

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica

Resumen de Estática

Curso : Resistencia de Materiales
Año : 2019

Resumen

La estática es una parte de la física que estudia estructuras, cuerpos, mecanismos, en su estado de reposo o en un movimiento uniforme, para ello se basa en la primera ley de Newton (Principio de inercia) para establecer las condiciones de equilibrio.

1. Principio de Inercia

Toda partícula permanece en su estado de reposo o en su estado rectilíneo uniforme a menos que tenga una fuerza no equilibrada.

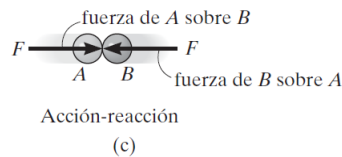
$$\sum_{i=0}^n \vec{F} = \vec{0}$$

Este principio se puede expresar según los ejes ordenados del sistema de referencia, eventualmente puede ser cartesiano como se demuestra en las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_x = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{F}_y = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$

2. Principio de Acción y Reacción

Toda acción de un cuerpo sobre otro, produce una reacción de igual magnitud y dirección, pero en sentido contrario.



3. Principio de Línea de acción

La interacción entre dos cuerpos o más, está en una línea imaginaria que es perpendicular a la superficie de contacto. La línea de acción es la dirección de las fuerzas que se producen por el contacto de estos cuerpos (figura 2). En el caso particular (figura 2) de barras, cuerdas, cadenas, etc. la línea de acción de la fuerza es en la dirección de la barra, cuerda, cadenas, etc.

Figura 1: Principio de línea de acción caso general

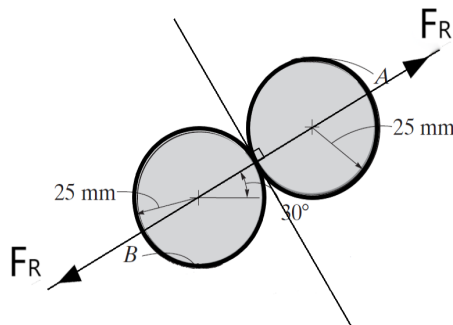
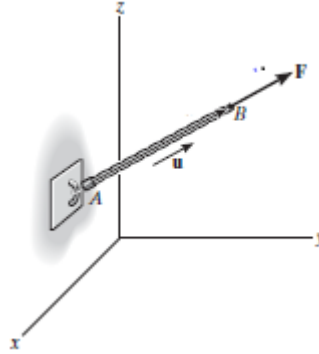
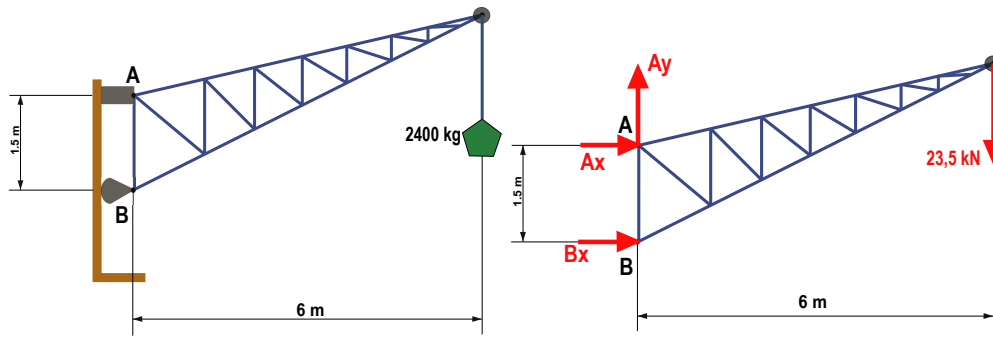


Figura 2: Principio de linea de acción caso particular



4. Diagrama de Cuerpo libre

Es un bosquejo de un sistema o estructura, donde se representa solo las fuerzas externas junto al sistema o las fuerzas externas junto a las fuerzas de interacción entre los cuerpos.



Para Poder realizar un diagrama de cuerpo libre, correspondiente al sistema, se tiene que conocer las restricciones de los diferentes apoyos, ya sean en dos o tres dimensiones.

5. Condición de Equilibrio

Para poder comprobar o establecer variables en un sistema que esta estático, se tienen que cumplir ambas condiciones, las cuales se señalan a continuación:

$$\sum_{i=0}^n \vec{F} = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{M}_o = \vec{0}$$

5.1. Condición de Equilibrio en 2D

De las condiciones de equilibrio señaladas anteriormente se pueden obtener las condiciones para dos dimensiones en un plano XY, las cuales se señala a continuación:

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_x = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{F}_y = \vec{0}$$

$$\sum_{i=0}^n \vec{M}_o = \vec{0}$$

5.2. Condición de Equilibrio en 3D

De manera análoga a la anterior se puede establecer las condiciones de equilibrio para un sistema en tres dimensiones, en este caso se establece para ejes ordenados cartesianos.

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_x = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{F}_y = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{F}_z = \vec{0}$$

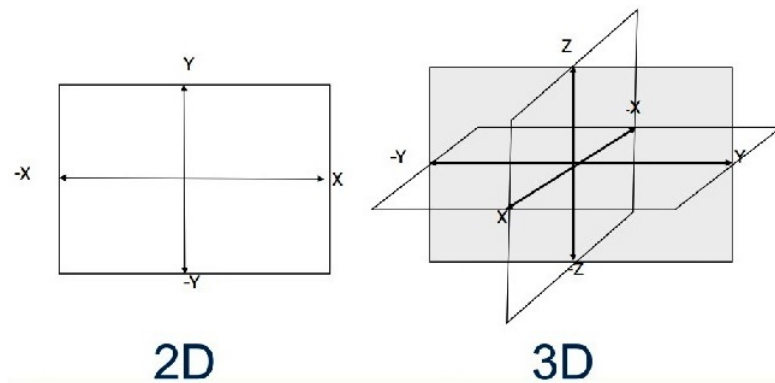
$$\sum_{i=0}^n \vec{M}_x = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{M}_y = \vec{0}; \sum_{i=0}^n \vec{M}_z = \vec{0}$$

6. Tipos de Coordenadas

Existen diferentes tipos de ejes ordenados, pero se tiene que identificar, cual es mas útil para poder desarrollar un caso, para identificarlos y/o conocerlos, se señalará los dos mas utilizados en el curso de Resistencia de Materiales.

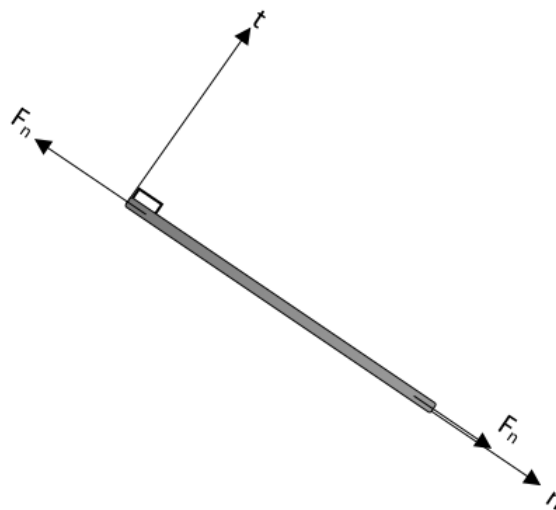
6.1. Coordenadas Cartesianas

Es una definición de Tres planos ortogonales entre si, y donde se interceptan se le llama origen, el cual se define como $[0,0,0]$, donde cada uno de los ceros esta en dirección de uno de los planos. Este sistema coordenado también se le llama Espacio Euclidiano en Tres dimensiones, y en dos solo se selecciona un plano de los tres, y los planos restantes como una linea. Este tipo de coordenadas es útil cuando se tiene referencia de ángulos y posición de los eslabones y sus interacciones en el sistema.



6.2. Coordenadas Tangenciales y Normales

Este sistema coordenado es usado habitualmente en planos, donde se elige una orientación conocida o desconocida, respecto a un eslabón del sistema, donde un eje tendrá como dirección el eslabón(normal) y el siguiente eje tendrá una dirección perpendicular a la dirección normal.

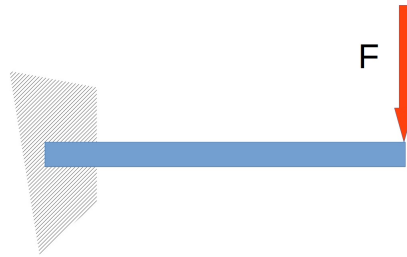


7. Tipos de representaciones de Fuerzas

Las fuerzas se pueden representar de diferentes manera, las mas típicas son las fuerzas puntuales; las cuales son una carga la cual tiene solo una dirección y sentido, las fuerzas distribuidas; son una representación mas cercana a la realidad, en el cual una fuerza se distribuye de forma geométrica sobre alguna superficie, en este tipo de fuerzas se tiene que considerar que posee un centroide.

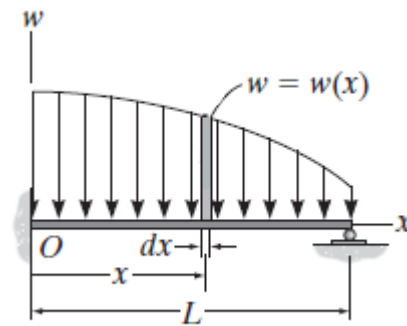
7.1. Fuerza puntual

Es una simplificación de una carga o fuerza, en la que se le da un solo punto de contacto.



7.2. Fuerzas distribuidas

Esta es una simplificación de alguna carga, pero se considera la superficie de contacto, pero se considera que la carga aplicada se distribuye de alguna forma geométrica sobre la superficie o en base a un polinomio. Si la carga es en base a un polinomio se considera de la siguiente manera:



$$F_R = \int_0^L w(x) dx$$

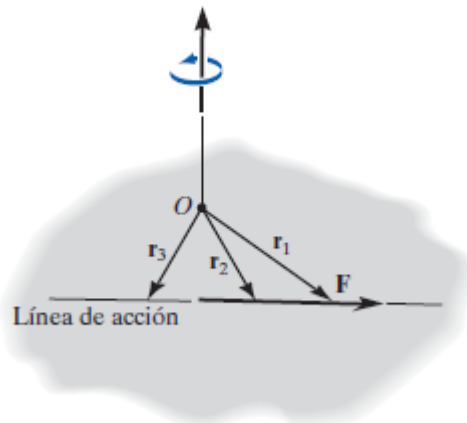
Y la posición del centroide en x se define desde el inicio de la curvatura:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L xw(x) dx}{\int_0^L w(x) dx}$$

Y de manera análoga a la presentada anteriormente se obtiene en las fuerzas distribuidas con formas geométricas, pero las áreas y centroides están tabulados, por lo que se puede usar esas formulas.

8. Resultante de sistemas de fuerzas

De una resultante de fuerzas o una fuerza, se produce un torque o momento, pero como es conocido la ecuación para un momento es $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$, a menudo para esta operación se utiliza la distancia perpendicular o el brazo de momento desde el punto O hasta la línea de acción de la fuerza. Pero no es necesariamente así, es decir, se puede utilizar cualquier \vec{r} medido desde el punto O hasta cualquier otro, siempre y cuando este en la línea de acción de la fuerza.

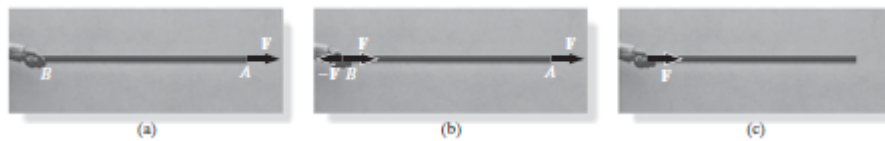


$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r}_3 \times \vec{F}$$

9. Simplificación de un sistema de Fuerza y par

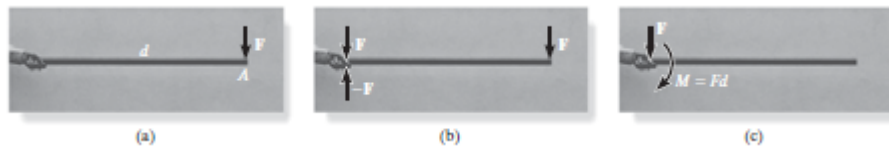
Conocido como par de fuerzas, ya que, para simplificar un sistema o fuerza se necesita un par de fuerzas y agregar un condicionante para que el sistema mantenga las condiciones iniciales.

9.1. Caso 1



En este caso se tiene una fuerza en el punto A, pero para trasladarla al punto B se tiene que agregar dos fuerzas de la misma dirección pero de sentido contrario, y se asume la anulación de la fuerza en A con la fuerza que está en sentido contrario a ella en B y se mantiene en B la fuerza que tiene el mismo sentido que la fuerza original (cuadro c). En este caso al realizar un traslado de fuerzas pero está en su línea de acción original, no es necesario agregar alguna fuerza para mantener las condiciones iniciales del sistema.

9.2. Caso 2



En este caso se quiere trasladar la fuerza en el punto A al punto B, para ello se crea dos fuerza en el punto B con igual magnitud, misma dirección pero de sentido contrario, posterior a ello se anula la fuerza en A con una de las fuerzas en B (con la de sentido contrario a ella). Y para mantener las condiciones iniciales del sistema se agrega un momento en B que tendrá como valor el producto del $\vec{r} \times \vec{F}$, donde \vec{r} es desde B hasta A y \vec{F} es la fuerza en el punto A. Se tiene como simplificación el cuadro C del Cuadro A, donde en este caso se agrego un momento para mantener las condiciones iniciales del sistema, ya que, la fuerza trasladada y las creadas no están en la misma línea de acción.

10. Tipos de apoyos

Se tienen muchos tipos de apoyos, para ello se señalaran los mas básicos los cuales tiene las señaladas reacciones, para el caso 2D se reduce las reacciones no Funcionales.

| | | | |
|--|--|--|---|
| <p>Bola</p> | <p>Superficie sin fricción</p> | <p>Fuerza con línea de acción conocida (una incógnita)</p> | <p>Cable</p> <p>Fuerza con línea de acción conocida (una incógnita)</p> |
| <p>Rodillo sobre superficie rugosa</p> | <p>Rueda sobre riel</p> | <p>Dos componentes de fuerza</p> | |
| <p>Superficie rugosa</p> | <p>Rótula (bola y cuenca)</p> | <p>Tres componentes de fuerza</p> | |
| <p>Junta o unión universal</p> | <p>Tres componentes de fuerza y un par</p> | <p>Apoyo fijo</p> | <p>Tres componentes de fuerza y tres pares</p> |
| <p>Bisagra y cojinete que soportan sólo carga radial</p> | <p>Bisagra y cojinete que soportan empuje axial y carga radial</p> | <p>Dos componentes de fuerza</p> | |
| <p>Pasador y ménsula</p> | <p>Bisagra y cojinete que soportan empuje axial y carga radial</p> | <p>Dos componentes de fuerza</p> | |

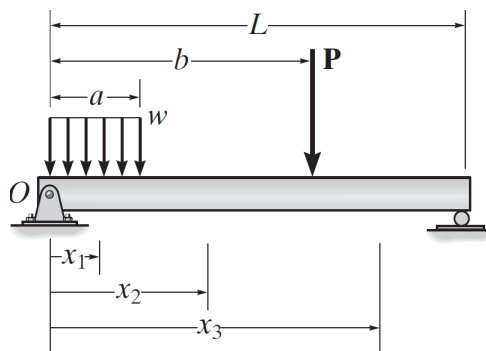
11. Diagrama de fuerzas Vigas

los diagramas de fuerzas sirven para conocer la distribución de las fuerzas a lo largo de un cuerpo, en este caso, una viga. Para ello se tiene que conocer las fuerzas externas (entre ellas los apoyos y cargas en la viga), si existen incógnitas se puede recurrir a los condiciones de equilibrio y/o ecuaciones complementarias para establecerlas. Los diagramas de fuerzas usados son; diagrama fuerza cortante (perpendiculares a la viga), diagrama de momento (resultantes de las fuerzas). los cuales se definen de la siguiente manera:

$$\text{Fuerza cortante } (V(x)) : V(x) = \int w(x) dx + V_0$$

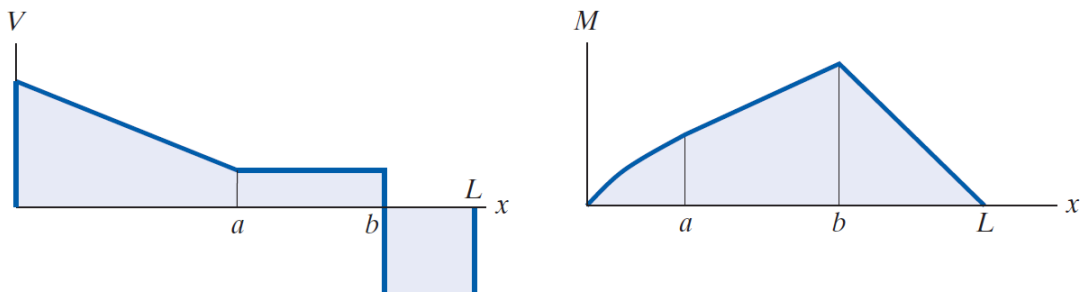
$$\text{Momento } (M(x)) : M(x) = \int V(x) dx + M_0$$

Ejemplo:



Primero que todo se reconoce las incógnitas en el sistema, y posteriormente se procede a dibujar el diagrama de Fuerza cortante; el cual se parte como V_0 el o las fuerzas que están al comienzo de la viga, posterior a ello se procede sumando las fuerzas a lo largo de ella (para las fuerzas distribuidas se utiliza la integral y no se consideran los momentos), además, se tiene que tener en consideración que las fuerzas con sentido negativa restan y las con sentido positivo suman. Esto se puede observar en la figura de la izquierda en la cual se desarrolla el diagrama del ejemplo propuesto.

En el diagrama de la derecha, se puede observar la integración del diagrama anterior, y para el calculo se puede considerar el valor de las áreas del diagrama de fuerzas cortante, considerando las áreas sobre el eje como positivas (se suman) y las áreas bajo el eje como negativas (se restan). Junto con lo anterior se tiene que tener cuidado con la existencia de algún momento en la viga, ya que, no esta en el diagrama anterior y se considera positivo (se suma) los momentos que están en sentido horario, y los sentido anti-horario se considera negativos.



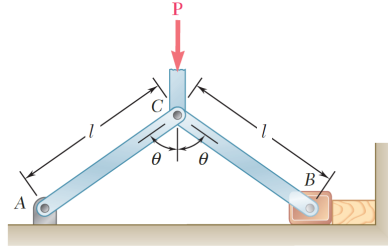
12. Trabajo Virtual

El método de trabajo Virtual es un método complementario y/o sustituto de los métodos anteriores, donde se utiliza la teoría de trabajo $\delta U = F\delta r$, donde la fuerza debe estar en la línea de acción del desplazamiento y/o el desplazamiento en la línea de acción de la fuerza, en el método creado por el suizo Jean Bernoulli, se establece que un sistema estático por las fuerzas externas $\delta U = 0$.

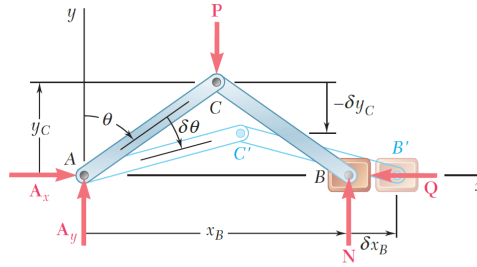
Para efectos de cálculos se establece un desplazamiento arbitrario (de la estructura o mecanismo), y se consideran desplazamientos de dos direcciones. Donde cada fuerza multiplicara su desplazamiento, es decir la deformación que generó, o en el caso de fuerzas que convergen a un mismo punto, el desplazamiento de ese punto se multiplicará con la fuerza resultante. Los momentos tendrán como desplazamiento un $\delta\theta$ que corresponderá al punto donde esta ubicado y también se considera parte de la ecuación de la energía. En el caso de estar estático se considera de la siguiente manera la ecuación:

$$\delta U = \sum_{i=0}^n F_i \delta r_i + \sum_{i=0}^n M_i \delta \theta_i$$

Ejemplo:



Donde se considera la Fuerza P y Q como fuerzas externas, y se selecciona un desplazamiento como si el punto B se moviera hacia la derecha y el punto C hacia abajo. el diagrama de lo mencionado quedaría de la siguiente manera:



Donde se considera los desplazamientos para cada fuerza y como el punto A no tendrá desplazamiento se ocupara como referencia para los otros puntos:

Para la fuerza P se considera el desplazamiento vertical del punto C:

$$y_C = l \cos \theta$$

$$\delta y_C = -l \sin \theta \delta \theta$$

Para la fuerza Q se considera el desplazamiento del punto B:

$$x_B = 2l \sin \theta$$

$$\delta x_B = 2l \cos \theta \delta \theta$$

Por lo que el trabajo Virtual realizado por las fuerzas P y Q es :

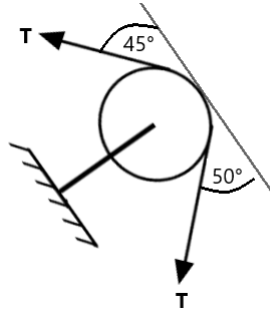
$$\delta U = \delta U_Q + \delta U_P = -Q\delta x_B - P\delta y_C = -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta = 0$$

Despeando queda :

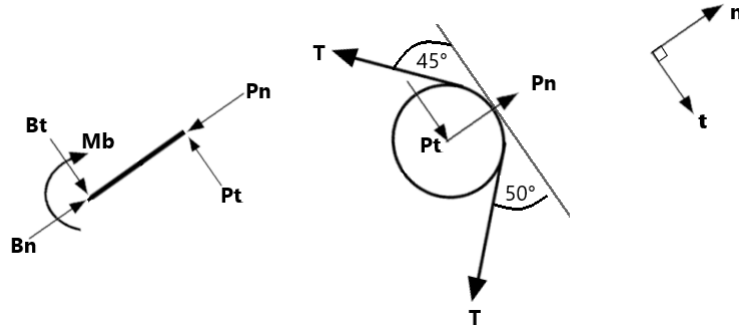
$$Q = \frac{1}{2} P \tan \theta$$

Ejercicios

1. La siguiente polea está en la condición señalada (polea ideal). T es la tensión de la cuerda la cual es de $10kN$. Calcule las reacciones de la barra que sostiene a la polea, respecto donde esta empotrada, el largo de la barra es $0,5[m]$:



Solución: Primero que todo, se reconoce que es un ejercicio estático, ya con ello, se tiene que realizar un DCL (diagrama de cuerpo libre) de cada eslabón, en este caso la polea y la barra. junto con ello se selecciona un eje de coordenadas para establecer las condiciones de equilibrio para cada uno.



En este caso se selecciona, las coordenadas tangenciales y normales, ya que, no poseemos datos de inclinación del empotrado. Ya con los DCL establecidos se establece las condiciones de equilibrio respecto a los ejes coordenados en 2D.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \vec{F}_n &= \vec{0} \\ \sum_{i=0}^n \vec{F}_t &= \vec{0} \\ \sum_{i=0}^n \vec{M}_o &= \vec{0}\end{aligned}$$

Y procederemos con las condiciones de equilibrio de la polea, la cual no posee reacciones como momentos, ya que, no posee roce:

$$\begin{aligned}P_n - T \sin(50^\circ) - T \sin(45^\circ) &= 0 \\ P_t + T \cos(50^\circ) - T \cos(45^\circ) &= 0\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de T se despeja las reacciones de la polea respecto a la barra:

$$\begin{aligned}P_n &= 14,73[kN] \\ P_t &= 643,2[N]\end{aligned}$$

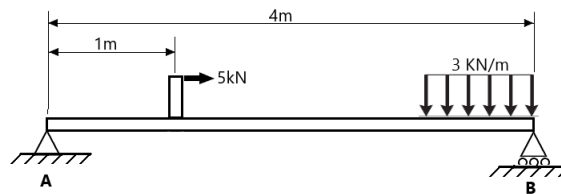
Con las incógnitas de la polea establecidas se procede con las condiciones de equilibrio para la barra, la cual posee momento como reacción, ya que, está empotrada.

$$\begin{aligned} B_n - P_n &= 0 \\ B_t - P_t &= 0 \\ -M_B + P_t L &= 0 \end{aligned}$$

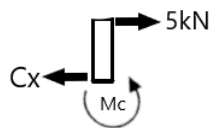
Considerando los valores obtenidos anteriormente y el largo de la barra L , se despeja las reacciones de la barra.

$$\begin{aligned} B_n &= 14,73[kN] \\ B_t &= 643,2[N] \\ M_B &= 321,6[Nm] \end{aligned}$$

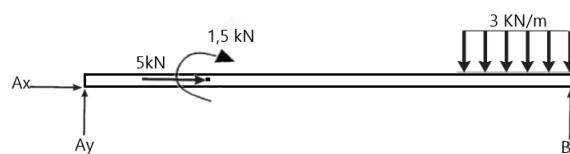
2. La siguiente viga está en las condiciones señaladas, la cual tiene soldada (idealmente) una barra de $0,3[m]$ de largo, en la cual tiene una fuerza puntual, junto con lo anterior posee una carga distribuida de $3[kN/m]$ por $1[m]$ en el extremo de la barra. Se solicita los Gráficos de fuerza cortante y momento, para la viga AB .



Solución: Ante todo se realiza el DCL para la Viga AB, la barra. Para posteriormente calcular las reacciones necesarias para los gráficos. Para la barra se establece que está en un punto C .



Pero este paso se puede omitir, gracias a la simplificación de Fuerza y momento par, por lo que se puede trasladar la fuerza y el momento que genera en la viga y esto se puede establecer en el DCL. De igual manera se invita al estudiante a comprobar lo realizado.



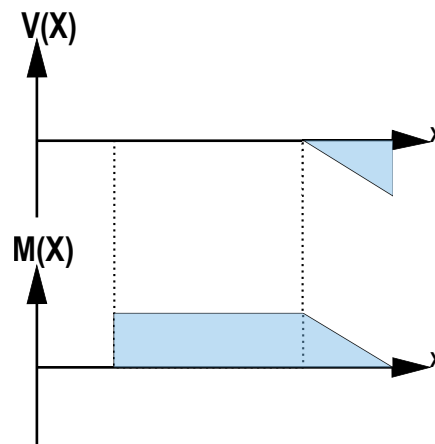
Ya con el diagrama, se establece las condiciones de equilibrio para calcular las reacciones de la viga para su posterior uso en los diagramas solicitados. (en este caso se usarán los ejes coordenados cartesianos)

$$\begin{aligned} A_x + 5000 &= 0 \\ A_y + B_y - 3000 &= 0 \\ -1500 - 3000 \cdot 3,5 + B_y \cdot 4 &= 0 \end{aligned}$$

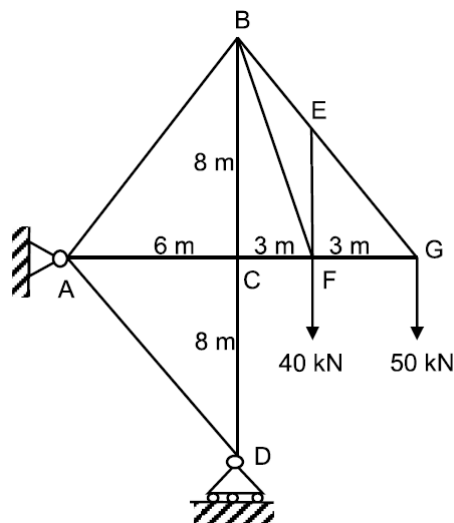
Y solucionando el sistema de ecuaciones, se tiene los valores de las reacciones:

$$\begin{aligned} A_x &= -5[kN] \\ A_y &= 0[N] \\ B_y &= 3[kN] \end{aligned}$$

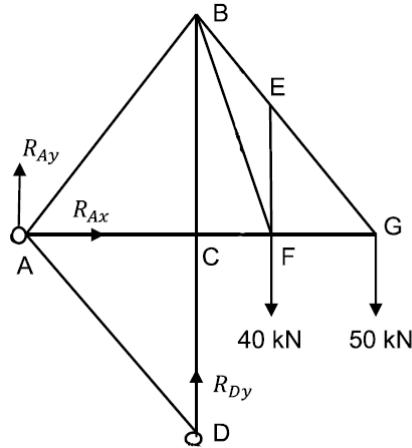
Por lo que los diagramas de la viga quedan de la siguiente manera:



3. Se tiene la siguiente armadura, establezca las reacciones de la armadura en los puntos A y D :



Se comienza realizando el diagrama de cuerpo libre, para así trabajar con las fuerza externas solamente:



Se comienza estableciendo las condiciones de equilibrio en 2D, para este caso, ya que tenemos 3 incógnitas tenemos que recurrir a las tres ecuaciones de la mecánica para desarrollar el problema:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \vec{F}_x &= \vec{0} \\ \sum_{i=0}^n \vec{F}_y &= \vec{0} \\ \sum_{i=0}^n \vec{M}_A &= \vec{0}\end{aligned}$$

Desarrollando las condiciones de equilibrio se establecen para este caso:

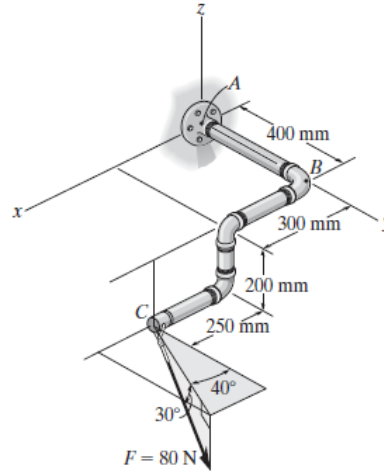
$$\begin{aligned}R_{Ax} &= 0 \\ R_{Ay} + R_{Dy} - 40000 - 50000 &= 0 \\ R_{Dy} \cdot 6 - 40000 \cdot 9 - 50000 \cdot 12 &= 0\end{aligned}$$

Y con ello desarrollando el sistema de ecuaciones, se establece el valor de las reacciones solicitadas:

$$\begin{aligned}R_{Ax} &= 0[N] \\ R_{Ay} &= -70[kN] \\ R_{Dy} &= 160[kN]\end{aligned}$$

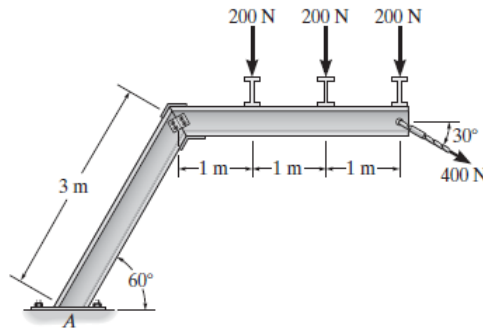
Cabe destacar que el signo de los resultados, nos indica que según el sentido que se estableció en el DCL, es el contrario.

4. El siguiente juego de tuberías está sometido a una fuerza de $80[N]$, tal como se señala en la figura. Determine las reacciones en el punto A:



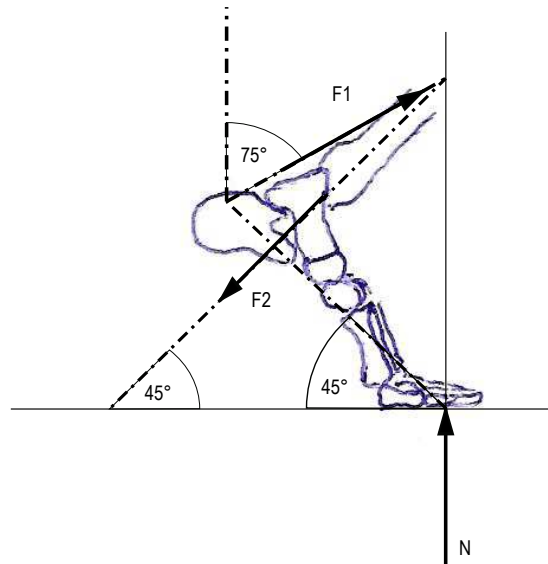
Resp.: $A_x = -51,42[N]$; $A_y = -61,28[N]$; $A_z = 40[N]$
 $M_{Ax} = 3,7[Nm]$; $M_{Ay} = -11,72[Nm]$; $M_{Az} = -13,14[Nm]$

5. Se tiene la siguiente viga en las condiciones en las que se señalan. Determine las reacciones en ella y junto con ello realice los diagramas de la misma a lo largo de ella.



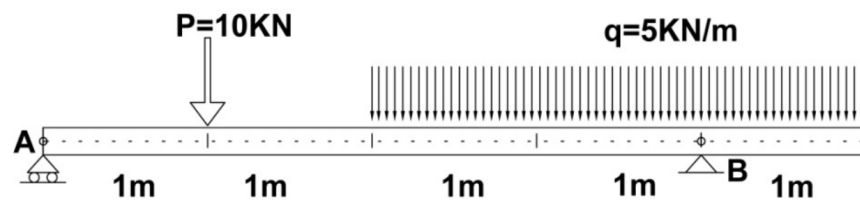
Resp.: $R_{Ax} = -346,41[N]$; $R_{Ay} = 800[N]$; $M_{Az} = 3,9[kNM]$

6. Un Bailarina de peso 584 [N] se pone de puntillas. En la figura se señalan las fuerzas que actúan sobre su pie. La fuerza N es la normal de suelo sobre el pie, $F1$ es la tensión ejercida por el tendón de Aquiles, y $F2$ es la fuerza ejercida por los huesos de la pierna sobre el pie. Las líneas de acción de las tres fuerzas concurren en un punto. Considerando que el peso se distribuye de igual manera para ambos pies, determine el valor de $F1$ y de $F2$.

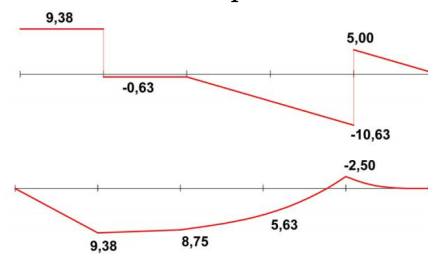


Resp.: $F1 = 413[N]$; $F2 = 564[N]$

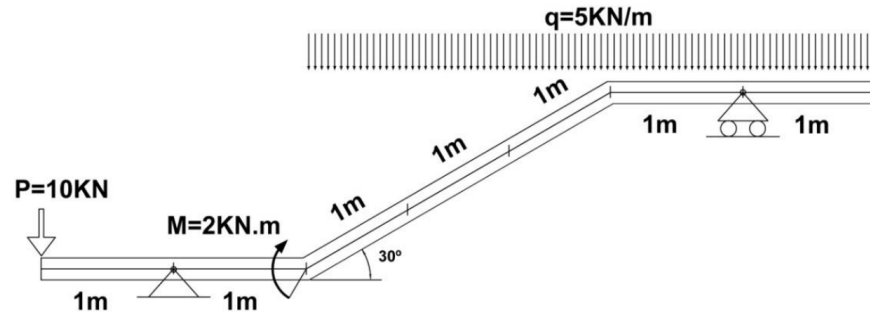
7. Se tiene la siguiente viga, la cual esta solicitada como se señala. Determine los diagramas de cortante y de momento flector.



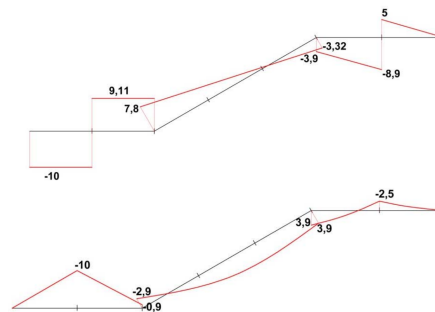
Resp.:



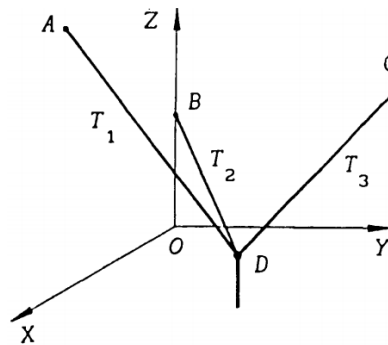
8. Se considera la siguiente estructura, determine los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.



Resp.:

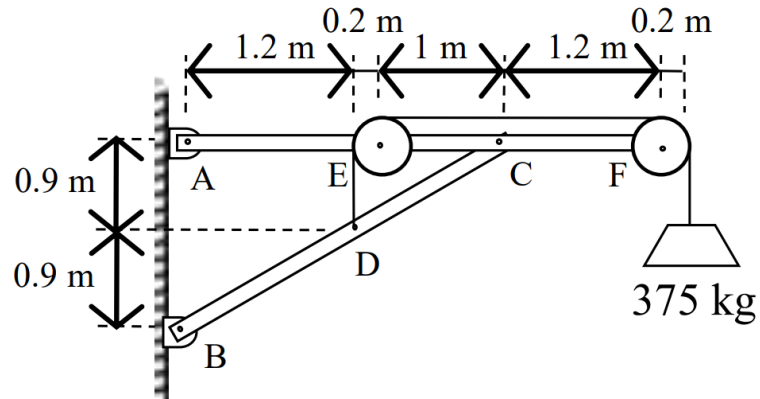


9. En el presente sistema se sostiene un cuerpo en el punto D el cual tiene un peso de $1880[N]$, las posiciones de de los nodos son: $A (5, 0, 12)[m]$; $B(0, 0, 4)[m]$; $C (2, 10, 8)[m]$; $D (2, 4, 0)[m]$.



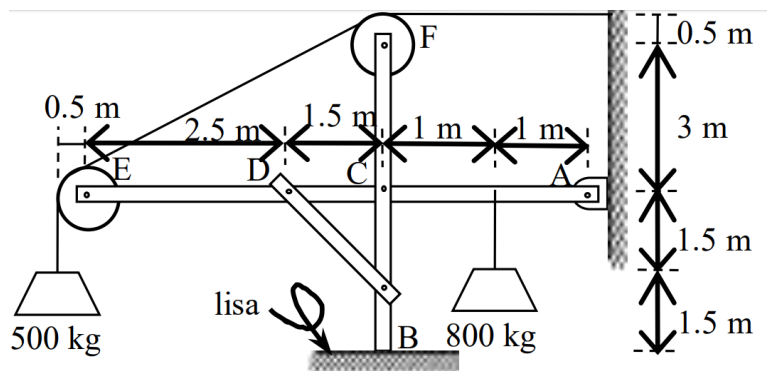
Resp.: $T_1 = 780[N]$; $T_2 = 540[N]$; $T_3 = 1000[N]$

10. Calcule las reacciones en los apoyos A y B , y todas las fuerzas externas a que está sujeta la barra $AECF$ de la estructura que se muestra en la figura. Los pesos de las barras y poleas son despreciables, además de considerar el ángulo de las reacciones .



Resp.: $R_A = 792[Kg] \angle 182,26^\circ$; $R_B = 890[Kg] \angle 27,2^\circ$; $R_C = 1112[Kg] \angle 44,6^\circ$;
 $R_E = 530[Kg] \angle 315^\circ$; $R_F = 530[Kg] \angle 225^\circ$

11. De la siguiente figura, calcular las reacciones en A y en B .



Resp.: $R_A = 522[Kg] \angle 106,7^\circ$; $R_B = 1150[Kg]$