

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende rekursive Methodendeklaration in der Sprache Java. Es wird als Vorbedingung vorausgesetzt, dass die Methode `cn` nur für Werte $n \geq 0$ aufgerufen wird.

```
1 int cn(int n) {  
2     if (n == 0)  
3         return 1;  
4     else  
5         return (4 * (n - 1) + 2) * cn(n - 1) / (n + 1);  
6 }
```

Sie können im Folgenden vereinfachend annehmen, dass es keinen Überlauf in der Berechnung gibt, d. h. dass der Datentyp `int` für die Berechnung des Ergebnisses stets ausreicht.

- (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `cn(n)` für jedes $n \geq 0$ die n -te Catalan-Zahl C_n berechnet, wobei

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Exkurs: Fakultät

Für alle natürlichen Zahlen n ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n definiert. Da das leere Produkt stets 1 ist, gilt

$$0! = 1$$

Die Fakultät lässt sich auch rekursiv definieren:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

Fakultäten für negative oder nicht ganze Zahlen sind nicht definiert. Es gibt aber eine Erweiterung der Fakultät auf solche Argumente ^a

^a[https://de.wikipedia.org/wiki/Fakultät_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Fakultät_(Mathematik))

Exkurs: Catalan-Zahl

Die Catalan-Zahlen bilden eine Folge natürlicher Zahlen, die in vielen Problemen der Kombinatorik auftritt. Sie sind nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan benannt.

Die Folge der Catalan-Zahlen $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ beginnt mit 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...

^a

^a<https://de.wikipedia.org/wiki/Catalan-Zahl>

Beim Induktionsschritt können Sie die beiden folgenden Gleichungen verwenden:

$$(i) \quad (2(n+1))! = (4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!$$

$$(ii) \quad (n+2)! \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!$$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{(2 \cdot 0)!}{(0+1)! \cdot 0!} \\ &= \frac{0!}{1! \cdot 0!} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. _____

Vom Code ausgehend

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} &= \frac{(4 \cdot (n+1 - 1) + 2) \cdot \text{cn}(n+1 - 1)}{n+1 + 1} && \text{Java nach Mathe} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot \text{cn}(n)}{n+2} && \text{addiert, subtrahiert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{für cn(n) Formel eingesetzt} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)! \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n! \cdot (n+1)} && (n+1) \text{ multipliziert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot (n+1) \cdot n!} && \text{umsortiert} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1) + 1)! \cdot (n+1)!} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
 \end{aligned}$$

Mathematische Herangehensweise

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1) + 1)! \cdot (n+1)!} && n+1 \text{ in } C_n \text{ eingesetzt} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{addiert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && (n+1) \text{ gekürzt} \\
 &= \frac{4n+2}{n+2} \cdot C_n && \text{Catalan-Formel ersetzt} \\
 &= \frac{4((n+1) - 1) + 2}{(n+1) + 1} \cdot C_{(n+1)-1} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
 \end{aligned}$$

- (b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie, warum der Methodenaufruf $\text{cn}(n)$ für jedes $n \geq 0$ terminiert.

$T(n) = n$. Diese Funktion verringert sich bei jedem Rekursionsschritt um eins. Sie ist monoton fallend und für $T(0) = 0$ definiert. Damit ist sie eine Terminierungsfunktion für $\text{cn}(n)$.