# GUÍA 7 : **TRIGONOMETRÍA**

1. Usando que $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ y $\cos((30°)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular

   a) $\sin(15°)$  b) $\cos(15°)$  c) $\sin(75°)$  d) $\cos(75°)$

2. Sabiendo que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, calcular

   a) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  b) $\sec\left(\frac{\pi}{8}\right)$  c) $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)$  d) $\cot\left(\frac{\pi}{16}\right)$

3. Existe un $\beta \in \mathbb{R}$ tal que satisface:

   a) $\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}$ *y* $\sin(\beta) = -\dfrac{1}{3}$

   b) $\cos(\beta) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ *y* $\sin(\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

   c) $\cos(\beta) = -\dfrac{12}{15}$ *y* $\sin(\beta) = -\dfrac{5}{13}$

4. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

   a) $$\frac{\csc^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \cot^2(\theta)$$

   b) $$\frac{1+\cos(3t)}{\sin(3t)} + \frac{\sin(3t)}{1+\cos(3t)} = 2\csc(3t)$$

   c) $$\frac{1+\csc(3\beta)}{\sec(3\beta)} - \cot(3\beta) = \cos(3\beta)$$

   d) $$(\sec t + \tan t)^2 = \frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

   e) $$\sin^3 t + \cos^3 t = (1 - \sin t \cos t)(\sin t + \cos t)$$

   f) $$\frac{\tan^2(x)}{\sec(x)+1} = \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}$$

   g) $$\frac{\tan(\alpha)}{1+\sec(\alpha)} + \frac{1+\sec(\alpha)}{\tan(\alpha)} = 2csc(\alpha)$$

   h) $$\frac{1}{\csc(y)-\cot(y)} = \csc(y) + \cot(y)$$

   i) $$\frac{1+\sec(4x)}{\sin(4x)+\tan(4x)} = \csc(4x)$$

   j) $$(\csc(t) - \cot(t))^4(\csc(t) + \cot(t))^4 = 1$$

5. Demuestre que la ecuación no es una identidad. *(ayuda.- Encuentre un $\theta \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación es falsa)*

   a) $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$  b) $\sqrt{\sin^2(\theta)} = \sin(\theta)$  c) $\sec(\theta) = \sqrt{\tan^2(\theta)+1}$

   $\theta = 210$  $\theta = 210$  $\theta = 210$

   $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \neq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. Determine si las suguientes ecuaciones son identidades o no.

$\sin(30°) = 1/2$ , $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$ $\quad \frac{3}{4}$

$\sin(\pi/6) = 1/2$ , $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

a) $\sin\left(\frac{30°}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(30°)}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(30)}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\sin(75°)$

$\sin(60+15) = \sin(60)\cdot\cos(15) + \sin(15)\cdot\cos(60)$

$= \sin(2\cdot 30)\cdot\cos(15) + \sin(15)\cdot\cos(2\cdot 30)$

$2\sin(30)\cdot\cos(30)\cdot\cos(15) + \sin(15)\cdot\left(\cos^2(30) - \sin^2(30)\right)$

$\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\cancel{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\right)\ \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

$\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

$\sqrt{9\cdot 2} + 2\sqrt{3\cdot 2} - \sqrt{2}$

$\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{9}+2\sqrt{3}-1\right) \rightarrow \sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+2\right)$

$\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{2}\cdot 4}$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) $\cos(75°)$

$\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(30) = \frac{1}{2}$ $\cos(15) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\sin(15) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\cos(60+15) = \cos(60)\cdot\cos(15) - \sin(60)\cdot\sin(15)$$

$$= \cos(2\cdot 30)\cdot\cos(15) - \sin(2\cdot 30)\cdot\sin(15)$$

$$= \left(\cos^2(30) - \sin^2(30)\right)\cdot\cos(15) - \left(2\cdot\sin(30)\cdot\cos(30)\right)\cdot\sin(15)$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\cdot\cos(15) - \left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sin(15)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\cos(15) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(15)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} - \left(\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{8}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{6}}{8}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}+1-3)}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)}{8}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4\cdot\cancel{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$a = \frac{\pi}{8}$

a) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$$

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$$

$$\sin(a) = \sqrt{1 - \cos^2(a)}$$

$$\sin(a) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)^2}$$

$$\sin(a) = \sqrt{1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$\sin(a) = \sqrt{\frac{4}{4} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$\sin(a) = \sqrt{\frac{4-2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$$

$a = \frac{\pi}{8}$

b) $\sec(a) = \frac{1}{\cos(a)} \Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

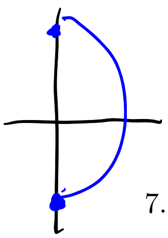
c) $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{tg\,\frac{4\pi}{8} + tg\left(\pi/8\right)}{1 - tg\left(\frac{4\pi}{8}\right) \cdot tg\left(\pi/8\right)}$

(4) $\frac{\csc^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \cot^2(\theta)$

$$\frac{\csc^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} \Rightarrow \frac{\csc^2(\sigma)}{1 + \frac{\sin^2(\sigma)}{\cos^2(\sigma)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\csc^2(\sigma)}{\frac{\cos^2(\sigma)}{\cos^2(\sigma)} + \frac{\sin^2(\sigma)}{\cos^2(\sigma)}} \Leftrightarrow \frac{\csc^2(\theta)}{\frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sin^2(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \Leftarrow$$

$$\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta) \cdot (\underbrace{\cancel{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}}_{1})} \Leftrightarrow \frac{\cos^2(\sigma)}{\sin^2(\sigma)} \Leftrightarrow \cot^2(\theta)$$



a) $$(\sec(x)+\tan(x))^2 = 2\tan(x)(\tan(x)+\sec(x))$$

b) $$\cos(x)(\tan(x)+\cot(x)) = \csc(x)$$

c) $$\frac{\tan^2(x)}{\sec(x)-1} = \sec(x)$$

7. Simplifique las siguientes expresiones usando la siguiente sustitución trigonométrica $x = a\sin(\theta)$ para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $a > 0$.

   a) $\dfrac{x^2}{a^2-x^2}$ b) $\dfrac{(a^2-x^2)^2}{x^3}$ c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ d) $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

8. Simplifique las siguientes expresiones usando la siguiente sustitución trigonométrica $x = a\tan(\theta)$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $a > 0$.

   a) $\dfrac{x^4}{(a^2+x^2)^2}$ b) $\dfrac{a^2+x^2}{x^2}$ c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$

9. Utilice fórmulas para la suma de sin y cos para deducir las identidades:

   a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$
   b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
   c) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
   d) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

10. Si $\alpha$ es un ángulo agudo y $\sec(\alpha)+\tan(\alpha) = 2$, determine el valor numérico de $\cos(\alpha)$

11. Si $\tan(x) = 2$ y $x \in [\pi, 2\pi[$, determine el valor de $\operatorname{sen}(4x)$

12. Si $a = \sec(\alpha)$ y $b = \csc(\alpha)$ entonces demuestre que $(a-b)(a+b)+2b^2 = (ab)^2$

13. Si $x^2 - y^2 = 16$ entonces para $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, determine el valor de $\sec(2\theta)$ en términos de $r$.

14. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas para $x \in [0, 2\pi[$

    a) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$
    b) $\sin(2x) = \cos(x)$
    c) $\cos(2x)+\cos(x) = 0$
    d) $3\sin(x) - \cos^2(x) = -3$
    e) $2 = \dfrac{1}{\sin(2x)\cos(2x)}$
    f) $\cos(2x) = 1 + 4\sin(x)$

15. Para $x \in [0, 2\pi[$, determine los ceros de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = 8\operatorname{sen}^4(x) + 2\operatorname{sen}^2(x) - 1$
    b) $g(x) = \dfrac{\cos(x)+5}{\sec(x)} - 2 - \sin^2(x)$
    c) $h(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}^2(x/2) - 1$
    d) $r(x) = \tan(2x) + 2\operatorname{sen}(x)$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas para $x \in [0, 2\pi[$

a) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

b) $\sin(2x) = \cos(x)$

c) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

d) $3\sin(x) - \cos^2(x) = -3$

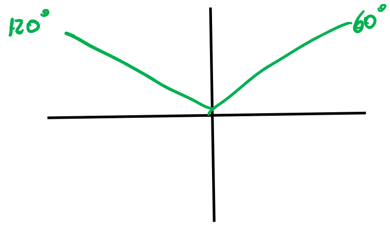
e) $2 = \dfrac{1}{\sin(2x)\cos(2x)}$

f) $\cos(2x) = 1 + 4\sin(x)$

a) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

$\sin(x) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$




$x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $\sin(2x) = \cos(x)$

$2\sin(x)\cdot\cos(x) - \cos(x) = 0$

$\cos(x)\cdot(2\sin(x) - 1) = 0$

$\cos(x) = 0 \ \vee \ 2\sin(x) - 1 = 0$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = 90 \vee x = 270 \ \vee \ x = 30 \vee x = 150$

$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

$\alpha = 2x$

$\beta = x$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 0$

$2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0$

$\underbrace{2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}_{=0}\cdot\underbrace{\cos\frac{x}{2}}_{=0} = 0$

• $2\cos\frac{3x}{2} = 0$

$\cos\frac{3x}{2} = 0$

$\sqrt{\frac{1+\cos(3x)}{2}} = 0$

$1 + \cos(3x) = 0$

$\cos(3x) = -1$

$3\cdot x = \pi$

$x = \frac{\pi}{3}$

$x_1 = \pi/3$

$x_2 = \pi/3 + T$

$x_3 = \pi/3 + 2T$

$x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

• $\cos\frac{x}{2} = 0$

$\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} = 0$

$1 + \cos(x) = 0$

$\cos(x) = -1$

$x = \pi$

Sf: $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $3\sin(x) - \cos^2(x) = -3$ $\qquad$ $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$3\sin(x) - (1 - \sin^2(x)) = -3$

$3\sin(x) - 1 + \sin^2(x) = -3$

$3\sin(x) + \sin^2(x) + 2 = 0$ $\qquad$ $\sin(x) = w$

$w^2 + 3w + 2 = 0$

$(w+2)(w+1) = 0$

$\sin(x) = -2 \;,\; x \notin \mathbb{R}$

$\sin(x) = -1 \;,$ $\qquad$ $x = \frac{3\pi}{2}$

15. Para $x \in [0, 2\pi[$, determine los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 8\,\text{sen}^4(x) + 2\,\text{sen}^2(x) - 1$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x)+5}{\sec(x)} - 2 - \sin^2(x)$

c) $h(x) = \cos(x) + \text{sen}^2(x/2) - 1$

d) $r(x) = \tan(2x) + 2\,\text{sen}(x)$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x)+5}{\sec(x)} - 2 - \sin^2(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) + 5\cdot\cos(x) - 2 - \sin^2(x) = 0$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) + 5\cdot\cos(x) - 2 - (1 - \cos^2(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) + 5\cdot\cos(x) - 2 - 1 + \cos^2(x) = 0$

$2\cos^2(x) + 5\cdot\cos(x) - 3 = 0$ $\qquad u = \cos(x)$

$2u^2 + 5u - 3 = 0$

$$u = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 2\cdot -3}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = -3$

$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos(x) = -3$

$\to \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\to \cos(2\pi - x) = \frac{1}{2}$

$x \notin \mathbb{R}$

$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$

$\cos(5\pi/3) = \frac{1}{2}$

$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

16. Graficar las siguientes funciones, indicando sus componentes principales (amplitud, periodo, fase, ceros, etc).

a) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \cos(\pi x)$

c) $r(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$

e) $f(x) = 2\sin(x + \pi) - 1$

f) $g(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

g) $h(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

h) $f(x) = -4\sin(3x - \pi) - 3$

i) $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $g(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

$A = 3$

$B = 2$

$\alpha = -\pi/2$

$D = -2$

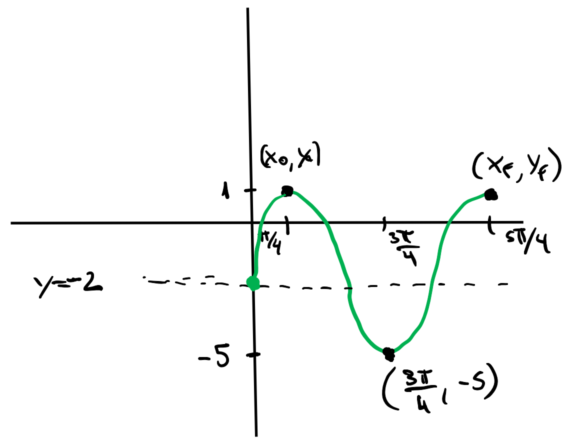
$T = \pi$

$h = \frac{-\alpha}{B}$

$h = \frac{\pi}{2} : \frac{2}{1} = \frac{\pi}{4}$

$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$(x_f, y_f) = \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$




int y $\to f(0) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2$

$f(0) = -2$

int x $\to f(x) = 0$

$3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2 = 0$

$3\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) - 2 = 0$

$3\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2 = 0$

$3\left(\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(2x)}^{\,0} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(2x)\right) - 2 = 0$

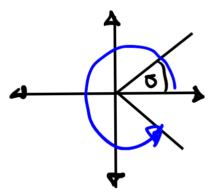
$\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\,1}\cdot\sin(2x) = \frac{2}{3}$

$\sin(2x) = \frac{2}{3} \quad \vee \quad \sin(\pi - 2x) = \frac{2}{3}$

$2x = \sin^{-1}(2/3) \quad \vee \quad \pi - 2x = \sin^{-1}(2/3)$

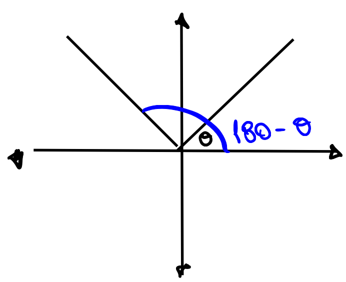
$x = \frac{\sin^{-1}(2/3)}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sin^{-1}(2/3) - \pi}{-2}$

$x \sim 0{,}3648\ldots \qquad x \sim 1{,}2059\ldots$




$\cos(\theta) = \cos(2\pi - \theta)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

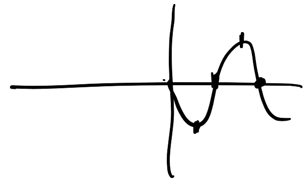



$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\pi - \theta)$

$\cos(\theta) = \cos(2\pi - \theta)$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x = \frac{\sin^{-1}(2/3)}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\sin^{-1}(2/3) - \pi}{-2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$f(x) = -4\sin(3x - \pi) - 3$



$A = -4$ $\qquad h = \frac{\pi}{3}$

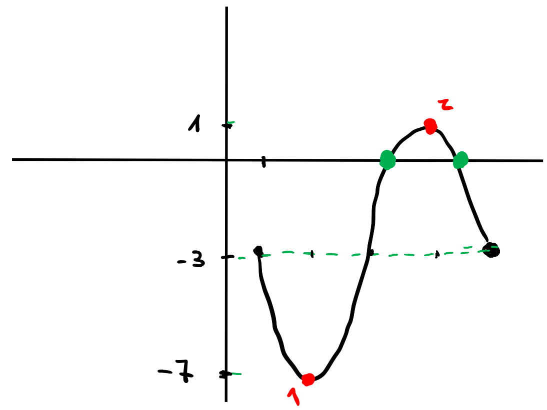
$B = 3$ $\qquad (x_0, y_0) = (\frac{\pi}{3}, -3)$

$\alpha = -\pi$ $\qquad (x_f, y_f) = (\pi, -3)$

$D = -3$

$T = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ 1 $\bullet\ (x_0 + \frac{T}{4}, D + A) = (\frac{\pi}{2}, -7)$

2 $\bullet\ (x_f - \frac{T}{4}, D - A) = (\frac{5\pi}{6}, 1)$




$f(x) = 0$

$-4\sin(3x - \pi) - 3 = 0$

$\sin(3x - \pi) = -\frac{3}{4}$

$-\sin(\pi - 3x) = -\frac{3}{4} \quad / \cdot (-1)$

$\sin(\pi - 3x) = \frac{3}{4}$

$\sin(3x - \pi)$

$\sin(-(\overset{\alpha}{\pi - 3x}))$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$-\sin(\pi - 3x)$

$\sin(\pi - 3x) = \frac{3}{4} \ \vee \ \sin(3x) = \frac{3}{4}$

$\pi - 3x = \sin^{-1}(3/4) \qquad 3x = \sin^{-1}(3/4)$

$x = \frac{\sin^{-1}(3/4) - \pi}{-3} \ \vee \ x = \frac{\sin^{-1}(3/4)}{3}$

$a + kT \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x = \frac{\sin^{-1}(3/4) - \pi}{-3} + kT \\ x = \frac{\sin^{-1}(3/4)}{3} + kT \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \text{ y } T: \text{Periodo}$$

Si: $x \in [0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{Z} : (1 \leq k \leq 3)$

16. Graficar las siguientes funciones, indicando sus componentes principales (amplitud, periodo, fase, ceros, etc).

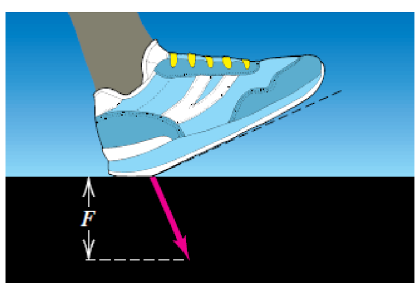
   a) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
   b) $f(x) = \cos(\pi x)$
   c) $r(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
   d) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$
   e) $f(x) = 2\sin(x + \pi) - 1$
   f) $g(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$
   g) $h(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
   h) $f(x) = -4\sin(3x - \pi) - 3$
   i) $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

17. Un guardabosque, situado a 200 pies de la base de una sequoia roja, observa que el ángulo entre el suelo y la cima del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol.

18. El 17 de marzo de 1981, en Tucson, Arizona, la temperatura en grados Fahrenheit pudo calcularse con la ecuación
$$T(t) = -12\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60$$
mientras el porcentaje de humedad relativa podría expresarse con
$$H(t) = 20\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60$$

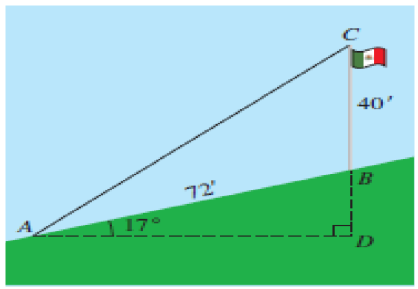
   a) Construya una tabla que contenga la temperatura y humedad relativa cada tres horas, empezando a medianoche.
   a) Determine las horas cuando ocurrió el máximo y el mínimo para $T$ y $H$.
   b) Discuta la relación entre la temperatura y la humedad relativa en este día.

19. Cuando una persona camina, la magnitud $F$ de la fuerza vertical de un pie sobre el suelo (vea la figura) puede describirse con $F = A(\cos(bt) - a\cos(3bt))$, donde $t$ es el tiempo en segundos, $A > 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$

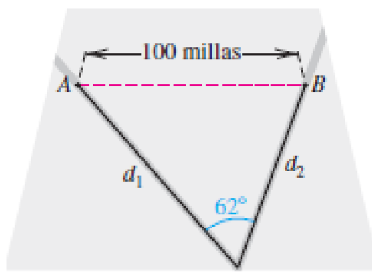



   a) Demuestre que $F = 0$ cuando $t = -\frac{\pi}{2b}$ y $t = \frac{\pi}{2b}$. (El tiempo $t = -\frac{\pi}{2b}$ coresponde al momento cuando el pie toca primero el suelo y el peso del cuerpo está siendo soportado con el otro pie.)
   b) La fuerza máxima ocurre cuando $3a\sin(3bt) = \sin(bt)$. Si $a = \frac{1}{3}$, encuentre las soluciones de esta ecuación para el intervalo $-\frac{\pi}{2b} < t < \frac{\pi}{2b}$.

20. Un poste vertical de 40 pies de alto se encuentra sobre una ladera que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcule la longitud mínima de cable que llegará de lo alto del poste a un punto situado a 72 pies colina abajo desde la base del poste.




21. Dos camiones dejan una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 62°. Si su velocidad es de 50 y 40 millas/horas, respectivamente, aproximadamente cuánto tiempo le toma a los camiones separarse 100 millas?




22. Unos sismólogos investigan la estructura del interior de la Tierra al analizar ondas sísmicas causadas por terremotos. Si se supone que el interior de nuestro planeta es homogéneo, entonces estas ondas se desplazarán en líneas rectas a una velocidad v constante. La figura muestra una vista en sección transversal de la Tierra, con el epicentro en E y una estación de observación en S. Use la ley de los cosenos para demostrar que el tiempo t para que una onda se desplace por el interior de la Tierra de E a S está dado por

$$t = \frac{2R}{v} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

donde R es el radio de la Tierra y u es el ángulo indicado con vértice en el centro de la Tierra.