Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ ist gleich dem Quadrat von n:

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Der zu beweisende allgemeine Satz lautet: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist.

$$\mathrm{A}(1): \qquad \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{A}(n): \qquad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss.

$$\mathrm{A}(n+1): \qquad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

Beweis

Er ergibt sich über folgende Gleichungskette, bei der in der zweiten Umformung die Induktionsvoraussetzung angewandt wird:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= 1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) && \text{Formel für die letzte Zahl ist: } 2n-1,\ n \text{ ist hier } n+1 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)+(2(n+1)-1) && \text{andere Schreibweise mit dem Summenzeichen} \\
&= n^2+2(n+1)-1 && \text{Ersetzen des Summenzeichens mit dem Ergebnis der Formel} \\
&= n^2+2n+2-1 && \text{ausmultiplizieren} \\
&= n^2+2n+1 && \text{subtrahiert } 2-1=1 \\
&= (n+1)^2 && \text{mit erster Binomischer Formel: } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$