

Aufgabe 3

Sei M_0, M_1, \dots eine Registermaschinen (RAMs). Beantworten Sie folgende Fragen zur Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Exkurs: Registermaschinen (RAMs)

Die Random Access Machine (kurz RAM) ist eine spezielle Art von Registermaschine. Sie hat die Fähigkeit der indirekten Adressierung der Register.

Die Random Access Machine besteht aus:

- einem Programm bestehend aus endlich vielen durchnummerierten Befehlen (beginnend mit Nummer 1)
- einem Befehlszähler b
- einem Akkumulator $c(0)$
- und einem unendlich großen Speicher aus durchnummerierten Speicherzellen (Registern) $c(1), c(2), c(3), \dots$

Jedes Register (einschließlich b und $c(0)$) speichert eine beliebig große natürliche Zahl.

(a) Ist folgende Menge entscheidbar?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 100 \text{ oder } M_x \text{ hält bei Eingabe } x\}$$

Ja, $x \geq 100$ ist entscheidbar und aufgrund des „oder“ ist die 2. Bedingung nur für $x < 100$ relevant. Da $x < 100$ eine endliche Menge darstellt, kann eine endliche Liste geführt werden und ein Experte kann für jeden Fall entscheiden, ob M_x hält oder nicht, somit ist A entscheidbar.

(b) Ist folgende Menge entscheidbar?

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid M_x \text{ hält bei Eingabe } x \text{ genau dann, wenn } M_y \text{ bei Eingabe } y \text{ hält}\}$$

Nein. Dieses Problem entspricht der parallelen Ausführung des Halteproblems auf zwei Bändern. Das Halteproblem ist unentscheidbar, damit ist auch die parallele Ausführung des Halteproblems und damit B unentscheidbar.

(c) Ist folgende Menge aufzählbar?

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid M_x \text{ hält bei Eingabe } 0 \text{ mit dem Ergebnis } 1\}$$

Ja, die Menge ist aufzählbar, da die Menge aller Turingmaschinen aufzählbar und über natürliche Zahlen definiert ist (die wiederum aufzählbar sind).