Geometrische Summenformel

Gegeben sei folgende Methode:

```java
public class GeoSum {
  // Math.pow(q, n) == q^n
  double geoSum(int n, double q) {
    if (n == 0) {
      return 1 - q;
    } else {
      return (1 - q) * Math.pow(q, n) + geoSum(n - 1, q);
    }
  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/sosy/totale_korrektheit/GeoSum.java`

Weisen Sie mittels vollständiger Induktion nach, dass

$$\text{geoSum}(n, q) = 1 - q^{n+1}$$

Dabei können Sie davon ausgehen, dass $q > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

$$f(0) : \text{geoSum}(0, q) = 1 - q^{0+1} = 1 - q^1 = 1 - q$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$$f(n) : \text{geoSum}(n, q) = 1 - q^{n+1}$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \text{geoSum}(n, q) \\
&= (1 - q) \cdot q^n + \text{geoSum}(n - 1, q) && \text{Java-Code in Mathe-Formel umgewandelt} \\
&= (1 - q) \cdot q^n + 1 - q^{(n-1)+1} && \text{für rekursiven Methodenaufruf gegebene Formel eingesetzt} \\
&= (1 - q) \cdot q^n + 1 - q^n && \text{Addition im Exponent}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \text{geoSum}(n+1, q) \\
&= (1-q) \cdot q^{n+1} + 1 - q^{n+1} && \text{von Java konvertierte Formel verwendet und } n+1 \text{ eingesetzt} \\
&= q^{n+1} - q^{(n+1)+1} + 1 - q^{n+1} && \text{ausmultipliziert} \\
&= -q^{(n+1)+1} + 1 && q^{n+1} - q^{n+1} = 0 \\
&= 1 - q^{(n+1)+1} && \text{Kommutativgesetz der Addition} \\
&= 1 - q^{(n+1)+1} && \text{was zu zeigen war}
\end{aligned}
$$