

## Gaußsche Summenformel

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt

```
8   public static int sum(int n) {  
9       if (n <= 0) {  
10          return 0;  
11      }  
12  
13      return n + sum(n - 1);  
14  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/beschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java](https://github.com/beschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java)

$$A(n) : \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sie kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

**Induktionsanfang** — Beweise, dass  $A(1)$  eine wahre Aussage ist. \_\_\_\_\_

Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$A(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

**Induktionsvoraussetzung** — Die Aussage  $A(k)$  ist wahr für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ . \_\_\_\_\_

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass aus der Induktionsvoraussetzung

$$A(n) : \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Induktionsschritt** — Beweise, dass wenn  $A(n = k)$  wahr ist, auch  $A(n = k + 1)$  wahr sein muss. \_\_\_\_\_

die Induktionsbehauptung

$$A(n+1) : \quad 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{für } n \geq 1$$

folgt. Dies gelingt folgendermaßen (Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.):

$$\begin{aligned}
A(n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \text{Hauptnenner 2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausgeklammert} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{Umgedreht nach Kommutativgesetz} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && \text{mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n
\end{aligned}$$

Schließlich der Induktionsschluss: Damit ist die Aussage  $A(n)$  für alle  $n \geq 1$  bewiesen.

```

3  import static org.junit.Assert.assertEquals;
4
5  import org.junit.Test;
6
7  public class GaussTest {
8
9      private void teste(int n, int erwartet) {
10         assertEquals(Gauss.sum(n), erwartet);
11     }
12
13     @Test
14     public void teste() {
15         teste(0, 0);
16         teste(1, 1);
17         teste(2, 3);
18         teste(3, 6);
19         teste(4, 10);
20         teste(5, 15);
21         teste(6, 21);
22         teste(7, 28);
23         teste(8, 36);
24         teste(9, 45);
25         teste(10, 55);
26         teste(11, 66);
27     }
28
29 }

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/GaussTest.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/GaussTest.java)