



## GUÍA DE EJERCICIOS 12

### ENERGÍA ROTACIONAL Y CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

#### Ideas clave

- **Teorema del trabajo-energía cinética para el movimiento rotacional** permite relacionar el trabajo neto invertido por fuerzas externas sobre un cuerpo rígido que rota en torno a un eje fijo con el cambio de su energía cinética de rotación:

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

- La **energía cinética total de cuerpo en rodamiento** puede ser determinada aplicando el teorema de los ejes paralelos, obteniendo como resultado que es igual a la suma de la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

- El **momento de fuerza o de torsión**  $\vec{\tau}$  debido a una fuerza  $\vec{F}$  en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- La **cantidad de movimiento angular** instantánea  $\vec{L}$  de una partícula en relación con un eje a través del origen se define como el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula  $\vec{r}$  y su cantidad de movimiento lineal  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

De forma análoga a la 2<sup>da</sup> ley de Newton podemos escribir:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Para un sistema de partículas aislado la cantidad de movimiento angular es una cantidad conservativa:



$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \equiv 0 \rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

- Para un cuerpo rígido que gira en torno a un eje la cantidad de movimiento angular esta dado por:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Por lo tanto:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

### Recuerda:

- Todos los resultados deben ser reportados en Sistema internacional
- Evalúa el orden de magnitud de tu resultado y justifica tu respuesta.
- En todos los ejercicios de cinemática incluye el gráfico que corresponda.

### Preguntas conceptuales

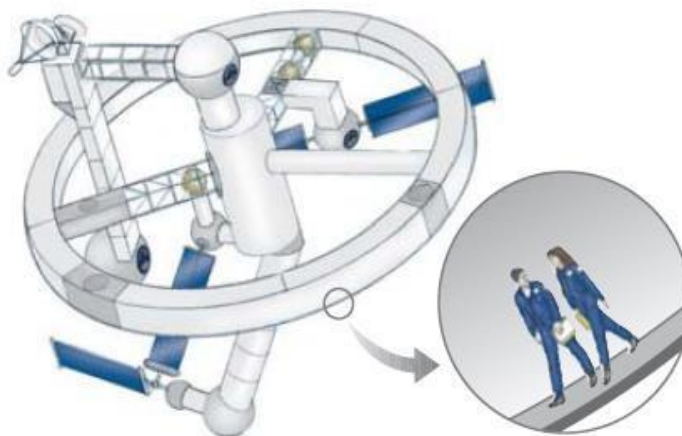
1. ¿Es posible cambiar la energía cinética traslacional de un objeto sin cambiar energía rotacional?
2. Si ve un objeto girando, ¿necesariamente existe un momento de fuerza neto distinto de cero sobre él?
3. Si el momento de fuerza que actúa sobre una partícula en torno a cierto origen es cero, ¿qué puede afirmar acerca de su cantidad de movimiento angular en torno a dicho origen?
4. ¿Por qué un poste largo de equilibrio, perpendicular a la trayectoria, ayuda a alguien que camina en la cuerda floja?

### Problemas

5. Un carrusel horizontal de 800 N de peso es un disco sólido de 1,5 m de radio, que parte su movimiento desde el reposo mediante una fuerza horizontal constante de 50 N aplicada tangencialmente al borde del disco. Determina la energía cinética del disco después de 3 s. (Respuesta: 275,7 J)

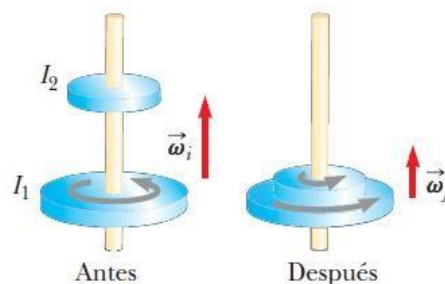
6. a) Determina la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Compara esta aceleración con la de un aro uniforme. b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que se requiere para mantener movimiento de rodamiento puro para el disco? (Respuestas: a)  $a_{\text{aro}} = \frac{1}{2}g \sin \theta$  y  $a_{\text{disco}} = \frac{2}{3}g \sin \theta$ , el disco se mueve con  $\frac{4}{3}$  de la aceleración del aro y b)  $\frac{1}{3} \tan \theta$ )
7. El viento ejerce sobre una flor la fuerza horizontal de 0,785 N hacia el este. El tallo de la flor mide 0,45 m de largo y se inclina hacia el este, formando un ángulo de  $14^\circ$  con la vertical. Determina el vector momento de torsión de la fuerza del viento en torno a la base del tallo. (Respuesta: 0,343 Nm)

8. Se construye una estación espacial en forma de anillo hueco de  $5 \times 10^4$  kg. Los integrantes de la tripulación caminan sobre una cubierta formada por la superficie interior de la pared cilíndrica exterior del anillo, con 100 m de radio. En reposo, cuando se construyó, el anillo se puso a girar en torno a su eje de modo que las personas en el interior experimentan una aceleración

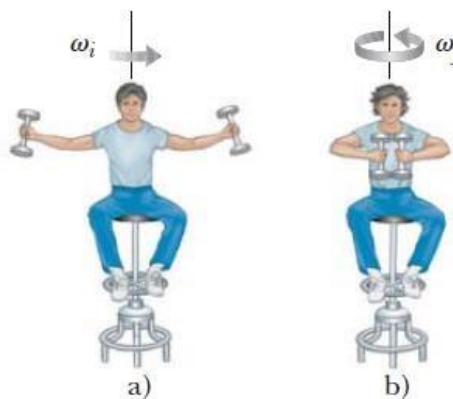


en caída libre efectiva igual a la aceleración de gravedad terrestre  $g$ . (La figura muestra el anillo junto con algunas otras partes que forman una aportación despreciable al momento de inercia total). La rotación se logra al encender dos pequeños cohetes unidos tangencialmente a puntos opuestos sobre el exterior del anillo. a) ¿Qué cantidad de movimiento angular adquiere la estación espacial? b) ¿Durante qué intervalo de tiempo se deben encender los cohetes si cada uno ejerce un empuje de 125 N? c) Prueba que el momento de torsión o de fuerza total sobre el anillo, multiplicado por el intervalo de tiempo que encontró en el inciso b), es igual al cambio en cantidad de movimiento angular encontrado en el inciso a). Esta igualdad representa el *teorema de impulso angular-cantidad de movimiento angular*. (Respuestas: a)  $1,57 \times 10^8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$  y b) 1,74 h)

9. Un cilindro con momento de inercia  $I_1$  da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular  $\omega_i$ . Un segundo cilindro, con momento de inercia  $I_2$  y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro. Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular  $\omega_f$ . a) Calcula  $\omega_f$ . b) Demuestra que la energía cinética del sistema disminuye en esta interacción y calcule la proporción de la energía rotacional final a la inicial. (Respuestas: a)  $\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_i$  y b)  $\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$ )



10. Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio libremente sosteniendo dos mancuernas, cada una de 3 kg de masa. Cuando el estudiante extiende los brazos horizontalmente, las mancuernas están a 1 m del eje de rotación y el estudiante da vueltas con una rapidez angular de 0,75 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es de 3 kg·m<sup>2</sup> y se supone constante. El estudiante jala las mancuernas horizontalmente hacia adentro a una posición 0,3 m del eje de rotación. Determina la nueva rapidez angular del estudiante. b) Obtiene la energía cinética del sistema rotatorio antes y después de jalar las mancuernas hacia adentro.



(Respuestas: a) 1,91 rad/s, b) 2,53 J y 6,45 J)

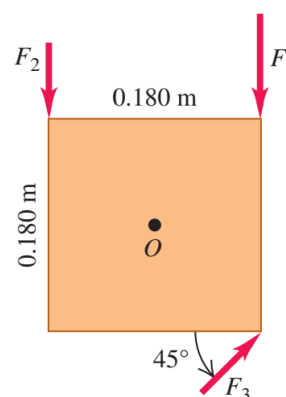
11. Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de medianoche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a mediodía. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considera un volante de hierro (con densidad 7800 kg/m<sup>3</sup>) en forma de disco uniforme de 10 cm de espesor. a) ¿Qué diámetro debería tener este disco para almacenar 10 MJ de energía cinética al girar a 90 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? b) ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez? (Respuestas: a) 7,36 m y b) 327 m/s<sup>2</sup>)



12. Un metro de madera de 0,18 kg pivota sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal. El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Conforme gira, al pasar por la vertical, calcula a) el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; b) la rapidez angular del metro; c) la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. d) Compara la respuesta del inciso c) con la rapidez de una partícula que ha caído 1 m desde el reposo.

(Respuesta: a) -0,882 J, b) 5,42 rad/s, c) 5,42 m/s y d)  $v = -4.43$  m/s)

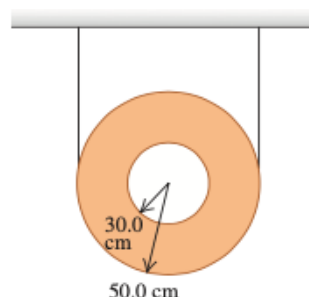
13. Una placa metálica cuadrada de 0,18 m por lado pivota sobre un eje que pasa por el punto O en su centro y es perpendicular a la placa. Calcula el torque neto alrededor de este eje debida a las tres fuerzas que se muestran en la figura, si las magnitudes de las fuerzas son  $F_1 = 18$  N,  $F_2 = 26$  N y  $F_3 = 14$  N. La placa y todas las fuerzas están en el plano de la página. (Respuesta: 2,50 Nm)



14. Una cuerda se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0,25 m de radio y masa de 9,2 kg. Se tira de la cuerda con una fuerza horizontal constante de 40 N hacia la derecha, quitándola tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. a) Calcula la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte de la cuerda que ya se haya retirado de la rueda. b) Determina la magnitud y la dirección de la fuerza que ejerce el eje sobre la rueda. c) ¿Por qué las respuestas a los incisos a) y b) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal? (Respuesta: a)  $34,8$  rad/s<sup>2</sup>, b) 98,6 N y c) 50,2 N)

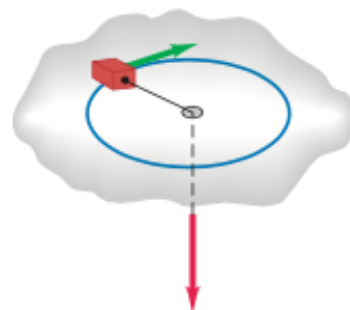
15. Un libro de texto de 2 kg descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Un cable unido al libro pasa sobre una polea, cuyo diámetro es de 0,15 m, para un libro con masa de 3 kg que cuelga. El sistema se libera a partir del reposo, y se observa que los libros se mueven 1,20 m en 0,800 s. a) ¿Cuál es la tensión en cada parte de la cuerda? b) ¿Cuál es el momento de inercia de la polea alrededor de su eje de rotación? (Respuesta: a) 7,50 N y 18,2 N y b)  $0,016$  kg·m<sup>2</sup>)

16. Un disco hueco uniforme tiene dos trozos de alambre delgado y ligero que se enrollan alrededor de su borde exterior y están sujetos al techo. De repente, uno de los alambres se rompe, mientras el otro no desliza conforme el disco rueda hacia abajo. Calcula la rapidez del centro del disco cuando haya descendido 2,20 m. (Respuesta: 5,07 m/s)





17. Un bloque pequeño con masa de 0,25 kg se ata a una cuerda que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción. El bloque originalmente gira en una circunferencia de 0,8 m de radio alrededor del agujero, con rapidez tangencial de 4 m/s. Se tira lentamente de la cuerda desde abajo, acortando el radio de la circunferencia descrita por el bloque. Si la resistencia a la rotura de la cuerda es de 30 N, ¿qué radio tendrá la circunferencia cuando la cuerda se rompa? (Respuesta: 0,44 m)



## Referencias

Algunos ejercicios de esta guía se basan en los siguientes libros:

- Sears F.W., Zemansky M.W., Young H.D., Freedman R.A. (2004). *Física Universitaria*, (11a ed. vol. I). Addison Wesley Longman, México, 2004.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Física: Para ciencias e ingeniería con Física Moderna* (7a. ed. vol. I). México D.F.: Cengage.