

Aufgabe zum Hashing [Modulo 11 und 17]

- (a) Ist $h(k) = k^2 \bmod 11$ eine gut gewählte Hashfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Berechnen Sie zunächst $h(k)$ für $0 \leq k < 11$. Überlegen Sie dann, welche Werte $h(k')$ für $k' = a \cdot 11 + k$ mit $a > 0$ und $0 \leq k < 11$ annehmen kann.

Nein, h ist keine gute Hashfunktion. Betrachten wir zunächst die Wertetabelle von h für $0 \leq k < 11$. Wir erhalten

k	Nebenrechnung	$h(k)$
0	$0^2 \bmod 11 = 0 \bmod 11$	0
1	$1^2 \bmod 11 = 1 \bmod 11$	1
2	$2^2 \bmod 11 = 4 \bmod 11$	4
3	$3^2 \bmod 11 = 9 \bmod 11$	9
4	$4^2 \bmod 11 = 16 \bmod 11$	5
5	$5^2 \bmod 11 = 25 \bmod 11$	3
6	$6^2 \bmod 11 = 36 \bmod 11$	3
7	$7^2 \bmod 11 = 49 \bmod 11$	5
8	$8^2 \bmod 11 = 64 \bmod 11$	9
9	$9^2 \bmod 11 = 81 \bmod 11$	4
10	$10^2 \bmod 11 = 100 \bmod 11$	1

Wir sehen, dass nie die Werte 2, 6, 7, 8 und 10 eingenommen werden. Man könnte nun noch hoffen, dass das vielleicht für irgendein größeres k der Fall ist, dem ist jedoch nicht so. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass für ein beliebiges $k' = a \cdot 11 + k$ mit $a > 0$ und $0 \leq k < 11$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 h(k') &= (k')^2 \bmod 11 \\
 &= (a \cdot 11 + k)^2 \bmod 11 \\
 &= (a^2 \cdot 11^2 + 2ak \cdot 11 + k^2) \bmod 11 \\
 &= (k^2) \bmod 11 \\
 &= h(k)
 \end{aligned}$$

Somit haben wir die Berechnung des Hashwertes für ein beliebiges k' auf die Berechnung des Hashwertes für ein $k < 11$ zurückgeführt, was impliziert, dass kein Schlüssel jemals auf etwas anderes als 0, 1, 3, 4, 5 oder 9 abgebildet werden kann.

- (b) Die Schlüssel 23, 57, 26, 6, 77, 43, 74, 60, 9, 91 sollen in dieser Reihenfolge mit der Hashfunktion $h(k) = k \bmod 17$ in eine Hashtabelle der Länge 17 eingefügt werden.

Exkurs: Sondieren

separate Verkettung Kollisionsauflösung durch Verkettung (separate chaining): Jedes Bucket speichert mit Hilfe einer dynamischen Datenstruktur (Liste, Baum, weitere Streutabelle, ...) alle Elemente mit dem entsprechenden Hashwert.

lineares Sondieren es wird um ein konstantes Intervall verschoben nach einer freien Stelle gesucht. Meistens wird die Intervallgröße auf 1 festgelegt.

quadratisches Sondieren Nach jedem erfolglosen Suchschritt wird das Intervall quadriert.

- (i) Verwenden Sie separate Verkettung zur Kollisionsauflösung.

Nebenrechnung:

$$17 \cdot 1 = 17$$

$$17 \cdot 2 = 34$$

$$17 \cdot 3 = 51$$

$$17 \cdot 4 = 68$$

$$17 \cdot 5 = 85$$

Modulo-Berechnung der gegebenen Zahlen:

$$23 \bmod 17 = 6 \text{ da } 23 : 17 = 1, \text{ Rest } 6 \text{ da } 23 = 1 \cdot 17 + 6$$

$$57 \bmod 17 = 57 - 3 \cdot 17 = 57 - 51 = 6$$

$$26 \bmod 17 = 26 - 17 = 9$$

$$6 \bmod 17 = 6 - 0 \cdot 17 = 6$$

$$77 \bmod 17 = 77 - 4 \cdot 17 = 77 - 68 = 9$$

$$43 \bmod 17 = 9$$

$$74 \bmod 17 = 6$$

$$60 \bmod 17 = 9$$

$$9 \bmod 17 = 9$$

$$91 \bmod 17 = 6$$

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel							23			26							
							57			77							
							6			43							
							74			60							
							91			9							

(ii) Verwenden Sie lineares Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \bmod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim linearen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) - i) \bmod 17$$

Mit Schrittweite -1 ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 5
26	9
6	6 5 4
77	9 8
43	9 8 7
74	6 5 4 3
60	9 8 7 6 5 4 3 2
9	9 8 7 6 5 4 3 2 1
91	6 5 4 3 2 1

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	91	9	60	74	6	57	23	43	77	26							

(iii) Verwenden Sie quadratisches Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \bmod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim quadratischen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) + i^2) \bmod 17$$

Am Beispiel von zwei Schlüsseln werden die Sondierungsfolgen berechnet:

$$h'(23) = 6$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(23,0) = (h'(23) + 0^2) \bmod 17 = (6 + 0) \bmod 17 = 6 \bmod 17 = 6$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(23,1) = (h'(23) + 1^2) \bmod 17 = (6 + 1) \bmod 17 = 7 \bmod 17 = 7$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(23,2) = (h'(23) + 2^2) \bmod 17 = (6 + 4) \bmod 17 = 10 \bmod 17 = 10$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(23,3) = (h'(23) + 3^2) \bmod 17 = (6 + 9) \bmod 17 = 15 \bmod 17 = 15$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(23,4) = (h'(23) + 4^2) \bmod 17 = (6 + 16) \bmod 17 = 22 \bmod 17 = 5$$

$$h'(26) = 9$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(26,0) = (h'(26) + 0^2) \bmod 17 = (9 + 0) \bmod 17 = 9 \bmod 17 = 9$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(26,1) = (h'(26) + 1^2) \bmod 17 = (9 + 1) \bmod 17 = 10 \bmod 17 = 10$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(26,2) = (h'(26) + 2^2) \bmod 17 = (9 + 4) \bmod 17 = 13 \bmod 17 = 13$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(26,3) = (h'(26) + 3^2) \bmod 17 = (9 + 9) \bmod 17 = 18 \bmod 17 = 1$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(26,4) = (h'(26) + 4^2) \bmod 17 = (9 + 16) \bmod 17 = 25 \bmod 17 = 8$$

vi. Sondierungsfolge:

$$h(26,5) = (h'(26) + 5^2) \bmod 17 = (9 + 25) \bmod 17 = 34 \bmod 17 = 0$$

Es ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 7
26	9
6	6 7 10
77	9 10 13
43	9 10 13 1
74	6 7 10 15
60	9 10 13 1 8
9	9 10 13 1 8 0
91	6 7 10 15 5

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	9	43				91	23	57	60	26	6			77		74	

Github: Module/30_AUD/80_Baeume/60_Hashing/Aufgabe_Modulo-11-17.tex