Wegberechnung im Gitter

(*Wegberechnung im Gitter*)

Stichwörter: Dynamische Programmierung

Wegberechnung im Gitter

Betrachten Sie das folgende Gitter mit $m+1$ Zeilen und $n+1$ Spalten ($m \geq 1$ und $n \geq 1$): [1] geeksforgeeks [2]

Angenommen, Sie befinden sich zu Beginn am Punkt $(0,0)$ und wollen zum Punkt (m,n).

Für die Anzahl $A(i,j)$ aller verschiedenen Wege vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (i,j) lassen sich folgende drei Fälle unterscheiden (es geht jeweils um die kürzesten Wege ohne Umweg!):

- $1 \leq i \leq m$ und $j = 0$:

  Es gibt genau einen Weg von $(0,0)$ nach $(i,0)$ für $1 \leq i \leq m$.

- $i = 0$ und $1 \leq j \leq n$:

  Es gibt genau einen Weg von $(0,0)$ nach $(0,j)$ für $1 \leq j \leq n$.

- $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$:

  auf dem Weg zu (i,j) muss als vorletzter Punkt entweder $(i-1,j)$ oder $(i,j-1)$ besucht worden sein.

Daraus ergibt sich folgende Rekursionsgleichung:

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (1 \leq i \leq m \text{ und } j = 0) \text{ oder } (i = 0 \text{ und } 1 \leq j \leq n) \\ A(i-1,j) + A(i,j-1) & \text{falls } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Implementieren Sie die Java-Klasse `Gitter` mit der Methode

```
public int berechneAnzahlWege(),
```

die ausgehend von der Rekursionsgleichung durch dynamische Programmierung die Anzahl aller Wege vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (m,n) berechnet. Die Überprüfung, ob $m \leq 1$ und $n \leq 1$ gilt, können Sie der Einfachheit halber weglassen.

Lösungsvorschlag

```
public int berechneAnzahlWege() {
  int i, j;
  for (i = 1; i <= m; i++) {
    anzahlWege[i][0] = 1;
  }
  for (j = 1; j <= n; j++) {
```

[1] Quelle möglicherweise von https://www.yumpu.com/de/document/read/17936760/ubungen-zum-prasenzmodul-algorithmen-und-datenstrukturen

[2] https://www.geeksforgeeks.org/count-possible-paths-top-left-bottom-right-nxm-matrix/

```
      anzahlWege[0][j] = 1;
    }
    for (i = 1; i <= m; i++) {
      for (j = 1; j <= n; j++) {
        anzahlWege[i][j] = anzahlWege[i - 1][j] + anzahlWege[i][j - 1];
      }
    }
    return anzahlWege[m][n];
  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/muster/dp/Gitter.java`

Additum

Die komplette Java-Klasse

```
import org.bschlangaul.helfer.Farbe;
import org.bschlangaul.helfer.Konsole;

/**
 * <a href="https://www.studon.fau.de/file2521908_download.html">Angabe: AB_3
 * Greedy_DP_Backtracking.pdf</a>
 * <a href="https://www.studon.fau.de/file2521907_download.html">Lösung: AB_3
 * Greedy_DP_Backtracking_Lsg.pdf</a>
 *
 * Qualifizierungsmaßnahme Informatik: Algorithmen und Datenstrukturen:
 * Aufgabenblatt 3: Algorithmenmuster.
 *
 * <a href="https://www.studon.fau.de/file2521908_download.html">Angabe: AB_3
 * Greedy_DP_Backtracking.pdf</a>
 * <a href="https://www.studon.fau.de/file2521907_download.html">Lösung: AB_3
 * Greedy_DP_Backtracking_Lsg.pdf</a>
 */
public class Gitter {

  /**
   * m + 1: Anzahl der Zeilen
   */
  private int m;

  /**
   * n + 1: Anzahl der Spalten
   */
  private int n;

  /**
   * anzahlWege[i][j]: Anzahl der Wege vom Punkt (0,0) zum Punkt (i,j)
   */
  private int anzahlWege[][];

  public Gitter(int m, int n) {
    this.m = m;
    this.n = n;
```

```
    anzahlWege = new int[m + 1][n + 1];
  }

  public int berechneAnzahlWege() {
    int i, j;
    for (i = 1; i <= m; i++) {
      anzahlWege[i][0] = 1;
    }
    for (j = 1; j <= n; j++) {
      anzahlWege[0][j] = 1;
    }
    for (i = 1; i <= m; i++) {
      for (j = 1; j <= n; j++) {
        anzahlWege[i][j] = anzahlWege[i - 1][j] + anzahlWege[i][j - 1];
      }
    }
    return anzahlWege[m][n];
  }

  /**
   * Zeige die Lösung in der Konsole.
   */
  public void zeigeLoesung() {
    System.out.println(
        String.format("Anzahl der Wege von %sx%s: %s", Farbe.gelb(m), Farbe.gelb(n),
        ↪  Farbe.grün(berechneAnzahlWege())));
    System.out.println(Farbe.rot("Gitter:"));
    Konsole.zeige2DIntFeld(anzahlWege);
    System.out.println();
  }

  public static void main(String args[]) {
    new Gitter(2, 2).zeigeLoesung();
    new Gitter(3, 3).zeigeLoesung();
    new Gitter(4, 4).zeigeLoesung();
    new Gitter(5, 5).zeigeLoesung();
  }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/muster/dp/Gitter.java`

Text-Ausgabe

```
Anzahl der Wege von 2x2: 6
Gitter:
 x 0 1 2
 0 0 1 1
 1 1 2 3
 2 1 3 6

Anzahl der Wege von 3x3: 20
Gitter:
  x  0  1  2  3
  0  0  1  1  1
```

```
  1  1  2  3  4
  2  1  3  6 10
  3  1  4 10 20

Anzahl der Wege von 4x4: 70
Gitter:
  x  0  1  2  3  4
  0  0  1  1  1  1
  1  1  2  3  4  5
  2  1  3  6 10 15
  3  1  4 10 20 35
  4  1  5 15 35 70

Anzahl der Wege von 5x5: 252
Gitter:
   x   0   1   2   3   4   5
   0   0   1   1   1   1   1
   1   1   2   3   4   5   6
   2   1   3   6  10  15  21
   3   1   4  10  20  35  56
   4   1   5  15  35  70 126
   5   1   6  21  56 126 252
```

Test-Datei

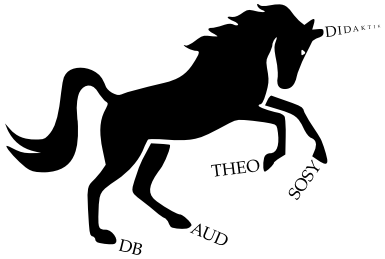
```java
import static org.junit.Assert.*;

import org.junit.Test;

public class GitterTest {
  @Test
  public void zweiMalZwei() {
    Gitter gitter = new Gitter(2, 2);
    assertEquals(6, gitter.berechneAnzahlWege());
  }

  @Test
  public void zehnMalZwanzig() {
    Gitter gitter = new Gitter(10, 20);
    assertEquals(30045015, gitter.berechneAnzahlWege());
  }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/muster/dp/GitterTest.java`



Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TEX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Module/30_AUD/60_Algorithmenmuster/40_Dynamisches-Programmieren/Aufgabe_Wegberechnung.tex`