Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Methode `function`:

```java
double function(int n) {
  if (n == 1)
    return 0.5 * n;
  else
    return 1.0 / (n * (n + 1)) + function(n - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46115/jahr_2015/herbst/Induktion.java`

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \geq 1\colon \text{function}(n) = f(n) \text{ mit } f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$$

Hinweis: Eventuelle Rechenungenauigkeiten, wie z. B. in Java, bei der Behandlung von Fließkommazahlen (z. B. double) sollen beim Beweis nicht berücksichtigt werden - Sie dürfen also annehmen, Fließkommazahlen würden mathematische Genauigkeit aufweisen.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

$f(1) := 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$f(n) := 1 - \frac{1}{n+1}$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

zu zeigen:

$f(n+1) := 1 - \frac{1}{(n+1)+1} = f(n)$

Vorarbeiten (Java in Mathe umwandeln):

$\text{function}(n) = \frac{1}{n \cdot (n+1)} + f(n-1)$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{1}{(n+1)\cdot((n+1)+1)} + f((n+1)-1) && \text{$n+1$ eingesetzt}\\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + f(\mathrm{n}) && \text{vereinfacht}\\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + 1 - \frac{1}{n+1} && \text{für $f(n)$ Formel einsetzt}\\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1}{n+1} && \text{1. Bruch an 2. Stelle geschrieben}\\
&= 1 + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} - \frac{1\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{2. Bruch mit $(n+2)$ erweitert}\\
&= 1 + \frac{1-(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{die 2 Brüche subtrahiert}\\
&= 1 + \frac{1-n-2}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{minus plus ist minus}\\
&= 1 + \frac{-1-n}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{eins minus zwei ist minus eins}\\
&= 1 + \frac{-1\cdot(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{$(n+1)$ ausgeklammert}\\
&= 1 + \left(-1\cdot\frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) && \text{minus vor den Bruch bringen}\\
&= 1 - \frac{(1+n)}{(n+1)\cdot(n+2)} && \text{plus minus ist minus}\\
&= 1 - \frac{1}{n+2} && \text{$(n+1)$ gekürzt}\\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)+1} && \text{Umformen zur Verdeutlichung}
\end{aligned}
$$