Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort ω in L mit Mindestlänge j) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $|v| \geq 1$ (Das Wort v ist nicht leer.)

(b) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge j.)

(c) Für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $uv^iw \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iw in der Sprache L)

Die kleinste Zahl j, die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache L genannt.[1]

Die einzelnen Bestandteile der Zerlegung des Wortes ω heißen Anfangsteil u, Endteil w und Schleifenteil v. [2]

Das Pumping-Lemma wird verwendet, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist (Widerspruchsbeweis).[3]

Beispiel $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N})$

Ich behaupte, L sei regulär.

(a) Also gibt es eine Pumpzahl. Sie sei j.

(b) (Wähle geschickt ein „langes“ Wort...) $a^j b^j$ ist ein Wort aus L, das sicher länger als j ist.

(c) Da L regulär ist, muss es nach dem Pumping-Lemma auch für dieses Wort eine Zerlegung geben:

$$a^j b^j = uvw \text{ mit } |v| \geq 1 \text{ und } |uv| \leq j$$

Weil uv höchstens j lang ist, kann es im Fall von $a^j b^j$ nur aus a's bestehen. Da v mindestens ein Zeichen enthält, ist das mindestens ein a. Pumpen führt nun zu mehr a's als b's und also zu einem Wort, das nicht in der Sprache ist. (Widerspruch!)[4]

$\Rightarrow$ Die Behauptung war falsch!

$\Rightarrow$ L ist nicht regulär![5]

[1] **wiki:pumping-lemma**.

[2] `https://studyflix.de/informatik/pumping-lemma-1445`

[3] *Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen*, Seite 63.

[4] *Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“*.

[5] *Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen*, Seite 63-64.

Literatur

[1] *Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen*.

[2] *Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Pumping-Lemma`.