Aufgabe 2

(O-Notation) [20 PUNKTE]
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei fn)=2-.n?+3-n?+4- (log,n) + 7. Dann gilt f € O(n?).

(b) Sei f(n) = 4”. Dann gilt nicht f € O(2”).

(c) Sei fn) = (n+1)! (d. h. die Fakultät von n +1). Dann gilt f € O(n”).

z. B. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 5^5

(d) Sei f:N— N definiert durch die folgende Rekursionsgleichung:

> **Exkurs: Master-Theorem**
>
> $$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$
>
> $a =$ Anzahl der Unterprobleme in der Rekursion
>
> $\frac{1}{b} =$ Teil des Originalproblems, welches wiederum durch alle Unterprobleme repräsentiert wird
>
> $f(n) =$ Kosten (Aufwand, Nebenkosten), die durch die Division des Problems und die Kombination der Teillösungen entstehen
>
> Dann gilt:
>
> **1. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
> falls $f(n) \in \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$
>
> **2. Fall:** $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
> falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
>
> **3. Fall:** $T(n) \in \Theta(f(n))$
> falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ für $\varepsilon > 0$ und ebenfalls für ein c mit $0 < c < 1$ und alle hinreichend großen n gilt: $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$

3, fürn=1 /n) = (n—-1)+f(n-1), fürn>1
Dann gilt f e O(n?).