Problema do Caixeiro Viajante

Isabel de Castro Cordeiro

2021

1 Modelagem matemática

Dado um conjunto de cidades, o problema do caixeiro viajante consiste em encontrar a rota de menor custo total que visita cada uma das cidades apenas uma vez e retorna à cidade inicial. As cidades representam os vértices de um grafo completo cujos pesos associados às arestas são custos associados à realização de uma viagem entre um par de cidades; Na verdade, o problema do caxeiro viajante corresponde a uma generalização do problema do ciclo hamiltoniano no qual se deseja encontrar um ciclo de menor peso total em um grafo ponderado.

As variáveis de decisão para o problema são:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se a cidade } j \text{ sucede a cidade } i \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{1}$$

Em que $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, j é o número de cidades e x_{ij} é definida somente para $i \neq j$. O custo total da rota é dado pela função objetivo:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_{ij} x_{ij}, \tag{2}$$

onde que c_{ij} é o custo associado ao arco entre as cidades i e j, e está frequentemente associado à tempo ou distância entre as cidades.

Restrições "de entrada". Cada cidade deve ser visitada a partir de uma única cidade:

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1, \ j \in \{1, ..., n\}. \tag{3}$$

Restrições "de saída". A partir de uma cidade, deve-se visitar apenas uma próxima cidade:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \ i \in \{1, ..., n\}. \tag{4}$$

Utilizaremos a formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ) para restrições de exclusão de subrotas. logo, para a exclusão de subrotas, é necessário adicionar restrições do tipo:

$$\sum_{(i,j)\in(S)} x_{ij} \leq |\mathcal{S}| - 1, \ \forall \mathcal{S} \subset \mathcal{V}, \mathcal{S} \neq \emptyset \tag{5}$$

em que $\mathcal{S}$ denota um conjunto de vértices que formam uma subrota (um ciclo) no grafo e $|\mathcal{S}|$ é a cardinalidade do conjunto.

Portanto, a formulação final para o problema do caxeiro viajante será:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} \\
\sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in \{1, ..., n\}. \\
\sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in \{1, ..., n\}. \\
\sum_{(i,j) \in (S)} x_{ij} \leq |\mathcal{S}| - 1,\ \forall \mathcal{S} \subset V, S \neq \emptyset \\
x_{ij} \in \{0, 1\},\ i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j.
\end{aligned}
\tag{6}
$$