

## Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Methode `function`:

```
4 double function(int n) {  
5     if (n == 1)  
6         return 0.5 * n;  
7     else  
8         return 1.0 / (n * (n + 1)) + function(n - 1);  
9 }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen\\_46115/jahr\\_2015/herbst/Induktion.java](https://github.com/src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/Induktion.java)

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 1: \text{function}(n) = f(n) \text{ mit } f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$$

Hinweis: Eventuelle Rechenungenauigkeiten, wie z. B. in Java, bei der Behandlung von Fließkommazahlen (z. B. `double`) sollen beim Beweis nicht berücksichtigt werden - Sie dürfen also annehmen, Fließkommazahlen würden mathematische Genauigkeit aufweisen.

**Induktionsanfang** — Beweise, dass  $A(1)$  eine wahre Aussage ist. \_\_\_\_\_

$$f(1) := 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Induktionsvoraussetzung** — Die Aussage  $A(k)$  ist wahr für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ . \_\_\_\_\_

$$f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$$

**Induktionsschritt** — Beweise, dass wenn  $A(n = k)$  wahr ist, auch  $A(n = k + 1)$  wahr sein muss. \_\_\_\_\_

**zu zeigen:**

$$f(n+1) := 1 - \frac{1}{(n+1)+1} = f(n)$$

**Vorarbeiten (Java in Mathe umwandeln):**

$$\text{function}(n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} + f(n-1)$$

$f(n+1) := \frac{1}{(n+1) \cdot ((n+1)+1)} + f((n+1)-1)$	$n+1$ einsetzen
$= \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + f(n)$	vereinfachen
$= \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1}$	für $f(n)$ Formel einsetzen
$= 1 + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} - \frac{1}{n+1}$	1. Bruch an 2. Stelle geschrieben
$= 1 + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} - \frac{1 \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$	2. Bruch mit $(n+2)$ erweitert
$= 1 + \frac{1 - (n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$	die 2 Brüche subtrahiert
$= 1 + \frac{1 - n - 2}{(n+1) \cdot (n+2)}$	minus plus ist minus
$= 1 + \frac{-1 - n}{(n+1) \cdot (n+2)}$	eins minus zwei ist minus eins
$= 1 + \frac{-1 \cdot (1+n)}{(n+1) \cdot (n+2)}$	$(n+1)$ ausklammern
$= 1 + \left( -1 \cdot \frac{(1+n)}{(n+1) \cdot (n+2)} \right)$	minus vor den Bruch bringen
$= 1 - \frac{(1+n)}{(n+1) \cdot (n+2)}$	plus minus ist minus
$= 1 - \frac{1}{n+2}$	$(n+1)$ gekürzt
$= 1 - \frac{1}{(n+1)+1}$	Umformen zur Verdeutlichung