

Einzelprüfung „Softwaretechnologie / Datenbanksysteme (nicht vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 46116 / 2016 / Herbst

Thema 2 / Teilaufgabe 1 / Aufgabe 4

(Catalan-Zahl)

Stichwörter: Vollständige Induktion

Gegeben sei folgende rekursive Methodendeklaration in der Sprache Java. Es wird als Vorbedingung vorausgesetzt, dass die Methode `cn` nur für Werte $n \geq 0$ aufgerufen wird.

```
int cn(int n) {  
    if (n == 0)  
        return 1;  
    else  
        return (4 * (n - 1) + 2) * cn(n - 1) / (n + 1);  
}
```

Sie können im Folgenden vereinfachend annehmen, dass es keinen Überlauf in der Berechnung gibt, d. h. dass der Datentyp `int` für die Berechnung des Ergebnisses stets ausreicht.

- (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `cn(n)` für jedes $n \geq 0$ die n -te Catalan-Zahl C_n berechnet, wobei

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Exkurs: Fakultät

Für alle natürlichen Zahlen n ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n definiert. Da das leere Produkt stets 1 ist, gilt

$$0! = 1$$

Die Fakultät lässt sich auch rekursiv definieren:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

Fakultäten für negative oder nicht ganze Zahlen sind nicht definiert. Es gibt aber eine Erweiterung der Fakultät auf solche Argumente^a

^a[https://de.wikipedia.org/wiki/Fakultät_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Fakultät_(Mathematik))

Exkurs: Catalan-Zahl

Die Catalan-Zahlen bilden eine Folge natürlicher Zahlen, die in vielen Problemen der Kombinatorik auftritt. Sie sind nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan benannt.

Die Folge der Catalan-Zahlen $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ beginnt mit $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$ ^a

^a<https://de.wikipedia.org/wiki/Catalan-Zahl>

Beim Induktionsschritt können Sie die beiden folgenden Gleichungen verwenden:

- (i) $(2(n+1))! = (4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!$
- (ii) $(a+2)! \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!$

Lösungsvorschlag

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{(2 \cdot 0)!}{(0+1)! \cdot 0!} \\ &= \frac{0!}{1! \cdot 0!} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

Vom Code ausgehend

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} &= \frac{(4 \cdot (n+1-1) + 2) \cdot \text{cn}(n+1-1)}{n+1+1} && \text{Java nach Mathe} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot \text{cn}(n)}{n+2} && \text{addiert, subtrahiert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{für cn(n) Formel eingesetzt} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)! \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n! \cdot (n+1)} && (n+1) \text{ multipliziert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot (n+1) \cdot n!} && \text{umsortiert} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)+1)! \cdot (n+1)!} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
 \end{aligned}$$

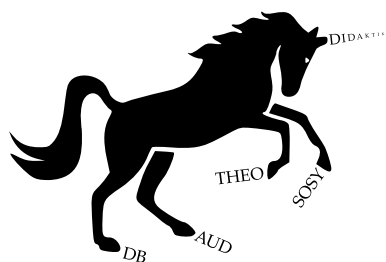
Mathematische Herangehensweise

$$\begin{aligned}
 C_{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)+1)! \cdot (n+1)!} && n+1 \text{ in } C_n \text{ eingesetzt} \\
 &= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{addiert} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
 &= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && (n+1) \text{ gekürzt} \\
 &= \frac{4n+2}{n+2} \cdot C_n && \text{Catalan-Formel ersetzt} \\
 &= \frac{4((n+1)-1)+2}{(n+1)+1} \cdot C_{(n+1)-1} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
 \end{aligned}$$

- (b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie, warum der Methodenaufruf `cn(n)` für jedes $n \geq 0$ terminiert.

Lösungsvorschlag

$T(n) = n$. Diese Funktion verringert sich bei jedem Rekursionsschritt um eins. Sie ist monoton fallend und für $T(0) = 0$ definiert. Damit ist sie eine Terminierungsfunktion für `cn(n)`.



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht alleine! Das ist ein Community-Projekt. Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der \LaTeX -Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/hbschlang/lehramt-informatik/blob/main/Staatsexamen/46116/2016/09/Thema-2/Teilaufgabe-1/Aufgabe-4.tex>