Lab. de Física 1, Exp. 3: Lei de Hooke

Clebson Abati Graeff

18 de março de 2025

UTFPR–PB

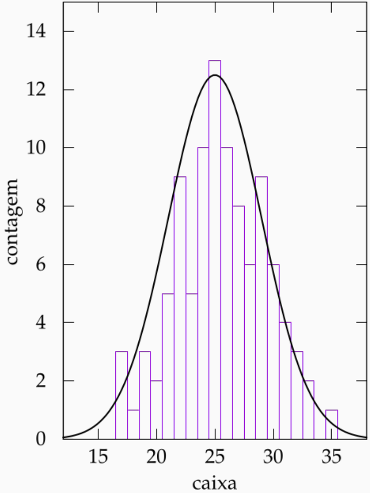
Regressão linear

Erros aleatórios e dispersão

- Quando uma medida é realizada, sempre há um erro aleatório em seus valores;
- O tamanho desse erro depende de características do fenômeno em si e dos equipamentos de medida utilizados;
- Em alguns casos ele pode ser pouco significativo, em outros muito significativo;
- O efeito desse tipo de erro é de causar uma *dispersão* dos dados em torno do valor mais provável para a medida.

Como eliminar o efeito da dispersão?

- Estatisticamente, a dispersão pode ser eliminada em uma variável ao fazermos diversas medidas;
- Como os erros são aleatórios, eles seguem uma distribuição normal, cujo centro — que é o valor mais provável — pode ser obtido simplesmente calculando a média dos valores obtidos para as diversas medidas.



Como eliminar o efeito da dispersão?

- **Exemplo:** Cálculo da gravidade usando o tempo de queda por uma distância $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$ fixa
  - Considerando as medidas

$$t_1 = 0{,}426\,15\,\mathrm{s} \tag{1}$$

$$t_2 = 0{,}484\,15\,\mathrm{s} \tag{2}$$

$$t_3 = 0{,}449\,25\,\mathrm{s} \tag{3}$$

obtemos

$$\langle t \rangle = 0{,}453\,19\,\mathrm{s}. \tag{4}$$

  - Calculando a aceleração da gravidade, temos

$$g = \frac{2 \cdot h}{t^2} \tag{5}$$

$$= 9{,}74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{6}$$

Como eliminar o efeito da dispersão?

- Apesar de o cálculo da média ser uma opção efetiva para a eliminação do erros aleatórios, ela não é a melhor opção;
- Em casos partículares, ela pode não eliminar o erro adequadamente;
- Além disso, para o caso de pontos discrepantes (emphoutliers), a média pode ser significativamente afetada;
- Uma maneira mais efetiva de eliminar esses efeitos é através do *ajuste de curvas*.

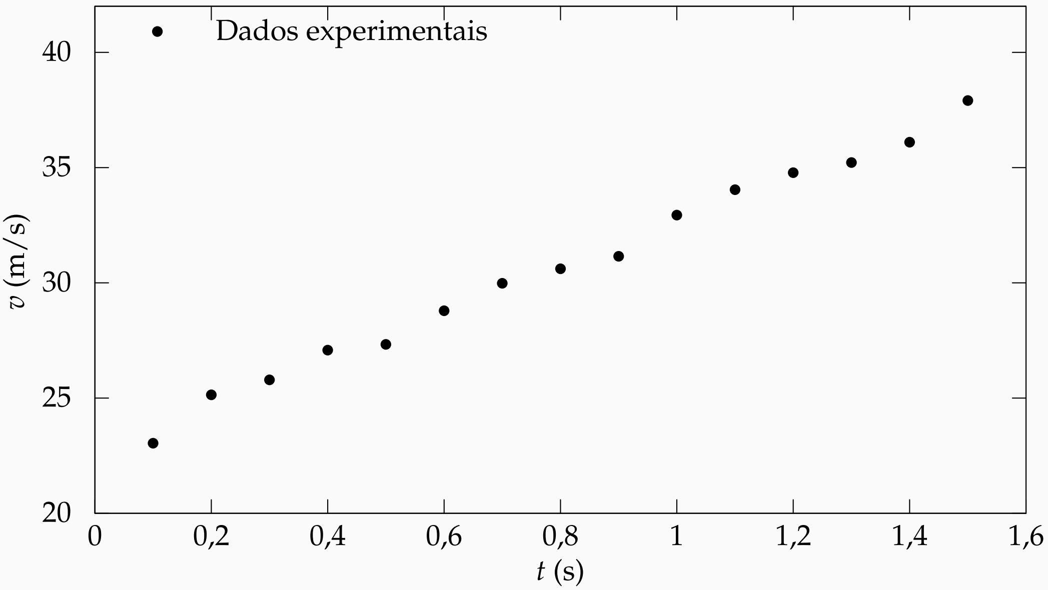
Ajuste de curvas

Como eliminar o erro aleatório de duas variáveis relacionadas?

- Quando temos duas variáveis cujos valores queremos correlacionar, é comum que façamos um gráfico;
- Com isso, podemos transformar uma tabela de dados em uma representação visual, cujas características são mais fáceis de perceber/entender;
- No entanto, tanto a variável do eixo horizontal, quanto a do eixo vertical, podem ter erros aleatórios em seus valores;
- Como poderíamos determinar a melhor descrição da relação dessas duas variáveis de maneira a eliminar os erros aleatórios?

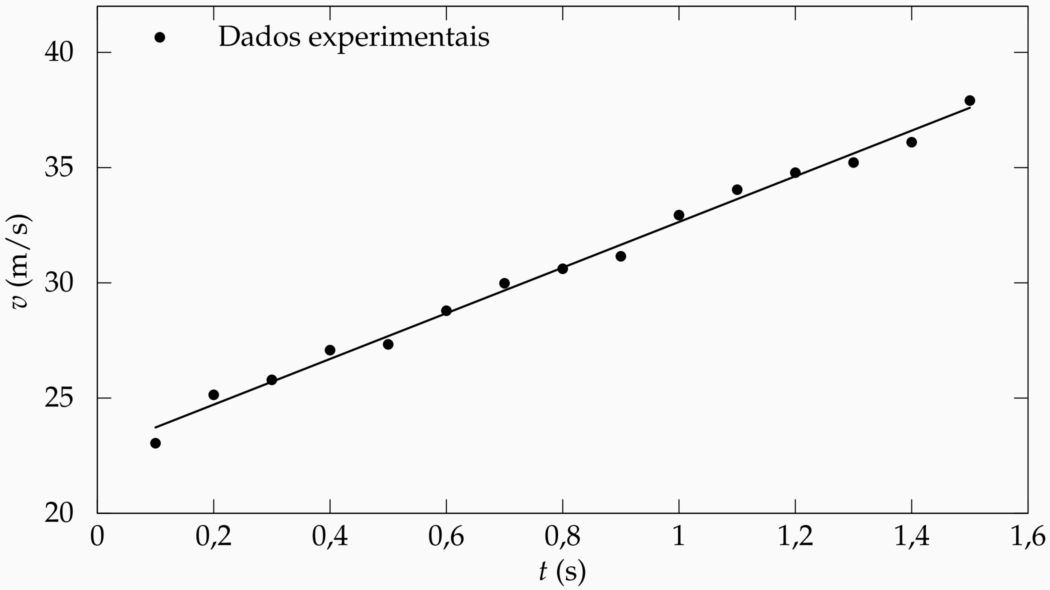
Como eliminar o erro aleatório de duas variáveis relacionadas?

Gostaríamos de determinar uma relação para um gráfico como o seguinte …


Dados experimentais
40
35
30
25
20
v (m/s)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
t (s)

Como eliminar o erro aleatório de duas variáveis correlacionadas?

… e obter …


Dados experimentais
40
35
30
25
20
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
v (m/s)
t (s)

Ajuste de curvas

- Podemos determinar os melhores parâmetros para uma curva qualquer considerando um conjuntos de dados;
- Para algumas curvas, existe uma expressão fechada para cada parâmetro;
- Para os demais casos podemos usar um processo iterativo com precisão arbitrária;
- Note, no entanto, *que precisamos decidir qual curva queremos ajustar de antemão*;
- **A determinação da melhor curva é importante para a determinação de bons valores para parâmetros físicos importantes dos fenômeno físico estudado.**

Regressão linear

Regressão linear

- A relação mais simples entre duas variáveis, excetuando-se o caso de função constante é uma *equação da reta*: $y(x) = A + B \cdot x$;
- A determinação dos coeficientes que melhor descrevem os dados é denominada *regressão linear*;
- Os coeficientes A e B são calculados a partir dos N pontos experimentais através de suas abscissas x_i e ordenadas y_i;
- Os coeficientes A e B têm unidades iguais às do eixo vertical e da razão entre as unidades do eixo vertical e do eixo horizontal, respectivamente.
- O coeficiente A é denominado *coeficiente linear* e corresponde ao ponto onde a reta intercepta o eixo vertical em $x = 0$;
- O coeficiente B é denominado *coeficiente angular* e corresponde à tangente do ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo horizontal;

- A *decisão* de empregar uma regressão linear deve ser baseada na teoria que *presumimos* descrever o fenômeno em questão. Isto é, **a equação teórica tem que ter a cara de uma equação da reta**;
- Em casos onde não temos uma equação teórica com cara de uma reta, pode ser possível a transformar utilizando mudanças de variáveis e obter uma nova equaçãom com cara de uma reta (faremos isso em experimentos futuros);

Determinação dos coeficientes A e B

- Os coeficientes A e B podem ser calculados de maneira a minimizar a soma dos quadrados das distâncias dos pontos à reta;
- Tal processo é comumente denominado como "mínimos quadrados";
- As expressões resultantes são (as somas são em $i = 1$ até N):

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

- Vamos determinar esses valores *usando uma calculadora*!

Obtendo parâmetros físicos a partir de uma melhor curva

- Através de uma comparação entre a equação do fenômeno e a correspondente regressão, identificamos os valores dos parâmetros físicos;
- A interpretação muda de fenômeno para fenômeno;

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$
$$y(x) = A + B \cdot x$$

***

$$L(T) = L_0 + \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$
$$y(x) = A + B \cdot x$$

***

$$s(t) = s_0 + \frac{a}{2} \cdot t^2$$
$$y(x) = A + B \cdot x$$

Coeficiente de correlação linear

- Ao calcularmos a regressão linear, obtemos também um *coeficiente de correlação linear* r^2 que é uma "medida" de quão bem alinhados os pontos estão. Seu valor é determinado por

$$r = \frac{\sum(x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum(x_i - \langle x \rangle)^2 \sum(y_i - \langle y \rangle)^2}}. \tag{7}$$

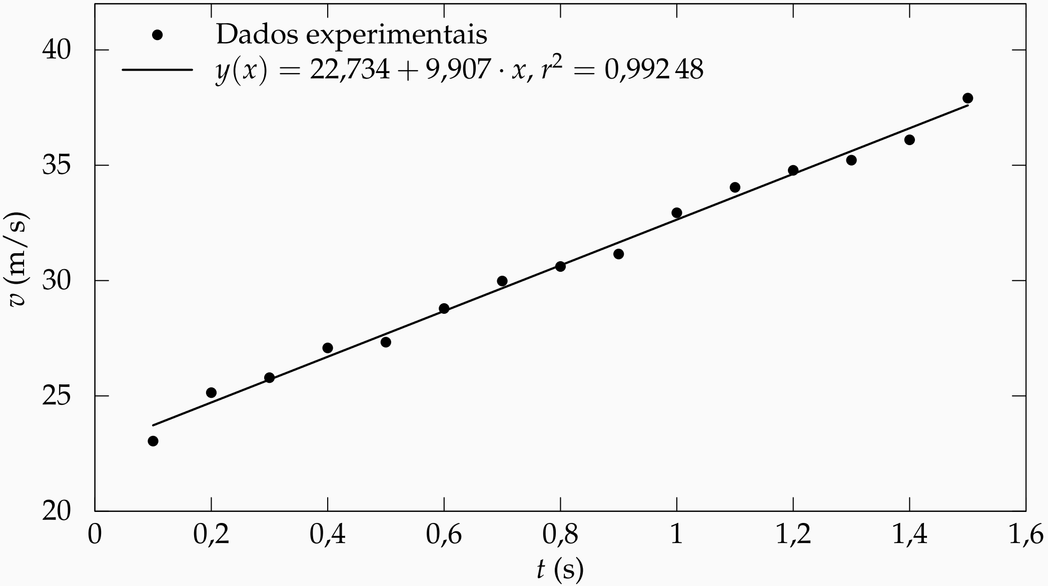
- Seu valores está contido no intervalo $[-1, 1]$, onde -1 representa dados perfeitamente alinhados em uma reta com inclinação negativa e +1 representa dados perfeitamente alinhados em uma reta com inclinação positiva;
- Como, em geral, só estamos interessados em quantificar a linearidade, tomamos o valor do coeficiente ao quadrado, isto é, calculamos r^2.

Coeficiente de correlação linear

- Podemos usar o valor de r^2 para verificar se a hipótese de que os dados seguem uma correlação linear é válida:
  - Se $r^2 \approx 1$, podemos dizer que a hipótese de linearidade entre as variáveis x e $y(x)$ dos eixos horizontal e vertical, respectivamente, foi confirmada.
  - Consequentemente, se confirma a teoria que embasou a nossa decisão de empregar uma regressão linear.

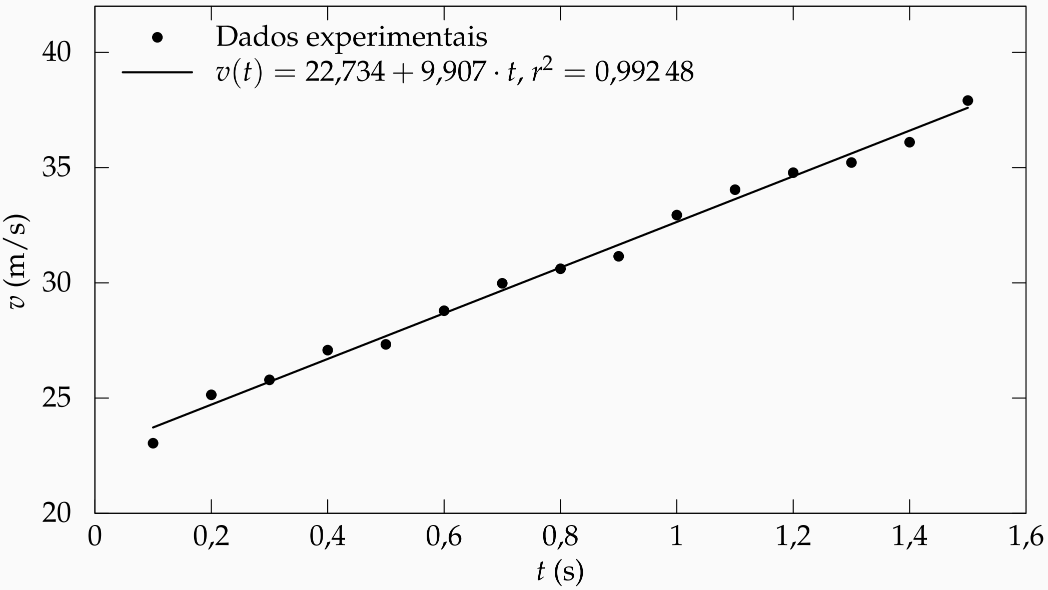
Resultado de uma regressão linear

Considerando tudo isso, obtemos …


Dados experimentais
$y(x) = 22{,}734 + 9{,}907 \cdot x,\ r^2 = 0{,}992\,48$
40
35
30
25
20
v (m/s)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
t (s)

Resultado de uma regressão linear

$\ldots$ ou, usando v e t ao invés de y e x, $\ldots$



Dados experimentais
$v(t) = 22{,}734 + 9{,}907 \cdot t,\ r^2 = 0{,}992\,48$
40
35
30
25
20
v (m/s)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
t (s)

onde

$$A = v_0 = 22{,}734\,\mathrm{m/s}, \tag{8}$$

$$B = a = 9{,}907\,\mathrm{m/s^2}, \tag{9}$$

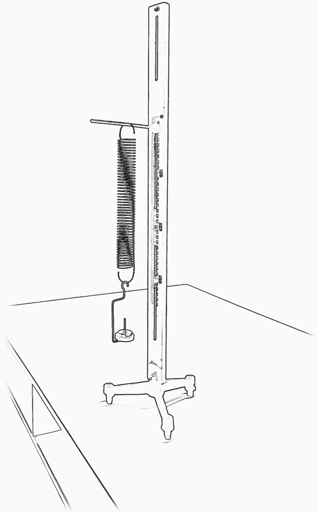
$$r^2 = 0{,}992\,48. \tag{10}$$

Experimento 3, Lei de Hooke

Objetivos

Vamos determinar algumas medidas com o intuito de:

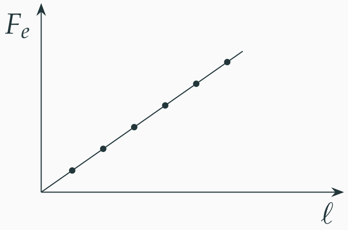
- Verificar a linearidade da distensão de uma mola em resposta à força peso dos objetos pendurados nela;
- Relacionar as variáveis da Lei de Hooke às da equação da reta $y = A + B \cdot x$
- Calcular a constante k da mola;
- Elaborar um gráfico $F_e \times \Delta x$ dos pontos experimentais e adicionar a ele a reta calculada através da regressão linear;



Lei de Hooke

- A Lei de Hooke é uma expressão de uma força linear restauradora dada por

$$F_e = -k \cdot \ell;$$



- Diversos materiais, em condições e limites específicos, seguem a Lei de Hooke;
- Em particular, molas seguem a Lei de Hooke em uma ampla região de deformação;
- Comparando a Lei de Hooke com a eq. da reta, temos

$$y = F_e \qquad x = \ell$$
$$A = 0 \qquad B = k.$$

Procedimento experimental

Etapas:

1. Determinação das massas de um conjunto de anilhas;
2. Determinação da distensão da mola a cada adição;
3. Devido registro das medidas com o número adequado de algarismos significativos;