

Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2019 / Herbst

Thema 1 / Aufgabe 6

(Sortieren von O-Klassen)

Stichwörter: Algorithmische Komplexität (O-Notation), Master-Theorem

- (a) Sortieren Sie die unten angegebenen Funktionen der O-Klassen $\mathcal{O}(a(n))$, $\mathcal{O}(b(n))$, $\mathcal{O}(c(n))$, $\mathcal{O}(d(n))$ und $\mathcal{O}(e(n))$ bezüglich ihrer Teilmengenbeziehungen. Nutzen Sie ausschließlich die echte Teilmenge \subset sowie die Gleichheit $=$ für die Beziehung zwischen den Mengen. Folgendes Beispiel illustriert diese Schreibweise für einige Funktionen f_1 bis f_5 (diese haben nichts mit den unten angegebenen Funktionen zu tun):¹

$$\mathcal{O}(f_4(n)) \subset \mathcal{O}(f_3(n)) = \mathcal{O}(f_5(n)) \subset \mathcal{O}(f_1(n)) = \mathcal{O}(f_2(n))$$

Die angegebenen Beziehungen müssen weder bewiesen noch begründet werden.

- $a(n) = n^2 \cdot \log_2(n) + 42$
- $b(n) = 2^n + n^4$
- $c(n) = 2^{2 \cdot n}$
- $d(n) = 2^{n+3}$
- $e(n) = \sqrt{n^5}$

Lösungsvorschlag

$$\begin{array}{ll} a(n) = n^2 \cdot \log_2(n) + 42 & = n \\ b(n) = 2^n + n^4 & = 2^n \\ c(n) = 2^{2 \cdot n} & = 2^{2 \cdot n} \\ d(n) = 2^{n+3} & = 2^n \\ e(n) = \sqrt{n^5} & \end{array}$$

$$\mathcal{O}(a(n)) \subset \mathcal{O}(e(n)) \subset \mathcal{O}(b(n)) = \mathcal{O}(d(n)) \subset \mathcal{O}(c(n))$$

$$\mathcal{O}(n^2 \cdot \log_2(n) + 42) \subset \mathcal{O}(\sqrt{n^5}) \subset \mathcal{O}(2^n + n^4) = \mathcal{O}(2^{n+3}) \subset \mathcal{O}(2^{2 \cdot n})$$

- (b) Beweisen Sie die folgenden Aussagen formal nach den Definitionen der O-Notation oder widerlegen Sie sie.

¹[http://www.s-inf.de/Skripte/DaStru.2012-SS-Katoen.\(KK\).Klausur1MitLoesung.pdf](http://www.s-inf.de/Skripte/DaStru.2012-SS-Katoen.(KK).Klausur1MitLoesung.pdf)

(i) $\mathcal{O}(n \cdot \log_2 n) \subseteq \mathcal{O}(n \cdot (\log_2 n)^2)$

Lösungsvorschlag

Die Aussage gilt. Für $n \geq 16$ haben wir

$$(\log_2 n)^2 \leq n \Leftrightarrow \log_2 n \leq \sqrt{n}$$

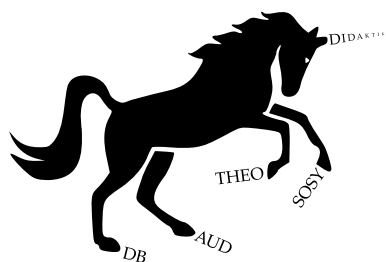
und dies ist eine wahre Aussage für $n \geq 16$. Also gilt die Aussage mit $n_0 = 16$ und $c = 1$.

(ii) $2^{(n+1)} \in \mathcal{O}(n \cdot \log_2 n)$

(c) Bestimmen Sie eine asymptotische Lösung (in Θ -Schreibweise) für die folgende Rekursionsgleichung:

(i) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

(ii) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}n^2 + n$



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/66115/2019/09/Thema-1/Aufgabe-6.tex>