

Graphen

Weiterführende Literatur:

- Saake und Sattler, *Algorithmen und Datenstrukturen*, Seite 445-481
- Wikipedia-Artikel „Graph (Graphentheorie)“

Ein Graph ist eine *dynamische Datenstruktur*, die die *Speicherung beliebig vieler Elemente* erlaubt. Ein Graph besteht aus *Knoten* und *Kanten*, die die Beziehungen zwischen den Knoten repräsentieren.

dynamische Datenstruktur

Speicherung beliebig vieler Elemente

Knoten

Kanten

Arten von Graphen

- gerichtete / ungerichtete Graphen
- gewichtete / ungewichtete Graphen

Grad

- Eingangsgrad (Anzahl der eingehenden Kanten)
- Ausgangsgrad (Anzahl der ausgehenden Kanten)
- Bei ungerichteten Graphen: Grad

1

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$. V bezeichnet die Menge der Knoten (*vertex*) und $E \subseteq V \times V$ die Menge der Kanten (*edge*). Eine Kante $(a, b) \in E$ ist im *gerichteten* Graphen eine Kante von a nach b . Im *ungerichteten* Graphen schreiben wir $[a, b]$. Dabei ist $(a, b) \in E$ und $(b, a) \in E$. Im gerichteten Graphen gibt es analog zu Listen und Bäumen Vorgänger- und Nachfolgerknoten. Jeder Kante $e \in E$ kann ein *Kantengewicht* $c(e)$ zugeordnet sein. Kantengewichte entsprechen den „Kosten“ für die Traversierung dieser Kante. Die Darstellung von Graphen ist auf unterschiedliche Weise möglich:

vertex

edge

Kantengewicht

- graphische Darstellung
- Mengenschreibweise
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzenlisten

2

Adjazenz-Matrix

Eine **Adjazenzmatrix** (von lat. *adiacere* = bei oder neben etwas liegen, angrenzen) eines Graphen ist eine Matrix, die speichert, welche Knoten des Graphen durch eine Kante verbunden sind. Sie besitzt für *jeden Knoten* eine *Zeile* und eine *Spalte*, woraus sich für n Knoten eine $n \times n$ -Matrix ergibt. Ein Eintrag in der

jeden Knoten

Zeile

Spalte

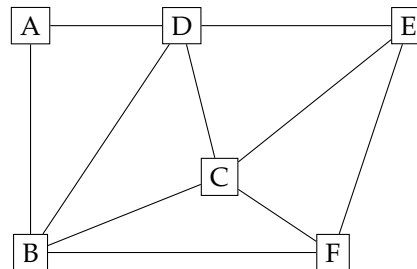
¹Qualifizierungsmaßnahme Informatik: Algorithmen und Datenstrukturen 6, Seite 3.

²Qualifizierungsmaßnahme Informatik: Algorithmen und Datenstrukturen 6, Seite 4.

von der Zeile zur Spalte

i -ten Zeile und j -ten Spalte gibt hierbei an, ob eine Kante von dem i -ten zu dem j -ten Knoten führt³. Man geht *von der Zeile zur Spalte*.

Die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen

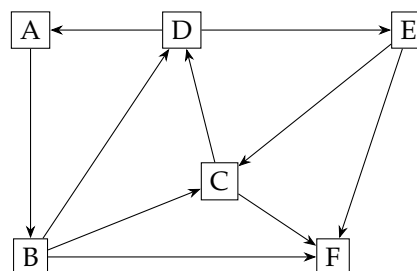


Eine Verbindung (Kante) zwischen zwei Knoten in einem ungerichteten Graphen ist in beide Richtungen gültig. Überträgt man die Verbindungen in die Matrix, erhält man eine *symmetrische, an der Diagonalen gespiegelte Adjazenzmatrix*.

symmetrische, an der Diagonalen gespiegelte Adjazenzmatrix

$$\begin{array}{c}
 A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \\
 \begin{array}{l}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 * & 1 & - & 1 & - & - \\
 1 & * & 1 & 1 & - & 1 \\
 - & 1 & * & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & * & 1 & - \\
 - & - & 1 & 1 & * & 1 \\
 - & 1 & 1 & - & 1 & *
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen



Beim gerichteten Graphen sind die Verbindungen zwischen den Knoten jeweils nur in einer Richtung gültig. Im Graphen erfolgt die Darstellung der *Richtung mit einem Pfeil*. Für die Adjazenzmatrix haben die gerichteten Kanten zur Folge, dass *keine Symmetrie mehr* besteht.

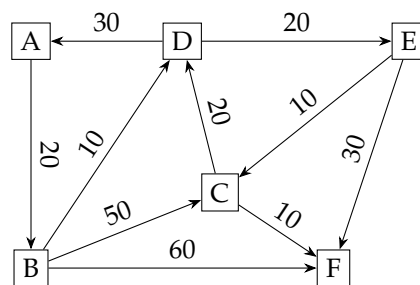
Richtung mit einem Pfeil

keine Symmetrie mehr

³Wikipedia-Artikel „Adjazenzmatrix“.

$$\begin{array}{c}
 A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \\
 \begin{array}{l}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 * & 1 & - & - & - & - \\
 - & * & 1 & 1 & - & 1 \\
 - & - & * & 1 & - & 1 \\
 1 & - & - & * & 1 & - \\
 - & - & 1 & - & * & 1 \\
 - & - & - & - & - & *
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Die Adjazenzmatrix eines gewichteten Graphens



In gewichteten Graphen haben die Kanten sogenannte *Kosten* oder *Gewichte*. In einer Matrix für gewichtete Graphen werden die Werte für das jeweilige Gewicht der Kante zwischen den Knoten eingetragen.⁴

Kosten
Gewichte
Werte für das jeweilige Gewicht

$$\begin{array}{c}
 A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \\
 \begin{array}{l}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E \\
 F
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 * & 20 & - & - & - & - \\
 - & * & 50 & 10 & - & 60 \\
 - & - & * & 20 & - & 10 \\
 30 & - & - & * & 20 & - \\
 - & - & 10 & - & * & 30 \\
 - & - & - & - & - & *
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Adjazenzliste

A: $\xrightarrow{20}$ B
 B: $\xrightarrow{50}$ C $\xrightarrow{10}$ D $\xrightarrow{60}$ F
 C: $\xrightarrow{20}$ D $\xrightarrow{10}$ F
 D: $\xrightarrow{30}$ A $\xrightarrow{20}$ E
 E: $\xrightarrow{10}$ C $\xrightarrow{30}$ F
 F:

Wir speichern zu jedem Knoten V eines Graphen seine Nachbarknoten in einem Feld oder einer Liste der Länge $|V|$. Zur Repräsentation von gewichteten

⁴<https://www.bigdata-insider.de/was-ist-eine-adjazenzmatrix-a-845891/>

Graphen werden in den Listen Tupel von Knoten und Kantengewichten gespeichert. Ein Vorteil von Adjazenzlisten ist der geringe Platzbedarf von $O(|V| + |E|)$. Außerdem sind die n Nachfolger eines Knotens in $\mathcal{O}(n)$ erreichbar, unabhängig von der Gesamtzahl der Knoten. Jedoch ist nicht mehr in $\mathcal{O}(1)$ bestimmbar, ob eine bestimmte Kante existiert.⁵

Literatur

- [1] *Qualifizierungsmaßnahme Informatik: Algorithmen und Datenstrukturen 6. Graphen*. https://www.studon.fau.de/file2635324_download.html.
- [2] Gunter Saake und Kai-Uwe Sattler. *Algorithmen und Datenstrukturen. Eine Einführung in Java*. 2014.
- [3] *Wikipedia-Artikel „Adjazenzmatrix“*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Adjazenzmatrix>.
- [4] *Wikipedia-Artikel „Graph (Graphentheorie)“*. [https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_\(Graphentheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)).

⁵*Qualifizierungsmaßnahme Informatik: Algorithmen und Datenstrukturen 6, Seite 7.*