

## Aufgabe 2: wp-Kalkül

Gegeben sei folgendes Programm:

```
1  int f(int x, int y) {
2      /* P */
3      x = 2 * x + 1 + x * x;
4      y += 7;
5      if (x > 196) {
6          y = 2 * y;
7      } else {
8          y -= 8;
9          x *= 2;
10     } /* Q */
11     return x + y;
12 }
```

Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung (weakest precondition), für die die Nachbedingung  $Q := (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)$  noch zutrifft.

Mit dem Distributivgesetz der Konjugation gilt:

$$\begin{aligned} \text{wp}("A; \text{if}(b) B; \text{else } C;", Q) &\equiv \\ \text{wp}("A;", b) \wedge \text{wp}("A;B;", Q) & \\ \vee & \\ \text{wp}("A;", \neg b) \wedge \text{wp}("A;C;", Q) & \end{aligned}$$

Der tatsächliche Programmcode wird eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; \text{if}(x>196)\{y=2*y;\}\text{else}\{y-=8;x*=2;\}", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) &\equiv \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7;", x > 196) \wedge & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y=2*y;", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) & \\ \vee & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7;", x \leq 196) \wedge & \\ \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8; x*=2;", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1)) & \\ =: P & \end{aligned}$$

**Nebenrechnung:**  $\text{wp}("A;", b)$

$$\text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7;", x > 196)$$

Wir lassen  $y += 7$  weg, weil in der Nachbedingung kein  $y$  vorkommt und setzen in den Term  $x > 196$  für das  $x$  die erste Code-Zeile  $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$  ein.

$$\equiv \text{wp}("", 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196)$$

Nach der Transformationsregel *Nichts passiert, die Vorbedingung bleibt gleich* kann das auch so geschrieben werden:

$$\equiv 2 \cdot x + 1 + x \cdot x > 196$$

Die erste binomische Formel (Plus-Formel) lautet  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Man kann die Formel auch umgedreht verwenden:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ . Die erste Code-Zeile  $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$  kann

umformuliert werden in  $1 + 2 \cdot 1 \cdot x + x \cdot x = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = (1 + x)^2 = (x + 1)^2$ . Wir haben für  $a$  die Zahl 1 und für  $b$  den Buchstaben  $x$  eingesetzt.

$$\equiv (x + 1)^2 > 196$$

**Nebenrechnung:  $\text{wp}("A;B;", Q)$**

$$\text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y=2*y; ", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

Für das  $x$  in der Nachbedingung setzen wir die erste Code-Zeile  $2 \cdot x + 1 + x \cdot x$  ein. Für das  $y$  in der Nachbedingung setzen wir dritte Code-Zeile  $y=2*y$ ; ein und dann die zweite Code-Zeile  $y+=7$ ; . Das wp-Kalkül arbeitet den Code rückwärts ab. in  $y \% 2$  die dritte Anweisung  $y = 2 \cdot y$  einfügen:  $2 \cdot y \% 2$  dann in  $2 \cdot y \% 2$  die zweite Anweisung  $y = y + 7$  einfügen:  $2 \cdot (y + 7) \% 2$

$$\equiv (x + 1)^2 \geq 8 \wedge 2(y + 7) \% 2 = 1$$

Diese Aussage ist falsch, da  $2(y + 7)$  immer eine gerade Zahl ergibt und der Rest von einer Division durch zwei einer geraden Zahl immer 0 ist und nicht 1.

$$\equiv (x + 1)^2 \geq 8 \wedge \text{falsch}$$

$$\equiv \text{falsch}$$

**Nebenrechnung:  $\text{wp}("A;", \neg b)$**

$$\text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; ", x \leq 196)$$

Analog zu Nebenrechnung 1

$$\equiv (x + 1)^2 \leq 196$$

**Nebenrechnung:  $\text{wp}("A;C;", Q)$**

$$\text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8; x*=2; ", (x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

„ $x*=2$ “:  $x \cdot 2$  für  $x$  einsetzen:

$$\equiv \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; y-=8; ", (2 \cdot x \geq 8) \wedge (y \% 2 = 1))$$

„ $y-=8$ “:  $y - 8$  für  $y$  einsetzen:

$$\equiv \text{wp}("x=2*x+1+x*x; y+=7; ", (2 \cdot x \geq 8) \wedge ((y - 8) \% 2 = 1))$$

„ $y+=7$ “:  $y + 7$  für  $y$  einsetzen:

$$\equiv \text{wp}("x=2*x+1+x*x; ", (2 \cdot x \geq 8) \wedge (((y + 7) - 8) \% 2 = 1))$$

„ $x=2*x+1+x*x$ “:  $(x + 1)^2$  für  $x$  einsetzen:

$$\equiv \text{wp}("", (2 \cdot (x + 1)^2 \geq 8) \wedge (((y + 7) - 8) \% 2 = 1))$$

Nur noch die Nachbedingung stehen lassen:

$$\equiv (2 \cdot (x + 1)^2 \geq 8) \wedge (((y + 7) - 8) \% 2 = 1)$$

Subtraktion:

$$\equiv (2 \cdot (x+1)^2 \geq 8) \wedge ((y-1)\%2 = 1)$$

Vereinfachen (links beide Seiten durch 2 teilen und rechts von beiden Seiten 1 abziehen)

$$\equiv \left(\frac{2 \cdot (x+1)^2}{2} \geq \frac{8}{2}\right) \wedge (((y-1)\%2) - 1 = 1 - 1)$$

Zwischenergebnis:

$$\equiv ((x+1)^2 \geq 4) \wedge y\%2 = 0$$

### Zusammenführung

Die Zwischenergebnisse aus den Nebenrechnungen zusammenfügen:

$$\equiv [(x+1)^2 > 196 \wedge \text{falsch}] \vee [(x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0]$$

„falsch“ und eine Aussage verbunden mit logischem Und „ $\wedge$ “ ist insgesamt falsch:

$$\equiv \text{falsch} \vee [(x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0]$$

falsch verbunden mit oder weglassen:

$$\equiv (x+1)^2 \leq 196 \wedge (x+1)^2 \geq 4 \wedge y\%2 = 0$$

Umgruppieren, sodass nur noch ein  $(x+1)^2$  geschrieben werden muss:

$$\equiv 4 \leq (x+1)^2 \leq 196 \wedge y\%2 = 0$$

$4 = 2^2$  und  $196 = 14^2$

$$\equiv 2^2 \leq (x+1)^2 \leq 14^2 \wedge y\%2 = 0$$

Hoch zwei weg lassen: Betragsklammer  $|x|$  oder auch Betragsfunktion hinzufügen (Die Betragsfunktion ist festgelegt als „Abstand einer Zahl von der Zahl Null“.

$$\equiv 2 \leq |x+1| \leq 14 \wedge y\%2 = 0$$

Auf die Gleichung der linken Aussage  $-1$  anwenden:

$$\equiv 1 \leq |x| \leq 13 \wedge y\%2 = 0$$

Die Betragsklammer weg lassen:

$$\equiv (1 \leq x \leq 13 \vee -13 \leq x \leq -1) \wedge y\%2 = 0$$

$$=: P$$