

ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES EN ROBOT KR 1000 TITAN

FREE VIBRATIONS ANALYSIS IN ROBOT KR 1000 TITAN

Bustillo, Carlos¹✉; Linares, Ramiro¹✉; Pérez, Rodrigo¹✉

¹Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina

✉ cabustillo13@hotmail.com; rodrigoperez2110@gmail.com; ramylinares@gmail.com

Fecha de envío: 27 de junio de 2021

RESUMEN: El KR 1000 TITAN es un robot industrial de 6 GDL diseñado para trabajar con cargas pesadas a elevada rapidez y precisión, hasta una distancia de 6,5 m. Se lo utiliza para manipular bloques de motor, piedras, piezas de vidrio, vigas de acero, piezas navales y aeronáuticas, bloques de mármol o prefabricados de hormigón, entre otros muchos. Nuestro análisis consiste en realizar un estudio vibratorio, para poder asegurar que las oscilaciones producidas no sean demasiado grandes como para interferir en la operación que lleve a cabo el robot en dicha posición. Al agarrar un objeto, se le suma su masa a la del sistema, y se determinará cómo esto influye en su vibración libre.

Palabras clave: Robot KUKA, Vibraciones Libres, Modos de vibración.

ABSTRACT: The KR 1000 TITAN is a 6 DOF industrial robot designed to work with heavy loads at high speed and precision, up to a distance of 6.5 m. It is used to manipulate engine blocks, stones, glass pieces, steel beams, naval and aeronautical pieces, marble blocks or precast concrete, among many others. Our analysis consists in carrying out a vibratory study, in order to ensure that the oscillations produced are not too large to interfere with the operation carried out by the robot in that position. When grasping an object, its mass is added to that of the system, and it will be determined how this influences its free vibration.

Key Words: KUKA robot, Free Vibrations, Vibration modes.

1. INTRODUCCIÓN

El KR 1000 TITAN, es un robot industrial de 6 grados de libertad gdl con 6 respectivos servomotores, diseñado para trabajar con cargas pesadas de más de 1000 kg, a elevada rapidez y precisión, y hasta una distancia de 6,5 m. Se utiliza para manipular bloques de motor, piedras, piezas de vidrio, vigas de acero, piezas navales y aeronáuticas, bloques de mármol o prefabricados de hormigón, entre otros muchos.

Se realizará un estudio vibratorio de dicho robot kuka, para corroborar su correcto funcionamiento ante vibraciones libres. Lo cual es de gran interés sobre todo por el enorme peso y gran velocidad que maneja el robot, para verificar si su precisión se mantiene aceptable.

En el movimiento programado, con el cual el robot realiza una operación genérica determinada, se captura un instante en el cual detiene su movimiento, trabando los motores. En dicha

posición se estudiará el sistema en vibraciones libres, en forma similar a como si se tratara de una estructura fija. En donde, las vibraciones libres se manifestarán por la energía cinética, de la inercia del robot y de la masa que manipula, en dicho instante de tiempo. Y se representan mediante las condiciones iniciales de velocidad del sistema dinámico. Por otro lado, las condiciones iniciales de posición se las considera nulas, lo que significa que el robot se encuentra en la posición exacta en la que los motores se encuentran trabados, y sin vibrar. Debido a la rígida estructura del robot, se considera que los parámetros de rigidez y amortiguamiento solamente se encuentran dados por los propios motores, y no por los materiales de los eslabones en sí. Esto es debido a que, en comparación, los efectos de los materiales sobre la respuesta de las vibraciones, son despreciables. Es decir, para el estudio solo se considerarán las rigideces y amortiguamientos de los servomotores.



Figura 1: Robot KUKA KR 1000 TITAN.

El objetivo consiste en realizar un estudio vibratorio, para poder asegurar que las oscilaciones producidas no sean demasiado grandes como para interferir en la operación que lleve a cabo el robot. Desarrollando un modelo físico y matemático del sistema dinámico real, obteniendo su respuesta, y modificando los parámetros que pueden variar de una aplicación a otra, para obtener conclusiones acerca de cómo esto influye, y qué tan bueno es su diseño respecto a las vibraciones. En particular, modificando los parámetros de la masa de la carga que manipula, y las velocidades iniciales del sistema.

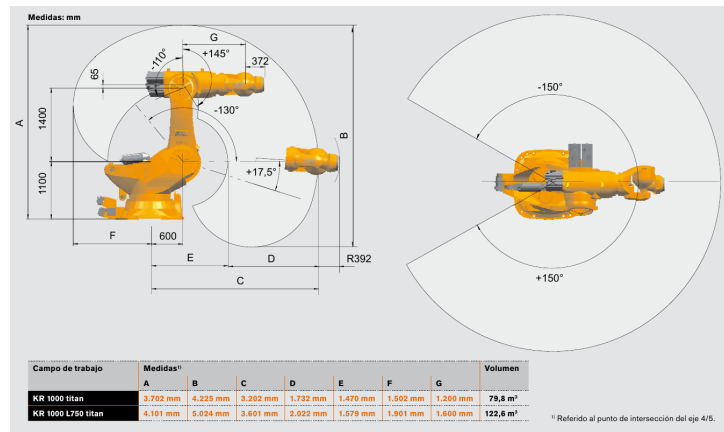


Figura 2: Área de trabajo.

2. MODELO

El modelado del problema es uno de los ejes principales considerados en este proyecto.



Figura 3: Robot físico real.

2.1. MODELO FÍSICO

Una vez seleccionado el sistema dinámico real a estudiar, se procedió a construir el modelo físico. En el cual, como primera instancia se habían considerado los 6 gdl del robot como se describe a continuación:

Se tienen 6 coordenadas generalizadas, y 6 grados de libertad del sistema real, una por cada articulación del robot. A las cuales, desde la articulación base hasta la articulación que hace rotar propiamente dicho al efector final, se las nombra como: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$.

En donde, cada uno de estos gdl, describe un movimiento de vibración en los siguientes planos del espacio cartesiano tridimensional:

$\theta_1 \rightarrow \text{planoXY}$

$\theta_2 \rightarrow \text{planoXZ}$

$\theta_3 \rightarrow \text{planoXZ}$

$\theta_4 \rightarrow \text{planoYZ}$

$\theta_5 \rightarrow \text{planoXZ}$

$\theta_6 \rightarrow \text{plano } XY$ (rotación del efector final).

2.2. PRIMER APROXIMACIÓN DEL MODELO

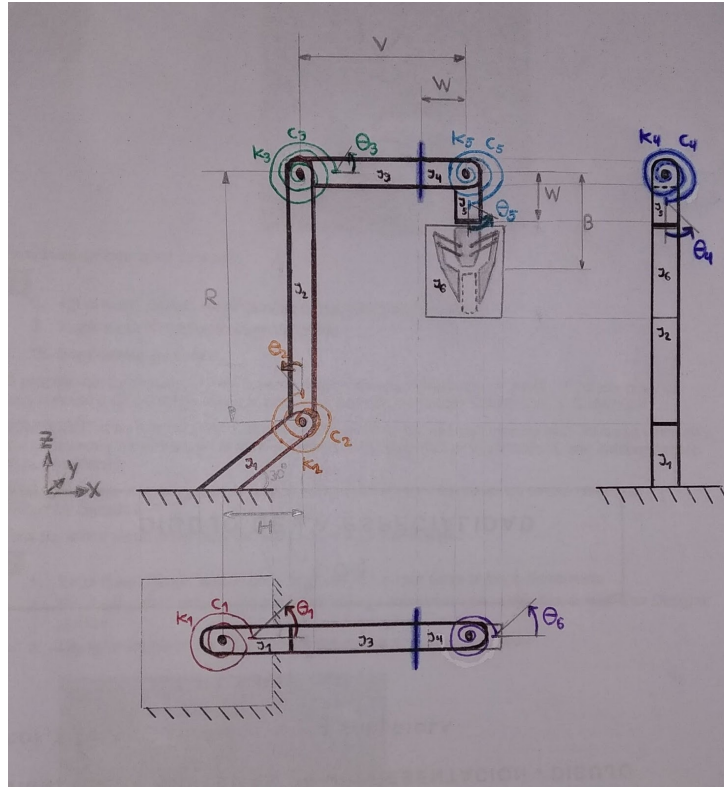


Figura 4: Primer esquema del Sistema Dinámico [No se utiliza].

Este fue el primer modelo planteado pero luego se razonó que la complejidad del sistema superaba a los alcances previstos para el proyecto. Esta alta complejidad es debida al movimiento tridimensional producido por los múltiples gdl del sistema, ya que daría lugar a ecuaciones de movimiento demasiado grandes, e incluso se deberían considerar fuerzas de coriolis.

Por ello, se optó por reducir la cantidad de gdl a 4, no considerando los gdl correspondientes a θ_1 ni θ_4 mostrados en la figura anterior, y solo se toman a θ_2 , θ_3 y θ_5 del plano XZ, y a θ_6 del plano XY. Por lo que, con esta simplificación, para el estudio descrito a lo largo del artículo solo se tendrá en cuenta el movimiento en el plano XZ, ya que el gdl θ_6 solo produce la rotación del efector final sobre su mismo eje.

2.3. MODELO SIMPLIFICADO UTILIZADO

El modelo físico queda simplificado como se muestra en el siguiente esquema:

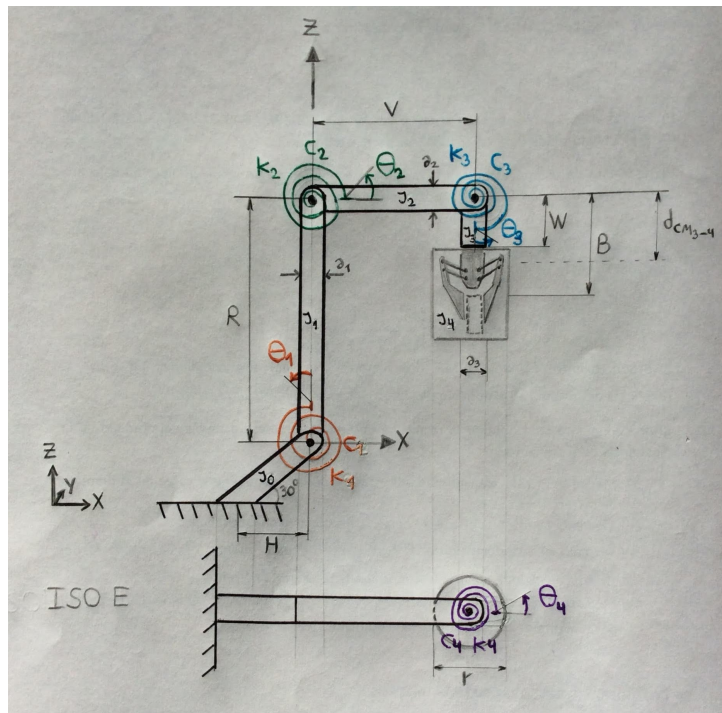


Figura 5: Interpretación del robot físico real para su respectivo modelado.

Al plantear el modelo físico se decidió incorporar al robot un efector final genérico. En específico se muestra en el esquema el dibujo de una pinza robótica (Gripper), la cual puede estar o no sosteniendo un objeto a desplazar. La masa de dicho objeto, sumada a la masa del Efector Final constituyen la masa denominada: m_4 . Y siendo d_{cm3-4} la distancia desde el centro de rotación de la articulación 3 hasta el centro de masa de la masa m_4 .

Otra simplificación importante que se tiene en cuenta en el modelo, es la de considerar los ángulos como absolutos en el espacio, y no articulares como serían propiamente en el robot. Esto es también para facilitar el desarrollo de las ecuaciones en el modelo matemático.

2.4. MASAS IMPLICADAS EN EL MODELO

Masa total, incluyendo servomotores, sin efector final, y sin unidad de control: 4690kg

Masa estimada de la base fija empotrada: 690kg

Masa de cada uno de los 6 servomotores: 42kg. [$(6 \text{servos} \cdot 42\text{kg}) / 4000\text{kg} = 0,063$]

Se observa que la masa de los servomotores es insignificante respecto a la masa de todo el sistema, por lo que se considera la masa de cada motor como incluida en la masa de tres primeras barras (ejes) del modelo del robot:

- Masa estimada de barra 0: $m_0 = (4690\text{kg} - 690\text{kg}) / 3\text{partes} = 1333\text{kg}$

- Masa estimada de barra 1: $m_1 = 1333\text{kg}$

- Masa estimada de barra 2: $m_2 = 800\text{kg} + (1333\text{kg} - 800\text{kg}) / 2 = 1067\text{kg}$

[$4690\text{kg} = 690\text{kg} + 2 \cdot 1333\text{kg} + 1067\text{kg} + 267\text{kg}$]

- Masa estimada de barra 4 [Efector Final Genérico + Carga Genérica]: 310kg

Masa Neta (incluyendo efector final y carga): 5000kg

2.5. RIGIDECES ROTACIONALES DE LOS SERVOMOTORES

Luego de una extensa búsqueda en internet, se lograron encontrar los valores de las rigideces rotacionales k de los servomotores del robot Kuka:

Table 2: Joint stiffness values and errors

Joint number	Stiffness values [Nm/rad]	Error in [Nm/rad]	Percentage of the mean value
1	$3.8 \cdot 10^6$	$\pm 3 \cdot 10^5$	$\pm 8\%$
2	$6.6 \cdot 10^6$	$\pm 5.2 \cdot 10^5$	$\pm 8\%$
3	$3.9 \cdot 10^6$	$\pm 3.7 \cdot 10^5$	$\pm 9\%$
4	$5.6 \cdot 10^5$	$\pm 1 \cdot 10^4$	$\pm 2\%$
5	$6.6 \cdot 10^5$	$\pm 1.4 \cdot 10^4$	$\pm 2\%$
6	$4.7 \cdot 10^5$	$\pm 2.2 \cdot 10^4$	$\pm 5\%$

Figura 6: Fuente: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00633095/document>.

De los cuales solo se utilizaran los valores de las articulaciones 2, 3, 5 y 6, reescritos a continuación:

$$k_1 = 6,6 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$$

$$k_2 = 3,9 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$$

$$k_3 = 6,6 \times 10^5 \text{ Nm/rad}$$

$$k_4 = 4,7 \times 10^5 \text{ Nm/rad}$$

2.6. AMORTIGUAMIENTOS ROTACIONALES DE LOS SERVOMOTORES

Luego de una extensa búsqueda en internet, no se pudieron encontrar por ningún lado los valores de los amortiguamientos rotacionales c de los servomotores del robot kuka.

Por lo que los amortiguamientos se obtuvieron al final de la simulación utilizando la función lsqr de MATLAB (método de los mínimos cuadrados) ya que con la matriz K_{eq} y M_{eq} obtuvimos la matriz C_{modal} , aplicando las ecuaciones correspondientes obtuvimos C y comparamos los valores obtenidos con los del modelo. $c_1 = 1.2044 \times 10^8 \text{ Nms/rad}$ $c_2 = 0.4118 \times 10^8 \text{ Nms/rad}$ $c_3 = 0.1289 \times 10^8 \text{ Nms/rad}$ $c_4 = -0.0005 \times 10^8 \text{ Nms/rad}$

Se utilizaron amortiguamientos $\zeta = [0.02; 0.03; 0.04; 0.043]$, ya con M_{eq} y K_{eq} se resolvió el problema a través del método de descomposición modal para obtener la solución del sistema.

Comparándolo con una investigación similar: Vibration damping control of robot arm intended for service application in human environment. Se pudo observar que el $\zeta = 0.0249$ considerando el brazo robótico solo como 2 masas, por lo cual se puede asegurar que los valores de amortiguamiento son cercanos a los experimentales.

3. COORDENADAS GENERALIZADAS

3.1. COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA DE CADA BARRA CONSIDERADA (BARRAS 1,2 Y 3-4)

$$\begin{aligned} X_{c1} &= -\frac{R}{2}\sin\theta_1 & Z_{c1} &= \frac{R}{2}\cos\theta_1 \\ X_{c2} &= -R\sin\theta_1 + \frac{V}{2}\cos\theta_2 & Z_{c2} &= R\cos\theta_1 + \frac{V}{2}\sin\theta_2 \\ X_{c34} &= -R\sin\theta_1 + V\cos\theta_2 + dcm_{34}\sin\theta_3 & Z_{c34} &= R\cos\theta_1 + V\sin\theta_2 - dcm_{34}\cos\theta_3 \end{aligned}$$

3.2. VELOCIDADES DEL CENTRO DE MASA DE CADA BARRA CONSIDERADA (BARRAS 1,2 Y 3-4)

$$\begin{aligned} \dot{X}_{c1} &= -\frac{R}{2}\dot{\theta}_1\sin\theta_1 & \dot{Z}_{c1} &= \frac{R}{2}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ \dot{X}_{c2} &= -R\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \frac{V}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 & \dot{Z}_{c2} &= R\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \frac{V}{2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ \dot{X}_{c34} &= -R\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + V\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + dcm_{34}\dot{\theta}_3\sin\theta_3 & \dot{Z}_{c34} &= R\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + V\dot{\theta}_2\sin\theta_2 - dcm_{34}\dot{\theta}_3\cos\theta_3 \end{aligned}$$

$$\text{donde } dcm_{34} = \frac{m_3 \frac{W}{2} + m_4 B}{m_3 + m_4}$$

3.3. MOMENTOS DE INERCIA

$$\begin{aligned} J_{1Y} &= \frac{1}{12}m_1(R^2 + d_1^2) & J_{2Y} &= \frac{1}{12}m_2(V^2 + d_2^2) \\ J_{4Z} &= \frac{1}{2}m_4r^2 & J_{34Y} &= [J_{3Y} + m_3(dcm_{34} - \frac{W}{2})^2] + [J_{4Y} + m_4(B - dcm_{34})^2] \end{aligned}$$

4. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

4.1. ENERGÍA CINÉTICA TOTAL

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1[\dot{X}_{c1}^2 + \dot{Z}_{c1}^2] + \frac{1}{2}m_2[\dot{X}_{c2}^2 + \dot{Z}_{c2}^2] + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[\dot{X}_{c34}^2 + \dot{Z}_{c34}^2] + \frac{1}{2}J_{1Y}\dot{\theta}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2}J_{2Y}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_{34Y}\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}J_{4Z}\dot{\theta}_4^2 \end{aligned}$$

4.2. ENERGÍA DISIPADA TOTAL

$$D = \frac{1}{2}[c_1\dot{\theta}_1^2 + c_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 + c_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)^2 + c_4\dot{\theta}_4^2]$$

4.3. ENERGÍA POTENCIAL TOTAL

$$U = \frac{1}{2}[k_1\theta_1^2 + k_2(\theta_2 - \theta_1)^2 + k_3(\theta_3 - \theta_2)^2 + k_4\theta_4^2] + [m_1g\frac{R}{2}(1 + \cos\theta_1) + m_2g[R(1 + \cos\theta_1) +$$

$$(m_3 + m_4)g(R - dcm_{34})(1 + \cos\theta_1)] + [m_2g\frac{V}{2}(1 + \sin\theta_2)] + (m_3 + m_4)gV(1 + \sin\theta_2) \\ + (m_3 + m_4)g dcm_{34}(1 - \cos\theta_3)$$

5. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

5.1. PARA θ_1

$$\frac{\partial(U)}{\partial(\theta_1)} = \theta_1[k_1 + k_2 - m_1g\frac{R}{2} - (m_3 + m_4)g(R - dcm_{34}) + \theta_2(-k_2)]$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial(\dot{\theta}_1)} = \dot{\theta}_1(c_1 + c_2) + \dot{\theta}_2(-c_2)$$

$$\frac{d(T)}{dt(\dot{\theta}_1)} = J_{1Y}\ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1(m_1)\frac{R^2}{4} + \frac{1}{2}m_2[2R^2\ddot{\theta}_1 - V\ddot{\theta}_2R(\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2)] + \\ \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2R^2\ddot{\theta}_4 - [2dcm_{34}\ddot{\theta}_3R\sin\theta_1\sin\theta_3 + 2\ddot{\theta}_2VR\cos\theta_2\sin\theta_1 - 2dcm_{34}\ddot{\theta}_3R\cos\theta_1\cos\theta_3]]$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial(\dot{\theta}_1)} = -\frac{1}{2}m_2VR\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\sin\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_2\cos\theta_1) - \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2\dot{\theta}_1dcm_{34}\dot{\theta}_3R\cos\theta_1\sin\theta_3 + \\ (2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2VR\sin\theta_2 - 2\dot{\theta}_1dcm_{34}\dot{\theta}_3R\cos\theta_3)\sin\theta_1 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2VR\cos\theta_2\cos\theta_1]$$

5.2. PARA θ_2

$$\frac{\partial(U)}{\partial(\theta_2)} = \theta_1(-k_2) + \theta_2(k_2 + k_3) + \theta_3(-k_3) + m_2g\frac{V}{2} + (m_3 + m_4)gV$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial(\dot{\theta}_2)} = \dot{\theta}_1(-c_2) + \dot{\theta}_2(c_2 + c_3) + \dot{\theta}_3(-c_3)$$

$$\frac{d(T)}{dt(\dot{\theta}_2)} = J_{2Y} * \ddot{\theta}_2(m_2\frac{V^2}{4}) + \dot{\theta}_1[-\frac{V}{2}R(\cos\theta_2\sin\theta_1 - \cos\theta_1\sin\theta_2)] + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2V^2\ddot{\theta}_2 + \\ 2Vdcm_{34}\ddot{\theta}_3\cos\theta_2\sin\theta_3 - [2\ddot{\theta}_1VR\cos\theta_2\sin\theta_1 + (2Vdcm_{34}\ddot{\theta}_3\cos\theta_3 - 2\ddot{\theta}_1VR\cos\theta_1)\sin\theta_2]]$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial(\dot{\theta}_2)} = \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2VR(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2) - \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2\dot{\theta}_2Vdcm_{34}\dot{\theta}_3\sin\theta_2\sin\theta_3 - \\ (2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2VR\sin\theta_1\sin\theta_2 - (2\dot{\theta}_2Vdcm_{34}\dot{\theta}_3\cos\theta_2\cos\theta_3 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2VR\cos\theta_1\cos\theta_2))]$$

5.3. PARA θ_3

$$\frac{\partial(U)}{\partial(\theta_3)} = k_3(\theta_3 - \theta_2) + (m_3 + m_4)g dcm_{34} \text{sen} \theta_3$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial(\dot{\theta}_3)} = \dot{\theta}_2(-c_3) + \dot{\theta}_3(c_3)$$

$$\frac{d(T)}{dt(\dot{\theta}_3)} = J_{34Y} \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2(dcm_{34})^2 \ddot{\theta}_3 - (2dcm_{34} \dot{\theta}_1 R \text{sen} \theta_1 - 2\dot{\theta}_2 V dcm_{34} \cos \theta_2) \text{sen} \theta_3 + 2\dot{\theta}_2 V dcm_{34} \cos \theta_3 \text{sen} \theta_2 + 2dcm_{34} \dot{\theta}_1 R \cos \theta_1 \cos \theta_3]$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial(\theta_3)} = \frac{1}{2}(m_3 + m_4)[2\dot{\theta}_2 V dcm_{34} \dot{\theta}_3 \text{sen} \theta_3 \text{sen} \theta_2 + 2\dot{\theta}_1 dcm_{34} \dot{\theta}_3 R \cos \theta_1 \text{sen} \theta_3 - (2\dot{\theta}_1 dcm_{34} \dot{\theta}_3 R \cos \theta_3 \text{sen} \theta_1 - 2\dot{\theta}_2 V dcm_{34} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2)]$$

5.4. PARA θ_4

$$\frac{\partial(U)}{\partial(\theta_4)} = \theta_4(k_4)$$

$$\frac{\partial(D)}{\partial(\dot{\theta}_4)} = \dot{\theta}_4(c_4)$$

$$\frac{d(T)}{dt(\dot{\theta}_4)} = J_{4Z} \ddot{\theta}_4$$

$$\frac{\partial(T)}{\partial(\theta_4)} = 0$$

6. REDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

Se realizó una simplificación para todos los Grados de Libertad: $\text{sen} \theta_i = 0$ y $\cos \theta_i = 1$. También por ortogonalidad $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = 0$.

Cabe destacar que en primera instancia se considero una fuerza no restitutiva en nuestro modelo e impedía la linealización de las ecuaciones. Por eso se suprimió para linealizar las ecuaciones equivalentes.

6.1. C EQUIVALENTE

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

6.2. K EQUIVALENTE

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 g \frac{R}{2} - m_2 g R - (m_3 + m_4) g (R - dcm_{34}) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (m_3 + m_4) g dcm_{34} + k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

6.3. M EQUIVALENTE

$$\begin{bmatrix} J_{1Y} + m_1 \frac{R^2}{4} + m_2 R^2 & 0 & (m_3 + m_4)(R dcm_{34}) & (m_3 + m_4) R^2 \\ 0 & J_{2Y} + (m_2 \frac{V^2}{2}) + (V^2)(m_3 + m_4) & -(m_3 + m_4) V dcm_{34} & 0 \\ (m_3 + m_4)(R dcm_{34}) & -(m_3 + m_4) V dcm_{34} & J_{34Y} + (m_3 + m_4) * (dcm_{34}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{4Z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

7. MODELO MATEMÁTICO

Al sustituir las variables de las matrices por sus valores numéricos:

```
Meq =
1.0e+03 *
6.757938953666667      0      0.873705759000000      2.549419108000000
0      2.394425833333333      -0.581916300000000      0
0.873705759000000      -0.581916300000000      0.524309288833333      0
0      0      0      0.003487500000000
```

Figura 7: Matriz equivalente de masas Meq.

```
Keq =
1.0e+07 *
1.035647803830000      -0.660000000000000      0      0
-0.660000000000000      1.050000000000000      -0.390000000000000      0
0      -0.390000000000000      0.390407341410000      0
0      0      0      0.056000000000000
```

Figura 8: Matriz equivalente de rigideces Keq.

Datos de los ejes	Campo (software)	Velocidad con carga nominal	
		1.000 kg	750 kg
Eje 1 (A1)	$\pm 150^\circ$	58°/s	58°/s
Eje 2 (A2)	$+17,5^\circ/-130^\circ$	50°/s	50°/s
Eje 3 (A3)	$+145^\circ/-110^\circ$	50°/s	50°/s
Eje 4 (A4)	$\pm 350^\circ$	60°/s	60°/s

Figura 9: Valores de CI (condiciones iniciales).

Como criterio para las condiciones iniciales de nuestro problema, se simularán con distintos valores la velocidad inicial máxima dada por el fabricante, 58°/s para el 1° eje, 50°/s para el 2°, 50°/s para el 3°, y 60°/s para el 4, en unidades de sistema internacional corresponden a: $V_0=[1.0123, 0.873, 0.873, 1.0472]$ rad/s donde cada posición corresponde a cada eje correspondiente. En todos los casos la posición inicial $X_0=[0, 0, 0, 0]$

8. MÉTODOS UTILIZADOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

8.1. MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN MODAL

Es un método utilizado para la resolución de sistemas de N grados de libertad, donde se trabaja con N ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas entre sí.

Los desplazamientos asociados a los grados de libertad se expresan como una combinación lineal de los modos normales del sistema. Esta transformación lineal desacopla el sistema de ecuaciones diferenciales original, de manera de obtener un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden desacoplado.

9. SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Para el cálculo de las frecuencias naturales de vibración primero fue necesario calcular los autovalores y autovectores, para se utilizó la función de MATLAB “eig()”, la cual nos da los autovalores y autovectores del sistema normalizados usando la matriz de masas y la matriz de rigidez. Los autovectores se agrupan por columnas en una matriz, que llamamos “Matriz Modal Nomal”:

$$[X] = [\overrightarrow{V1}; \overrightarrow{V2}; \dots \overrightarrow{Vn}]$$

Siendo V_n cada uno de los vectores propios normalizados. En el caso del modelo los vectores propios obtenidos fueron:

autovec =

0.168369499296958	0.814438345001767	0.245654213355083	-0.414789620254204
-0.230628106138600	0.939034613167036	-1.000000000000000	0.246744796279290
-1.000000000000000	1.000000000000000	0.144812208212542	1.000000000000000
0	0	0	0.742334865750336

Una vez obtenido los autovalores, aplicaremos la raíz cuadrada a cada uno de los mismos para obtener la frecuencia natural de vibración (w_{ni}) relacionada con cada modo, siendo estas:

$$w_{n1} = 1.112 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

$$w_{n2} = 0.187 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

$$w_{n3} = 0.715 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

$$w_{n4} = 4.007 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

Para obtener la matriz de amortiguamiento C , como se conoce las frecuencias naturales de vibración circulares y, la relación de amortiguamiento crítico (ζ), para todos los modos de vibración considerados es posible formar la siguiente matriz diagonal:

$$C_i = \begin{bmatrix} 2\varepsilon\omega_i & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon\omega_i & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon\omega_i \end{bmatrix}$$

Siendo ε el valor de amortiguamiento y ω_i cada una de las frecuencias naturales circulares de vibración

Para poder obtener finalmente la matriz de amortiguamiento C , se realiza la siguiente operación:

$$C = [M] * [X] * [C_i] * [X^T] * [M]$$

Siendo M la matriz de Masa equivalente de la ecuación de movimiento, X matriz modal normal y X^T su transpuesta

Para obtener las ecuaciones desacopladas partimos de la EDO que modela a nuestro sistema

$$[M] * [\ddot{\vec{x}}(t)] + [C] * [\dot{\vec{x}}(t)] + [K] * [\vec{x}(t)] = [\vec{F}(t)]$$

Donde $F(t)=0$. Considerando que $x(t)$ es una combinación de la matriz modal norma.

$$\vec{x}(t) = [X] * \vec{q}(t)$$

Teniendo en cuenta que la matriz de amortiguamiento proporcional que se obtuvo de C_i y haciendo los reemplazos correspondientes, la ecuación de movimiento re expresada nos queda:

$$\ddot{q}_i(t) + (2 * \varepsilon * \omega_i) * \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 * q_i(t) = Q_i(t)$$

Siendo $[\omega_{i2}]$ una matriz diagonal que contiene cada una de las frecuencias naturales de vibración del sistema. De esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones totalmente desacoplado, donde cada ecuación depende de su constante generalizada $q_i(t)$. Expresamos la respuesta de la ecuación dada por la bibliografía:

$$\begin{aligned} q_i(t) = & e^{-\varepsilon * \omega_i * t} * \left\{ \cos(\omega_{di} * t) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} * \sin(\omega_{di} * t) \right\} * q_i(0) \\ & + \left\{ \frac{1}{\omega_{di}} * e^{-\varepsilon * \omega_i * t} * \sin(\omega_{di} * t) \right\} * \dot{q}_i(0) \\ & + \frac{1}{\omega_{di}} * \int_0^t Q_i(\tau) * e^{-\varepsilon * \omega_i * (t - \tau)} * \sin[\omega_{di}(t - \tau)] * d\tau \end{aligned}$$

Donde:

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix}, \dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix}, \vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix}, \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix}$$

Estas son las condiciones iniciales expresadas en coordenadas generalizadas

Con este método podemos pasar de “Coordenadas Generalizadas” ($q(t)$) a “Coordenadas geométricas” ($x(t)$), se obtiene la respuesta de cada uno de los grados de libertad del sistema en el tiempo.

La bibliografía consultada para este procedimiento fue: Daniel J. Inman Engineering Vibration, U4 Multiple Degree of freedom Systems- U4.3 Modal Análisis

10. RESULTADOS

10.1. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[1.0123, 0, 0, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE NO TENEMOS CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 310\text{KG}$ - PESO DEL BRAZO)

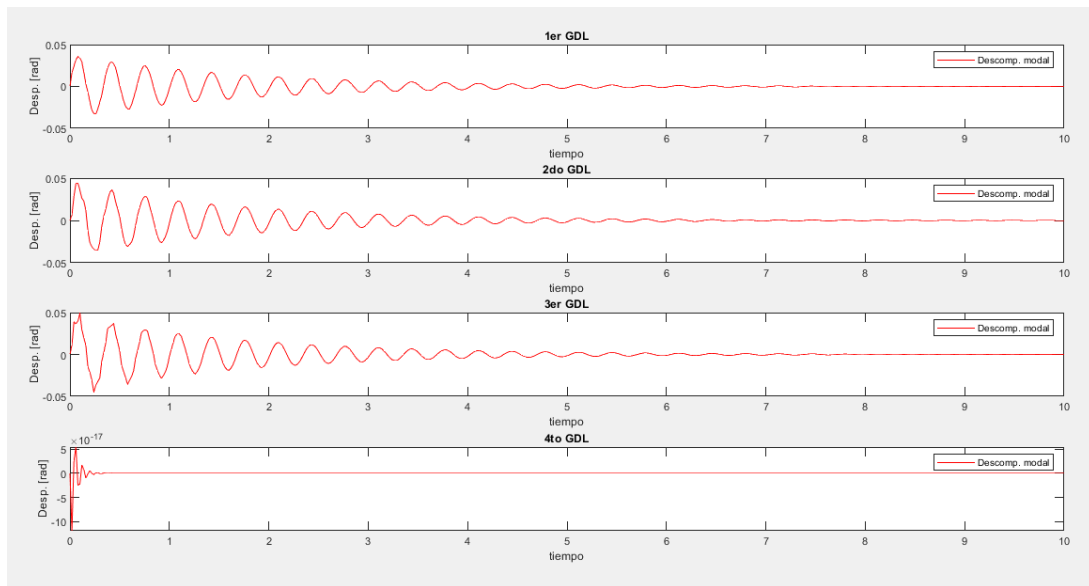


Figura 10: Gráfica de posición

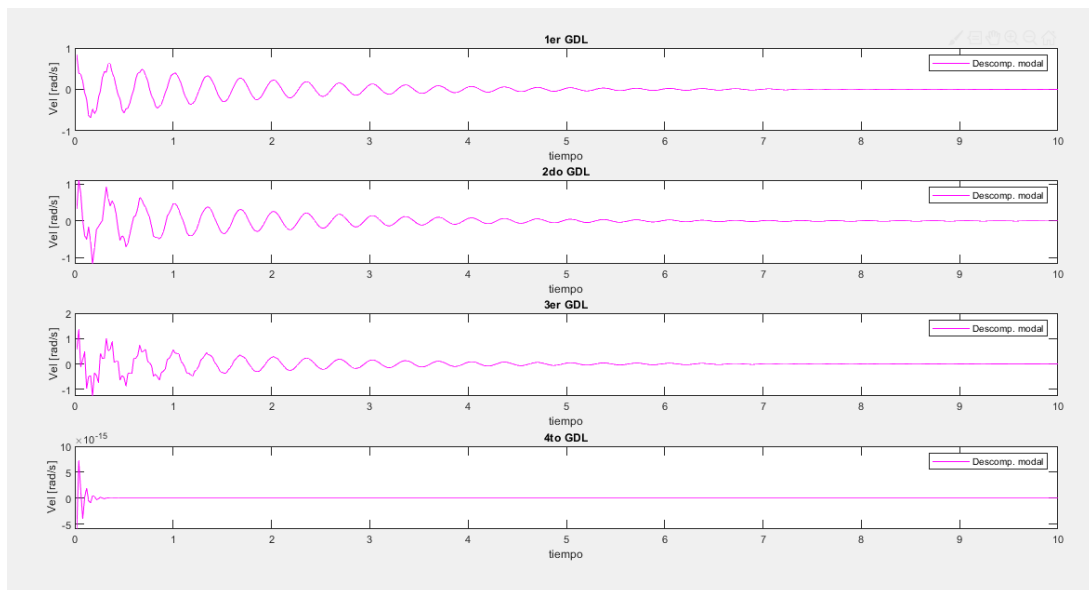


Figura 11: Gráfica de velocidad

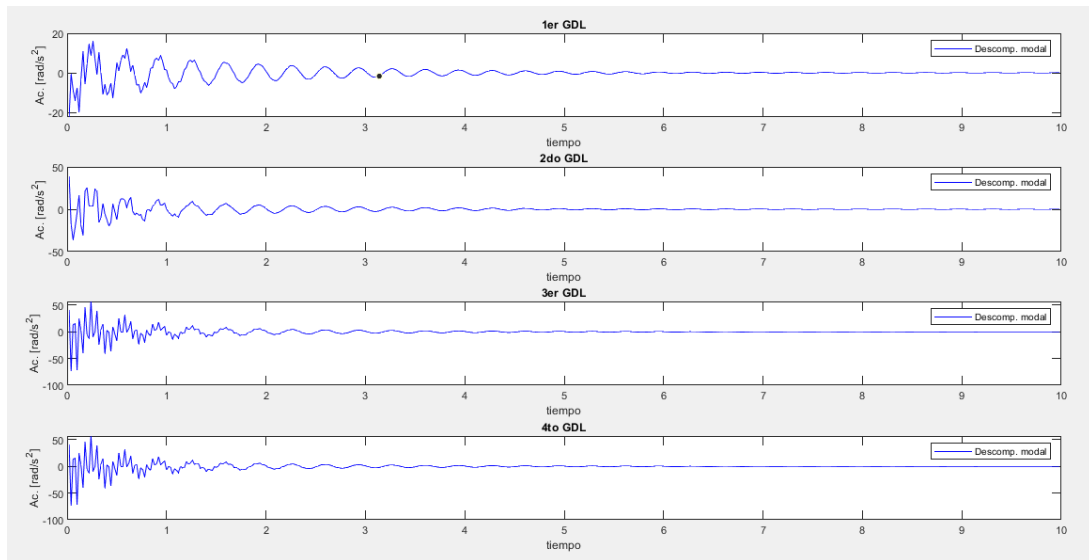


Figura 12: Gráfica de aceleración

10.2. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0.873, 0, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE NO TENEMOS CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 310\text{KG}$):

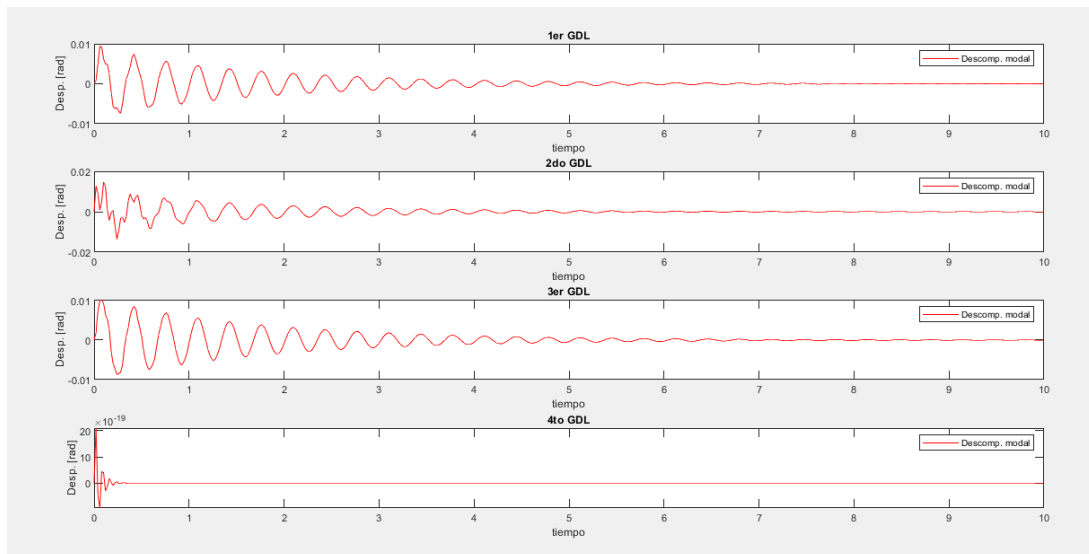


Figura 13: Gráfica de posición

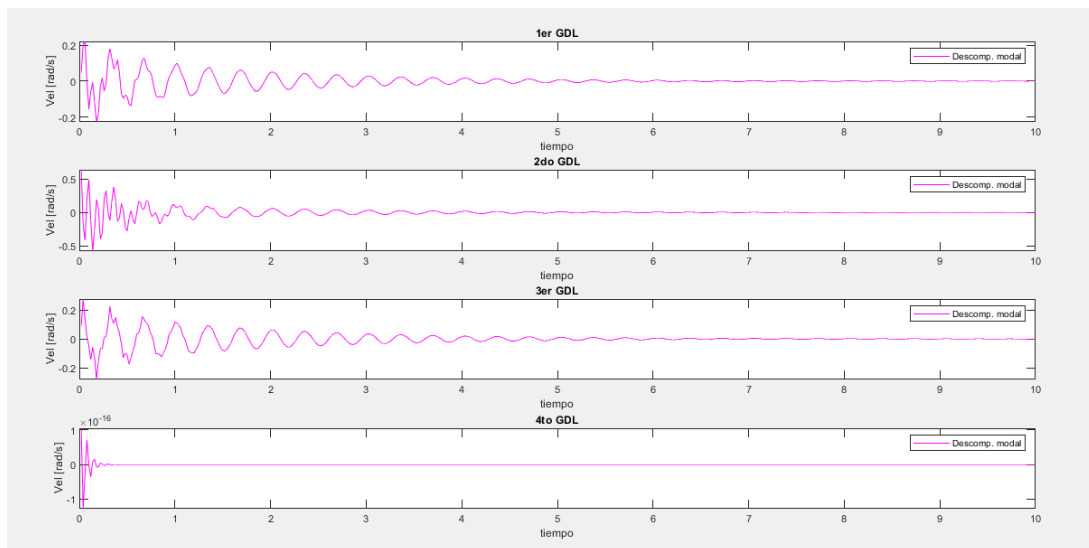


Figura 14: Gráfica de velocidad

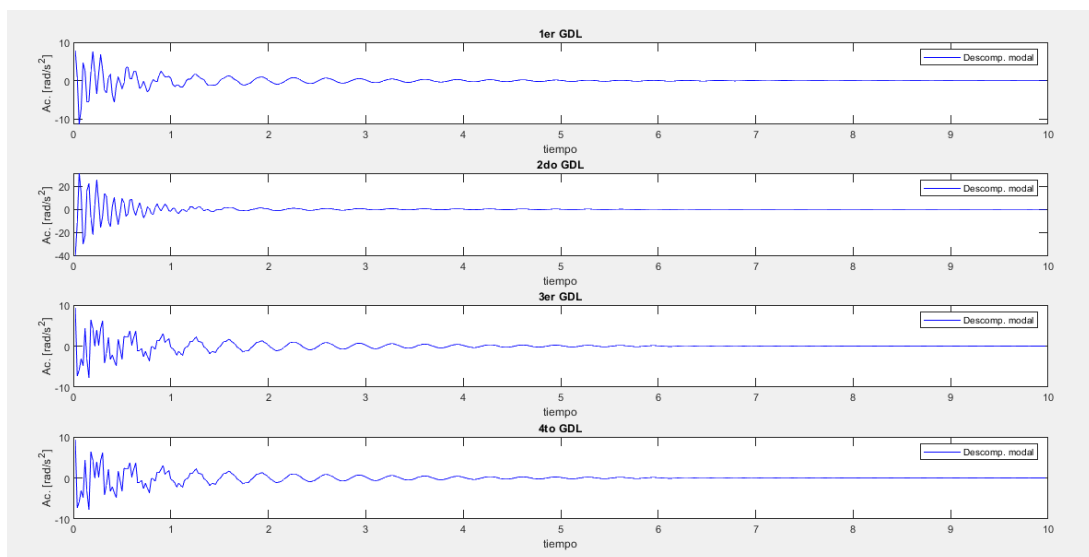


Figura 15: Gráfica de aceleración

10.3. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0, 0.873, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE NO TENEMOS CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 310\text{KG}$):

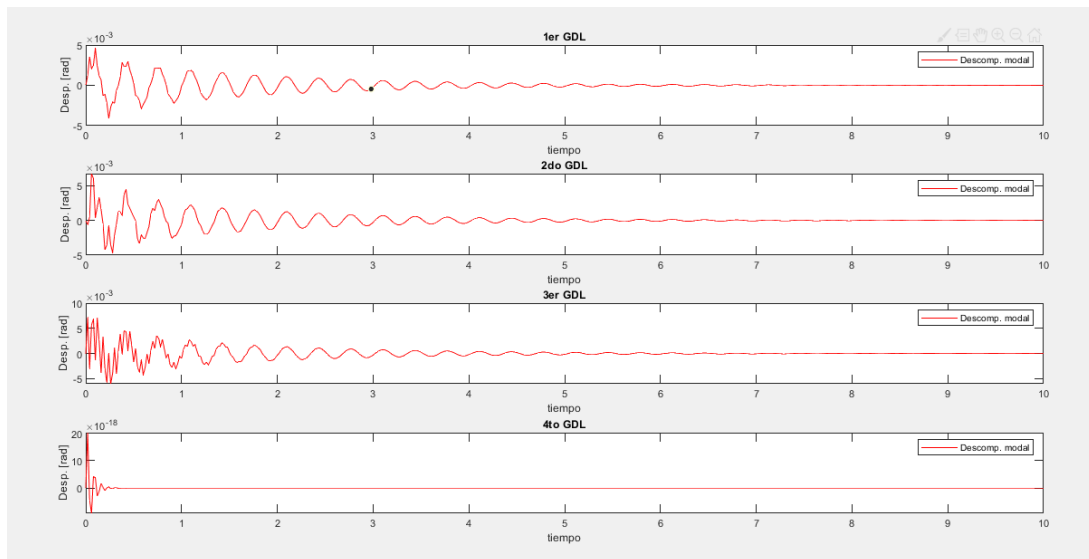


Figura 16: Gráfica de posición

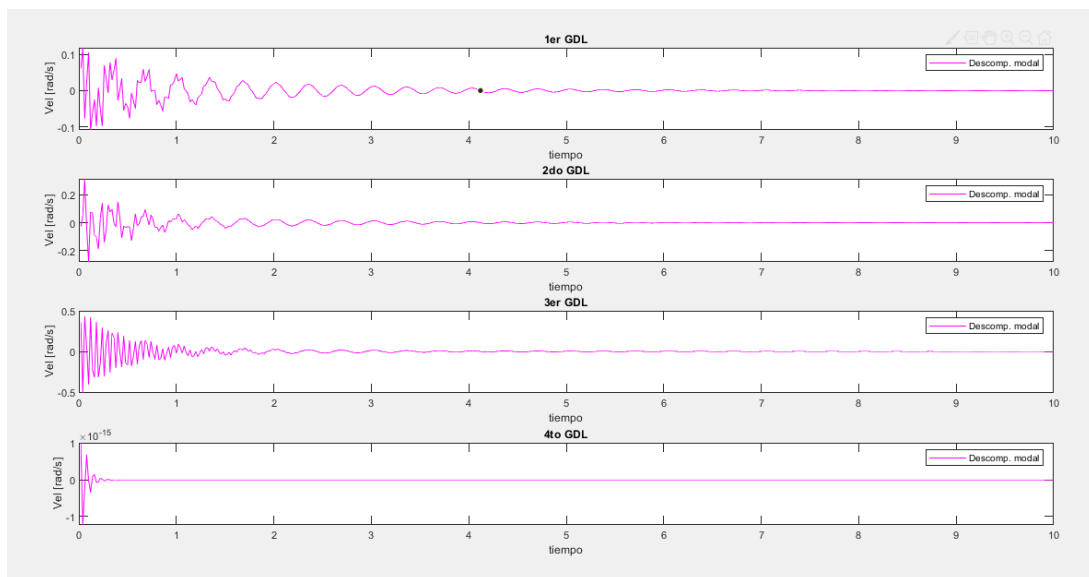


Figura 17: Gráfica de velocidad

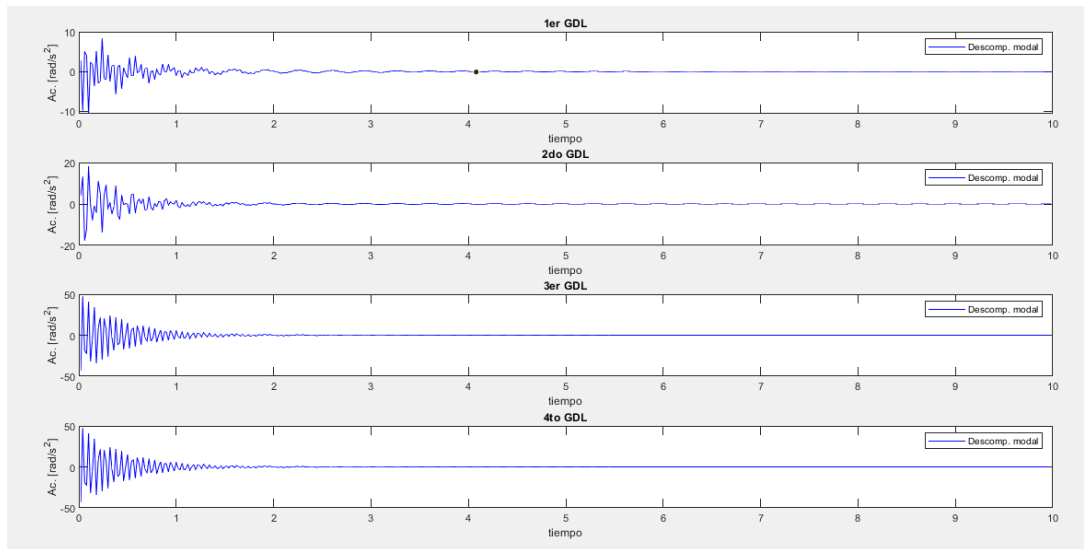


Figura 18: Gráfica de aceleración

10.4. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0, 0, 1.0472]$ Y CONSIDERANDO QUE NO TENEMOS CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 310\text{KG}$):

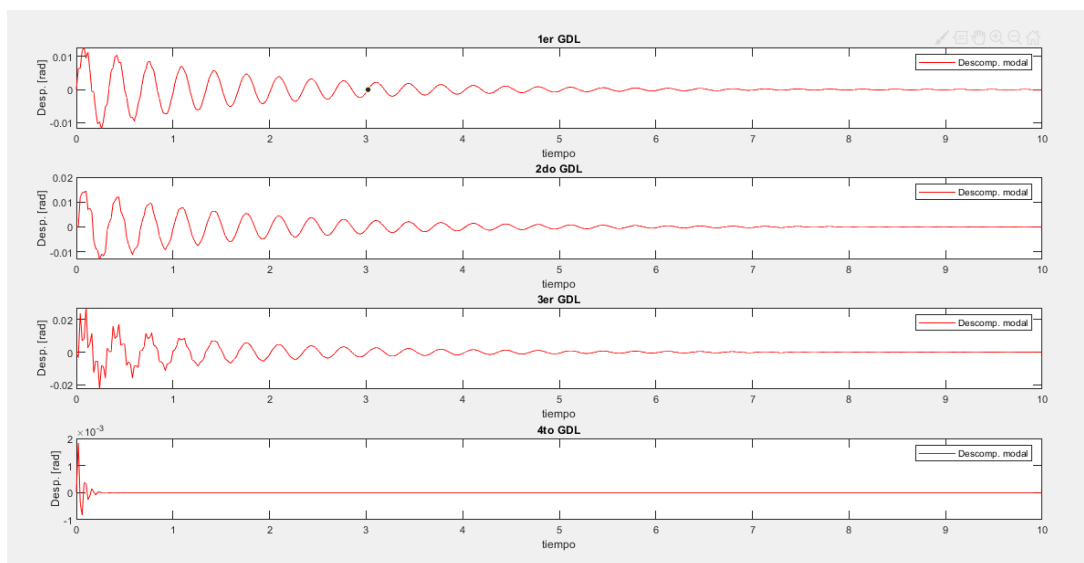


Figura 19: Gráfica de posición

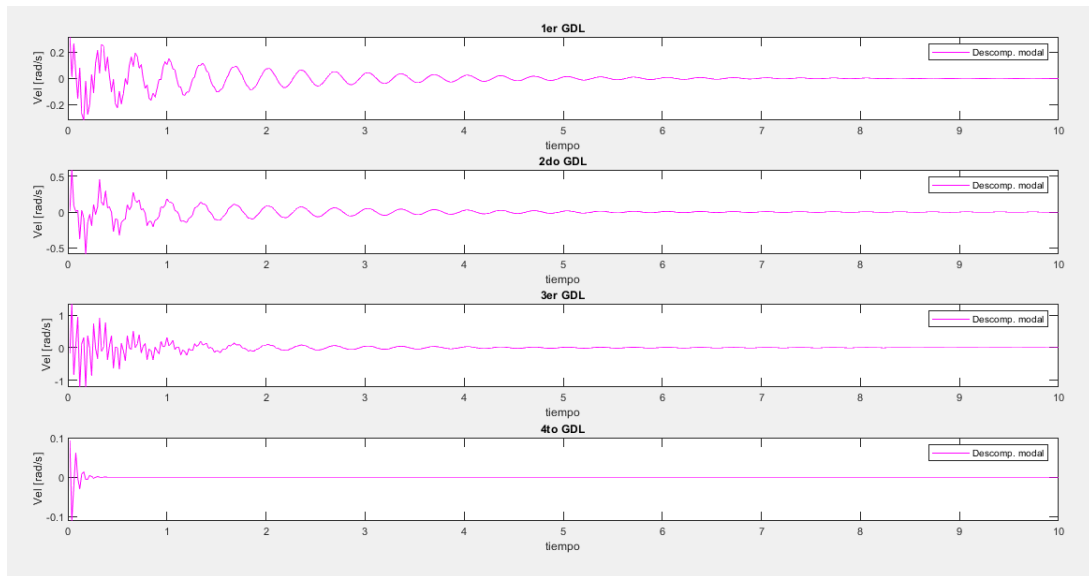


Figura 20: Gráfica de velocidad

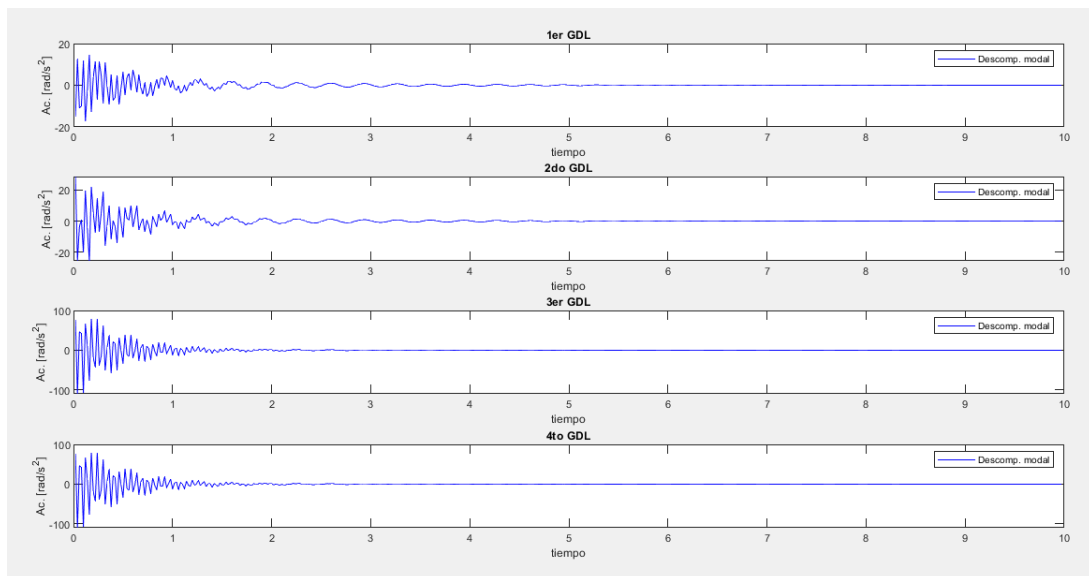


Figura 21: Gráfica de aceleración

10.5. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[1.0123, 0.873, 0.873, 1.0472]$ Y CONSIDERANDO QUE NO TENEMOS CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 310\text{KG}$):

Analizamos el caso para cuando todos los motores tienen una velocidad inicial, es decir:

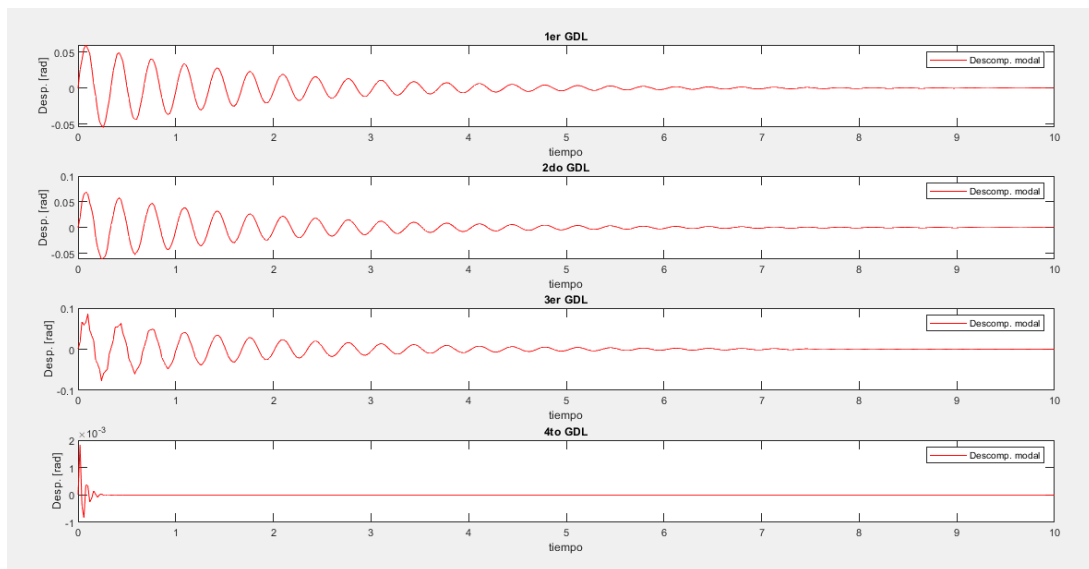


Figura 22: Gráfica de posición

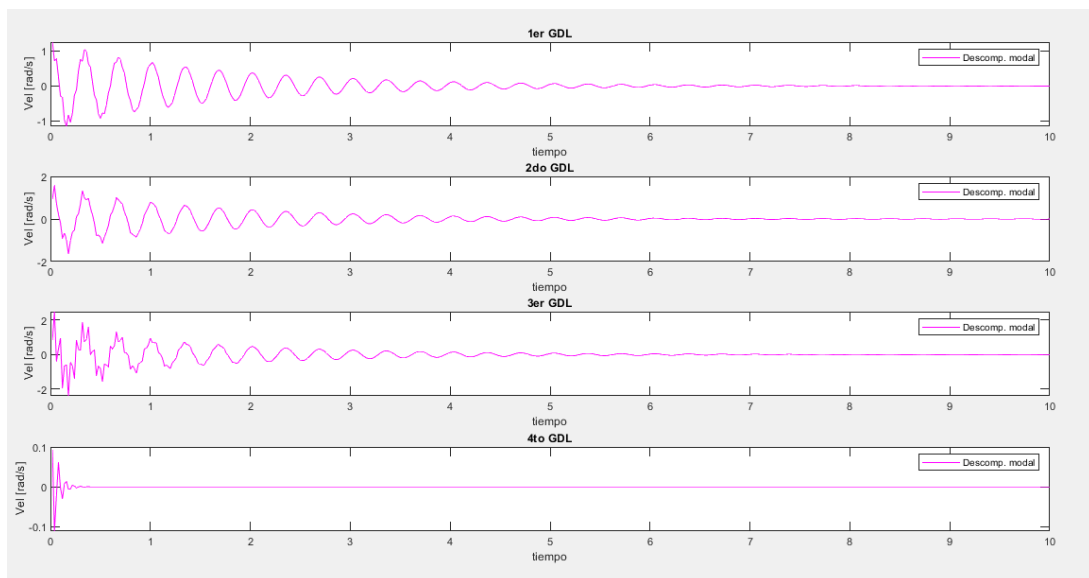


Figura 23: Gráfica de velocidad

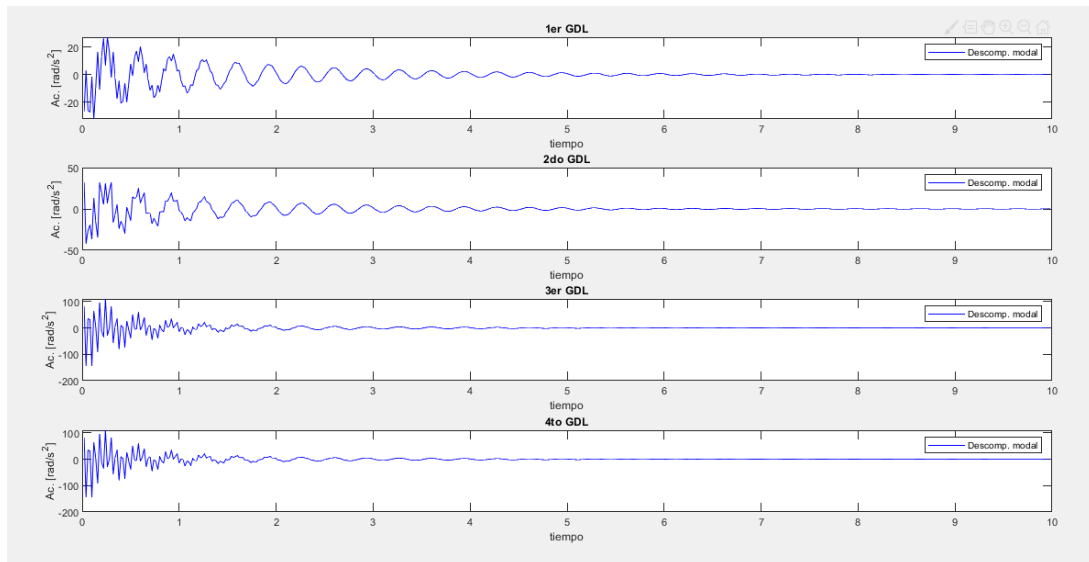


Figura 24: Gráfica de aceleración

10.6. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[1.0123, 0, 0, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE SE TIENE CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4=810$ KG):

Ahora consideraremos una carga que se sostiene en el efector final de 500kg, por lo cual m_4 aumentará de 310kg a 810 kg.

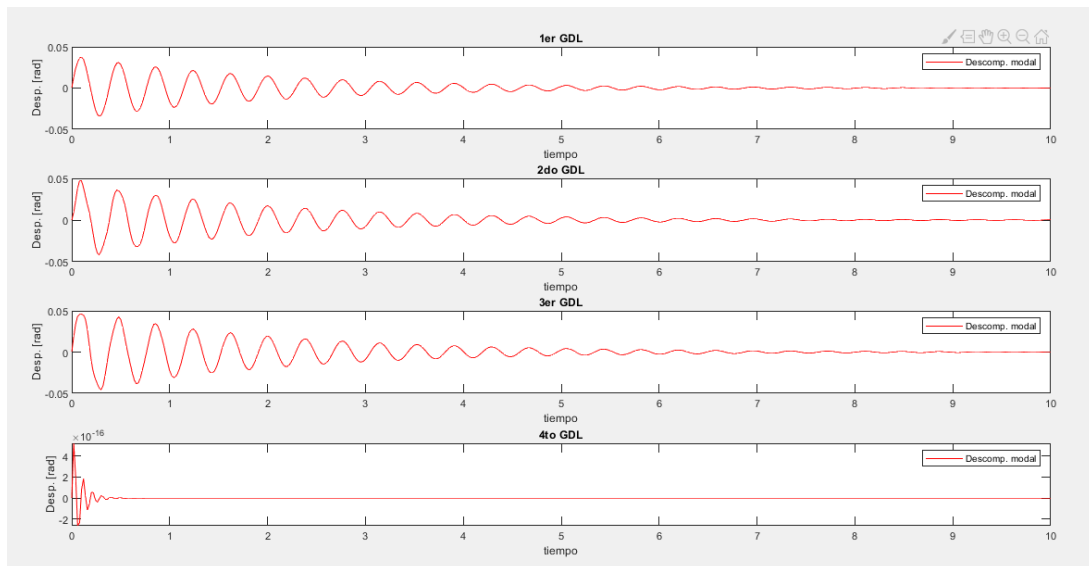


Figura 25: Gráfica de posición

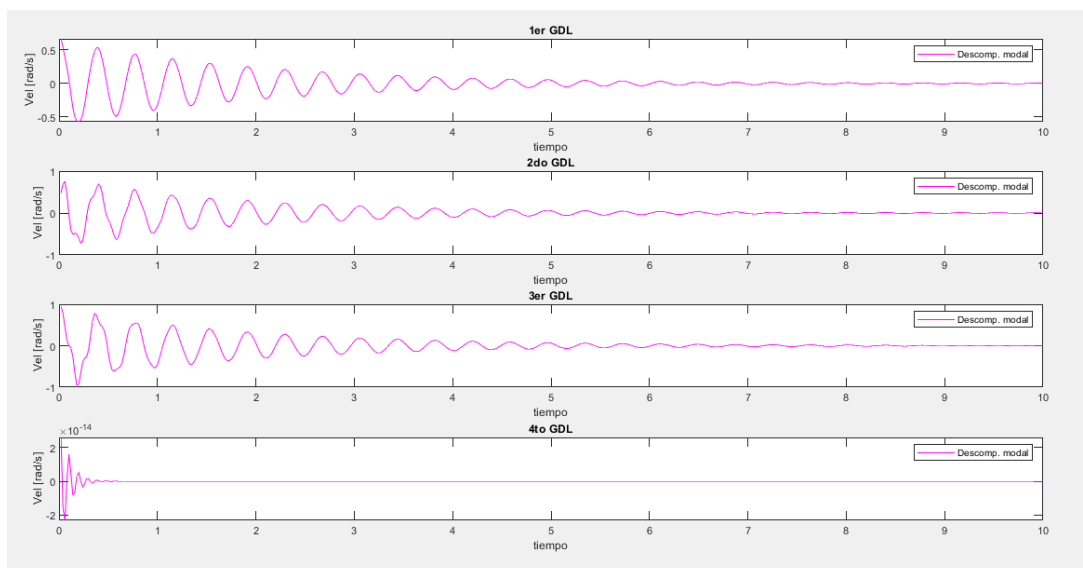


Figura 26: Gráfica de velocidad

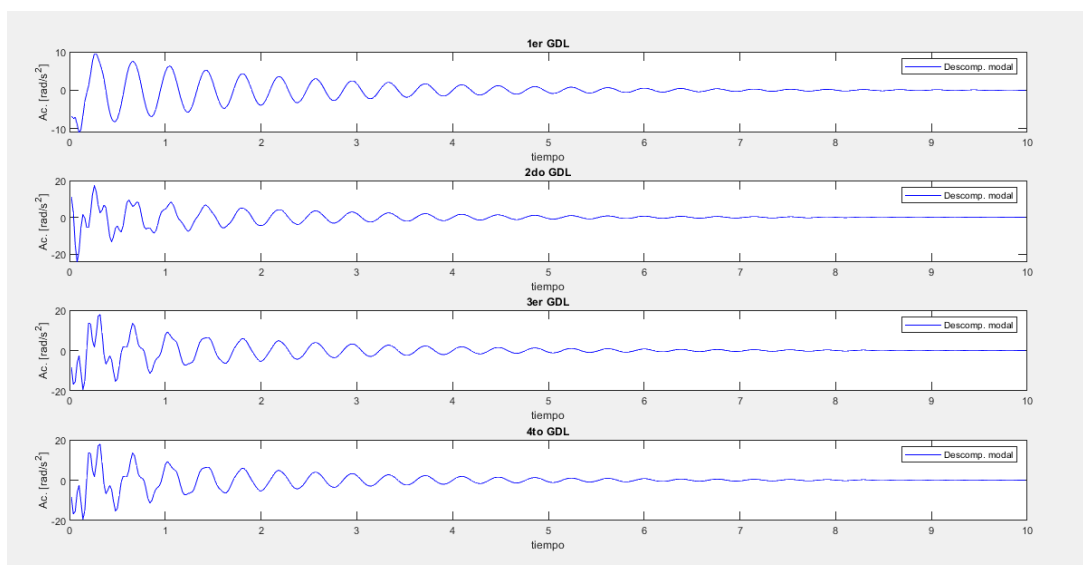


Figura 27: Gráfica de aceleración

10.7. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0.873, 0, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE SE TIENE CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4=810$ KG):

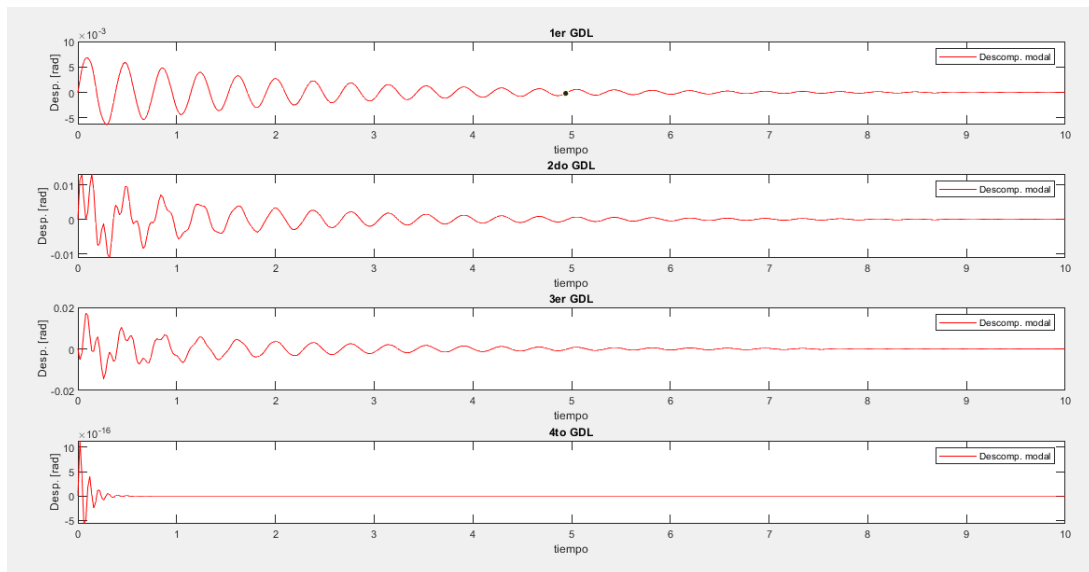


Figura 28: Gráfica de posición

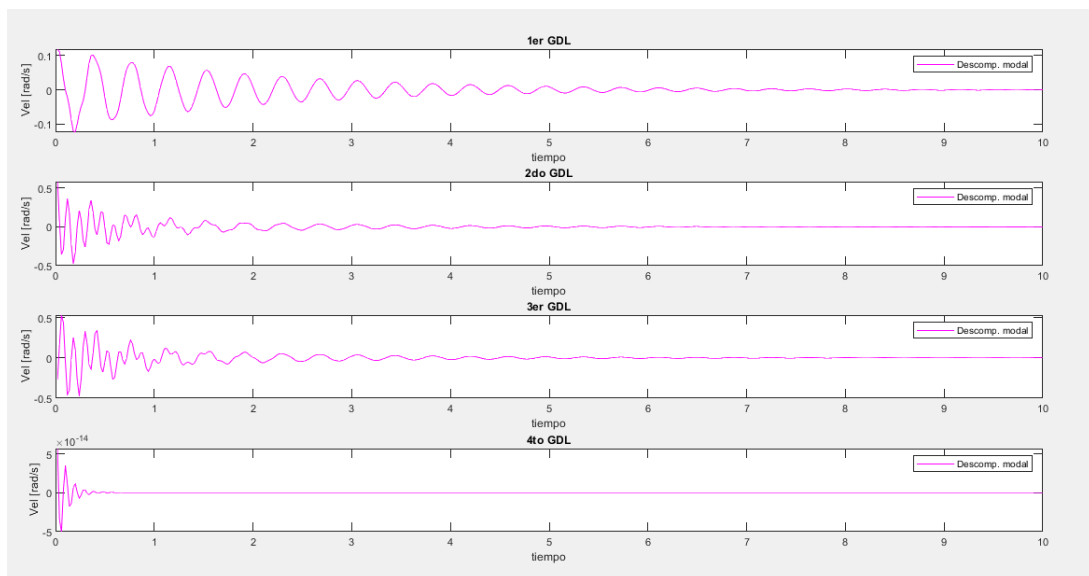


Figura 29: Gráfica de velocidad

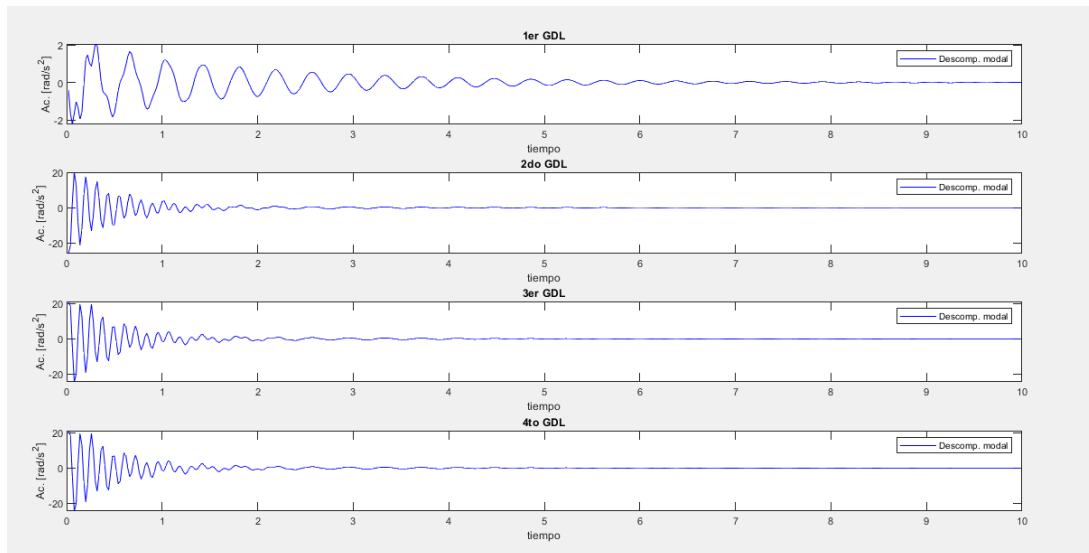


Figura 30: Gráfica de aceleración

10.8. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0, 0.873, 0]$ Y CONSIDERANDO QUE SE TIENE CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4=810$ KG):

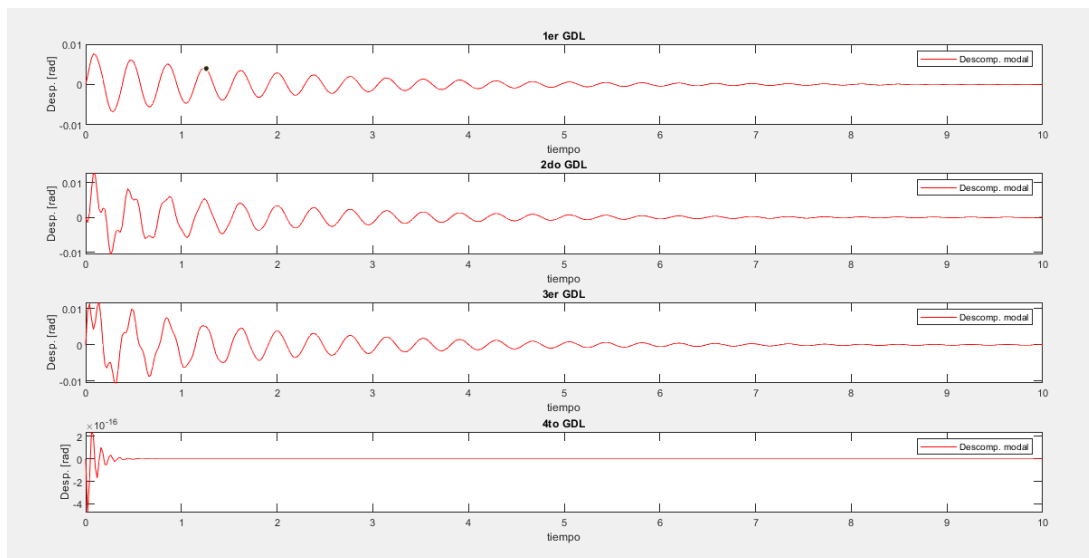
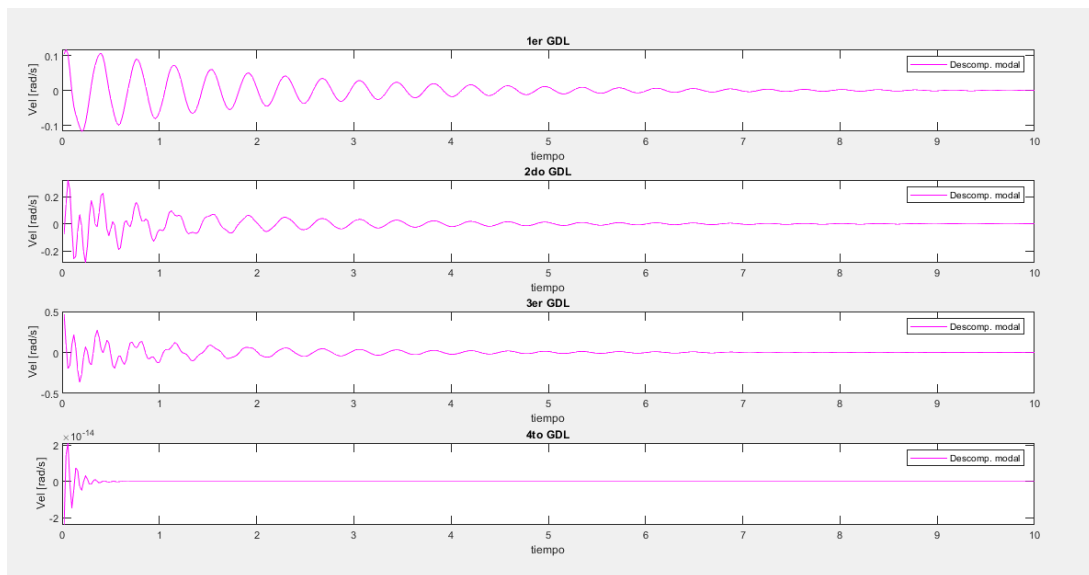
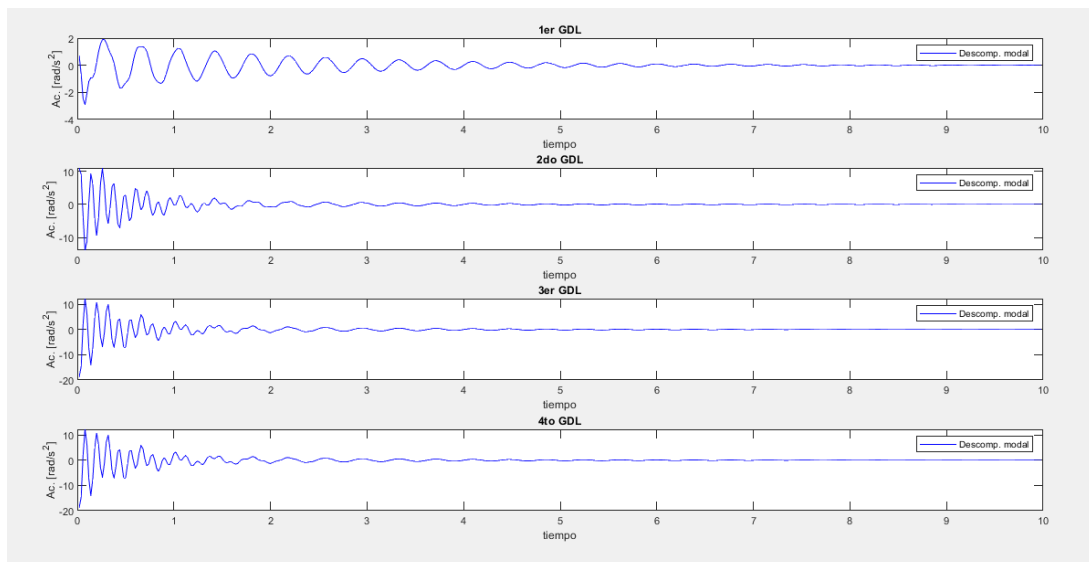


Figura 31: Gráfica de posición

**Figura 32:** Gráfica de velocidad**Figura 33:** Gráfica de aceleración

10.9. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[0, 0, 0, 1.0472]$ Y CONSIDERANDO QUE SE TIENE CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4=810$ KG):

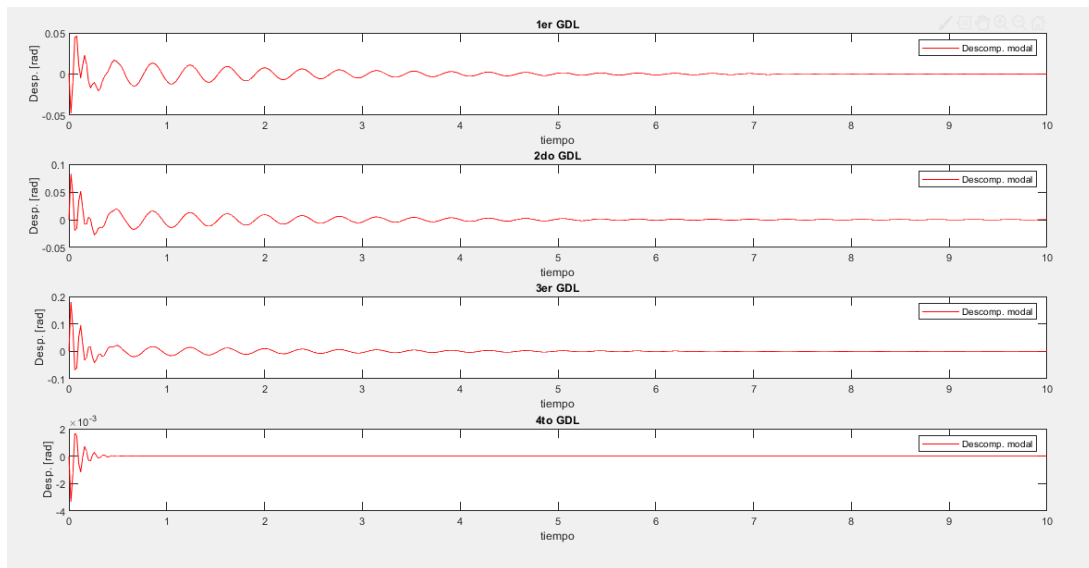


Figura 34: Gráfica de posición

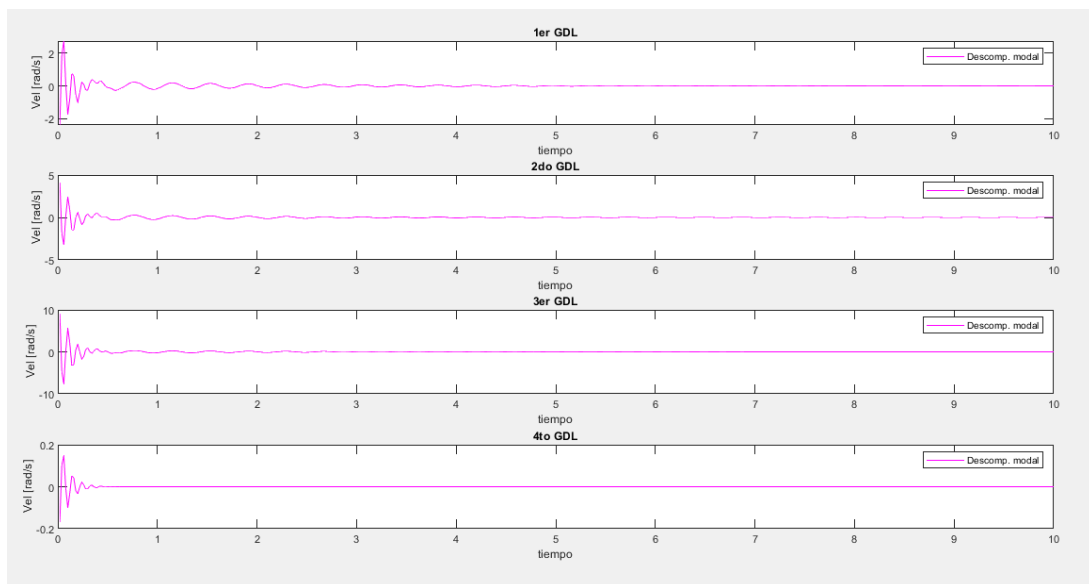


Figura 35: Gráfica de velocidad

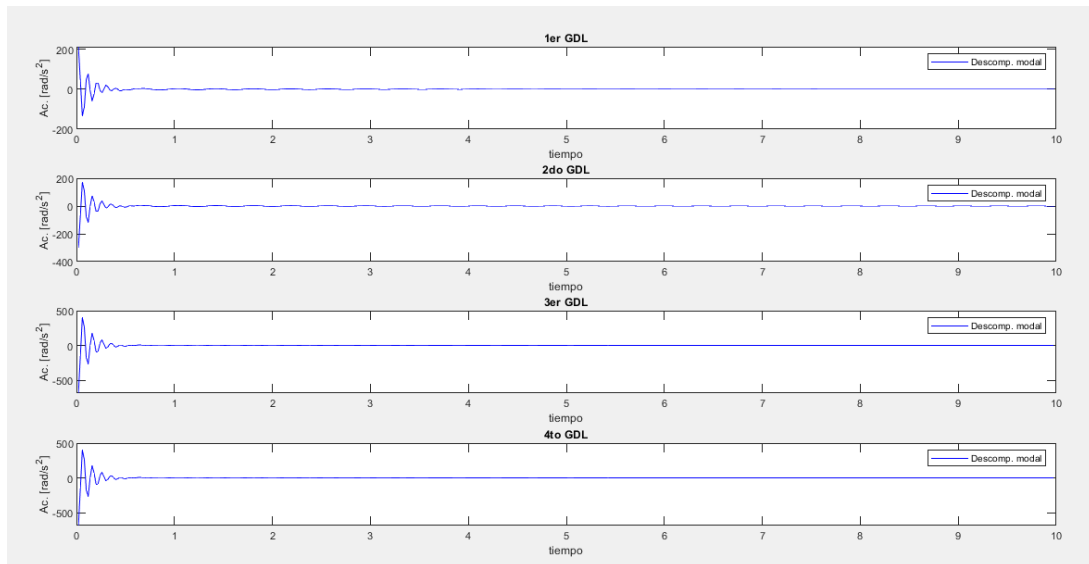


Figura 36: Gráfica de aceleración

10.10. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[1.0123, 0.873, 0.873, 1.0472]$ Y CONSIDERANDO QUE SE TIENE CARGA ADICIONAL EN EL EFECTOR FINAL ($m_4= 810$ KG):

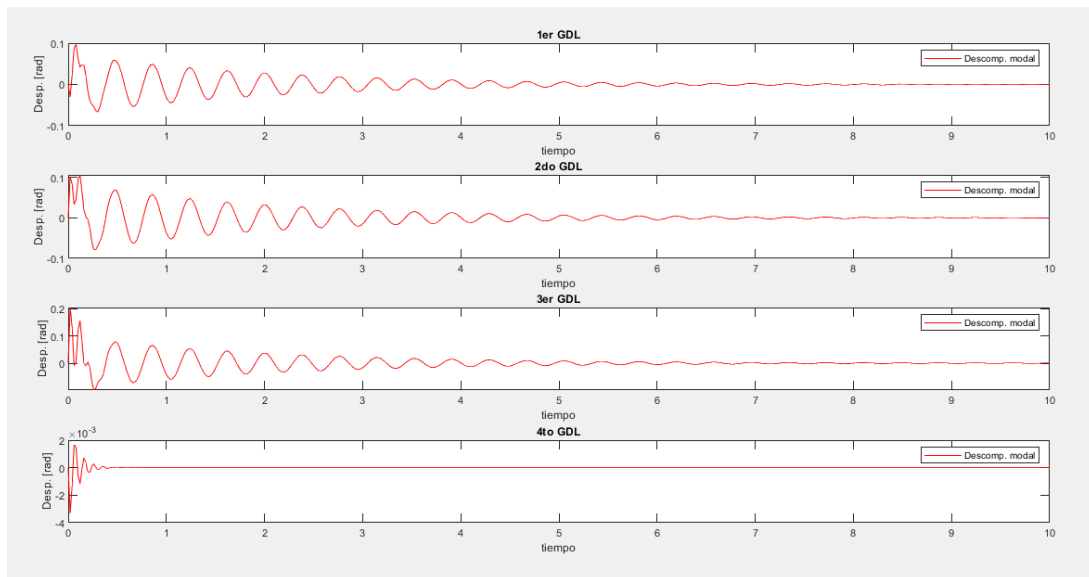


Figura 37: Gráfica de posición

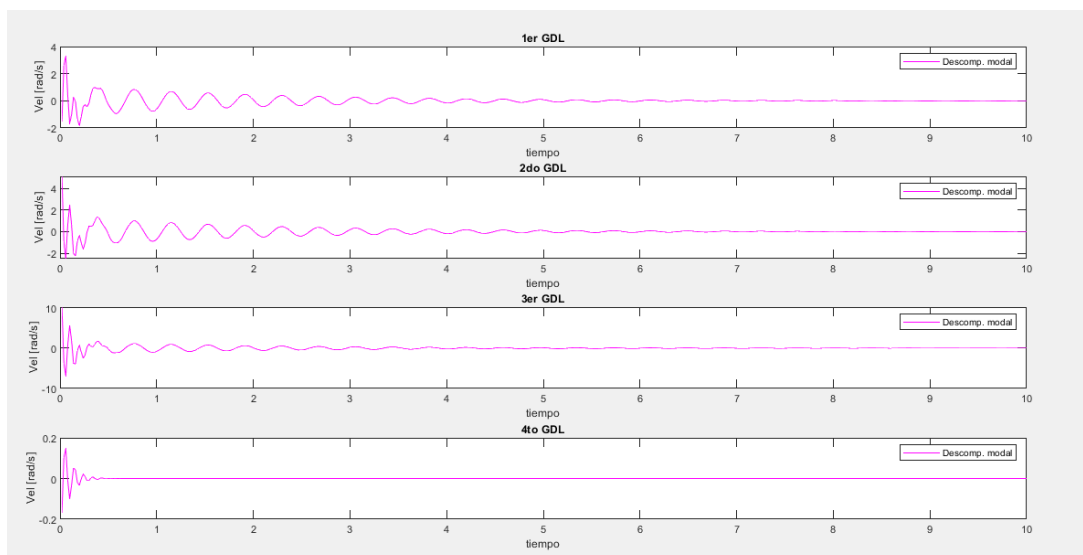


Figura 38: Gráfica de velocidad

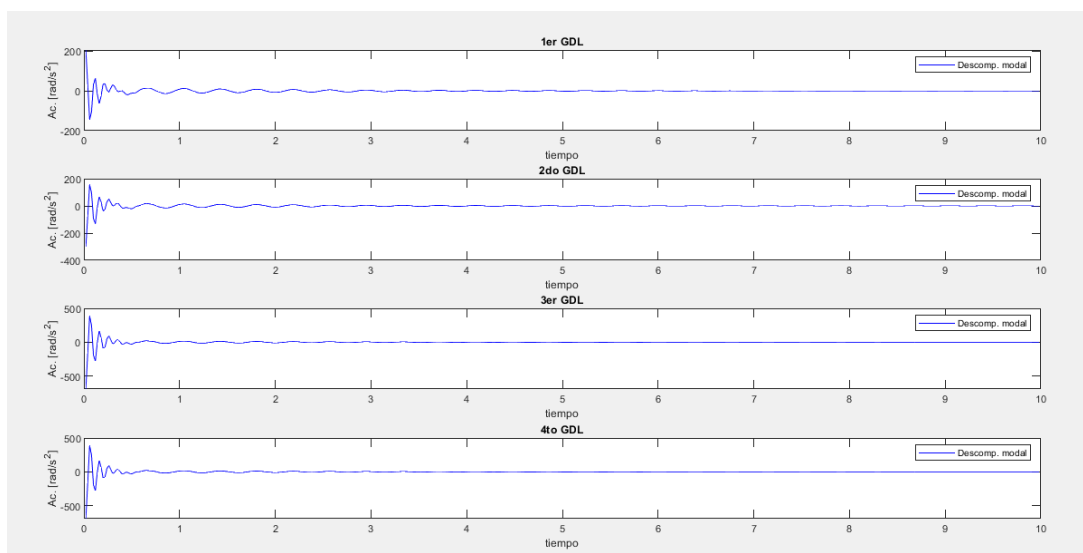


Figura 39: Gráfica de aceleración

11. ANÁLISIS DE DATOS OBTENIDOS

Para realizar una comparación, analizaremos el caso en el que se considera una velocidad inicial para el 1° gdl y otro para todos los grados de libertad con y sin carga.

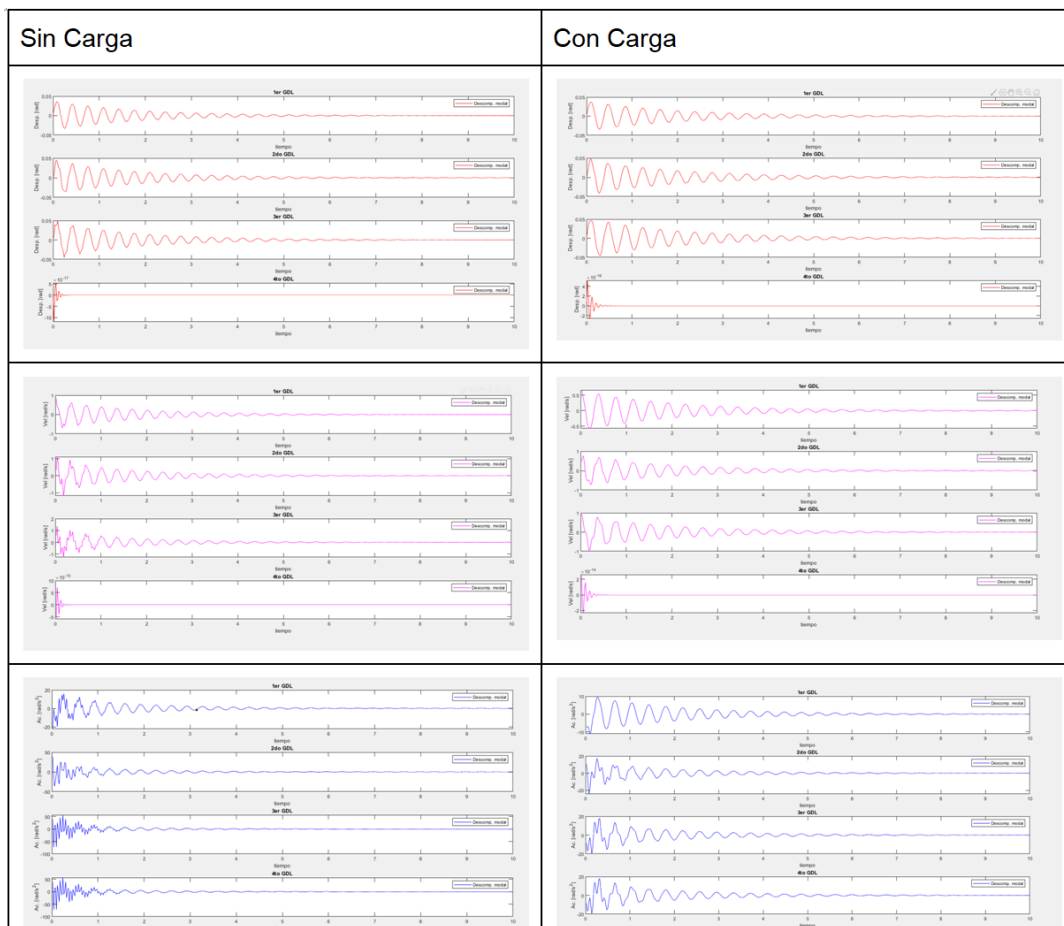


Figura 40: Para $V_0=[1.0123, 0, 0, 0]$

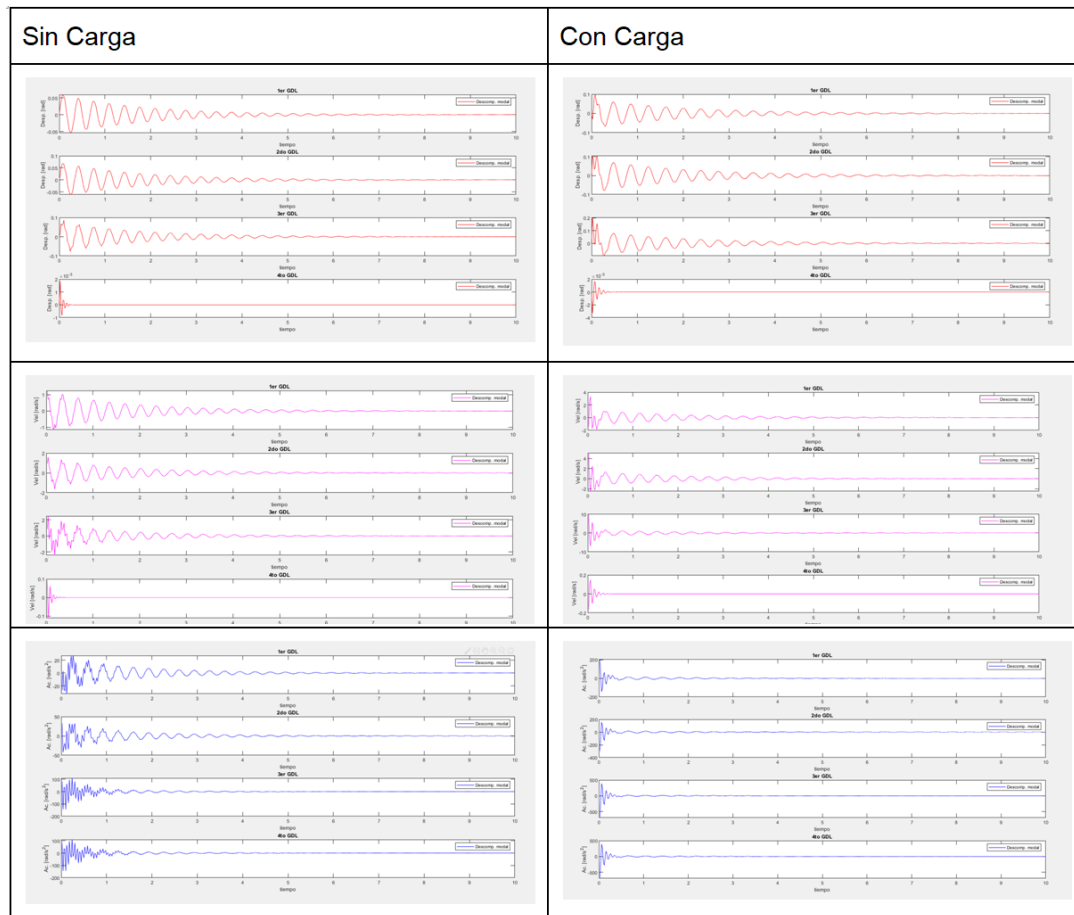


Figura 41: Para $V_0=[1.0123, 0.873, 0.873, 1.0472]$

Analizando los primeros 3 gdl que son más representativos en nuestro sistema, si damos una condición inicial de Velocidad en todos los gdl (el peor de los casos) con o sin carga:

11.1. PARA $X_0=[0, 0, 0, 0]$ Y $V_0=[1.0123, 0, 0, 0]$

Sin Carga	Desplazamiento(rad)				Velocidad(rad/s)				Aceleración(rad/s ²)			
	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4
Valor Mínimo	-0.0329	-0.0354	-0.0451	-1.1904e-16	-0.6882	-1.1664	-1.2621	-5.9520e-15	-22.3775	-36.1853	-73.5336	-73.5336
Valor Máximo	0.03570	0.04415	0.0493	5.4207e-17	0.8321	1.10856	1.36639	7.2369e-15	15.8150	99.3047	56.8648	56.8648

Figura 42: Tabla(1). Parámetros Máximos y Mínimos ante condición inicial de velocidad en 1° GDL sin carga adicional

Con Carga	Desplazamiento(rad)				Velocidad(rad/s)				Aceleración(rad/s ²)			
	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4
Valor Mínimo	-0.03427	-0.0414	-0.0455	-2.6236	-0.5707	-0.7164	-0.9518	-2.3155e-14	-11.0099	-24.3825	-19.3841	-19.3841
Valor Máximo	0.0376	0.0476	0.04586	5.2046e-16	0.6644	0.7522	0.9415	2.6023e-14	9.5166	17.0533	17.7977	17.7977

Figura 43: Tabla(2). Parámetros Máximos y Mínimos ante condición inicial de velocidad en 1° GDL con carga adicional

En el caso que el primer servo se moviera a máxima velocidad, se puede observar que el 1° gdl, con una amplitud máxima absoluta en desplazamiento sin carga de 0.067 rad(3.83°) y con carga de 0.071 rad(4.068°). Comparando las gráficas con el siguiente paper: Vibration damping control of robot arm intended for service application in human environment.

Logramos obtener resultados similares ante los resultados experimentales en la magnitud de la oscilación en desplazamiento del 1° GDL. Por lo cual podemos asegurar que el sistema resiste cambios en la velocidad angular y provee un comportamiento dinámico fluido.

El sistema rechaza perturbaciones de tal forma que podemos afirmar que el sistema ya no vibra luego de 4 segundos

El gdl más afectado es el 3° gdl, con una amplitud máxima absoluta en desplazamiento sin carga de 0.09 rad(5.15°) y con carga de 0.09 rad(5.15°)

Sin Carga	Desplazamiento(rad)				Velocidad(rad/s)				Aceleración(rad/s ²)			
	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4
Valor Minimo	-0.05447	-0.06137	-0.07637	-8.3405e-04	-1.1496	-1.6618	-2.3933	-0.1113	-32.193	-42.0457	-1.4340e+02	-1.43401e+02
Valor Maximo	0.06011	0.06912	0.08456	0.00183	1.2517	1.5734	2.4866	0.0916	27.1122	32.2617	1.1008e+02	1.1008e+02

Figura 44: Tabla(3). Parámetros Máximos y Mínimos ante condición inicial de velocidad en cada GDL sin carga adicional

Con Carga	Desplazamiento(rad)				Velocidad(rad/s)				Aceleración(rad/s ²)			
	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4
Valor Minimo	-0.0662	-0.0793	-0.0984	-0.0033	-1.8321	-2.5049	-6.9337	-0.1659	-1.4427e+02	-3.02513e+02	-6.9172e+02	-6.9172e+02
Valor Maximo	0.09666	0.10616	0.2036	0.0017	3.2912	5.1067	10.18108	0.14760	2.0597e+02	1.5517e+02	3.8363e+02	3.8363e+02

Figura 45: Tabla(4). Parámetros Máximos y Mínimos ante condición inicial de velocidad en cada GDL con carga adicional

En el caso que todos los servos se movieran al mismo tiempo a máxima velocidad, podemos observar que el gdl más afectado es el 3° gdl, con una amplitud máxima absoluta en desplazamiento sin carga de 0.16 rad(9.16°) y con carga de 0.298 rad (17.07°).

12. CONCLUSIONES

Respecto a la Estructura y comportamiento Robot KUKA: Analizando la tabla(1), y observando el desplazamiento sufrido por el 1° gdl al momento de darle una condición inicial de velocidad a este, podemos observar que el valor máximo de desplazamiento en grados es de cerca 1.8°, el cual se atenúa totalmente luego de 4 segundos. Al compararlo con otros estudios y papers podemos asegurar que es un valor aceptable y describe un buen comportamiento del brazo robótico.

Analizando la tabla(4), observamos que este es el caso más exigido y en sí poco probable, ya que en la realidad no es común que se desplacen más de 2 articulaciones al mismo tiempo a máxima velocidad, y además sosteniendo una carga adicional $m_4=500\text{kg}$. Podemos observar que el valor máximo de desplazamiento en grados es de cerca 9.5°, el cual se atenúa totalmente luego de 5 segundos. También se puede observar que al momento de sostener la carga adicional, las aceleraciones angulares aumentan en gran medida.

13. BIBLIOGRAFÍA Y CITAS

La bibliografía debe incluirse mediante un archivo .bib con el mismo nombre que el archivo principal y utilizando el paquete biblatex (ya incluido en la clase). Únicamente deben incluirse referencias citadas en el artículo.

El estilo bibliográfico a usar es APA séptima edición, algunos ejemplos e información se pueden encontrar en: <https://apastyle.apa.org/style-grammar-guidelines/references/examples>. Y una versión traducida en: <https://normasapa.pro/>.

Para las citas puede utilizar los siguientes comandos según sea adecuado:

- Cita completa entre paréntesis `\parencite{ }`: (Mittelbach e Imarin, 1993)
- Cita completa sin paréntesis `\textcite{ }`: Mittelbach e Imarin (1993)
- Cita completa entre paréntesis `\cite{ }`: Mittelbach e Imarin, 1993
- Cita de autor `\citeauthor{ }`: Mittelbach e Imarin
- Cita de año `\citeyear{ }`: 1993
- Cita con opciones extras `\parencite[][]{ }`: (ver Mittelbach e Imarin, 1993, pág. 66)

Información adicional sobre el paquete biblatex puede encontrarse en: <http://tug.ctan.org/info/biblatex-cheatsheet/biblatex-cheatsheet.pdf>

Finalmente, se presentan ejemplos de referencias que se pueden utilizar:

- Artículos de revista: Einstein, 1905
- Libros: Goossens et al., 1993
- Libros: Mittelbach e Imarin, 1993
- Tesis: Chaucanes Cadena, 2011
- Sitios web: Knuth, s.f.
- Videos: Harvard, 2019

REFERENCIAS

Chaucanes Cadena, J. M. (2011). *PTF ampliado con capital humano mediante números índices y métodos paramétricos*. (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Occidente. <https://red.uao.edu.co/bitstream/handle/10614/10053/T07714.pdf?sequence=1>

Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10), 891-921. <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>

Goossens, M., Mittelbach, F. y Samarin, A. (1993). *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley.

Harvard, U. (2019). *Pinza robótica suave para medusas*. <https://www.youtube.com/watch?v=guRoWTYfxMs>

Knuth, D. (s.f.). *Knuth: Computers and Typesetting*. <http://www-cs-faculty.stanford.edu/%5C~%7B%7Duno/abcde.html>

Mittelbach, F. e Imarin, A. (1993). *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley.