

Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ ist gleich dem Quadrat von n :

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16\end{aligned}$$

```
8 public static int oddSum(int n) {
9     if (n <= 0) {
10         return 0;
11     }
12     return 2 * n - 1 + oddSum(n - 1);
13 }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/beschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Maurolicus.java](https://github.com/beschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Maurolicus.java)

Der zu beweisende allgemeine Satz lautet: $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$A(1) : \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$A(n) : \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. _____

$$A(n + 1) : \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2$$

Beweis

Er ergibt sich über folgende Gleichungskette, bei der in der zweiten Umformung die Induktionsvoraussetzung angewandt wird:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) &= 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1) && \text{Formel für die letzte Zahl ist: } 2n-1, n \text{ ist hier } n+1 \\
 &= \sum_{i=1}^n (2i-1) + (2(n+1)-1) && \text{andere Schreibweise mit dem Summenzeichen} \\
 &= n^2 + 2(n+1) - 1 && \text{Ersetzen des Summenzeichens mit dem Ergebnis der Formel} \\
 &= n^2 + 2n + 2 - 1 && \text{ausmultiplizieren} \\
 &= n^2 + 2n + 1 && \text{subtrahiert } 2 - 1 = 1 \\
 &= (n+1)^2 && \text{mit erster Binomischer Formel: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

```

3  import static org.junit.Assert.assertEquals;
4
5  import org.junit.Test;
6
7  public class MaurolicusTest {
8
9      private void teste(int n, int erwartet) {
10         assertEquals(Maurolicus.oddSum(n), erwartet);
11     }
12
13     @Test
14     public void teste() {
15         teste(0, 0);
16         teste(1, 1);
17         teste(2, 4);
18         teste(3, 9);
19         teste(4, 16);
20         teste(5, 25);
21         teste(6, 36);
22         teste(7, 49);
23         teste(8, 64);
24         teste(9, 81);
25         teste(10, 100);
26         teste(11, 121);
27     }
28
29 }

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java)