Aufgabe 6 (O-Notation)

(a) Sortieren Sie die unten angegebenen Funktionen der O-Klassen $\mathcal{O}(a(n))$, $\mathcal{O}(b(n))$, $\mathcal{O}(c(n))$, $\mathcal{O}(d(n))$ und $\mathcal{O}(e(n))$ bezüglich ihrer Teilmengenbeziehungen. Nutzen Sie ausschließlich die echte Teilmenge $\subset$ sowie die Gleichheit $=$ für die Beziehung zwischen den Mengen. Folgendes Beispiel illustriert diese Schreibweise für einige Funktionen f_1 bis f_5 (diese haben nichts mit den unten angegebenen Funktionen zu tun): [1]

$$\mathcal{O}(f_4(n)) \subset \mathcal{O}(f_3(n)) = \mathcal{O}(f_5(n)) \subset \mathcal{O}(f_1(n)) = \mathcal{O}(f_2(n))$$

Die angegebenen Beziehungen müssen weder bewiesen noch begründet werden.

- $a(n) = n^2 \cdot \log_2(n) + 42$
- $b(n) = 2^n + n^4$
- $c(n) = 2^{2 \cdot n}$
- $d(n) = 2^{n+3}$
- $e(n) = \sqrt{n^5}$

$$\begin{aligned} a(n) &= n^2 \cdot \log_2(n) + 42 & &= n \\ b(n) &= 2^n + n^4 & &= 2^n \\ c(n) &= 2^{2 \cdot n} & &= 2^{2 \cdot n} \\ d(n) &= 2^{n+3} & &= 2^n \\ e(n) &= \sqrt{n^5} & & \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(a(n)) \subset \mathcal{O}(e(n)) \subset \mathcal{O}(b(n)) = \mathcal{O}(d(n)) \subset \mathcal{O}(c(n))$$

$$\mathcal{O}(n^2 \cdot \log_2(n) + 42) \subset \mathcal{O}(\sqrt{n^5}) \subset \mathcal{O}(2^n + n^4) = \mathcal{O}(2^{n+3}) \subset \mathcal{O}(2^{2 \cdot n})$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Aussagen formal nach den Definitionen der O-Notation oder widerlegen Sie sie.

(i) $\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n) \subseteq \mathcal{O}(n \cdot (\log_2 n)^2)$

Die Aussage gilt. Für $n \geq 16$ haben wir

$$(\log_2 n)^2 \leq n \Leftrightarrow \log_2 n \leq \sqrt{n}$$

und dies ist eine wahre Aussage für $n \geq 16$. Also gilt die Aussage mit $n_0 = 16$ und $c = 1$.

(ii) $2^{(n+1)} \in \mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$

(c) Bestimmen Sie eine asymptotische Lösung (in Θ-Schreibweise) für die folgende Rekursionsgleichung:

(i) $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2$

(ii) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2} n^2 + n$

[1] `http://www.s-inf.de/Skripte/DaStru.2012-SS-Katoen.(KK).Klausur1MitLoesung.pdf`