

Gaußsche Summenformel

(Gaußsche Summenformel)

Stichwörter: Vollständige Induktion

Gegeben sei folgende rekursive Methodendeklaration in der Sprache Java. Es wird als Vorbedingung vorausgesetzt, dass die Methode `sum` nur für Werte $n \geq 0$ aufgerufen wird.

```
public static int sum(int n) {
    if (n <= 0) {
        return 0;
    }
    return n + sum(n - 1);
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `sum(n)` die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen für alle $n \geq 0$ berechnet, wobei gilt

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lösungsvorschlag

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. _____

$$\sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{sum}(0) = 0$$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. _____

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{sum}(n) = n + \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = n + \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. _____

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sum}(n+1) &= (n+1) + \frac{((n+1)-1)(n+1)}{2} && n+1-1=n \\
 &= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} && (n+1) \text{ eingesetzt} \\
 &= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} && (n+1) \text{ als Bruch geschrieben} \\
 &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} && \text{Hauptnenner 2} \\
 &= \frac{(2+n)(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausgeklammert} \\
 &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && \text{Kommutativgesetz angewandt} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{getauscht nach Kommutativgesetz} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && \text{mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n
 \end{aligned}$$

```

import static org.junit.Assert.assertEquals;

import org.junit.Test;

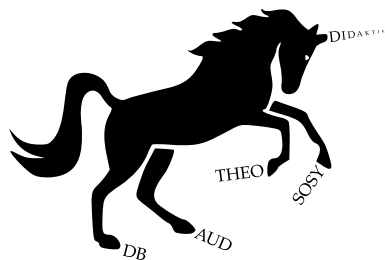
public class GaussTest {

    private void teste(int n, int erwartet) {
        assertEquals(Gauss.sum(n), erwartet);
    }

    @Test
    public void teste() {
        teste(0, 0);
        teste(1, 1);
        teste(2, 3);
        teste(3, 6);
        teste(4, 10);
        teste(5, 15);
        teste(6, 21);
        teste(7, 28);
        teste(8, 36);
        teste(9, 45);
        teste(10, 55);
        teste(11, 66);
    }
}

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/induktion/GaussTest.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/blob/master/induktion/GaussTest.java)



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Module/30_AUD/20_Vollstaendige-Induktion/Aufgabe_Gaussche-Summenformel.tex