

Pumping-Lemma

Zeigen oder widerlegen Sie: Die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sind regulär.¹

$$L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Angenommen L_1 sei regulär, dann müsste L_1 die Bedingungen der stärkeren Variante des Pumping-Lemmas erfüllen.

Beweis durch Widerspruch:

Sei $j \in \mathbb{N}$ die Konstante aus dem Pumping-Lemma und $\omega = a^j b a^j b$ ein Wort aus L_1 ($|\omega| > j$ gilt offensichtlich).

Dann müsste ω nach dem Pumping-Lemma zerlegbar sein in $\omega = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| < j$. uv kann wegen $|uv| < j$ kein b enthalten und liegt komplett im ersten a^j .

Also:

$$a^j b a^j b = uvw \text{ mit } u = a^x, v = a^y, w = a^{n-x-y} b a^j b (n \geq x + y, x > 0)$$

Dann gilt

$$uv^0w = a^x a^{j-x-y} b a^j b = a^{j-y} b a^j b \notin L_1$$

Wir haben gezeigt, dass es keine gültige Zerlegung für ω gibt. Also gilt für L_1 die stärkere Variante des Pumping-Lemmas nicht. Somit kann L_1 nicht regulär sein.

¹https://userpages.uni-koblenz.de/~dpeuter/teaching/17ss_gti/blatt04_loesung.pdf