Pumping-Lemma

Gegeben sei die Sprachen

$$L = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Weisen Sie nach, dass L nicht kontextfrei ist.

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen**
> Es sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass sich alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ zerlegen lassen in $\omega = uvwxy$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (a) $|vx| \geq 1$ (Die Wörter v und x sind nicht leer.)
>
> (b) $|vwx| \leq j$ (Die Wörter v, w und x haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (c) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iwx^iy in der Sprache L)

Also gibt es eine Pumpzahl. Sie sei j. (Wähle geschickt ein „langes“ Wort...)
$a^j b^j c^j$ ist ein Wort aus L, das sicher länger als j ist.

Da L kontextfrei ist, muss es nach dem Pumping-Lemma auch für dieses Wort eine beliebige Zerlegung geben:

$a^j b^j c^j = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq j$

Weil vwx höchstens j lang ist, kann es nie a's und c's zugleich enthalten (es stehen j b's dazwischen!).

Andererseits enthält vx mindestens ein Zeichen. Das Wort $\omega = uv^0wx^0y = uwy$ enthält dann nicht mehr gleich viele a's, b's und c's. (Widerspruch)!

Die Behauptung ist falsch.
$\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei!