## Aufgabe 4:

Gegeben sei folgende rekursive Methodendeklaration in der Sprache Java. Es wird als Vorbedingung vorausgesetzt, dass die Methode `cn` nur für Werte $n \geq 0$ aufgerufen wird.

```java
int cn(int n) {
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return (4 * (n - 1) + 2) * cn(n - 1) / (n + 1);
}
```

Sie können im Folgenden vereinfachend annehmen, dass es keinen Überlauf in der Berechnung gibt, d. h. dass der Datentyp `int` für die Berechnung des Ergebnisses stets ausreicht.

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `cn(n)` für jedes $n \geq 0$ die $n$-te Catalan-Zahl $C_n$ berechnet, wobei

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

> **Exkurs: Fakultät**
>
> Für alle natürlichen Zahlen $n$ ist
>
> $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$$
>
> als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis $n$ definiert. Da das leere Produkt stets 1 ist, gilt
>
> $$0! = 1$$
>
> Die Fakultät lässt sich auch rekursiv definieren:
>
> $$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$
>
> Fakultäten für negative oder nicht ganze Zahlen sind nicht definiert. Es gibt aber eine Erweiterung der Fakultät auf solche Argumente [a]
>
> [a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Fakultät_(Mathematik)`

> **Exkurs: Catalan-Zahl**
>
> Die Catalan-Zahlen bilden eine Folge natürlicher Zahlen, die in vielen Problemen der Kombinatorik auftritt. Sie sind nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan benannt.
>
> Die Folge der Catalan-Zahlen $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ beginnt mit $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$

[a]

[a]https://de.wikipedia.org/wiki/Catalan-Zahl

Beim Induktionsschritt können Sie die beiden folgenden Gleichungen verwenden:

(i) $(2(n+1))! = (4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!$

(ii) $(a+2)! \cdot (n+1)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!$

**Induktionsanfang** — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{(2 \cdot 0)!}{(0+1)! \cdot 0!} \\
&= \frac{0!}{1! \cdot 0!} \\
&= \frac{1}{1 \cdot 1} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

**Induktionsvoraussetzung** — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$$

**Induktionsschritt** — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k+1)$ wahr sein muss.

### Vom Code ausgehend

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= \frac{(4 \cdot (n+1-1)+2) \cdot \mathrm{cn}(n+1-1)}{n+1+1} && \text{Java nach Mathe} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot \mathrm{cn}(n)}{n+2} && \text{addiert, subtrahiert} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{für cn(n) Formel eingesetzt} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot (2n)! \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n! \cdot (n+1)} && (n+1) \text{ multipliziert} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot (n+1) \cdot n!} && \text{umsortiert} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)+1)! \cdot (n+1)!} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
\end{aligned}
$$

### Mathematische Herangehensweise

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)+1)! \cdot (n+1)!} && n+1 \text{ in } C_n \text{ eingesetzt} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+1)!} && \text{addiert} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot (n+1) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n+1)! \cdot n!} && \text{Hilfsgleichungen verwendet} \\
&= \frac{(4n+2) \cdot (2n)!}{(n+2) \cdot (n+1)! \cdot n!} && (n+1) \text{ gekürzt} \\
&= \frac{4n+2}{n+2} \cdot C_n && \text{Catalan-Formel ersetzt} \\
&= \frac{4((n+1)-1)+2}{(n+1)+1} \cdot C_{(n+1)-1} && (n+1) \text{ verdeutlicht}
\end{aligned}
$$

(b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie, warum der Methodenaufruf `cn(n)` für jedes $n \geq 0$ terminiert.

> $T(n) = n$. Diese Funktion verringert sich bei jedem Rekursionsschritt um eins. Sie ist monoton fallend und für $T(0) = 0$ definiert. Damit ist sie eine Terminierungsfunktion für `cn(n)`.