Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2020 / Herbst

Thema 1 / Teilaufgabe 1 / Aufgabe 3 (*Palindrom über Alphabet „abc“*)

Stichwörter: Kontextfreie Sprache, Pumping-Lemma (Reguläre Sprache)

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{ wc\hat{w} \mid w \in \{a, b\}* \}$. Dabei ist $\hat{w}$ das zu w gespiegelte Wort.

(a) Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen**
>
> Es sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort ω in L mit Mindestlänge j) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (i) $|v| \geq 1$ (Das Wort v ist nicht leer.)
>
> (ii) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (iii) Für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $uv^iw \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iw in der Sprache L)
>
> Die kleinste Zahl j, die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache L genannt.

Lösungsvorschlag

L ist regulär. Dann gilt für L das Pumping-Lemma. Sei j die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Dann muss sich das Wort $a^jbcba^j \in L$ aufpumpen lassen (da $|a^jbcba^j| \geq j$). $a^jbcba^j = uvw$ ist eine passende Zerlegung laut Lemma. Da $|uv| < j$, ist $u = a^x, v = a^y, w = a^zbcba^j$, wobei $y > 0$ und $x + y + z = j$. Aber dann $uv^0w = a^{x+z}bcba^j \notin L$, da $x + z < j$. Widerspruch. [a]

[a] `https://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/gti-ss-2015/slides/endliche-automaten6.pdf`

(b) Zeigen Sie, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine geeignete Grammatik angeben und anschließend begründen, dass diese die Sprache L erzeugt.

Lösungsvorschlag

$$P = \left\{ \begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid aCa \mid bSb \mid bCb \\ C &\rightarrow c \end{aligned} \right\}$$

$S \vdash aSa \vdash abCba \vdash abcba$

$S \vdash bSb \vdash bbSbb \vdash bbaSabb \vdash bbacabb$

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.