\sum \tau = I\alpha = \mu_k G\cos(\theta_1) \cdot R - S \cdot r$$

$$\alpha = \frac{-a}{r} \Rightarrow S = \frac{\mu_k G\cos(\theta_1) \cdot R + \frac{a}{r} I}{r}$$

$$\Rightarrow Ma = G\sin(\theta_1)\ \mu_k G\cos(\theta_1) - \frac{\mu_k G\cos(\theta_1) \cdot R}{r} - \frac{a}{r^2} I$$

$$\Rightarrow a\left(M + \frac{1}{r^2} I\right) = Mg\left(\sin(\theta_1) - \mu_k \cos(\theta_1)\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)$$

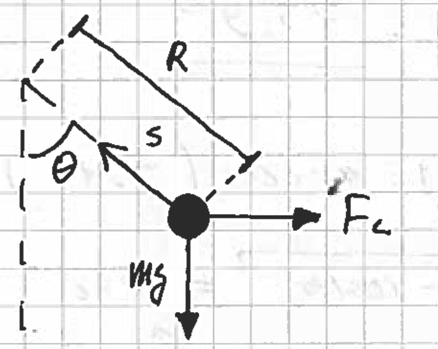
$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{g\left(\sin(\theta_1) - \mu_k\cos(\theta_1)\left(1 + \frac{R}{r}\right)\right)}{\left(1 + I/(Mr^2)\right)}}}$$

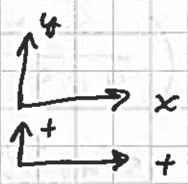
Oppgave (4)

a) $\omega = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$\omega \to \infty \Rightarrow \theta \to \frac{\pi}{2}$

b)





F_c : sentrepital

S : normalkraft fra ringen.

Også gjelder: $\vec{F_c} + \vec{G} = -\vec{S}$

c)

$$\sum F_y = 0 = S \cdot \cos(\theta) - mg$$
$$\sum F_x = 0 = F_c - S\sin(\theta)$$

(Dynamisk likevekt)

$F_c = m\frac{v^2}{r}$, $v = \omega \cdot r \Rightarrow F_c = m\omega^2 r$

$$\Rightarrow \frac{m\omega^2 r}{\sin(\theta)} = S$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 r}{\sin(\theta)}\cos(\theta) = g \quad , \frac{r}{\sin(\theta)} = R$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{g}{\omega^2 R} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

d) Uttrykket stemmer ikke overens med a!
For $\omega = 0$ får vi $F_c = 0 \Rightarrow 0 = \sin(\theta)$
som betyr at utledningen blir feil da
vi antar at $\sin(\theta) \neq 0$ i utledningen.
$\sin(\theta) = 0$ gir dermed $\theta = 0$, noe som stemmer
med a). For $\omega \to \infty$, $\cos(\theta) \to 0 \Rightarrow \theta \to \frac{\pi}{2}$
, noe som stemmer med a)

e) $R = 0.1\ m$, $g = 9.81\ m/s^2$

$\omega_i = 3 \cdot 2\pi / s$

$\omega_{ii} = 2\pi / s$

$$\Rightarrow \theta_i = \arccos\left(\frac{9.81}{36\pi^2 \cdot 0.1}\right) = \underline{\underline{73.9^\circ}}$$

$$\theta_{ii} = \arccos\left(\frac{9.81}{4\pi^2 \cdot 0.1}\right) = \arccos(2.48)$$

$$\cos(\theta) = 2.48 \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos(\theta)^2} \pm k \cdot i$$

konstant — imaginær enhet.

Noe som fører til antagelsen om at θ_{ii} og r_{ii} er nærmest null.

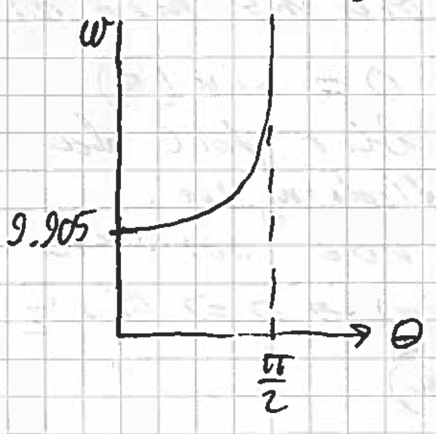
En annen måte å se det på er å undersøke den minste ω for hvilket uttrykket $\cos(\theta) = \frac{g}{\omega^2 R}$, stemmer.

~~Anta at $\theta = 0$, da gjelder $R = \lim_{\theta \to 0} \frac{r}{\sin(\theta)}$~~

$$\cos(\theta) = \frac{g \cdot \sin(\theta)}{\omega^2 \cdot r} = \frac{g}{\omega^2 \cdot R}, \quad \theta = 0,\ R = 0.1$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{0.1}} = \underline{9.905 < 2\pi}$$

Dette er en grenseverdi, dvs at når $\omega \to 9.905$, $\theta \to 0$.



Man kan tenke at jo kortere snora (jo smalere ring) er, jo mer sentrepital akselerasjon må til for å dytte kula opporer, på samme måte som τ er større jo større radius i αr.

Uttrykket gjelder fint for f.eks
$R = 2$ for w_{ii}.

Notat: da uttrykket er avhengig av g, kan man bruke denne metoden til å måle g.

f) Det er mer naturlig siden systemet er i dynamisk likevekt og dermed er w direkte avhengede av θ.

$$\cos(\theta) = \frac{g}{w^2 R} \Rightarrow w^2 = \frac{g}{\cos(\theta)\cdot R}, \left(\begin{matrix}\text{oppgaven er} \\ \text{identisk med} \\ \text{c)}\end{matrix}\right)$$

$$\cancel{\Rightarrow w \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{\cos(\theta)\cdot R}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dw}\frac{dw}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{w(\theta) = \sqrt{\frac{g}{\cos(\theta)\cdot R}}}}$$

$$\theta \to 0 \Rightarrow w(\theta) \to \sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\theta \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow w(\theta) \to \infty$$