

Aufgabe 1

- (a) Geben Sie für folgende Sortierverfahren jeweils zwei Felder A und B an, so dass das jeweilige Sortierverfahren angewendet auf A seine Best-Case-Laufzeit und angewendet auf B seine Worst-Case-Laufzeit erreicht. (Wir messen die Laufzeit durch die Anzahl der Vergleiche zwischen Elementen der Eingabe.) Dabei soll das Feld A die Zahlen $1, 2, \dots, 7$ genau einmal enthalten; das Feld B ebenso. Sie bestimmen also nur die Reihenfolge der Zahlen.

Wenden Sie als Beleg für Ihre Aussagen das jeweilige Sortierverfahren auf die Felder A und B an und geben Sie nach jedem größeren Schritt des Algorithmus den Inhalt der Felder an.

Geben Sie außerdem für jedes Verfahren asymptotische Best- und Worst-Case-Laufzeit für ein Feld der Länge n an.

Die im Pseudocode verwendete Unteroutine $\text{Swap}(A, i, j)$ vertauscht im Feld A die jeweiligen Elemente mit den Indizes i und j miteinander.

(i) Insertionsort

Best-Case

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

```

1 2 3 4 5 6 7 Eingabe
1 2* 3 4 5 6 7 markiere (i 1)
1 2 3* 4 5 6 7 markiere (i 2)
1 2 3 4* 5 6 7 markiere (i 3)
1 2 3 4 5* 6 7 markiere (i 4)
1 2 3 4 5 6* 7 markiere (i 5)
1 2 3 4 5 6 7* markiere (i 6)
1 2 3 4 5 6 7 Ausgabe

```

Worst-Case

7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---

```

7 6 5 4 3 2 1 Eingabe
7 6* 5 4 3 2 1 markiere (i 1)
>7 7< 5 4 3 2 1 vertausche (i 0<>1)
6 7 5* 4 3 2 1 markiere (i 2)
6 >7 7< 4 3 2 1 vertausche (i 1<>2)
>6 6< 7 4 3 2 1 vertausche (i 0<>1)
5 6 7 4* 3 2 1 markiere (i 3)
5 6 >7 7< 3 2 1 vertausche (i 2<>3)
5 >6 6< 7 3 2 1 vertausche (i 1<>2)
>5 5< 6 7 3 2 1 vertausche (i 0<>1)
4 5 6 7 3* 2 1 markiere (i 4)
4 5 6 >7 7< 2 1 vertausche (i 3<>4)

```

```

4 5 >6 6< 7 2 1 vertausche (i 2<>3)
4 >5 5< 6 7 2 1 vertausche (i 1<>2)
>4 4< 5 6 7 2 1 vertausche (i 0<>1)
3 4 5 6 7 2* 1 markiere (i 5)
3 4 5 6 >7 7< 1 vertausche (i 4<>5)
3 4 5 >6 6< 7 1 vertausche (i 3<>4)
3 4 >5 5< 6 7 1 vertausche (i 2<>3)
3 >4 4< 5 6 7 1 vertausche (i 1<>2)
>3 3< 4 5 6 7 1 vertausche (i 0<>1)
2 3 4 5 6 7 1* markiere (i 6)
2 3 4 5 6 >7 7< vertausche (i 5<>6)
2 3 4 5 >6 6< 7 vertausche (i 4<>5)
2 3 4 >5 5< 6 7 vertausche (i 3<>4)
2 3 >4 4< 5 6 7 vertausche (i 2<>3)
2 >3 3< 4 5 6 7 vertausche (i 1<>2)
>2 2< 3 4 5 6 7 vertausche (i 0<>1)
1 2 3 4 5 6 7 Ausgabe

```

- (ii) Standardversion von **Quicksort** (Pseudocode s.u., Feldindizes beginnen bei 1), bei der das letzte Element eines Teilfeldes als Pivot-Element gewählt wird.

Funktion Quicksort($A, l = 1, r = A.length$)

```

if  $l < r$  then
     $m = \text{Partition}(A, l, r);$ 
    Quicksort( $A, l, m - 1$ );
    Quicksort( $A, m + 1, r$ );
end

```

Funktion Partition($A, \text{int } l, \text{int } r$)

```

pivot =  $A[r];$ 
 $i = l;$ 
for  $j = l$  to  $r - 1$  do
    if  $A[j] < \text{pivot}$  then
        Swap( $A, i, j$ );
         $i = i + 1;$ 
    end
end

```

Best-Case

1	3	2	6	5	7	4
---	---	---	---	---	---	---

```

1 3 2 6 5 7 4 zerlege
1 3 2 6 5 7 4* markiere (i 6)

```

```

>1< 3 2 6 5 7 4 vertausche (i 0<>0)
1 >3< 2 6 5 7 4 vertausche (i 1<>1)
1 3 >2< 6 5 7 4 vertausche (i 2<>2)
1 3 2 >6 5 7 4< vertausche (i 3<>6)
1 3 2 zerlege
1 3 2* markiere (i 2)
>1< 3 2 vertausche (i 0<>0)
1 >3 2< vertausche (i 1<>2)
5 7 6 zerlege
5 7 6* markiere (i 6)
>5< 7 6 vertausche (i 4<>4)
5 >7 6< vertausche (i 5<>6)

```

Worst-Case

7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---

```

1 2 3 4 5 6 7 zerlege
1 2 3 4 5 6 7* markiere (i 6)
>1< 2 3 4 5 6 7 vertausche (i 0<>0)
1 >2< 3 4 5 6 7 vertausche (i 1<>1)
1 2 >3< 4 5 6 7 vertausche (i 2<>2)
1 2 3 >4< 5 6 7 vertausche (i 3<>3)
1 2 3 4 >5< 6 7 vertausche (i 4<>4)
1 2 3 4 5 >6< 7 vertausche (i 5<>5)
1 2 3 4 5 6 >7< vertausche (i 6<>6)
1 2 3 4 5 6 zerlege
1 2 3 4 5 6* markiere (i 5)
>1< 2 3 4 5 6 vertausche (i 0<>0)
1 >2< 3 4 5 6 vertausche (i 1<>1)
1 2 >3< 4 5 6 vertausche (i 2<>2)
1 2 3 >4< 5 6 vertausche (i 3<>3)
1 2 3 4 >5< 6 vertausche (i 4<>4)
1 2 3 4 5 >6< vertausche (i 5<>5)
1 2 3 4 5 zerlege
1 2 3 4 5* markiere (i 4)
>1< 2 3 4 5 vertausche (i 0<>0)
1 >2< 3 4 5 vertausche (i 1<>1)
1 2 >3< 4 5 vertausche (i 2<>2)
1 2 3 >4< 5 vertausche (i 3<>3)
1 2 3 4 >5< vertausche (i 4<>4)
1 2 3 4 zerlege
1 2 3 4* markiere (i 3)
>1< 2 3 4 vertausche (i 0<>0)
1 >2< 3 4 vertausche (i 1<>1)
1 2 >3< 4 vertausche (i 2<>2)
1 2 3 >4< vertausche (i 3<>3)
1 2 3 zerlege
1 2 3* markiere (i 2)

```

>1< 2 3	vertausche (i 0<>0)
1 >2< 3	vertausche (i 1<>1)
1 2 >3<	vertausche (i 2<>2)
1 2	zerlege
1 2*	markiere (i 1)
>1< 2	vertausche (i 0<>0)
1 >2<	vertausche (i 1<>1)

- (iii) **QuicksortVar**: Variante von Quicksort, bei der immer das mittlere Element eines Teilfeldes als Pivot-Element gewählt wird (Pseudocode s.u., nur eine Zeile neu).

Bei einem Aufruf von PartitionVar auf ein Teilfeld $A[l \dots r]$ wird also erst mithilfe der Unterroutine Swap $A \left[\lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor \right]$ mit $A[r]$ vertauscht.

Funktion QuicksortVar($A, l = 1, r = A.length$)

```

if  $l < r$  then
     $m = \text{PartitionVar}(A, l, r);$ 
    QuicksortVar( $A, l, m - 1$ );
    QuicksortVar( $A, m + 1, r$ );
end

```

Funktion PartitionVar($A, \text{int } l, \text{int } r$)

```

Swap( $A, \lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor, r$ );
pivot =  $A[r]$ ;
 $i = l$ ;
for  $j = l$  to  $r - 1$  do
    if  $A[j] < \text{pivot}$  then
        Swap( $A, i, j$ );
         $i = i + 1$ ;
    end
end

```

Best-Case

1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	4	5	6	7	zerlege
1	2	3	4*	5	6	7	markiere (i 3)
1	2	3	>4	5	6	7<	vertausche (i 3<>6)
>1<	2	3	7	5	6	4	vertausche (i 0<>0)
1	>2<	3	7	5	6	4	vertausche (i 1<>1)
1	2	>3<	7	5	6	4	vertausche (i 2<>2)
1	2	3	>7	5	6	4<	vertausche (i 3<>6)
1	2	3					zerlege

```

1 2* 3          markiere (i 1)
1 >2 3<        vertausche (i 1<>2)
>1< 3 2        vertausche (i 0<>0)
1 >3 2<        vertausche (i 1<>2)
              5 6 7 zerlege
              5 6* 7 markiere (i 5)
              5 >6 7< vertausche (i 5<>6)
              >5< 7 6 vertausche (i 4<>4)
              5 >7 6< vertausche (i 5<>6)
1 2 3 4 5 6 7 Ausgabe

```

Worst-Case

2	4	6	7	1	5	3
---	---	---	---	---	---	---

```

2 4 6 7 1 5 3 zerlege
2 4 6 7* 1 5 3 markiere (i 3)
2 4 6 >7 1 5 3< vertausche (i 3<>6)
>2< 4 6 3 1 5 7 vertausche (i 0<>0)
2 >4< 6 3 1 5 7 vertausche (i 1<>1)
2 4 >6< 3 1 5 7 vertausche (i 2<>2)
2 4 6 >3< 1 5 7 vertausche (i 3<>3)
2 4 6 3 >1< 5 7 vertausche (i 4<>4)
2 4 6 3 1 >5< 7 vertausche (i 5<>5)
2 4 6 3 1 5 >7< vertausche (i 6<>6)
2 4 6 3 1 5 zerlege
2 4 6* 3 1 5 markiere (i 2)
2 4 >6 3 1 5< vertausche (i 2<>5)
>2< 4 5 3 1 6 vertausche (i 0<>0)
2 >4< 5 3 1 6 vertausche (i 1<>1)
2 4 >5< 3 1 6 vertausche (i 2<>2)
2 4 5 >3< 1 6 vertausche (i 3<>3)
2 4 5 3 >1< 6 vertausche (i 4<>4)
2 4 5 3 1 >6< vertausche (i 5<>5)
2 4 5 3 1 zerlege
2 4 5* 3 1 markiere (i 2)
2 4 >5 3 1< vertausche (i 2<>4)
>2< 4 1 3 5 vertausche (i 0<>0)
2 >4< 1 3 5 vertausche (i 1<>1)
2 4 >1< 3 5 vertausche (i 2<>2)
2 4 1 >3< 5 vertausche (i 3<>3)
2 4 1 3 >5< vertausche (i 4<>4)
2 4 1 3 zerlege
2 4* 1 3 markiere (i 1)
2 >4 1 3< vertausche (i 1<>3)
>2< 3 1 4 vertausche (i 0<>0)
2 >3< 1 4 vertausche (i 1<>1)
2 3 >1< 4 vertausche (i 2<>2)
2 3 1 >4< vertausche (i 3<>3)

```

2 3 1	zerlege
2 3* 1	markiere (i 1)
2 >3 1<	vertausche (i 1<>2)
>2< 1 3	vertausche (i 0<>0)
2 >1< 3	vertausche (i 1<>1)
2 1 >3<	vertausche (i 2<>2)
2 1	zerlege
2* 1	markiere (i 0)
>2 1<	vertausche (i 0<>1)
>1< 2	vertausche (i 0<>0)
1 >2<	vertausche (i 1<>1)

- (b) Geben Sie die asymptotische Best- und Worst-Case-Laufzeit von **Merge-sort** an.

Best-Case: $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$
Worst-Case: $\mathcal{O}(n^2)$