

Aufgabe 4: Komplexität

Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, wobei $f(n) = (n-1)^3$ und $g(n) = (2n+3)(3n+2)$. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen gelten. Beweisen Sie Ihre Angaben.

- (a) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
- (b) $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$

Exkurs: Regel von L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen $\frac{f}{g}$ von Funktionen f und g , wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert:^a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

^a<https://de.serlo.org/mathe/funktionen/grenzwerte-stetigkeit-differenzierbarkeit/grenzwert/regel-l-hospital>

Es gilt Aussage (b), da $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ und $g(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ und der Grenzwert \lim bei größer werdendem n gegen 0 geht. Damit wächst $f(n)$ stärker als $g(n)$, sodass nur Aussage (b) gilt und nicht (a). Dafür nutzen wir die formale Definition des \mathcal{O} -Kalküls, indem wir den Grenzwert $\frac{f}{g}$ bzw. $\frac{g}{f}$ bilden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3}{(2n+3)(3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n-1)^2}{(2n+3) \cdot 3 + 2 \cdot (3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n-1)}{12} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(3n+2)}{(n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot 3 + 2 \cdot (3n+2)}{3(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{6(n-1)} = 0$$

Hinweis: Hierbei haben wir die Regel von L'Hospital angewendet.