Mathematische Grundlagen

Zahlen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$: Natürliche Zahl

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ oder **N** bezeichnet. Die natürlichen Zahlen sind die beim *Zählen verwendeten Zahlen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 usw. Je nach Definition kann auch die 0 (*Null*) zu den natürlichen Zahlen gezählt werden. [1]

Zählen verwendeten Zahlen

Null

$\mathbb{Z}$: Ganze Zahl

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ oder **Z** bezeichnet. Die ganzen Zahlen fügen den *natürlichen Zahlen* die negativen Zahlen hinzu.

natürlichen Zahlen

$\mathbb{Q}$: Rationale Zahl

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ oder **Q** bezeichnet. Sie umfasst alle Zahlen, die sich als *Bruch* (engl. fraction) darstellen lassen, der sowohl im *Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen* enthält. [2]

Bruch

Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Irrationale Zahl

Kennzeichen einer irrationalen Zahl ist, dass sie *nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar* ist. Bekannte irrationale Zahlen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π. Auch die Quadratwurzel aus Zwei 2 $\sqrt{2}$ und das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnitts sind irrationale Zahlen. [3]

nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche_Zahl`
[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl`
[3] `https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl`

$\mathbb{R}$: Reelle Zahl

Die reellen Zahlen umfassen die *rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen*. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ oder **R** bezeichnet. [4]

rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen

Modulo / Division mit Rest

Modulo berechnet den Rest b der Division n geteilt durch m. [5]

Rechengesetze

Kommutativgesetz[6]

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz[7]

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributivgesetz[8]

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

4 https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl
5 https://de.wikipedia.org/wiki/Division_mit_Rest#Modulo
6 *Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz“.*
7 *Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz“.*
8 *Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz“.*

Ausklammern:[9]

Ausklammern dient dazu, aus einer Summe oder Differenz ein Produkt zu machen.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ausmultiplizieren:[10]

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Binomische Formeln[11]

Als binomische Formeln werden üblicherweise die folgenden drei Umformungen bezeichnet:

(a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erste binomische Formel (Plus-Formel)

(b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ zweite binomische Formel (Minus-Formel)

(c) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ dritte binomische Formel (Plus-Minus-Formel)

Potenzgesetze

Multiplikation mit gleicher Basis

Multipliziert man zwei Potenzen mit gleicher Basis miteinander, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen addiert.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

[9] Schneider, *Mathebibel*, /ausklammern.
[10] Schneider, *Mathebibel*, /ausmultiplizieren.
[11] *Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“*.

Division mit gleicher Basis

Dividiert man zwei Potenzen mit gleicher Basis, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen voneinander subtrahiert.[12]

$$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Regel von L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen $\frac{f}{g}$ von Funktionen f und g, wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert: [13]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Mengen

| „für die gilt"

[12]Schneider, *Mathebibel*, /potenzgesetze.

[13]`https://de.serlo.org/mathe/funktionen/grenzwerte-stetigkeit-differenzierbarkeit/grenzwert/regel-l-hospital`

z. B. $M = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4 = 0 \}$ dabei bedeutet | „für die gilt", also alle rationalen Zahlen x, für die gilt, dass das Quadrat von x abzüglich 4 gleich 0 ist).[14]

Mengen

$M_1 \cup M_2$	Vereinigungsmenge von M_1 und M_2
$M_1 \cap M_2$	Schnittmenge von M_1 und M_2[15]

Literatur

[1] Frank Förster, Andreas Eichler und Boris Girnat. *Grundelemente der Mathematik*. Technische Universität Braunschweig, Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik.

[2] Dirk W. Hoffmann. *Theoretische Informatik*. 2018.

[3] Andreas Schneider. *Mathebibel*. `https://www.mathebibel.de`. aufgerufen 2020-08-18.

[4] *Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz"*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Assoziativgesetz`.

[5] *Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln"*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Formeln`.

[6] *Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz"*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Distributivgesetz`.

[7] *Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz"*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutativgesetz`.

[14] Förster, Eichler und Girnat, *Grundelemente der Mathematik*, Seite 8.