

# 논리학을 좋아하는 100명의 영진이

송영진

2022.05.08

## Contents

<b>1 문제</b>	<b>2</b>
<b>2 풀이</b>	<b>3</b>
2.1 문제 조건	3
2.2 풀이에 들어가기 앞서...	3
2.2.1 거짓말쟁이의 역설	3
2.2.2 거짓인 명제는 모든 명제를 함축한다	3
2.3 말로 풀어 쓴 풀이	4
2.3.1 첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람일 경우	4
2.3.2 첫 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람일 경우	4
2.3.3 첫 번째 영진이가 진실과 거짓을 혼용하는 사람일 경우	4
2.3.4 결론	4
2.4 논리 추론 규칙을 사용한 풀이	5
2.4.1 기호 설명	5
2.4.2 명제 사이의 관계	5
2.4.3 거짓만 말하는 사람은 뒤에 올 수 없다	5
2.4.4 첫 번째 사람은 거짓만을 말하는 사람일 수 있다	5
2.4.5 결론	5
<b>3 부록</b>	<b>6</b>
3.1 문제의 무모순성 증명	6
3.1.1 진실만을 말하는 사람은 연속할 수 없다	6
3.1.2 진실만을 말하는 사람 뒤에는 진실과 거짓을 혼용하는 사람만 올 수 있다	6
3.1.3 나머지 경우는 모두 가능하다	6
3.1.4 문제 상황으로 가능한 상황 한 가지	7
3.2 다른 부류의 사람들은 최대 몇 명?	7
3.2.1 정말로 진실된 경우	7
3.2.2 평범한 경우	7
3.3 진실과 거짓을 혼용하는 사람들은 최소 몇 명?	7

## 1 문제

어느 날 100개의 서로 다른 평행우주에서 온 영진이가 한 자리에 모였다. (평행우주의 존재성과 평행 우주 사이를 여행할 수 있는지에 관해서는 현재에도 논쟁이 있으나, 일단은 존재하고, 가능하다고 하자.) 그리고 먼저 온 순서대로 자기소개를 시작했다.

- 첫 번째 영진이가 말하길, "나는 진실만을 말하는 사람이다."
- 두 번째 영진이가 말하길, "첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이라면, 나는 거짓만을 말하는 사람이다."
- 세 번째 영진이가 말하길, "두 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이라면, 나는 거짓만을 말하는 사람이다."
- ⋮
- 아흔아홉 번째 영진이가 말하길, "아흔여덟 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이라면, 나는 거짓만을 말하는 사람이다."
- 백 번째 영진이가 말하길, "아흔아홉 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이라면, 나는 거짓만을 말하는 사람이다."

이렇게 자기소개가 끝났다. 이때, 각 평행 우주에서 온 영진이들은 각각

1. 진실만을 말하거나
2. 거짓만을 말하거나
3. 진실과 거짓을 혼용한다.

1, 2, 3 중 하나를 만족한다. 또한, 자기소개 이후 추가적인 대화를 통해, 100명의 영진이들은 모두 논리학을 너무 좋아한 나머지 모두 고전 논리학 수업을 수강하였으며, 모순 된 문장은 극도로 싫어하여, 입에 담지도 않음을 알 수 있었다. **이때, 거짓만을 말하는 사람은 최대 몇 명일까?**

## 2 풀이

### 2.1 문제 조건

100명의 영진이들은 모두 **고전 논리학** 수업을 수강하였고, **모순된 문장은 극도로 싫어한다**. 즉, 이 문제는 고전 논리학을 기초로 하고, 영진이들 중 그 누구도 모순된 문장을 말하지 않았으리라는 것을 알 수 있다.

### 2.2 풀이에 들어가기 앞서...

#### 2.2.1 거짓말쟁이의 역설

다음의 문장을 생각하자.

나는 거짓말만 하는 사람이다.

과연 이 말을 할 수 있는 사람은 누구일까? 조금만 생각해봐도 진실만을 말하는 사람이나 거짓만을 말하는 사람 모두 이 말을 할 수 없음을 알 수 있다. 즉, 이 말을 할 수 있는 것은 진실과 거짓을 혼용할 수 있는 사람 뿐이다.

#### 2.2.2 거짓인 명제는 모든 명제를 함축한다

다음의 명제를 생각하자.

$p$ 이면,  $q$ 이다.

이러한 명제는  $p$ 가 참이고,  $q$ 가 참일 때 참이다. 하지만, 한 가지 염두해 두어야 할 것은  **$p$ 가 거짓일 때는 항상 참**이라는 것이다. 즉,

$$p \rightarrow q \iff \neg p \vee q \quad (1)$$

가 성립한다.

## 2.3 말로 풀어 쓴 풀이

두 번째, 세 번째, ..., 백 번째 영진이의 자기소개는 첫 번째, 두 번째, ..., 아흔아홉 번째 영진이가 진실만을 말하냐, 거짓만을 말하냐, 진실과 거짓을 혼용하냐에 따라 자기소개가 참인지 거짓인지 여부가 달라진다. 그러나 자신의 이전 이전 사람이 어떤 사람인지, 자신의 다음 사람이 어떤 사람인지에는 관련이 없다. 즉, 이 문제를 푸는 데에는 첫 번째 영진이와 두 번째 영진이 사이의 관계만을 생각하면 충분하다.

### 2.3.1 첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람일 경우

두 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이라고 가정한다. 그러면, 첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이고, 두 번째 영진이의 자기소개 역시 진실이므로, 두 번째 영진이는 거짓만을 말하는 사람이다. 이는 명백히 모순이다.

두 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람이라고 가정한다. 그러면, 첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이고, 두 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람이므로, 두 번째 영진이의 자기소개가 참이다. 즉, 두 번째 영진이는 거짓만을 말해야 하는데 참을 말했으므로 이 역시 명백히 모순이다.

두 번째 영진이가 참과 거짓을 혼용하는 사람이라고 가정한다. 이때, 첫 번째 영진이는 진실만을 말하는 사람인데, 두 번째 영진이는 거짓만을 말하는 사람이 아니므로, 두 번째 영진이의 자기소개는 거짓이 된다. 그러나 두 번째 영진이는 거짓을 말할 수 있으므로, 이 결론은 가능하다.

이상의 결론에서 첫 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람일 경우, 두 번째 영진이는 무조건 진실과 거짓을 혼용하는 사람이어야 한다.

### 2.3.2 첫 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람일 경우

첫 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람이므로, 거짓 명제는 모든 명제를 함축하므로, 두 번째 영진이의 자기소개는 언제나 참이다. 따라서, 두 번째 영진이는 거짓만을 말하는 사람일 수 없고, 참만을 말하는 사람이거나 진실과 거짓을 혼용하는 사람이어야 한다.

### 2.3.3 첫 번째 영진이가 진실과 거짓을 혼용하는 사람일 경우

첫 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람인 경우와 마찬가지로 두 번째 영진이의 자기소개는 언제나 참이다. 따라서, 두 번째 영진이는 거짓만을 말하는 사람일 수 없고, 참만을 말하는 사람이거나 진실과 거짓을 혼용하는 사람이어야 한다.

### 2.3.4 결론

2.3.1, 2.3.2, 2.3.3로부터 두 번째 영진이는 거짓만을 말하는 사람일 수 없다. 같은 논리로, 세 번째, 네 번째, ..., 백 번째 영진이도 거짓만을 말하는 사람일 수 없다. 따라서 거짓만을 말하는 사람이 될 수 있는 사람은 첫 번째 영진이 뿐이므로, 거짓만을 말하는 사람은 최대 1명이다.

## 2.4 논리 추론 규칙을 사용한 풀이

이 문제는 연속한 두 영진이의 자기소개에 참, 거짓, 모순 여부만 생각하면 된다.

### 2.4.1 기호 설명

$i = 2, 3, 4, \dots, 100$ 에 대하여

$p$  :  $i - 1$ 번째 영진이가 진실만을 말하는 사람이다.

$q$  :  $i$ 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람이다.

$r$  :  $i$ 번째 영진이의 자기소개, 곧,  $p \rightarrow q$

### 2.4.2 명제 사이의 관계

$i$ 번째 영진이가 거짓만 말하는 사람이면,  $i$ 번째 영진이의 소개는 거짓이다. 곧,

$$q \implies \neg r \quad (2)$$

### 2.4.3 거짓만 말하는 사람은 뒤에 올 수 없다

$i = 2, 3, 4, \dots, 100$ 에 대하여,  $q$ 를 가정하자.

1	$q$	가정
2	$q \rightarrow \neg r$	가정
3	$\neg r$	1), 2) 전진 긍정
4	$\neg(p \rightarrow q)$	3), $r$ 치환
5	$\neg(\neg p \vee q)$	4), 2.2.2
6	$\neg\neg p \wedge \neg q$	5), 드 모르간 법칙
7	$\neg q$	6), 연언 제거
8	$q \wedge \neg q$	1), 7), 연언 도입
$\therefore$	$F_0$	8), Inverse Law

$q$ 를 가정하면, 모순이 발생한다. 따라서 귀류법에 의해  $\neg q$ 가 성립,  $i$ 번째 영진이는 거짓말을 하는 사람이 아니다.

### 2.4.4 첫 번째 사람은 거짓만을 말하는 사람일 수 있다

첫 번째 영진이가 거짓만을 말하는 사람이면,  $i = 2$ 일 때,  $r$ 이 참이다. 따라서 두 번째 영진이는 진실만을 말하는 사람이어도 되고, 진실과 거짓을 혼용하는 사람이어도 된다.

### 2.4.5 결론

이상의 논의에서, 거짓만 말하는 사람은 두 번째, 세 번째,  $\dots$ , 백 번째 사람일 수 없지만, 첫 번째 사람일 수는 있다. 따라서 거짓만 말하는 사람은 최대 한 명이다.

### 3 부록

#### 3.1 문제의 무모순성 증명

문제의 무모순성을 증명하려면, 앞 사람이 진실만을 말하는 사람일 때, 거짓만을 말하는 사람일 때, 진실과 거짓을 혼용하는 사람일 때에 대하여, 뒷 사람이 어떤지 모두 따져 보면 된다. 이러한 경우는 9가지다.

##### 3.1.1 진실만을 말하는 사람은 연속할 수 없다

$i$ 번째 영진이가 진실만 말하는 사람이라 가정하자. 즉,  $r$ 이 진실이다.

1	$r$	가정
2	$p \rightarrow q$	1), $r$ 치환
3	$q \rightarrow \neg r$	가정 (2.4.2)
4	$p \rightarrow \neg r$	2), 3), 삼단 논법
5	$\neg \neg r$	1), 이중 부정 도입
$\therefore$	$\neg p$	4), 5), 후건 부정

따라서  $i-1$ 번째 영진이는 진실만 말하는 사람이 아니다.

##### 3.1.2 진실만을 말하는 사람 뒤에는 진실과 거짓을 혼용하는 사람만 올 수 있다

2.4.3, 3.1.1로부터 진실만을 말하는 사람 뒤에는 진실만을 말하는 사람과 거짓만을 말하는 사람이 올 수 없음을 알 수 있다. 한편, 진실과 거짓을 혼용하는 사람은 올 수 있다.

1	$p$	가정
2	$\neg q$	가정
3	$p \wedge \neg q$	1), 2), 연언 도입
4	$\neg(\neg p \vee q)$	3), 드 모르간 법칙
5	$\neg(p \rightarrow q)$	4), 2.2.2
$\therefore$	$\neg r$	5), $r$ 치환

에서  $p \wedge \neg q \implies \neg r$ 이다. 그런데, 진실과 거짓을 혼용하는 사람은  $r$ 을 거짓말로 말할 수 있으므로,  $\neg r$ 이 가능하다. 따라서,

$a : i$ 번째 영진이는 진실과 거짓을 혼용하는 사람이다.

라고 하면,

$$p \implies a \quad (3)$$

가 성립한다. 사실, 앞 사람이 진실만 말하는 사람이면,  $r$ 이  $q$ 를 함축하므로, 거짓말쟁이의 역설이 발생한다. 그러므로 당연히 이 말을 하는 사람은 진실과 거짓을 혼용하는 사람일 수밖에 없다.

##### 3.1.3 나머지 경우는 모두 가능하다

$r$ 이 참이라고 가정하자. 이때, 위의 논리로부터,  $\neg p$ 가 참이다. 한편,  $r : p \rightarrow q$ 이므로,  $\neg p$ 이면,  $r$ 이다. 즉,

$$\neg p \iff r \quad (4)$$

이 성립한다. 즉,  $r$ 을 진실로서 말할 수 있는 사람이 뒷 사람이면, 앞 사람은 진실만 말하는 사람만 아니면 된다. 다시 말해, 앞 사람이 거짓만을 말하는 사람이거나 진실과 거짓을 혼용하는 사람이면, 뒷 사람은 진실만 말하는 사람이든, 진실과 거짓을 혼용하는 사람이든 상관이 없다. 이러한 경우는 총 4가지이다. 또한, 2.4.3, 3.1.1, 3.1.2에서 5가지의 경우를 다루었으므로, 총 9가지의 경우가 모두 다루어진다.

### 3.1.4 문제 상황으로 가능한 상황 한 가지

위의 논의로부터, 첫 번째 사람이 거짓만을 말하는 사람이고, 그 뒤로는 모두 진실과 거짓을 혼용하는 사람일 수 있다.

## 3.2 다른 부류의 사람들은 최대 몇 명?

한편, 진실만 말하는 사람이나 진실과 거짓을 혼용하는 사람은 최대 몇 명일 수 있는지 궁금할 수 있다.

### 3.2.1 정말로 진실된 경우

진실만 말하는 사람은 연속할 수 없으므로, 진실만 말하는 사람과 진실과 거짓을 혼용하는 사람이 번갈아 나타날 때 그 수가 최대가 된다. 따라서 진실만 말하는 사람은 최대 50명이 존재할 수 있다.

### 3.2.2 평범한 경우

모든 사람이 진실과 거짓을 혼용하는 경우에도 문제의 상황이 성립한다. 따라서 진실과 거짓을 혼용하는 사람은 최대 100명이 존재할 수 있다.

## 3.3 진실과 거짓을 혼용하는 사람들은 최소 몇 명?

오히려 진실과 거짓을 혼용하는 사람들에 대해서는 최소 몇 명 존재할 수 있는지가 궁금해진다. 위의 논리로부터 첫 사람이 거짓만 말하는 사람이고 이후 진실만 말하는 사람과 진실과 거짓을 혼용하는 사람이 번갈아 나타날 때 진실과 거짓을 혼용하는 사람들의 수가 최소가 된다. 따라서 최소 49명이 존재한다.