

## Aufgabe 7

### Kürzeste Kreise

Mit der Länge eines Pfads oder eines Kreises bezeichnen wir die Anzahl der Kanten, aus denen der Pfad bzw. der Kreis besteht. Bekanntlich kann man Breitensuche verwenden, um für zwei

gegebene Knoten  $s$  und  $t$  die Länge eines kürzesten  $s$ - $t$ -Wegs zu berechnen. Im folgenden geht es um die Berechnung kürzester Kreise.

- (a) Für einen Graphen  $G$  und einen Knoten  $v$  von  $G$  berechnet  $KK(G, v)$  (siehe Abbildung 1) die Länge des kürzesten Kreises in  $G$ , der durch  $v$  geht.

Analysieren Sie die Laufzeit von  $KK$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Knoten von  $G$ , von der Anzahl  $m$  der Kanten von  $G$  und vom Grad  $\deg(v)$  des übergebenen Knotens  $v$ .

- (b) Wenn man den Algorithmus  $KK$  für jeden Knoten eines Graphen  $G$  aufruft, kann man die Länge eines kürzesten Kreises in  $G$  berechnen. Welche Laufzeit hat der resultierende Algorithmus in in Abhängigkeit von  $n$  und  $m$ ?

- (c) Geben Sie einen Algorithmus  $KK_{\text{schnell}}(G, v)$  an, der in  $O(n + m)$  Zeit die Länge des kürzesten Kreises in  $G$  berechnet, der durch  $v$  geht. Argumentieren Sie, warum ihr Algorithmus korrekt ist.

### Abbildung 1

1  $l \leftarrow \infty$

2  $KK(\text{ungerichteter UNBEWICHTLETER Graph } G, \text{ Knoten } v)$

3  $l \leftarrow 2$

4  $\text{Sei } G' \text{ der Graph } G \text{ ohne die Kante } v, w.$

5  $\text{Sei } l \text{ die Länge eines kürzesten } v\text{-}w\text{-Wegs in } G'. \text{ 6 if } 2 < l \text{ then}$

7  $\text{Lex}$

8  $\text{return } l$