

Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2020 / Herbst

Thema 1 / Teilaufgabe 2 / Aufgabe 1

(Algorithmenanalyse)

Stichwörter: Algorithmen und Datenstrukturen

Betrachten Sie die folgende Prozedur `countup`, die aus zwei ganzzahligen Eingabewerten n und m einen ganzzahligen Ausgabewert berechnet:

```
procedure countup(n, m : integer): integer
var x, y : integer;
begin
  x := n;
  y := 0;
  while (y < m) do
    x := x - 1;
    y := y + 1;
  end while
  return x;
end
```

- (a) Führen Sie `countup(3,2)` aus. Geben Sie für jeden Schleifendurchlauf jeweils den Wert der Variablen n , m , x und y zu Beginn der `while`-Schleife und den Rückgabewert der Prozedur an.

Lösungsvorschlag

| n | m | x | y | ausgeführter Code, der Änderung bewirkte |
|---|---|---|---|--|
| 3 | 2 | 3 | 0 | |
| 3 | 2 | 2 | 1 | <code>x := x - 1; y := y + 1;</code> |

Rückgabewert: 1

Java-Implementation der Prozedur

```
public class CountUp {

  public static int countup(int n, int m) {
    int x = n;
    int y = 0;
    while (y < m) {
      System.out.println(String.format("%s %s %s %s", n, m, x, y));
      x = x - 1;
      y = y + 1;
    }
    return x;
  }

  public static void main(String[] args) {
    System.out.println(countup(3, 2));
  }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/counter/CountUp.java](https://github.com/src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/counter/CountUp.java)

- (b) Gibt es Eingabewerte von n und m , für die die Prozedur `countup` nicht terminiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Nein. Mit jedem Schleifendurchlauf wird der Wert der Variablen y um eins hochgezählt. Die Werte, die y annimmt, sind streng monoton steigend. y nähert sich m an, bis y nicht mehr kleiner ist als m und die Prozedur terminiert. An diesem Sachverhalt ändern auch sehr große Zahlen, die über die Variable m der Prozedur übergeben werden, nichts.

- (c) Geben Sie die asymptotische worst-case Laufzeit der Prozedur `countup` in der Θ -Notation in Abhängigkeit von den Eingabewerten n und/oder m an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Die Laufzeit der Prozedur ist immer $\Theta(m)$. Die Laufzeit hängt nur von m ab. Es kann nicht zwischen best-, average and worst-case unterschieden werden.

- (d) Betrachten Sie nun die folgende Prozedur `countdown`, die aus zwei ganzzahligen Eingabewerten n und m einen ganzzahligen Ausgabewert berechnet:

```
procedure countdown(n, m : integer) : integer
var x, y : integer;
begin
  x := n;
  y := 0;
  while (n > 0) do
    if (y < m) then
      x := x - 1;
      y := y + 1;
    else
      y := 0;
      n := n / 2; /* Ganzzahldivision */
    end if
  end while
  return x;
end
```

Führen Sie `countdown(3, 2)` aus. Geben Sie für jeden Schleifendurchlauf jeweils den Wert der Variablen n , m , x und y zu Beginn der `while`-Schleife und den Rückgabewert der Prozedur an.

Lösungsvorschlag

| n | m | x | y | ausgeführter Code, der Änderung bewirkte |
|---|---|----|---|--|
| 3 | 2 | 3 | 0 | |
| 3 | 2 | 2 | 1 | <code>x := x - 1; y := y + 1;</code> |
| 3 | 2 | 1 | 2 | <code>x := x - 1; y := y + 1;</code> |
| 1 | 2 | 1 | 0 | <code>y := 0; n := n / 2;</code> |
| 1 | 2 | 0 | 1 | <code>x := x - 1; y := y + 1;</code> |
| 1 | 2 | -1 | 2 | <code>x := x - 1; y := y + 1;</code> |

Rückgabewert: -1

Java-Implementation der Prozedur

```
public class Countdown {

    public static int countdown(int n, int m) {
        int x = n;
        int y = 0;
        while (n > 0) {
            System.out.println(String.format("%s %s %s %s", n, m, x, y));
            if (y < m) {
                x = x - 1;
                y = y + 1;
            } else {
                y = 0;
                n = n / 2; /* Ganzzahldivision */
            }
        }
        return x;
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.println(countdown(3, 2));
    }

}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/counter/CountDown.java](https://github.com/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2020/herbst/counter/CountDown.java)

- (e) Gibt es Eingabewerte von n und m , für die die Prozedur `countdown` nicht terminiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Nein.

$n \leq 0$ terminiert sofort

$m \leq 0$ Der Falsch-Block der Wenn-Dann-Bedingung erniedrigt n $n := n / 2$; bis 0 erreicht ist. Dann terminiert die Prozedur.

$m > 0$ Der erste Wahr-Block der Wenn-Dann-Bedingung erhöht y streng monoton bis $y \geq m$. 2. Falsch-Block der Wenn-Dann-Bedingung halbiert n bis 0. 1. und 2. solange bis $n = 0$

- (f) Geben Sie die asymptotische Laufzeit der Prozedur `countdown` in der Θ -Notation in Abhängigkeit von den Eingabewerten n und/oder m an unter der Annahme, dass $m \geq 0$ und $n > 0$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

Anzahl der Wiederholungen der while-Schleife: $m + 1$:

- m oft: bis $y < m$
- +1 Halbierung von n und y auf 0 setzen

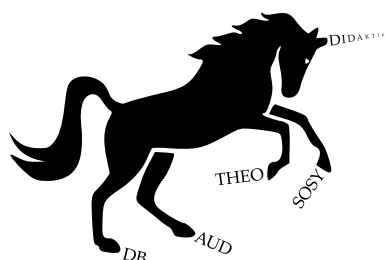
wegen dem $n/2$ ist die Laufzeit logarithmisch, ähnlich wie der worst case bei der Binären Suche.

| n | m | x | y | ausgeführter Code, der Änderung bewirkte |
|----|---|----|---|--|
| 16 | 3 | 16 | 0 | |
| 16 | 3 | 15 | 1 | |
| 16 | 3 | 14 | 2 | |
| 16 | 3 | 13 | 3 | |
| 8 | 3 | 13 | 0 | $y := 0; n := n / 2;$ |
| 8 | 3 | 12 | 1 | |
| 8 | 3 | 11 | 2 | |
| 8 | 3 | 10 | 3 | |
| 4 | 3 | 10 | 0 | $y := 0; n := n / 2;$ |
| 4 | 3 | 9 | 1 | |
| 4 | 3 | 8 | 2 | |
| 4 | 3 | 7 | 3 | |
| 2 | 3 | 7 | 0 | $y := 0; n := n / 2;$ |
| 2 | 3 | 6 | 1 | |
| 2 | 3 | 5 | 2 | |
| 2 | 3 | 4 | 3 | |
| 1 | 3 | 4 | 0 | $y := 0; n := n / 2;$ |
| 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 1 | 3 | 2 | 2 | |
| 1 | 3 | 1 | 3 | |

$$\Theta((m+1) \log_2 n)$$

Wegkürzen der Konstanten:

$$\Rightarrow \Theta(m \log n)$$



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangauland Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/66115/2020/09/Thema-1/Teilaufgabe-2/Aufgabe-1.tex>