Complejidad y Optimización

Robinson Duque, M.Eng, Ph.D

Universidad del Valle

robinson.duque@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

Programación Lineal- Introducción

- Programación lineal (LP) es el término utilizado para definir una amplia gama de problemas de optimización
- la función objetivo que se debe minimizar o maximizar es lineal en las variables desconocidas
- las restricciones son una combinación de igualdades y desigualdades lineales

Programación Lineal- Introducción

- los problemas de LP ocurren en muchas situaciones económicas de la vida real donde los beneficios deben maximizarse o los costos deben minimizarse con límites de restricción de recursos
- estudiaremos el método símplex para solucionar problemas de LP, sin embargo, *nos enfocaremos principalmente en el modelado de problemas* debido a que se vuelve necesario el uso de computadoras incluso para un pequeño número de variables
- comúnmente utilizado en problemas que involucran decisiones de dieta, transporte, producción y manufactura, combinación de productos, análisis de límites de ingeniería en diseño, programación de aerolíneas, etc.

Programación Lineal- Forma general

La forma general de un problema de programación lineal tiene una función objetivo y un conjunto de restricciones:

```
maximize    c1x1 + c2x2 + c3x3 + ... + cnxn
subject to  :

% Restricciones LE (i = 1...l)
ai1x1 + ai2x2 + ai3x3 + ... + ainxn <= bi

% Restricciones GE (j = l+1...l+r)
aj1x1 + aj2x2 + aj3x3 + ... + ajnxn >= bj

% Restricciones EQ (k = l+r+1...l+r+q)
ak1x1 + ak2x2 + ak3x3 + ... + aknxn = bk

x1 >= 0, x2 >= 0, ..., xn >= 0  % Restricciones de no
    negatividad
```

$$\text{maximize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1 \ldots l)$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \geq b_j \quad (j = l+1 \ldots l+r)$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \quad (k = l+r+1 \ldots l+r+q)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Programación Lineal- Forma general

- El número de restricciones es $m = l + r + q$
- c_j y a_{ij} son coeficientes constantes
- b_j son constantes reales fijas, los cuales están ajustados a valores no negativos
- x_j son variables de decisión
- los límites de i y j son: $i = 1 \ldots m$ equivalente al número de restricciones; $j = 1 \ldots n$ equivalente al número de variables

Los problemas LP son problemas **convexos**, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Una empresa que fabrica computadores de mesa y notebook desea saber cuántos computadores debe producir para maximizar sus ganancias:

- Cada computador (de mesa o notebook) requiere de un chip de procesamiento. La empresa cuenta con 10.000 chips.
- Cada computador requiere memoria. La memoria viene en chips de 16MB, un notebook requiere 1 chip (16MB), mientras un computador de mesa requiere de 2 chips (32MB). Se cuenta con un inventario de 15.000 chips.
- Cada computador requiere tiempo de ensamblaje, un notebook toma 4 minutos y uno de mesa toma 3 minutos. Se tienen 25.000 minutos de ensamblaje disponibles.
- Cada notebook genera $750 de ganancia y uno de mesa genera $1000.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Algunas preguntas:

- ¿Cuántos computadores de cada tipo se deben producir para maximizar las ganancias?
- ¿Cuál el la ganancia máxima que se puede obtener?

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Variables de decisión:** a diferencia de valores del problemas que nos son dados o que pueden ser calculados simplemente de lo que nos proveen, las variables representan valores desconocidos.

  En este caso las variables son el número de notebooks y el número de computadores de mesa y las representaremos con x_1 y x_2 respectivamente.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Función objetivo:** cada LP tiene una función objetivo a maximizar o minimizar. El objetivo debe ser lineal respecto a las variables de decisión, lo cual significa que debe ser una suma de constantes que multiplican las variables de decisión (e.g., $3x_1 + 2x_2$); (x_1x_2) no es lineal.

  En este caso nuestro objetivo es maximizar las ganancias y sabemos que cada notebook genera \$750 de ganancia y uno de mesa genera \$1000. Por lo tanto tendremos que:

$$750x_1 + 1000x_2$$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Restricciones:** en este problema tenemos 4 tipos de restricciones: chips de procesamiento, memoria, tiempo de ensamblaje, no negatividad. Las restricciones deben ser lineales (e.g., $3x_1 + 2x_2 \geq 5$ es una restricción lineal); ($x_1 x_2 \leq 3$ o $x_1^2 \geq 7$) no son lineales.

  Chips disponibles: $x_1 + x_2 \leq 10000$
  Memoria disponible: $x_1 + 2x_2 \leq 15000$
  Ensamblaje: $4x_1 + 3x_2 \leq 25000$
  No negatividad: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & f = 750x_1 + 1000x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \leq 10000 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 15000 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 25000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Implementación en MiniZinc

```
var int: x_1;   % Variable entera sin cota superior
var int: x_2;   % Variable entera sin cota superior

constraint x_1 + x_2 <= 10000;
constraint x_1 + 2*x_2 <= 15000;
constraint 4*x_1 + 3*x_2 <= 25000;
constraint x_1 >= 0;
constraint x_2 >= 0;

solve maximize 750*x_1 + 1000*x_2;

output ["x_1=", show(x_1),"\n x_2=",show(x_2)];
```

Solución: $x_1 = 1000$ y $x_2 = 7000$

Solución de LPs de dos variables

Para modelos con dos variables es posible resolver el problema sin una computadora. Se debe dibujar la región factible Ω y determinar cómo se optimiza el objetivo en esa región.

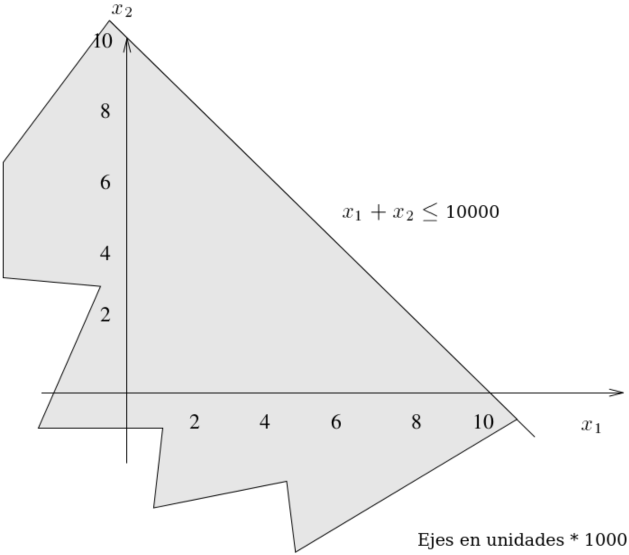
Recordemos que los LPs son problemas convexos, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global. Las restricciones definen una región factible que puede ser:

- acotada
- no acotada
- inconsistente (en cuyo caso, no existe una solución)

Solución de LPs de dos variables

- Podemos representar un modelo con dos variables etiquetando los ejes de un gráfico con cada una de las variables.
- La gráfica completa representa las posibles decisiones.
- Las restricciones están representadas por líneas en el gráfico, con la región factible situada en un lado de la línea. La siguiente figura ilustra esto con la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$.
- Se deben hallar los interceptos con los ejes x_1, x_2. Para esto se utiliza $x_1 + x_2 = 10000$ y se evalúa con $x_1 = 0$ para hallar el intercepto sobre x_2; de igual forma se procede para hallar el intercepto sobre x_1.
- Se evalúa el lado factibe de la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$ igualando x_1 y x_2 a cero.

Solución de LPs de dos variables

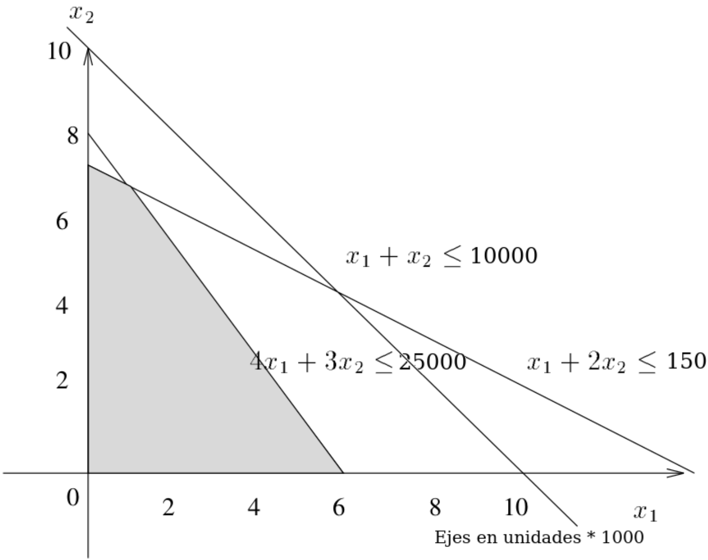


Ejes en unidades * 1000

Solución de LPs de dos variables

- Podemos continuar este proceso y agregar todas las restricciones.
- Dado que cada restricción debe ser satisfecha, la región factible resultante es la intersección de la región factible para cada restricción. Esto se muestra en la siguiente figura.

Solución de LPs de dos variables



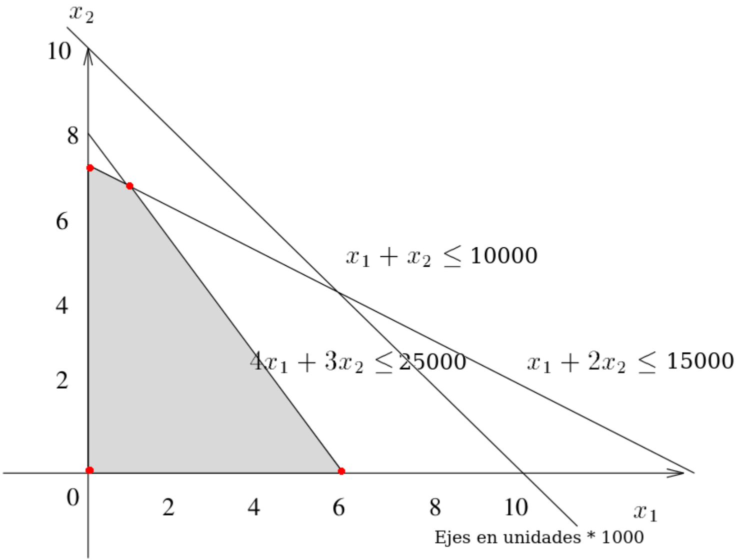
Solución de LPs de dos variables

- Tenga en cuenta que solo graficar el modelo nos da información que no teníamos antes. Parece que la restricción de Chip ($x_1 + x_2 \leq 10000$) juega poco papel en este modelo. Esta restricción está dominada por otras restricciones.

Ahora, ¿cómo podemos encontrar la solución óptima?

- Se deben encontrar los valores de los puntos de intersección en la región factible y evaluar la función objetivo.

Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

- Existe un punto en (0,0).
- Hallar el intercepto de $x_1 + 2x_2 \leq 15000$ sobre el eje x_2. Entonces, si $x_1 + 2x_2 = 15000$ y $x_1 = 0$, se tiene que $x_2 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(0, 7500)$.
- Hallar el intercepto de $4x_1 + 3x_2 \leq 25000$ sobre el eje x_1. Entonces, si $4x_1 + 3x_2 = 25000$ y $x_2 = 0$, se tiene que $x_1 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(6250, 0)$.
- Hallar el intercepto entre $x_1 + 2x_2 = 15000$ y $4x_1 + 3x_2 = 25000$, para esto se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene (1000,7000).

Al evaluar los puntos con la función:

`maximize` $f = 750x_1 + 1000x_2$

Se obtiene la solución óptima para $x_1 = 1000, x_2 = 7000$.

Solución de LPs de dos variables

Se requiere mezclar dos tipos de alimentos X y Y para alimentar ganado. Cada porción requiere de por lo menos 60 gramos de proteina y por lo menos 30 gramos de grasa. Un paquete de X cuesta \$80 y contiene 15 gramos de de proteina y 10 gramos de grasa; Un paquete de Y cuesta \$50 y contiene 20 gramos de proteina y 5 gramos de grasa.

¿Cuánto de cada tipo X y Y se debe usar para minimizar el costo de la producción de alimento?

- Modele el problema como un LP
- Encuentre la solución óptima utilizando el método presentado para dos variables
- *Implemente la solución en MiniZinc y verifique su resultado

Solución de LPs de dos variables- Ejercicio

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 80X + 50Y \\
\texttt{subject to} & 15X + 20Y \geq 60 \\
 & 10X + 5Y \geq 30 \\
 & X \geq 0 \\
 & Y \geq 0
\end{array}
$$

Solución de LPs de dos variables- Ejercicio

Implementación en MiniZinc:

```
var float: X;
var float: Y;
var float: C;

constraint 15*X + 20*Y >= 60;
constraint 10*X + 5*Y >= 30;
constraint X>=0;
constraint Y>=0;
constraint C=80*X+50*Y;
solve minimize C;
output ["X=", show(X), "\n Y=", show(Y), "\n C=",
    show(C)];
```

Solución: X=2.4, Y=1.2, C=252.0

Fin de la Presentación

¿Preguntas?

References I