

Aufgabe 2: wp-Kalkül

Gegeben sei folgendes Programm:

```
1  int f(int x, int y) {
2      /* P */ x = 2 * x + 1 + x * x;
3      y += 7;
4      if (x > 196) {
5          y = 2 * y;
6      } else {
7          y -= 8;
8          x *= 2;
9      } /* Q */
10     return x + y;
11 }
```

Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung (weakest precondition), für die die Nachbedingung $Q := (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)$ noch zutrifft.

Mit dem Distributivgesetz der Konjugation gilt:

$$\begin{aligned} \text{wp}("A; \text{ if}(b) B; \text{ else } C; ", Q) &\equiv \\ \text{wp}("A; ", b) \wedge \text{wp}("A; B; ", Q) & \\ \vee & \\ \text{wp}("A; ", \neg b) \wedge \text{wp}("A; C; ", Q) & \end{aligned}$$

Der tatsächliche Programmcode wird eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; \text{ if}(x>196)\{y=2*y\}; \text{ else}\{y-=8; x*=2\}; ", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) &\equiv \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; ", x > 196) \wedge & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y=2*y; ", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) & \\ \vee & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; ", x \leq 196) \wedge & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8; x*=2; ", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) & \\ =: P & \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\text{wp}("A; ", b)$

$$\text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; ", x > 196)$$

Wir lassen $y += 7$ weg, weil in der Nachbedingung kein y vorkommt und setzen in den Term $x > 196$ für das x die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$ ein.

$$\equiv \text{wp}("", 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196)$$

Nach der Transformationsregel *Nichts passiert, die Vorbedingung bleibt gleich* kann das auch so geschrieben werden:

$$\equiv 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196$$

Die erste binomische Formel (Plus-Formel) lautet $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man kann die Formel auch umgedreht verwenden: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$ kann umformuliert werden in $1 + 2 \cdot 1 \cdot x + x \cdot x = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = (1 + x)^2 = (x + 1)^2$. Wir haben für a die Zahl 1 und für b den Buchstaben x eingesetzt.

$$\equiv (x+1)^2 > 196$$

Nebenrechnung: $\text{wp}(\text{"A;B;"}, Q)$

$$\text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x; y+=7; y=2*y;"}, (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

Für das x in der Nachbedingung setzen wir die erste Code-Zeile $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$ ein. Für das y in der Nachbedingung setzen wir dritte Code-Zeile $y=2*y$; ein und dann die zweite Code-Zeile $y+=7$; . Das wp-Kalkül arbeitet den Code rückwärts ab. in $y \% 2$ die dritte Anweisung $y = 2 \cdot y$ einfügen: $2 \cdot y \% 2$ dann in $2 \cdot y \% 2$ die zweite Anweisung $y = y + 7$ einfügen: $2 \cdot (y + 7) \% 2$

$$\equiv (x+1)^2 \geq 8 \wedge 2(y+7) \% 2 = 1$$

Diese Aussage ist falsch, da $2(y+7)$ immer eine gerade Zahl ergibt und der Rest von einer Division durch zwei einer geraden Zahl immer 0 ist und nicht 1.

$$\equiv (x+1)^2 \geq 8 \wedge \text{falsch}$$

$$\equiv \text{falsch}$$

Nebenrechnung: $\text{wp}(\text{"A;"}, \neg b)$

$$\text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x; y+=7;"}, x \leq 196)$$

Analog zu Nebenrechnung 1

$$\equiv (x+1)^2 \leq 196$$

Nebenrechnung: $\text{wp}(\text{"A;C;"}, Q)$

$$\text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8; x*=2;"}, (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

„ $x*=2$;“: $x \cdot 2$ für x einsetzen:

$$\equiv \text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8;"}, (2 \cdot x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

„ $y-=8$;“: $y - 8$ für y einsetzen:

$$\equiv \text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x; y+=7;"}, (2 \cdot x \geq 8) \wedge ((y - 8) \% 2 = 1))$$

„ $y+=7$ “: $y + 7$ für y einsetzen:

$$\equiv \text{wp}(\text{"x=2*x+1+x*x;"}, (2 \cdot x \geq 8) \wedge (((y + 7) - 8) \% 2 = 1))$$

„ $x=2*x+1+x*x$;“: $(x+1)^2$ für x einsetzen:

$$\equiv \text{wp}(\text{"", } (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \wedge (((y+7) - 8) \% 2 = 1))$$

Nur noch die Nachbedingung stehen lassen:

$$\equiv (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \wedge ((y+7) - 8) \% 2 = 1$$

Subtraktion:

$$\equiv (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \wedge ((y-1)\%2 = 1)$$

Vereinfachen (links beide Seiten durch 2 teilen und rechts von beiden Seiten 1 abziehen)

$$\equiv \left(\frac{2 \cdot (x+1)^2}{2} \geq \frac{8}{2}\right) \wedge (((y-1)\%2) - 1 = 1 - 1)$$

Zwischenergebnis:

$$\equiv ((x+1)^2 \geq 4) \wedge y\%2 = 0$$

Zusammenführung

Die Zwischenergebnisse aus den Nebenrechnungen zusammenfügen:

$$\equiv [(x+1)^2 > 196 \wedge \text{falsch}] \vee [(x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0]$$

„falsch“ und eine Aussage verbunden mit logischem Und „ \wedge “ ist insgesamt falsch:

$$\equiv \text{falsch} \vee [(x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0]$$

falsch verbunden mit oder weglassen:

$$\equiv (x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0$$

Umgruppieren, sodass nur noch ein $(x+1)^2$ geschrieben werden muss:

$$\equiv 4 \leq (x+1)^2 \leq 196 \wedge y\%2 = 0$$

$$4 = 2^2 \text{ und } 196 = 14^2$$

$$\equiv 2^2 \leq (x+1)^2 \leq 14^2 \wedge y\%2 = 0$$

Hoch zwei weg lassen: Betragsklammer $|x|$ oder auch Betragsfunktion hinzufügen (Die Betragsfunktion ist festgelegt als „Abstand einer Zahl von der Zahl Null“.

$$\equiv 2 \leq |x+1| \leq 14 \wedge y\%2 = 0$$

Auf die Gleichung der linken Aussage -1 anwenden:

$$\equiv 1 \leq |x| \leq 13 \wedge y\%2 = 0$$

Die Betragsklammer weg lassen:

$$\equiv (1 \leq x \leq 13 \vee -13 \leq x \leq -1) \wedge y\%2 = 0$$

$$\Rightarrow P$$