

Aufgabe 3

(a) 1.

Primitiv rekursive Funktionen

(i) a) Zeigen Sie, dass die folgendermaßen definierte Funktion $if: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

sonst

(ii) b) Wir nehmen eine primitiv rekursive Funktion $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an und definieren $g(n)$ als die Funktion, welche die größte Zahl $i < n$ zurückliefert, für die $p(i) = 0$ gilt. Falls kein solches i existiert, soll $g(n) = 0$ gelten:

$$a(n) = \max \{ i < n \mid p(i) = 0 \} \cup \{0\}$$

$$if(b, x, y) = \begin{cases} x & \text{falls } b=0 \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist. (Sie dürfen obige Funktion if als primitiv rekursiv voraussetzen.)

(b) Sei $\langle a, b \rangle = ab$, $c \cup d = cd$, $L^* = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(i) a) Beschreiben Sie eine Turingmaschine, welche die Sprache Z entscheidet. Eine textuelle Beschreibung der Konstruktionsidee ist ausreichend.

(ii) b) Geben Sie Zeit- und Speicherkomplexität (abhängig von der Länge der Eingabe) Ihrer Turingmaschine an.

(c) Sei $\& = 0, 1$. Jedes $w \in L^*$ kodiert eine Turingmaschine M_w . Die von M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit g_w .

(i) a) Warum ist $w \in L^* \mid \exists x: \langle w, x \rangle = xx$ nicht entscheidbar?

(ii) b) Warum ist $w \in L^* \mid \exists x: w = xx$ entscheidbar?