66115 / 2016 / Frühjahr

Thema 2 / Aufgabe 7

(*Sortieren mit Quicksort*)

Stichwörter: Quicksort

(a) Gegeben ist die Ausgabe der Methode **Partition** (s. Pseudocode), rekonstruieren Sie die Eingabe.

Konkret sollen Sie das Array A = (_, _, 1, _, _) so vervollständigen, dass der Aufruf Partition(A, 1, 5) die Zahl 3 zurückgibt und nach dem Aufruf gilt, dass A = (1, 2, 3, 4, 5) ist.

Geben Sie A nach jedem Durchgang der for-Schleife in **Partition** an.

Lösungsvorschlag

```
 2  4  1  5  3  Eingabe
 2  4  1  5  3  zerlege
 2  4  1  5  3* markiere (i 4)
>2< 4  1  5  3  vertausche (i 0<>0)
 2 >4  1< 5  3  vertausche (i 1<>2)
 2  1 >4  5  3< vertausche (i 2<>4)
 2  1           zerlege
 2  1*          markiere (i 1)
>2  1<          vertausche (i 0<>1)
          5  4  zerlege
          5  4* markiere (i 4)
         >5  4< vertausche (i 3<>4)
 1  2  3  4  5  Ausgabe
```

(b) Beweisen Sie die Korrektheit von **Partition** (z. B. mittels einer Schleifeninvarianten)!

(c) Geben Sie für jede natürliche Zahl n eine Instanz I_n, der Länge n an, so dass QuickSort(I_n) $\Omega(n^2)$ Zeit benötigt. Begründen Sie Ihre Behauptung.

Lösungsvorschlag

$I_n = 1, 2, 3, \ldots, n$

Die Methode **Partition** wird n mal aufgerufen, weil bei jedem Aufruf der Methode nur eine Zahl, nämlich die größte Zahl, abgespalten wird.

- Partition(A, 1, n)
- Partition(A, 1, $n-1$)
- Partition(A, 1, $n-2$)
- Partition(A, 1, ...)
- Partition(A, 1, 1)

In der For-Schleife der Methode Partition wird bei jeder Wiederholung ein Vertauschvorgang durchgeführt (Die Zahlen werden mit sich selbst getauscht.)

```
 1  2  3  4  5  6  7  zerlege
 1  2  3  4  5  6  7* markiere (i 6)
>1< 2  3  4  5  6  7  vertausche (i 0<>0)
 1 >2< 3  4  5  6  7  vertausche (i 1<>1)
 1  2 >3< 4  5  6  7  vertausche (i 2<>2)
 1  2  3 >4< 5  6  7  vertausche (i 3<>3)
 1  2  3  4 >5< 6  7  vertausche (i 4<>4)
 1  2  3  4  5 >6< 7  vertausche (i 5<>5)
 1  2  3  4  5  6 >7< vertausche (i 6<>6)
 1  2  3  4  5  6     zerlege
 1  2  3  4  5  6*    markiere (i 5)
>1< 2  3  4  5  6     vertausche (i 0<>0)
 1 >2< 3  4  5  6     vertausche (i 1<>1)
 1  2 >3< 4  5  6     vertausche (i 2<>2)
 1  2  3 >4< 5  6     vertausche (i 3<>3)
 1  2  3  4 >5< 6     vertausche (i 4<>4)
 1  2  3  4  5 >6<    vertausche (i 5<>5)
 1  2  3  4  5        zerlege
 1  2  3  4  5*       markiere (i 4)
>1< 2  3  4  5        vertausche (i 0<>0)
 1 >2< 3  4  5        vertausche (i 1<>1)
 1  2 >3< 4  5        vertausche (i 2<>2)
 1  2  3 >4< 5        vertausche (i 3<>3)
 1  2  3  4 >5<       vertausche (i 4<>4)
 1  2  3  4           zerlege
 1  2  3  4*          markiere (i 3)
>1< 2  3  4           vertausche (i 0<>0)
 1 >2< 3  4           vertausche (i 1<>1)
 1  2 >3< 4           vertausche (i 2<>2)
 1  2  3 >4<          vertausche (i 3<>3)
 1  2  3              zerlege
 1  2  3*             markiere (i 2)
>1< 2  3              vertausche (i 0<>0)
 1 >2< 3              vertausche (i 1<>1)
 1  2 >3<             vertausche (i 2<>2)
 1  2                 zerlege
 1  2*                markiere (i 1)
>1< 2                 vertausche (i 0<>0)
 1 >2<                vertausche (i 1<>1)
```

(d) Was müsste Partition (in Linearzeit) leisten, damit QuickSort Instanzen der Länge n in $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ Zeit sortiert? Zeigen Sie, dass Partition mit der von Ihnen geforderten Eigenschaft zur gewünschten Laufzeit von QuickSort führt.

Exkurs: Master-Theorem

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

$a =$ Anzahl der rekursiven Aufrufe, Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion ($a \geq 1$).

$\frac{1}{b} =$ Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird, Anteil an der Verkleinerung des Problems ($b > 1$).

$f(n) =$ Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen. Eine von $T(n)$ unabhängige und nicht negative Funktion.

Dann gilt:

1. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$

2. Fall: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

3. Fall: $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

Lösungsvorschlag

Die Methode **Partition** müsste die Instanzen der Länge n in zwei gleich große Teile spalten ($\frac{n-1}{2}$).

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

2

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

n

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$:

für $\varepsilon = 4$:

$f(n) = n \notin \mathcal{O}\left(n^{\log_2 2 - \varepsilon}\right)$

2. Fall: $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:

$f(n) = n \in \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) = \Theta(n)$

3. Fall: $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\varepsilon}\right)$:

$f(n) = n \notin \Omega\left(n^{\log_2 2+\varepsilon}\right)$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 2} \cdot \log n\right) = \Theta(n \cdot \log n)$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

Funktion Quicksort(A, $l = 1$, $r = A$.length)

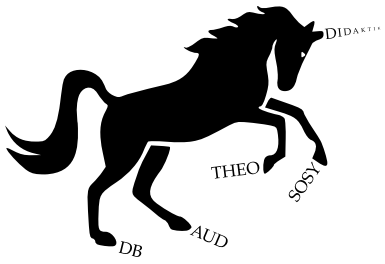
```
if l < r then
    m = Partition(A, l, r);
    Quicksort(A, l, m − 1);
    Quicksort(A, m + 1, r);
end
```

Funktion Partition(A, int l, int r)

```
pivot = A[r];
i = l;
for j = l to r − 1 do
    if A[j] ≤ pivot then
        Swap(A, i, j);
        i = i + l;
    end
end
```

Funktion Swap(A, int l, int r)

```
temp = A[i];
A[i] = A[y];
A[j] = temp;
```



Die Bschlangaul-Sammlung
Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.

Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht alleine! Das ist ein Community-Projekt. Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net.Der TEX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: `https://github.com/hbschlang/lehramt-informatik/blob/main/Staatsexamen/66115/2016/09/Thema-2/Aufgabe-7.tex`