SAT-3SAT

> **Exkurs:** SAT
> Das **Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik** SAT und k-SAT mit $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$ (Satz von Cook) fragt, ob eine aussagenlogische Formel erfüllbar ist. Das Erfüllbarkeitsproblem der *Aussagenlogik* ist in exponentieller Zeit in Abhängigkeit der Anzahl der Variablen mit Hilfe einer Wahrheitstabelle entscheidbar. Diese *Wahrheitstabelle* kann nicht in polynomieller Zeit aufgestellt werden.

(a) Wie zeigt man die aus der NP-Schwere des 3SAT-Problems die NP-Schwere des SAT-Problems?

$$\texttt{3SAT} \preceq_p \texttt{SAT}$$

Jedes 3SAT-Problem ist auch ein SAT-Problem, weil 3SAT $\subset$ SAT. Damit braucht es keine Funktion (bzw. Identitäts-/Einheitsfunktion). Die Funktion ist korrekt, total und in Polynomialzeit anwendbar. Das SAT-Problem ist ebenfalls NP-schwer.

(b) Wie zeigt man die aus der NP-Schwere des SAT-Problems die NP-Schwere des 3SAT-Problems?

$$\texttt{SAT} \preceq_p \texttt{3SAT}$$

Man muss eine Funktion finden, die eine allgemeine Aussagenlogik in eine Aussagenlogik mit 3 Literalen in konjunktiver Normalform umformt.

Durch die boolsche Algebra lässt sich jede logische Aussagenlogik in eine konjunktive Normalform bringen. Dies ist eine Konjunktion von Disjunktionstermen. Wir formen einen Disjunktionsterm mithilfe einer Funktion in ein 3SAT-Problem um. Diese Funktion kann auf jeden Disjunktionsterm angewendet werden und damit wird das gesamte SAT-Problem auf 3SAT reduzieren.

Die Funktion formt Formel aus SATmithilfe von Hilfsvariablen $h_1, \dots, h_{n-2}$ derart um $(a_1 \vee \dots \vee a_n) \rightarrow (a_1 \vee a_2 \vee h_1) \wedge (\neg h_1 \vee a_3 \vee h_2) \wedge (\neg h_2 \vee a_4 \vee h_3) \wedge \dots \wedge (\neg h_{n-2} \vee a_n)$

total Diese Funktion ist total, denn jede in SATenthaltene Aussagenlogik kann so umgewandelt werden.

Korrektheit: Die Hilfsvariablen sind wahr, solange bis ein Literal a_x selber true ist. Ab diesem Zeitpunkt sind die Hilfsvariablen dann falsch.

JA-Instanzen: Der erste und alle mittleren Disjunktionstermen sind wahr, weil aufgrund der Nicht-Negierung und Negierung immer ein wahres Literal in den Disjunktionstermen. Somit ist dann auch der Disjunktionsterm wahr. Da es eine JA-Instanz ist, existiert ein a_x welches wahr ist. Somit sind ab diesem Zeitpunkt die Hilfvariablen falsch. Der letzte Disjunktionsterm wird dadurch sicher wahr, weil $\neg h_{n-2}$ somit wahr ist.

NEIN-Instanz: Alle a_x sind falsch. Auch hier sind wieder der erste und alle mittleren Disjunktionsterme wahr (gleiche Begründung wie oben). Der letzte Disjunktionsterm ist allerdings falsch, weil die Hilfvariablen durchgehend wahr bleiben und alle a_x falsch sind. Durch die Konjunktion der Disjunktionsterme ist dann auch die Gesamtaussage falsch.

Polynomialzeit: Der Algorithmus, der Formeln aus `SAT` nach `3SAT` umformt liegt in $\mathcal{O}(n)$ und somit in Polynomialzeit.