Física Experimental A, Oscilações

Clebson Abati Graeff

15 de dezembro de 2024

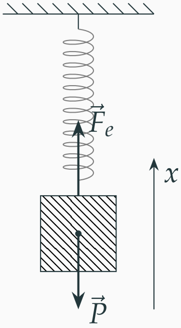
UTFPR–PB

Experimento 3, Oscilações

Sistema massa-mola

Sabemos que a força exercida por uma mola é proporcional à sua distensão:

$$
\begin{aligned}
F &= -k\Delta x && (1) \\
&= -kx, && (2)
\end{aligned}
$$



Aplicando a segunda Lei de Newton:

$$F_R^x = ma_x \tag{3}$$

$$P^x + F_e^x = ma_x \tag{4}$$

$$-P + (-kx) = ma_x \tag{5}$$

$$-k\left(x + \frac{mg}{k}\right) = ma_x \tag{6}$$

$$-kx' = ma_x, \tag{7}$$

onde o eixo x aponta verticalmente para cima e $x' \equiv x + mg/k$.

Notem que

$$a_x = \frac{d^2}{dt^2}x \tag{8}$$

$$a'_x = \frac{d^2}{dt^2}x', \tag{9}$$

e

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{d^2}{dt^2}x' && (10) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{mg}{k}\right) && (11) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}x && (12) \\ &= a_x, && (13) \end{aligned}$$

pois m, g, e k são constantes. Logo, podemos escrever

$$-kx' = ma'_x, \tag{14}$$

Reescrevendo a expressão recém obtida, temos

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{k}{m} x' = 0. \tag{15}$$

Supondo uma solução do tipo

$$x'(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{16}$$

verificamos que

$$\frac{d}{dt} x'(t) = v'(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \tag{17}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x'(t) = a'(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{18}$$

Substituindo as expressões para a posição e para a aceleração na Equação (15), obtemos

$$-A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{k}{m} A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0 \tag{19}$$

o que pode ser simplificado a

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{20}$$

- Verificamos então que a forma suposta para $x'(t)$ é solução da Equação (15) se $\omega = \sqrt{k/m}$.
- As constantes A e ϕ podem assumir quaisquer valores.
- Claramente A representa os valores máximos de deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio, e é denominada *amplitude* do movimento.
- A constante ϕ nos permite mudar o valor de $x(t=0)$, e em geral escolhemos $\phi = 0$, o que implica em $x(0) = 0$.

- Se analisarmos a função seno, vemos que ela tem um período igual a 2π
- Isso se reflete em um ciclo de oscilação do sistema massa mola, pois após o argumento do seno atingir 2π, o movimento se repete.
- Se considerarmos que o tempo para completar uma oscilação é o período T, temos, no instante que o objeto termina uma oscilação

$$\omega T = 2\pi \tag{21}$$

Portanto, temos para o período:

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega}. \tag{22}$$

Substituindo a expressão para ω, temos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{23}$$

Notem que essa expressão não é linear. Nesse caso, podemos elevar ambos os lados ao quadrado e obter

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m. \tag{24}$$

Portanto, se adotarmos a linearização $\tau = T^2$ e fizermos um gráfico de $\tau \times m$, obteremos uma relação linear entre os dados.

Comparando com a equação da reta, temos que

$$y = \tau \qquad x = m$$
$$A = 0 \qquad B = 4\pi^2/k$$

Dessa última, podemos escrever

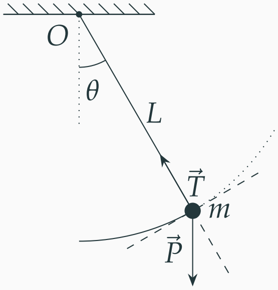
$$k = 4\pi^2/B. \tag{25}$$

Pêndulo simples

Para um pêndulo simples, temos

$$\tau = I\alpha.$$

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i (r^i_\perp)^2 \\ &= mL^2, \end{aligned}$$



Calculando o torque, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\vec{\tau}| &= |\vec{r} \times \vec{F_R}| \\
&= |\vec{r} \times (\vec{T} + \vec{P})| \\
&= |\vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times \vec{P}| \\
&= |\vec{r} \times \vec{T}| + |\vec{r} \times \vec{P}| \\
&= 0 + mgL \operatorname{sen} \theta.
\end{aligned}
$$

Substituindo os resultados para o momento de inércia e para o torque na segunda lei de Newton para a rotação, obtemos

$$-mgL \operatorname{sen}\theta = mL^2\alpha$$

ou,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Não podemos resolver essa última equação de uma maneira simples. Porém, se limitarmos θ a valores pequenos, temos que

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta, \tag{26}$$

o que nos leva a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{27}$$

Novamente, a solução é do tipo

$$\theta(t) = \theta_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{28}$$

onde θ_m representa a amplitude máxima de oscilação e ω é dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{29}$$

De maneira análoga ao caso anterior, o período T, consequentemente, é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{30}$$

Mais uma vez, o resultado obtido não é linear, mas podemos usar uma mudança de variáveis para torná-lo linear. Usando $\tau = T^2$ novamente, obtemos

$$\tau \equiv T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L.$$

Comparando com a equação da reta:

$$y = \tau \qquad x = L$$

$$A = 0 \qquad B = \frac{4\pi^2}{g}.$$