## Aufgabe 6

Der Hauptsatz der Laufzeitfunktionen ist bekanntlich folgendermaßen definiert:

**1. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

**2. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

**3. Fall:** $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein $c$ mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen $n$ gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

Bestimmen und begründen Sie formal mit Hilfe dieses Satzes welche Komplexität folgende Laufzeitfunktionen haben.

(a) $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 5n^2$

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$a =$ Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion

$\frac{1}{b} =$ Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird

$f(n) =$ Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen

$a = 8$

$b = 2$

$f(n) = 5n^2$

**1. Fall** für $\varepsilon = 4$:

$f(n) = 5n^2 \in \mathcal{O}\left(n^{\log_2 8 - 4}\right) = \mathcal{O}\left(n^{\log_2 4}\right) = \mathcal{O}\left(n^2\right)$

**2. Fall**

$f(n) = 5n^2 \notin \Theta\left(n^{\log_2 8}\right) = \Theta\left(n^3\right)$

**3. Fall**

$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_2 8 + \varepsilon}\right)$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^2\right)$

(b) $T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 5n^2$

$a = 9$
$b = 3$
$f(n) = 5n^2$

**1. Fall**

$$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_3 9-\varepsilon}\right) \text{ für } \varepsilon > 0$$

**2. Fall**

$$f(n) = 5n^2 \in \Theta\left(n^{\log_3 9}\right) = \Theta\left(n^2\right)$$

**3. Fall**

$$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_3 9+\varepsilon}\right) \text{ für } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^2 \cdot \log n\right)$$