

## Pumping-Lemma

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$- L = \{ a^n b^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Annahme:  $L$  ist kontextfrei.

$$\forall \omega \in L: \omega = uvwxy$$

$$j \in \mathbb{N}: |\omega| \geq j$$

$$\omega = a^j b^j c^{2j}: |\omega| = 4j > j$$

$$\text{Damit gilt: } |vwx| \leq j, |vx| \geq 1$$

Zu zeigen: Keine Möglichkeit der Zerlegung, damit  $\omega' \in L$

**1. Fall**  $vwx$  enthält nur  $a$ 's

o. E. d. A. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) stecken alle  $a$ 's in der Zerlegung  $vwx$ , d. h.  $u$  ist leer

$$u : \varepsilon$$

$$v : a^l$$

$$w : a^{j-(l+m)}$$

$$x : a^m$$

$$y : b \dots bc \dots c$$

$$v^2wx^2y$$

$$a^{2l}a^{j-(l+m)}a^{2m}b^jc^{2j} =$$

$$\text{Nebenrechnung: } 2l + j - (l + m) + 2m = j + l + m > j, \text{ da } |vx| \geq 1 \rightarrow l + m \geq 1$$

$$\Rightarrow \omega' = uv^2wx^2y \notin L$$

**2. Fall**  $vwx$  enthalten  $a$ 's und  $b$ 's

$$\text{o. E. d. A. } |v|_a = |x|_b$$

$$u: a^p \ v: a^l \ w: a^{j-(p+l)}b^{j-(l+r)} \ x: b^l \ y: b^r c^{2j}$$

$$\Rightarrow uv^0wx^0v$$

Nebenrechnung:

$$a\text{'s: } p + j - (l + p) = j - l$$

$$b\text{'s: } j - (l + r) = j - l$$

$$\text{ist falsch, da } j - l \text{ echt kleiner ist, da } |vx| \geq 1 \rightarrow l \geq 1$$

$$\Rightarrow \omega' \notin L$$

**3. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's

analog zu Fall 1

**4. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's und  $c$ 's

analog zu Fall 2

**5. Fall**  $vwx$  enthält nur  $c$ 's

analog zu Fall 1

$\Rightarrow$  Es gibt keine Zerlegung, sodass  $\forall i \in \mathbb{N}_0$   
 $\Rightarrow$  Annahme ist falsch  
 $\Rightarrow L$  ist nicht kontextfrei

-  $L = \{ a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Annahme:  $L$  kontextfrei

$\Rightarrow$  Pumping-Lemma:  $j \in \mathbb{N}: |w| \geq j$

$$\omega = a^j b^{j^2}$$

$$j + j^2 > j$$

**1. Fall**  $vwx$  enthält nur  $a$ 's

$\Rightarrow$  ungleich viele  $a$ 's wie  $b$ 's als Quadrat

$\Rightarrow \omega' \notin E$

**2. Fall**  $vwx$  enthält nur  $b$ 's

$\Rightarrow$  analog zu Fall 1

$\Rightarrow \omega' \notin E$

**3. Fall**  $vwx$  enthält  $a$ 's und  $b$ 's

o. E. d. A.  $v$  nur  $a$ 's ;  $x$  nur  $b$ 's

$$u: a^{j-(l+m)}$$

$$v: a^l$$

$$w: a^m b^n$$

$$x: b^{l^2}$$

$$y: b^{j^2-(n+l^2)}$$

$$\Rightarrow uv^0wx^0y = \omega'$$

$$a: j - (l + m) + 0 \cdot l + m = j - l$$

$$b: n - 0 \cdot l^2 + j^2 - (n + l^2) = j^2 - l^2 = (j - l)(j + l) \neq (j - l)(j - l)$$

$\Rightarrow \omega' \in L$