

Aufgabe Geometrische Summenformel

Gegeben sei folgende Methode:

```
3 public class GeoSum {
4     // Math.pow(q, n) == q^n
5     double geoSum(int n, double q) {
6         if (n == 0) {
7             return 1 - q;
8         } else {
9             return (1 - q) * Math.pow(q, n) + geoSum(n - 1, q);
10        }
11    }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bachelorlangaul/aufgaben/sosy/totale_korrektheit/GeoSum.java](https://github.com/src/main/java/org/bachelorlangaul/aufgaben/sosy/totale_korrektheit/GeoSum.java)

Weisen Sie mittels vollständiger Induktion nach, dass

$$\text{geoSum}(n, q) = 1 - q^{n+1}$$

Dabei können Sie davon ausgehen, dass $q > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. ———

$$f(0) : \text{geoSum}(0, q) = 1 - q^{0+1} = 1 - q^1 = 1 - q$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —————

$$f(n) : \text{geoSum}(n, q) = 1 - q^{n+1}$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —————

$$f(n) = \text{geoSum}(n, q)$$

$$= (1 - q) \cdot q^n + \text{geoSum}(n - 1, q)$$

Java-Code in Mathe-Formel umgewandelt

$$= (1 - q) \cdot q^n + 1 - q^{(n-1)+1}$$

für rekursiven Methodenaufruf gegebene Formel eingesetzt

$$= (1 - q) \cdot q^n + 1 - q^n$$

Addition im Exponent

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \text{geoSum}(n+1, q) \\
&= (1-q) \cdot q^{n+1} + 1 - q^{n+1} && \text{von Java konvertierte Formel verwendet und } n+1 \text{ eingesetzt} \\
&= q^{n+1} - q^{(n+1)+1} + 1 - q^{n+1} && \text{ausmultipliziert} \\
&= -q^{(n+1)+1} + 1 && q^{n+1} - q^{n+1} = 0 \\
&= 1 - q^{(n+1)+1} && \text{Kommutativgesetz der Addition} \\
&= 1 - q^{(n+1)+1} && \text{was zu zeigen war}
\end{aligned}$$