

Einzelprüfung „Softwaretechnologie / Datenbanksysteme (nicht vertieft)“

Einzelprüfungsnummer 46116 / 2014 / Frühjahr

Thema 2 / Teilaufgabe 1 / Aufgabe 1

(Hanoi)

Stichwörter: Terminierungsfunktion

Gegeben sei folgende Methode zur Berechnung der Anzahl der notwendigen Züge beim Spiel „Die Türme von Hanoi“:

```
int hanoi(int nr, char from, char to) {
    char free = (char) ('A' + 'B' + 'C' - from - to);
    if (nr > 0) {
        int moves = 1;
        moves += hanoi(nr - 1, from, free);
        System.out.println("Move piece nr. " + nr + " from " + from + " to " + to);
        moves += hanoi(nr - 1, free, to);
        return moves;
    } else {
        return 0;
    }
}
```

Code-Beispiel auf Github ansehen: [src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46116/jahr_2014/fruehjahr/Hanoi.java](https://github.com/src/main/java/org/bschlangaul/examen/examen_46116/jahr_2014/fruehjahr/Hanoi.java)

- (a) Beweisen Sie formal mittels vollständiger Induktion, dass zum Umlegen von k Scheiben (z. B. vom Turm A zum Turm C) insgesamt $2^k - 1$ Schritte notwendig sind, also dass für $k \geq 0$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Lösungsvorschlag

Zu zeigen:

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Induktionsanfang

— Beweise, dass $A(1)$ eine wahre Aussage ist. —

$$k = 0$$

$$\text{hanoi}(0, 'A', 'C') = 0$$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Induktionsvoraussetzung

— Die Aussage $A(k)$ ist wahr für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. —

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 2^k - 1$$

Induktionsschritt

— Beweise, dass wenn $A(n = k)$ wahr ist, auch $A(n = k + 1)$ wahr sein muss. —

$$\text{hanoi}(k, 'A', 'C') = 1 + \text{hanoi}(k - 1, 'A', 'B') + \text{hanoi}(k - 1, 'B', 'C')$$

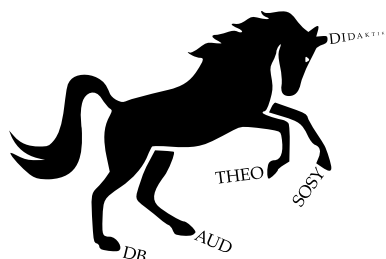
$$k \rightarrow k + 1$$

$$\begin{aligned} \text{hanoi}(k+1, 'A', 'C') &= 1 + \text{hanoi}((k+1) - 1, 'A', 'B') + \\ &\quad \text{hanoi}((k+1) - 1, 'B', 'C') \\ &= 1 + \text{hanoi}(k, 'A', 'B') + \\ &\quad \text{hanoi}(k, 'B', 'C') \\ &= 1 + 2^k - 1 + 2^k - 1 && k+1-1=k \\ &= 2^k + 2^k - 1 && \text{Formeln eingesetzt} \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 && 1-1-1=-1 \\ &= 2^{k+1} - 1 && 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k \\ & && 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

(b) Geben Sie eine geeignete Terminierungsfunktion an und begründen Sie kurz Ihre Wahl!

Lösungsvorschlag

Betrachte die Argumentenfolge $k, k-1, k-2, \dots, 0$. Die Terminierungsfunktion ist offenbar $T(k) = k$. $T(k)$ ist bei jedem Rekursionsschritt auf der Folge der Argumente streng monoton fallend. Bei der impliziten Annahme k ist ganzzahlig und $k \geq 0$ ist $T(k)$ nach unten durch 0 beschränkt.



Die Bschlangaul-Sammlung

Hermine Bschlangaul and Friends

Eine freie Aufgabensammlung mit Lösungen von Studierenden für Studierende zur Vorbereitung auf die 1. Staatsexamensprüfungen des Lehramts Informatik in Bayern.



Diese Materialsammlung unterliegt den Bestimmungen der Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell-Share Alike 4.0 International-Lizenz.

Hilf mit! Die Hermine schafft das nicht allein! Das ist ein Community-Projekt! Verbesserungsvorschläge, Fehlerkorrekturen, weitere Lösungen sind herzlich willkommen - egal wie - per Pull-Request oder per E-Mail an hermine.bschlangaul@gmx.net. Der TeX-Quelltext dieses Dokuments kann unter folgender URL aufgerufen werden: <https://github.com/bschlangaul-sammlung/examens-aufgaben/blob/main/Staatsexamen/46116/2014/03/Thema-2/Teilaufgabe-1/Aufgabe-1.tex>