Aufgabe 4: Vollständige Induktion

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass keinerlei Under- oder Overflows auftreten.
Gegeben sei folgende rekursive Methode für $n \geq 0$:

```
long sumOfSquares (long n) {
  if (n == 0)
    return 0;
  else
    return n * n + sumOfSquares(n - 1);
}
```

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \texttt{sumOfSquares(n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sei $f(n) : \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

Für $n = 0$ gilt:

$\texttt{sumOfSquares(0)} \stackrel{\texttt{if}}{=} 0 = f(0)$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$\texttt{sumOfSquares(0)} = f(n)$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

$n \to n + 1$

$\texttt{sumOfSquares(n+1)} \stackrel{\texttt{else}}{=}$

$\texttt{(n+1)*(n+1)*sumOfSquares(n)} \stackrel{\texttt{I.H.}}{=}$

$(n+1) \cdot (n+1) + f(n)$

$(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\frac{(n+1) \cdot (6(n+1) + n(2n+1))}{6}$

$\frac{(n+1) \cdot (6n+6+2n^2+n))}{6}$

$\frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6))}{6}$ $\frac{(n+1)\cdot(n+2)(2n+3))}{6}$

Neben $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3) = n \cdot 2n + 2 \cdot 2n + 3 \cdot n + 2 \cdot 6$

(b) Beweisen Sie die Terminierung von `sumOfSquares(n)` für alle $n \geq 0$.

Sei $T(n) = n$. Die Funktion $T(n)$ ist offenbar ganzzahlig. In jedem Rekursionsschritt wird n um eins verringert, somit ist $T(n)$ streng monoton fallend. Durch die Abbruchbedingung `n==0` ist $T(n)$ insbesondere nach unten beschränkt. Somit ist T eine gültige Terminierungsfunktion.