

## Aufgabe 1: „Formale Verifikation“

Gegeben sei folgende Methode zur Berechnung der Anzahl der notwendigen Züge beim Spiel „Die Türme von Hanoi“:

```
4  int hanoi(int nr, char from, char to) {
5      char free = (char) ('A' + 'B' + 'C' - from - to);
6      if (nr > 0) {
7          int moves = 1;
8          moves += hanoi(nr - 1, from, free);
9          System.out.println("Move piece nr. " + nr + " from " + from + " to " + to);
10         moves += hanoi(nr - 1, free, to);
11         return moves;
12     } else {
13         return 0;
14     }
15 }
```

- (a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion, dass zum Umlegen von  $k$  Scheiben (z. B. vom Turm A zum Turm C) insgesamt  $2^k - 1$  Schritte notwendig sind, also dass für  $k \geq 0$  folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Zu zeigen:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

**Induktionsanfang** — Beweise, dass  $A(1)$  eine wahre Aussage ist. —

$$k = 0$$

$$\text{hanoi}(0, 'A', 'C') = 0$$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

**Induktionsvoraussetzung** — Die Aussage  $A(k)$  ist wahr für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ . —

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

**Induktionsschritt** — Beweise, dass wenn  $A(n = k)$  wahr ist, auch  $A(n = k + 1)$  wahr sein muss. —

$$k \rightarrow k + 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{hanoi}(k+1, 'A', 'C') &= 1 + \text{hanoi}(k, 'A', 'B') + \text{hanoi}(k, 'B', 'C') \\
 &= 1 + 2^k - 1 + 2^k - 1 \\
 &= 2 \cdot 2^k - 1 \\
 &= 2^{k+1} - 1
 \end{aligned}$$

- (b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie kurz Ihre Wahl!

Betrachte die Argumentenfolge  $k, k-1, k-2, \dots, 0$ .

$\Rightarrow$  Terminierungsfunktion:  $T(k) = k$

Nachweis für ganzzahlige  $k \geq 0$ :

- $T(k)$  ist auf der Folge der Argumente streng monoton fallend bei jedem Rekursionsschritt.
- Bei der impliziten Annahme  $k$  ist ganzzahlig und  $k \geq 0$  ist  $T(k)$  nach unten durch 0 beschränkt.