

Aufgabe zum Hashing

(Modulo 11 und 17)

Stichwörter: Streutabellen (Hashing), Hashfunktion, Separate Verkettung, Lineares Sondieren, Quadratisches Sondieren

- (a) Ist $h(k) = k^2 \mod 11$ eine gut gewählte Hashfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Berechnen Sie zunächst $h(k)$ für $0 \leq k < 11$. Überlegen Sie dann, welche Werte $h(k')$ für $k' = a \cdot 11 + k$ mit $a > 0$ und $0 \leq k < 11$ annehmen kann.

Lösungshinweise

Nein, h ist keine gute Hashfunktion. Betrachten wir zunächst die Wertetabelle von h für $0 \leq k < 11$. Wir erhalten

k	Nebenrechnung	$h(k)$
0	$0^2 \mod 11 = 0 \mod 11$	0
1	$1^2 \mod 11 = 1 \mod 11$	1
2	$2^2 \mod 11 = 4 \mod 11$	4
3	$3^2 \mod 11 = 9 \mod 11$	9
4	$4^2 \mod 11 = 16 \mod 11$	5
5	$5^2 \mod 11 = 25 \mod 11$	3
6	$6^2 \mod 11 = 36 \mod 11$	3
7	$7^2 \mod 11 = 49 \mod 11$	5
8	$8^2 \mod 11 = 64 \mod 11$	9
9	$9^2 \mod 11 = 81 \mod 11$	4
10	$10^2 \mod 11 = 100 \mod 11$	1

Wir sehen, dass nie die Werte 2, 6, 7, 8 und 10 eingenommen werden. Man könnte nun noch hoffen, dass das vielleicht für irgendein größeres k der Fall ist, dem ist jedoch nicht so. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass für ein beliebiges $k' = a \cdot 11 + k$ mit $a > 0$ und $0 \leq k < 11$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 h(k') &= (k')^2 \mod 11 \\
 &= (a \cdot 11 + k)^2 \mod 11 \\
 &= (a^2 \cdot 11^2 + 2ak \cdot 11 + k^2) \mod 11 \\
 &= (k^2) \mod 11 \\
 &= h(k)
 \end{aligned}$$

Somit haben wir die Berechnung des Hashwertes für ein beliebiges k' auf die Berechnung des Hashwertes für ein $k < 11$ zurückgeführt, was impliziert, dass kein Schlüssel jemals auf etwas anderes als 0, 1, 3, 4, 5 oder 9 abgebildet werden kann.

- (b) Die Schlüssel 23, 57, 26, 6, 77, 43, 74, 60, 9, 91 sollen in dieser Reihenfolge mit der Hashfunktion $h(k) = k \mod 17$ in eine Hashtabelle der Länge 17 eingefügt werden.

Lösungshinweise

Lösungshinweise

Exkurs: Sondieren

separate Verkettung Kollisionsauflösung durch Verkettung (separate chaining): Jedes Bucket speichert mit Hilfe einer dynamischen Datenstruktur (Liste, Baum, weitere Streutabelle, ...) alle Elemente mit dem entsprechenden Hashwert.

lineares Sondieren es wird um ein konstantes Intervall verschoben nach einer freien Stelle gesucht. Meistens wird die Intervallgröße auf 1 festgelegt.

quadratisches Sondieren Nach jedem erfolglosen Suchschritt wird das Intervall quadriert.

(i) Verwenden Sie separate Verkettung zur Kollisionsauflösung.

Lösungshinweise

Nebenrechnung:

$$17 \cdot 1 = 17$$

$$17 \cdot 2 = 34$$

$$17 \cdot 3 = 51$$

$$17 \cdot 4 = 68$$

$$17 \cdot 5 = 85$$

Modulo-Berechnung der gegebenen Zahlen:

$$23 \bmod 17 = 6 \text{ da } 23 : 17 = 1, \text{ Rest } 6 \text{ da } 23 = 1 \cdot 17 + 6$$

$$57 \bmod 17 = 57 - 3 \cdot 17 = 57 - 51 = 6$$

$$26 \bmod 17 = 26 - 17 = 9$$

$$6 \bmod 17 = 6 - 0 \cdot 17 = 6$$

$$77 \bmod 17 = 77 - 4 \cdot 17 = 77 - 68 = 9$$

$$43 \bmod 17 = 9$$

$$74 \bmod 17 = 6$$

$$60 \bmod 17 = 9$$

$$9 \bmod 17 = 9$$

$$91 \bmod 17 = 6$$

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel							23			26							
							57			77							
							6			43							
							74			60							
							91			9							

(ii) Verwenden Sie lineares Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Lösungshinweise

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \bmod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim linearen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) - i) \bmod 17$$

Mit Schrittweite -1 ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 5
26	9
6	6 5 4
77	9 8
43	9 8 7
74	6 5 4 3
60	9 8 7 6 5 4 3 2
9	9 8 7 6 5 4 3 2 1
91	6 5 4 3 2 1

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	91	9	60	74	6	57	23	43	77	26							

(iii) Verwenden Sie quadratisches Sondieren zur Kollisionsauflösung.

Lösungshinweise

Die Hashfunktion lautet:

$$h'(k) = k \bmod 17$$

Die verwendete Hashfunktion beim quadratischen Sondieren:

$$h(k, i) = (h'(k) + i^2) \bmod 17$$

Am Beispiel von zwei Schlüsseln werden die Sondierungsfolgen berechnet:

$$h'(23) = 6$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(23, 0) = (h'(23) + 0^2) \bmod 17 = (6 + 0) \bmod 17 = 6 \bmod 17 = 6$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(23, 1) = (h'(23) + 1^2) \bmod 17 = (6 + 1) \bmod 17 = 7 \bmod 17 = 7$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(23, 2) = (h'(23) + 2^2) \bmod 17 = (6 + 4) \bmod 17 = 10 \bmod 17 = 10$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(23, 3) = (h'(23) + 3^2) \bmod 17 = (6 + 9) \bmod 17 = 15 \bmod 17 = 15$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(23, 4) = (h'(23) + 4^2) \bmod 17 = (6 + 16) \bmod 17 = 22 \bmod 17 = 5$$

$$h'(26) = 9$$

i. Sondierungsfolge:

$$h(26, 0) = (h'(26) + 0^2) \bmod 17 = (9 + 0) \bmod 17 = 9 \bmod 17 = 9$$

ii. Sondierungsfolge:

$$h(26,1) = (h'(26) + 1^2) \bmod 17 = (9 + 1) \bmod 17 = 10 \bmod 17 = 10$$

iii. Sondierungsfolge:

$$h(26,2) = (h'(26) + 2^2) \bmod 17 = (9 + 4) \bmod 17 = 13 \bmod 17 = 13$$

iv. Sondierungsfolge:

$$h(26,3) = (h'(26) + 3^2) \bmod 17 = (9 + 9) \bmod 17 = 18 \bmod 17 = 1$$

v. Sondierungsfolge:

$$h(26,4) = (h'(26) + 4^2) \bmod 17 = (9 + 16) \bmod 17 = 25 \bmod 17 = 8$$

vi. Sondierungsfolge:

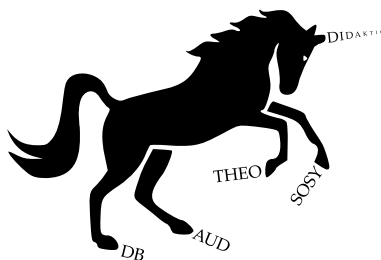
$$h(26,5) = (h'(26) + 5^2) \bmod 17 = (9 + 25) \bmod 17 = 34 \bmod 17 = 0$$

Es ergeben sich folgende Sondierungsfolgen:

Schlüssel	Index
23	6
57	6 7
26	9
6	6 7 10
77	9 10 13
43	9 10 13 1
74	6 7 10 15
60	9 10 13 1 8
9	9 10 13 1 8 0
91	6 7 10 15 5

Damit ergibt sich folgende Hashtabelle:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Schlüssel	9	43				91	23	57	60	26	6			77		74	



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht alleine! Das ist ein Community-Projekt. Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: https://github.com/hbschlang/lehramt-informatik/blob/main/Module/30_AUD/80_Baeume/60_Hashing/Aufgabe_Modulo-11-17.tex