

66115 / 2019 / Frühjahr

**Thema 1 / Aufgabe 4**

(SAT DOPPELSAT)

**Stichwörter:** Polynomialzeitreduktion

Betrachten Sie die folgenden Probleme:

**SAT****Gegeben:** Aussagenlogische Formel  $F$  in KNF**Frage:** Gibt es mindestens eine erfüllende Belegung für  $F$ ?**DOPPELSAT****Gegeben:** Aussagenlogische Formel  $F'$  in KNF**Frage:** Gibt es mindestens eine erfüllende Belegung für  $F$ , in der mindestens zwei Literale pro Klausel wahr sind?

(a) Führen Sie eine polynomielle Reduktion von SAT auf DOPPELSAT durch.

Lösungsvorschlag

<https://courses.cs.washington.edu/courses/csep531/09wi/handouts/sol4.pdf>

DOUBLE-SAT is in NP. The polynomial size certificate consists of two assignments  $f_1$  and  $f_2$ . First, the verifier verifies if  $f_1 \neq f_2$ . Then, it verifies if both assignments satisfy  $\phi$  by substituting the values for the variables and evaluate the clauses of  $\phi$ . Both checks can be done in linear time. DOUBLE-SAT is NP-hard. We give a reduction from SAT. Given an instance  $\phi$  of SAT which is a CNF formula of  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , we construct a new variable  $x_{n+1}$  and let  $\psi = \phi \wedge (x_{n+1} \vee \neg x_{n+1})$  be the corresponding instance of DOUBLE-SAT. We claim that  $\phi$  has a satisfying assignment iff  $\psi$  has at least two satisfying assignments. On one hand, if  $\phi$  has a satisfying assignment  $f$ , we can obtain two distinct satisfying assignments of  $\psi$  by extending  $f$  with  $x_{n+1} = T$  and  $x_{n+1} = F$  respectively. On the other hand, if  $\psi$  has at least two satisfying assignments then the restriction of any of them to the set  $x_1, x_2, \dots, x_n$  is a satisfying assignment for  $\phi$ . Thus, DOUBLE-SAT is NP-complete.

<https://cs.stackexchange.com/questions/6371/proving-double-sat-is-np-complete>

Here is one solution:

Clearly Double-SAT belongs to NP, since a NTM can decide Double-SAT as follows: On a Boolean input formula  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , nondeterministically guess 2 assignments and verify whether both satisfy  $\phi$ .

To show that Double-SAT is NP-Complete, we give a reduction from SAT to Double-SAT, as follows:

On input  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ :

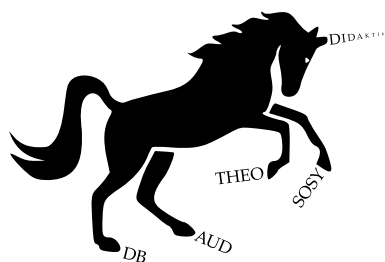
1. Introduce a new variable  $y$ . 2. Output formula  $\phi'(x_1, \dots, x_n, y) = \phi(x_1, \dots, x_n) \wedge (y \vee \bar{y})$ .

If  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  belongs to SAT, then  $\phi$  has at least 1 satisfying assignment, and therefore  $\phi'(x_1, \dots, x_n, y)$  has at least 2 satisfying assignments as we can satisfy the new clause  $(y \vee \bar{y})$  by assigning either  $y = 1$  or  $y = 0$  to the new variable  $y$ , so  $\phi'(x_1, \dots, x_n, y) \in \text{Double-SAT}$ .

On the other hand, if  $\phi(x_1, \dots, x_n) \notin \text{SAT}$ , then clearly  $\phi'(x_1, \dots, x_n, y) = \phi(x_1, \dots, x_n) \wedge (y \vee \bar{y})$  has no satisfying assignment either, so  $\phi'(x_1, \dots, x_n, y) \notin \text{Double-SAT}$ .

Therefore,  $\text{SAT} \leq_p \text{Double-SAT}$ , and hence Double-SAT is NP-Complete.

(b) Zeigen Sie, dass DOPPELSAT NP-vollständig ist.



## Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht alleine! Das ist ein Community-Projekt. Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an [hermine.bschlangaul@gmx.net](mailto:hermine.bschlangaul@gmx.net). Der  $\text{\LaTeX}$ -Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/hbschlang/lehramt-informatik/blob/main/Staatsexamen/66115/2019/09/Thema-1/Aufgabe-4.tex>