Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Master-Theorems für die folgenden Rekursionsgleichungen möglichst scharfe asymptotische untere und obere Schranken, falls das Master-Theorem anwendbar ist! Geben Sie andernfalls eine kurze Begründung, warum das Master-Theorem nicht anwendbar ist!

> **Exkurs: Master-Theorem**
>
> $$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$
>
> $a =$ Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion
>
> $\frac{1}{b} =$ Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird
>
> $f(n) =$ Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen
>
> Dann gilt:
>
> **1. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
>
> falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$
>
> **2. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
>
> falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
>
> **3. Fall:** $T(n) \in \Theta(f(n))$
>
> falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

(a) $T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 40n - 6$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

16

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$40n - 6$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 40n - 6$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

für $\varepsilon = 14$:

$f(n) = 40n - 6 \in \mathcal{O}\left(n^{\log_2 16 - 14}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\log_2 2}\right) = \mathcal{O}(n)$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$f(n) = 40n - 6 \notin \Theta\left(n^{\log_2 16}\right) = \Theta\left(n^4\right)$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 40n - 6 \notin \Omega\left(n^{\log_2 16+\varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^4)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(b) $T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 \log n$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

27

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{3}$ also $b = 3$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$3n^2 \log n$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n^2 \log n$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \in \mathcal{O}\left(n^{\log_3 27-24}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\log_3 3}\right) = \mathcal{O}(n)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \notin \Theta\left(n^{\log_3 27}\right) = \Theta(n^3)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 \log n = n \notin \Omega\left(n^{\log_3 27+\varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(c) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^2 + \log n$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

4

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$3n^2 + \log n$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n^2 + \log n$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_2 4 - \varepsilon}\right)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \in \Theta\left(n^{\log_2 4}\right) = \Theta(n^2)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 3n^2 + \log n = n^2 = n \notin \Omega\left(n^{\log_2 4 + \varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(d) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

4

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2}$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \in \mathcal{O}\left(n^{\log_2 4 - 2}\right) = \mathcal{O}(n)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \notin \Theta\left(n^{\log_2 4}\right) = \Theta(n^2)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$:

$$f(n) = 100 \log n + \sqrt{2n} + n^{-2} = n \notin \Omega\left(n^{\log_2 4+\varepsilon}\right)$$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha