Gaußsche Summenformel

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\mathrm{A}(n): \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sie kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$\mathrm{A}(1): \qquad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass aus der Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{A}(n): \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

die Induktionsbehauptung

$$\mathrm{A}(n+1): \qquad 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \qquad \text{für } n \geq 1$$

folgt. Dies gelingt folgendermaßen (Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.):

$$
\begin{aligned}
A(n+1) &= 1+2+\cdots+n+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && \text{Hauptnenner 2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausgeklammert} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{Umgedreht nach Kommutativgesetz} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} && \text{mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n
\end{aligned}
$$

Schließlich der Induktionsschluss: Damit ist die Aussage A(n) für alle $n \geq 1$ bewiesen.