Aufgabe 2: wp-Kalkül

Gegeben sei folgendes Programm:

```
int f(int x, int y) {
  /* P */ x = 2 * x + 1 + x * x;
  y += 7;
  if (x > 196) {
    y = 2 * y;
  } else {
    y -= 8;
    x *= 2;
  } /* Q */
  return x + y;
}
```

Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung (weakest precondition), für die die Nachbedingung $Q := (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1)$ noch zutrifft.

Mit dem Distributivgesetz der Konjugation gilt:

$\mathrm{wp}(\texttt{"A; if(b) B; else C;"}, Q) \equiv$
$\mathrm{wp}(\texttt{"A;"}, b) \wedge \mathrm{wp}(\texttt{"A;B;"}, Q)$
$\vee$
$\mathrm{wp}(\texttt{"A;"}, \neg b) \wedge \mathrm{wp}(\texttt{"A;C;"}, Q)$

Der tatsächliche Programmcode wird eingesetzt:

$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;if(x>196)\{y=2*y;\}else\{y-=8;x*=2;\}"}, (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1)) \equiv$
$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;"}, x > 196) \wedge$
$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;y=2*y;"}, (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1))$
$\vee$
$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;"}, x \leq 196) \wedge$
$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;y-=8;x*=2;"}, (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1))$
$=: \mathrm{P}$

Nebenrechnung: wp($\texttt{"A;"}$, b)

$$\mathrm{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;"}, x > 196)$$

Wir lassen $y+ = 7$ weg, weil in der Nachbedingung kein y vorkommt und setzen in den Term $x > 196$ für das x die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$ ein.

$$\equiv \quad \mathrm{wp}(\texttt{""}, 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196)$$

Nach der Transmformationsregel *Nichts passiert, die Vorbedingung bleibt gleich* kann das auch so geschrieben werden:

$$\equiv \quad 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196$$

Die erste binomische Formel (Plus-Formel) lautet $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man kann die Formel auch umgedreht verwenden: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 +$

$x \cdot x$ kann umformuliert werden in $1 + 2 \cdot 1 \cdot x + x \cdot x = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = (1 + x)^2 = (x + 1)^2$. Wir haben für a die Zahl 1 und für b den Buchstaben x eingesetzt.

$$\equiv \quad (x+1)^2 > 196$$

Nebenrechnung: wp("A;B;", Q)

$$\text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;y=2*y;"},\ (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1))$$

Für das x in der Nachbedingung setzen wir die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$ ein. Für das y in der Nachbedingung setzen wir dritte Code-Zeile `y=2*y;` ein und dann die zweite Code-Zeile `y+=7;`. Das wp-Kalkül arbeitet den Code rückwärts ab. in $y\%2$ die dritte Anweisung $y = 2 \cdot y$ einfügen: $2 \cdot y\%2$ dann in $2 \cdot y\%2$ die zweite Anweisung $y = y + 7$ einfügen: $2 \cdot (y + 7)\%2$

$$\equiv \quad (x+1)^2 \geq 8 \wedge 2(y+7)\%2 = 1$$

Diese Aussage ist falsch, da $2(y + 7)$ immer eine gerade Zahl ergibt und der Rest von einer Division durch zwei einer geraden Zahl immer 0 ist und nicht 1.

$$\equiv \quad (x+1)^2 \geq 8 \wedge \text{falsch}$$

$$\equiv \quad \text{falsch}$$

Nebenrechnung: wp("A;", $\neg b$)

$$\text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;"},\ x \leq 196)$$

Analog zu Nebenrechnung 1

$$\equiv \quad (x+1)^2 \leq 196$$

Nebenrechnung: wp("A;C;", Q)

$$\text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;y-=8;x*=2;"},\ (x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1))$$

„`x*=2;`“: $x \cdot 2$ für x einsetzen:

$$\equiv \quad \text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;y-=8;"},\ (2 \cdot x \geq 8) \wedge (y\%2 = 1))$$

„`y-=8;`“: $y - 8$ für y einsetzen:

$$\equiv \quad \text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;y+=7;"},\ (2 \cdot x \geq 8) \wedge ((y-8)\%2 = 1))$$

„`y+=7`“: $y + 7$ für y einsetzen:

$$\equiv \quad \text{wp}(\texttt{"x=2*x+1+x*x;"},\ (2 \cdot x \geq 8) \wedge (((y+7)-8)\%2 = 1))$$

„`x=2*x+1+x*x;`“: $(x + 1)^2$ für x einsetzen:

$$\equiv \quad \text{wp}(\texttt{""}, (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \land (((y+7)-8)\%2 = 1))$$

Nur noch die Nachbedingung stehen lassen:

$$\equiv \quad (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \land (((y+7)-8)\%2 = 1)$$

Subtraktion:

$$\equiv \quad (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \land ((y-1)\%2 = 1)$$

Vereinfachen (links beide Seiten durch 2 teilen und rechts von beiden Seiten 1 abziehen)

$$\equiv \quad (\frac{2 \cdot (x+1)^2}{2} \geq \frac{8}{2}) \land (((y-1)\%2) - 1 = 1 - 1)$$

Zwischenergebnis:

$$\equiv \quad ((x+1)^2 \geq 4) \land y\%2 = 0$$

Zusammenführung

Die Zwischenergebnisse aus den Nebenrechnungen zusammenfügen:

$$\equiv \quad [(x+1)^2 > 196 \land \text{falsch}] \lor [(x+1)^2 \leq 196 \land (x+1)^2 \geq 4 \land y\%2 = 0]$$

„falsch“ und eine Aussage verbunden mit logischem Und „$\land$“ ist insgesamt falsch:

$$\equiv \quad \text{falsch} \lor [(x+1)^2 \leq 196 \land (x+1)^2 \geq 4 \land y\%2 = 0]$$

falsch verbunden mit oder weglassen:

$$\equiv \quad (x+1)^2 \leq 196 \land (x+1)^2 \geq 4 \land y\%2 = 0$$

Umgruppieren, sodass nur noch ein $(x+1)^2$ geschrieben werden muss:

$$\equiv \quad 4 \leq (x+1)^2 \leq 196 \land y\%2 = 0$$

$4 = 2^2$ und $196 = 14^2$

$$\equiv \quad 2^2 \leq (x+1)^2 \leq 14^2 \land y\%2 = 0$$

Hoch zwei weg lassen: Betragsklammer $|x|$ oder auch Betragsfunktion hinzufügen (Die Betragsfunktion ist festgelegt als „Abstand einer Zahl von der Zahl Null“.

$$\equiv \quad 2 \leq |x+1| \leq 14 \land y\%2 = 0$$

Auf die Gleichung der linken Aussage -1 anwenden:

$$\equiv \quad 1 \leq |x| \leq 13 \land y\%2 = 0$$

Die Betragsklammer weg lassen:

$$\equiv \quad (1 \le x \le 13 \vee -13 \le x \le -1) \wedge y\%2 = 0$$

$$=: P$$