Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie: Die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sind regulär. [1]

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen**
> Es sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort ω in L mit Mindestlänge j) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (a) $|v| \geq 1$ (Das Wort v ist nicht leer.)
>
> (b) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (c) Für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $uv^i w \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort $uv^i w$ in der Sprache L)
>
> Die kleinste Zahl j, die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache L genannt.

$$L_1 = \{ww | w \in \{a, b\}^*\}$$

Angenommen L_1 sei regulär, dann müsste L_1 die Bedingungen der stärkeren Variante des Pumping-Lemmas erfüllen.

Beweis durch Widerspruch:
Sei $j \in \mathbb{N}$ die Konstante aus dem Pumping-Lemma und $\omega = a^j b a^j b$ ein Wort aus L_1 ($|\omega| > j$ gilt offensichtlich).

Dann müsste ω nach dem Pumping-Lemma zerlegbar sein in $\omega = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| < j$. uv kann wegen $|uv| < j$ kein b enthalten und liegt komplett im ersten a^j.
Also:

$$a^j b a^j b = uvw \text{ mit } u = a^x, v = a^y, w = a^{n-x-y} b a^j b (n \geq x + y, x > 0)$$

Dann gilt

$$uv^0 w = a^x a^{j-x-y} b a^j b = a^{j-y} b a^j b \notin L_1$$

Wir haben gezeigt, dass es keine gültige Zerlegung für ω gibt. Also gilt für L_1 die stärkere Variante des Pumping-Lemmas nicht. Somit kann L_1 nicht regulär sein.

[1] https://userpages.uni-koblenz.de/~dpeuter/teaching/17ss_gti/blatt04_loesung.pdf