Verständnis Berechenbarkeitstheorie

Beantworten Sie kurz, präzise und mit Begründung folgende Fragen: (Die Begründungen müssen keine formellen mathematischen Beweise sein)

(a) Warum genügt es, sich auf Funktionen zu beschränken, die natürliche Zahlen auf natürliche Zahlen abbilden, wenn man untersuchen will, was heutige Computer im Prinzip berechnen können?

> Funktionen über beliebige Mengen können durch eine geeignete Nummerierung auf Zahlenfunktionen abgebildet werden [a]
>
> [a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Zahlenfunktion`

(b) Was besagt die Church-Turing These? Könnte man sie beweisen oder widerlegen?

> Die Church-Turing-These besagt, dass die Klasse der turing-berechenbaren Funktionen mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen übereinstimmt. Die These kann nicht bewiesen oder widerlegt werden, weil es sich bei dem Begriff *„intuitiv berechenbare Funktion“* um keinen mathematisch exakt definitierten Begriff handelt. Würde man ihn genau definierten, würde ein konkretes Berechnungsmodell festlegt werden, was der Kernaussage dieses Begriffes widersprechen würde.

(c) Für reelle Zahlen, wie z. B. π, lässt sich die Dezimaldarstellung durch entsprechende Programme beliebig genau approximieren. Gilt das für alle reellen Zahlen, d. h. lässt sich für jede reelle Zahl die Dezimaldarstellung mit entsprechenden Programmen beliebig genau approximieren?

> Die Voraussetzung für numerisches Rechnen mit reellen Zahlen ist deren Darstellung durch ein Ziffernsystem.
>
> Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.
>
> Es gibt kein Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{R}$.
>
> [a]
>
> [a] `https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/DiskrMaLS/MitZahlenRechnen.pdf`

(d) Was ist für die Berechnungskraft der wesentliche Unterschied zwischen While-Berechenbarkeit und Loop-Berechenbarkeit.

(e) Die Ackermannfunktion ist ein Beispiel einer totalen Funktion, die While-berechenbar, aber nicht Loop-berechenbar ist. Sie verallgemeinert die Idee, dass Multiplikation die wiederholte Addition ist, Exponentiation die wiederholte Multiplikation, Hyperexponentiation die wiederholte Exponentiation usw. Die Stufe dieser hyper-hyper ... Exponentiation ist ein Parameter der Ackermannfunktion. Generieren Sie aus dieser Idee ein Argument, das illustriert, warum die Ackermannfunktion nicht Loop-berechenbar ist.

(f) Geben Sie ein Beispiel einer Menge an, die abzählbar, aber nicht rekursiv aufzählbar ist, und begründen Sie es.

(g) Wie ist der Zusammenhang zwischen rekursiv aufzählbar und semi-entscheidbar?