

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgenden Probleme:

CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl $k \in \mathcal{N}$

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$, sodass für alle Knoten $u \neq v \in V$ gilt, dass $\{u, v\}$ eine Kante in E ist?

ALMOST CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl $k \in \mathcal{N}$

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$, sodass die Anzahl der Kanten zwischen Knoten in S genau $\frac{k(k-1)}{2} - 1$ ist?

Zeigen Sie, dass das Problem ALMOST CLIQUE NP-vollständig ist. Nutzen Sie dafür die NP-Vollständigkeit von CLIQUE.

Hinweis: Die Anzahl der Kanten einer k -Clique sind $\frac{k(k-1)}{2}$.

Exkurs: Cliquesproblem

Das **Cliquesproblem** fragt nach der Existenz einer Clique der Mindestgröße n in einem gegebenen Graphen. Eine Clique ist eine Teilmenge von Knoten in einem ungerichteten Graphen, bei der jedes Knotenpaar durch eine Kante verbunden ist.

Exkurs: Almost Clique

Eine Gruppe von Knoten wird ALMOST CLIQUE genannt, wenn nur eine Kante ergänzt werden muss, damit sie zu einer Clique wird.

You can reduce to this from CLIQUE.

Given a graph $G = (V, E)$ and t , construct a new graph G^* by adding two new vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ and connecting them with all of G 's vertices but removing the edge $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, i.e. they are not neighbors in G^* . return G^* and $t + 2$.

If G has a t sized clique by adding it to the two vertices we get an $t + 2$ almost clique in G^* (by adding $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$).

If G^* has a $t + 2$ almost clique we can look at three cases:

1) It contains the two vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, then the missing edge must be $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ and this implies that the other t vertices form a t clique in G .

2) It contains one of the vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, say w.l.o.g. v_{n+1} , then the missing edge must be inside G , say $e = \{u, v\} \in G$. If we remove u and

v_{n+1} then the other t vertices, which are in G must form a clique of size t .

3) It does not contain any of the vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, then it is clear that this group is in G and must contain a clique of size t .

It is also clear that the reduction is in polynomial time, actually in linear time, log-space. ^a

^a<https://cs.stackexchange.com/a/76627>