Berechbarkeitstheorie

Weiterführende Literatur:

- Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 253-340

Berechenbarkeitsmodelle

Loop-berechenbar

Weiterführende Literatur:

- *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 7-11
- Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 254-260
- *Wikipedia-Artikel „LOOP-Programm"*

LOOP-Sprache (einfache Programme)

- endlicher Aufbau
- Variablen aus den natürlichen Zahlen

Programmelemente:

Konstante: 0 (andere Kostanten müssen aus den anderen Element)

Variablen: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

Operator: *succ* (Successor), *pred* (Sredecessor), $:=$ (Wertzuweisen), ; (Anweisungtrenner)

Schleife: $loop \ldots do \ldots end$ (nach dem loop Schlüsselwort steht genau eine Variable, die dekrementiert wird. Ist 0 erreicht, stop die Schleife)

Speichervektor v:

- endlich, aber beliebig lang
- Speicherung der Variablen des Programms
- $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Erste Stelle des Vektors ist für das Speichern des Ergebnisses vorgesehen.

Übergangsfunktion $\delta(v, P)$**:**

Eingabe: Speichervektor v und Programm P

Ausgabe: Speichervektor v'

nach Programmausführung von P

Makro

Es gibt die Möglichkeit sogenannte Makros zu definieren.

While-Programme

Weiterführende Literatur:

- *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 7-12
- Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 260-264
- *Wikipedia-Artikel „WHILE-Programm"*

- endlicher Aufbau
- Variablen aus den natürlichen Zahlen

Programmelemente:

Konstante: 0 (andere Kostanten müssen aus den anderen Element)

Variablen: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

Operator: *succ* (Successor), *pred* (Predecessor), $:=$ (Wertzuweisen), ; (Anweisungtrenner)

Schleife: *loop* ... *do* ... *end*(nach dem *loop* Schlüsselwort steht genau eine Variable, die dekrementiert wird. Ist 0 erreicht, stop die Schleife)

Schleife: *while* ... *do* ... *end* (nach dem *while* Schlüsselwort steht eine Bedingung. *while*-Schleife kann nicht terminieren.)

Speichervektor v:

- endlich, aber beliebig lang
- Speicherung der Variablen des Programms
- $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Übergangsfunktion $\delta(v, P)$:

Eingabe: Speichervektor v und Programm P

Ausgabe: Speichervektor v'

nach Programmausführung von P

$$\delta(v, \text{while } x_i \text{ do } P) \begin{cases} \bot & \text{falls } T_i = \emptyset \\ \delta(v, P^{\min T_i}) & \text{falls } T_i \neq \emptyset \end{cases}$$

Mit $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ sei eine partielle Funktion über den natürlichen Zahlen gegeben. f heißt While-berechenbar, falls ein While-Programm P mit den folgenden Eigenschaften existiert:

$$\delta((0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots), P) = \begin{cases} \bot & \text{falls } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bot \\ (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots) & \text{falls } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \bot \end{cases}$$

[1]

Satz von Kleene:
Jede WHILE-berechenbare Funktion lässt sich als WHILE-Programm mit nur einer WHILE-Schleife realisieren.[2]

[1] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 261.
[2] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 13.

Registermaschine: Random Access Machine (kurz RAM)

Die Random Access Machine (kurz RAM) ist eine spezielle Art von Registermaschine. Sie hat die Fähigkeit der indirekten Adressierung der Register.

Die Random Access Machine besteht aus:

- einem Programm bestehend aus endlich vielen durchnummerierten Befehlen (beginnend mit Nummer 1)
- einem Befehlszähler b
- einem Akkumulator $c(0)$
- und einem unendlich großen Speicher aus durchnummerierten Speicherzellen (Registern) $c(1), c(2), c(3), \ldots$

Jedes Register (einschließlich b und $c(0)$) speichert eine beliebig große natürliche Zahl.[3]

Weitere Berechnungsmodelle

- GOTO
- primitive und μ-Rekursion
- Turing-Maschinen
  - Einband-TM
  - Mehrband-TM
  - Universelle-TM
- Registermaschinen
- lambda-Kalkül[4]

Universelle Turingmaschine

Eine Turing-Maschine U heißt universell, wenn sie eine andere Turing-Maschine T simulieren (ausführen) kann.[5]

Gödelisierung:

Für jeden Eintrag der Übergangstabelle wird eine Binärzahl erzeugt. Startzustand, Eingabesymbol, Folgesymbol, Ausgabesymbol und Richtung werden als Einserketten unär kodiert mit Null als Trennzeichen. Nach dem gleichen Schema werden die erstellten Bitsequenzen zu einer großen Binärzahl verschmolzen. Die erzeugte Zahl heißt die *Gödelnummer* der TM T. Die Kodierung wird als *Gödelisierung* bezeichnet.[6]

Gödelnummer

Gödelisierung

[3] *Wikipedia-Artikel „Registermaschine“.*
[4] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 17.
[5] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 23.
[6] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 23.

Church'sche These

7

Die Klasse der turing-berechenbaren Funktionen stimmt mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen überein.

Der Begriff der intuitiv berechenbaren Funktion bedarf an dieser Stelle besonderer Aufmerksamkeit. Er bezeichnet eine Funktion, die von einem Menschen – in welcher Form auch immer – ausgerechnet werden kann. Damit besagt die Church'sche These nichts anderes, als dass jede Funktion, die überhaupt in irgendeiner Weise berechenbar ist, auch durch eine Turing-Maschine berechnet werden kann. Die Church'sche These ist kein Satz im mathematisch präzisen Sinne, da der Begriff der intuitiv berechenbaren Funktion keine formale Definition besitzt. Gäbe es diese, so hätten wir uns – bewusst oder unbewusst – bereits auf ein konkretes Berechnungsmodell festgelegt und die eigentliche Bedeutung dieses Begriffs ad absurdum geführt. Folgerichtig wird es niemals möglich sein, die Church'sche These zu beweisen. Wir können lediglich Indizien für ihre Gültigkeit sammeln und genau dies ist Forschern in der Vergangenheit vielfach gelungen.[8]

Intuitiv-berechenbar: Funktionen, die von einem Menschen berechnet werden können.

Church'sche These kann nicht bewiesen werden![9]

Funktion

Abbildung

Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen

In der Mathematik ist eine Funktion (lateinisch functio) oder *Abbildung* eine *Beziehung* (*Relation*) *zwischen zwei Mengen*, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, Urbild, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, Bild von x, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.[10][11]

eine Menge	andere Menge
Funktionsargument	Funktionswert
Urbild	Bild
unabhängige Variable	abhängige Variable
Definitionsmenge	Zielmenge
Definitionsbereich	Wertebereich

Totale Funktion

Eine (totale) Funktion ist eine Relation $R \subseteq M \times N$ über dem Definitionsbereich M und dem Wertebereich N, welche folgende Eigenschaften hat:

(a) Jedes Element aus dem Definitionsbereich M ist mit höchstens einem Element aus dem Wertebereich N verbunden. (*rechtseindeutig*)

[7] *Wikipedia-Artikel „Church-Turing-These"*.
[8] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 308.
[9] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 27.
[10] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 51.
[11] *Wikipedia-Artikel „Funktion (Mathematik)"*.

(b) Jedes Element von M ist mit einem Element aus N verbunden. (*linkstotal*)

12

> **Exkurs: Totale Funktion**
> Eine rechtseindeutige bzw. funktionale Relation nennt man auch partielle Funktion. Wenn diese auch linkstotal – also eine Funktion – ist, dann sagt man zur Verdeutlichung auch totale Funktion.[a]
>
> [a] *Wikipedia-Artikel „Relation (Mathematik)“.*

Primitiv-rekursive Funktion

Primitiv-rekursive Funktionen sind totale Funktionen, die aus einfachen Grundfunktionen (konstante 0-Funktion, Projektionen auf ein Argument und Nachfolgefunktion) durch Komposition und (primitive) Rekursion gebildet werden können.

Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind im intuitiven Sinn berechenbar.

Für primitiv-rekursive Funktionen ist es möglich, ein Komplexitätsmaß zu definieren, d. h. es kann die Dauer der Berechnung eines ihrer Funktionswerte vorab ermittelt werden.

Die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen und die der LOOP-berechenbaren Funktionen sind äquivalent.[13]

Partielle Funktion

Der Funktionsbegriff wird in der theoretischen Informatik anders definiert als in der Mathematik. Dort ist eine Funktion eine Zuordnungsvorschrift, die ausnahmslos jedes Element der Definitionsmenge auf ein Element der Zielmenge abbildet. Mit anderen Worten: In der klassischen *Mathematik sind alle Funktionen total*. Der Begriff der partiellen Funktion wurde in der theoretischen Informatik eingeführt, um Programme zu beschreiben, die *für gewisse Eingabewerte nicht terminieren*.[14]

Mathematik sind alle Funktionen total

für gewisse Eingabewerte nicht terminieren

Der Begriff der partiellen Funktion ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion. Unter einer Funktion von X nach Y versteht man eine linkstotale, rechtseindeutige Relation, also eine Relation, in der jedem Element von X genau ein Element von Y zugeordnet ist. Jede Funktion von X nach Y ist also insbesondere eine partielle Funktion von X nach Y, nämlich eine (links-)totale partielle Funktion, aber nicht umgekehrt. Insofern kann der Begriff der partiellen Funktion irreführend sein. Um auszudrücken, dass eine partielle Funktion sogar eine Funktion im eigentlichen Sinn ist, sagt man gelegentlich, es handle sich um eine totale Funktion. Der Unterschied zwischen partiellen Funktionen und (totalen) Funktionen ist:
Für partielle Funktionen

[12] `https://files.ifi.uzh.ch/cl/siclemat/lehre/ws0607/ecl1/script/html/scriptse48.html`

[13] *Wikipedia-Artikel „Primitiv-rekursive Funktion“.*

[14] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 51.

$$f\colon\ X \rightharpoonup Y$$

gilt

$$\mathrm{Def}(f) \subseteq X,$$

für (totale) Funktionen

$$f\colon\ X \to Y$$

gilt

$$\mathrm{Def}(f) = X.$$

[15]

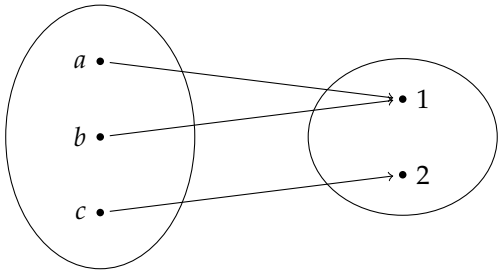
Arten von (partiellen) Funktionen

Surjektiv

Surjektive Funktionen besitzen die Eigenschaft, die Zielmenge vollständig auszuschöpfen, d. h. jedes Element besitzt mindestens ein Urbild in der Definitionsmenge.[16]

Eine Surjektive Funktion ist eine Funktion, die jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert annimmt. Das heißt, jedes Element der Zielmenge hat ein nichtleeres Urbild.[17]

Jedes Element des Wertebereichs wird von mindestens einem Pfeil getroffen. [18]



Injektiv

Jedes Element des Wertebereichs wird von höchstens einem Pfeil getroffen. [19]

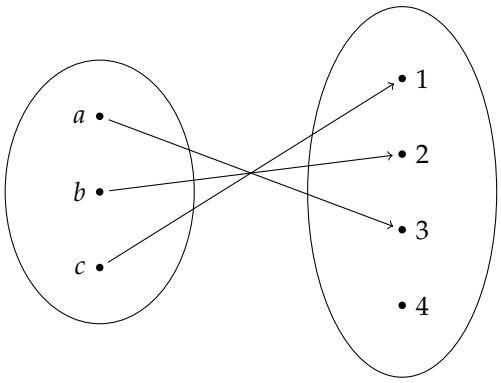
[15] `https://de.wikipedia.org/wiki/Partielle_Funktion`

[16] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 51.

[17] *Wikipedia-Artikel „Surjektive Funktion“*.

[18] `https://files.ifi.uzh.ch/cl/siclemat/lehre/ws0607/ecl1/script/html/scriptse48.html`

[19] `https://files.ifi.uzh.ch/cl/siclemat/lehre/ws0607/ecl1/script/html/scriptse48.html`

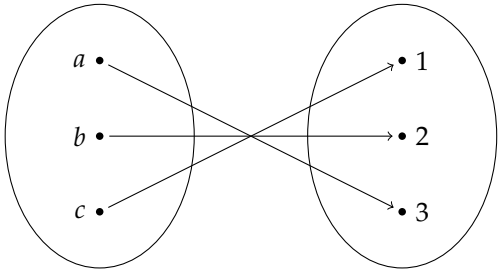


Eine injektive Funktion, auch als Injektion bezeichnet, ist ein Spezialfall einer linkseindeutigen Relation, namentlich der, bei dem die Relation auch rechtseindeutig und linkstotal ist.[20]

Bijektiv

von bijektiv, etwa ‚umkehrbar eindeutig auf'. Zur Veranschaulichung kann man sagen, dass bei einer Bijektion eine vollständige Paarbildung zwischen den Elementen von Definitionsmenge und Zielmenge stattfindet. Bijektionen behandeln ihren Definitionsbereich und ihren Wertebereich also symmetrisch; deshalb hat eine bijektive Funktion immer eine Umkehrfunktion.[21]

Jedes Element des Wertebereichs wird von genau einem Pfeil getroffen. [22]



Rekursiv aufzählbare Menge

semi-entscheidbare Menge
Menge von natürlichen Zahlen
Algorithmus
aufzählt

Als rekursiv aufzählbare Menge (auch *semi-entscheidbare Menge*) wird eine *Menge von natürlichen Zahlen* bezeichnet, wenn es einen *Algorithmus* gibt, der die Elemente dieser Menge *aufzählt*. Äquivalent ist diese Charakterisierung: Es gibt einen Algorithmus, der 1 ausgibt, wann immer die Eingabe ein Element der betreffenden Menge ist, und auf anderen Eingaben nie hält. Jede entscheidbare Menge ist rekursiv aufzählbar, aber es gibt rekursiv aufzählbare Mengen, die nicht entscheidbar sind.

[20] *Wikipedia-Artikel „Injektive Funktion"*.
[21] *Wikipedia-Artikel „Bijektive Funktion"*.
[22] `https://files.ifi.uzh.ch/cl/siclemat/lehre/ws0607/ecl1/script/html/scriptse48.html`

Mengen von anderen Objekten als natürlichen Zahlen heißen rekursiv aufzählbar, wenn sie sich durch Gödelisierung in eine rekursiv aufzählbare Menge natürlicher Zahlen übersetzen lässt.[23]

Busy Beaver-„Funktion“

Im Jahr 1962 rief der ungarische Mathematiker Tibor Radó den Wettbewerb des fleißigen Bibers ins Leben. Fleißige Biber (busy beaver) der Größe n sind Turing-Maschinen mit n Zuständen, die möglichst viele Einsen auf ein mit Nullen vorinitialisiertes Band schreiben. Endlosschleifen sind dabei explizit verboten, d. h. die Turing-Maschine muss nach endlich vielen Schritten terminieren. Der Endzustand zählt nicht als Zustand.[24][25]
[26]

Literatur

[1] Dirk W. Hoffmann. *Theoretische Informatik*. 2018.

[2] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*.

[3] *Wikipedia-Artikel „Bijektive Funktion“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Bijektive_Funktion`.

[4] *Wikipedia-Artikel „Church-Turing-These“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Church-Turing-These`.

[5] *Wikipedia-Artikel „Fleißiger Biber“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Fleißiger_Biber`.

[6] *Wikipedia-Artikel „Funktion (Mathematik)“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_(Mathematik)`.

[7] *Wikipedia-Artikel „Injektive Funktion“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Injektive_Funktion`.

[8] *Wikipedia-Artikel „LOOP-Programm“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/LOOP-Programm`.

[9] *Wikipedia-Artikel „Primitiv-rekursive Funktion“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Primitiv-rekursive_Funktion`.

[10] *Wikipedia-Artikel „Registermaschine“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Registermaschine`.

[11] *Wikipedia-Artikel „Rekursiv aufzählbare Menge“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Rekursiv_aufzählbare_Menge`.

[12] *Wikipedia-Artikel „Relation (Mathematik)“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Relation_(Mathematik)`.

[13] *Wikipedia-Artikel „Surjektive Funktion“*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Surjektive_Funktion`.

[23] *Wikipedia-Artikel „Rekursiv aufzählbare Menge“*.
[24] Hoffmann, *Theoretische Informatik*, Seite 337.
[25] *Wikipedia-Artikel „Fleißiger Biber“*.
[26] *Theoretische Informatik – Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit*, Seite 26.

[14] *Wikipedia-Artikel „WHILE-Programm"*. https://de.wikipedia.org/wiki/WHILE-Programm.