Entscheidbarkeit

Weiterführende Literatur:

- Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 309-312
- *Wikipedia-Artikel „Entscheidbar“*
- Schneider, *Taschenbuch der Informatik*, Kapitel 19.2.3.1 Entscheidbarkeit und Semientscheidbarkeit, Seite 596-597

Entscheidbarkeit Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt entscheidbar, wenn die charakteristische Funktion $\chi_L : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ mit

$$\chi_L(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in L, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin L \end{cases}$$

berechenbar ist.

Semi-Entscheidbarkeit Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt semi-entscheidbar, wenn die partielle charakteristische Funktion $\chi'_L : \Sigma^* \to \{1\}$ mit

$$\chi'_L(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in L, \\ \perp, & \text{falls } \omega \notin L \end{cases}$$

berechenbar ist.

> **Exkurs: Charakteristische Funktion**
> Die Indikatorfunktion (auch charakteristische Funktion genannt) ist eine Funktion in der Mathematik, die sich dadurch auszeichnet, dass sie nur einen oder zwei Funktionswerte annimmt. Sie ermöglicht es, komplizierte Mengen mathematisch präzise zu fassen.[a]
>
> [a] *Wikipedia-Artikel „Charakteristische Funktion / Indikatorfunktion“*.

Wichtige Definitionen

Jede nichtdeterministische Turing-Maschine kann durch eine deterministische Turing-Maschine simuliert werden.

Zu jeder Typ-0-Sprache L existiert eine Turing-Maschine, die L akzeptiert.

Zu jeder Typ-1-Sprache L existiert eine nichtdeterministische, linear beschränkte Turing-Maschine, die L akzeptiert.[1]

[1] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 35.

Sprache und Abzählbarkeit

Eine Sprache L heißt

rekursiv aufzählbar, falls

- eine Turing-Maschine T existiert, die L akzeptiert oder
- $L = \emptyset$ oder
- eine surjektive und berechenbare Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow L$ existiert.

abzählbar, falls eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow L$ existiert.

rekursiv oder entscheidbar, falls eine Turing-Maschine T existiert, die L akzeptiert und zusätzlich für jede Eingabe terminiert.

[2]

> **Exkurs: Abzählbarkeit / Abzählbare Menge**
> In der Mengenlehre wird eine Menge A als abzählbar unendlich bezeichnet, wenn sie die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dies bedeutet, dass es eine Bijektion zwischen A und der Menge der natürlichen Zahlen gibt, die Elemente der Menge A also „durchnummeriert" werden können. [a]
>
> [a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Abzählbare_Menge`

Entscheidbarkeit - Feststellungen

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch $\overline{L}$ semi-entscheidbar sind.

Eine Sprache ist genau dann aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Eine Sprache ist genau dann entscheidbar, wenn L und $\overline{L}$ aufzählbar sind.[3]

Die Klasse der Typ-0-Sprachen ist mit der von allg. Turing-Maschinen akzeptierten Sprachen identisch.

Die Klasse der kontextsensitiven (Typ-1) Sprachen ist mit der Klasse der Sprachen identisch, die von linear beschränkten Turing-Maschinen akzeptiert werden.[4]

Unentscheidbarkeit

Zu jedem Alphabet Σ gibt es (unendlich viele) unentscheidbare Sprachen.

Dieser Satz zeigt uns harte theoretische Grenzen auf![5]

- Allgemeines Halteproblem:

[2] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 37.
[3] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 37.
[4] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 38.
[5] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 39.

Gegeben: Gefragt: Turingmaschine □ und das Eingabewort □ Terminiert □ unter der Eingabe □ ? • Beweis von Turing (1936): Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Halteproblem

Wir listen alle Wörter der Sprache in einer Tabelle in den Spalten auf. Für jedes Wort □ □ geben wir an, ob die Turing-Maschine □ □ hält

Wir nehmen an, dass das Halteproblem entscheidbar ist.[6]

Dann würde eine TM H existieren, die für ein Paar (□, □) entscheidet, T bei der Eingabe von □ terminiert. Zudem würde eine TM H′ existieren, • die das Element (i,j) analog zu H bestimmt • gilt (i,j) = ja, dann geht H′ in eine Endlosschleife über, terminiert also nie! • gilt (i,j) = nein, terminiert H′ in einem Endzustand. Da H′ eine TM ist, muss sie in der Tabelle vorkommen. Aber: Keine Zeile der Tabelle entspricht der TM H′ Widerspruch zur Annahme der Existenz von H′ Widerspruch zur Annahme der Entscheidbarkeit.[7]

Satz von Rice:

Mit E sei eine nichttriviale funktionale Eigenschaft von Turingmaschinen gegeben.[8]

Dann ist das folgende Problem unentscheidbar:

Gegeben: Turingmaschine T

Gefragt: Besitzt T die Eigenschaft E?

[9]

Reduktionen:

L_1 heißt reduzierbar auf L_2 ($L_1 \leq L_2$), wenn es eine totale, berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass gilt:

$$\omega \in L_1 \Leftrightarrow f(\omega) \in L_2$$

Wenn man L_2 lösen könnte, dann kann man auch L_1 lösen. Damit L_2 mindestens so unentscheidbar ist wie L_1, nimm für L_1 ein bekanntes unentscheidbares Problem![10]

Vorgehen Reduktionsbeweise:

Es gibt eine Funktion, die Instanzen von L_1 auf Instanzen von L_2 „umbaut“.

- Die Funktion ist total.
- Die Funktion ist berechenbar.
- Korrektheit der Reduktion.

[6] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 41.
[7] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 42.
[8] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 324.
[9] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 43.
[10] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 44.