Aluno(a): ______________________________ Matrícula: ______________

# Prova de Laboratório 2 – Oscilações

## 1 Sistema massa-mola

Sabemos que a força exercida por uma mola é proporcional à sua distensão:

$$F = -k\Delta x \tag{1}$$

onde $k$ é uma constante de proporcionalidade e $\Delta x$ é a distensão sofrida pela mola. O sinal negativo significa que a força é no sentido contrário à distensão da mola. Se assumirmos que $x_i = 0$ e $x_f = x$, temos uma expressão mais simples:

$$F = -kx. \tag{2}$$

Se pendurarmos uma mola por uma de suas extremidades em um suporte de forma que ela se disponha verticalmente e prendermos um corpo de massa apreciável à extremidade inferior, ao deixarmos que ele desça, teremos uma posição de equilíbrio quando a força exercida pela mola for igual ao peso do corpo. A partir de tal posição, qualquer deslocamento exercido fará com que atue sobre o corpo uma força proporcional ao deslocamento, porém com sentido contrário a ele. Utilizando a segunda lei de Newton, podemos descrever a dinâmica do corpo através de

$$-kx = ma. \tag{3}$$

Analisando essa equação, temos que sempre que o corpo se desloca em relação à posição de equilíbrio, ele está sujeito a uma força contraria a esse deslocamento, acelerando-o em direção à posição de deslocamento zero (ou seja, a posição de equilíbrio). Portanto, ao deslocarmos o corpo e o liberarmos, ele passará a ganhar velocidade, indo em direção à posição de equilíbrio. Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio, sua aceleração será zero, porém sua velocidade não, o que faz com que ele passe de tal posição e continuar o movimento. Após passar pela posição de equilibrio, ele estará novamente sujeito a uma força contrária ao deslocamento, o que fará com que ele perca velocidade e eventualmente pare. Após isso ele volta a ganhar velocidade em direção à posição de equilíbrio. Temos então um movimento que se repete, sendo denominado como *movimento oscilatório*.

Para tentar descrever esse movimento, podemos substituir a aceleração na equação acima por sua definição em termos da derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{4}$$

ou, rearranjando os termos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5}$$

Através da equação acima, percebemos que a posição $x$ como função do tempo satisfaz uma condição curiosa: a posição vezes uma constante mais sua derivada segunda é zero, ou seja, a função $x(t)$ é tal que sua derivada é igual a ela mesma, vezes uma contante. Existem duas funções que satisfazem essa condição: as funções trigonométricas seno e cosseno. Se supusermos que $x(t)$ é então da forma

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{6}$$

e a substituirmos na Equação (5), temos

$$-A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{k}{m}A\,\mathrm{sen}(\omega t) = 0 \tag{7}$$

o que pode ser simplificado a

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{8}$$

Verificamos então que a forma suposta para $x(t)$ é solução da Equação (5) se $\omega = \sqrt{k/m}$. Portanto, concluímos que a posição do objeto descreve uma curva senoidal em um gráfico da posição em função do tempo. A partir da expressão para a posição, podemos calcular a velocidade e a aceleração em função do tempo

$$v(t) = A\omega \cos \omega t \tag{9}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{10}$$

Se analisarmos a função seno, vemos que ela tem um período igual a $2\pi$, isto é, seu gráfico se repete a cada $2\pi$ radianos. Isso se reflete em um ciclo de oscilação do sistema massa mola, pois após o argumento do seno atingir $2\pi$, o movimento se repete. Se considerarmos que o tempo para completar uma oscilação é o período $T$, temos, no instante que o objeto termina uma oscilação

$$\omega T = 2\pi \tag{11}$$

o que leva à seguinte equação para o período:

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega}. \tag{12}$$

Substituindo a expressão para $\omega$, temos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{13}$$

Verificamos então que o período de oscilação do sistema massa-mola depende da massa do objeto e da constante $k$ da mola.

Expressões como a Equação (5) são comuns em física e são denominadas *Equações Diferenciais Ordinárias*. As soluções para estas equações são *funções*. A Equação (5) em particular define o *Movimento Harmônico Simples*.

---

## 2 Formulário

Dada uma medida $Q = (q \pm \delta q)$, onde $q = f(x, y, z, \ldots, \xi)$, o erro $\delta q$ é dado por

$$\delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| dy + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| dz + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right| d\xi + \ldots. \tag{14}$$

Erros em operações básicas envolvendo medidas: Dadas medidas $X = (x \pm \delta x)$ e $Y = (y \pm \delta y)$, temos que

$$(x \pm \delta x) + (y \pm \delta y) = (x + y) \pm (\delta x + \delta y), \tag{15}$$

$$(x \pm \delta x) - (y \pm \delta y) = (x - y) \pm (\delta x + \delta y), \tag{16}$$

$$(x \pm \delta x) \cdot (y \pm \delta y) = (x \cdot y) \pm (x \cdot \delta y + y \cdot \delta x), \tag{17}$$

$$(x \pm \delta x) \div (y \pm \delta y) = (x \div y) \pm \frac{x \cdot \delta y + y \cdot \delta x}{y^2}. \tag{18}$$

Temos ainda que,

$$(x \pm \delta x)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot \delta x, \tag{19}$$

$$\ln(x \pm \delta x) = \ln x \pm \frac{\delta x}{x}, \tag{20}$$

$$\log(x \pm \delta x) = \log x \pm \frac{0,4343 \cdot \delta x}{x}. \tag{21}$$

Para a multiplicação de uma medida por um fator $\alpha$ constante (um fator que *não é uma medida*, como por exemplo 2, 3, $\pi$, etc.) temos

$$\alpha(x \pm \delta x) = (\alpha x \pm \alpha \delta x). \tag{22}$$

Erros associados aos coeficientes linear $A$ e angular $B$ de uma regressão linear:

$$\delta A = \xi_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \tag{23}$$

$$\delta B = \xi_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \tag{24}$$

$$\xi_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum (y_i - A - B\, x_i)^2} \tag{25}$$

$$\Delta = N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2. \tag{26}$$

## 3 Questionário

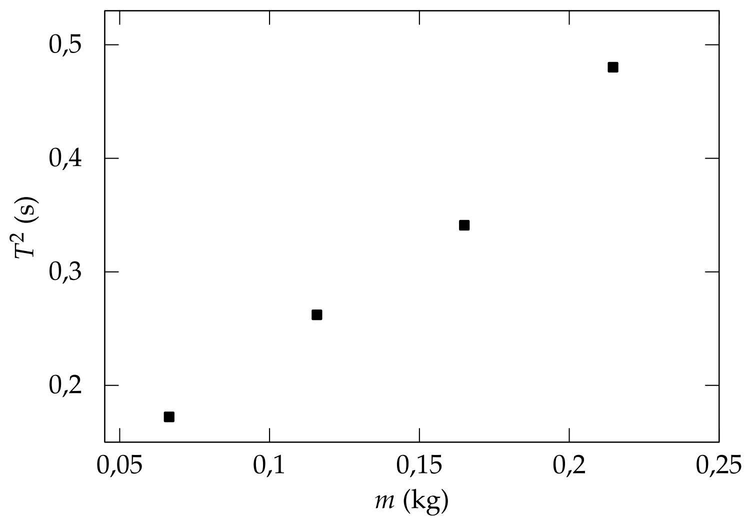
Considerando a discussão teórica acerca de oscilações apresentada na seção anterior, um experimento foi realizado com o intuito de verificar a validade da Equação (13). Tal experimento consistia em suspender um conjunto de anilhas em uma mola e deixar que o sistema executasse um movimento oscilatório. Variando-se a massa $m$ suspensa na mola, foram verificados os valores de tempo $T_{10}$ necessários para que o sistema completasse 10 oscilações completas. Os valores de massa e tempo aferidos são mostrados na tabela abaixo.

| $(m \pm 0{,}05)$ g | $(T_{10} \pm 0{,}2)$ s | $T$ | $T^2$ |
|---|---|---|---|
| 66,55 | 4,15 | | |
| 116,22 | 5,12 | | |
| 166,43 | 5,84 | | |
| 215,21 | 6,93 | | |

**Nas questões seguintes, apresente os cálculos requisitados de maneira clara e sucinta, possibilitando o acompanhamento do raciocínio desenvolvido.**

1. (25 pontos) Calcule os valores de $T$ e $T^2$, preenchendo as colunas da tabela. Utilize o número adequado de algarismos significativos e calcule os erros propagados apropriados.

2. (25 pontos) Considere o gráfico abaixo. Utilizando uma calculadora, determine a reta que melhor representa os dados experimentais utilizando o método dos mínimos quadrados.




3. (25 pontos) Utilizando a Equação (13) e considerando a linearização adotada para elaborar o gráfico, mostre a relação entre o coeficiente angular $B$ e a constante da mola $k$, e calcule o valor desta última. *Utilize as unidades do SI para efetuar a regressão linear para obter resultados de mais fácil interpretação.*

4. (25 pontos) O erro $\delta B$ associado ao coeficiente angular $B$ pode ser determinado através dos dados experimentais e seu valor é de $0{,}0487\,\mathrm{s^2/kg}$. Através desse resultado e relação entre $B$ e $k$, calcule o erro $\delta k$ associado à constante da mola.