

Aufgabe 8: Greedy-Färben von Intervallen

Sei $X = (I_1, \dots, I_n)$ eine Menge von n (geschlossenen) Intervallen über den reellen Zahlen \mathbb{R} . Das Intervall I_j sei dabei gegeben durch seine linke Intervallgrenze $l_j \in \mathbb{R}$ sowie seine rechte Intervallgrenze $r_j \in \mathbb{R}$ mit $r_j > l_j$, d.h. $I_j = [l_j, r_j]$.

Wir nehmen in dieser Aufgabe der Einfachheit halber an, dass die Zahlen alle paarweise verschieden sind.

Zwei Intervalle I_j, I_k überlappen sich gdw. sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben, d.h. gdw. falls für (o.B.d.A.) $l_j < r_k$, auch $1 < j < k$ gilt. Eine gültige Färbung von X mit $c \in \mathbb{N}$ Farben ist eine Funktion $F: X \rightarrow \{1, 2, \dots, c\}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes Paar I_j, I_k von überlappenden Intervallen $F(I_j) \neq F(I_k)$ gilt.

Abbildung 1: Eine gültige Färbung von X

Eine minimale gültige Färbung von X ist eine gültige Färbung mit einer minimalen Anzahl an Farben. Die Anzahl von Farben in einer minimalen gültigen Färbung von X bezeichnen wir mit $\chi(X)$. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass für X eine minimale gültige Färbung F^* gefunden wurde.

- Nehmen wir an, dass aus X alle Intervalle einer bestimmten Farbe von F^* gelöscht werden. Ist die so aus F^* entstandene Färbung der übrigen Intervalle in jedem Fall immer noch eine minimale gültige Färbung? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Nehmen wir an, dass aus X ein beliebiges Intervall gelöscht wird. Ist die so aus F^* entstehende Färbung der übrigen Intervalle in jedem Fall immer noch eine minimale gültige Färbung? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Mit $u_j(X)$ bezeichnen wir die maximale Anzahl von Intervallen in X , die sich paarweise überlappen. Zeigen Sie, dass $\chi(X) = u_j(X)$ ist. Wir betrachten nun folgenden Algorithmus, der die Menge $X = (I_1, \dots, I_n)$ von n Intervallen einfärbt:
 - Zunächst sortieren wir die Intervalle von X aufsteigend nach ihren linken Intervallgrenzen. Die Intervalle werden jetzt in dieser Reihenfolge nacheinander eingefärbt; ist ein Intervall dabei erst einmal eingefärbt, ändert sich seine Farbe nie wieder. Angenommen die sortierte Reihenfolge der Intervalle sei I_1, \dots, I_n .
 - Das erste Intervall I_1 erhält die Farbe 1. Für $1 < i < n$ verfahren wir im i -ten Schritt zum Färben des i -ten Intervalls wie folgt:
Bestimme die Menge C_i aller Farben der bisher schon eingefärbten Intervalle die I_i überlappen. Färbe I_i dann mit der Farbe $c_i = \min(\{1, 2, \dots, n\} \setminus C_i)$. Fortsetzung nächste Seite!
- Begründen Sie, warum der Algorithmus immer eine gültige Färbung von X findet (Hinweis: Induktion).
- Zeigen Sie, dass die Anzahl an Farben, die der Algorithmus für das Einfärben benötigt, mindestens $\chi(X)$ ist.
- Zeigen Sie, dass die Anzahl an Farben, die der Algorithmus für das Einfärben benötigt, höchstens $u_j(X)$ ist.

- (g) Begründen Sie mit Hilfe der o.g. Eigenschaften, warum der Algorithmus korrekt ist, d.h. immer eine minimale gültige Färbung von X findet.
- (h) Wir betrachten folgende Implementierung des Algorithmus in Pseudocode:
Was ist die asymptotische Laufzeit dieses Algorithmus? Was ist der asymptotische Speicherbedarf dieses Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antworten.