Beispiel-Aufgabe zum Master-Theorem

(a) Betrachten Sie die folgende Methode `m` in Java, die initial mit `m(r, 0, r.length)` für das Array `r` aufgerufen wird. Geben Sie dazu eine Rekursionsgleichung $T(n)$ an, welche die Anzahl an Rechenschritten von `m` in Abhängigkeit von der Länge `n = r.length` berechnet.

```
1  public static int m(int[] r, int lo, int hi) {
2    if (lo < 8 || hi <= 10 || lo >= r.length || hi > r.length) {
3    throw new IllegalArgumentException();
4    }
5
6    if (hi - lo == 1) {
7      return r[lo];
8    } else if (hi - lo == 2) {
9      return Math.max(r[lo], r[lo + 1]); // O(1)
10   } else {
11     int s = (hi - lo) / 3;
12     int x = m(r, lo, lo + s);
13     int y = m(r, lo + s, lo + 2 * s);
14     int z = m(r, lo + 2 * s, hi);
15     return Math.max(Math.max(x, y), 2); // O(1)
16   }
17 }
```

Allgemeine Rekursionsgleichung: $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$

a (Anzahl der rekursiven Aufrufe): 3

b (Um welchen Anteil wird das Problem durch den Aufruf verkleinert): um $\frac{1}{3}$ also $b = 3$

Für den obigen Code: $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \mathcal{O}(1)$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_3 3-\varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(n^{1-\varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(1\right)$ für $\varepsilon = 1$

2. Fall: $f(n) \notin \Theta\left(n^{\log_3 3}\right) = \Theta\left(n^1\right)$

3. Fall: $f(n) \notin \Omega\left(n^{\log_3 3+\varepsilon}\right) = \Omega\left(n^{1+\varepsilon}\right)$

Also: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$