Aufgabe 4: Komplexität

Gegeben seien die Funktionen $f : N \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow N$, wobei $f(n) = (n-1)^3$ und $g(n) = (2n+3)(3n+2)$. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen gelten. Beweisen Sie Ihre Angaben.

(a) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

(b) $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$

Es gilt Aussage (b), da $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ und $g(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ und der Grenzwert lim bei größer werdendem n gegen 0 geht. Damit wächst $f(n)$ stärker als $g(n)$, sodass nur Aussage (b) gilt und nicht (a). Dafür nutzen wir die formale Definition des $\mathcal{O}$-Kalküls, indem wir den Grenzwert $\frac{f}{g}$ bzw. $\frac{g}{f}$ bilden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3}{(2n+3)(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n-1)^2}{(2n+3)\cdot 3 + 2\cdot(3n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6(n-1)}{12} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(3n+2)}{(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\cdot 3 + 2\cdot(3n+2)}{3(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{6(n-1)} = 0$$