Gaußsche Summenformel

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\mathrm{A}(n): \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sie kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$\mathrm{A}(1): \qquad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass aus der Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{A}(n): \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

die Induktionsbehauptung

$$\mathrm{A}(n+1): \qquad 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \qquad \text{für } n \geq 1$$

folgt. Dies gelingt folgendermaßen (Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.):

$$\begin{aligned}
{\color{red}1+2+\cdots+n}+(n+1) &= {\color{red}\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && \text{(Hauptnenner 2)} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && \text{(Ausklammern von } (n+1)\text{)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{(Umdrehen nach Kommutativgesetz)} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} && \text{(mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n\text{)}
\end{aligned}$$

Schließlich der Induktionsschluss: Damit ist die Aussage $\mathrm{A}(n)$ für alle $n \geq 1$ bewiesen.

Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ ist gleich dem Quadrat von n:

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Der zu beweisende allgemeine Satz lautet: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Induktionsanfang

$$A(1): \qquad \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung

$$A(n): \qquad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Induktionsbehauptung

$$A(n+1): \qquad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

Beweis

Er ergibt sich über folgende Gleichungskette, bei der in der zweiten Umformung die Induktionsvoraussetzung angewandt wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \color{red}{1 + 3 + \cdots + (2n-1)} + (2(n+1)-1) && \text{Formel für die letzte Zahl ist: } 2n-1,\ n \text{ ist hier } n+1 \\
&= \color{red}{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)} + (2(n+1)-1) && \text{andere Schreibweise mit dem Summenzeichen} \\
&= \color{red}{n^2} + 2(n+1) - 1 && \text{Ersetzen des Summenzeichens mit dem Ergebnis der Formel} \\
&= \color{red}{n^2} + 2n + 2 - 1 && \text{ausmultiplizieren} \\
&= \color{red}{n^2} + 2n + 1 && \text{mit erster Binomischer Formel: } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

(Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.)