

## Aufgabe zum Hashing

- (a) Ist  $h(k) = k^2 \bmod 11$  eine gut gewählte Hashfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Berechnen Sie zunächst  $h(k)$  für  $0 \leq k < 11$ . Überlegen Sie dann, welche Werte  $h(k')$  für  $k' = a \cdot 11 + k$  mit  $a > 0$  und  $0 \leq k < 11$  annehmen kann.

$k$	$h(k)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	5
5	3
6	3
7	5
8	9
9	4
10	1

Nein,  $h$  ist keine gute Hashfunktion. Betrachten wir zunächst die Wertetabelle von  $h$  für  $0 \leq k < 11$ . Wir erhalten

Wir sehen, dass nie die Werte 2, 6, 7, 8 und 10 eingenommen werden. Man könnte nun noch hoffen, dass das vielleicht für irgendein größeres  $k$  der Fall ist, dem ist jedoch nicht so. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass für ein beliebiges  $k' = a \cdot 11 + k$  mit  $a > 0$  und  $0 \leq k < 11$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned}h(k') &= (k')^2 \bmod 11 \\&= (a \cdot 11 + k)^2 \bmod 11 \\&= (a^2 \cdot 11^2 + 2ak \cdot 11 + k^2) \bmod 11 \\&= (k^2) \bmod 11 \\&= h(k)\end{aligned}$$

Somit haben wir die Berechnung des Hashwertes für ein beliebiges  $k'$  auf die Berechnung des Hashwertes für ein  $k < 11$  zurückgeführt, was impliziert, dass kein Schlüssel jemals auf etwas anderes als 0, 1, 3, 4, 5 oder 9 abgebildet werden kann.

- (b) Die Schlüssel 23, 57, 26, 6, 77, 43, 74, 60, 9, 91 sollen in dieser Reihenfolge mit der Hashfunktion  $h(k) = k \bmod 17$  in eine Hashtabelle der Länge 17 eingefügt werden.

### Exkurs: Sondieren

**separate Verkettung** Kollisionsauflösung durch Verkettung (separate chaining): Jedes Bucket speichert mit Hilfe einer dynamischen Datenstruktur (Liste, Baum, weitere Streutabelle, ...) alle Elemente mit dem entsprechenden Hashwert.

**lineares Sondieren** es wird um ein konstantes Intervall verschoben nach einer freien Stelle gesucht. Meistens wird die Intervallgröße auf 1 festgelegt.

**quadratisches Sondieren** Nach jedem erfolglosen Suchschritt wird das Intervall quadriert.

(i) Verwenden Sie separate Verkettung zur Kollisionsauflösung.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}17 \cdot 1 &= 17 \\17 \cdot 2 &= 34 \\17 \cdot 3 &= 51 \\17 \cdot 4 &= 68 \\17 \cdot 5 &= 85\end{aligned}$$

Modulo-Berechnung der gegebenen Zahlen:

$$\begin{aligned}23 \bmod 17 &= 6 \text{ da } 23 : 17 = 1, \text{ Rest } 6 \text{ da } 23 = 1 \cdot 17 + 6 \\57 \bmod 17 &= 57 - 3 \cdot 17 = 57 - 51 = 6 \\26 \bmod 17 &= 26 - 17 = 9 \\6 \bmod 17 &= 6 - 0 \cdot 17 = 6 \\77 \bmod 17 &= 77 - 4 \cdot 17 = 77 - 68 = 9 \\43 \bmod 17 &= 9 \\74 \bmod 17 &= 6 \\60 \bmod 17 &= 9 \\9 \bmod 17 &= 9 \\91 \bmod 17 &= 6\end{aligned}$$

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel							23			26							
							57			77							
							6			43							
							74			60							
							91			9							

(ii) Verwenden Sie lineares Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \bmod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim linearen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) - i) \bmod 17$$

Es ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 5
26	9
6	6 5 4
77	9 8
43	9 8 7
74	6 5 4 3
60	9 8 7 6 5 4 3 2
9	9 8 7 6 5 4 3 2 1
91	6 5 4 3 2 1

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	91	9	60	74	6	57	23	43	77	26							

(iii) Verwenden Sie quadratisches Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \mod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim quadratischen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) + i^2) \mod 17$$

Am Beispiel von zwei Schlüsseln werden die Sondierungsfolgen berechnet:

$$h'(23) = 6$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(23, 0) = (h'(23) + 0^2) \mod 17 = (6 + 0) \mod 17 = 6 \mod 17 = 6$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(23, 1) = (h'(23) + 1^2) \mod 17 = (6 + 1) \mod 17 = 7 \mod 17 = 7$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(23, 2) = (h'(23) + 2^2) \mod 17 = (6 + 4) \mod 17 = 10 \mod 17 = 10$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(23, 3) = (h'(23) + 3^2) \mod 17 = (6 + 9) \mod 17 = 15 \mod 17 = 15$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(23, 4) = (h'(23) + 4^2) \mod 17 = (6 + 16) \mod 17 = 22 \mod 17 = 5$$

$$h'(26) = 9$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(26, 0) = (h'(26) + 0^2) \mod 17 = (9 + 0) \mod 17 = 9 \mod 17 = 9$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(26, 1) = (h'(26) + 1^2) \mod 17 = (9 + 1) \mod 17 = 10 \mod 17 = 10$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(26, 2) = (h'(26) + 2^2) \mod 17 = (9 + 4) \mod 17 = 13 \mod 17 = 13$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(26, 3) = (h'(26) + 3^2) \mod 17 = (9 + 9) \mod 17 = 18 \mod 17 = 1$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(26,4) = (h'(26) + 4^2) \bmod 17 = (9 + 16) \bmod 17 = 25 \bmod 17 = 8$$

vi. Sondierungsfolge:

$$h(26,5) = (h'(26) + 5^2) \bmod 17 = (9 + 25) \bmod 17 = 34 \bmod 17 = 0$$

Es ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 7
26	9
6	6 7 10
77	9 10 13
43	9 10 13 1
74	6 7 10 15
60	9 10 13 1 8
9	9 10 13 1 8 0
91	6 7 10 15 5

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	9	43				91	23	57	60	26	6			77		74	