Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:________________________________ Sección:________________________________

PEP 2

1.- Para $n \in \mathbb{N}$ considere

$$(3x-1)\left(\frac{x^2}{3}-3\right)^n.$$

(a) Calcule el término constante (el coeficiente de x^0) en el desarrollo de esa expresión para $n = 6$. (1 pt)

(b) Calcule el coeficiente del término x^3 en el desarrollo de esa expresión para $n = 5$. (1 pt)

2.- (a) Encuentre $A, B \in \mathbb{R}$ tal que (1 pt)

$$\frac{5}{(5x+3)(5x-2)} = \frac{A}{5x-2} + \frac{B}{5x+3}$$

(b) Determinar el valor de $n \in \mathbb{N}$ para que se cumple la siguiente igualdad: (1 pt)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(5k+3)(5k-2)} = 0,3125$$

3.- Simplifique términos y resuelva ecuaciones en los complejos.
Sea $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, definimos el módulo de z como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

i) Calcule el módulo y el conjugado del inverso multiplicativo de (0,6 pts)

$$\sqrt{3} + \sqrt{3}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

ii) Determine la parte real y la parte imaginaria de (0,6 pts)

$$\left(\frac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4$$

iii) Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que (0,8 pts)

$$3 \cdot \overline{z} = i \cdot (z-1).$$

PAUTA

1.
$$(3x-1)\left(\frac{x^2}{3}-3\right)^n = (3x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{n-k}\frac{x^{2k}}{3^k} = (3x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{n-2k}x^{2k}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{n+1-2k}\cdot x^{2k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{n-2k}\cdot x^{2k}\right).$$

En esa expresión las potencias impares y pares de x están separados.

(a) El termino constante es (ya 0,5 pts si el desarrollo del polinomio está correcto; de esos ya 0,3 puntos si por lo menos el desarrollo de la n-ecima potencia está correcta - da lo mismo si para n general o para $n = 6$)

$$-\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}(-1)^n 3^n.$$

(otros 0,3 puntos al identificar el termino correcto en su desarrollo, sea para n general o para $n = 6$).
Para $n = 6$ eso es igual a $-(3^6) = -729$. (0,2 pts si el resultado numerico es consistente con el termino identificado. El puro resultado numerico correcto sin traza de calculo consistente no recibe puntaje.)

(El mismo resultado se puede obtener por ejemplo al directamente evaluar simplemente el polinomio en $x = 0$: $(3\cdot 0-1)(\frac{0^2}{3}-3)^6 = -(-3)^6 = -729$..) (En el caso que el alumno utiliza otro camino de calculo, como lo del ejemplo, queda al criterio de cada corrector como distribuir puntaje parcial)

(b) El coeficiente de x^3 en el desarrollo general es (ya 0,5 pts si el desarrollo del polinomio está correcto y se identifica el termino; de esos ya 0,3 puntos si por lo menos el desarrollo de la n-ecima potencia en el termino general está correcta- da lo mismo si para n general o $n = 5$)

$$\binom{n}{1}(-1)^{n-1}3^{n-1} = n\cdot(-3)^{n-1}.$$

(otros 0,3 puntos al identificar el termino correcto en su desarrollo, sea para n general o para $n = 5$). Para $n = 5$, eso es

$$5\cdot 3^4 = 405.$$

(0,2 pts si el resultado numerico es consistente con el termino identificado. El puro resultado numerico correcto sin traza de calculo consistente no recibe puntaje.

En el caso de que el alumno sigue otro camino para llegar al resultado numerico, queda al criterio de cada corrector la distribución del puntaje parcial

2. a) Multiplicando la ecuación
$$\frac{5}{(5x+3)(5x-2)} = \frac{A}{5x-2} + \frac{B}{5x+3}$$
por $(5x+3)(5x-2)$, obtenemos
$$5 = A\cdot(5x+3) + B\cdot(5x-2) = (5A+5B)\cdot x + 3A - 2B.$$

(0,4 pts para eliminar denominadores)

De eso obtenemos la condición necesaria que $A = -B$ y $5 = 3A - 2B$.

(0,3 pts para lograr identificar un sistema de ecuaciones comparando coeficientes)

Sustituyendo $B = -A$ en la segunda ecuación, obtenemos

$$5 = 5A$$

(0,1 pts para eleminar una variable)

Por tanto necesariamente $A = 1$ y $B = -1$.

(Alternativamente uno podría aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar una representación por fracciones parciales, pero con la propuesta que los denominadores se pueden encontrar como constantes, eso sería como aplicar una bomba para matar un pajaro.)

(En el caso de caminos alternativos, queda al criterio de cada corrector la distribución de puntaje parcial)

b) Aprovechando del ejercicio anterior, podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{(5k+3)(5k-2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-2}-\frac{1}{5k+3}\right) \qquad \text{(0,4 pts)}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5k-2}\right)-\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{5k-2}\right)\\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3} \qquad \text{(0,4 pts)}\\
&= \frac{5n}{3\cdot(5n+3)}
\end{aligned}$$

Entonces buscamos $n \in \mathbb{N}$ (si existe) tal que

$$\frac{5n}{3\cdot(5n+3)} = 0,3125 = \frac{3125}{10000},$$

o sea tal que

$$500000n = 3125\cdot(15n+9),$$

o equivalentemente tal que

$\underbrace{(50000-46875)}_{=3125}\cdot n = 3125\cdot 9$ (0,2 pts. De esos 0,1 pts si el error era solamente algo trivial como error de signo)

Por lo tanto $n = 9$.

(Si resultado consistentemente erroneo, se puede reganar 0,1 pts a traves de una autodenuncia por la imposibilidad de un resultado no natural.)

3. i) Ojo: Lamentablemente la formulación de la pregunta permitió dos distintas interpretaciones semanticas:

1) *Calcule el* ***MODULO Y EL CONJUGADO*** *del* ***INVERSO MULTIPLICATIVO DE***

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

2) *Calcule el* ***MODULO*** *y el* ***CONJUGADO DEL INVERSO MULTIPLICATIVO*** *de*

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

Tenemos

$$|\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2} \overset{(0{,}1pts)}{=} \sqrt{6}.$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}} \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{\overline{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}}{(\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i})\left(\overline{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}\right)} \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}{6},$$

tenemos que

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}} \overset{(0{,}1pts)}{=} \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\mathrm{i} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}\right| \overset{(0{,}1pts)}{=} \sqrt{\frac{3+3}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ii)

$$\left(\frac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4 = \left(\frac{(4-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right)^4 \overset{(0{,}2pts)}{=} \left(\frac{7+\mathrm{i}}{2}\right)^4 = \left(\left(\frac{7+\mathrm{i}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{24+7\mathrm{i}}{2}\right)^2 \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{527}{4}+\frac{336}{4}\mathrm{i}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}\left(\left(\frac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4\right) \overset{(0{,}1pts)}{=} \frac{527}{4} \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\left(\left(\frac{4-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4\right) \overset{(0{,}1pts)}{=} 84.$$

(iii) Con $z = a + b\cdot\mathrm{i}$, podemos reescribir la ecuación $3\cdot\overline{z} = i\cdot(z-1)$ como

$$3a - 3b\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i}\cdot(z-1) = (a-1)\cdot\mathrm{i} + b\cdot\mathrm{i}^2 = -b + (a-1)\cdot\mathrm{i}.$$

(0,2 pts para sustitución correcta)

Separando esa ecuación en parte real y parte imaginaria, obtenemos un sistema de dos ecuaciones reales de forma

$$3a = -b \quad \text{y} \quad -3b = (a-1).$$

(0,2 pts para separar correctamente por parte real y parte imaginaria, todavia 0,1 pts si el error solamente es un error de signo)

Multiplicando la primera igualdad por dos y sustituyendo en la segunda igualdad, obtenemos

$$9a = a - 1,$$

(0,2 pts para eliminar una variable)

por lo que $a = -\frac{1}{8}$ y $b = \frac{3}{8}$.

(0,2 pts para dedución de valores)

Efectivamente

$$3\cdot\left(\frac{-1}{8}-\frac{3}{8}\mathrm{i}\right) = \mathrm{i}\cdot\left(-\frac{9}{8}+\frac{3}{8}\mathrm{i}\right).$$

(En caso de haber perdido puntaje antes, se puede recuperar 0,1 pt al chequear la supuesta solución y concluir correctamente si o no hubo un error en el calculo)