Pumping-Lemma

Begründe jeweils, ob die folgenden Sprachen regulär sind oder nicht. [1]

(a) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ auf ein } a \text{ folgt immer ein } b\}$

> $L_1 = L(b^*(ab)^*b^*)$ und damit regulär.

(b) $L_2 = \{w \in \{1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } |w| = n^2\}$

> L_2 ist nicht regulär.
>
> **Pumping-Lemma:**
>
> j sei eine Quadratzahl: Somit ist $1^j \in L_2$. Es gilt $|uv| \leq j$ und $|v| \geq 1$. Daraus folgt, dass in v mindestens eine 1 existiert. Somit wird immer ein $i \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $uv^iw \notin L$, weil die Quadratzahlen nicht linear darstellbar sind.
>
> **Begründung über die Zahlentheorie:**
>
> Angenommen, L_2 sei regulär, sei m die kleinste Zahl mit $m^2 > j$. Dann ist $x = 1^{m^2} \in L_2$. Für eine Zerlegung $x = uvw$ nach dem Pumping-Lemma muss dann ein k existieren mit $v = 1^k$ und $m^2 - l + k^l$ ist eine Quadratzahl für jedes $l \geq 0$. Das kann offenbar zahlentheoretisch nicht sein, und somit haben wir einen Widerspruch zur Annahme.

(c) $L_3 = \{a^n b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$

> $L_3 = \{a^n b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist nicht regulär.
>
> $a^j b^j c^j \in L_3$:
>
> $|uv| \leq j$ und $|v| \geq 1$
>
> $\rightarrow$ in uv sind nur a's und in v ist mindestens ein a
>
> $\rightarrow$ $uv^2w \notin L_3$, weil dann mehr a's als c's in diesem Wort vorkommen

(d) $L_4 = \{w \in \{a\}^* \mid \bmod_3(|w|) = 0\}$

> $L_4 = ((aaa)^*)$ und damit regulär.

[1] https://www.uni-muenster.de/Informatik/u/lammers//EDU/ws08/AutomatenFormaleSprachen/Loesungen/Loesung05.pdf