

Transformada rápida de Fourier

Métodos de Rader y Bluestein

María Arranz y Celia Rubio

Índice

1 Introducción

2 Método de Rader

3 Rellenado con ceros

4 Método de Bluestein

Introducción

Sea el polinomio $P(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x^i$.

Definición

$$\text{DFT}(P, \xi) = (P(1), P(\xi), P(\xi^2), \dots) = D(\xi) \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

donde $D(\xi)_{(i,j)} = \xi^{ij}$ para $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Es decir, para $j \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}$$

En clase hemos visto Cooley–Tukey para N potencia de 2:

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = P(\xi^j) = P_{\text{par}}(\xi^{2j}) + \xi^j \cdot P_{\text{impar}}(\xi^{2j})$$

Método de Rader (I)

Si N primo $\implies (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ es el grupo cíclico C_{N-1} de orden $N - 1$.

- Tiene un generador g de orden $N - 1$.
- g^{-1} también es un generador.

Retomando la fórmula:

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}$$

En concreto, $\text{DFT}(P, \xi)_{(0)} = P(1) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$.

El resto de índices $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ los vemos dentro de C_{N-1} .

Método de Rader (II)

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cdot \xi^{jk}, \quad j \in \{1, \dots, N-1\}$$

Los índices k también los vemos dentro de C_{N-1} .

- Escribimos k como potencia de g : $k = g^{q_k}$
- Escribimos j como potencia de g^{-1} : $j = (g^{-1})^{p_j} = g^{-p_j}$

$j \mapsto p_j$ y $k \mapsto q_k$ son biyecciones, con $p_j, q_k = 0, \dots, N-2$.

Reescribimos la fórmula (quito subíndices para aligerar):

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(g^{-p})} = a_0 + \sum_{q=0}^{N-2} a_{g^q} \cdot \xi^{g^{-(p-q)}}$$

Método de Rader (III)

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(g^{-p})} = a_0 + \sum_{q=0}^{N-2} a_{g^q} \cdot \xi^{g^{-(p-q)}}$$

Es la convolución cíclica de $u(n) = \xi^{g^{-n}}$ y $v(m) = a_{g^m}$.

$$(u * v)_p = \sum_{\substack{n+m \equiv p \pmod{N-1} \\ n, m=0}}^{N-2} u(n) \cdot v(m) = (\text{IDFT}(\text{DFT}(u) \cdot \text{DFT}(v)))_p$$

¿Cómo lo calculamos? Necesitamos:

- **Alargar con ceros** u y v para que tengan longitud potencia de 2.
- Que la solución resultante vuelva a tener longitud $N - 1$.

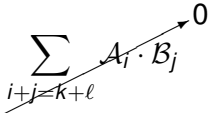
Rellenado con ceros (I)

Sean A y B de longitud M .

Rellenamos con ceros hasta $\ell = 2^k > 2M$:

$$\mathcal{A} = A + [0] * (\ell - M) \quad \mathcal{B} = B + [0] * (\ell - M)$$

Hacemos la convolución de las extensiones \mathcal{A} y \mathcal{B} :

$$(\mathcal{A} * \mathcal{B})_k = \sum_{i+j=k} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j + \sum_{i+j=k+\ell} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j$$


El segundo sumatorio tiene todos sus términos nulos.

Si $i < M$ entonces $j \geq M$, y viceversa:

$$j = k + \ell - i > k + 2M - M = k + M \geq M$$

Rellenado con ceros (II)

Además, si i o $j \geq M$ entonces el sumando es 0, así que los índices solo llegan hasta $M - 1$.

$$(\mathcal{A} * \mathcal{B})_k = \sum_{i+j=k} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j = \sum_{i+j=k} \mathcal{A}_i \cdot \mathcal{B}_j$$

¿Cómo se recupera entonces la convolución original?

$$\begin{aligned} (A * B)_k &= \sum_{i+j=k} A_i \cdot B_j + \sum_{i+j=k+M} A_i \cdot B_j \\ &= (\mathcal{A} * \mathcal{B})_k + (\mathcal{A} * \mathcal{B})_{k+M} \end{aligned}$$

Método de Bluestein (I): CZT

La transformada Z chirp (CZT)

- Generalización de la DFT, tomando puntos sobre arcos espirales en el Z-plano (lineas rectas en el S-plano)

Definición

Sea $X_k = CZT_k$ para A , W y M dados:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z_k^{-n} \quad z_k = A \cdot W^{-k}, k = 0, \dots, M-1$$

A número complejo de partida, W ratio complejo entre puntos, M número de puntos a calcular.

Bluestein (II)

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{-jk}$$

Reemplazando jk por la siguiente identidad:

$$jk = \frac{k^2 + j^2 - (j - k)^2}{2}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{DFT}(P, \xi)_{(j)} &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{\left(\frac{k^2 + j^2 - (j-k)^2}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \xi^{-\frac{k^2}{2}} \cdot \xi^{-\frac{j^2}{2}} \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}} = \\ &= \boxed{\xi^{-\frac{j^2}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cdot \xi^{-\frac{k^2}{2}}) \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}}} \end{aligned}$$

Bluestein (III)

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = \xi^{\frac{-j^2}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cdot \xi^{\frac{-k^2}{2}}) \cdot \xi^{\frac{(j-k)^2}{2}}$$

Que es una convolución de las secuencias $u(n)$ y $v(n)$ dadas por:

$$u(n) = a_n \cdot \xi^{\frac{-n^2}{2}}$$

$$v(n) = \xi^{\frac{n^2}{2}}$$

Con el resultado de la convolución multiplicado por N factores $v^*(j)$, $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Esto es:

$$\text{DFT}(P, \xi)_{(j)} = v^*(j) \left(\sum_{k=0}^{N-1} u(k) \cdot v(j-k) \right) = v^*(j)(u * v)_j$$

Bluestein (IV)

Por el teorema de convolución, se tiene, por tanto:

$$\begin{aligned} \text{DFT}(P, \xi)_{(j)} &= v^*(j)(u * v)_j = v^*(j) \cdot (\text{IDFT}(\text{DFT}(u) \cdot \text{DFT}(v)))_j \\ j &\in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

De manera más abreviada:

$$\text{DFT}(P, \xi) = v^* \cdot (u * v) = v^* \cdot \text{IDFT}(\text{DFT}(u) \cdot \text{DFT}(v))$$

Con lo que se obtiene una implementación de complejidad $\mathcal{O}(n \log n)$