Aufgabe 4: Vollständige Induktion

Sie dürfen im Folgenden davon ausgehen, dass keinerlei Under- oder Overflows auftreten.

Gegeben sei folgende rekursive Methode für $n \geq 0$:

```
long sumOfSquares (long n) {
  if (n == 0)
    return 0;
  else
    return n * n + sumOfSquares(n - 1);
}
```

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \texttt{sumOfSquares(n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sei $f(n) : \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

Für $n = 0$ gilt:

$\texttt{sumOfSquares(0)} \overset{\texttt{if}}{=} 0 = f(0)$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$\texttt{sumOfSquares(n)} = f(n)$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

$n \to n + 1$

$$
\begin{aligned}
f(n+1) &= \texttt{sumOfSquares(n+1)} && \text{Java-Methode eingesetzt}\\
&\overset{\texttt{else}}{=} \texttt{(n+1)*(n+1) + sumOfSquares(n)} && \text{Java-Code der else-Verzweigung verwendet}\\
&\overset{\texttt{I.H.}}{=} (n+1)(n+1) + f(n) && \text{mathematisch notiert}\\
&= (n+1)(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Formel eingesetzt}\\
&= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{potenziert}\\
&= \frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && (n+1)^2 \text{ in Bruch umgewandelt}\\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Addition gleichnamiger Brüche}\\
&= \frac{(n+1)6(n+1) + (n+1)n(2n+1)}{6} && n+1 \text{ ausklammern vorbereitet}\\
&= \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1))}{6} && n+1 \text{ ausklammert}\\
&= \frac{(n+1)(6n+6+2n^2+n))}{6} && \text{Klammern ausmultiplizieren / auflösen}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} && \text{umsortiert, addiert } 6n+n=7n\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} && \text{Ausklammern vorbereitet}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && (n+2) \text{ ausgeklammert}\\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1))}{6} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
\end{aligned}
$$

[a]

[a] https://mathcs.org/analysis/reals/infinity/answers/sm_sq_cb.html

(b) Beweisen Sie die Terminierung von `sumOfSquares(n)` für alle $n \geq 0$. <

Sei $T(n) = n$. Die Funktion $T(n)$ ist offenbar ganzzahlig. In jedem Rekursionsschritt wird n um eins verringert, somit ist $T(n)$ streng monoton fallend. Durch die Abbruchbedingung `n==0` ist $T(n)$ insbesondere nach unten beschränkt. Somit ist T eine gültige Terminierungsfunktion.