

### Aufgabe 3

Seien  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und  $L = \{wc\hat{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Dabei ist  $\hat{w}$  das zu  $w$  gespiegelte Wort.

(a) Zeigen Sie, dass  $L$  nicht regulär ist.

#### Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen

Es sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl  $j$ , sodass für alle Wörter  $\omega \in L$  mit  $|\omega| \geq j$  (jedes Wort  $\omega$  in  $L$  mit Mindestlänge  $j$ ) jeweils eine Zerlegung  $\omega = uvw$  existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $|v| \geq 1$  (Das Wort  $v$  ist nicht leer.)
- (ii)  $|uv| \leq j$  (Die beiden Wörter  $u$  und  $v$  haben zusammen höchstens die Länge  $j$ .)
- (iii) Für alle  $i = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $uv^i w \in L$  (Für jede natürliche Zahl (mit 0)  $i$  ist das Wort  $uv^i w$  in der Sprache  $L$ )

Die kleinste Zahl  $j$ , die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache  $L$  genannt.

$L$  ist regulär. Dann gilt für  $L$  das Pumping-Lemma. Sei  $j$  die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Dann muss sich das Wort  $a^j b c b a^j \in L$  aufpumpen lassen (da  $|a^j b c b a^j| \geq j$ ).  $a^j b c b a^j = uvw$  ist eine passende Zerlegung laut Lemma. Da  $|uv| < j$ , ist  $u = a^x$ ,  $v = a^y$ ,  $w = a^z b c b a^j$ , wobei  $y > 0$  und  $x + y + z = j$ . Aber dann  $uv^0 w = a^{x+z} b c b a^j \notin L$ , da  $x + z < j$ . Widerspruch. <sup>a</sup>

<sup>a</sup><https://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/gti-ss-2015/slides/endlische-automaten6.pdf>

(b) Zeigen Sie, dass  $L$  kontextfrei ist, indem Sie eine geeignete Grammatik angeben und anschließend begründen, dass diese die Sprache  $L$  erzeugt.

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSa \mid aCa \mid bSb \mid bCb \\ C \rightarrow c \end{array} \right\}$$

$$S \vdash aSa \vdash abCba \vdash abcba$$

$$S \vdash bSb \vdash bbSbb \vdash bbaSabb \vdash bbacabb$$