

Pumping-Lemma

Zeigen Sie jeweils, dass die angegebene Sprache nicht kontextfrei ist:

Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen

Es sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl j , sodass sich alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ zerlegen lassen in $\omega = uvwxy$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) $|vx| \geq 1$ (Die Wörter v und x sind nicht leer.)
- (b) $|vwx| \leq j$ (Die Wörter v , w und x haben zusammen höchstens die Länge j .)
- (c) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iwx^iy in der Sprache L)

(a) $L_1 = \{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \}$

Sei L_1 kontextfrei. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl j , so dass für jedes Wort $\omega \in L_1$ mit $|\omega| \geq j$ eine Zerlegung $\omega = uvwxy$ existiert, für die gilt: $|vx| > 0$, $|vwx| \leq n$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $uv^iwx^iy \in L_1$.

Wähle $\omega = a^n b^n a^n b^n$. Dann gibt es für jede Zerlegung $\omega = uvxyz$ mit den obigen Bedingungen zwei Möglichkeiten:

- vwx besteht aus $a^j b^k$ mit $j + k > 0$.
- vwx besteht aus $b^j a^k$ mit $j + k > 0$.

Dann ist in beiden Fällen $uv^0wx^0y \notin L_1$.

(b) $L_2 = \{ a^k b^l c^m \mid k > l > m; k, l, m \in \mathbb{N} \}$

Sei L_2 kontextfrei. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl j , so dass für jedes Wort $\omega \in L_2$ mit $|\omega| \geq j$ eine Zerlegung $\omega = uvwxy$ existiert, für die gilt: $|vx| > 0$, $|vwx| \leq j$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $uv^iwx^iy \in L_2$.

Wähle $\omega = a^n b^{n-1} c^{n-2}$. Dann gibt es für jede Zerlegung $\omega = uvwxy$ mit den obigen Bedingungen zwei Möglichkeiten:

- vwx enthält kein a . Dann ist $uv^2wx^2y \notin L_2$.
- vwx enthält mindestens ein a . Dann ist $uv^0wx^0y \notin L_2$.