

Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen / Datenstrukturen (nicht vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 46115 / 2016 / Herbst

## Thema 1 / Aufgabe 4

(VertexCover)

**Stichwörter:** Polynomialzeitreduktion

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

### VERTEX COVER

**Gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

**Frage:** Gibt es eine Menge  $C \subseteq V$  mit  $|C| \leq k$ , so dass für jede Kante  $(u, v)$  aus  $E$  mindestens einer der Knoten  $u$  und  $v$  in  $C$  ist?

### VERTEX COVER 3

**Gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$ .

**Frage:** Gibt es eine Menge  $C \subseteq V$  mit  $|C| \leq k$ , so dass für jede Kante  $(u, v)$  aus  $E$  mindestens einer der Knoten  $u$  und  $v$  in  $C$  ist?

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von VERTEX COVER auf VERTEX COVER 3 an und begründe anschließend, dass die Reduktion korrekt ist.

#### Exkurs: VERTEX COVER

Das **Knotenüberdeckungsproblem** (VERTEX COVER) fragt, ob zu einem gegebenen einfachen Graphen und einer natürlichen Zahl  $k$  eine Knotenüberdeckung der Größe von höchstens  $k$  existiert.

Das heißt, ob es eine aus maximal  $k$  Knoten bestehende Teilmenge  $U$  der Knotenmenge gibt, so dass jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knoten aus  $U$  verbunden ist.

Lösungsvorschlag

### VERTEX COVER $\preceq_p$ VERTEX COVER 3

$f$  fügt vier neue Knoten hinzu, von denen jeweils ein Paar verbunden ist. Außerdem erhöht  $f$   $k$  um 2.

**Total:** Jeder Graph kann durch  $f$  so verändert werden.

**Korrektheit:** Wenn VERTEX COVER für  $k$  in  $G$  existiert, dann existiert auch VERTEX COVER mit  $k + 2$  Knoten in  $G'$ , da für den eingefügten Teilgraphen ein VERTEX COVER mit  $k = 2$  existiert.

**In Polynomialzeit berechenbar:** Für die Adjazenzmatrix des Graphen müssen lediglich vier neue Spalten und Zeilen eingefügt werden und  $k + 2$  berechnet werden.



## Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an [hermine.bschlangaul@gmx.net](mailto:hermine.bschlangaul@gmx.net). Der T<sub>E</sub>X-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/46115/2016/09/Thema-1/Aufgabe-4.tex>