Aufgabe 4

Betrachten Sie die beiden folgenden Probleme:

`VERTEX COVER`

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, so dass für jede Kante (u, v) aus E mindestens einer der Knoten u und v in C ist?

`VERTEX COVER 3`

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \{3, 4, 5 \dots\}$.

Frage: Gibt es eine Menge $C \subseteq V$ mit $|C| \leq k$, so dass für jede Kante (u, v) aus E mindestens einer der Knoten u und v in C ist?

Geben Sie eine polynomielle Reduktion von `VERTEX COVER` auf `VERTEX COVER 3` an und begründe anschließend, dass die Reduktion korrekt ist.

> **Exkurs:** `VERTEX COVER`
> Das Knotenüberdeckungsproblem (`VERTEX COVER`) fragt, ob zu einem gegebenen einfachen Graphen und einer natürlichen Zahl k eine Knotenüberdeckung der Größe von höchstens k existiert.
>
> Das heißt, ob es eine aus maximal k Knoten bestehende Teilmenge U der Knotenmenge gibt, so dass jede Kante des Graphen mit mindestens einem Knoten aus U verbunden ist.

`VERTEX COVER` $\preceq_p$ `VERTEX COVER 3`

f fügt vier neue Knoten hinzu, von denen jeweils ein Paar verbunden ist. Außerdem erhöht f k um 2.

Total: Jeder Graph kann durch f so verändert werden.

Korrektheit: Wenn `VERTEX COVER` für k in G existiert, dann existiert auch `VERTEX COVER` mit $k + 2$ Knoten in G', da für den eingefügten Teilgraphen ein `VERTEX COVER` mit $k = 2$ existiert.

In Polynomialzeit berechenbar: Für die Adjazenzmatrix des Graphen müssen lediglich vier neue Spalten und Zeilen eingefügt werden und $k + 2$ berechnet werden.