

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Sprache $L_1 = L_a \cup L_b$.

- $L_a = \{ a^n b c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$
- $L_b = \{ a b^m c^m \mid m \in \mathbb{N} \}$

(a) Geben Sie für L_1 eine kontextfreie Grammatik an.

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow S_a \mid S_b \\ S_a \rightarrow a S_a c \mid b \\ S_b \rightarrow a \mid a B_b \\ B_b \rightarrow b B_b c \mid bc \end{array} \right\}$$

(b) Ist Ihre Grammatik aus a) eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein. Die Sprache ist nicht eindeutig. Für das Wort abc gibt es zwei Ableitungen, nämlich $S \vdash S_a \vdash a S_a c \vdash abc$ und $S \vdash S_b \vdash a B_b \vdash abc$.

(c) Betrachten Sie die Sprache $L_2 = \{ a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Zeigen Sie, dass L_2 nicht kontextfrei ist.

Annahme: L_2 ist kontextfrei
→ Pumping-Lemma gilt für L_2
→ $j \in \mathbb{N}$ als Pumping-Zahl
 $\omega \in L_2: |\omega| \geq j$
Konsequenz: $\omega = uvwxy$

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq j$
- $uv^iwx^iy \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$

Wir wählen: $\omega = a^{2^i}: |\omega| \geq j$

p $a \dots a$

r $a \dots a$

s $a \dots a$

t $a \dots a$

q $a \dots a$

$$q + r + s + t + q = 2^i$$

$$\Rightarrow r + t \geq 1$$

$$r + s + t \leq j$$

1. Fall

$$r + t = 2^{j-1}$$

$$2^{j-1} + 2^{j-1} = 2 \cdot 2^{j-1} = 2^1 \cdot 2^{j-1} = 2^{1+j-1} = 2^j$$

$$\omega' = uv^2wx^2y$$

$$p + 2 \cdot r + s + 2 \cdot t + q$$

$$p + s + q + 2 \cdot (r + t)$$

$$2^{j-1} + 2 \cdot 2^{j-1} = 3 \cdot 2^{j-1} = 2^{j-1} + 2^i \leq 2^{j+1}$$

keine Zweierpotenz

$$\Rightarrow \omega \notin L_2$$

\Rightarrow Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow L_2$ nicht kontextfrei

2. Fall

$$r + t \neq 2^{j-1}$$

$$\omega' = uv^0wx^0y$$

$$\Rightarrow p + s + q = 2^j - (r + t)$$

$$(r + t) \neq 2^{j-i}$$

ist keine Zweierpotenz

$$\Rightarrow \omega \notin L_2$$

$\Rightarrow L_2$ nicht kontextfrei