Transformada rápida de Fourier

Métodos de Rader y Bluestein

María Arranz y Celia Rubio

Índice

Introducción

Sea el polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x^i$.

Definición

$\mathrm{DFT}(P, \xi) = \left(P(1), P(\xi), P(\xi^2)...\right) = D(\xi) \cdot (a_0, a_1, a_2...)$

donde $D(\xi)_{(i,j)} = \xi^{ij}$ para $i, j \in \{0, ..., N-1\}$.

Es decir, para $j \in \{0, ..., N-1\}$:

$$\mathrm{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}$$

En clase hemos visto Cooley–Tukey para N potencia de 2:

$$\mathrm{DFT}(P, \xi)_{(j)} = P(\xi^j) = P_{par}(\xi^{2j}) + \xi^j \cdot P_{impar}(\xi^{2j})$$

Método de Rader (I)

Si N primo $\implies \left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)^*$ es el grupo cíclico C_{N-1} de orden $N-1$.

- Tiene un generador g de orden $N-1$.
- g^{-1} también es un generador.

Retomando la fórmula:

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}$$

En concreto, $\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(0)} = P(1) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$.

El resto de índices $j \in \{1, ..., N-1\}$ los vemos dentro de C_{N-1}.

Método de Rader (II)

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(j)} = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}, \quad j \in \{1, ..., N-1\}$$

Los índices k también los vemos dentro de C_{N-1}.

- Escribimos k como potencia de g: $\qquad k = g^{q_k}$
- Escribimos j como potencia de g^{-1}: $\qquad j = (g^{-1})^{p_j} = g^{-p_j}$

$j \mapsto p_j$ y $k \mapsto q_k$ son biyecciones, con $p_j, q_k = 0, ..., N-2$.

Reescribimos la fórmula (quito subíndices para aligerar):

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(g^{-p})} = a_0 + \sum_{q=0}^{N-2} a_{g^q} \cdot \xi^{g^{-(p-q)}}$$

Método de Rader (III)

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(g^{-p})} = a_0 + \sum_{q=0}^{N-2} a_{g^q} \cdot \xi^{g^{-(p-q)}}$$

Es la convolución cíclica de $u(n) = \xi^{g^{-n}}$ y $v(m) = a_{g^m}$.

$$(u * v)_p = \sum_{\substack{n+m \equiv p \pmod{N-1} \\ n,m=0}}^{N-2} u(n) \cdot v(m) = (\mathrm{IDFT}\,(\mathrm{DFT}(u) \cdot \mathrm{DFT}(v)))_p$$

¿Cómo lo calculamos? Necesitamos:

- **Alargar con ceros** u y v para que tengan longitud potencia de 2.
- Que la solución resultante vuelva a tener longitud $N-1$.

Rellenado con ceros (I)

Sean A y B de longitud M.
Rellenamos con ceros hasta $\ell = 2^x > 2M$:

$$\mathcal{A} = A + [0] * (\ell - M) \qquad \mathcal{B} = B + [0] * (\ell - M)$$

Hacemos la convolución de las extensiones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A} * \mathcal{B})_k = \sum_{i+j=k} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j + \cancelto{0}{\sum_{i+j=k+\ell} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j}$$

El segundo sumatorio tiene todos sus términos nulos.
Si $i < M$ entonces $j >= M$, y viceversa:

$$j = k + \ell - i > k + 2M - M = k + M \geq M$$

Rellenado con ceros (II)

Además, si i o $j >= M$ entonces el sumando es 0, así que los índices solo llegan hasta $M - 1$.

$$(\mathcal{A} * \mathcal{B})_k = \sum_{i+j=k} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j = \sum_{i+j=k} A_i \cdot B_j$$

¿Cómo se recupera entonces la convolución original?

$$(A * B)_k = \sum_{i+j=k} A_i \cdot B_j + \sum_{i+j=k+M} A_i \cdot B_j$$

$$= (\mathcal{A} * \mathcal{B})_k + (\mathcal{A} * \mathcal{B})_{k+M}$$

Método de Bluestein (I): CZT

La transformada Z chirp (CZT)

- Generalización de la DFT, tomando puntos sobre arcos espirales en el Z-plano (lineas rectas en el S-plano)

Definición

Sea $X_k = CZT_k$ para A, W y M dados:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \qquad z_k = A \cdot W^{-k}, k = 0, \ldots, M-1$$

A número complejo de partida, W ratio complejo entre puntos, M número de puntos a calcular.

Bluestein (II)

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{-jk}$$

Reemplazando *jk* por la siguiente identidad:

$$jk = \frac{k^2 + j^2 - (j-k)^2}{2}$$

Se obtiene:

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{-(\frac{k^2+j^2-(j-k)^2}{2})} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{\frac{-k^2}{2}} \cdot \xi^{\frac{-j^2}{2}} \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}} =$$

$$= \boxed{\xi^{\frac{-j^2}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cdot \xi^{\frac{-k^2}{2}}) \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}}}$$

Bluestein (III)

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \xi^{\frac{-j^2}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cdot \xi^{\frac{-k^2}{2}}) \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}}$$

Que es una convolución de las secuencias $u(n)$ y $v(n)$ dadas por:

$$u(n) = a_n \cdot \xi^{\frac{-n^2}{2}}$$

$$v(n) = \xi^{\frac{n^2}{2}}$$

Con el resultado de la convolución multiplicado por N factores $v^*(j)$, $j \in \{0, ..., N-1\}$. Esto es:

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = v^*(j) \left(\sum_{k=0}^{N-1} u(k) \cdot v(j-k) \right) = v^*(j)(u * v)_j$$

Bluestein (IV)

Por el teorema de convolución, se tiene, por tanto:

$$\mathrm{DFT}(P,\xi)_{(j)} = v^*(j)(u * v)_j = v^*(j) \cdot (\mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(u) \cdot \mathrm{DFT}(v)))_j$$

$$j \in \{0, ..., N-1\}$$

De manera más abreviada:

$$\mathrm{DFT}(P,\xi) = v^* \cdot (u * v) = v^* \cdot \mathrm{IDFT}(\mathrm{DFT}(u) \cdot \mathrm{DFT}(v))$$

Con lo que se obtiene una implementacion de complejidad $\mathcal{O}(n \log n)$