Aufgabe 1: „Rekursion und Induktion“

(a) Gegeben sei die Methode `BigInteger lfBig(int n)` zur Berechnung der eingeschränkten Linksfakultät:

$$!n := \begin{cases} n \cdot !(n-1) - (n-1) \cdot !(n-2) & \text{falls } 1 < n < 32767 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

```java
import java.math.BigInteger;
import static java.math.BigInteger.ZERO;
import static java.math.BigInteger.ONE;

public class LeftFactorial {

  BigInteger sub(BigInteger a, BigInteger b) {
    return a.subtract(b);
  }

  BigInteger mul(BigInteger a, BigInteger b) {
    return a.multiply(b);
  }

  BigInteger mul(int a, BigInteger b) {
    return mul(BigInteger.valueOf(a), b);
  }

  // returns the left factorial !n
  BigInteger lfBig(int n) {
    if (n <= 0 || n >= Short.MAX_VALUE) {
      return ZERO;
    } else if (n == 1) {
      return ONE;
    } else {
      return sub(mul(n, lfBig(n - 1)), mul(n - 1, lfBig(n - 2)));
    }
  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2014/fruehjahr/LeftFactorial.java`

Implementieren Sie unter Verwendung des Konzeptes der *dynamischen Programmierung* die Methode `BigInteger dp(int n)`, die jede $!n$ auch bei mehrfachem Aufrufen mit dem gleichen Parameter höchstens einmal rekursiv berechnet. Sie dürfen der Klasse `LeftFactorial` genau ein Attribut beliebigen Datentyps hinzufügen und die in `lfBig(int)` verwendeten Methoden und Konstanten ebenfalls nutzen.

> Wir führen ein Attribut mit dem Namen `store` ein und erzeugen ein Feld vom Typ `BigInteger` mit der Länge $n+1$. Die Länge des Feld $n+1$ hat den Vorteil, dass nicht ständig $n-1$ verwendet werden muss, um den gewünschten Wert zu erhalten.
>
> In der untenstehenden Implementation gibt es zwei Methoden mit dem Namen `dp`. Die untenstehende Methode ist nur eine Hüllmethode, mit der nach außen hin die Berechnung gestartet und das `store`-Feld neu gesetzt wird. So ist es möglich `dp()` mehrmals hintereinan-

der mit verschiedenen Werten aufzurufen (siehe `main()`-Methode).

```java
BigInteger[] store;

BigInteger dp(int n, BigInteger[] store) {
  if (n > 1 && store[n] != null) {
    return store[n];
  }
  if (n <= 0 || n >= Short.MAX_VALUE) {
    return ZERO;
  } else if (n == 1) {
    return ONE;
  } else {
    BigInteger result = sub(mul(n, dp(n - 1, store)), mul(n - 1,
      ↪  dp(n - 2, store)));
    store[n] = result;
    return result;
  }
}

BigInteger dp(int n) {
  store = new BigInteger[n + 1];
  return dp(n, store);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen:
`src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2014/fruehjahr/LeftFactorial.java`

(b) Betrachten Sie nun die Methode `lfLong(int)` zur Berechnung der vorangehend definierten Linksfakultät ohne obere Schranke. Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Datentyp `long` unbeschränkt ist und daher kein Überlauf auftritt.

```java
long lfLong(int n) {
  if (n <= 0) {
    return 0;
  } else if (n == 1) {
    return 1;
  } else {
    return n * lfLong(n - 1) - (n - 1) * lfLong(n - 2);
  }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: `src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2014/fruehjahr/LeftFactorial.java`

Beweisen Sie *formal* mittels *vollständiger Induktion*:

$$\forall n \geq 0 : \text{lfLong}(n) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} k!$$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. –

$$n = 1 \Rightarrow \text{lfLong}(1) = 1 = \sum_{k=0}^{n-1} k! = 0! = 1$$

$$
\begin{aligned}
n = 2 \Rightarrow & \mathrm{lfLong}(2) \\
& = (n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k! - n \cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
& = 2 \cdot \mathrm{lfLong}(1) - 1 \cdot \mathrm{lfLong}(0) \\
& = 2 \\
& = \sum_{k=0}^{1} k! \\
& = 1! + 0! \\
& = 1 + 1 \\
& = 2
\end{aligned}
$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. ———————————————

$$\mathrm{lfLong}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k!$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k+1)$ wahr sein muss. ———————————————

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lfLong}(n+1) &= (n+1)\cdot \mathrm{lfLong}(n) - n\cdot \mathrm{lfLong}(n-1) \\
&= (n+1)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} k! - n\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)\cdot \left((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!\right) - n\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)! + (n+1)\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! - n\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)!\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! + n\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! - n\cdot \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= (n+1)(n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= n\cdot (n-1)! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! \\
&= n\cdot (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-1} k! \\
&= n! + \sum_{k=0}^{n-1} k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} k! \\
&= \sum_{k=0}^{(n+1)-1} k!
\end{aligned}
$$

Komplette Klasse LeftFactorial

```
3  import java.math.BigInteger;
4  import static java.math.BigInteger.ZERO;
5  import static java.math.BigInteger.ONE;
6
7  public class LeftFactorial {
8
9    BigInteger sub(BigInteger a, BigInteger b) {
10     return a.subtract(b);
11   }
12
13   BigInteger mul(BigInteger a, BigInteger b) {
14     return a.multiply(b);
15   }
16
17   BigInteger mul(int a, BigInteger b) {
18     return mul(BigInteger.valueOf(a), b);
19   }
20
```

```
21    // returns the left factorial !n
22    BigInteger lfBig(int n) {
23      if (n <= 0 || n >= Short.MAX_VALUE) {
24        return ZERO;
25      } else if (n == 1) {
26        return ONE;
27      } else {
28        return sub(mul(n, lfBig(n - 1)), mul(n - 1, lfBig(n - 2)));
29      }
30    }
31
32    BigInteger[] store;
33
34    BigInteger dp(int n, BigInteger[] store) {
35      if (n > 1 && store[n] != null) {
36        return store[n];
37      }
38      if (n <= 0 || n >= Short.MAX_VALUE) {
39        return ZERO;
40      } else if (n == 1) {
41        return ONE;
42      } else {
43        BigInteger result = sub(mul(n, dp(n - 1, store)), mul(n - 1,
          ↪  dp(n - 2, store)));
44        store[n] = result;
45        return result;
46      }
47    }
48
49    BigInteger dp(int n) {
50      store = new BigInteger[n + 1];
51      return dp(n, store);
52    }
53
54    long lfLong(int n) {
55      if (n <= 0) {
56        return 0;
57      } else if (n == 1) {
58        return 1;
59      } else {
60        return n * lfLong(n - 1) - (n - 1) * lfLong(n - 2);
61      }
62    }
63
64    public static void main(String[] args) {
65      LeftFactorial lf = new LeftFactorial();
66
67      for (int i = 0; i < 15; i++) {
68        System.out.println(lf.lfBig(i));
69      }
70
71      for (int i = 0; i < 15; i++) {
72        System.out.println(lf.dp(i));
73      }
74
75      for (int i = 0; i < 15; i++) {
76        System.out.println(lf.lfLong(i));
77      }
78    }
79  }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen:
`src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_66115/jahr_2014/fruehjahr/LeftFactorial.java`