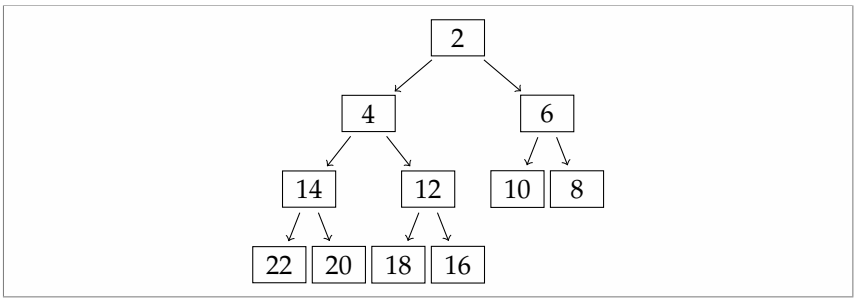
Aufgabe 2

Wir betrachten ein Feld A von ganzen Zahlen mit `n` Elementen, die über die Indizes `A[0]` bis `A[n-1]` angesprochen werden können. In dieses Feld ist ein binärer Baum nach den folgenden Regeln eingebettet: Für das Feldelement mit Index i befindet sich

- der Elternknoten im Feldelement mit Index $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$,
- der linke Kindknoten im Feldelement mit Index $2 \cdot i + 1$, und
- der rechte Kindknoten im Feldelement mit Index $2 \cdot i + 2$.

(a) Zeichnen Sie den durch das folgende Feld repräsentierten binären Baum.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A[i]	2	4	6	14	12	10	8	22	20	18	16



(b) Der folgende rekursive Algorithmus sei gegeben:

Pseudo-Code / Pascal

```
1  procedure magic(i, n : integer) : boolean
2  begin
3    if (i > (n - 2) / 2) then
4      return true;
5    endif
6    if (A[i] <= A[2 * i + 1] and A[i] <= A[2 * i + 2] and
7        magic(2 * i + 1, n) and magic(2 * i + 2, n)) then
8      return true;
9    endif
10   return false;
11 end
```

Java-Implementation

```
6    public static boolean magic(int i, int n) {
7      System.out.println(String.format("i: %s n: %s", i, n));
8      if (i > (n - 2) / 2) {
9        return true;
10     }
11     if (A[i] <= A[2 * i + 1] && A[i] <= A[2 * i + 2] && magic(2 * i + 1, n)
       ↪  && magic(2 * i + 2, n)) {
12       return true;
13     }
14     return false;
15   }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/Baum.java

Gegeben sei folgendes Feld:

i	0	1	2	3
A[i]	2	4	6	14

Führen Sie `magic(0,3)` auf dem Feld aus. Welches Resultat liefert der Algorithmus zurück?

true

(c) Wie nennt man die Eigenschaft, die der Algorithmus `magic` auf dem Feld A prüft? Wie lässt sich diese Eigenschaft formal beschreiben?

Die sogenannte „Haldeneigenschaft“ bzw. „Heap-Eigenschaft“ einer Min-Halde. Der Schlüssel eines jeden Knotens ist kleiner (oder gleich) als die Schlüssel seiner Kinder.

Ein Baum erfüllt die Heap-Eigenschaft bezüglich einer Vergleichsrelation „$>$“ auf den Schlüsselwerten genau dann, wenn für jeden Knoten u des Baums gilt, dass $u_{\text{wert}} > v_{\text{wert}}$ für alle Knoten v aus den Unterbäumen von u.

(d) Welche Ausgaben sind durch den Algorithmus `magic` möglich, wenn das Eingabefeld aufsteigend sortiert ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

`true` . Eine sortierte aufsteigende Zahlenfolge entspricht den Haldeneigenschaften einer Min-Heap.

(e) Geben Sie zwei dreielementige Zahlenfolgen (bzw. Felder) an, eine für die `magic(0,2)` den Wert `true` liefert und eine, für die `magic(0,2)` den Wert `false` liefert.

```
35      A = new int[] { 1, 2, 3 };
36      System.out.println(magic(0, 2)); // true
37
38      A = new int[] { 2, 1, 3 };
39      System.out.println(magic(0, 2)); // false
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/Baum.java

(f) Betrachten Sie folgende Variante `almostmagic` der oben bereits erwähnten Prozedur `magic`, bei der die Anweisungen in Zeilen 3 bis 5 entfernt wurden:

Pseudo-Code / Pascal

```
1  procedure almostmagic(i, n : integer) : boolean
2  begin
3    // leer
4    // leer
5    // leer
```

```
6     if (A[i] <= A[2 * i + 1] and A[i] <= A[2 * i + 2] and
7         magic(2 * i + 1, n) and magic(2 * i + 2, n)) then
8       return true;
9     endif
10    return false;
11  end
```

Java-Implementation

```
17    public static boolean almostmagic(int i, int n) {
18      System.out.println(String.format("i: %s n: %s", i, n));
19      if (A[i] <= A[2 * i + 1] && A[i] <= A[2 * i + 2] && magic(2 * i + 1, n)
        ↪  && magic(2 * i + 2, n)) {
20        return true;
21      }
22      return false;
23    }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/Baum.java`

Beschreiben Sie die Umstände, die auftreten können, wenn `almostmagic` auf einem Feld der Größe `n` aufgerufen wird. Welchen Zweck erfüllt die entfernte bedingte Anweisung?

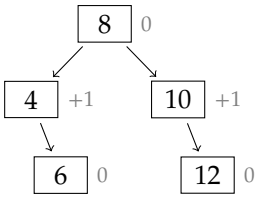
Wird die Prozedur zum Beispiel mit `almostmagic(0, n + 1)` aufgerufen, kommst es zu einem sogenannten „Array-Index-Ouf-of-Bounds“ Fehler, d. h. die Prozedur will auf Index des Feldes zugreifen, der im Feld gar nicht existiert. Die drei zusätzlichen Zeilen in der Methode `magic` bieten dafür einen Schutz, indem sie vor den Index-Zugriffen auf das Feld `true` zurückgeben.

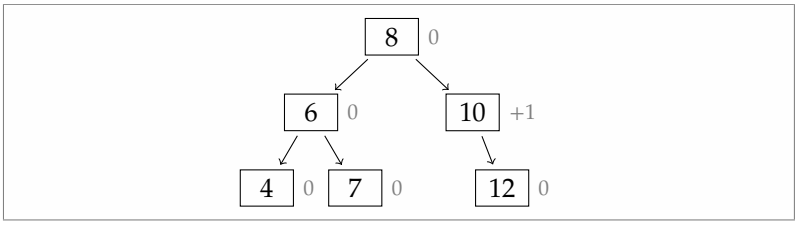
```
41      // A = new int[] { 1, 2, 3 };
42      // System.out.println(almostmagic(0, 4)); // Exception in thread
        ↪  "main" java.lang.ArrayIndexOutOfBoundsException: Index 3 out
        ↪  of bounds for length 3
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/Baum.java`

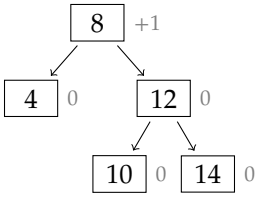
(g) Fügen Sie jeweils den angegebenen Wert in den jeweils angegebenen AVL-Baum mit aufsteigender Sortierung ein und zeichnen Sie den resultierenden Baum vor möglicherweise erforderlichen Rotationen. Führen Sie danach bei Bedarf die erforderliche(n) Rotation(en) aus und zeichnen Sie dann den resultierenden Baum. Sollten keine Rotationen erforderlich sein, so geben Sie dies durch einen Text wie „keine Rotationen nötig” an.

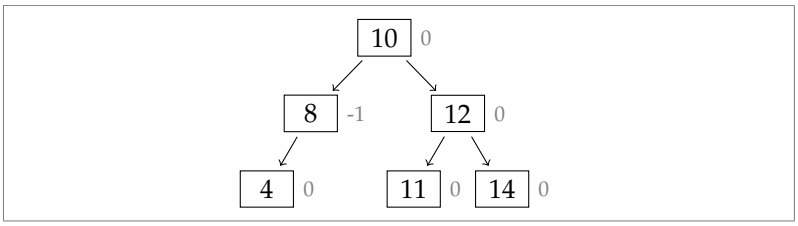
(i) Wert 7 einfügen





(ii) Wert 11 einfügen





(iii) Wert 5 einfügen