Pumping-Lemma

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

> **Exkurs: Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen**
> Es sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl j, sodass sich alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ zerlegen lassen in $\omega = uvwxy$, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
>
> (a) $|vx| \geq 1$ (Die Wörter v und x sind nicht leer.)
>
> (b) $|vwx| \leq j$ (Die Wörter v, w und x haben zusammen höchstens die Länge j.)
>
> (c) Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $uv^iwx^iy \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort uv^iwx^iy in der Sprache L)

- $L = \{ a^n b^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Annahme: L ist kontextfrei.

$\forall \omega \in L$: $\omega = uvwxy$

$j \in \mathbb{N}$: $|\omega| \geq j$

$\omega = a^j b^j c^{2j}$: $|\omega| = 4j > j$

Damit gilt: $|vwx| \leq j$, $|vx| \geq 1$

Zu zeigen: Keine Möglichkeit der Zerlegung, damit $\omega' \in L$

1. Fall vwv enthält nur a's

o. E. d. A. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) stecken alle a's in der Zerlegung vwx, d. h. u ist leer

u : ε
v : a^l
w : $a^{j-(l+m)}$
x : a^m
y : $b \dots bc \dots c$

v^2wx^2y
$a^{2l}a^{j-(l+m)}a^{2m}b^jc^{2j} =$

Nebenrechnung: $2l + j - (l + m) + 2m = j + l + m > j$, da $|vx| \geq 1 \rightarrow l + m \geq 1$

$\Rightarrow \omega' = uv^2wx^2y \notin L$

2. Fall vwv enthalten a's und b's

o. E. d. A. $|v|_a = |x|_b$

u: a^p v: a^l w: $a^{j-(p+l)}b^{j-(l+r)}$ x: b^l y: b^rc^{2j}

$\Rightarrow uv^0wx^0v$

Nebenrechnung:
a's: $p + j - (l + p) = j - l$
b's: $j - (l + r) = j - l$

ist falsch, da $j-l$ echt kleiner ist, da $|vx| \geq 1 \rightarrow l \geq 1$

$\Rightarrow \omega' \notin L$

3. Fall vwx enthält nur b's

analog zu Fall 1

4. Fall vwx enthält nur b's und c's

analog zu Fall 2

5. Fall vwx enthält nur c's

analog zu Fall 1

$\Rightarrow$ Es gibt keine Zerlegung, sodass $\forall i \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ Annahme ist falsch

$\Rightarrow$ L ist nicht kontextfrei

- $L = \{\, a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$

Annahme: L kontextfrei

$\Rightarrow$ Pumping-Lemma: $j \in \mathbb{N}$: $|w| \geq j$

$\omega = a^j b^{j^2}$

$j + j^2 > j$

1. Fall vwx enthält nur a's

$\Rightarrow$ ungleich viele a's wie b's als Quadrat

$\Rightarrow \omega' \notin E$

2. Fall vwx enthält nur b's

$\Rightarrow$ analog zu Fall 1

$\Rightarrow \omega' \notin E$

3. Fall vwx enthält a's und b's

o. E. d. A. v nur a's ; x nur b's

u: $a^{j-(l+m)}$

v: a^l

w: $a^m b^n$

x: b^{l^2}

y: $b^{j^2-(n+l^2)}$

$\Rightarrow uv^0wx^0y = \omega'$

a: $j-(l+m)+0\cdot l+m = j-l$

b: $n - 0\cdot l^2 + j^2 - (n+l^2) = j^2 - l^2 = (j-l)(j+l) \neq (j-l)(j-l)$

$\Rightarrow \in L$