Einzelprüfung „Softwaretechnologie / Datenbanksysteme (nicht vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 46116 / 2014 / Frühjahr

Thema 2 / Teilaufgabe 1 / Aufgabe 1 (*Hanoi*)

Stichwörter: Terminierungsfunktion

Gegeben sei folgende Methode zur Berechnung der Anzahl der notwendigen Züge beim Spiel *„Die Türme von Hanoi“*:

```java
int hanoi(int nr, char from, char to) {
  char free = (char) ('A' + 'B' + 'C' - from - to);
  if (nr > 0) {
    int moves = 1;
    moves += hanoi(nr - 1, from, free);
    System.out.println("Move piece nr. " + nr + " from " + from + " to " + to);
    moves += hanoi(nr - 1, free, to);
    return moves;
  } else {
    return 0;
  }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46116/jahr_2014/fruehjahr/Hanoi.java`

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion, dass zum Umlegen von k Scheiben (z. B. vom Turm A zum Turm C) insgesamt $2^k - 1$ Schritte notwendig sind, also dass für $k \geq 0$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{hanoi}(k, \text{'A'}, \text{'C'}) = 2^k - 1$$

Lösungsvorschlag

Zu zeigen:

$$\text{hanoi}(k, \text{'A'}, \text{'C'}) = 2^k - 1$$

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

$k = 0$

$$\text{hanoi}(0, \text{'A'}, \text{'C'}) = 0$$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 1 + \text{hanoi}(k - 1, 'A', 'B') + \text{hanoi}(k - 1, 'B', 'C')$$

$k \to k + 1$

$$\begin{aligned}
\text{hanoi}(k + 1, 'A', 'C') &= 1 + \text{hanoi}((k + 1) - 1, 'A', 'B') + \\
&\quad\ \text{hanoi}((k + 1) - 1, 'B', 'C') \\
&= 1 + \text{hanoi}(k, 'A', 'B') + \\
&\quad\ \text{hanoi}(k, 'B', 'C') && k + 1 - 1 = k \\
&= 1 + 2^k - 1 + 2^k - 1 && \text{Formeln eingesetzt} \\
&= 2^k + 2^k - 1 && 1 - 1 - 1 = -1 \\
&= 2 \cdot 2^k - 1 && 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{k+1} - 1 && 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}
\end{aligned}$$

(b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie kurz Ihre Wahl!

Lösungsvorschlag

Betrachte die Argumentenfolge $k, k - 1, k - 2, \ldots, 0$. Die Terminierungsfunktion ist offenbar $T(k) = k$. $T(k)$ ist bei jedem Rekursionsschritt auf der Folge der Argumente streng monoton fallend. Bei der impliziten Annahme k ist ganzzahlig und $k \geq 0$ ist $T(k)$ nach unten durch 0 beschränkt.

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangauland Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.