

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Es sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl j , sodass für alle Wörter $\omega \in L$ mit $|\omega| \geq j$ (jedes Wort ω in L mit Mindestlänge j) jeweils eine Zerlegung $\omega = uvw$ existiert, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) $|v| \geq 1$ (Das Wort v ist nicht leer.)
- (b) $|uv| \leq j$ (Die beiden Wörter u und v haben zusammen höchstens die Länge j .)
- (c) Für alle $i = 0, 1, 2, \dots$ gilt $uv^i w \in L$ (Für jede natürliche Zahl (mit 0) i ist das Wort $uv^i w$ in der Sprache L)

Die kleinste Zahl j , die diese Eigenschaften erfüllt, wird Pumping-Zahl der Sprache L genannt.¹

Die einzelnen Bestandteile der Zerlegung des Wortes ω heißen Anfangsteil u , Endteil w und Schleifenteil v .²

Das Pumping-Lemma wird verwendet, um zu zeigen, dass eine Sprache nicht regulär ist (Widerspruchsbeweis).³

Beispiel $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Ich behaupte, L sei regulär.

- (a) Also gibt es eine Pumpzahl. Sie sei j .
- (b) (Wähle geschickt ein „langes“ Wort...) $a^j b^j$ ist ein Wort aus L , das sicher länger als j ist.
- (c) Da L regulär ist, muss es nach dem Pumping-Lemma auch für dieses Wort eine Zerlegung geben:

$$a^j b^j = uvw \text{ mit } |v| \geq 1 \text{ und } |uv| \leq j$$

Weil uv höchstens j lang ist, kann es im Fall von $a^j b^j$ nur aus a 's bestehen. Da v mindestens ein Zeichen enthält, ist das mindestens ein a . Pumpen führt nun zu mehr a 's als b 's und also zu einem Wort, das nicht in der Sprache ist. (Widerspruch!)⁴

⇒ Die Behauptung war falsch!

⇒ L ist nicht regulär!⁵

hier ausführlich beschrieben ⁶

¹wiki:pumping-lemma.

²<https://studyflix.de/informatik/pumping-lemma-1445>

³Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen, Seite 63.

⁴Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“.

⁵Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen, Seite 63-64.

⁶<https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws13/einftheo/einftheo-skript.pdf>

Literatur

- [1] *Theoretische Informatik – Reguläre Sprachen.*
- [2] *Wikipedia-Artikel „Pumping-Lemma“.* <https://de.wikipedia.org/wiki/Pumping-Lemma>.