

Gaußsche Summenformel

Gegeben sei folgende rekursive Methodendeklaration in der Sprache Java. Es wird als Vorbedingung vorausgesetzt, dass die Methode `sum` nur für Werte $n \geq 0$ aufgerufen wird.

```
8 public static int sum(int n) {  
9     if (n <= 0) {  
10         return 0;  
11     }  
12  
13     return n + sum(n - 1);  
14 }
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/Gauss.java)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass der Methodenaufruf `sum(n)` die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen für alle $n \geq 0$ berechnet, wobei gilt

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang — Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. ———

$$\sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{sum}(0) = 0$$

Induktionsvoraussetzung — Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. ———

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{sum}(n) = n + \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = n + \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsschritt — Beweise, dass wenn $A(n=k)$ wahr ist, auch $A(n=k+1)$ wahr sein muss. ———

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{sum}(n+1) &= (n+1) + \frac{((n+1)-1)(n+1)}{2} && n+1-1=n \\
&= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} && (n+1) \text{ eingesetzt} \\
&= \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} && (n+1) \text{ als Bruch geschrieben} \\
&= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} && \text{Hauptnenner 2} \\
&= \frac{(2+n)(n+1)}{2} && (n+1) \text{ ausgeklammert} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} && \text{Kommutativgesetz angewandt} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{getauscht nach Kommutativgesetz} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && \text{mit } (n+1) \text{ an der Stelle von } n
\end{aligned}$$

```

3  import static org.junit.Assert.assertEquals;
4
5  import org.junit.Test;
6
7  public class GaussTest {
8
9      private void teste(int n, int erwartet) {
10         assertEquals(Gauss.sum(n), erwartet);
11     }
12
13     @Test
14     public void teste() {
15         teste(0, 0);
16         teste(1, 1);
17         teste(2, 3);
18         teste(3, 6);
19         teste(4, 10);
20         teste(5, 15);
21         teste(6, 21);
22         teste(7, 28);
23         teste(8, 36);
24         teste(9, 45);
25         teste(10, 55);
26         teste(11, 66);
27     }
28
29 }

```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/test/java/org/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/GaussTest.java](https://github.com/bschlangaul/aufgaben/aud/induktion/GaussTest.java)