

Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ ist gleich dem Quadrat von n :

$$\begin{aligned}1 &= 1 = 1^2 \\1 + 3 &= 4 = 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2\end{aligned}$$

Folgende Java-Methode berechnet die Summe aller ungeraden Zahlen:

```
8 public static int oddSum(int n) {
9     if (n <= 1) {
10         return 1;
11     }
12     return 2 * n - 1 + oddSum(n - 1);
13 }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Maurolicus.java](https://github.com/orgs/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Maurolicus.java)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `oddSum(n)` die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis zur n -ten ungeraden Zahl berechnet, wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

$$\text{oddSum}(1) = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

$$\text{oddSum}(n) = 2n - 1 + (n - 1)^2$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. _____

$$\begin{aligned}
\text{oddSum}(n) &= 2(n+1) - 1 + ((n+1) - 1)^2 \\
&= 2(n+1) - 1 + n^2 \\
&= 2n + 2 + n^2 - 1 && \text{ausmultiplizieren} \\
&= 2n + 1 + n^2 && 2 - 1 = 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 && \text{Kommutativgesetz} \\
&= (n+1)^2 && \text{mit erster Binomischer Formel: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

```

3  import static org.junit.Assert.assertEquals;
4
5  import org.junit.Test;
6
7  public class MaurolicusTest {
8
9      private void teste(int n, int erwartet) {
10         assertEquals(Maurolicus.oddSum(n), erwartet);
11     }
12
13     @Test
14     public void teste() {
15         teste(1, 1);
16         teste(2, 4);
17         teste(3, 9);
18         teste(4, 16);
19         teste(5, 25);
20         teste(6, 36);
21         teste(7, 49);
22         teste(8, 64);
23         teste(9, 81);
24         teste(10, 100);
25         teste(11, 121);
26     }
27
28 }

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java](https://github.com/orgs/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/MaurolicusTest.java)