

BANCO DE PREGUNTAS TAREA 1

1. Considere las siguientes funciones f y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x, y) = \begin{cases} y & , si \ x > 0 \\ -y & , si \ x \leq 0 \end{cases} , \quad g(x, y) = \begin{cases} x & , si \ y > 0 \\ -x & , si \ y \leq 0 \end{cases}$$

Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$

- a) ¿Es h inyectiva? Justifique
- b) ¿Es h sobreyectiva? Justifique
- c) Determine $h^{-1}(\{a\})$

2. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (2x - y, -x + y)$$

- a) Estudie si F es una función inyectiva. Justifique.
- b) Estudie si F es una función sobreyectiva. Justifique.
- c) Estudie si $F \circ F \circ F \circ F$ es biyectiva. Justifique su respuesta.

3. Considere las funciones

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto y^2 - x^2$$

a) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

b) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

$$g : \mathbb{R}^2 - (\{0\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(s, t) \mapsto \left(s + t, \frac{t}{s}\right)$$

c) ¿Es la función $f \circ g$ invertible? Justifique su respuesta.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función con la propiedad que $f(x + 2, y - 1) = (3x + 4, 5y - 3)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$

a) Determine el valor $f(2, 2)$

b) Para la función:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } g(x, y) = (x + y, x - y) \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

determine $(f \circ g)(x, y)$

5. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la función $H_a : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$H_a(x) = \left(\frac{x-a}{x}, ax \right)$$

i. Se define el conjunto $A = \{ a \in \mathbb{R} \mid H_a \text{ es inyectiva} \}$. Determine todos los elementos pertenecientes a este conjunto

ii. Sea $a \in A$ definido en el punto anterior. Asigne a cada letra del abecedario su número de posición, es decir, $a = 1, b = 2, c = 3, \dots, z = 26$. Considere el par ordenado (y_1, y_2) donde y_1 corresponde al número asignado por la primera letra de su nombre e y_2 al número de la primera letra de su apellido, por ejemplo ANA CARRASCO, entonces $(y_1, y_2) = (1, 3)$

Determine $H_a^{-1}(\{(y_1, y_2)\})$ para el par definido por su nombre y apellido

iii. Sea la función

$$C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } C(x, y) = (x^2, y^2) \text{ si } B = \{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid C \circ H_1(x) = (4, 1) \}$$

Determine todos los elementos pertenecientes a este conjunto.

6. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n^2}{2} + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n+1)^2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- a) Demuestre que f es inyectiva
- b) ¿Es f sobreyectiva? Justifique su respuesta.
- c) Sea $C = \{ z \in \mathbb{Z} \mid 0 < z \leq 100 \}$ Determine $f^{-1}(C)$