Staatsexamen 66115 / 2021 / Frühjahr / Thema Nr. 2 / Teilaufgabe Nr. 1 / Aufgabe Nr. 4

Aufgabe 4 [CLIQUE - ALMOST CLIQUE]

Betrachten Sie die folgenden Probleme:

CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl $k \in \mathcal{N}$

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$, sodass für alle Knoten $u \neq v \in V$ gilt, dass $\{u, v\}$ eine Kante in E ist?

ALMOST CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Zahl $k \in \mathcal{N}$

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$, sodass die Anzahl der Kanten zwischen Knoten in S genau $\frac{k(k-1)}{2} - 1$ ist?

Zeigen Sie, dass das Problem ALMOST CLIQUE NP-vollständig ist. Nutzen Sie dafür die NP-Vollständigkeit von CLIQUE.

Hinweis: Die Anzahl der Kanten einer k-Clique sind $\frac{k(k-1)}{2}$.

> **Exkurs: Cliquenproblem**
> Das **Cliquenproblem** fragt nach der Existenz einer Clique der Mindestgröße n in einem gegebenen Graphen. Eine Clique ist eine Teilmenge von Knoten in einem ungerichteten Graphen, bei der *jedes Knotenpaar durch eine Kante* verbunden ist.

> **Exkurs: `Almost Clique`**
> Eine Gruppe von Knoten wird ALMOST CLIQUE genannt, wenn nur eine Kante ergänzt werden muss, damit sie zu einer Clique wird.

You can reduce to this from $CLIQUE$.

Given a graph $G = (V, E)$ and t, construct a new graph G^* by adding two new vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ and connecting them with all of G's vertices but removing the edge $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, i.e. they are not neighbors in G^*. return G^* and $t + 2$.

If G has a t sized clique by adding it to the two vertices we get an $t + 2$ almost clique in G^* (by adding $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$).

If G^* has a $t + 2$ almost clique we can look at three cases:

1) It contains the two vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, then the missing edge must be $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$ and this implies that the other t vertices form a t clique in G.

2) It contains one of the vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, say w.l.o.g. v_{n+1}, then the missing edge must be inside G, say $e = \{u, v\} \in G$. If we remove u and v_{n+1} then the other t vertices, which are in G must form a clique of size t.

3) It does not contain any of the vertices $\{v_{n+1}, v_{n+2}\}$, then it is clear that this group is in G and must contain a clique of size t.

It is also clear that the reduction is in polynomial time, actually in linear time, log-space. [a]

[a] `https://cs.stackexchange.com/a/76627`

Github: `Staatsexamen/66115/2021/03/Thema-2/Teilaufgabe-1/Aufgabe-4.tex`