

66115 Frühjahr 2011

Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)

Aufgabenstellungen mit Lösungsvorschlägen



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Aufgabenübersicht

Thema Nr. 1	3
Aufgabe 1 [4 Rekursionsgleichungen]	3



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Thema Nr. 1

Aufgabe 1 [4 Rekursionsgleichungen]

Bestimmen Sie mit Hilfe des Master-Theorems für die folgenden Rekursionsgleichungen möglichst scharfe asymptotische untere und obere Schranken, falls das Master-Theorem anwendbar ist! Geben Sie andernfalls eine kurze Begründung, warum das Master-Theorem nicht anwendbar ist!

Exkurs: Master-Theorem

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

a = Anzahl der rekursiven Aufrufe, Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion ($a \geq 1$).

$\frac{1}{b}$ = Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird, Anteil an der Verkleinerung des Problems ($b > 1$).

$f(n)$ = Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen. Eine von $T(n)$ unabhängige und nicht negative Funktion.

Dann gilt:

1. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

2. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

3. Fall: $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$

(a) $T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 40n - 6$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

16

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$40n - 6$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 40n - 6$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

für $\varepsilon = 14$:

$$f(n) = 40n - 6 \in \mathcal{O}(n^{\log_2 16 - 14}) = \mathcal{O}(n^{\log_2 2}) = \mathcal{O}(n)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$f(n) = 40n - 6 \notin \Theta(n^{\log_2 16}) = \Theta(n^4)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 40n - 6 \notin \Omega(n^{\log_2 16 + \varepsilon})$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^4)$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(b) $T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 \log n$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

$$27$$

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

$$\text{um } \frac{1}{3} \text{ also } b = 3$$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$$3n^2 \log n$$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 \log n$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \in \mathcal{O}(n^{\log_3 27 - 24}) = \mathcal{O}(n^{\log_3 3}) = \mathcal{O}(n)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \notin \Theta(n^{\log_3 27}) = \Theta(n^3)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \notin \Omega(n^{\log_3 27 + \varepsilon})$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(c) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^2 + \log n$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

4

Anteil Verkleinerung des Problems (b):um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$ **Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):**

$$3n^2 + \log n$$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^2 + \log n$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \notin \mathcal{O}(n^{\log_2 4 - \varepsilon})$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \in \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \notin \Omega(n^{\log_2 4 + \varepsilon})$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(d) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

4

Anteil Verkleinerung des Problems (b):um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$ **Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):**

$$100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \in \mathcal{O}(n^{\log_2 4 - 2}) = \mathcal{O}(n)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \notin \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \notin \Omega(n^{\log_2 4 + \varepsilon})$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha