

Mathematische Grundlagen

Zahlen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

\mathbb{N} : Natürliche Zahl

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit \mathbb{N} oder \mathbf{N} bezeichnet. Die natürlichen Zahlen sind die beim *Zählen verwendeten Zahlen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 usw. Je nach Definition kann auch die 0 (*Null*) zu den natürlichen Zahlen gezählt werden. ¹

Zählen verwendeten Zahlen

Null

\mathbb{Z} : Ganze Zahl

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit \mathbb{Z} oder \mathbf{Z} bezeichnet. Die ganzen Zahlen fügen den *natürlichen Zahlen* die negativen Zahlen hinzu.

natürlichen Zahlen

\mathbb{Q} : Rationale Zahl

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit \mathbb{Q} oder \mathbf{Q} bezeichnet. Sie umfasst alle Zahlen, die sich als *Bruch* (engl. fraction) darstellen lassen, der sowohl im *Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen* enthält. ²

Bruch

Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Irrationale Zahl

Kennzeichen einer irrationalen Zahl ist, dass sie *nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar* ist. Bekannte irrationale Zahlen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π . Auch die Quadratwurzel aus Zwei $\sqrt{2}$ und das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnitts sind irrationale Zahlen.

nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar

³

\mathbb{R} : Reelle Zahl

Die reellen Zahlen umfassen die *rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen*. Die Menge der reellen Zahlen wird mit \mathbb{R} oder \mathbf{R} bezeichnet. ⁴

rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen

Modulo / Division mit Rest

Modulo berechnet den Rest b der Division n geteilt durch m . ⁵

¹https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche_Zahl

²https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl

³https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl

⁴https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl

⁵https://de.wikipedia.org/wiki/Division_mit_Rest#Modulo

Rechengesetze

Kommutativgesetz⁶

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a\end{aligned}$$

Assoziativgesetz⁷

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

Distributivgesetz⁸

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c)\end{aligned}$$

Ausklammern:⁹

Ausklammern dient dazu, aus einer Summe oder Differenz ein Produkt zu machen.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ausmultiplizieren:¹⁰

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Binomische Formeln¹¹

Als binomische Formeln werden üblicherweise die folgenden drei Umformungen bezeichnet:

(a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erste binomische Formel (Plus-Formel)

⁶Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz“.

⁷Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz“.

⁸Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz“.

⁹Schneider, Mathebibel, /ausklammern.

¹⁰Schneider, Mathebibel, /ausmultiplizieren.

¹¹Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“.

(b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ zweite binomische Formel (Minus-Formel)

(c) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ dritte binomische Formel (Plus-Minus-Formel)

Potenzgesetze

Multiplikation mit gleicher Basis

Multipliziert man zwei Potenzen mit gleicher Basis miteinander, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen addiert.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Division mit gleicher Basis

Dividiert man zwei Potenzen mit gleicher Basis, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen voneinander subtrahiert.¹²

$$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Regel von L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen $\frac{f}{g}$ von Funktionen f und g , wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert:¹³

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^n k$$

¹²Schneider, *Mathebibel*, /potenzgesetze.

¹³<https://de.serlo.org/mathe/funktionen/grenzwerte-stetigkeit-differenzierbarkeit/grenzwert/regel-l-hospital>

Mengen

| „für die gilt“

z. B. $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4 = 0\}$ dabei bedeutet | „für die gilt“, also alle rationalen Zahlen x , für die gilt, dass das Quadrat von x abzüglich 4 gleich 0 ist).¹⁴

Mengen

$M_1 \cup M_2$ Vereinigungsmenge von M_1 und M_2
 $M_1 \cap M_2$ Schnittmenge von M_1 und M_2 ¹⁵

Literatur

- [1] Frank Förster, Andreas Eichler und Boris Girnat. *Grundelemente der Mathematik*. Technische Universität Braunschweig, Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik.
- [2] Dirk W. Hoffmann. *Theoretische Informatik*. 2018.
- [3] Andreas Schneider. *Mathebibel*. <https://www.mathebibel.de>. aufgerufen 2020-08-18.
- [4] Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Assoziativgesetz>.
- [5] Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“. https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Formeln.
- [6] Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Distributivgesetz>.
- [7] Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutativgesetz>.

¹⁴Förster, Eichler und Girnat, *Grundelemente der Mathematik*, Seite 8.