

# Pumping-Lemma

(„an bn“ „c2n“ und „an bn2“)

**Stichwörter:** Pumping-Lemma (Kontextfreie Sprache)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

## Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen

Es sei  $L$  eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl  $j$ , sodass sich alle Wörter  $\omega \in L$  mit  $|\omega| \geq j$  zerlegen lassen in  $\omega = uvwxy$ , sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a)  $|vx| \geq 1$  (Die Wörter  $v$  und  $x$  sind nicht leer.)
- (b)  $|vwx| \leq j$  (Die Wörter  $v$ ,  $w$  und  $x$  haben zusammen höchstens die Länge  $j$ .)
- (c) Für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  gilt  $uv^iwx^iy \in L$  (Für jede natürliche Zahl (mit 0)  $i$  ist das Wort  $uv^iwx^iy$  in der Sprache  $L$ )

$$- L = \{ a^n b^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Lösungsvorschlag

Annahme:  $L$  ist kontextfrei.

$$\forall \omega \in L: \omega = uvwxy$$

$$j \in \mathbb{N}: |\omega| \geq j$$

$$\omega = a^j b^j c^{2j}: |\omega| = 4j > j$$

$$\text{Damit gilt: } |vwx| \leq j, |vx| \geq 1$$

Zu zeigen: Keine Möglichkeit der Zerlegung, damit  $\omega' \in L$

### 1. Fall $vwx$ enthält nur $a$ 's

o. E. d. A. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) stecken alle  $a$ 's in der Zerlegung  $vwx$ , d. h.  $u$  ist leer

$$u : \varepsilon$$

$$v : a^l$$

$$w : a^{j-(l+m)}$$

$$x : a^m$$

$$y : b \dots bc \dots c$$

$$v^2wx^2y$$

$$a^{2l}a^{j-(l+m)}a^{2m}b^jc^{2j} =$$

$$\text{Nebenrechnung: } 2l + j - (l + m) + 2m = j + l + m > j, \text{ da } |vx| \geq 1 \rightarrow l + m \geq 1$$

$$\Rightarrow \omega' = uv^2wx^2y \notin L$$

### 2. Fall $vwx$ enthalten $a$ 's und $b$ 's

$$\text{o. E. d. A. } |v|_a = |x|_b$$

$$u: a^p \ v: a^l \ w: a^{j-(p+l)}b^{j-(l+r)} \ x: b^l \ y: b^rc^{2j}$$

$$\Rightarrow uv^0wx^0v$$

Nebenrechnung:

$$a's: p + j - (l + p) = j - l$$

$$b's: j - (l + r) = j - l$$

ist falsch, da  $j - l$  echt kleiner ist, da  $|vx| \geq 1 \rightarrow l \geq 1$

$$\Rightarrow \omega' \notin L$$

**3. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's

analog zu Fall 1

**4. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's und  $c$ 's

analog zu Fall 2

**5. Fall**  $vwx$  enthält nur  $c$ 's

analog zu Fall 1

$\Rightarrow$  Es gibt keine Zerlegung, sodass  $\forall i \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$  Annahme ist falsch

$\Rightarrow L$  ist nicht kontextfrei

$$- L = \{ a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Lösungsvorschlag

Annahme:  $L$  kontextfrei

$\Rightarrow$  Pumping-Lemma:  $j \in \mathbb{N}: |w| \geq j$

$$\omega = a^j b^{j^2}$$

$$j + j^2 > j$$

**1. Fall**  $vwx$  enthält nur  $a$ 's

$\Rightarrow$  ungleich viele  $a$ 's wie  $b$ 's als Quadrat

$$\Rightarrow \omega' \notin E$$

**2. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's

$\Rightarrow$  analog zu Fall 1

$$\Rightarrow \omega' \notin E$$

**3. Fall**  $vwx$  enthält  $a$ 's und  $b$ 's

o. E. d. A.  $v$  nur  $a$ 's ;  $x$  nur  $b$ 's

$$u: a^{j-(l+m)}$$

$$v: a^l$$

$$w: a^m b^n$$

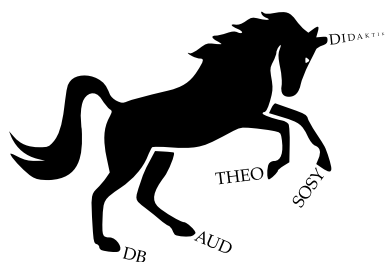
$$x: b^{l^2}$$

$$y: b^{j^2-(n+l^2)}$$

$$\Rightarrow uv^0wx^0y = \omega'$$

$$a: j - (l + m) + 0 \cdot l + m = j - l$$

$$\begin{aligned} \text{b: } n - 0 \cdot l^2 + j^2 - (n + l^2) &= j^2 - l^2 = (j - l)(j + l) \neq (j - l)(j - l) \\ \Rightarrow &\in L \end{aligned}$$



## Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an [hermine.bschlangaul@gmx.net](mailto:hermine.bschlangaul@gmx.net). Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: [https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Module/70\\_THEO/10\\_Formale-Sprachen/20\\_Typ-2\\_Kontextfrei/Pumping-Lemma/Aufgabe\\_Vorlesungsaufgaben.tex](https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Module/70_THEO/10_Formale-Sprachen/20_Typ-2_Kontextfrei/Pumping-Lemma/Aufgabe_Vorlesungsaufgaben.tex)