Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2021 / Frühjahr

# Thema 2 / Teilaufgabe 1 / Aufgabe 2 (*w w1 w w2*)

**Stichwörter:** Kontextfreie Sprache, Pumping-Lemma (Kontextfreie Sprache)

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\, ww_1ww_2 \mid w, w_1, w_2 \in \{a, b, c\}^* \text{ und } 2|w| \geq |w_1| + |w_2| \,\}$$

nicht kontextfrei ist.

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen**
>
> Es sei $L$ eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl $j$, sodass sich alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ zerlegen lassen in $\omega = uvwxy$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (i) $|vx| \geq 1$ (Die Wörter $v$ und $x$ sind nicht leer.)
>
> (ii) $|vwx| \leq j$ (Die Wörter $v$, $w$ und $x$ haben zusammen höchstens die Länge $j$.)
>
> (iii) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) $i$ ist das Wort $uv^iwx^iy$ in der Sprache $L$)

Lösungsvorschlag

Es gibt eine Pumpzahl. Sie sei $j$. $a^jb^ja^jc^j$ ist ein Wort aus $L$, das sicher länger als $j$ ist. Außerdem gilt $2|a^j| \geq |b^j| + |c^j|$. Unser gewähltes Wort ist deshalb in $L$.

Da $|vwx| \leq j$ und $|xv| \geq 1$ sein muss, liegt $vwx$ entweder in $w$, $w_1$ oder $w_2$.

**Aufteilung:** $vwx$ **in** $w$ **(erstes** $w$**):**

**u** : $\varepsilon$

**v** : $a$

**w** : $a^{j-2}$

**x** : $a$

**y** : $b^ja^jc^j$

Es gilt $uv^iwx^iy \notin L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^jb^ja^jc^j \notin L$ für $i = 0$, da $|a^{j-2}| + |a^j| < |b^j| + |c^j|$

**Aufteilung:** $vwx$ **in** $w$ **(zweites** $w$**):**

**u** : $a^jb^j$

**v** : $a$

**w** : $a^{j-2}$

**x** : $a$

**y** : $c^j$

Es gilt $uv^iwx^iy \notin L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^jb^ja^jc^j \notin L$ für $i = 0$, da $|a^j| + |a^{j-2}| < |b^j| + |c^j|$

**Aufteilung:** $vwx$ **in** $w_1$**:**

**u** : $a^j$

**v** : $b$

**w** : $b^{j-2}$

**x** : $b$

**y** : $a^jc^j$

Es gilt nicht $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, da $a^jb^ja^jc^j \notin L$ für alle $i > 2$ da $2|a^j| < |b^{j-2+2i}| + |c^j|$ für alle $i > 2$

**Aufteilung:** $vwx$ **in** $w_2$**:**

Analog zur Aufteilung $vwx$ in $w_1$

$\Rightarrow L$ ist nicht kontextfrei.

(b) Betrachten Sie die Aussage

Seien $L_1, \ldots, I_n$ beliebige kontextfreie Sprachen.
Dann ist $\bigcap_{i=1}^{n}, L_i$ immer eine entscheidbare Sprache.

Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr ist oder nicht und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Diese Aussage ist falsch.

Kontextfreie Sprachen sind nicht abgeschlossen unter dem Schnitt, d. h. die Schnittmenge zweier kontextfreier Sprachen kann in einer Sprache eines anderen Typs in der Chomsky Sprachen-Hierachie resultieren. Entsteht durch den Schnitt eine Typ-0-Sprache, dann ist diese nicht entscheidbar.

(c) Sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der nicht negativen natürlichen Zahlen. Es ist bekannt, dass $L = \{ a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ keine kontextfreie Sprache ist. Ist die Komplementsprache $L_5 = \{a, b, c\}^* \setminus L$ kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Die Bschlangaul-Sammlung**
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.