Aufgabe 1: „Formale Verifikation“

Gegeben sei folgende Methode zur Berechnung der Anzahl der notwendigen Züge beim Spiel *„Die Türme von Hanoi“*:

```java
int hanoi(int nr, char from, char to) {
  char free = (char) ('A' + 'B' + 'C' - from - to);
  if (nr > 0) {
    int moves = 1;
    moves += hanoi(nr - 1, from, free);
    System.out.println("Move piece nr. " + nr + " from " + from + " to " + to);
    moves += hanoi(nr - 1, free, to);
    return moves;
  } else {
    return 0;
  }
}
```

(a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion, dass zum Umlegen von k Scheiben (z. B. vom Turm A zum Turm C) insgesamt $2^k - 1$ Schritte notwendig sind, also dass für $k \geq 0$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Zu zeigen:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

I. A.: $k = 0$

$$\text{hanoi}(0, 'A', 'C') = 0$$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

I. V.:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

I. S.: $k \to k + 1$

$$\begin{aligned}
\text{hanoi}(k+1, 'A', 'C') &= 1 + \text{hanoi}(k, 'A', 'B') + \text{hanoi}(k, 'B', 'C') \\
&= 1 + 2^k - 1 + 2^k - 1 \\
&= 2 \cdot 2^k - 1 \\
&= 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

(b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie kurz Ihre Wahl!

Betrachte die Argumentenfolge $k, k-1, k-2, \ldots, 0$.

$\Rightarrow$ Terminierungsfunktion: $T(k) = k$

Nachweis für ganzzahlige $k \geq 0$:

- $T(k)$ ist auf der Folge der Argumente streng monoton fallend bei jedem Rekursionsschritt.
- Bei der impliziten Annahme k ist ganzzahlig und $k \geq 0$ ist $T(k)$ nach unten durch 0 beschränkt.