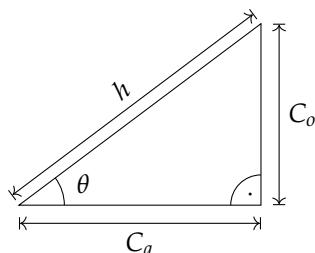


FORMULÁRIO

Relações Trigonômicas



$$\begin{aligned}\sin \theta &= C_o/h & \cos \theta &= C_a/h \\ \tan \theta &= C_o/C_a & h^2 &= C_o^2 + C_a^2\end{aligned}$$

Cinemática unidimensional

Fórmulas para aceleração constante:

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at & \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \Delta x &= v_0 t + \frac{at^2}{2} & \Delta \theta &= \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \\ v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x & \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\Delta \theta \\ \Delta x &= \frac{(v_0 + v)t}{2} & \Delta \theta &= \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \\ \Delta x &= vt - \frac{at^2}{2} & \Delta \theta &= \omega t - \frac{\alpha t^2}{2}\end{aligned}$$

Relações entre as grandezas angulares e lineares:

$$\begin{aligned}s &= \theta r & v &= \omega r \\ a_t &= \alpha r & a_r &= v^2/r = \omega^2 r\end{aligned}$$

Leis de Newton

$$\begin{aligned}\vec{F}_R^{\text{Ext}} &= \frac{d\vec{P}_{\text{CM}}}{dt} & \vec{\tau}_R^{\text{Ext}} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ &= m\vec{a}_{\text{CM}} & &= I\alpha\end{aligned}$$

Momento Linear, Torque e Momento Angular

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} & \vec{\ell} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \tau &= rF \sin \phi & \ell &= rp \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m\vec{v} \\ \vec{L} &= I\vec{\omega}\end{aligned}$$

Se $\vec{F}_R^{\text{Ext}} = 0$, então

$$\vec{P}_{\text{CM}}^i = \vec{P}_{\text{CM}}^f$$

Se $\vec{\tau}_R^{\text{Ext}} = 0$, então

$$\vec{L}^i = \vec{L}^f$$

Trabalho, Energia Potencial e Energia Cinética

$$\begin{aligned}\Delta K &= W \\ \Delta U &= -W \\ E_{\text{Mec}} &= K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} + U\end{aligned}$$

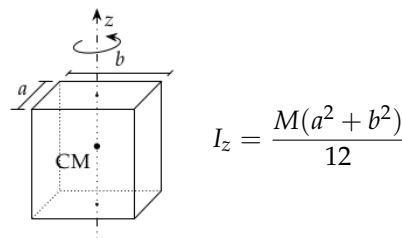
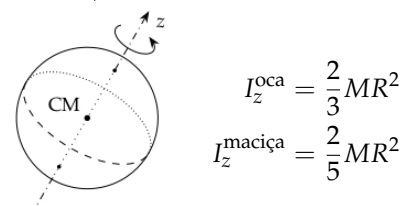
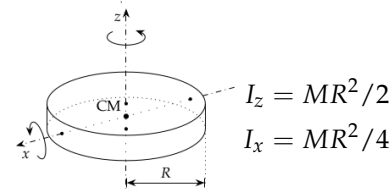
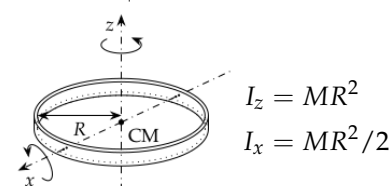
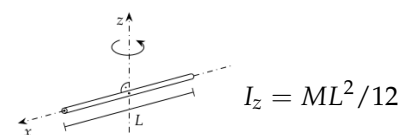
$$\begin{aligned}W &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ W &= \int \tau d\theta \\ W_g &= -mg\Delta h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K &= mv^2/2 \\ K_{\text{rot}} &= I\omega^2/2 \\ U_g &= mgh + C\end{aligned}$$

Momento de Inércia

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$I_p = I_{\text{CM}} + Mh^2$$



CINEMÁTICA DA ROTAÇÃO

1. Um disco ligado a um motor elétrico gira a 500 rev/min quando ocorre uma falta de energia. O disco tem massa 40 kg e diâmetro de 75 cm. A falha no fornecimento de energia dura 30 s e nesse tempo o disco diminui sua velocidade de rotação devido a forças de atrito. Durante tal desaceleração, o disco completa 200 rev.

- Qual a velocidade de rotação quando a energia elétrica volta? [R.: 300 rev/min.]
- Quanto tempo o disco levaria para parar caso a energia não voltasse? [R.: 1,25 min.]



2. Uma roda executa 40,0 rev quando desacelera a partir de uma velocidade angular de 1,5 rad/s até parar.

- Supondo que a aceleração é constante, determine o intervalo de tempo em que isso ocorre. [R.: $\Delta t = 335,1$ s.]
- Qual é a aceleração angular da roda? [R.: $\alpha = 4,475 \cdot 10^{-3}$ rad/s².]
- Quanto tempo é necessário para que a roda complete as 20 primeiras revoluções? [R.: $t = 98,15$ s.]

3. Um disco, com raio de 0,25 m, deve girar como um carrossel de um ângulo de 800 rad, partindo do repouso, ganhando velocidade angular a uma taxa constante α nos primeiros 400 rad e em seguida perdendo velocidade angular a uma taxa constante $-\alpha$, até ficar novamente em repouso. O módulo da aceleração centrípeta de qualquer parte do disco não deve exceder 400 m/s²

- Qual é o menor tempo necessário para a rotação? [R.: 40 s.]
- Qual é o valor correspondente de α ? [R.: 2 rad/s²]

4. Em $t = 0,00$ s um disco de corte tem uma velocidade angular de 24,0 rad/s. Sua aceleração angular é de 30,0 rad/s² até que o motor é desligado em $t = 2,00$ s. A partir de então, o disco está sujeito a uma desaceleração constante devido a forças de atrito, sofrendo um deslocamento angular de 432 rad até parar.

- Qual é o deslocamento angular total entre $t = 0$ s e o momento em que ele para de girar? [R.: 540 rad.]
- Quanto tempo transcorre entre o instante onde ocorre o desligamento e o momento em que o disco pára? [R.: 12,3 s.]

5. Um disco precisa de três segundos para realizar 37 voltas completas. Sua velocidade angular no final do intervalo de três segundos é de 98,0 rad/s. Qual é a aceleração angular do disco (assumindo que ela é constante)? [R.: 14 rad/s².]

6. O tambor de uma máquina de lavar inicia seu ciclo de “centrifugação”. Partindo do repouso, ela demora 8,00 s para acelerar a uma taxa constante até sua velocidade angular máxima $\omega_f = 5,0$ rev/s. No momento em que ela atinge tal velocidade, ocorre uma falta de energia e o tambor desacelera a uma taxa constante, parando após 12,0 s. Qual é o deslocamento angular total realizado pelo tambor entre o instante em que ele começa a acelerar e o instante em que ele para? [R.: 50 rev.]



7. Para dar a partida em um cortador de grama movido a gasolina, você deve puxar uma cordinha que está enrolada ao longo do perímetro de uma polia. Depois de puxar a corda por 0,95 s, a polia está girando a 4,5 rev/s quando a cordinha se desprende. No entanto, esta tentativa de ligar o cortador não funciona, e a polia acaba por parar após 0,24 s do desprendimento da cordinha. Suponha aceleração constante, tanto durante a puxada da cordinha, quanto durante o freamento da polia.

- Determine a aceleração angular média enquanto a corda é puxada e depois que ela solta. [R.: $\alpha_1 = 4,7$ rev/s², $\alpha_2 = -19$ rev/s².]
- Determine a razão entre o número de voltas realizadas na primeira etapa e o número de voltas realizadas na segunda etapa. [R.: 4,0.]

8. A posição angular de um objeto é dada por $\theta(t) = a + bt - ct^3$, onde a , b e c são constantes positivas. As unidades dessas constantes são tais que se t é medido em segundos, θ é dado em radianos. Quando $t = 0$, o ângulo correspondente é $\theta = \pi/4$ rad e a velocidade correspondente é $\omega = 2,0$ rad/s. Já quando $t = 1,5$ s, a aceleração angular é $\alpha = 1,25$ rad/s². Calcule as constantes a , b e c , incluindo suas unidades. [R.: $a = \pi/4$ rad, $b = 2,0$ rad/s, $c = -0,139$ rad/s³.]

9. * A unidade de disco de um computador é ligada a partir do repouso e possui aceleração angular constante. Se ela levou 0,750 s entre o início e o fim de sua segunda revolução, em quanto tempo ela realizou a primeira revolução? Obtenha uma equação para a primeira revolução e outra para as duas revoluções. Nesta última, utilize o fato de que o tempo total é $t' = t + 0,750$ s, onde t é o tempo necessário para efetuar a primeira revolução. [R.: $t_1 = 1,81$ s.]

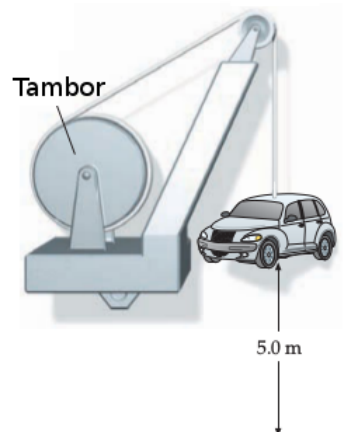
RELAÇÃO ENTRE AS VARIÁVEIS DA ROTAÇÃO E DA TRANSLAÇÃO

DINÂMICA DA ROTAÇÃO I

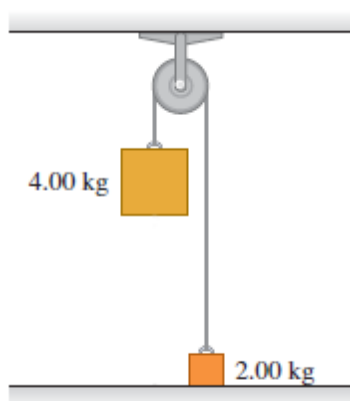
10. Uma roda de giroscópio com 2,83 cm de raio é acelerada a partir do repouso a $14,2 \text{ rad/s}^2$ até que sua velocidade angular atinja 2760 rev/min. Quais são as acelerações tangencial e radial máxima de um ponto na borda do giroscópio? [R.: $a_t = 0,402 \text{ m/s}^2$, $a_c = 2364 \text{ m/s}^2$]
11. O prato de um toca-discos está girando a $33 \frac{1}{3}$ rev/min, isto é, 33,333... rev/min. Um cubo de gelo está sobre o prato a 6,0 cm de distância do eixo de rotação. Considerando o cubo como uma partícula,
- Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre o cubo e o prato para que ele não escorregue? [R.: $\mu_e = 7,46 \cdot 10^{-2}$.]
 - Suponha que o prato atinge sua velocidade angular final em 4,00 s, partindo do repouso com aceleração constante. Calcule o menor coeficiente de atrito estático necessário para que o cubo não escorregue durante o período de aceleração. [R.: $\mu_e = 7,48 \cdot 10^{-2}$.]
12. Uma criança empurra um carrossel. A posição angular do carrossel varia com o tempo de acordo com $\theta(t) = \gamma t + \beta t^2$, onde $\gamma = 0,400 \text{ rad/s}$ e $\beta = 0,0120 \text{ rad/s}^2$.
- Calcule a expressão que determina a velocidade angular do carrossel como função do tempo. [R.: $\omega = \gamma + 2\beta t$.]
 - Determine a velocidade inicial do carrossel, isto é, $\omega(t = 0)$. [R.: γ .]
 - Se a criança consegue correr a uma velocidade máxima de 3,2 m/s, determine qual será o deslocamento angular que ela terá percorrido entre $t = 0$ e o momento onde ela atinge essa velocidade. Considere que a aceleração é constante e que o raio do carrossel é de 1,2 m. [R.: 145 rad.]



14. **Discursiva:** Pode uma única força aplicada a um corpo alterar simultaneamente se movimento de translação e de rotação? Explique.
15. Um carro de 1 200 kg está sendo retirado da água por um guincho. No momento em que o carro está a 5,0 m acima da água, a caixa de engrenagens quebra e o tambor do guincho gira livremente enquanto o carro cai. Durante a queda do carro, não existe deslizamento entre a corda (sem massa), a polia e o tambor. O momento de inércia do tambor do guincho é de $320 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e o momento de inércia da polia é desprezível. O raio do tambor é de 0,800 m e o raio da polia é de 0,300 m. Suponha que o carro parte do repouso. Determine a velocidade com que ele atinge a água. [R.: 8,3 m/s.]



13. Um método tradicional para medir a velocidade da luz utiliza uma roda dentada giratória. Um feixe de luz passa pelo espaço entre dois dentes situados na borda da roda, viaja até um espelho distante e chega de volta à roda exatamente a tempo de passar pelo espaço seguinte entre dois dentes. Uma dessas rodas tem 5,0 cm de raio e 500 espaços entre dentes. Medidas realizadas quando o espelho está a uma distância 500 m da roda fornecem o valor de $3,0 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ para a velocidade da luz. Qual é a velocidade angular da roda? [R.: $\omega = 600 \text{ rev/s}$.]
16. A polia mostrada na figura abaixo tem formato de disco, raio $R = 16,0 \text{ cm}$ e momento de inércia $I = 0,560 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Os blocos pendurados na corda (cuja massa é desprezível) têm massas 4,00 kg e 2,00 kg. A corda não desliza na polia. Determine:
- A aceleração do sistema. [R.: $0,703 \text{ m/s}^2$.]
 - As tensões nos segmentos da corda à esquerda e à direita da polia. [R.: 36,4 N e 21,0 N, respectivamente.]

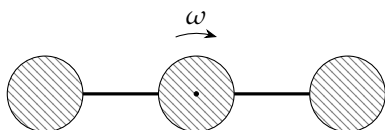


CÁLCULO DO MOMENTO DE INÉRCIA

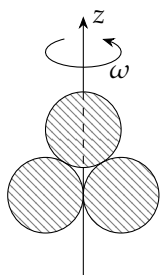
17. **Discursiva:** Você consegue imaginar um corpo que possua o mesmo momento de inércia para todos os eixos possíveis? Em caso afirmativo, forneça um exemplo; se sua resposta for negativa, explique por que isso seria impossível. Você pode imaginar um corpo que possua o mesmo momento de inércia em relação a todos os eixos passando por um ponto específico? Caso isso seja possível, onde tal ponto deve estar localizado e qual deve ser a forma de tal objeto?

18. **Discursiva:** Ao calcular o momento de inércia de um objeto, podemos considerar que toda sua massa está concentrada no centro de massa?

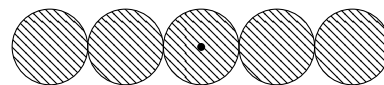
19. A figura abaixo mostra um objeto construído com discos de material leve, ligados por barras metálicas. As massas dos discos e das barras são iguais, sendo denotadas por m . O raio dos discos é R , e o comprimento das barras é $L = 2R$. Determine o momento de inércia do objeto em torno do eixo que passa perpendicularmente à face plana do disco central, passando pelo centro de massa, isto é, no ponto indicado na figura. [R.: $(253/6)mR^2$.]



20. A figura abaixo mostra um objeto composto de três discos com massa m e raio r e que pode girar em torno do eixo z mostrado e que está contido no mesmo plano que os discos. Determine o momento de inércia do objeto em torno do eixo z . [R.: $I = (11/4)mr^2$.]



21. A figura abaixo mostra um objeto formado por cinco esferas maciças de massa M e raio R coladas. Determine o momento de inércia em torno do eixo que passa pelo centro da esfera do meio, perpendicularmente ao plano da página. [R.: $I = 42MR^2$.]

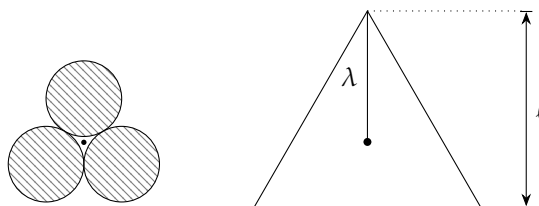


22. Um arranjo de esferas maciças coladas formando um bastão reto contém 12 esferas. Um eixo muito fino passa perpendicularmente ao bastão, pelo centro de massa, e o sistema pode girar em torno dele. Se cada esfera tem massa $M = 450,0$ g e o bastão tem comprimento total de 120,0 cm

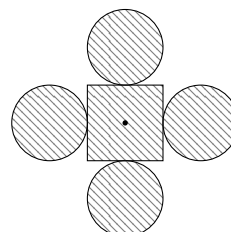
(a) Qual é o momento de inércia do sistema em torno do eixo? [R.: $I = (2884/5) \cdot mr^2 = 0,6489 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.]

(b) Se considerássemos o bastão como uma barra fina, qual seria o erro percentual entre o valor correto e o dessa aproximação? O erro percentual pode ser calculado através de $E\% = |(x_{ref} - x)/x_{ref}| \times 100$. [R.: $E\% = 0,14\%$.]

23. A figura abaixo mostra três esferas maciças coladas de forma que seus centros de massa pertencem ao mesmo plano. Considerando que elas têm a mesma massa m e o mesmo raio r , determine o momento de inércia em torno do eixo que passa no meio do triângulo formado pelas esferas (ponto preto), perpendicularmente ao plano do papel, em termos de m e r . Em um triângulo equilátero, o encontro das bissetrizes determina o centro do triângulo. Tal ponto se encontra a uma distância de $\lambda = 2\ell/3$ dos vértices, ao longo da bissetriz, onde ℓ representa a altura do triângulo. [R.: $I = (26/5) \cdot mr^2$.]



24. A figura abaixo mostra quatro esferas maciças coladas em faces opostas de um cubo. Considerando que elas têm a mesma massa m e o mesmo raio r , e que o cubo tem a mesma massa que uma esfera, com aresta equivalente ao diâmetro de uma esfera, determine o momento de inércia em torno do eixo que passa pelo centro de massa do cubo, perpendicularmente ao plano do papel. [R.: $I = (274/15)mr^2$.]



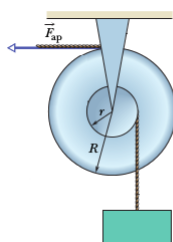
DINÂMICA DA ROTAÇÃO II

25. Na figura abaixo, uma polia é composta de dois discos de raios diferentes que estão colados, de forma que por seus centros passa um eixo que está preso a um suporte. A polia pode girar sem atrito em torno de tal eixo. Em torno do disco menor, está enrolada uma corda de massa desprezível e em cuja extremidade livre está preso um bloco. No disco maior, também está enrolada uma corda e sobre sua extremidade livre uma força $F_{ap} = 50 \text{ N}$ é aplicada (a força é constante, porém não impede o movimento do sistema). Sabendo que os raios das polias são $r = 12,0 \text{ cm}$ e $R = 30,0 \text{ cm}$ e que as massas das polias e do bloco são $m_r = 1,0 \text{ kg}$, $m_R = 3,0 \text{ kg}$ e $m_b = 7,0 \text{ kg}$, determine

(a) A aceleração do bloco. [R.: $3,3 \text{ m/s}^2$.]

(b) A tensão na corda. [R.: 92 N .]

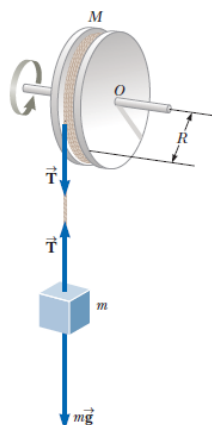
Lembre-se que o momento de inércia da “polia composta” é a soma do momento de inércia dos dois discos. Os torques podem ser então considerados como atuando na “polia composta”.



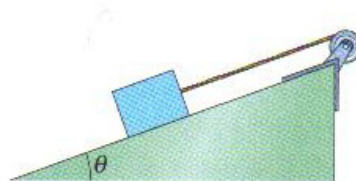
26. Um objeto de massa $m = 5,10 \text{ kg}$ está preso a uma corda que está enrolada — e, portanto, não desliza — em uma polia de massa $M = 3,0 \text{ kg}$ e raio $R = 0,250 \text{ m}$ (veja a figura abaixo). A polia é um disco maciço, livre para rodar em torno do eixo perpendicular a sua superfície e que passa por seu centro de massa.

(a) Determine a aceleração do bloco quando ele for solto. [R.: $7,6 \text{ m/s}^2$.]

(b) O que acontecerá se a massa da polia for muito pequena? E se for muito grande? [R.: Se $M \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$; Se $M \rightarrow 0$, $a \rightarrow g$.]



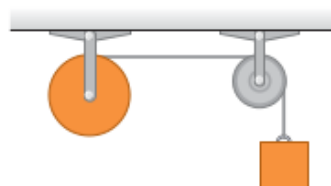
27. Na figura abaixo, uma roda de $0,200 \text{ m}$ de raio é montada em um eixo horizontal sem atrito. Uma corda de massa desprezível é enrolada na roda e presa a uma caixa de $2,0 \text{ kg}$ que escorrega sobre a superfície sem atrito de um plano inclinado com $\theta = 20^\circ$ em relação à horizontal. A caixa escorrega para baixo com uma aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$. Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo? [R.: $54 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.]



28. Uma corda leve é enrolada em um cilindro de massa $m_c = 5,00 \text{ kg}$ e raio $R_c = 40,0 \text{ cm}$, sendo que sua extremidade livre passa por uma polia em formato de disco — com massa $m_p = 2,0 \text{ kg}$ e raio $R_p = 20,0 \text{ cm}$ — e suporta um bloco de massa $m_b = 3,0 \text{ kg}$. Tanto o cilindro quanto a polia podem girar em torno do eixo que passa pelo centro de massa, perpendicularmente à face plana. Considere que a corda é inextensível e não há atrito nos eixos de rotação. Calcule

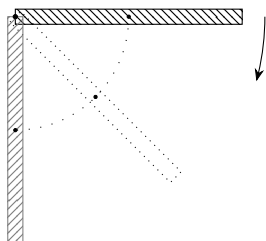
(a) a aceleração do bloco. [R.: $4,52 \text{ m/s}^2$.]

(b) A tensão no segmento de corda entre as polias e no segmento de corda que suporta o bloco. [R.: $11,3 \text{ N}$ e $15,8 \text{ N}$, respectivamente.]



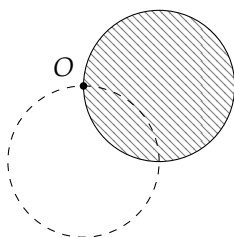
TRABALHO, ENERGIA CINÉTICA, E ENERGIA
MECÂNICA EM ROTAÇÕES

29. Uma haste de comprimento L disposta horizontalmente pode girar em torno de um eixo que passa por sua extremidade, como indicado na figura abaixo. Determine a velocidade angular da haste quando ela chega à posição mais baixa, assumindo que ela partiu do repouso. [R.: $\omega = \sqrt{3g/L}$]

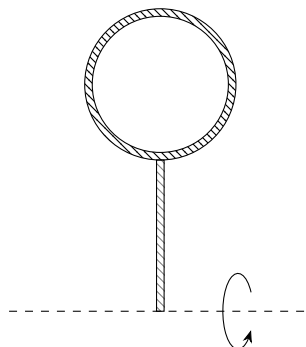


30. Um disco uniforme de massa M e raio R pode girar em torno de um eixo que passa perpendicularmente ao plano da página no ponto O , como mostrado na figura. Assumindo que o disco é solto a partir do repouso na posição mostrada e que $R = 25$ cm,

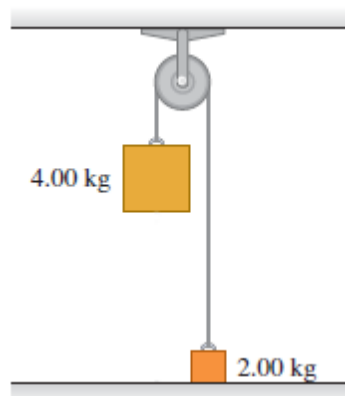
- Qual é a velocidade do centro de massa quando ele atinge a posição mais baixa? [R.: $1,8$ m/s.]
- Determine a aceleração inicial do centro de massa do disco, isto é, imediatamente após o disco ser solto. [R.: $6,5$ m/s².]



31. A figura abaixo mostra um corpo rígido formado por um aro fino (de massa m e raio $R = 0,150$ m) e uma barra fina (de massa também m e comprimento $L = 2R$). O conjunto pode girar em torno do eixo tracejado, porém encontra-se na vertical, em uma posição de equilíbrio instável. Suponha que uma perturbação o faça girar. Qual será a velocidade angular do conjunto quando ele passar pelo ponto mais baixo? [R.: $6,95$ rad/s.]

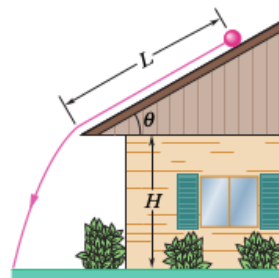


32. A polia mostrada na figura abaixo tem formato de disco, raio $R = 16,0$ cm e massa $M = 44$ kg. Os blocos pendurados na corda (cuja massa é desprezível) têm massas $4,00$ kg e $2,00$ kg. A corda não desliza na polia. Se o sistema está inicialmente em repouso, determine a velocidade do sistema após os blocos terem se deslocado por uma distância de $1,00$ m. [R.: $1,2$ m/s.]



MOVIMENTOS COMBINADOS DE ROTAÇÃO E DE
TRANSLAÇÃO

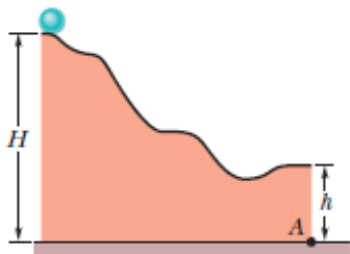
33. **Discursiva:** Um cliente traz uma bola rígida de estimação à sua empresa de engenharia, querendo saber se ela é maciça ou oca. Ele tentou dar leves batidas nela, mas isso forneceu pouca informação. Sugira uma experiência simples e barata para descobrir se ela é oca ou não, sem danificá-la.
34. Um cilindro maciço de raio $10,0$ cm e massa $12,0$ kg parte do repouso e rola para baixo uma distância $L = 6,0$ m, sem deslizar, em um teto inclinado de um ângulo $\theta = 30,0^\circ$ (veja a figura abaixo).
- Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao seu centro ao deixar o teto? [R.: 63 rad/s.]
 - Qual é a aceleração do centro de massa do cilindro? [R.: $3,27$ m/s².]



35. Um cilindro de massa m e raio R desce rolando uma rampa conforme a figura abaixo. Ao final da descida, ele deixa a rampa com uma velocidade horizontal e atinge o solo a uma distância d do final da rampa. O

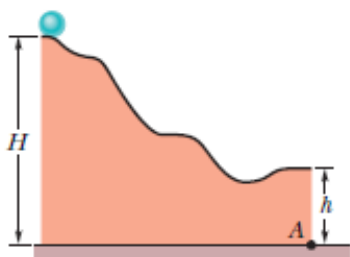
rolamento acontece sem deslizar. Mostre que se o cilindro parte do repouso, a distância é dada por

$$d = \sqrt{\frac{8}{3}(H-h)h}.$$



36. Um objeto desce rolando uma rampa de altura $H = 10\text{ m}$ conforme a figura abaixo. Ao final da descida, ele deixa a rampa com uma velocidade horizontal a uma altura $h = 3\text{ m}$ e atinge o solo a uma distância $d = 7,1\text{ m}$ do final da rampa. O rolamento acontece sem deslizar.

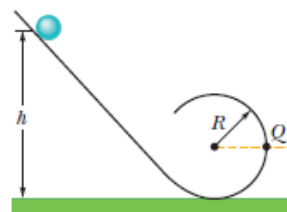
- (a) Considerando que o momento de inércia é dado por $I = fmR^2$, onde m é a massa do objeto e R o seu raio, calcule o valor de f . [R.: $f = 0,6663 \approx 2/3$.]
(b) O objeto é um cilindro, um aro, uma esfera maciça ou uma esfera oca? [R.: Esfera oca.]



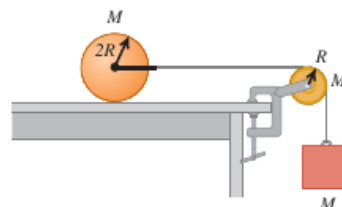
37. Na figura abaixo, uma bola maciça de aço de massa m rola suavemente ao longo do trilho quando é liberada a partir do repouso no trecho retilíneo. A parte circular do trilho tem um raio R e a bola tem um raio $r \ll R$ (portanto podemos desprezar r no cálculo da energia potencial gravitacional).

- (a) Quanto vale h se a bola está na iminência de perder contato com o trilho quando chega ao ponto mais alto da parte curva do trilho? [R.: $(27/10)R$.]
(b) Se a bola é liberada de uma altura $h = 6R$, qual é o módulo da componente horizontal da força que atua sobre a bola no ponto Q? [R.: $F = (50/7)mg$.]

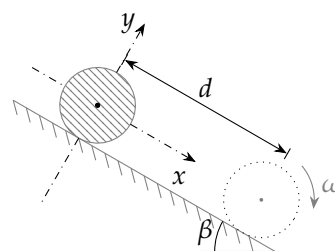
Não esqueça de levar em conta a energia cinética associada à rotação da bola!



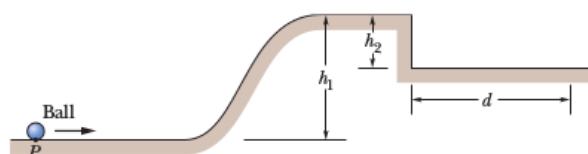
38. Um cilindro uniforme com massa M e raio $2R$ repousa sobre uma mesa. Uma corda está amarrada a um eixo que passa perpendicularmente às superfícies planas do cilindro e também pelo centro de massa. O cilindro pode girar livremente em torno do eixo. A corda passa por uma polia em forma de disco com massa M e raio R , que também pode girar livremente em torno do seu eixo. Na outra extremidade da corda, um bloco de massa M é amarrado. A corda não desliza sobre a polia, nem o cilindro sobre a mesa. Após o bloco cair $2,00\text{ m}$, qual é a velocidade do bloco? [R.: $v = 3,61\text{ m/s}$.]



39. Um disco rola a partir do repouso, sem deslizar, sobre a superfície de um plano inclinado, percorrendo uma distância d . Determine a razão entre as energias cinéticas de rotação e de translação do disco. [R.: $K_r/K_t = 2$.]



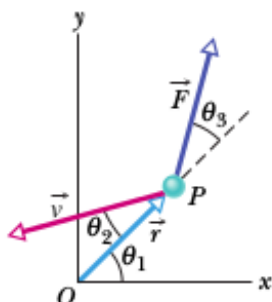
40. Na figura, uma pequena bola maciça e uniforme é lançada do ponto P, rola suavemente em uma superfície horizontal, e sobe uma rampa chegando a um platô. Em seguida, deixa o platô horizontalmente para pousar em outra superfície mais abaixo, a uma distância horizontal d da extremidade do platô. As alturas verticais são $h_1 = 19,3\text{ m}$ e $h_2 = 2,7\text{ m}$. Com que velocidade a bola deve ser lançada no ponto P para ela pousar em $d = 8,4\text{ m}$? [R.: $20,0\text{ m/s}$.]



MOMENTO ANGULAR

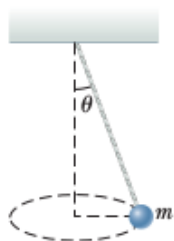
41. No instante retratado na figura abaixo, uma partícula P de $2,0\text{ kg}$ possui um vetor posição \vec{r} de módulo $3,0\text{ m}$ e ângulo $\theta_1 = 45,0^\circ$, e uma velocidade \vec{v} de módulo $4,0\text{ m/s}$ e ângulo $\theta_2 = 30,0^\circ$. A força \vec{F} , de módulo $2,0\text{ N}$ e ângulo $\theta_3 = 30,0^\circ$, age sobre P . Os três vetores estão no plano xy . Quais são, em relação à origem,

- (a) O módulo e a orientação do momento angular de P ? [R.: $\vec{L} = 12\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}\hat{k}$.]
(b) O módulo e a orientação do torque que age sobre P ? [R.: $\vec{\tau} = 3,0\text{ N} \cdot \text{m}\hat{k}$.]



42. Um pêndulo cônico da figura abaixo é constituído de um fio com comprimento d e uma esfera de massa m (a massa do fio é desprezível). Durante seu movimento, o ângulo entre o fio e a linha vertical é θ . Mostre que o módulo do momento angular é dado por

$$L = \sqrt{m^2 g d^3 \sin \theta \tan \theta}.$$



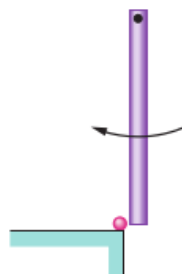
CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

43. **Discursiva:** Se soltarmos um gato com as patas para cima, ele é capaz de girar o corpo e cair com as patas para baixo. À luz de seus conhecimentos sobre a conservação do momento angular, explique como isso é possível? Considere qual é a parte do corpo do gato que pode executar uma rotação independentemente do tronco.
44. **Discursiva:** Você está em pé no centro de um carrossel horizontal que gira em um parque de diversões.

O carrossel gira sobre apoios sem atrito, e sua rotação é livre. Quando você caminha até a periferia do carrossel, diga o que ocorre com o momento angular total do sistema constituído por você junto com o carrossel. O que ocorre com a velocidade angular do carrossel?

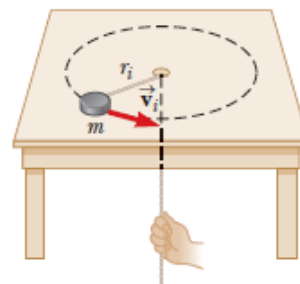
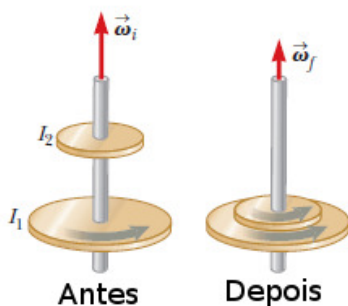
45. **Discursiva:** Em corridas de motocross, quando os pilotos passam por pequenos morros com grande velocidade, as motos saltam e perdem contato com o solo. Caso o piloto mantenha o motor da moto “acelerando” durante o salto, ela inclinará para trás. Caso ele cesse a aceleração imediatamente após perder contato com o solo, isso não ocorre. Explique o que ocorre em cada uma das situações.

46. Uma barra uniforme de $0,6\text{ m}$ de comprimento e $1,0\text{ kg}$ de massa gira no plano do papel em torno de um eixo que passa por uma das extremidades, com um momento de inércia de $0,12\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (veja a figura abaixo). Quando a barra passa pela posição mais baixa, colide com um pedaço de massa de modelar de $0,20\text{ kg}$, que fica grudado na sua extremidade. Se a velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão é de $2,4\text{ rad/s}$, qual é a velocidade angular do sistema haste-massa de modelar imediatamente após a colisão? [R.: $1,5\text{ rad/s}$.]



47. Na figura abaixo, um disco com momento de inércia I_1 roda em torno de um eixo vertical sem atrito com velocidade angular ω_i . Um segundo disco, com momento de inércia I_2 e velocidade angular inicial nula, cai sobre o primeiro. Após alguns segundos, devido a forças de atrito entre as duas superfícies, ambos terão a mesma velocidade angular final ω_f .

- (a) Calcule a velocidade angular final ω_f em termos da velocidade angular inicial e dos momentos de inércia. [R.: $\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i$.]
(b) Calcule a razão K_f/K_i entre a energia cinética de rotação final e a inicial em termos dos momentos de inércia. [R.: $K_f/K_i = I_1/(I_1 + I_2)$.]

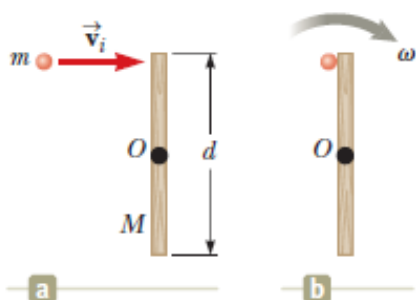


48. Um disco gira com velocidade angular ω_i em torno de um eixo sem atrito que passa por seu centro de massa, perpendicularmente à sua face plana. Acima dele, outro disco — também com o eixo atravessando-o perpendicularmente à face plana e passando pelo centro de massa —, de mesma massa que o primeiro, está parado. Se a velocidade angular final é $3/4$ da velocidade angular inicial, qual é o a razão entre os raios R_1 e R_2 ? [R.: $R_1/R_2 = \sqrt{3}$.]

49. Um projétil de massa $m = 10$ g se move para a direita com uma velocidade inicial $v_i = 100$ m/s. Ele colide com a extremidade de uma haste fina estacionária de massa $M = 1,0$ kg, comprimento $d = 30$ cm e que pode girar sem atrito em torno de um eixo perpendicular à haste, sem atrito e que passa pelo centro de massa. A figura abaixo ilustra uma visão superior da colisão.

(a) Se o projétil fica preso à haste depois da colisão, qual a velocidade angular final do sistema. [R.: 19 rad/s.]

(b) Qual a razão K_f/K_i entre a energia cinética total depois e antes da colisão? [R.: $K_f/K_i = 0,029$.]

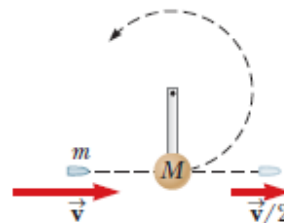


50. Um disco de massa $m = 50$ g está amarrado a uma corda fina e leve que passa por um furo em uma mesa horizontal e sem atrito (veja a figura abaixo). O disco está girando com uma velocidade $v_i = 1,5$ m/s descrevendo um círculo de raio $R = 30$ cm. A corda é puxada lentamente pelo furo de forma que o raio da trajetória diminua para $R = 20$ cm.

(a) Qual a velocidade do disco após a corda ser puxada? [R.: 2,3 m/s.]

(b) Lembrando que o trabalho é dado pela variação da energia cinética, isto é, $W = \Delta K$, calcule o trabalho realizado para puxar a corda. [R.: 0,070 J.]

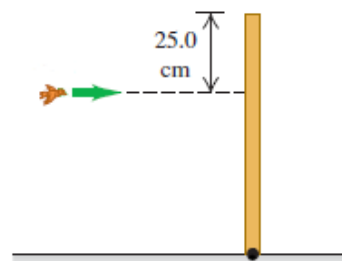
51. A figura abaixo mostra uma colisão entre um projétil de massa $m = 20$ g e velocidade $v = 100$ m/s e um pêndulo formado por uma esfera maciça de massa $M = 1,00$ kg e raio 5,0 cm, e uma haste rígida de comprimento $h = 35$ cm e massa $m_h = 0,50$ kg. O pêndulo encontra-se inicialmente em repouso. Após a colisão, o projétil emerge com velocidade $v/2$. Qual é a velocidade angular do pêndulo após a colisão? Considere como desprezível o deslocamento do pêndulo enquanto ele é atravessado pelo projétil. [R.: $\omega = 55$ rad/s.]



52. Um pássaro de 0,50 kg voa horizontalmente com uma velocidade $v = 2,25$ m/s e atinge uma barra de madeira que pode girar em torno de um eixo fixado no chão (veja a figura abaixo). A barra tem comprimento de 1,2 m e o pássaro a atinge a uma distância de 25 cm do topo. Após o impacto, o pássaro cai atordoado com velocidade horizontal nula. Sabendo que a massa da barra é de 2,5 kg,

(a) Calcule a velocidade angular da barra imediatamente após a colisão. [R.: 0,89 rad/s.]

(b) Calcule a velocidade angular da barra ao atingir o solo. [R.: 2,4 rad/s.]



53. Uma barra fina e uniforme, inicialmente em repouso, com comprimento $R = 0,70$ m e massa $M = 0,40$ kg é atingida por um projétil de massa $m = 10,0$ g conforme mostrado na figura abaixo. A barra pode girar em torno do eixo que passa perpendicularmente ao

seu eixo de simetria, pelo seu centro de massa (representado pelo ponto na barra). A velocidade do projétil antes da colisão está contida no plano de rotação da barra, sendo que a direção de propagação do projétil faz um ângulo $\theta = 60,0^\circ$ quando a atinge. Se o projétil atravessa a barra, emergindo com velocidade $v_f = 245,0 \text{ m/s}$, na mesma direção que a velocidade inicial, e após a colisão a barra adquire uma velocidade angular de $\omega_f = 10,0 \text{ rad/s}$, qual é a velocidade do projétil antes da colisão? [R.: $8,9 \cdot 10^2 \text{ m/s}$.]



54. Um pequeno bloco de madeira, de massa desprezível, repousa sobre uma mesa e está ligado a uma haste fina. A haste tem comprimento d , massa m , e pode girar em torno de um eixo perpendicular à mesa e que passa pela extremidade oposta àquela em que o bloco está preso. Um projétil de massa $m/2$ é disparado com velocidade v contra o bloco de forma que seu momento linear faça um ângulo de $90,0^\circ$ com a haste. Após a colisão, o projétil fica preso no bloco e o sistema passa a girar. Considerando que não há atrito entre a mesa e o bloco, e que o projétil de aloja muito próximo ao final da haste (portanto sua distância ao eixo de rotação é d), demonstre que a velocidade angular final do sistema será

$$\omega_f = \frac{3v}{5d}$$

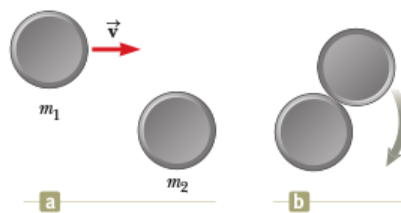
55. Dois discos, de massa $m_1 = m_2 = 120,0 \text{ g}$ e raios $R_1 = R_2 = R$ colidem sobre uma mesa sem atrito, como mostrado na figura abaixo. O disco 1 incide com velocidade $v_1 = 1,50 \text{ m/s}$ da esquerda para a direita e sua borda toca a do disco 2, que estava inicialmente em repouso. Após se tocarem, ambos permanecem unidos através do ponto de contato e passam a girar em torno do eixo perpendicular ao plano da mesa que passa pelo centro de massa do sistema formado pelos dois discos.

- (a) Sabendo que após a colisão os discos passam a girar em torno do centro de massa, mostre que a velocidade angular será dada por

$$\omega = \frac{v}{3R}$$

Trate o disco incidente como uma partícula e calcule o momento angular em relação ao ponto de contato.

- (b) O que ocorre com a velocidade do centro de massa nessa colisão? [R.: A velocidade será reduzida à metade da velocidade antes da colisão.]



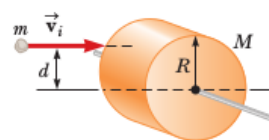
56. Um pedaço de massa de modelar, com massa m e velocidade \vec{v}_i é atirado contra um cilindro maciço de massa M e raio R . O cilindro está inicialmente em repouso e pode girar em torno de um eixo horizontal alinhado ao comprimento do cilindro e que passa pelo centro de massa. A direção do movimento da massa de modelar é perpendicular ao eixo de rotação do cilindro, estando a uma distância d acima do eixo. O valor de d é menor que o raio R do cilindro.

- (a) Considerando que a massa permanece grudada ao cilindro após a colisão, mostre que a velocidade angular do sistema é dada por

$$\omega = \frac{vd}{\left(1 + \frac{M}{2m}\right) R^2}.$$

- (b) Mostre que a razão K_f/K_i entre as energias cinéticas final e inicial é dada por

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{d^2}{\left(1 + \frac{M}{2m}\right) R^2}.$$



57. Uma boleadeira é composta por três esferas iguais, ligadas a um ponto comum por cordas de comprimento d e de massa desprezível. Para lançar a boleadeira, é necessário segurar uma das esferas e girar as outras duas em torno da primeira. Depois de conseguir uma velocidade suficiente, a boleadeira é atirada em direção ao alvo (geralmente as patas de um animal). Inicialmente, as esferas giram em torno da primeira, mas em pouco tempo passam a girar em torno do ponto comum ao qual as cordas estão amarradas. Mostre que a razão entre a velocidade angular inicial e a final é dada por

$$\omega_f = \frac{3}{8} \omega_i.$$

