Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{ ww_1ww_2 \mid w, w_1, w_2 \in \{a, b, c\}^* \text{ und } 2|w| \geq |w_1| + |w_2| \}$$

nicht kontextfrei ist.

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen**
>
> Es sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass sich alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ zerlegen lassen in $\omega = uvwxy$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (i) $|vx| \geq 1$ (Die Wörter v und x sind nicht leer.)
>
> (ii) $|vwx| \leq j$ (Die Wörter v, w und x haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (iii) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iwx^iy in der Sprache L)

Es gibt eine Pumpzahl. Sie sei j. $a^jb^ja^jc^j$ ist ein Wort aus L, das sicher länger als j ist. Außerdem gilt $2|a^j| \geq |b^j| + |c^j|$. Unser gewähltes Wort ist deshalb in L.

Da $|vwx| \leq j$ und $|xv| \geq 1$ sein muss, liegt vwx entweder in w, w_1 oder w_2.

Aufteilung: vwx **in** w **(erstes** w**):**

u : ε

v : a

w : a^{j-2}

x : a

y : $b^ja^jc^j$

Es gilt $uv^iwx^iy \notin L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^jb^ja^jc^j \notin L$ für $i = 0$, da $|a^{j-2}| + |a^j| < |b^j| + |c^j|$

Aufteilung: vwx **in** w **(zweites** w**):**

u : a^jb^j

v : a

w : a^{j-2}

x : a

y : c^j

Es gilt $uv^iwx^iy \notin L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^j b^j a^j c^j \notin L$ für $i = 0$, da $|a^j| + |a^{j-2}| < |b^j| + |c^j|$

Aufteilung: vwx **in** w_1:

u : a^j

v : b

w : b^{j-2}

x : b

y : $a^j c^j$

Es gilt nicht $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^j b^j a^j c^j \notin L$ für alle $i > 2$ da $2|a^j| < |b^{j-2+2i}| + |c^j|$ für alle $i > 2$

Aufteilung: vwx **in** w_2:

Analog zur Aufteilung vwx in w_1

$\Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei.

(b) Betrachten Sie die Aussage

Seien $L_1, \dots, I_n$ beliebige kontextfreie Sprachen.
Dann ist $\bigcap_{i=1}^{n}, L_i$ immer eine entscheidbare Sprache.

Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr ist oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.

Diese Aussage ist falsch.

Kontextfreie Sprachen sind nicht abgeschlossen unter dem Schnitt, d. h. die Schnittmenge zweier kontextfreier Sprachen kann in einer Sprache eines anderen Typs in der Chomsky Sprachen-Hierachie resultieren. Entsteht durch den Schnitt eine Typ-0-Sprache, dann ist diese nicht entscheidbar.

(c) Sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der nicht negativen natürlichen Zahlen. Es ist bekannt, dass $L = \{\, a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ keine kontextfreie Sprache ist. Ist die Komplementsprache $L_5 = \{a, b, c\}^* \setminus L$ kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.