

Gaußsche Summenformel

Die Gaußsche Summenformel lautet: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$A(n) : \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sie kann durch vollständige Induktion bewiesen werden. Der Induktionsanfang ergibt sich unmittelbar:

$$A(1) : \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Im Induktionsschritt ist zu zeigen, dass aus der Induktionsvoraussetzung

$$A(n) : \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

die Induktionsbehauptung

$$A(n+1) : \quad 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{für } n \geq 1$$

folgt. Dies gelingt folgendermaßen (Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.):

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \text{(Hauptnenner 2)} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && \text{(Ausklammern von } (n+1)) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{(Umdrehen nach Kommutativgesetz)} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && \text{(mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n) \end{aligned}$$

Schließlich der Induktionsschluss: Damit ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq 1$ bewiesen.

Summe ungerader Zahlen (Maurolicus 1575)

Die schrittweise Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen legt die Vermutung nahe: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ ist gleich dem Quadrat von n :

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\1 + 3 &= 4 \\1 + 3 + 5 &= 9 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 16\end{aligned}$$

Der zu beweisende allgemeine Satz lautet: $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$A(1) : \quad \sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$A(n) : \quad \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. _____

$$A(n + 1) : \quad \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2$$

Beweis

Er ergibt sich über folgende Gleichungskette, bei der in der zweiten Umformung die Induktionsvoraussetzung angewandt wird:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \color{red}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)} + (2(n + 1) - 1) \quad \text{Formel für die letzte Zahl ist: } 2n - 1, n \text{ ist hier } n + 1$$

$$= \sum_{i=1}^n \color{red}{(2i - 1)} + (2(n + 1) - 1)$$

andere Schreibweise mit dem Summenzeichen

$$= \color{red}{n^2} + 2(n + 1) - 1$$

Ersetzen des Summenzeichens mit dem Ergebnis der Formel
ausmultiplizieren

$$= \color{red}{n^2} + 2n + 2 - 1$$

$$= \color{red}{n^2} + 2n + 1$$

mit erster Binomischer Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= (n + 1)^2$$

(Die Induktionsvoraussetzung ist rot markiert.)