66115 / 2019 / Frühjahr

Thema 2 / Aufgabe 6

(*Mastertheorem*)

Stichwörter: Master-Theorem

Der Hauptsatz der Laufzeitfunktionen ist bekanntlich folgendermaßen definiert:

1. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

2. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

3. Fall: $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

Bestimmen und begründen Sie formal mit Hilfe dieses Satzes welche Komplexität folgende Laufzeitfunktionen haben.

(a) $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

8

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$5n^2$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

für $\varepsilon = 4$:

$f(n) = 5n^2 \in \mathcal{O}\left(n^{\log_2 8 - 4}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\log_2 4}\right) = \mathcal{O}\left(n^2\right)$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$f(n) = 5n^2 \notin \Theta\left(n^{\log_2 8}\right) = \Theta\left(n^3\right)$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$:

$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_2 8 + \varepsilon}\right)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(b) $T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 5n^2$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

9

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{3}$ also $b = 3$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$5n^2$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 5n^2$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$f(n) = 5n^2 \in \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta\left(n^2\right)$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$:

$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_3 9 + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^2 \cdot \log n\right)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha