Aufgabe 3

Wir betrachten eine Gödelisierung von Turingmaschinen und bezeichnen mit M_w die Turingmaschine, die gemäß der Kodierung des Binärworts w kodiert wird. Außerdem bezeichnen wir mit $M_w(x)$ die Ausgabe der Maschine M_w bei Eingabe x. Sie dürfen davon ausgehen, dass x immer ein Binärstring ist. Der bekannte Satz von Rice sagt:

Sei S eine Menge berechenbarer Funktionen mit $\emptyset \neq S \neq \mathcal{R}$, wobei $\mathcal{R}$ die Menge aller berechenbaren Funktionen ist. Dann ist die Sprache $L = \{\, w \mid f_{M_w} \in S \,\}$ unentscheidbar.

Hier ist f_{M_w} die von M_w berechnete Funktion.

Zeigen Sie für jede der nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ entweder, dass sie entscheidbar ist, oder zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass sie unentscheidbar ist. Geben Sie beim Beweis der Unentscheidbarkeit die Menge S der berechenbaren Funktionen an, auf die Sie den Satz von Rice anwenden. Wir bezeichnen die Länge der Eingabe x mit $|x|$.

(a) $L = \{\, w \mid M_w$ akzeptiert die Binarkodierungen der Primzahlen (und lehnt alles andere ab) $\}$

(b) $L = \{\, w \mid$ es gibt eine Hingabe x, so dass $M_w(x)$ das Symbol 1 enthält $\}$

(c) $L = \{\, w \mid M_w(x)$ hält für jedes x mit $|x| < 1000$ nach höchstens 100 Schritten an $\}$

(d) $L = \{\, w \mid M_w$ hat für jede Eingabe dieselbe Ausgabe $\}$

(e) $L = \{\, w \mid$ die Menge der Eingaben, die von M_w akzeptiert werden, ist endlich $\}$