Aufgabe 1: „Formale Verifikation“

Gegeben sei folgende Methode zur Berechnung der Anzahl der notwendigen Züge beim Spiel *„Die Türme von Hanoi“*:

```java
  int hanoi(int nr, char from, char to) {
    char free = (char) ('A' + 'B' + 'C' - from - to);
    if (nr > 0) {
      int moves = 1;
      moves += hanoi(nr - 1, from, free);
      System.out.println("Move piece nr. " + nr + " from " + from + " to " + to);
      moves += hanoi(nr - 1, free, to);
      return moves;
    } else {
      return 0;
    }
  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46116/jahr_2014/fruehjahr/Hanoi.java`

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion, dass zum Umlegen von k Scheiben (z. B. vom Turm A zum Turm C) insgesamt $2^k - 1$ Schritte notwendig sind, also dass für $k \geq 0$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{hanoi}(k, \text{'A'}, \text{'C'}) = 2^k - 1$$

Zu zeigen:

$$\text{hanoi}(k, \text{'A'}, \text{'C'}) = 2^k - 1$$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

$k = 0$

$$\text{hanoi}(0, \text{'A'}, \text{'C'}) = 0$$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{hanoi}(k, \text{'A'}, \text{'C'}) = 2^k - 1$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 1 + \text{hanoi}(k-1, 'A', 'B') + \text{hanoi}(k-1, 'B', 'C')$$

$k \to k+1$

$$\begin{aligned}
\text{hanoi}(k+1, 'A', 'C') &= 1 + \text{hanoi}((k+1) - 1, 'A', 'B') + \\
&\qquad \text{hanoi}((k+1) - 1, 'B', 'C') \\
&= 1 + \text{hanoi}(k, 'A', 'B') + \\
&\qquad \text{hanoi}(k, 'B', 'C') && k+1-1 = k \\
&= 1 + 2^k - 1 + 2^k - 1 && \text{Formeln eingesetzt} \\
&= 2^k + 2^k - 1 && 1-1-1 = -1 \\
&= 2 \cdot 2^k - 1 && 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{k+1} - 1 && 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}
\end{aligned}$$

(b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie kurz Ihre Wahl!

Betrachte die Argumentenfolge $k, k-1, k-2, \ldots, 0$.

$\Rightarrow$ Terminierungsfunktion: $T(k) = k$

Nachweis für ganzzahlige $k \geq 0$:

- $T(k)$ ist auf der Folge der Argumente streng monoton fallend bei jedem Rekursionsschritt.
- Bei der impliziten Annahme k ist ganzzahlig und $k \geq 0$ ist $T(k)$ nach unten durch 0 beschränkt.