Aufgabe 1: „Rekursion und Induktion"

(a) Gegeben sei die Methode `BigInteger lfBig(int n)` zur Berechnung der eingeschränkten Linksfakultät:

```java
import java.math.Biginteger;
import static java.math.BigInteger.*;

public class LeftFactorial {
  // returns the left factorial !n
  BigInteger lfBig(int n) {
    if (n <= 0 || n >= Short.MAX_VALUE) {
      return ZERO;
    } else if (n == 1) {
    return ONE;
    } else {
      return sub(mul(n, lfBig(n - 1)), mul(n - 1, lfBig(n - 2)));
    }
  }
}
```

Implementieren Sie unter Verwendung des Konzeptes der *dynamischen Programmierung* die Methode `BigInteger dpBig(int n)`, die jede $!n$ auch bei mehrfachem Aufrufen mit dem gleichen Parameter höchstens einmal rekursiv berechnet. Sie dürfen der Klasse `LeftFactorial` genau ein Attribut beliebigen Datentyps hinzufügen und die in `lfBig(int)` verwendeten Methoden und Konstanten ebenfalls nutzen.

(b) Betrachten Sie nun die Methode `lfLong(int)` zur Berechnung der vorangehend definierten Linksfakultät ohne obere Schranke. Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Datentyp `long` unbeschränkt ist und daher kein Überlauf auftritt.

```java
long lfLong(int n) {
  if (n <= 0) {
    return 0;
  } else if (n == 1) {
    return 1;
  } else {
    return n * lfLong(n - 1) - (n - 1) * lfLong(n - 2);
  }
}
```

Beweisen Sie *formal* mittels *vollständiger Induktion*:

$$\forall n \geq 0 : \text{lfLong}(n) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} k!$$

Induktionsanfang $A(n_0)$

$$n = 1 \Rightarrow \text{lfLong}(1) = 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k! = 0! = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{lfLong}(2) = 2 \cdot \text{lfLong}(1) - 1 \cdot \text{lfLong}(0) = 2 = \sum_{k=0}^{1} k! = 1! + 0! = 1 + 1 = 2$$

Induktionsvoraussetzung

$$\text{lfLong}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k!$$

gilt:

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k+1)$ wahr sein muss.

$$\begin{aligned}
\text{lfLong}(n+1) &= (n+1) \cdot \text{lfLong}(n) - n \cdot \text{lfLong}(n-1) \\
&= (n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k! - n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1) \cdot \left((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!\right) - n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)! + (n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! - n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)! \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! + n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! - n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= n \cdot (n-1)! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= n \cdot (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-1} k! \\
&= n! + \sum_{k=0}^{n-1} k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} k! \\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)-1} k!
\end{aligned} \tag{1}$$