Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2012 / Herbst

Thema 2 / Aufgabe 6

(*limes*)

Stichwörter: Algorithmische Komplexität (O-Notation)

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei $f(n) = (n-1)^3$ und $g(n) = (2n+3)(3n+2)$. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen gelten. Beweisen Sie Ihre Angaben.

(a) $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

(b) $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$

Exkurs: Regel von L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen $\frac{f}{g}$ von Funktionen f und g, wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert: [a]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[a] `https://de.serlo.org/mathe/funktionen/grenzwerte-stetigkeit-differenzierbarkeit/grenzwert/regel-l-hospital`

Lösungsvorschlag

Es gilt Aussage (b), da $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ und $g(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ und der Grenzwert lim bei größer werdendem n gegen 0 geht. Damit wächst $f(n)$ stärker als $g(n)$, sodass nur Aussage (b) gilt und nicht (a). Dafür nutzen wir die formale Definition des $\mathcal{O}$-Kalküls, indem wir den Grenzwert $\frac{f}{g}$ bzw. $\frac{g}{f}$ bilden:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)^3}{(2n+3)(3n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3(n-1)^2}{(2n+3) \cdot 3 + 2 \cdot (3n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{6(n-1)}{12} = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3)(3n+2)}{(n-1)^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3) \cdot 3 + 2 \cdot (3n+2)}{3(n-1)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{12}{6(n-1)} = 0$$

Hinweis: Hierbei haben wir bei die Regel von L'Hospital angewendet.

Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/66115/2012/09/Thema-2/Aufgabe-6.tex`