

Einzelprüfung „Theoretische Informatik / Algorithmen (vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 66115 / 2019 / Herbst

Thema 2 / Aufgabe 6

(Mastertheorem)

Stichwörter: Master-Theorem

Der Hauptsatz der Laufzeitfunktionen ist bekanntlich folgendermaßen definiert:

1. Fall: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

falls $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$

2. Fall: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$

falls $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

3. Fall: $T(n) \in \Theta(f(n))$

falls $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

Bestimmen und begründen Sie formal mit Hilfe dieses Satzes welche Komplexität folgende Laufzeitfunktionen haben.

(a) $T(n) = 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + 5n^2$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

8

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{2}$ also $b = 2$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$5n^2$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + 5n^2$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

für $\varepsilon = 4$:

$$f(n) = 5n^2 \in \mathcal{O}(n^{\log_2 8 - 4}) = \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) = \mathcal{O}(n^2)$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

$$f(n) = 5n^2 \notin \Theta(n^{\log_2 8}) = \Theta(n^3)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}(n^{\log_2 8 + \varepsilon})$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha

(b) $T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 5n^2$

Lösungsvorschlag

Allgemeine Rekursionsgleichung:

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Anzahl der rekursiven Aufrufe (a):

9

Anteil Verkleinerung des Problems (b):

um $\frac{1}{3}$ also $b = 3$

Laufzeit der rekursiven Funktion ($f(n)$):

$$5n^2$$

Ergibt folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + 5n^2$$

1. Fall: $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

$$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}(n^{\log_3 9 - \varepsilon}) \text{ für } \varepsilon > 0$$

2. Fall: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:

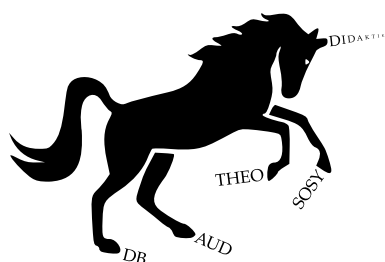
$$f(n) = 5n^2 \in \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$$

3. Fall: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$:

$$f(n) = 5n^2 \notin \mathcal{O}(n^{\log_3 9 + \varepsilon}) \text{ für } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log n)$$

Berechne die Rekursionsgleichung auf WolframAlpha: WolframAlpha



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangauland Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/66115/2019/09/Thema-2/Aufgabe-6.tex>