Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei fn)=2-.n?+3-n?+4- (log,n) + 7. Dann gilt f € O(n?).

(b) Sei f(n) = 4”. Dann gilt nicht f € O(2”).

(c) Sei fn) = (n+1)! (d. h. die Fakultät von n +1). Dann gilt f € O(n”).

z. B. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\ 5^5$

(d) Sei $f\colon \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}$ definiert durch die folgende Rekursionsgleichung:

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{für } n = 1 \\ (n-1)^2 + f(n-1), & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Dann gilt $f \in \mathcal{O}(n^3)$

$$\begin{aligned} f(n) &= (n-1)^2 + f(n-1) + \cdots + f(1) \\ &= (n-1)^2 + (n-1)^2 + f(n-2) + \cdots + f(1) \\ &= \underbrace{(n-1)^2 + \cdots + (n-1)^2 + 3}_{n} \\ &= \underbrace{(n-1)^2 + \cdots + (n-1)^2}_{n-1} +3 \\ &= (n-1)^2 \cdot (n-1) + 3 \\ &= (n-1)^3 + 3 \end{aligned}$$