# Pumping-Lemma

($w\ c\ wR$)

**Stichwörter:** Pumping-Lemma (Reguläre Sprache)

1

**Exkurs: Pumping-Lemma für Reguläre Sprachen**
Es sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $j$, sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort $\omega$ in $L$ mit Mindestlänge $j$) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $|v| \geq 1$ (Das Wort $v$ ist nicht leer.)

(b) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter $u$ und $v$ haben zusammen höchstens die Länge $j$.)

(c) Für alle $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt $uv^iw \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) $i$ ist das Wort $uv^iw$ in der Sprache $L$)

Die kleinste Zahl $j$, die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache $L$ genannt.

$$L_1 = \{wcw^R | w \in \{a, b\}^*\}$$

Erläuterung: $w^R$ ist die Spiegelung von $w$, d. h. es enthält die Zeichen von $w$ in umgekehrter Reihenfolge. Worte von $L_1$ sind also z. B. $c$, $abcba$, $bbbaabacabaabbb$

Lösungsvorschlag

$L_1$ ist kontexfrei.

**Beweis, dass $L_1$ nicht regulär ist, durch das Pumping Lemma:**

Wir nehmen an $L_1$ wäre regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten, der $L_1$ erkennt. Die Anzahl der Zustände dieses Automaten sei $j$. Wir wählen jetzt das Wort $\omega = a^jca^j$. $\omega$ liegt in $L_1$, und ist offensichtlich länger als $j$. Dieses Wort muss irgendwo eine Schleife, also einen aufpumpbaren Teil enthalten, d. h. man kann es so in $uvw$ zerlegen, dass für jede natürliche Zahl $i$ auch $uv^iw$ zu $L_1$ gehört. Wo könnte dieser aufpumpbare Teil liegen?

**Fall 1:** Der aufpumbare Teil $v$ liegt komplett im Bereich des ersten $a^j$-Blocks. Dann würde aber $uv^2w = a^{j+|v|}ca^j$ mehr $a$'s im ersten Teil als im zweiten Teil enthalten und läge nicht mehr in $L_1$.

**Fall 2:** $v$ enthält das $c$. Dann würde aber $uv^2w$ zwei $c$'s enthalten und läge damit nicht mehr in $L_1$.

**Fall 3:** Der aufpumpbare Teil liegt komplett im Bereich des zweiten $a^j$-Blocks. Dann liegt analog zu Fall 1 $uv^2w$ nicht mehr in $L_1$. Unser Wort lässt sich also nicht so zerlegen, dass man den Mittelteil aufpumpen kann, also ist die Annahme, dass $L_1$ regulär ist, falsch.

Beweis, dass $L_1$ kontextfrei ist, durch Angabe einer kontexfreien Grammatik:

[1] `http://www.coli.uni-saarland.de/courses/I2CL-10/material/Uebungsblaetter/Musterloesung4.4.pdf`

$$P = \left\{ \begin{aligned} S &\rightarrow aSa \\ S &\rightarrow bSb \\ S &\rightarrow c \end{aligned} \right\}$$