Aufgabe 6 (O-Notation)

(a) Sortieren Sie die unten angegebenen Funktionen der O-Klassen $O(a(n))$, $O(b(n))$, $O(e(n))$, $O(d(n))$ und $O(e(n))$ bezüglich ihrer Teilmengenbeziehungen. Nutzen Sie ausschließlich die echte Teilmenge C sowie die Gleichheit = für die Beziehung zwischen den Mengen. Folgendes Beispiel illustriert diese Schreibweise für einige Funktionen f1 bis f5 (diese haben nichts mit den unten angegebenen Funktionen zu tun): siehe `http://www.s-inf.de/Skripte/DaStru.2012-SS-Katoen.(KK).Klausur1MitLoesung.pdf`

$$\mathcal{O}(f_4(n)) \subset \mathcal{O}(f_3(n)) = \mathcal{O}(f_5(n)) \subset \mathcal{O}(f_1(n)) = \mathcal{O}(f_2(n))$$

Die angegebenen Beziehungen müssen weder bewiesen noch begründet werden.

- $a(n) = n^2 \cdot \log_2(n) + 42$
- $b(n) = 2^n + n^4$
- $c(n) = 2^{2 \cdot n}$
- $d(n) = 2^{n+3}$
- $e(n) = \sqrt{n^5}$

$$\mathcal{O}(a(n)) \subset \mathcal{O}(e(n)) = \mathcal{O}(b(n)) = \mathcal{O}(d(n)) \subset \mathcal{O}(c(n))$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Aussagen formal nach den Definitionen der O-Notation oder widerlegen Sie sie.

(i) $\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n) \subseteq \mathcal{O}(n \cdot (\log_2 n)^2)$

(ii) $2^{(n+1)} \in \mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$

(c) Bestimmen Sie eine asymptotische Lösung (in Θ-Schreibweise) für die folgende Rekursionsgleichung:

(i) $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2$

(ii) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}n^2 + n$