

# Mathematische Grundlagen

## Zahlen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

### $\mathbb{N}$ : Natürliche Zahl

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbf{N}$  bezeichnet. Die natürlichen Zahlen sind die beim *Zählen verwendeten Zahlen* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 usw. Je nach Definition kann auch die 0 (*Null*) zu den natürlichen Zahlen gezählt werden. <sup>1</sup>

Zählen verwendeten Zahlen

Null

### $\mathbb{Z}$ : Ganze Zahl

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbf{Z}$  bezeichnet. Die ganzen Zahlen fügen den *natürlichen Zahlen* die negativen Zahlen hinzu.

natürlichen Zahlen

### $\mathbb{Q}$ : Rationale Zahl

Die Menge der rationalen Zahlen wird mit  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbf{Q}$  bezeichnet. Sie umfasst alle Zahlen, die sich als *Bruch* (engl. fraction) darstellen lassen, der sowohl im *Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen* enthält. <sup>2</sup>

Bruch

Zähler als auch im Nenner ganze Zahlen

### $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ : Irrationale Zahl

Kennzeichen einer irrationalen Zahl ist, dass sie *nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar* ist. Bekannte irrationale Zahlen sind die Eulersche Zahl  $e$  und die Kreiszahl  $\pi$ . Auch die Quadratwurzel aus Zwei  $\sqrt{2}$  und das Teilungsverhältnis des Goldenen Schnitts sind irrationale Zahlen.

nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellbar

<sup>3</sup>

### $\mathbb{R}$ : Reelle Zahl

Die reellen Zahlen umfassen die *rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen*. Die Menge der reellen Zahlen wird mit  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbf{R}$  bezeichnet. <sup>4</sup>

rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen

## Modulo / Division mit Rest

Modulo berechnet den Rest  $b$  der Division  $n$  geteilt durch  $m$ . <sup>5</sup>

<sup>1</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Natürliche_Zahl)

<sup>2</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Rationale_Zahl)

<sup>3</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl)

<sup>4</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle\\_Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Reelle_Zahl)

<sup>5</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Division\\_mit\\_Rest#Modulo](https://de.wikipedia.org/wiki/Division_mit_Rest#Modulo)

## Rechengesetze

### Kommutativgesetz<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a\end{aligned}$$

### Assoziativgesetz<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c)\end{aligned}$$

### Distributivgesetz<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c)\end{aligned}$$

### Ausklammern:<sup>9</sup>

Ausklammern dient dazu, aus einer Summe oder Differenz ein Produkt zu machen.

$$ab + ac = a(b + c)$$

### Ausmultiplizieren:<sup>10</sup>

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

### Binomische Formeln<sup>11</sup>

Als binomische Formeln werden üblicherweise die folgenden drei Umformungen bezeichnet:

(a)  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  erste binomische Formel (Plus-Formel)

<sup>6</sup>Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz“.

<sup>7</sup>Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz“.

<sup>8</sup>Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz“.

<sup>9</sup>Schneider, Mathebibel, /ausklammern.

<sup>10</sup>Schneider, Mathebibel, /ausmultiplizieren.

<sup>11</sup>Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“.

(b)  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  zweite binomische Formel (Minus-Formel)

(c)  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$  dritte binomische Formel (Plus-Minus-Formel)

## Potenzgesetze

### Multiplikation mit gleicher Basis

Multipliziert man zwei Potenzen mit gleicher Basis miteinander, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen addiert.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

### Division mit gleicher Basis

Dividiert man zwei Potenzen mit gleicher Basis, erhält man das Ergebnis, indem man die Exponenten der Potenzen voneinander subtrahiert.<sup>12</sup>

$$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

## Regel von L'Hospital

Die Regel von de L'Hospital ist ein Hilfsmittel zum Berechnen von Grenzwerten bei Brüchen  $\frac{f}{g}$  von Funktionen  $f$  und  $g$ , wenn Zähler und Nenner entweder beide gegen 0 oder beide gegen (+ oder -) unendlich gehen. Wenn in einem solchen Fall auch der Grenzwert des Bruches der Ableitungen existiert, so hat dieser denselben Wert wie der ursprüngliche Grenzwert:<sup>13</sup>

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

<sup>12</sup>Schneider, *Mathebibel*, /potenzgesetze.

<sup>13</sup><https://de.serlo.org/mathe/funktionen/grenzwerte-stetigkeit-differenzierbarkeit/grenzwert/regel-1-hospital>

## Mengen

| „für die gilt“

z. B.  $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4 = 0\}$  dabei bedeutet | „für die gilt“, also alle rationalen Zahlen  $x$ , für die gilt, dass das Quadrat von  $x$  abzüglich 4 gleich 0 ist).<sup>14</sup>

## Mengen

$M_1 \cup M_2$  Vereinigungsmenge von  $M_1$  und  $M_2$   
 $M_1 \cap M_2$  Schnittmenge von  $M_1$  und  $M_2$ <sup>15</sup>

## Literatur

- [1] Frank Förster, Andreas Eichler und Boris Girnat. *Grundelemente der Mathematik*. Technische Universität Braunschweig, Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik.
- [2] Dirk W. Hoffmann. *Theoretische Informatik*. 2018.
- [3] Andreas Schneider. *Mathebibel*. <https://www.mathebibel.de>. aufgerufen 2020-08-18.
- [4] Wikipedia-Artikel „Assoziativgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Assoziativgesetz>.
- [5] Wikipedia-Artikel „Binomische Formeln“. [https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische\\_Formeln](https://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Formeln).
- [6] Wikipedia-Artikel „Distributivgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Distributivgesetz>.
- [7] Wikipedia-Artikel „Kommutativgesetz“. <https://de.wikipedia.org/wiki/Kommutativgesetz>.

---

<sup>14</sup>Förster, Eichler und Girnat, *Grundelemente der Mathematik*, Seite 8.