

## Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Es sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl  $j$ , sodass für alle Wörter  $\omega \in L$  mit  $|\omega| \geq j$  (jedes Wort  $\omega$  in  $L$  mit Mindestlänge  $j$ ) jeweils eine Zerlegung  $\omega = uvw$  existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a)  $|v| \geq 1$  (Das Wort  $v$  ist nicht leer.)
- (b)  $|uv| \leq j$  (Die beiden Wörter  $u$  und  $v$  haben zusammen höchstens die Länge  $j$ .)
- (c) Für alle  $i = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $uv^i w \in L$  (Für jede natürliche Zahl (mit 0)  $i$  ist das Wort  $uv^i w$  in der Sprache  $L$ )

Die kleinste Zahl  $j$ , die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache  $L$  genannt.<sup>1</sup>

Die einzelnen Bestandteile der Zerlegung des Wortes  $\omega$  heißen Anfangsteil  $u$ , Endteil  $w$  und Schleifenteil  $v$ .<sup>2</sup>

Das Pumping-Lemma wird verwendet, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist (Widerspruchsbeweis).<sup>3</sup>

**Beispiel**  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ich behaupte,  $L$  sei regulär.

- (a) Also gibt es eine Pumpzahl. Sie sei  $j$ .
- (b) (Wähle geschickt ein „langes“ Wort...)  $a^j b^j$  ist ein Wort aus  $L$ , das sicher länger als  $j$  ist.
- (c) Da  $L$  regulär ist, muss es nach dem Pumping-Lemma auch für dieses Wort eine Zerlegung geben:

$$a^j b^j = uvw \text{ mit } |v| \geq 1 \text{ und } |uv| \leq j$$

Weil  $uv$  höchstens  $j$  lang ist, kann es im Fall von  $a^j b^j$  nur aus  $a$ 's bestehen. Da  $v$  mindestens ein Zeichen enthält, ist das mindestens ein  $a$ . Pumpen führt nun zu mehr  $a$ 's als  $b$ 's und also zu einem Wort, das nicht in der Sprache ist. (Widerspruch!)<sup>4</sup>

⇒ Die Behauptung war falsch!

⇒  $L$  ist nicht regulär!<sup>5</sup>

hier ausführlich beschrieben <sup>6</sup>

<sup>1</sup>wiki:pumping-lemma.

<sup>2</sup><https://studyflix.de/informatik/pumping-lemma-1445>

<sup>3</sup>Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen, Seite 63.

<sup>4</sup>Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“.

<sup>5</sup>Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen, Seite 63-64.

<sup>6</sup><https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws13/einftheo/einftheo-skript.pdf>

## Literatur

- [1] *Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen.*
- [2] *Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“.* <https://de.wikipedia.org/wiki/Pumping-Lemma>.