

# FISICA I

## versión 4

Autor : Luis Rodríguez Valencia<sup>1</sup>  
DEPARTAMENTO DE FISICA  
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Colaboradores: Alicia Lira, Rosemarie Pohl,  
Verónica Peters, Yolanda Vargas,  
Manuel Arrieta, Dagoberto Castro,  
Juán Barrera, Jorge Lay.

3 de marzo de 2008

<sup>1</sup>email: lhrodrig@lauca.usach.cl



# Contenidos

<b>Prólogo</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción a la Física</b>	<b>1</b>
1.1. Historia . . . . .	1
1.2. Modelos del Cosmos . . . . .	2
1.2.1. Modelo de Ptolomeo . . . . .	2
1.2.2. Nicholas Copernicus (1473-1543). Modelo de Copérnico	4
1.2.3. Mejores modelos . . . . .	4
1.2.4. Johannes Kepler (1571-1630) . . . . .	6
1.2.5. Las leyes de Kepler . . . . .	7
1.2.6. Contribución de Galileo (1564 - 1642) . . . . .	10
1.2.7. Sir Isaac Newton. La unificación de la Física y la As- tronomía . . . . .	13
1.3. La difusión del método científico . . . . .	15
1.3.1. La edad clásica de la Ciencia . . . . .	18
1.4. El método científico . . . . .	18
1.5. Gravitación . . . . .	20
1.5.1. Desarrollo de la teoría gravitacional . . . . .	20
1.5.2. Ley inversa al cuadrado de la distancia . . . . .	23
1.5.3. Cuerpos en órbita circular . . . . .	24
1.5.4. Velocidad de escape . . . . .	25
1.5.5. Peso y masa . . . . .	25
1.5.6. Interacción entre los cuerpos celestiales . . . . .	26
1.5.7. Medidas absolutas de la gravedad . . . . .	28
1.5.8. Datos actuales de las órbitas planetarias . . . . .	29
1.6. Unidades . . . . .	29
1.6.1. Medición . . . . .	30

1.6.2.	Valor verdadero . . . . .	30
1.7.	Cifras significativas . . . . .	30
1.8.	Estandarización . . . . .	32
1.9.	Las unidades básicas . . . . .	34
1.10.	Ejercicios . . . . .	35
<b>2.</b>	<b>Vectores</b>	<b>39</b>
2.1.	Escalares y vectores . . . . .	39
2.2.	Sistemas de referencia . . . . .	39
2.2.1.	Sistema cartesiano . . . . .	39
2.2.2.	Sistema esférico de coordenadas . . . . .	40
2.2.3.	Sistema cilíndrico de coordenadas . . . . .	41
2.2.4.	Sistema polar de coordenadas . . . . .	41
2.2.5.	Relaciones entre las coordenadas . . . . .	42
2.3.	Desplazamientos en el espacio . . . . .	43
2.4.	Vectores . . . . .	44
2.4.1.	Notación . . . . .	45
2.4.2.	Suma de vectores . . . . .	45
2.4.3.	Magnitud de un vector . . . . .	45
2.4.4.	Multiplicación de un vector por un escalar . . . . .	45
2.4.5.	Vectores unitarios . . . . .	46
2.4.6.	Vectores unitarios cartesianos . . . . .	46
2.4.7.	Componentes cartesianas de un vector . . . . .	46
2.4.8.	Vector nulo . . . . .	47
2.4.9.	Resta de vectores . . . . .	47
2.4.10.	Producto escalar de vectores . . . . .	48
2.4.11.	Proyección de un vector en una dirección . . . . .	48
2.4.12.	Conmutatividad . . . . .	48
2.4.13.	La distributividad del producto escalar respecto a la suma . . . . .	48
2.4.14.	Producto vectorial de dos vectores . . . . .	49
2.4.15.	Distributividad del producto cruz respecto a la suma . . . . .	50
2.4.16.	Algunas propiedades . . . . .	52
2.4.17.	Algunas operaciones en términos de las componentes . . . . .	52
2.4.18.	Relación con geometría . . . . .	53
2.4.19.	Cosenos directores . . . . .	55
2.4.20.	Ecuación de un plano . . . . .	55
2.4.21.	Volumen de un paralelepípedo . . . . .	56

---

2.4.22. Ángulo que forman dos vectores $\vec{a}$ , $\vec{b}$ . . . . .	57
2.5. Más sobre sistemas de referencia . . . . .	57
2.5.1. Sistema cartesiano . . . . .	57
2.5.2. Sistema esférico de coordenadas . . . . .	58
2.5.3. Sistema cilíndrico de coordenadas . . . . .	59
2.5.4. Sistema polar de coordenadas . . . . .	59
2.5.5. Relaciones entre los vectores unitarios . . . . .	59
2.5.6. Componentes de un vector . . . . .	60
2.6. De actualidad (No incluido en el, programa) . . . . .	61
2.7. Aplicaciones . . . . .	62
2.8. Ejercicios . . . . .	63
<b>3. Fuerzas</b> . . . . .	<b>69</b>
3.1. Las Fuerzas . . . . .	69
3.1.1. Fuerza de acción a distancia . . . . .	69
3.1.2. Fuerzas de contacto . . . . .	71
3.1.3. Tercera ley de Newton . . . . .	72
3.1.4. Unidades de Fuerza . . . . .	72
3.2. Tipos de fuerzas de contacto . . . . .	72
3.2.1. Fuerza normal . . . . .	73
3.2.2. Fuerza de roce . . . . .	73
3.2.3. Tensiones . . . . .	73
3.2.4. Superficies lisas o sin roce . . . . .	73
3.3. Condiciones de equilibrio . . . . .	73
3.3.1. Línea de acción y punto de aplicación . . . . .	74
3.3.2. Fuerzas concurrentes . . . . .	74
3.3.3. Par de Fuerzas . . . . .	75
3.3.4. Fuerzas no concurrentes . . . . .	75
3.3.5. Caso general . . . . .	76
3.4. Centro de masa . . . . .	78
3.4.1. Cuerpos continuos . . . . .	78
3.5. Centroides . . . . .	78
3.5.1. Triángulo . . . . .	80
3.5.2. Triángulo . . . . .	80
3.5.3. Semi disco . . . . .	81
3.5.4. Cuarto de disco . . . . .	82
3.5.5. Combinación de áreas . . . . .	82
3.6. Resultante de fuerzas paralelas de igual magnitud . . . . .	83

3.6.1.	Centro de Fuerzas paralelas . . . . .	83
3.6.2.	Coordenadas del centro de fuerzas . . . . .	85
3.6.3.	Centro de fuerzas distribuidas paralelas . . . . .	86
3.7.	Trabajar con componentes . . . . .	88
3.7.1.	Eje torsor . . . . .	89
3.8.	De actualidad (no pertenece al programa) . . . . .	93
3.9.	Ejercicios . . . . .	95
<b>4.</b>	<b>Fuerzas y equilibrio</b>	<b>101</b>
4.1.	Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática . . . . .	102
4.1.1.	Equilibrio de una partícula . . . . .	102
4.1.2.	De un sistema de partículas . . . . .	102
4.1.3.	Cuerpo rígido . . . . .	103
4.1.4.	La fuerza de roce estática . . . . .	103
4.1.5.	Fuerzas causadas por ciertos soportes . . . . .	104
4.2.	Ejemplos . . . . .	106
4.3.	Ejercicios . . . . .	109
<b>5.</b>	<b>Hidrostática</b>	<b>123</b>
5.1.	Fluidos . . . . .	123
5.2.	Concepto de Presión . . . . .	124
5.2.1.	Unidades de Presión . . . . .	125
5.2.2.	Propiedades de la presión . . . . .	125
5.3.	Densidad o masa específica . . . . .	126
5.3.1.	Densidad relativa . . . . .	126
5.4.	Peso específico . . . . .	126
5.5.	Presión atmosférica . . . . .	127
5.6.	Variación de la presión con la profundidad . . . . .	128
5.7.	Medidores de presión . . . . .	129
5.7.1.	Barómetro de mercurio en U . . . . .	129
5.7.2.	Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases . . . . .	130
5.8.	Principio de Arquímedes . . . . .	132
5.9.	Fuerza de Flotación . . . . .	133
5.9.1.	Cuerpo totalmente sumergido . . . . .	133
5.9.2.	Cuerpo parcialmente sumergido . . . . .	134
5.9.3.	Estabilidad de un cuerpo prismático inhomogéneo . . .	135
5.10.	Fuerzas sobre las paredes o compuertas . . . . .	136

---

5.10.1. Superficie rectangular . . . . .	137
5.10.2. Superficie de forma arbitraria . . . . .	139
5.11. Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada . .	140
5.11.1. Torque . . . . .	141
5.12. Ejemplos . . . . .	141
5.13. Ejercicios . . . . .	143
<b>6. Cinemática</b>	<b>151</b>
6.1. Introducción . . . . .	151
6.2. Concepto de movimiento . . . . .	152
6.3. Concepto de tiempo . . . . .	152
6.4. Movimiento rectilíneo . . . . .	153
6.4.1. Desplazamientos . . . . .	153
6.4.2. Espacio recorrido . . . . .	153
6.4.3. Velocidad media . . . . .	154
6.4.4. Velocidad instantánea . . . . .	154
6.4.5. Rapidez . . . . .	154
6.4.6. Aceleración media . . . . .	155
6.4.7. Aceleración instantánea . . . . .	155
6.4.8. Interpretación gráfica . . . . .	156
6.4.9. Movimiento uniformemente acelerado . . . . .	158
6.4.10. Solución gráfica . . . . .	159
6.5. Movimiento en el espacio . . . . .	161
6.5.1. En coordenadas cartesianas . . . . .	161
6.5.2. En coordenadas polares . . . . .	164
6.5.3. Movimiento circular . . . . .	166
6.5.4. Caso particular. Movimiento circular uniforme. . . . .	167
6.5.5. Caso particular. Aceleración angular constante . . . . .	167
6.5.6. Notación alternativa . . . . .	168
6.5.7. Derivadas de los vectores unitarios . . . . .	168
6.5.8. Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas . . . . .	169
6.5.9. Velocidad . . . . .	170
6.5.10. Aceleración . . . . .	170
6.5.11. Vectores unitarios esféricos . . . . .	171
6.5.12. Coordenadas cilíndricas . . . . .	171
6.5.13. Coordenadas intrínsecas . . . . .	173

6.6.	Resumen . . . . .	174
6.7.	Movimiento de proyectiles . . . . .	175
6.7.1.	Análisis del movimiento . . . . .	175
6.7.2.	Ecuación de la trayectoria . . . . .	176
6.7.3.	Angulo de disparo . . . . .	176
6.7.4.	Parábola de seguridad . . . . .	176
6.7.5.	Formulación alternativa (requiere más matemáticas) . .	178
6.7.6.	Parábola de seguridad en forma polar . . . . .	180
6.8.	Movimiento relativo . . . . .	181
6.8.1.	Traslación de un sistema . . . . .	181
6.8.2.	Movimiento general de un sistema . . . . .	182
6.9.	Ejercicios . . . . .	183
<b>7.</b>	<b>Dinámica de la partícula</b>	<b>199</b>
7.1.	Leyes de Newton . . . . .	199
7.1.1.	Primera ley de Newton . . . . .	200
7.1.2.	Sistema inercial de referencia . . . . .	200
7.1.3.	Segunda ley de Newton . . . . .	202
7.1.4.	Principio de equivalencia . . . . .	203
7.1.5.	Sobre las fuerzas . . . . .	203
7.1.6.	Fuerzas de acción a distancia . . . . .	203
7.1.7.	Fuerzas de contacto . . . . .	204
7.1.8.	La fuerza de roce estática . . . . .	204
7.1.9.	Fuerza de roce cinética . . . . .	205
7.1.10.	Tercera ley de Newton . . . . .	205
7.1.11.	Definiciones . . . . .	206
7.2.	Teoremas . . . . .	206
7.3.	Paréntesis matemático. Derivadas y diferenciales . . . . .	209
7.3.1.	De una variable independiente . . . . .	209
7.3.2.	De más variables independientes . . . . .	211
7.4.	Fuerzas conservativas ( $C$ ) y no conservativas ( $NC$ ) . . . . .	213
7.4.1.	Concepto de trabajo . . . . .	213
7.4.2.	Energías potenciales . . . . .	214
7.4.3.	Fuerza peso . . . . .	214
7.4.4.	Fuerza elástica . . . . .	214
7.4.5.	Fuerza gravitacional . . . . .	214
7.4.6.	Fuerza electrostática . . . . .	215



7.4.7.	Teoremas sobre la energía . . . . .	216
7.5.	Sobre la energía . . . . .	218
7.5.1.	La energía cinética de los asteroides . . . . .	219
7.5.2.	Integración de la ecuación de movimiento . . . . .	220
7.5.3.	Fuerza constante . . . . .	220
7.5.4.	Fuerza dependiente del tiempo $\vec{F}(t)$ . . . . .	221
7.5.5.	Fuerza dependiente de la posición . . . . .	221
7.5.6.	Por ejemplo la fuerza elástica . . . . .	222
7.5.7.	Solución más simple . . . . .	223
7.5.8.	Movimiento unidimensional con fuerza viscosa . . . . .	224
7.6.	Movimiento armónico simple . . . . .	225
7.6.1.	Evaluación de las constantes . . . . .	226
7.6.2.	Energía . . . . .	226
7.6.3.	Amplitud del movimiento . . . . .	227
7.6.4.	Periodo y frecuencia . . . . .	227
7.7.	Movimiento armónico amortiguado . . . . .	229
7.7.1.	Caso sub amortiguado . . . . .	231
7.7.2.	Caso amortiguado crítico . . . . .	232
7.7.3.	Caso sobre amortiguado . . . . .	232
7.7.4.	Movimiento amortiguado forzado . . . . .	233
7.7.5.	Una solución particular . . . . .	233
7.7.6.	Fenómeno de resonancia . . . . .	234
7.8.	Dinámica del movimiento circular . . . . .	235
7.9.	Ejemplos . . . . .	240
7.9.1.	Fuerzas constantes o dependientes del tiempo . . . . .	240
7.9.2.	Fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad . . . . .	243
7.10.	Ejercicios . . . . .	247
7.10.1.	Dinámica unidimensional . . . . .	247
7.10.2.	Movimiento armónico simple . . . . .	250
7.10.3.	Dinámica en dos o tres dimensiones . . . . .	253
7.10.4.	Trabajo y energía . . . . .	256
7.10.5.	Problemas que requieren más matemáticas . . . . .	259
<b>8.</b>	<b>Sistema de Partículas</b>	<b>261</b>
8.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	261
8.1.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	263
8.1.2.	Sobre el momentum angular . . . . .	267

---

8.1.3.	Torque en punto arbitrario . . . . .	270
8.1.4.	Sobre la fuerza gravitacional . . . . .	271
8.1.5.	Teorema Energía Trabajo . . . . .	272
8.1.6.	Trabajo realizado por una fuerza . . . . .	272
8.1.7.	Trabajo realizado por una fuerza conservativa (C) . . .	274
8.2.	Sistema de dos partículas . . . . .	276
8.2.1.	La energía cinética . . . . .	277
8.3.	Campo central de Fuerza . . . . .	278
8.3.1.	Ecuación diferencial para la órbita . . . . .	279
8.3.2.	Excentricidad . . . . .	282
8.3.3.	Semi ejes de la elipse . . . . .	283
8.3.4.	Ley de Kepler de los períodos . . . . .	284
8.4.	Choques . . . . .	285
8.4.1.	Coefficiente de restitución . . . . .	287
8.4.2.	Choques unidimensionales . . . . .	289
8.4.3.	Choques bidimensionales de esferas . . . . .	289
8.4.4.	Discusión . . . . .	291
8.4.5.	Consideraciones sobre la energía . . . . .	292
8.5.	Sistemas de masa variable . . . . .	293
8.5.1.	Resumen de fórmulas movimiento en un campo central de fuerza . . . . .	298
8.5.2.	Lanzamiento desde la superficie terrestre . . . . .	299
8.5.3.	Energía . . . . .	299
8.5.4.	Momentum angular . . . . .	299
8.5.5.	Velocidad de escape desde la superficie . . . . .	299
8.5.6.	Excentricidad . . . . .	300
8.5.7.	Ecuación de la órbita . . . . .	300
8.5.8.	Orientación $\alpha$ del semieje mayor (figura, caso (2)) . . .	300
8.5.9.	Casos elípticos . . . . .	300
8.5.10.	Alcance máximo . . . . .	301
8.6.	Ejercicios. . . . .	302
8.6.1.	Problema de sistema de partículas . . . . .	302
8.6.2.	Choques . . . . .	306
8.6.3.	Masa variable . . . . .	310
8.6.4.	Campo central. Orbitas. . . . .	314

<b>9. Dinámica del cuerpo rígido</b>	<b>323</b>
9.1. Cuerpo rígido . . . . .	323
9.2. Cuerpo rígido continuo . . . . .	323
9.3. Cinemática de un cuerpo rígido en el espacio . . . . .	324
9.4. Cinemática plana de un cuerpo rígido . . . . .	324
9.4.1. Desplazamientos de un cuerpo rígido . . . . .	324
9.4.2. Condición de rigidez . . . . .	326
9.4.3. Ejemplos . . . . .	326
9.4.4. Centro instantáneo de rotación . . . . .	328
9.4.5. Algunas relaciones entre velocidades y aceleraciones . .	329
9.4.6. Curvas rueda y riel . . . . .	331
9.4.7. Modelo continuo de un cuerpo rígido . . . . .	333
9.4.8. Momentum angular y energía cinética . . . . .	334
9.4.9. El momentum angular . . . . .	334
9.4.10. Ejemplos de cálculo de momentos de inercia . . . . .	335
9.4.11. Momentum angular y momentum lineal . . . . .	336
9.4.12. La energía cinética . . . . .	337
9.4.13. Movimiento de rotación y traslación . . . . .	337
9.4.14. Movimiento en el espacio . . . . .	338
9.5. Dinámica de un cuerpo rígido . . . . .	340
9.5.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	340
9.5.2. Ecuaciones para el caso de movimiento plano . . . . .	341
9.5.3. Momentos de Inercia . . . . .	342
9.5.4. Teorema de Steiner . . . . .	343
9.6. Ejemplos de dinámica plana . . . . .	344
9.6.1. Dinámica de rotación . . . . .	344
9.6.2. Dinámica de rotación y traslación . . . . .	348
9.6.3. Casos donde el movimiento de un punto es conocido . .	350
9.7. Ejercicios . . . . .	357
9.7.1. . . . .	357
9.7.2. Ejercicios de cinemática plana . . . . .	357
9.7.3. Ejercicios de dinámica . . . . .	360

---

<b>10. Apéndice</b>	<b>367</b>
10.1. Opcional . . . . .	367
10.1.1. Sumatorias . . . . .	367
10.1.2. Derivadas . . . . .	368
10.1.3. Diferenciales . . . . .	369
10.1.4. Integrales . . . . .	370
10.2. Ecuaciones diferenciales . . . . .	374
10.2.1. Ecuación diferencial lineal, homogénea, con coeficientes constantes . . . . .	375
10.2.2. Separación de variables . . . . .	376
10.2.3. Identidades útiles . . . . .	376
10.3. Coordenadas intrínsecas . . . . .	377
10.3.1. Resumen . . . . .	383
10.4. Movimiento relativo . . . . .	384
10.4.1. Movimiento general del sistema . . . . .	384
10.4.2. Transformación de Lorentz . . . . .	385

# Prólogo

Este texto tiene el propósito de iniciarlos en una ciencia: la Física que nos muestra una maravillosa relación establecida entre la naturaleza y el ingenio del cerebro humano.

Veremos cómo, a partir de observaciones y experimentos sencillos, se consigue estructurar una teoría sólida que da cuenta de fenómenos de la naturaleza, algunos observables a simple vista y otros fuera del alcance de los sentidos.

La Física siempre ha estado, está y estará formando parte de nuestro entorno. A través de ella es posible predecir lo que sucederá con el Universo y, además, nos da señales que permiten vislumbrar cómo comenzó todo.

Desde Aristóteles (384-322aC) hasta nuestros días los científicos aportan sus trabajos para beneficio de la humanidad, interactuando para el progreso de la Ciencia y de la Tecnología. Por ejemplo, avances en la Física contribuyen al progreso de las Ciencias de la Ingeniería, y éstas, a su vez, dan soporte técnico a la Medicina, mejorando la calidad de vida del hombre.

Este trabajo está dedicado a jóvenes deseosos de aprender, mediante la comprensión, razonamiento y deducción, a partir de los conceptos fundamentales y las leyes de la Física.

Este texto, para el primer año de Ingeniería Civil, se presenta en la misma secuencia que ha sido programado el curso de Física. Los requerimientos de Matemáticas necesarios para su desarrollo serán presentados de manera gradual según las necesidades del curso. Se comienza con una introducción, que creemos necesaria, para tener una comprensión de los esfuerzos realizados en el pasado para alcanzar el grado actual del conocimiento. De manera progresiva se hace indispensable la adquisición de más elementos matemáticos, que son, en algunos casos aportados por el texto. En otros, se darán las demostraciones como una ilustración. De cualquier forma queremos enfatizar el hecho, no discutido, de que las Matemáticas son el lenguaje y la herramienta fundamental de la Física.

Se han hecho importantes esfuerzos por el grupo de colaboradores para minimizar los errores de cualquier índole, pero esa es una tarea interminable, de manera que nos será muy grato considerar las críticas de los estudiantes y colegas que deseen utilizar este texto.

Esta es la cuarta edición del texto que se usará (eso esperamos) durante el año 2008. Se han hecho diversos cambios a las versiones anteriores aplicada los años 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006 y 2007 en el desarrollo del curso de Física Anual para Ingeniería Civil. Estos cambios son el resultado de la experiencia acumulada en la aplicación práctica de este texto. Por ejemplo varios tópicos, cuyo desarrollo no es estrictamente necesario, fueron pasados a un apéndice. Se agregó un apéndice matemático opcional que incluye diversos tópicos que ayudarán a la comprensión del curso, se han agregado problemas y reordenados de acuerdo a su temática. Una versión en formato PDF es colocada en la página WEB del curso. Todos los problemas del texto están resueltos y se presentan en un texto separado de “Soluciones a los ejercicios”, para la realización del cual la ayuda de los colaboradores en la detección de sus errores ha sido muy importante.

#### Consejos para estudiar y para las pruebas

- ☐ En general en las pruebas de este curso se preguntan problemas
- ☐ Luego haga problemas. El nivel de los problemas de las pruebas corresponden a problemas indicados con (1) o (2).
- ☐ En el desarrollo de las pruebas haga figuras de un buen tamaño. Un tercio de la hoja por lo menos.

- ☐ Defina en su figura todas las letras que representen alguna propiedad física que se usará en el desarrollo del problema.
- ☐ Explique su desarrollo.
- ☐ Sea ordenado. Si los problemas tienen partes (a), (b), (c), etcétera. Explique claramente cual parte está resolviendo.
- ☐ Si usa lápiz grafito, procure que su calidad sea tal que se pueda leer con claridad.
- ☐ Los resultados indíquelos con lápiz pasta, caso contrario no podrá reclamar de la corrección.
- ☐ En cada prueba se aceptarán reclamos que se justifiquen, es decir usted deberá indicar por escrito las razones de su reclamo.

A pesar que hay pautas de corrección, en ellas se indican solamente los máximos por ítem. Si usted tiene errores, cada profesor corrector juzgará cuánto del máximo usted merece y en ello no hay reclamo. Este proceso de corrección tiene algo de subjetividad y la claridad de su desarrollo puede influir positivamente en su resultado.





# Introducción a la Física

## 1.1. Historia

Aristóteles (384 aC, 322 aC) más que cualquier otro pensador, determinó el pensamiento occidental hasta finales del siglo 17 y aún después de la revolución científica, los conceptos e ideas Aristotélicas han permanecido en el pensamiento occidental.

Aristóteles pensaba que las sustancias que constituían la Tierra eran diferentes de las sustancias existentes en los Cielos. El también creía que la dinámica, la rama de la Física que describe los movimientos, estaba determinada esencialmente por la naturaleza de la sustancia que se movía. Así, limitándonos a lo esencial, Aristóteles tenía la creencia de que una piedra caía hacia el suelo porque piedra y suelo eran sustancias similares. En términos de los cuatro elementos básicos, la piedra era esencialmente “tierra”. De la misma forma el humo se elevaba porque era principalmente “aire” (y algo de “fuego”) y por lo tanto el humo deseaba estar cerca del “aire” y lejos de la “tierra” y del “agua”. Por similares argumentos él pensaba que los cielos estaban formados por la más perfecta de las sustancias, la quinta esencia, la cual poseía por su naturaleza la tendencia de efectuar un movimiento perfecto, es decir circular. El también pensaba que los objetos en la Tierra se movían mientras fueran empujados, de modo que ellos se detenían apenas se eliminaban las fuerzas aplicadas. Esta concepción causaba problemas, por ejemplo era difícil explicar porqué una flecha lanzada mediante un arco, continuaba volando aún después de que la cuerda terminaba su contacto con la

flecha. Algunas explicaciones fueron esbozadas, por ejemplo que la flecha en su vuelo producía un vacío detrás. El aire se precipitaba en ese vacío empujando además a la flecha. Esto es un esbozo de lo que eran las creencias antes del desarrollo del método científico.

Una de principales cuestiones que origina el desarrollo de la ciencia y del método científico es la explicación del movimiento de los objetos que se ven en el Cielo. Hoy día, producto de una enorme cantidad de observaciones, las cosas parecen estar claras. Sin embargo antes la información disponible era muy escasa. Excepto quizás por estimaciones sobre la Luna y el Sol, los hombres de antes no tenían idea de las distancias y de los tamaños de los objetos celestiales. No debería causar extrañeza entonces que los Griegos apoyaron la idea, con mucho sentido común, de que la tierra debería estar estacionaria (en reposo), y en base a esa hipótesis había que diseñar un método para predecir las posiciones de los astros. La versión final de este modelo fue diseñada por Ptolomeo de Alejandría, modelo que es conocido en nuestros tiempos como el modelo de Ptolomeo.

## 1.2. Modelos del Cosmos

### 1.2.1. Modelo de Ptolomeo

Este era un intrincado modelo, donde la Tierra permanecía en reposo en su centro, mientras los otros objetos del Cielo se movían en torno a la Tierra, en círculos o combinaciones de movimientos circulares, la única curva perfecta para los griegos y por lo tanto la única posible. Todo esto estaba encerrado por una gigantesca esfera de cristal sobre la cual están las estrellas fijas, esfera que daría una vuelta completa por día. Así por ejemplo, un planeta describía un pequeño círculo en torno a un punto que a su vez describía un círculo mayor en torno a la Tierra. La figura, de la época, lamentablemente no muy clara, muestra esquemáticamente ese modelo.

Así se podían explicar satisfactoriamente para los datos disponibles en ese tiempo, como los planetas tenían velocidades variables incluso invirtiendo su movimiento. Entonces era posible hacer cálculos hacia el futuro o hacia el pasado, coincidiendo con las observaciones acumuladas durante cientos de años. Este modelo tuvo vigencia durante alrededor de 1400 años, un gran periodo de tiempo comparado con la rapidez de los cambios actuales. Esto no debe considerarse una aceptación ciega de una hipótesis. Ella descansaba



Ptolomeo, fue reducida en Uraniborg a un minuto de arco. En particular, Brahe recopiló extensos datos sobre la órbita de Marte, que más tarde probaría ser cruciales para la formulación de las leyes correctas del movimiento de los planetas por parte de Kepler.

Las críticas al modelo de Ptolomeo las inició Copérnico, quien puso de manifiesto las discrepancias del modelo con la observación, discrepancias no muy grandes pero que debían ser justificadas.

### **1.2.2. Nicholas Copernicus (1473-1543). Modelo de Copérnico**

Debido a las diferencias observadas, cabían dos posibilidades, hacer correcciones a las órbitas del modelo de Ptolomeo haciéndolas más intrincadas, o adoptar otro modelo. Nicholas Copernicus en su primer libro, establece que el Sol es el centro del Universo y que la Tierra tiene un movimiento triple en torno a ese centro, esto es una rotación diaria en torno a su centro, un movimiento anual en torno al Sol, y un movimiento cónico de su eje de rotación. Su teoría fue capaz de dar una explicación simple y elegante del movimiento retrógrado de los planetas. Además se explica el movimiento aparente del Sol entre las estrellas debido al movimiento de la Tierra. Copérnico sin embargo mantuvo el rol privilegiado del movimiento circular de modo que tuvo que construir sus órbitas planetarias mediante círculos. Sus resultados numéricos sin embargo fueron solo levemente mejores que los existentes. El movimiento aparente de los planetas, en particular el movimiento retrógrado, se explica con simplicidad como lo ilustra la figura (1.3). Las proporciones del dibujo son aproximadas considerando los radios de las órbitas de Marte y de la Tierra y la validez de la ley de Kepler de los periodos que se explica más adelante.

En la figura se explica como el planeta Marte se ve avanzar o a veces retroceder sobre el fondo de las estrellas fijas. A pesar de la simplicidad del modelo, Copérnico encontró que las posiciones predichas con su modelo para los astros no eran significativamente mejores que las predichas por el modelo de Ptolomeo.

### **1.2.3. Mejores modelos**

Aquí nos encontramos frente a dos hipótesis que daban cuenta más o menos igual de los hechos observados. Las creencias imperantes en aquellos días,

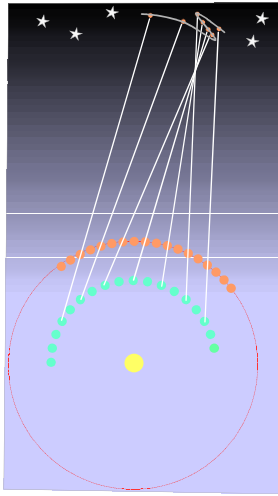


Figura 1.3: Movimiento aparente de Marte

sobre todo ideas religiosas, favorecían la hipótesis de una tierra en reposo, ocupando el lugar central en el Universo. Además la Mecánica Clásica no estaba lo suficientemente desarrollada como para contestar muchas preguntas.

Entonces ocurrió que las mediciones por si solas no permitieron dilucidar entre los dos modelos, de Copérnico y de Ptolomeo. Tycho insistía en una Tierra inmóvil. Copérnico persuadió a Tycho para colocar el centro de revolución de todos los otros planetas en el Sol. Para ello tenía que abandonar las esferas cristalinas Aristotélicas puesto que chocarían entre si. Tycho también cuestionó la doctrina Aristotélica de perfección celestial, cuando, en los años 1570, un cometa y una nueva estrella aparecieron. Tycho mostró que ambos estaban sobre la esfera de la Luna. Quizás las críticas más serias fueron las hechas por Galileo, después de su invención del telescopio. Galileo Galilei (1520 - 1591) hizo notables contribuciones al desarrollo del método científico, en particular a la descripción del movimiento de los cuerpos y a la comprensión del Universo.

En una rápida sucesión de acontecimientos, Galileo anunció que había montañas en la Luna, satélites que rodean Júpiter, y manchas en el Sol. Es más, que la Vía Láctea está compuesta de innumerables estrellas cuya existencia nadie había sospechado hasta que Galileo las observó. Aquí la crítica golpeaba las raíces mismas del sistema Aristotélico del mundo.

Al mismo tiempo que Galileo investigaba los cielos con su telescopio, en

Alemania Johannes Kepler estaba investigándolo con su mente. La figura muestra el telescopio de Galileo.



Figura 1.4:

Las observaciones muy precisas de Tycho le permitieron a Kepler descubrir que Marte y los otros planetas, no se movían en círculos sino que describiendo elipses, con el Sol en uno de sus focos. El cosmos de Kepler era anti-Aristotélico, y quizás por ello él escribió sus descubrimientos en prosa latina casi indecifrable en una serie de trabajos que no tuvieron mucha circulación.

#### 1.2.4. Johannes Kepler (1571-1630)

El siguiente paso en la historia de la astronomía fue debido a la intuición teórica de Johannes Kepler, un astrónomo Alemán quien fue a Praga como asistente de Brahe durante los años 1599-1601. Kepler y Brahe no se llevaban bien. Al parecer Brahe pensaba que Kepler podría eclipsarlo de ser el más grande de los astrónomos de esos días, por lo cual sólo le permitió a Kepler examinar parte de su enorme caudal de datos observacionales. El le propuso a Kepler la tarea de entender la órbita de Marte que parecía muy complicada, con la esperanza de que gastara su tiempo en eso, permitiéndole a él trabajar en su teoría del sistema Solar.

Como una ironía, fueron los datos de la órbita de Marte los que le permitieron a Kepler formular las leyes correctas del movimiento de los planetas, sobrepasando lejos los logros de Brahe.

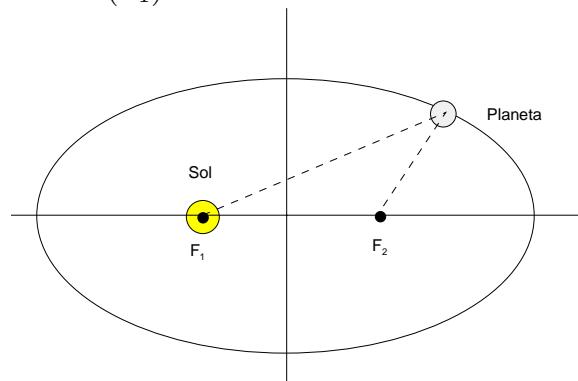
En retrospectiva la razón de que la órbita de Marte pareciera tan complicada fue que Copérnico colocaba el Sol en el centro del sistema solar, pues había errado en su creencia de que las órbitas de los planetas eran círculos. Kepler pudo finalmente concluir que las órbitas de los planetas no eran los

círculos exigidos por Aristóteles, sino que curvas que los geómetras llaman elipses. Sin embargo las órbitas son apenas elípticas, y para los datos disponibles en ese tiempo, era precisamente la órbita de Marte quien mostraba ser más elíptica.

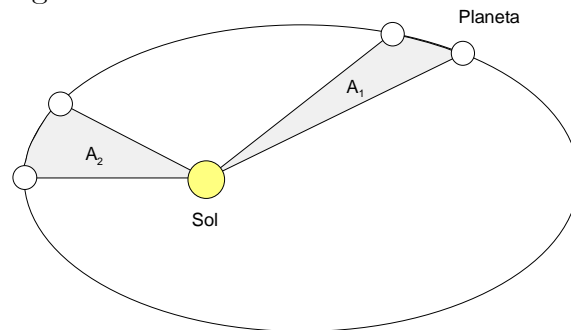
### 1.2.5. Las leyes de Kepler

Los descubrimientos de Kepler, basados en las observaciones realizadas, pueden resumirse en tres hechos, conocidos hoy en día como las tres leyes de Kepler:

- Cada planeta se mueve en una órbita elíptica en torno del Sol, el cual ocupa uno de sus focos ( $F_1$ ).



- La línea que conecta el Sol con cada planeta, barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo. Esto es  $A_1 = A_2$  si los intervalos de tiempo transcurridos son iguales.



- Los cuadrados de los tiempos requeridos por cada planeta para dar una vuelta completa en torno al Sol, son proporcionales al cubo de su distancia promedio al Sol. Esta ley será establecida en forma más precisa más adelante.



Figura 1.5: Johanes Kepler

Como veremos uno de los mayores triunfos de Newton fue explicar de manera teórica las leyes de Kepler.

Lo que Galileo y Kepler no podían dar, aunque lo intentaron, eran respuestas a las preguntas Aristotélicas como las siguientes: ¿ Si la Tierra gira en torno de su eje, entonces por qué no salen volando los objetos? ¿Y qué hace que los objetos dejados caer de lo alto de las torres no se desvíen hacia el oeste dado que la tierra gira debajo de ellos? ¿Y cómo es posible que la Tierra, en espacio vacío, viaje en torno del Sol—ya sea en círculos o en elipses—sin algo que la empuje? Las mejores respuestas vinieron de parte de Galileo, quién analizó los problemas de la rotación de la Tierra y su revolución mediante análisis lógico. Los cuerpos no salen volando la Tierra porque la tierra no gira demasiado rápido, así los cuerpos, tienen una tendencia pequeña a salir volando. Los cuerpos dejados caer desde las torres, caen a la base de ellas porque ellos (antes de ser soltados) comparten con la torre la rotación de la Tierra. Asimismo Galileo dedujo lo que acontece cuando otro movimiento se agrega. Así Galileo dedujo que una pelota dejada caer de la cima de un mástil de una nave en movimiento caería directamente a la base del mástil. Si la pelota fuera permitida a seguir sin roce en vuelo horizontal, continuaría moviéndose para siempre. De hecho Galileo concluyó que los planetas, una vez puestos en movimiento circular, continuarían así para siempre.



Por consiguiente, las órbitas circulares de Copérnico existen. Galileo nunca aceptó las elipses de Kepler; hacerlo habría significado abandonar su solución al problema de Copérnico.

Kepler comprendió que había un problema real con el movimiento planetario. Él buscó resolverlo mediante la existencia de alguna fuerza que parecía ser cósmica en naturaleza, en su creencia el magnetismo.

La Tierra había sido descrita como un gigantesco imán por William Gilbert en 1600. Kepler se aferró a ese hecho. Una fuerza magnética, dijo Kepler, emanó del Sol y empujó los planetas alrededor en sus órbitas, pero él nunca pudo cuantificar esta idea bastante vaga y poco satisfactoria.

A finales del primer cuarto del siglo 17 el pensamiento Aristotélico sobre el cosmos estaba rápidamente teniendo fin, pero no aparecía ningún sistema satisfactorio para ocupar su lugar. Como resultado existía escepticismo: “La nueva filosofía pone todo en duda”. Era esta situación la que favoreció el desarrollo de las ideas de René Descartes.

La materia y movimiento fueron tomados por Descartes para explicar todos los procesos naturales por medio de los modelos mecánicos, aunque él advirtió que tales modelos probablemente no eran la naturaleza misma. Ellos proporcionan meramente “las historias probables”, cuestión qué parecía mejor que ninguna explicación en absoluto.

Armado con materia y movimiento, Descartes atacó los problemas del sistema de Copérnico. Cuerpos una vez en movimiento, Descartes argumentó, permanecen en movimiento en una línea recta a menos que y hasta que ellos se desvíen de esta línea por el impacto de otro cuerpo. Todo cambio de un movimiento es el resultado de cosas que impactan. La pelota soltada desde lo alto de un mástil, cae al pie del mástil porque, a menos que sea golpeado por otro cuerpo, continúa moviéndose con la nave. Los planetas se mueven alrededor del Sol porque ellos son desviados por una materia sutil que llena todo el espacio (¿qué será eso?). Podían así construirse modelos similares para considerar todos los fenómenos; el sistema Aristotélico podría ser reemplazado por el Cartesiano. Existía sin embargo un problema mayor, y eso bastó para derrumbar al Cartesianismo en esos tiempos. La materia Cartesiana y movimiento no tenían ningún propósito. Ni la filosofía de Descartes parecía necesitar la participación activa de una deidad. El cosmos Cartesiano, como lo dijo Voltaire después, era como un reloj al cual le habían dado cuerda en la creación y que continuaba haciendo tictac por siempre.

### 1.2.6. Contribución de Galileo (1564 - 1642)

Además de las contribuciones ya señaladas, Galileo Galilei (1564 - 1642) en su libro “Dos nuevas Ciencias” establece sus ideas sobre los cuerpos que caen y en general sobre el movimiento de los proyectiles. Sus ideas son presentadas como un diálogo entre tres personajes Salviati, Sagredo y Simplicio. El punto de vista oficial de la Iglesia, esto es las ideas Aristotélicas son defendidas por Simplicio y en general demolidas por los otros.

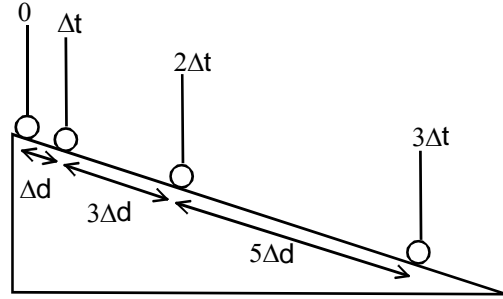
Galileo prosigue dando un detallado análisis de la caída de los cuerpos. El comprende que en la caída de objetos muy livianos, la resistencia del aire tiene un gran efecto, mientras que para cuerpos pesados eso causa un efecto leve.

#### Movimientos acelerados

Habiendo establecido experimentalmente que los cuerpos pesados caen prácticamente de la misma manera, el analiza la pregunta central, no tocada por Aristóteles ¿cómo varía la velocidad durante la caída? El problema, en esos tiempos, es que la caída es demasiado rápida como para hacer observaciones. El movimiento debería ser de alguna manera hecho más lento. Galileo sugiere la más simple de las hipótesis, un cuerpo al caer acelera uniformemente, es decir gana iguales cantidades de velocidad en iguales intervalos de tiempo. Esta es sin duda un hipótesis simple, pero debía ser establecida experimentalmente.

#### El experimento de Galileo

Para hacer la caída más lenta, Galileo utilizó una tabla de madera colocada inclinada respecto a la horizontal, con una canal muy pulida donde se colocaba una esfera muy pulida de bronce, la cual se permitía caer rodando por la canal. El tiempo tomado por la esfera para recorrer cierta distancia fueron determinados utilizando un reloj de agua. Este consiste en un recipiente con agua colocado en una posición elevada, con un pequeño tubito soldado en su fondo, con un pequeño diámetro dando un chorrito de agua durante el tiempo de caída, cantidad de agua que era posteriormente determinada en una balanza. Las razones entre los pesos de agua dan las razones entre los tiempos de bajada. Galileo encontró que los espacios recorridos eran unos a otros como los cuadrados de los tiempos transcurridos.



De hecho él marcó las distancias recorridas por la esfera en iguales intervalos de tiempo  $\Delta t$  contados desde la partida encontrando que las distancias crecían en la proporción

$$1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

Para mayores inclinaciones del plano, las distancias recorridas en esos mismos intervalos de tiempos resultaron mayores, pero que estaban en esa misma razón. Un análisis matemático puede hacerse. Si llamamos  $x(t)$  la distancia recorrida en un tiempo  $t$  desde la partida,  $\Delta t$  el intervalo de tiempo considerado,  $\Delta d$  la primera distancia recorrida entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(\Delta t) - x(0) &= \Delta d, \\ x(2\Delta t) - x(\Delta t) &= 3\Delta d, \\ x(3\Delta t) - x(2\Delta t) &= 5\Delta d, \\ &\dots \\ x(n\Delta t) - x((n-1)\Delta t) &= (2n-1)\Delta d. \end{aligned}$$

Si estos resultados los sumamos, lado a lado, obtenemos

$$x(n\Delta t) = (1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1))\Delta d,$$

pero la suma de los impares es conocida

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

de modo que

$$x(n\Delta t) = n^2 \Delta d.$$

Por último, si llamamos al tiempo transcurrido después de  $n$  intervalos  $t = n\Delta t$  tenemos

$$x(t) = \frac{t^2}{(\Delta t)^2} \Delta d,$$

es decir el espacio recorrido varía con el cuadrado del tiempo transcurrido. Esto puede parecer trivial hoy día, pero esto es la primera constatación experimental de un movimiento que no es uniforme en el tiempo. Si la velocidad de bajada en el tramo  $n$  del recorrido se define como la razón entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido, esto es

$$v_n = \frac{x(n\Delta t) - x((n-1)\Delta t)}{\Delta t},$$

esta resulta ser

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n^2\Delta d - (n-1)^2\Delta d}{\Delta t}, \\ v_n &= (2n-1)\frac{\Delta d}{\Delta t}, \end{aligned}$$

de aquí se deduce que el incremento de velocidad será

$$v_{n+1} - v_n = 2\frac{\Delta d}{\Delta t},$$

y si se llama aceleración  $a$  al cambio de velocidad por unidad de tiempo, esto es

$$a = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t},$$

este es

$$a = 2\frac{\Delta d}{(\Delta t)^2},$$

por lo tanto, las expresiones anteriores pueden resumirse en

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\Delta d}{(\Delta t)^2}t^2 = \frac{1}{2}at^2, \\ v(t) &= (2n-1)\frac{\Delta d}{\Delta t} \simeq 2n\frac{\Delta d}{\Delta t} = 2\frac{\Delta d}{(\Delta t)^2}t = at \end{aligned}$$

y Galileo concluye que en este tipo de movimiento, la velocidad se incrementa en la misma proporción en que se incrementa el tiempo, en lenguaje moderno que varía linealmente con el tiempo. Estos conceptos serán mucho más claros cuando se tenga calor el concepto de derivada. Los conceptos de velocidad y aceleración en el instante  $t$ , denominados velocidad y aceleración instantáneos, se definirán más adelante con ayuda de un cierto proceso límite llamado la derivada.

### 1.2.7. Sir Isaac Newton. La unificación de la Física y la Astronomía

El siglo 17 era un tiempo de intenso sentimiento religioso, y en ninguna parte era ese sentimiento más intenso que en Gran Bretaña. Allí un hombre joven devoto, Isaac Newton, finalmente sienta las bases de la Mecánica Clásica.

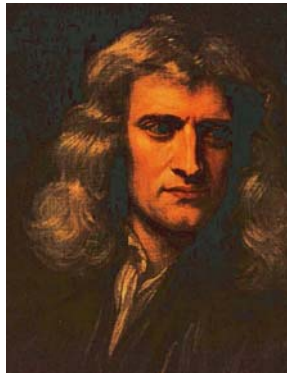


Figura 1.6: Isaac Newton

Newton era a la vez un experimentalista y un genio matemático, una combinación que le permitió defender el sistema de Copérnico mediante “unas nuevas mecánicas”. Su método era simplemente: “de los fenómenos de los movimientos investigar las fuerzas naturales, y entonces de estas fuerzas deducir otros fenómenos del movimiento”. El genio de Newton lo guió en la elección de fenómenos a ser investigados, y la creación de una herramienta matemática fundamental—el cálculo (simultáneamente inventado por Gottfried Leibniz). El resultado fue su gigantesca obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de Filosofía Natural, normalmente llamados Principia simplemente que aparecieron en 1687).

Aquí se asentaban unas nuevas físicas que aplicaron igualmente bien a los cuerpos terrestres y a los celestiales. Copérnico, Kepler, y Galileo eran todos justificados por el análisis de Newton de las fuerzas. Descartes fue absolutamente derrotado.

Así con sus tres leyes (de Newton) de movimiento y su principio de gravitación universal le bastó a Newton para explicar el nuevo cosmos. Newton creyó sin embargo que eso era con la ayuda de Dios. La Gravedad, es ac-

ción divina directa, como lo son todas las fuerzas. El espacio absoluto, para Newton, era esencial, porque el espacio era el “el sensorium de Dios”, y la morada divina la cual, necesariamente, debe ser el último sistema de coordenadas. (Estas ideas muestran con claridad que Newton formuló sus leyes de la Mecánica en un sistema privilegiado de referencia, sistemas que hoy en día se conocen como “Sistemas inerciales de Referencia”.) Finalmente, el análisis de Newton de las perturbaciones mutuas de los planetas causado por sus campos gravitacionales individuales lo hicieron predecir el derrumbamiento natural del sistema solar, a menos que Dios actuara para corregir las cosas.

### La gran síntesis de Newton

Kepler propuso sus tres leyes del movimiento de los planetas basándose en las regularidades que encontró en los datos de Brahe. Estas leyes se suponía aplicaban sólo al movimiento de los planetas, no teniendo relación alguna con otros movimientos en el Universo. Además eran completamente empíricas, ellas daban buenos resultados, pero nadie sabía la razón de porqué ellas funcionaban.

Newton cambió todo eso. Primero él demostró que los movimientos de todos los cuerpos podían ser descritos mediante tres leyes. Más detalles se indicarán en el capítulo de Dinámica, pero las enunciaremos de todos modos en esta introducción, para partículas de masa constante

#### ► LEY 1.1 (PRIMERA.)

*Un cuerpo que no está sometido a fuerzas permanece en reposo o se mueve con velocidad constante.*

Como veremos así formulada esta ley no puede ser correcta. El concepto movimiento y por lo tanto el de velocidad es relativo, es decir es necesario especificar el sistema de referencia que se ha usado para enunciar la primera ley. Esto es si la primera ley es válida en algún sistema de referencia, dejará de serlo respecto a un sistema de referencia que acelera respecto al primero.

#### ► LEY 1.2 ((SEGUNDA))

*La aceleración que experimenta un cuerpo es la fuerza aplicada dividida por la masa*

$$a = \frac{F}{m}. \quad (1.1)$$

## ► LEY 1.3 ((TERCERA))

*La fuerza de acción de un cuerpo sobre otro es igual y contraria a la fuerza de reacción del segundo sobre el primero.*

Además enunció la ley de gravitación universal

## ► LEY 1.4 ((GRAVITACIÓN))

*la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}. \quad (1.2)$$

Luego pudo demostrar que las tres leyes de Kepler se deducen de sus leyes cuando la fuerza es la fuerza gravitacional. Los detalles de este proceso se explicarán en el capítulo de dinámica de sistemas de partículas.

Esta ley constituye una de las primeras unificaciones que ocurren en Física, lo que ocurre en la Tierra, caída de piedras, es gobernado por la misma ley que explica el movimiento de los astros en el Cielo. Sin embargo así formulada, requiere que esa acción a distancia se propague con velocidad infinita. Si cambia la distancia, la fuerza gravitacional entre dos cuerpos cambiaría en forma instantánea independientemente de la distancia entre ellos. Albert Einstein a comienzos del siglo 20 logró contruir una nueva teoría de la Gravitación, llamada Teoría de la Relatividad General, donde el efecto gravitacional se propaga justamente a la misma velocidad que tiene la luz.

### 1.3. La difusión del método científico

La publicación del Principia marca la culminación del movimiento iniciado por Copérnico y, como tal, siempre ha perdurado como el símbolo de la revolución científica.

Existían, sin embargo, críticas similares en otros ámbitos del conocimiento natural. En el mismo año que Newton publicaba su gran volumen, aparecía un libro igualmente importante en anatomía. Andreas Vesalius “Del fabrica de corporis de humani ” (“En el Tejido del Cuerpo Humano”, llamó el Del fabrica), aparece un examen crítico de la anatomía de Galeno en la que Vesalius utilizó sus propios estudios para corregir muchos de los errores de Galeno.

Vesalius, como Newton, puso énfasis en los fenómenos observados, es decir, la descripción exacta de hechos naturales. Esto culminó con el descubrimiento de la circulación de la sangre por William Harvey cuyo trabajo fue publicado como “*Exercitatio Anatomica De Motu et de Cordis Sanguinis in Animalibus*” (Un Ejercicio Anatómico Acerca del Movimiento del Corazón y Sangre en Animales) .

Éste era como el Principia en fisiología donde se estableció la anatomía y la fisiología como ciencias con derecho propio. Harvey mostró que esos fenómenos orgánicos podrían estudiarse experimentalmente y que algunos procesos orgánicos podían reducirse a sistemas mecánicos. El corazón y el sistema vascular podrían ser considerados como una bomba y un sistema de cañerías y que podían entenderse sin recurrir a espíritus u otras fuerzas no susceptibles al análisis.

En otras ciencias el esfuerzo por sistematizar no tuvo tanto éxito. En química, por ejemplo, el trabajo de los alquimistas modernos medievales habían conducido a nuevas sustancias importantes y procesos, como los ácidos minerales y destilación, pero presentaron sus teorías en un lenguaje místico casi incomprensible. Robert Boyle en Inglaterra intentó disipar la maleza intelectual insistiendo en las descripciones claras, en la reproducibilidad de los experimentos, y concepciones mecánicas de los procesos químicos. La química, sin embargo, no estaba todavía madura para la revolución.

Nuevos instrumentos como el microscopio y el telescopio multiplicaron los mundos con los que el hombre tenía que ver. Los viajes por el Mundo devolvieron un diluvio de nuevos especímenes botánicos y zoológicos que agobiaron esquemas clasificadores antiguos. Lo mejor que podía hacerse era describir estas cosas nuevas con precisión y esperar que algún día alguien pudiera ajustarlas de una manera coherente.

El diluvio creciente de información puso tensiones pesadas en las instituciones viejas y tradicionales. La información tuvo que ser extendida amplia y rápidamente. Ni el genio aislado de Newton pudo comprender un mundo en el que la nueva información estaba produciéndose más rápidamente de lo que cualquier persona podía asimilar. Los filósofos naturales tenían que estar seguros de sus datos, y con ese fin requirieron la confirmación independiente y crítica de sus descubrimientos. Se crearon nuevos medios para lograr estos fines. Las sociedades científicas empiezan en Italia en los primeros años del siglo 17 y culminan en las dos grandes sociedades científicas nacionales que marcan el cenit de la revolución científica: la Sociedad Real de Londres para la Promoción de Conocimiento Natural, creado por carta constitucional real



en 1662, y las Académie des Ciencias de París, formadas en 1666.

En estas sociedades y otras como ellas por el mundo, los filósofos naturales podrían discutir, y podrían criticar nuevos descubrimientos y las teorías antiguas. Para mantener una base firme en estas discusiones, las sociedades empezaron a publicar trabajos científicos (papers). Las Transacciones Filosóficas de la Sociedad Real que empezaron como una aventura privada de su secretaria fueron el primer periódico científico profesional. Fue copiado pronto por el Mémoires de la academia francesa que ganó igual importancia y prestigio. La antigua práctica de ocultar los nuevos descubrimientos en jerga común, el idioma oscuro, o incluso los anagramas gradualmente dieron lugar al ideal de comprensión universal. Se inventaron nuevos cánones para informar y para que los experimentos y descubrimientos pudieran ser reproducidos por otros. Esto requirió nueva precisión en el idioma o lenguaje para compartir métodos experimentales u observacionales. El fracaso de otros para reproducir resultados lanzaba serias dudas en los informes originales. Así se crearon las herramientas para un ataque frontal a los secretos de naturaleza.

Incluso con la revolución científica comenzando, faltaba aún mucho por hacer. De nuevo, fue Newton quien mostró la manera. El Principia bastaba para el mundo macroscópico. Las tres leyes de Newton de movimiento y el principio de gravitación universal eran todo lo necesario para analizar las relaciones mecánicas de cuerpos ordinarios, y el cálculo como la herramienta matemática esencial. Para el mundo microscópico, Newton proporcionó dos métodos.

Primero, donde las leyes simples de acción ya habían sido determinadas de la observación, como la relación de volumen y presión de un gas (la ley de Boyle,  $p v = k$ ), Newton supuso fuerzas entre partículas que le permitieron derivar esa ley.

Él usó estas fuerzas entonces para predecir otros fenómenos, en este caso la velocidad del sonido en el aire la cual podía medirse y contrastarse con la predicción.

Segundo, el método de Newton hizo posible el descubrimiento de que las leyes de acción del mundo macroscópico. podrían considerarse como el efecto de fuerzas microscópicas. Aquí el trabajo terminal de Newton no está en el Principia sino en su obra maestra de físicas experimentales, el Opticks, publicado en 1704 en los que él mostró cómo examinar un asunto experimentalmente y descubrir las leyes del fenómeno.

Newton mostró como el uso juicioso de una hipótesis puede llevar más allá la investigación experimental hasta que una teoría coherente fuese lograda. El

Opticks fue el modelo en los siglos 18 y comienzos del 19 para la investigación del calor, la electricidad, el magnetismo, y los fenómenos químicos.

### 1.3.1. La edad clásica de la Ciencia

Como consecuencia de que el Principia precedió al Opticks, la mecánica tuvo más desarrollo que otras ciencias en el siglo 18, que en este proceso se transformó de una rama de la física en una rama de la matemáticas.

Se redujeron muchos problemas de la física en problemas matemáticos, que mostraron su ductibilidad de ser resueltos por métodos analíticos cada vez más sofisticados. El matemático suizo Leonhard Euler fue uno de los obreros más fecundos y prolíficos en matemática y en la física matemática. Su desarrollo del cálculo de variaciones, una herramienta muy poderosa, le permitió tratar problemas muy complejos. En Francia, Jean Le de Rond d'Alembert y Joseph-Louis Lagrange tuvieron éxito en reducir los problemas de la mecánica a un sistema axiomático que requiere sólo manipulación matemática.

La base de la Mecánica de Newton era su congruencia con la realidad física. Al principio del siglo 18 ella se expuso a muchas pruebas rigurosas. El toque final al edificio de Newton fue proporcionado por Pierre-Simon, marqués de Laplace cuyo “Traité habile du celeste du mécanique” (1798-1827; las Mecánicas Celestiales) sistematizó todo lo que se había hecho en mecánicas celestiales bajo la inspiración de Newton.

Laplace fue más allá de Newton, en sus creencias, mostrando que las perturbaciones de las órbitas planetarias causadas por las interacciones de gravitación planetaria son de hecho periódicas y que el sistema solar es, por consiguiente, estable, no requiriendo ninguna intervención divina para evitar su colapso. Esta afirmación puede sin embargo ser discutida hoy en día con el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos donde se han abierto nuevas dudas en el asunto de la estabilidad del sistema Solar.

## 1.4. El método científico

En términos modernos, el método científico puede resumirse en un proceso que consta de los siguientes pasos o etapas

- 1 Observe aspectos del Universo que sean de su interés como investigador.

- 2 Invente alguna descripción tentativa de los hechos observados, cuestión llamada una hipótesis, que sea consistente con todo lo que usted ha observado.
- 3 Utilice la hipótesis para efectuar predicciones de fenómenos en el ámbito de los fenómenos descritos.
- 4 Contraste esas predicciones mediante nuevos experimentos o mediante nuevas observaciones, y redefina su hipótesis a la luz de los nuevos resultados.
- 5 Repita los pasos 3 y 4 hasta que no existan discrepancias entre su teoría o hipótesis y los experimentos u observaciones.

Cuando se logre consistencia entre la hipótesis y los resultados, la hipótesis adquiere el rango de teoría científica la cual provee un conjunto coherente de proposiciones que explican una cierta clase de fenómeno. Una teoría es entonces un artefacto mediante el cual se explican observaciones y se pueden hacer predicciones.

Una gran ventaja del método científico está en la ausencia de prejuicios. Un investigador no tiene necesariamente que creer a otros. Los experimentos pueden ser repetidos y así determinar si los resultados son verdaderos o falsos, independientemente de creencias religiosas o de prejuicios existentes. Una teoría científica es adoptada o descartada sin consideración al prestigio del proponente o a su poder de persuasión.

Al estudiar el cosmos, no es posible realizar experimentos directamente, toda la información se obtiene mediante la observación.

Una crítica frecuente que se hace a los científicos y en consecuencia al método científico es que muchas cosas que se creían imposibles en el pasado son hoy en día realidades. Esta crítica está basada en una mala interpretación del método científico. Cuando una hipótesis pasa el test de su comprobación experimental, entonces ella se adopta como la teoría que explica correctamente los fenómenos observados. Sin embargo, cuando se explora un nuevo rango de fenómenos se utiliza la teoría existente pero se tiene siempre en mente que la teoría puede fallar al intentar explicar nuevos fenómenos. En estos casos, nuevas hipótesis son hechas hasta que emerge una nueva teoría.

## 1.5. Gravitación

### 1.5.1. Desarrollo de la teoría gravitacional

Hasta los hallazgos de Newton, no se comprendió que el movimiento de los cuerpos celestiales y la caída libre de objetos en la Tierra eran determinados por la misma fuerza. Los filósofos griegos clásicos, por ejemplo, no creían que los cuerpos celestiales podían ser afectados de algún modo, puesto que ellos parecían perpetuamente seguir trayectorias sin caerse del cielo. Por esa misma razón, Aristóteles pensaba que cada cuerpo celeste sigue un camino “natural” en su movimiento. Asimismo creía que los objetos materiales terrenales poseen una tendencia natural a acercarse al centro de la Tierra.

#### Tres leyes de Kepler

- 1 Los planetas describen órbitas elípticas en las cuales el Sol el cual ocupa uno de sus focos.
- 2 La línea que une un planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3 El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol. Una expresión moderna de esta ley es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3, \quad (1.3)$$

siendo  $G$  la constante de gravitación Universal,  $M$  la masa del Sol, y  $R$  la distancia media al Sol.

#### La aceleración de gravedad

Desde los estudios de Galileo, se acepta que los objetos en las vecindades de la superficie terrestre, caen con la misma aceleración, llamada aceleración de gravedad que tiene un valor aproximadamente

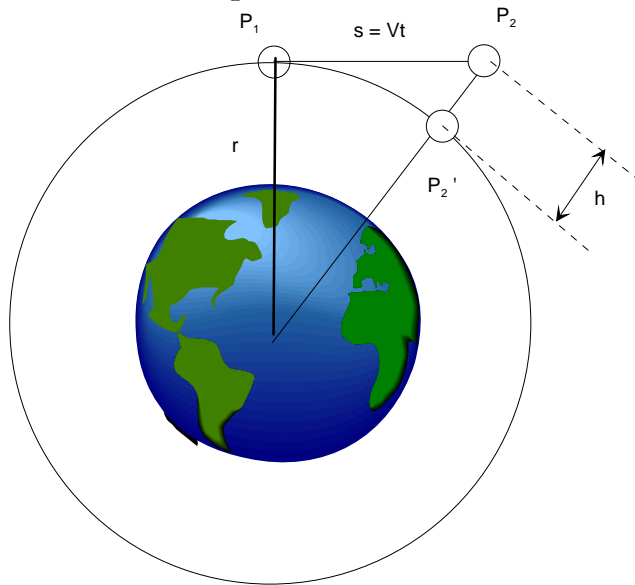
$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2} \quad (1.4)$$

Por otro lado, Newton descubrió una sorprendente relación entre el movimiento de la Luna (¿influenciada por la Tierra?) y el movimiento de cualquier

cuerpo que cae sobre la Tierra. Primero que nada, mediante métodos puramente matemáticos y geométricos, el descubrió que un cuerpo que recorre una órbita circular de radio  $R$  en un tiempo ( período)  $T$ , está acelerado hacia el centro de la circunferencia con una magnitud igual a:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R. \quad (1.5)$$

De hecho, es posible obtener lo anterior por métodos puramente geométricos. En efecto considere la figura



Cuando el cuerpo pasa de  $P_1$  a  $P_2'$  el cuerpo ha caído, respecto a la trayectoria rectilínea, la distancia  $h$  que puede calcularse geométricamente mediante el teorema de Pitágoras. En efecto  $h + r$  es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, luego

$$h + r = \sqrt{r^2 + v^2 t^2}.$$

En lo que sigue, están los ingredientes fundamentales del llamado análisis diferencial. Si el tiempo es cero, naturalmente  $h$  resulta cero. Si el tiempo es muy pequeño (pero no cero) podemos aproximar

$$\begin{aligned} h &= r \sqrt{1 + \frac{v^2 t^2}{r^2}} - r \approx r \left( 1 + \frac{v^2 t^2}{2r^2} \right) - r \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} t^2. \end{aligned}$$

Expresión que nos indica que, para tiempos pequeños, la Luna cae con aceleración de magnitud

$$a = \frac{v^2}{r}$$

y como la rapidez es

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

se obtiene el resultado de Newton. Esto ocurre en cada punto de la órbita circular.

Para Newton esta aceleración debería ser causada por una fuerza. Así supuso la presencia de una fuerza atractiva entre todos los cuerpos materiales, una fuerza que no requiere contacto directo y que actúa a distancia. Haciendo uso de la ley de inercia es decir que los cuerpos no sometidos a fuerzas siguen con velocidad constante en una línea recta, Newton concluyó que una fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna es necesaria para que su movimiento sea circular en torno a la Tierra. Él comprendió que esta fuerza debería ser, considerando las proporciones, igual que la fuerza con la que la Tierra atrae a objetos sobre su superficie. La expresión anterior permite determinar la aceleración de caída de la Luna, esto es como el experimento de Galileo para piedras, pero con un objeto muchísimo más lejos.

Newton analizó el movimiento de la Luna la que tiene un periodo de  $T = 27,3$  días (casi un mes) y una órbita de radio aproximadamente igual a  $R_L = 384,000$  kilómetros (aproximadamente 60 radios de la Tierra  $R_T$ ). De este modo la aceleración de la Luna en su órbita es (dirigida hacia la Tierra) de magnitud

$$a = \frac{v^2}{R_L} = \frac{\left(\frac{2\pi R_L}{T}\right)^2}{R_L} = \frac{4\pi^2 R_L}{T^2} = \frac{4\pi^2 3,84 \times 10^8}{(27,3 \times 24 \times 3600)^2} = 0,00272 \text{ m s}^{-2},$$

mucho menor que la encontrada por Galileo para cuerpos cayendo cerca de la superficie terrestre. La genialidad de Newton consiste en entender como la distancia influye. Considere

$$\frac{a}{g} = \frac{0,00272}{9,8} = 0,000277$$

que sorprendentemente resulta igual a

$$(R_T/R_L)^2 = (1/60)^2 = 0,000277$$

Cuando Newton descubrió que la aceleración de la Luna en su órbita es  $(1/60)^2 = 1/3600$  veces más pequeña que la aceleración en la superficie de la Tierra, él tuvo la genial idea de suponer que la fuerza, llamada fuerza gravitatoria, entre dos cuerpos disminuye como el inverso del cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Así, si la distancia entre los cuerpos se dobla, se reduce la fuerza en ellos en cuatro veces. Un resultado que requiere suponer que la masa de la Tierra actúa gravitacionalmente en sus alrededores como que si su masa se concentrara en el centro del planeta.

### 1.5.2. Ley inversa al cuadrado de la distancia

Es también posible deducir la ley inversa al cuadrado de la distancia, de acuerdo a la tercera ley de Kepler. En efecto si en la expresión

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

se reemplaza el periodo de acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$T^2 = kR^3$$

se obtiene

$$a = \frac{4\pi^2 R}{kR^3} = \frac{4\pi^2}{kR^2}.$$

Newton también dedujo que las fuerzas gravitacionales entre los cuerpos deberían depender de las masas de los cuerpos. Dado que un cuerpo de masa  $M$  que experimenta una fuerza  $F$  acelera a razón  $F/M$ , una fuerza proporcional a  $M$  sería consistente con la observaciones de Galileo de que los cuerpos aceleran bajo la gravedad terrestre con la misma magnitud. Así y en forma resumida la teoría gravitacional de Newton establece que

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}, \quad (1.6)$$

donde  $F_{12}$  es la magnitud de la fuerza gravitatoria que actúa entre las los cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  separadas una distancia  $r_{12}$ . “La fuerza iguala el producto de estas masas y de  $G$ , una constante universal, dividida por el cuadrado de la distancia”. Su teoría gravitatoria permitió explicar las leyes de Kepler y estableció la ciencia cuantitativa moderna de la gravitación. Tiene, como se explicó antes el defecto que es de acción instantánea.

La constante de gravitación universal tiene en el sistema SI, que se explica más adelante, el valor

$$G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.7)$$

y la fuerza gravitacional actúa en la dirección de la línea que une los dos cuerpos.

Una expresión más simple, permite calcular la aceleración en la superficie en Tierra, la llamada aceleración de gravedad. Sea  $M_T$  la masa de la tierra y  $R_T$  su radio, la aceleración descendente de un cuerpo en la superficie es

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

De aquí puede deducirse una expresión aproximada para la aceleración de gravedad a una altura  $h$  sobre la superficie terrestre, pequeña comparada con el radio terrestre:

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \\ &\approx G \frac{M_T}{R_T^2} + \left( -2G \frac{M_T}{R_T^3} \right) h \\ &= g(0) \left( 1 - \frac{2h}{R_T} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

NOTA 1.1 Las matemáticas nos informan que  $(1 + x)^p \approx 1 + px$ , cuando  $|x|$  es mucho menor que 1. Esto justifica el resultado anterior.

### 1.5.3. Cuerpos en órbita circular

De acuerdo a lo establecido por Newton la aceleración de un cuerpo en movimiento circular de radio  $R$ , periodo  $T$  y rapidez  $v$  está dada por

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{v^2}{R},$$

y por otro lado su ley de gravitación Universal establece que la fuerza responsable de esa aceleración es

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2},$$



entonces si el cuerpo de masa  $m$  está en órbita alrededor de la Tierra de masa  $M_T$  su segunda ley conduce a

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{m M_T}{R^2},$$

o sea el cuerpo debe tener una rapidez dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}. \quad (1.9)$$

Como se verá más adelante, la ley de Gravitación universal cuando se aplica al movimiento de dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente, conduce a tres posibles trayectorias u órbitas relativas entre los dos cuerpos. Ellas son elipses, de las cuales la circunferencia es un caso particular, hipérbolas y parábolas.

#### 1.5.4. Velocidad de escape

Un objeto lanzado hacia arriba desde la superficie de un planeta, despreciando el efecto del roce con la atmósfera, no regresa de caída si la velocidad excede el valor denominado velocidad de escape que puede ser determinado mediante

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad (1.10)$$

siendo  $M$  la masa del planeta,  $R$  su radio y  $G$  la constante de gravitación. La fórmula anterior es también válida para lanzamientos desde cualquier altura y será demostrada en el capítulo de sistemas de partículas. Desde la superficie de la Tierra ese valor resulta  $v_e = 11,18 \text{ km s}^{-1} = 40248,0 \text{ km h}^{-1}$ . Desde la superficie de la Luna resulta mucho menor  $v_e = 2,4 \text{ km s}^{-1} = 8640 \text{ km h}^{-1}$ . Debemos mencionar también que si un cuerpo tiene la velocidad de escape respecto a la Tierra esa no es suficiente para escapar de la atracción gravitacional del Sol. Este resultado aplica además para un objeto lanzado desde cualquier altura, siendo en este último caso  $R$  la distancia desde el centro de la Tierra al punto de lanzamiento.

#### 1.5.5. Peso y masa

El peso  $W$  del cuerpo es definido por la fuerza igual y opuesta necesaria para prevenir la aceleración descendente del cuerpo. El mismo cuerpo puesto

en la superficie de la Luna tiene la misma masa, pero, como la Luna tiene una masa de aproximadamente  $1/81$  veces el de la Tierra y un radio de aproximadamente  $0,27$  el de la Tierra, el cuerpo en la superficie lunar tiene un peso de sólo  $1/6$  su peso de Tierra.

Newton pudo demostrar que las tres leyes de Kepler, se desprenden matemáticamente del uso de sus propias leyes de movimiento y de la ley de gravitación. Estos aspectos serán tratados en el capítulo de sistemas de partículas. En todas las observaciones del movimiento de un cuerpo celestial, sólo el producto de  $G$  y la masa  $M$  aparece. Newton estimó la magnitud de  $G$  suponiendo la densidad de masa de promedio de la Tierra alrededor de  $5,5$  veces la del agua lo que permite estimar la masa de la Tierra  $M_T$ . Finalmente calculó  $G$  mediante

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T}$$

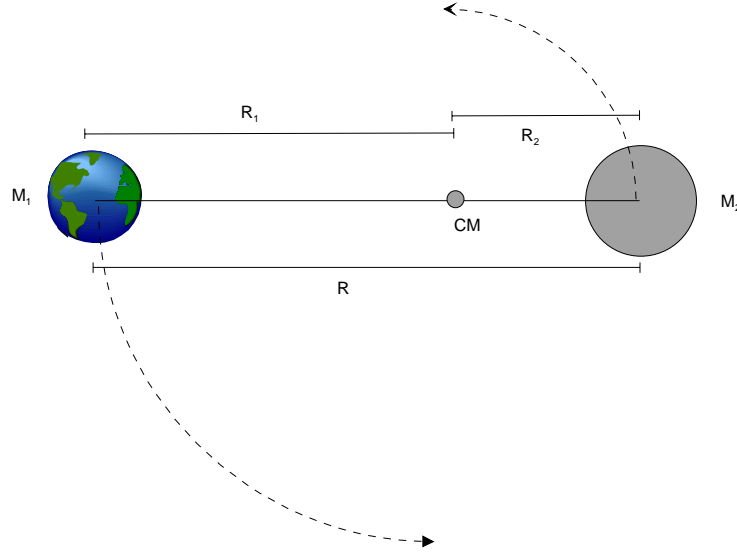
obteniendo un valor cercano a  $6,6726 \times 10^{-11}$ .

Usando las observaciones del movimiento de las lunas de Júpiter descubiertas por Galileo, Newton determinó que Júpiter es  $318$  veces más masivo que la Tierra pero tiene sólo  $1/4$  de su densidad y un radio  $11$  veces más grande que la Tierra.

### 1.5.6. Interacción entre los cuerpos celestiales

Cuando dos cuerpos celestiales de masas comparables se atraen gravitacionalmente, ambos orbitan con respecto al centro de masa de los dos cuerpos. Ese punto queda entre los cuerpos en la línea que los une en una posición tal que las distancias a cada cuerpo multiplicadas por la masa de cada cuerpo son iguales. En fórmulas

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{M_2}{M_1 + M_2} R, \\ R_2 &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} R, \end{aligned}$$



Así, la Tierra y el Sol están orbitando en torno a su centro común de masa  $CM$ . Con leves modificaciones las leyes de Kepler son válidas para los sistemas de dos cuerpos de masas estando el foco de las órbitas elípticas en la posición del centro de masa de los dos cuerpos. Más adelante en el capítulo 8 se encontrarán todas las posibles órbitas. Por ahora consideremos sólo órbitas circulares. Cada cuerpo cumple con la segunda ley de Newton, es decir

$$M_1 a_1 = M_1 \frac{v_1^2}{R_1} = G \frac{M_1 M_2}{R^2},$$

$$M_2 a_2 = M_2 \frac{v_2^2}{R_2} = G \frac{M_1 M_2}{R^2},$$

de donde como las velocidades son

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1}, \quad v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2},$$

se obtiene

$$\frac{4\pi^2 R_1}{T^2} = G \frac{M_2}{R^2},$$

$$\frac{4\pi^2 R_2}{T^2} = G \frac{M_1}{R^2}.$$

Si las sumamos considerando que  $R = R_1 + R_2$  resulta la llamada tercera ley de Kepler

$$R^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} T^2. \quad (1.11)$$

Esto es, el cuadrado del periodo  $T$  es proporcional al cubo de la distancia  $R$  entre los centros de los dos cuerpos. Esta fórmula puede usarse para determinar las masas separadas de estrellas binarias. La fórmula anterior determina la suma de las masas y si  $R_1$  y  $R_2$  son las distancias de las estrellas individuales del centro de masa, entonces

$$M_1 R_1 = M_2 R_2$$

y la suma de las distancias es la distancia total  $R$ . Estas relaciones son suficientes para determinar las masas individuales. Las observaciones del movimiento orbital de las estrellas dobles, del movimiento dinámico de estrellas que mueven colectivamente dentro de sus galaxias, y del movimiento de las galaxias, verifican que la ley de Newton de gravitación es válida, con un alto grado de exactitud a lo largo y ancho del universo visible.

Newton también explicó las mareas del océano, fenómenos que envolvieron en misterio a los pensadores durante siglos, y que son una simple consecuencia de la ley universal de gravitación. Ellas son causadas específicamente por la fuerza gravitatoria de la Luna y, en menor grado, del Sol sobre las aguas.

Ya era conocido en tiempos de Newton que la Luna no tiene una órbita Kepleriana simple. Otras observaciones más exactas sobre los planetas también mostraron diferencias con las leyes de Kepler. El movimiento de la Luna es particularmente complejo. Además, la atracción gravitatoria de los planetas explica casi todos los rasgos de sus movimientos. Las excepciones son no obstante importantes. Urano, el séptimo planeta del Sol, manifestó importantes variaciones en su movimiento que no podían ser explicadas mediante perturbaciones de Saturno, Júpiter, y de los otros planetas. Dos astrónomos del siglo 19, John Couch Adams de Bretaña y Urbain-Jean-Joseph Le Verrier de Francia, supusieron independientemente la presencia de un octavo planeta inadvertido que podría producir las diferencias observadas. Ellos calcularon su posición dentro de una precisión de un grado de donde se descubrió Neptuno más tarde en 1846.

### 1.5.7. Medidas absolutas de la gravedad

Hay dos maneras básicas de determinación de la gravedad: cronometrando el caída libre de un objeto y cronometrando el periodo del movimiento de un

péndulo bajo la gravedad , el cual para oscilaciones pequeñas está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (1.12)$$

En 1817 el físico inglés Henry Kater construye y fue el primero en usar un péndulo reversible para hacer medidas absolutas de  $g$ . (Péndulo de Kater)

El péndulo reversible se usó para las medidas absolutas de gravedad desde los tiempos de Kater hasta los años cincuenta. Los instrumentos electrónicos les han permitido a los investigadores medir con mucha precisión el tiempo de caída libre. También es posible hacer medidas sumamente exactas que usan interferencia láser. Por consiguiente, las medidas directas de caída libre han reemplazado el péndulo para las medidas absolutas de gravedad. Hoy día los lasers sirven como fuentes luminosas para los interferómetros. El objeto que cae refleja un haz de luz láser. Se han usado versiones transportables de tal aparato para medir diferencias de gravedad en toda Tierra. La exactitud alcanzable en estas medidas es aproximadamente una parte en  $10^8$ .

### 1.5.8. Datos actuales de las órbitas planetarias

Hoy se conocen bastante bien las características de los planetas y de sus órbitas, para lo cual se presenta la tabla siguiente con algunos datos útiles de algunos de ellos:

	Mercurio	Venus	Tierra
Distancia al Sol, semi eje mayor km	57909175	108208930	149597890
Periodo orbital, años terrestres	0,24084445	0,61518257	0,9997862
Masa kg	$0,33022 \times 10^{24}$	$4,8690 \times 10^{24}$	$5,9742 \times 10^{24}$
y para los más alejados			
	Marte	Júpiter	Saturno
Distancia al Sol, semi eje mayor km	227936640	778412020	1426725400
Periodo orbital, años terrestres	1,88071105	11,85652502	29,42351935
Masa kg	$0,64191 \times 10^{24}$	$1898,7 \times 10^{24}$	$568,51 \times 10^{24}$

## 1.6. Unidades

### 1.6.1. Medición

El tema de las mediciones en Física es uno de los aspectos centrales del método científico. Cualquier medición involucra primero que nada la definición de la propiedad física a ser medida y en segundo lugar involucra una comparación (por algún método bien definido) con una propiedad física conocida del mismo tipo, la **unidad** de medida. El proceso termina arrojando un número para la propiedad física que está siendo medida, más alguna estimación del error cometido. El error se define como la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero, hipotético valor que posee la cantidad física.

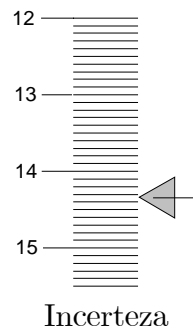
El proceso de medición siempre involucra algún intercambio de energía entre el observador o el instrumento, con el objeto que está siendo medido. En muchos casos eso produce un efecto despreciable sobre la determinación realizada, pero en otros casos produce un efecto no despreciable que limita la acuciosidad del valor logrado, sobre todo a nivel del mundo microscópico.

### 1.6.2. Valor verdadero

Los errores en las mediciones están bien definidos, aunque sean desconocidos, cuando el valor verdadero de la propiedad física que está siendo medida existe. Este punto no está absolutamente claro, pero se cree que hay ciertas cantidades físicas que tienen valor verdadero. Por ejemplo la carga del electrón o del protón. La masa en reposo del electrón. La velocidad de la luz. Además existen constantes en las leyes de la física, las cuales tienen presumiblemente un valor verdadero, por ejemplo la constante de gravitación universal, la constante de Planck, etcétera. Por otro lado, la corriente que circula por un dispositivo puede tener fluctuaciones intrínsecas de causas desconocidas, que indeterminan el concepto de valor verdadero, y por lo tanto el concepto de error en su medición. La aplicación de teorías de errores o tratamiento estadístico de datos que se explica más adelante, requiere tener claridad sobre estos aspectos.

## 1.7. Cifras significativas

Como resultado de un proceso de medición, por ejemplo de una longitud, el resultado debe establecer los números correctos y el primer número incierto. Con relación a la figura la longitud determinada podría ser escrita



$$L = 14,35 \text{ cm}$$

siendo incierto el último dígito, de manera que sería igualmente válido escribirlo como

$$L = 14,34 \text{ cm}$$

Así, las cifras significativas de una medida, en este caso cuatro, son los dígitos correctos y el primer número incierto.

### Ejemplos

- $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  tiene seis cifras significativas.
- $e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$  tiene nueve cifras significativas.
- $L = 10,8345 \text{ m}$  tiene seis cifras significativas.
- $L = 10,8345 \times 10^6 \text{ m}$  tiene seis cifras significativas.
- $L = 1,08345 \times 10^{-6} \text{ m}$  tiene seis cifras significativas.
- $40100 \text{ m}$  tiene cinco cifras significativas. Sin embargo si se trata de un entero, 3800 manzanas, hay infinitas cifras significativas.
- $0,000401$  tiene tres cifras significativas.
- La velocidad de la luz en el vacío  $c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$  se acepta hoy que es un valor exacto. Si se determinara con una mayor precisión, el valor de  $c$  se mantendría pero cambiaría la definición de la unidad de longitud, el metro. Esto es se prefiere mantener constante la velocidad de la luz en ese valor, y corregir la unidad de longitud para que así sea. Vea un poco más adelante.

### Operaciones con cifras significativas

Al operar con resultados de mediciones, deben respetarse ciertas reglas. En la suma o resta de números, debe redondearse el resultado de modo que el número de decimales sea el del que tenga menos cifras decimales.

En la multiplicación o división, el resultado debe redondearse de modo que el número de cifras significativas del resultado, sea el del factor que tenga menos cifras significativas.

### Ejemplos

- $0,123 - 0,1256 = -0,0026 \approx -0,003$
- $12,1 + 0,0017 = 12,1017 \approx 12,1$
- $3,67 \times 2,3 = 8,441 \approx 8,4$
- $0,0123/2,3 = 0,005347 \approx 0,0054$

## 1.8. Estandarización

Los primeros estándares de medición aparecieron en las culturas mediterráneas y estaban basadas en partes del cuerpo humano, o en lo que algún animal podía tirar, o en el volumen de algún depósito. La unidad egipcia “cubit” se acepta que fue la unidad de longitud lineal más extendida en el mundo antiguo a partir de año 3000 bC, y consistía en la longitud entre el codo del brazo hasta la punta de los dedos extendidos. Bueno, las cosas han avanzado progresivamente y hoy día de acuerdo a una convención internacional realizada en París en 1960 acordaron el sistema internacional de unidades (SI) basado en siete unidades básicas.

Las letras SI representan al “Système International d’Unités”. Este es el sistema internacionalmente acordado para la mayor parte de los trabajos científicos y tecnológicos en la mayoría de los países. Las Unidades SI son de tres tipos *base*, *suplementarias*, y *derivadas*. Hay siete unidades *base* correspondientes a las siete cantidades físicas dimensionalmente independientes, como se muestra en la tabla siguiente



**Unidades SI base**

<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	Ampère	A
temperatura termodinámica	Kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

**Unidades SI suplementarias**

<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
ángulo plano	radián	rad
ángulo sólido	estereorradián	sr

**Unidades SI derivadas**

<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
frecuencia	Hertz	Hz
energía	Joule	J
fuerza	Newton	N
potencia	Watt	W
presión	Pascal	Pa
carga eléctrica	Coulomb	C
diferencia de potencial eléctrico	Volt	V
resistencia eléctrica	Ohm	$\Omega$
conductancia eléctrica	Siemens	S
capacidad eléctrica	Farad	F
flujo magnético	Weber	Wb
inductancia	Henry	H
densidad de flujo magnético 1.8	Tesla	T
flujo luminoso	Lumen	lm
iluminación	Lux	lx

\*También conocida como inducción magnética

Unidades SI se usan con catorce prefijos para formar múltiplos decimales y submúltiplos de las unidades.

**Prefijos usados con unidades SI**

<i>Nombre de</i>			<i>Nombre de</i>		
<i>Factor</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Factor</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo</i>
10	deca-	da	$10^{-1}$	deci-	d
$10^2$	hecto-	h	$10^{-2}$	centi-	c
$10^3$	kilo-	k	$10^{-3}$	mili-	m
$10^6$	mega-	M	$10^{-6}$	micro-	$\mu$
$10^9$	giga-	G	$10^{-9}$	nano-	n
$10^{12}$	tera-	T	$10^{-12}$	pico-	p
$10^{15}$	peta-	P	$10^{-15}$	femto-	f
$10^{18}$	exa-	E	$10^{-18}$	atto-	a

## 1.9. Las unidades básicas

Las definiciones de las unidades básicas, de espacio tiempo y masa, han experimentado cambios con el propósito de adecuarse a los avances en los métodos experimentales, no existiendo razón alguna para suponer que las actuales definiciones son las definitivas. La excepción consiste en la unidad de masa, el kilogramo, establecida en 1887. Hoy (1999), las definiciones aceptadas son las siguientes.

**DEFINICION 1.9.1** *El kilogramo se define como la masa de un cilindro fabricado con una aleación de platino e Iridio que se conserva en la International Bureau of Weights and Measures, en Sevres Francia.*

Este patrón (primario) no se ha cambiado debido a la extraordinaria estabilidad de esa aleación. Un duplicado (patrón secundario) se conserva en el National Bureau of Standards en Gaithersburg.

**DEFINICION 1.9.2** *Un segundo es el tiempo que requiere un átomo de Cesio 133 para realizar 9.192.631.770 vibraciones, correspondientes a la transición entre dos niveles hiperfinos de su estado fundamental.*

Esta definición tiene la ventaja respecto a la definición del kilogramo, de no requerir de patrones específicos guardados en algún lugar, para su realización.

DEFINICION 1.9.3 *El metro se define como la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de  $1/299,792,458$  segundos.*

Esta definición está basada en la extraordinaria precisión con que actualmente se puede medir la velocidad de la luz, la cual se acepta hoy en día que es exactamente  $299,792,458 \text{ m s}^{-1}$ .

## 1.10. Ejercicios

EJERCICIO 1.1 *Un cuerpo describe una órbita circular de radio  $R = 100 \text{ m}$  en torno a un punto fijo con rapidez constante dando una vuelta completa por segundo. Determine la magnitud de la aceleración del cuerpo.*

EJERCICIO 1.2 *Si el cuerpo del ejercicio anterior, repentinamente siguiera en línea recta, determine la rapidez de crecimiento de la distancia al punto fijo en  $\text{m s}^{-1}$ .*

EJERCICIO 1.3 *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  y  $M_L = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$  siendo la distancia promedio entre ellos  $3,84 \times 10^8 \text{ m}$ . Determine la fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna y la ejercida por la Luna sobre la Tierra.*

EJERCICIO 1.4 *De los datos del ejercicio anterior, determine el tiempo empleado por la Luna en dar una vuelta completa en torno a la Tierra, en días.*

EJERCICIO 1.5 *Determine aproximadamente la fuerza que hace la Luna sobre una persona que está sobre la superficie terrestre y de masa  $80 \text{ kg}$ .*

EJERCICIO 1.6 *Si el radio de la Luna es  $1,74 \times 10^6 \text{ m}$  determine cuanto pesa un  $\text{kg}$  de oro en la Luna.*

EJERCICIO 1.7 *De acuerdo a los radios orbitales, evalúe los periodos orbitales usando la tercera ley de Kepler, comparando con los datos tabulados.*

EJERCICIO 1.8 *Determine a qué distancia entre la Tierra y la Luna, un cuerpo no es atraído hacia ninguno de los dos cuerpos.*

EJERCICIO 1.9 *Un péndulo de longitud  $L = 2 \text{ m}$  efectúa oscilaciones en la superficie terrestre. Determine el número de oscilaciones que efectúa en cada segundo.*

EJERCICIO 1.10 *Utilizando las leyes de Kepler, discuta la existencia del planeta X, hipotético planeta igual a la Tierra, en su misma órbita elíptica en torno al Sol, pero que permanece siempre oculto detrás del Sol y por eso no ha sido observado.*

EJERCICIO 1.11 *Si la distancia promedio de la Tierra al Sol es aproximadamente  $1,496 \times 10^{11}$  m determine aproximadamente la masa del Sol.*

EJERCICIO 1.12 *Verifique con los datos de la tabla, el cumplimiento de la tercera Ley de Kepler.*

EJERCICIO 1.13 *De acuerdo a las masas de los planetas, evalúe las velocidades de escape desde sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

EJERCICIO 1.14 *De acuerdo a las masas de los planetas y sus radios, evalúe la aceleración de gravedad en sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

EJERCICIO 1.15 *Estudie si existe alguna ley que de cuenta de las distancias de los planetas al Sol. (Por razones históricas, considere unidades donde la distancia Tierra Sol sea 10). Si existe alguna discontinuidad en su ley, aventure alguna hipótesis.*

EJERCICIO 1.16 *Considere un satélite artificial en órbita ecuatorial geostacionaria, es decir que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Determine entonces la altura del satélite sobre la superficie terrestre y la rapidez de él en su órbita.*

EJERCICIO 1.17 *Respecto a la situación del problema anterior, si la altura del satélite es reducida a la mitad pasando a otra órbita circular, determine el número de vueltas que da el satélite por día en torno a la Tierra.*

EJERCICIO 1.18 *Considere a una persona en el Ecuador terrestre. Producto de la rotación terrestre esa persona está acelerada hacia el centro de la Tierra. Determine la magnitud de esa aceleración. Si la persona se para sobre una balanza y ella tiene una masa de 80 kg determine la lectura de la balanza en kgf. ( $1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}$ )*

EJERCICIO 1.19 *Determine el radio que debería tener un planeta con la misma masa terrestre, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

EJERCICIO 1.20 *Determine el radio que debería tener una estrella con la misma masa que el Sol, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

EJERCICIO 1.21 *Determine la velocidad de rotación que debería tener un planeta como la Tierra, en vueltas por día, para que despegáramos de la superficie en el Ecuador.*

EJERCICIO 1.22 *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg y  $M_L = 7,36 \times 10^{22}$  kg, siendo la distancia promedio entre sus centros  $3,84 \times 10^8$  m. Determine*

- a) *El periodo orbital de la Luna considerando a la Tierra fija.*
- b) *El periodo orbital de la Luna considerando que ambos cuerpos orbitan en torno a su centro de masas.*
- c) *La magnitud de la aceleración del centro de la Luna.*

EJERCICIO 1.23 *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg y  $M_L = 7,36 \times 10^{22}$  kg, siendo la distancia promedio entre sus centros  $3,84 \times 10^8$  m. Los radios de la Tierra y la Lunas son aproximadamente  $R_T = 6378$  km y  $R_L = 1740$  km. Determine*

- a) *El peso de una kilógramo de masa en la superficie de la Luna.*
- b) *La rapidez de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra a la altura de 50 km sobre la superficie de la Tierra.*
- c) *Considerando que el satélite está en órbita ecuatorial moviéndose en el sentido que lo hace la Tierra al rotar, determine el número de vueltas por día que da el satélite respecto a la Tierra.*
- d) *La magnitud y el sentido de la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo de masa 1000 kg que está justo en el punto medio entre los centros de la Tierra y de la Luna.*

EJERCICIO 1.24 Considere dos hipotéticos planetas esféricos  $A$  y  $B$  de iguales de masa  $M_A = M_B = 10^{20}$  kg siendo la distancia entre sus centros  $2 \times 10^7$  m, describiendo órbitas circulares en torno a su centro de masas. Los radios de ambos planetas son 5000 km. Determine

- a) El periodo de rotación en días que tendría el sistema de ambos planetas en torno a su centro de masa.
- b) La rapidez de cada planeta en su órbita en  $\text{ms}^{-1}$ .
- c) La magnitud de la fuerza gravitacional que experimenta cada uno producida por el otro en Newtons.
- d) La magnitud de la aceleración del centro de cada planeta en  $\text{ms}^{-1}$ .

EJERCICIO 1.25 Considere dos hipotéticos planetas esféricos de masas  $M_1 = 2 \times 10^{20}$  kg y  $M_2 = 10^{20}$  kg, siendo la distancia entre sus centros  $2 \times 10^7$  m, describiendo órbitas circulares en torno a su centro de masas  $CM$ . Determine

- a) Las distancias desde los centros de los planetas al centro de masa.
- b) El periodo de rotación en días que tienen ambos planetas en torno a su centro de masa.
- c) La magnitud de la fuerza gravitacional que experimenta cada uno producida por el otro en Newtons.

EJERCICIO 1.26 Un satélite está en órbita en un plano ecuatorial en torno a la Tierra, girando en el mismo sentido que la Tierra. La masa y radio terrestre son aproximadamente  $M_T = 5,98 \times 10^{24}$  kg  $R_T = 6,378 \times 10^6$  m. Si la altura del satélite respecto a la superficie terrestre es 50 km determine:

- a) El número de vueltas en torno a la Tierra que da el satélite en un día.
- b) La altura sobre la superficie terrestre que debería tener el satélite para que diera una vuelta por día, es decir que esté geoestacionario.
- c) La rapidez del satélite en el último caso.
- d) La velocidad de escape del satélite desde la altura donde está geoestacionario.

## CAPÍTULO 2

# Vectores

### 2.1. Escalares y vectores

Una cantidad física que pueda ser completamente descrita por un número real, en términos de alguna unidad de medida de ella, se denomina una cantidad física escalar. Como veremos existen cantidades físicas que son descritas por más de un número, o por un número y otras propiedades. En particular los vectores se caracterizan por tener una magnitud, expresable por un número real, una dirección y un sentido. Sin embargo hay algo más que explicaremos.

### 2.2. Sistemas de referencia

Para especificar la posición de un punto en el espacio, se utilizan sistemas de referencia. Esta posición se define en forma relativa a algún determinado sistema de referencia.

#### 2.2.1. Sistema cartesiano

En un sistema de referencia cartesiano, existen tres ejes denominados ejes cartesianos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ortogonales que se intersectan en un punto  $O$  llamado origen del sistema cartesiano. La posición de un punto respecto a ese sistema de referencia se define por el conjunto de sus coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , esto es mediante tres números, ver figura (2.1)

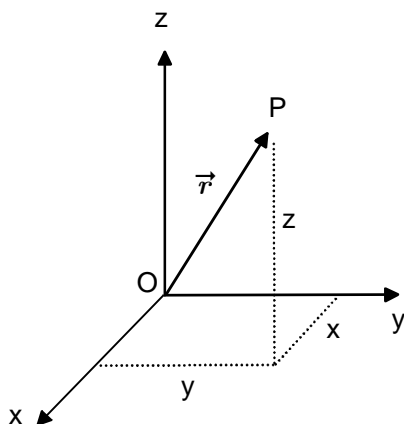


Figura 2.1: coordenadas cartesianas

Los rangos de variación de las coordenadas cartesianas son

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty.$$

### 2.2.2. Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , ver figura (2.2)

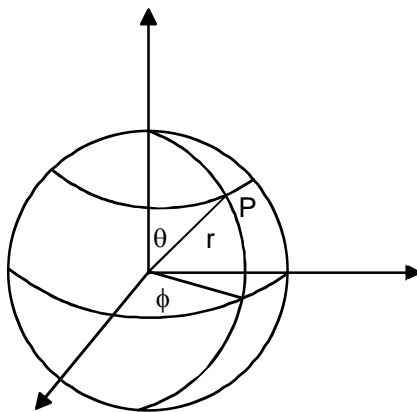


Figura 2.2: coordenadas esféricas



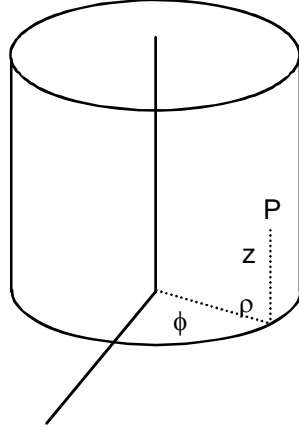


Figura 2.3: coordenadas cilíndricas

donde  $r$  es la distancia al origen,  $\theta$  es el ángulo que forma  $OP$  con el eje  $Z$  y  $\phi$  es el ángulo que forma la proyección de la línea  $OP$  en el plano  $XY$  con el eje  $X$ . Los rangos de variación de las coordenadas esféricas son

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

### 2.2.3. Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $z$  y  $\phi$ , ver figura (2.3) donde

$\rho$  es la distancia de la proyección del punto en el plano  $OXY$  al origen,  $z$  es la altura sobre el plano  $OXY$  y  $\phi$  es el ángulo que forma la proyección de la línea  $OP$  en el plano  $XY$  con el eje  $X$ . Los rangos de variación de las coordenadas cilíndricas son

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

### 2.2.4. Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, la posición de un punto sobre un plano está definida por sus dos coordenadas denominadas polares,  $r$  y  $\theta$ , ver figura (2.4)

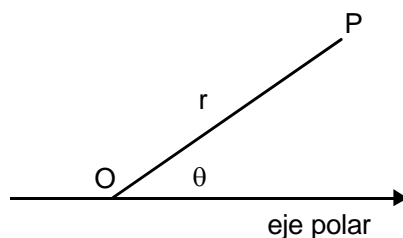


Figura 2.4: coordenadas polares

donde  $r$  es la distancia del punto  $P$  al origen,  $\theta$  es el ángulo que forma la línea  $OP$  con el eje  $X$ , llamado aquí eje polar. Los rangos de variación de las coordenadas polares son

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

### 2.2.5. Relaciones entre las coordenadas

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre las diversas coordenadas para los sistemas recién descritos

■ Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

■ Cartesiano-cilíndrico

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

■ Polar-cartesiano

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Más detalles se proporcionan después de introducir el concepto de vector. Si está perdido respecto de la trigonometría, vea resumen al final.

## 2.3. Desplazamientos en el espacio

El concepto que dio lugar a los vectores, es el de desplazamiento. Considere un sistema de referencia respecto al cual esté definida la posición de puntos.

**DEFINICION 2.3.1** *Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas varían con el tiempo.*

**DEFINICION 2.3.2** *Un desplazamiento se define como cualquier cambio de posición de un punto en el espacio*

Este concepto básico de desplazamiento es en principio más elemental que el concepto de movimiento de un punto, puesto que no tiene relación con tiempos. Si un punto pasa de una posición  $A$  a otra posición  $B$ , se dice que el punto se ha desplazado de  $A$  a  $B$ . De su definición se desprende que un desplazamiento tiene tres características

- Su magnitud, que se define como la distancia entre el punto inicial y el punto final.
- Su dirección, correspondiente a la dirección de la recta  $AB$ . (rectas paralelas tienen la misma dirección)
- Su sentido, de  $A$  hacia  $B$ . Así el sentido del desplazamiento de  $B$  hacia  $A$  es contrario al desplazamiento de  $A$  hacia  $B$ .

Además, desplazamientos sucesivos se combinan (o se suman) de acuerdo a la regla del triángulo, indicada en la figura siguiente (2.5), donde el desplazamiento  $A \longrightarrow B$  seguido del desplazamiento  $B \longrightarrow C$  es equivalente a un desplazamiento  $A \longrightarrow C$ .

Eso queda absolutamente claro de la figura que define la regla de combinación triangular de desplazamientos. Esta regla se generaliza en la sección siguiente para dar origen al concepto de vector. Como veremos más adelante, para el caso de las fuerzas se utiliza la regla del paralelogramo en vez de la del triángulo para obtener la fuerza resultante. Ambas reglas son completamente equivalentes.

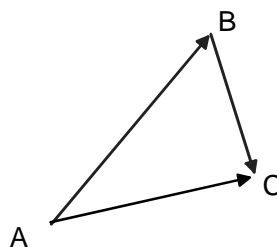


Figura 2.5: desplazamiento equivalente

## 2.4. Vectores

Los vectores son objetos que tienen las características de los desplazamientos, es decir que tienen magnitud, dirección, sentido, y tales que la combinación (llamada suma vectorial) de dos de ellos, se obtiene de acuerdo a la regla del triángulo indicada en la figura anterior. Obviamente un ejemplo de vectores son los desplazamientos. Otro ejemplo de vectores en Física, lo constituyen las fuerzas que se aplican a los cuerpos, tema del siguiente capítulo. Ellas poseen las tres características básicas, magnitud dirección y sentido. La cuestión de que si las fuerzas se combinan de acuerdo a la regla de suma vectorial, puede y es establecida experimentalmente para ciertas condiciones que explicaremos en el capítulo siguiente. Es decir debe establecerse que aplicar dos fuerzas dadas sobre un cuerpo es físicamente equivalente a aplicar una fuerza, llamada fuerza resultante que tiene la magnitud, dirección y sentido dada por la regla de adición vectorial.

Debemos señalar que no es suficiente que un objeto tenga magnitud, dirección, sentido para ser considerado un vector. Deben necesariamente combinarse como tales. Las rotaciones de los cuerpos, en torno a la dirección de un eje, en un sentido u otro, y de cierta magnitud (el ángulo), no son vectores porque no se combinan como los desplazamientos. En el capítulo sobre fuerzas veremos que siempre es posible cambiar los puntos de aplicación de fuerzas que actúan sobre un cuerpo indeformable a un determinado punto, allí sumarlas como vectores obteniendo la fuerza resultante, pero es en general necesario agregar el torque de las fuerzas que se cambiaron de posición respecto al punto donde se obtiene la resultante vectorial. Esta característica de las fuerzas no la poseen los desplazamientos.

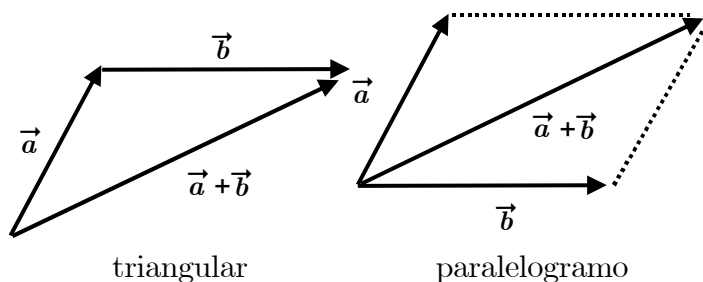
### 2.4.1. Notación

Los vectores, cualquiera sea su naturaleza, los denotaremos en el texto con letras con flechas:  $\vec{a}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{f}$  y la combinación o suma vectorial de ellos con el símbolo usual de suma  $+$ , es decir

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

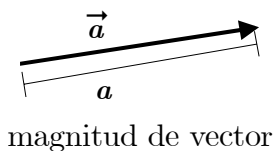
### 2.4.2. Suma de vectores

Naturalmente solo podremos sumar vectores del mismo tipo: desplazamientos, fuerzas, otros, de modo que la regla de suma vectorial puede ser representada en cualquiera de las dos figuras siguientes, reglas conocidas como triangular y del paralelogramo:



### 2.4.3. Magnitud de un vector

La magnitud de un vector  $\vec{a}$  será representada por  $|\vec{a}|$  y a veces simplemente por  $a$ , y representa por ejemplo, para los desplazamientos la distancia entre el punto inicial y el final y para una fuerza, la magnitud de ella expresada en unidades de fuerza.



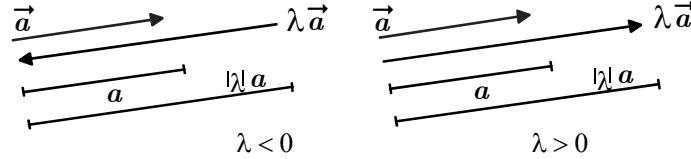
magnitud de vector

### 2.4.4. Multiplicación de un vector por un escalar

Si  $\vec{a}$  es un vector y  $\lambda$  es un escalar (número real) definimos el producto de un escalar por un vector al vector

$$\lambda \vec{a}$$

que es un vector paralelo al vector  $\vec{a}$ , de magnitud  $|\lambda|$  veces la magnitud de  $\vec{a}$ , y del mismo sentido del vector  $\vec{a}$  si  $\lambda > 0$  y de sentido contrario si  $\lambda < 0$ .

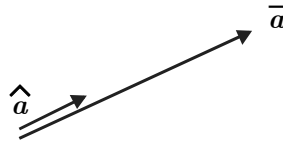


### 2.4.5. Vectores unitarios

Al vector paralelo y del mismo sentido que el vector  $\vec{a}$ , pero de magnitud unidad lo denotaremos por  $\hat{a}$ . Entonces obviamente tenemos la siguiente importante relación

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}, \quad (2.4)$$

que se ilustra en la figura siguiente



### 2.4.6. Vectores unitarios cartesianos

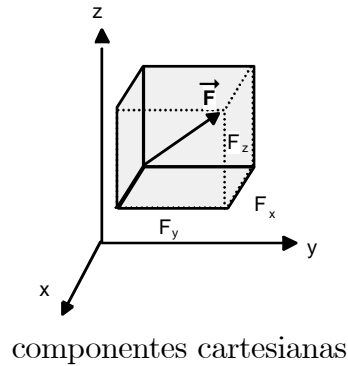
Los vectores de magnitud unidad, paralelos y en el sentido positivo de los ejes cartesianos, los denotaremos por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ .

### 2.4.7. Componentes cartesianas de un vector

Todo vector  $\vec{F}$  (en tres dimensiones), puede ser escrito como

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = (F_x, F_y, F_z), \quad (2.5)$$

donde  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  se denominan componentes cartesianas del vector. Hemos señalado además una notación alternativa para denotar un vector como un trío ordenado formado por sus tres componentes  $(F_x, F_y, F_z)$ .



### 2.4.8. Vector nulo

Un vector de magnitud cero, se denomina vector nulo y lo indicaremos por  $\vec{0}$ .

### 2.4.9. Resta de vectores

Se define al vector diferencia

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}, \quad (2.6)$$

que pasa a ser un caso especial de suma de vectores como se ilustra en la figura

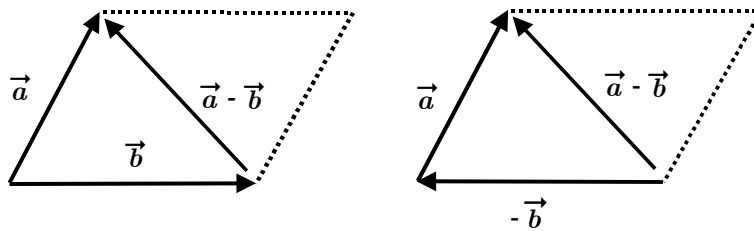


Figura 2.6:

Note que para realizar las operaciones descritas los vectores pueden desplazarse libremente a líneas paralelas, pues corresponden a la misma dirección, siendo necesario mantener su magnitud y su sentido. En el capítulo

siguiente, cuando se trate de las fuerzas, se indicarán las formas de hacerlo pues en ese caso, el punto de aplicación de una fuerza es relevante y no puede ser cambiado arbitrariamente sin cambiar su efecto.

#### 2.4.10. Producto escalar de vectores

Dados dos vectores  $\vec{a}$ , y  $\vec{b}$ , se define el producto escalar de ellos al número real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha, \quad (2.7)$$

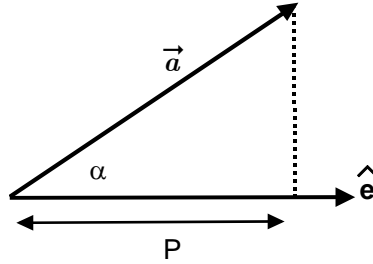
siendo  $\alpha$  el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores.

#### 2.4.11. Proyección de un vector en una dirección

La proyección  $P$  de un vector  $\vec{a}$  en la dirección y sentido de  $\hat{e}$  es un escalar dado por

$$P = \vec{a} \cdot \hat{e} = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad (2.8)$$

que se ilustra en la figura



#### 2.4.12. Conmutatividad

Es evidente que el producto punto o escalar así definido es conmutativo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (2.9)$$

#### 2.4.13. La distributividad del producto escalar respecto a la suma

La distributividad el producto escalar respecto a la suma, es decir la propiedad

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad (2.10)$$



puede establecerse del siguiente modo.

Considere la figura siguiente donde se muestran las proyecciones

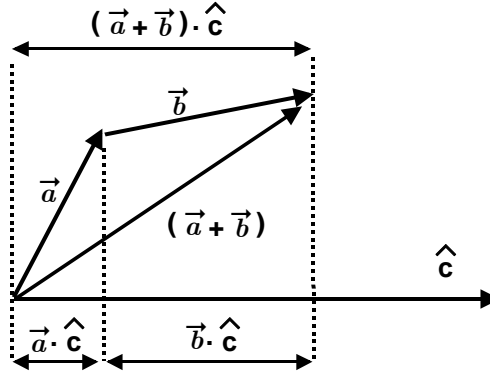


Figura 2.7:

La figura muestra que la suma de las proyecciones de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sobre la dirección de  $\vec{c}$  igualan a la proyección de  $\vec{a} + \vec{b}$  sobre esa misma dirección, esto es

$$\vec{a} \cdot \hat{c} + \vec{b} \cdot \hat{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \hat{c},$$

y multiplicando por  $|\vec{c}|$  se obtiene

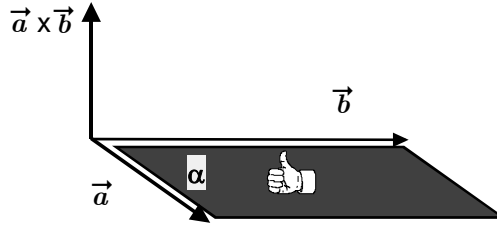
$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

#### 2.4.14. Producto vectorial de dos vectores

Se define el producto cruz o vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}$  de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  como un vector de magnitud

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = ab \sin \alpha, \quad (2.11)$$

que corresponde al área del paralelogramo que los dos vectores forman, de dirección perpendicular al plano de los dos vectores y de sentido dado por la regla de la mano derecha o del tornillo diestro, como se indica en la figura. El ángulo  $\alpha$  es el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores. (Note que  $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha)$ ).



En la expresión del producto vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}$ , la parte del vector  $\vec{a}$  paralela al vector  $\vec{b}$  no contribuye. Contribuye sólo la parte del vector  $\vec{a}$  que es perpendicular a  $\vec{b}$  que en la figura que sigue se indica por  $\vec{a}_b$ , es decir

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_b \times \vec{b}, \quad (2.12)$$

que se ilustra en la figura y donde  $\vec{a}_b$  indica la parte de el vector  $\vec{a}$  que es perpendicular a  $\vec{b}$ .

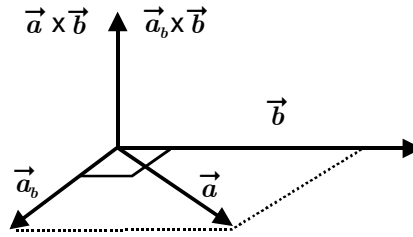


Figura 2.8:

#### 2.4.15. Distributividad del producto cruz respecto a la suma

Para establecer la propiedad

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}, \quad (2.13)$$

Consideraremos un vector unitario  $\hat{c}$  y tomemos las partes de  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  que son perpendiculares a  $\hat{c}$  y que se han indicado en la figura que sigue por  $\vec{a}_c$  y  $\vec{b}_c$ . Está también el vector  $\vec{OB}$  que es la suma vectorial  $\vec{a}_c + \vec{b}_c$ . Estos tres vectores están todos sobre un plano perpendicular a  $\hat{c}$  que hemos llamado plano  $\Sigma$ . Multiplicar esos tres vectores vectorialmente por  $\hat{c}$  simplemente rota

ese triángulo  $OAB$  en  $90^\circ$  sobre ese mismo plano llegando a ser el triángulo  $OA'B'$ . En ese triángulo rotado, evidentemente está representado que

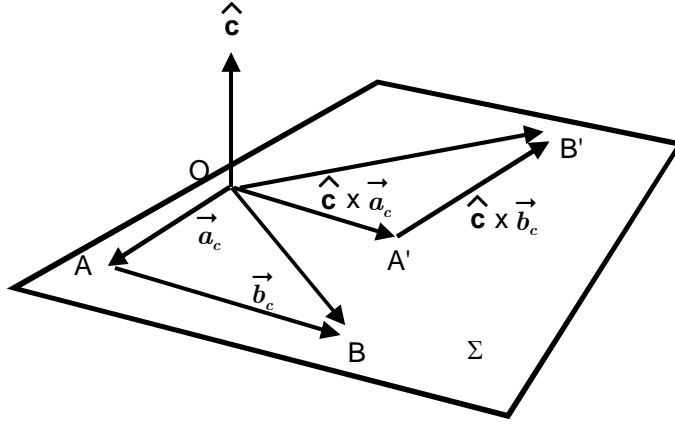


Figura 2.9:

$$\hat{c} \times \vec{a}_c + \hat{c} \times \vec{b}_c = \hat{c} \times (\vec{a}_c + \vec{b}_c), \quad (2.14)$$

Pero  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  se pueden descomponer en partes paralelas y perpendiculares a  $\hat{c}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a} \cdot \hat{c} \hat{c} + \vec{a}_c, \\ \vec{b} &= \vec{b} \cdot \hat{c} \hat{c} + \vec{b}_c \end{aligned}$$

de modo que

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \hat{c} \hat{c} + \vec{a}_c + \vec{b}_c,$$

de donde es claro que

$$(\vec{a} + \vec{b})_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

Por lo tanto (2.14) puede escribirse

$$\hat{c} \times \vec{a}_c + \hat{c} \times \vec{b}_c = \hat{c} \times (\vec{a} + \vec{b})_c,$$

Multiplicando por  $|\vec{c}|$  y considerando (2.12) se transforma en

$$\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}).$$

### 2.4.16. Algunas propiedades

Pueden establecerse algunas propiedades básicas

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\
 (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\
 (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \\
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \\
 (-1)\vec{a} + \vec{a} &= \vec{0}, \\
 \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}, \\
 \lambda \vec{0} &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Al vector  $(-1)\vec{a}$  lo denotaremos simplemente  $-\vec{a}$ , es decir

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

### 2.4.17. Algunas operaciones en términos de las componentes

Puede establecerse que

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\
 \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \pm b_x)\hat{i} + (a_y \pm b_y)\hat{j} + (a_z \pm b_z)\hat{k}, \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).
 \end{aligned}$$

Note que la última relación corresponde al desarrollo del determinante

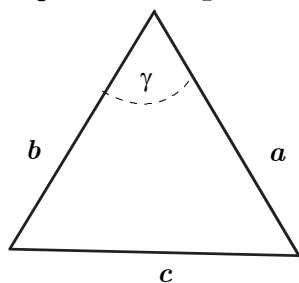
$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

### 2.4.18. Relación con geometría

Existen muchas relaciones geométricas que se demuestran en forma muy simple utilizando las propiedades de los vectores. Por ejemplo demostraremos algunos teoremas.

► **TEOREMA 2.1**

*Teorema del coseno. Con respecto a la figura el teorema establece que*



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

**DEMOSTRACION 1** *Considere el triángulo de la figura 2.10 (a) entonces tenemos que la magnitud del lado opuesto al ángulo  $|\vec{a} - \vec{b}|$  estará dado por*

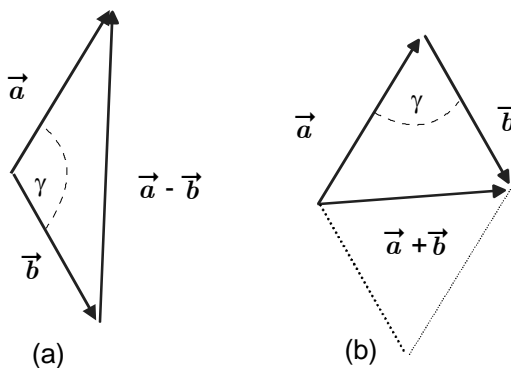


Figura 2.10:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}, \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}. \end{aligned}$$

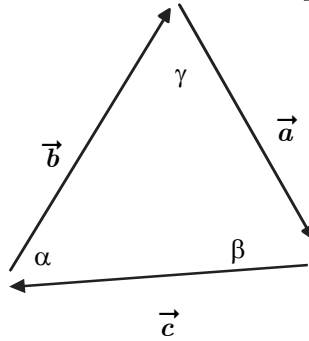
*Forma alternativa. El mismo resultado se obtiene de considerar la figura 2.10 (b) pero ahora*

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}, \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(180 - \gamma)}, \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}. \end{aligned}$$

► **TEOREMA 2.2**

*Teorema del seno. El teorema del seno establece que los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales a los lados opuestos a los ángulos.*

DEMOSTRACION 2 *Considere entonces un triángulo*



Evidentemente

$$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c},$$

pues tenemos en los tres casos la misma dirección, mismo sentido e igual magnitud, el doble del área del mismo triángulo. Si tomamos las magnitudes

$$ab \sin \gamma = ac \sin \beta = cb \sin \alpha,$$

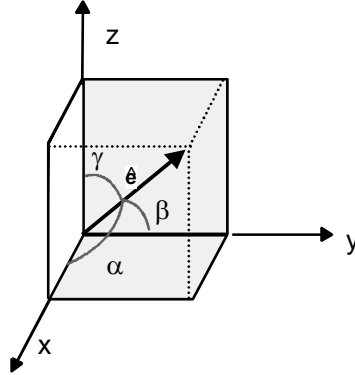
luego dividimos estas ecuaciones por  $abc$  conduce al teorema del seno.

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}.$$

Aquí hemos usado la notación  $a = |\vec{a}|$ ,  $b = |\vec{b}|$  y  $c = |\vec{c}|$ .

### 2.4.19. Cosenos directores

Considere un vector  $\hat{e}$  unitario que forma los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  con los ejes  $X, Y, Z$ , como se indica en la figura



cosenos directores

entonces

$$\hat{e} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k},$$

si hacemos

$$\hat{e} \cdot \hat{e} = 1,$$

se obtiene

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

La relación fundamental que cumplen los cosenos directores de una dirección cualquiera.

### 2.4.20. Ecuación de un plano

De acuerdo a la figura (2.11), la ecuación de un plano que es perpendicular a una dirección  $\hat{n}$  y que pasa a una distancia  $d$  del origen puede escribirse

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = d,$$

esto es, todos los puntos del plano, dan la misma proyección sobre la dirección del vector unitario normal, la distancia  $d$  al origen. La forma cartesiana de la ecuación de un plano será

$$Ax + By + Cz = D,$$

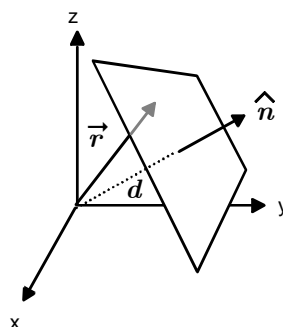


Figura 2.11: un plano

y comparando con la forma anterior se deduce que

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ n_y &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ n_z &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ d &= \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.4.1** Determine un vector unitario normal y la distancia del siguiente plano al origen

$$2x - 3y + 2z = 5,$$

**Solución.** Usando lo anterior

$$n_x = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad n_y = \frac{-3}{\sqrt{17}}, \quad n_z = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad d = \frac{5}{\sqrt{17}}.$$

### 2.4.21. Volumen de un paralelepípedo

Si un paralelepípedo tiene sus aristas de acuerdo a las direcciones y magnitudes de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , su volumen está dado por

$$V = \left| \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \right|,$$



el llamado producto triple o mixto. La razón es que  $\vec{a} \times \vec{b}$  puede escribirse como el área  $A$  del paralelogramo basal por un vector unitario a lo largo de la dirección perpendicular a esa área

$$\vec{a} \times \vec{b} = A\hat{n},$$

entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = A\hat{n} \cdot \vec{c} = \pm Ah,$$

la base por la altura. La razón de tomar el módulo es porque  $\hat{n}$  puede dar producto punto negativo con  $\vec{c}$ .

### 2.4.22. Ángulo que forman dos vectores $\vec{a}$ , $\vec{b}$

De acuerdo a las dos versiones establecidas para el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

y

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha,$$

se deduce que

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.16)$$

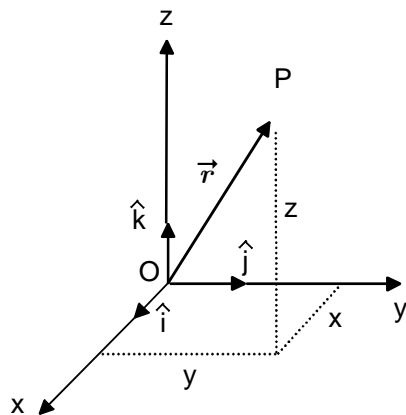
## 2.5. Más sobre sistemas de referencia

Mediante la utilización de vectores, se definen vectores unitarios básicos de acuerdo a cada sistema de referencia, de manera que en primer lugar, la posición de los puntos se hace mediante un vector, llamado vector posición, que es expresado en términos de los vectores unitarios básicos, como explicaremos, y en segundo lugar ello permitirá en los próximos capítulos calcular con simplicidad la velocidad y aceleración de puntos. Los vectores unitarios básicos usualmente se eligen ortogonales entre sí (formando ángulos rectos).

### 2.5.1. Sistema cartesiano

Como ya se explicó se definen los vectores unitarios cartesianos básicos  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  paralelos y en el sentido de los ejes, como se ilustra en la figura, de

manera que el vector posición del punto  $P$  está dado por

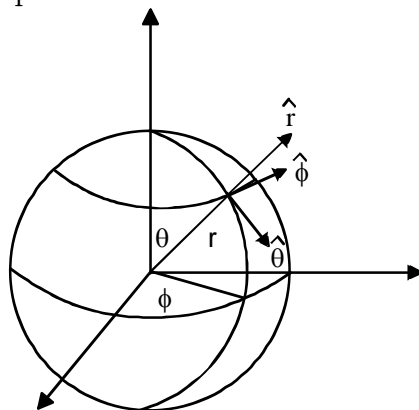


vectores unitarios cartesianos

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (2.17)$$

### 2.5.2. Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  se indican en la figura de manera que el vector posición del punto  $P$  está dado por

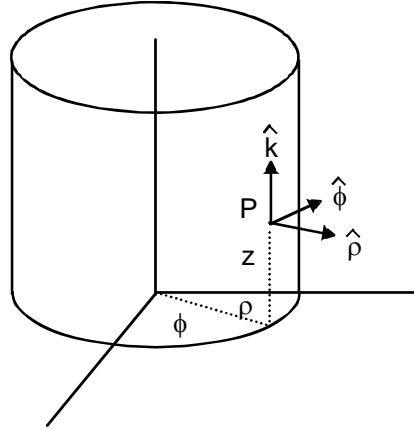


vectores unitarios esféricos

$$\vec{r} = r\hat{r}. \quad (2.18)$$

### 2.5.3. Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{k}$  se indican en la figura de manera que el vector posición del punto  $P$  está dado por



vectores unitarios cilíndricos

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}. \quad (2.19)$$

### 2.5.4. Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  se indican en la figura de manera que el vector posición del punto  $P$  está dado por

$$\vec{r} = r \hat{r}. \quad (2.20)$$

### 2.5.5. Relaciones entre los vectores unitarios

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre los vectores unitarios para los diversos sistemas recién descritos

- Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \\ \hat{\theta} &= \cos \theta (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) - \sin \theta \hat{k}, \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

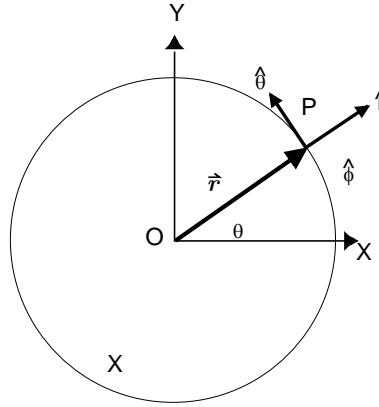


Figura 2.12: Vectores unitarios polares.

■ Cartesiano-cilíndrico

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}, \\ \hat{k} &= \hat{k}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

■ Polar-cartesiano

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}\end{aligned}\tag{2.23}$$

### 2.5.6. Componentes de un vector

En general todo vector  $\vec{A}$  puede ser expresado en cualquier sistema de vectores unitarios ortogonales de modo que

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ &= A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} \\ &= A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{k}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Las diversas componentes del vector  $\vec{A}$  están relacionadas y en general la forma de obtener una componente cualquiera es mediante la operación de proyección realizada mediante el producto escalar

$$A_n = \vec{A} \cdot \hat{n}.\tag{2.25}$$

## 2.6. De actualidad (No incluido en el, programa)

El concepto de vector que se generó mediante una generalización del simple concepto de desplazamiento y las formas en que los desplazamientos se combinan ha debido en algunos casos abandonarse y en otros casos generalizarse. El concepto de vector realmente tiene aplicabilidad e importancia en los llamados espacios planos o Euclidianos. En espacios curvos es complejo sino imposible hablar de dirección, puesto que dirección es un conjunto de líneas paralelas. ¿Qué son líneas paralelas en un espacio curvo, por ejemplo la superficie de una esfera?

En un espacio plano si se hacen tres desplazamientos paralelos regresando al punto de partida, el cuerpo queda tal como empezó. En un espacio curvo no ocurre eso. En la formulación de su teoría de la Relatividad General Albert Einstein que involucra espacio-tiempo curvo, se ve obligado a utilizar "Tensores" para su formulación. En la vecindad de cada punto del espacio tiempo, allí este se puede aproximar por un espacio tiempo plano y allí podríamos usar vectores. Como un ejemplo de lo que hablamos, en un espacio plano una partícula libre se mueve de acuerdo a

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t.$$

Si se trata del movimiento de una partícula en un espacio tiempo curvo las cosas son diferentes. Primero, el espacio tiempo tiene una curvatura causada por la presencia de cuerpos con masa. Una partícula moviéndose no sometida a alguna de las otras tres fuerzas (electromagnética, nuclear o débil), partícula en caída libre, define lo que se denomina sistema inercial de referencia. La partícula se moverá en una geodésica del espacio tiempo. Si se usa como parámetro la longitud de arco  $s$  la ecuación de movimiento establecida por Einstein es

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0,$$

donde  $x^\alpha$ , son coordenadas espaciales  $\alpha = 1, 2, 3$ . Además

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}),$$

son los símbolos de *Christoffel* y el elemento de arco  $ds^2$  define al tensor de la métrica

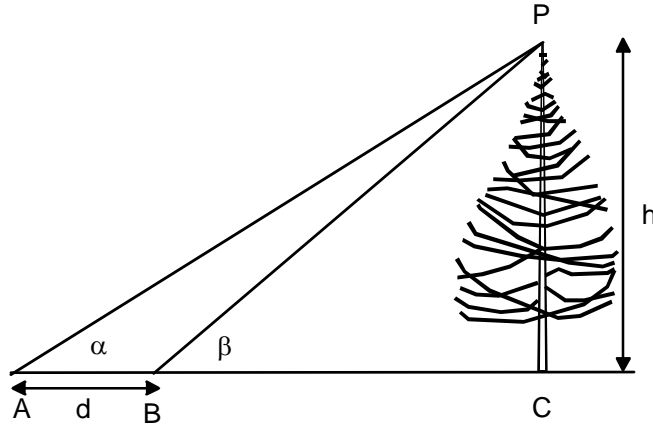
$$ds^2 = -g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

En un espacio tiempo plano,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , se obtiene  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$  y

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0.$$

## 2.7. Aplicaciones

**EJEMPLO 2.7.1** Para la situación indicada en la figura, determine la altura  $h$  del punto  $P$  en términos de los ángulo  $\alpha$ ,  $\beta$  y la distancia  $d$ .



**Solución.** Podemos escribir

$$\tan \alpha = \frac{h}{AC}, \quad \tan \beta = \frac{h}{BC},$$

de donde

$$AC = \frac{h}{\tan \alpha}, \quad BC = \frac{h}{\tan \beta},$$

y restando

$$d = AC - BC = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta},$$

de donde sigue el resultado

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta}} = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} d.$$



## 2.8. Ejercicios

EJERCICIO 2.1 *Demuestre las identidades*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

EJERCICIO 2.2 *Si los lados de un triángulo son  $a, b, c$  determine los ángulos del triángulo.*

EJERCICIO 2.3 *Considere los puntos cuyas coordenadas son  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 2, 1)$ ,  $C = (-1, 2, 0)$  determine*

- a) El área del triángulo  $ABC$ .*
- b) Los ángulos del triángulo  $ABC$ .*
- c) Las magnitudes de los lados del triángulo  $ABC$ .*
- d) Las alturas del triángulo  $ABC$ .*

EJERCICIO 2.4 *Considere un paralelogramo donde se dan tres vértices  $A = (0, 1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (1, 1, 0)$ .*

- a) Determine el cuarto vértice.*
- b) Determine el área del paralelogramo.*
- c) Determine las longitudes de las diagonales.*

EJERCICIO 2.5 *Escriba la ecuación de un plano que es perpendicular a la dirección  $\hat{n} = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$  y que pasa a distancia 3 del origen.*

EJERCICIO 2.6 *Sea una recta*

$$\begin{aligned}x &= 2t + 1, \\y &= -t + 2, \\z &= 3t - 1,\end{aligned}$$

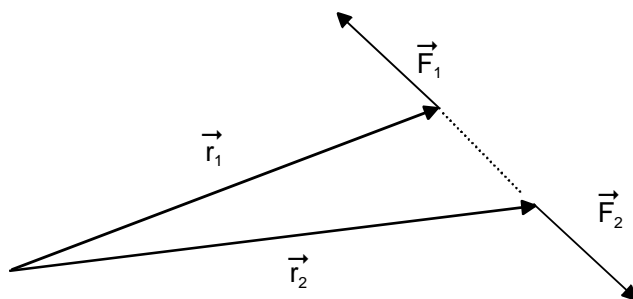
*siendo  $t$  un parámetro. Determine su distancia al origen.*

EJERCICIO 2.7 Sean  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 1)$  dos vectores. Determine la ecuación de un plano que pase por el origen y que contenga los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

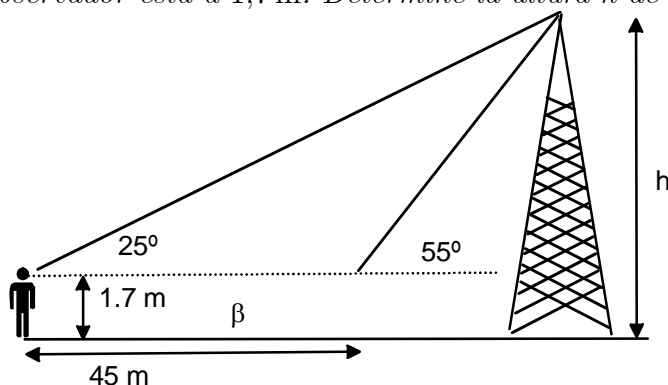
EJERCICIO 2.8 Determine el área de un triángulo en función solamente de sus lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

EJERCICIO 2.9 Con relación a la figura, demuestre que si  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  entonces:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

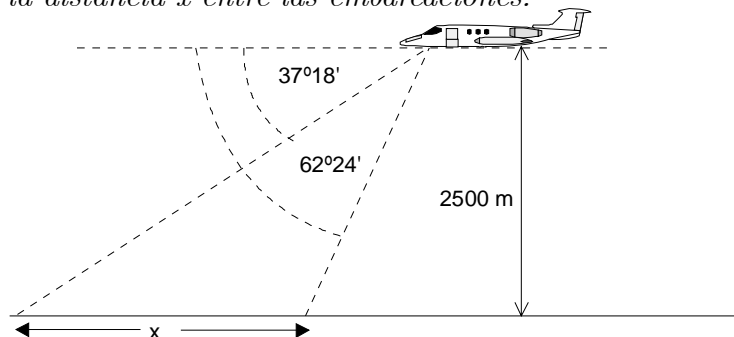


EJERCICIO 2.10 Desde una determinada posición en un camino, una persona observa la parte más alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de  $25^\circ$ . Si avanza 45 m en línea recta hacia la base de la torre, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de  $55^\circ$ . Considerando que la vista del observador está a 1,7 m. Determine la altura  $h$  de la torre.

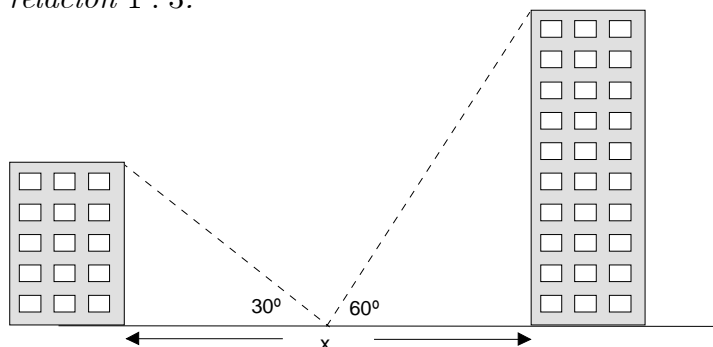




**EJERCICIO 2.11** Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura de 2500 m, el piloto observa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical con ángulos de depresión de  $62^\circ 24'$  y  $37^\circ 18'$  respectivamente. Encuentre la distancia  $x$  entre las embarcaciones.



**EJERCICIO 2.12** Una persona se encuentra en la mitad de la distancia que separa dos edificios y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  respectivamente. Demuestre que las alturas de los edificios están en la relación 1 : 3.



**Solución.** Si las alturas son llamadas  $h_1$  y  $h_2$  tenemos que

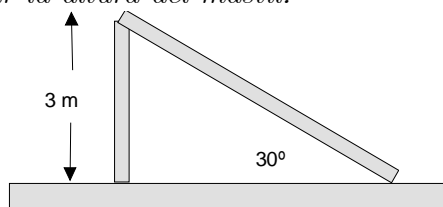
$$\tan 30 = \frac{h_1}{x/2},$$

$$\tan 60 = \frac{h_2}{x/2},$$

de donde

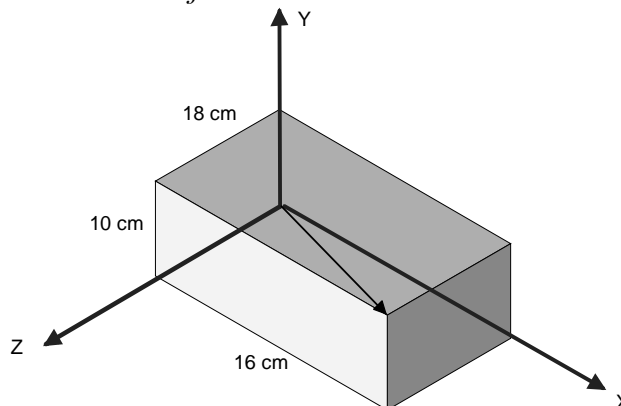
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\tan 30}{\tan 60} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

EJERCICIO 2.13 *Un mástil por efecto del viento se ha quebrado en dos partes, la parte que quedó vertical en el piso mide 3 m y la parte derribada quedó atada al extremo superior de la parte vertical, formando un ángulo de  $30^\circ$  con el piso. Encontrar la altura del mástil.*



EJERCICIO 2.14 *Una persona en su trote diario, desde su casa, corre 7 km al Norte, 2 km al Oeste, 7 km al Norte y 11 km al Este. Encuentre la distancia a su casa a que se encuentra la persona .*

EJERCICIO 2.15 *Una caja tiene 16 cm de largo, 18 cm de ancho y 10 cm de alto. Encuentre la longitud de la diagonal de la caja y el ángulo que ésta forma con cada uno de los ejes.*



EJERCICIO 2.16 *Dados los vectores  $\vec{r}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{r}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ , hallar los módulos de:*

a)  $\vec{r}_3$

b)  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$

c)  $2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3$

EJERCICIO 2.17 Hallar un vector unitario con la dirección y sentido de la resultante de  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ , con  $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 42\hat{j} - 5\hat{k}$ ,  $\vec{r}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ,

EJERCICIO 2.18 Demostrar que los vectores  $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ,  $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ,  $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ , pueden ser los lados de un triángulo, y hallar las longitudes de las medianas de dicho triángulo.

EJERCICIO 2.19 Hallar el ángulo formado por los vectores  $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .

EJERCICIO 2.20 Demostrar que los vectores  $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ,  $\vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ , forman un triángulo rectángulo.

EJERCICIO 2.21 Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por  $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ .

EJERCICIO 2.22 Dados ,  $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$  y  $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$  determinar

a)  $\vec{A} \times \vec{B}$

b)  $\vec{B} \times \vec{A}$

c)  $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

EJERCICIO 2.23 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son  $P(1, 3, 2)$ ,  $Q(2, -1, 1)$ ,  $R(1, 2, 3)$ .

EJERCICIO 2.24 Hallar los ángulos agudos formados por la recta que une los puntos  $(1, -3, 2)$  y  $(3, -5, 1)$  con los ejes coordenados.

EJERCICIO 2.25 Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos  $(3, 2, -4)$  y  $(1, -1, 2)$ .

EJERCICIO 2.26 Dos lados de un triángulo son los vectores  $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$  y  $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ . Hallar los ángulos del triángulo.

EJERCICIO 2.27 Las diagonales de un paralelogramo son  $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$  y  $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ . Demostrar que dicho paralelogramo es un rombo y hallar sus ángulos y la longitud de sus lados.

EJERCICIO 2.28 Hallar la proyección del vector  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$  sobre el vector  $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ .

EJERCICIO 2.29 Hallar la proyección del vector  $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  sobre la recta que pasa por los puntos  $(2, 3, -1)$  y  $(-2, -4, 3)$ .

EJERCICIO 2.30 Si  $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  y  $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ , hallar un vector unitario perpendicular al plano de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

EJERCICIO 2.31 Demostrar que  $\vec{A} = \frac{2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}{3}$ ,  $\vec{B} = \frac{\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}$ , y  $\vec{C} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$  son vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

## CAPÍTULO 3

# Fuerzas

### 3.1. Las Fuerzas

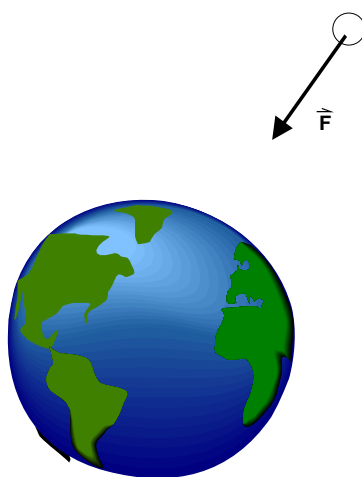
En mecánica, es generalmente suficiente clasificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos en dos tipos: de acción a distancia y de contacto. Del primer tipo las fuerzas se conocen generalmente como campos de fuerza. Así existen fuerzas de campos gravitacionales, de campos eléctricos, de campos magnéticos y otras. Es probable que usted se extrañe que un cuerpo pueda ejercer una acción sobre otro que está distante. Explicaciones formales existen, pero están fuera del alcance de estos apuntes. Si usted sabe algo de Física moderna se debería extrañar también que hablemos de fuerzas de contacto. En realidad un trozo de materia no puede tocar a otro. La materia está formada por átomos que contienen un núcleo positivo y están rodeados de electrones que son de carga negativa. Ellos se repelen impidiendo que se toquen. Tampoco se puede tocar los núcleos, que son positivos. Sin embargo esas distancias son tan pequeñas que el efecto es como si los cuerpos se tocaran.

#### 3.1.1. Fuerza de acción a distancia

Del primer tipo, acción a distancia, la más importante para este curso es la fuerza gravitacional que se ejerce entre los cuerpos consecuencia de su masa. Ella es una fuerza atractiva, inversa al cuadrado de la distancia entre los cuerpos y proporcional al producto de las masas. Sin embargo entre cuerpos de masas no demasiado grandes, esa fuerza es normalmente despreciable en

magnitud. En la Tierra sin embargo no se puede despreciar esa fuerza debido a la enorme masa de la Tierra. Cerca de la superficie terrestre todos los cuerpos son atraídos hacia la superficie terrestre (en realidad hacia el centro de la Tierra) con una fuerza que es proporcional a la masa del cuerpo. La constante de proporcionalidad es la aceleración de gravedad que en el sistema internacional de unidades es  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$  de modo que la magnitud de la fuerza peso de un cuerpo es

$$W = mg.$$



Fuerza gravitacional.

Claramente es reconocible que la fuerza peso tiene además dirección, vertical y sentido, hacia abajo. Es decir esta fuerza parece tener las propiedades de un vector. Más adelante indicaremos qué es lo que falta para poder considerar a una fuerza un vector. La variación de la fuerza gravitacional peso puede despreciarse si los cuerpos permanecen cerca de la superficie terrestre.

NOTA 3.1 La fuerza peso en la Tierra en realidad depende de la altura sobre la superficie terrestre y además, como consecuencia de la rotación terrestre, depende de la latitud, efectos que serán despreciados aquí, para situaciones cerca de la superficie terrestre.

NOTA 3.2 La fuerza gravitacional, el análisis de ella y su genio, permitieron a Albert Einstein formular la teoría general de la relatividad, cuestión que no podemos explicar aquí pero, bien podría usted pensarlo. La cuestión es ¿cómo un cuerpo distante puede, sin mediar nada entre ellos, atraer a otro?

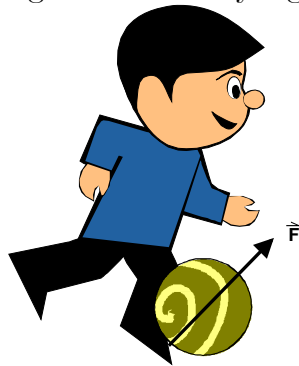
La fuerza gravitacional entre partículas en posiciones distintas siempre está presente y de acuerdo a Newton ella está dada en magnitud por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

A pesar de lo bien que ella aplica a la explicación del sistema Solar, tema que se presenta más adelante, su expresión deja de manifiesto un defecto que varios habían notado. Si la distancia cambia por mover uno de los dos cuerpos, el otro nota el cambio en esa fuerza instantáneamente. O sea la información del cambio viajó de una partícula a la otra con velocidad infinita. Albert Einstein con su formulación de su teoría de la relatividad especial establece que no hay cuerpos o señales que puedan viajar a más velocidad que la luz, por lo que se propuso construir una nueva teoría de la gravitación que no tuviera ese problema. Después de algún tiempo lo logra al construir una de las más hermosas teorías de la Física, la teoría de la relatividad general.

### 3.1.2. Fuerzas de contacto

Otra forma de ejercer una acción sobre un cuerpo, es haciendo contacto con él mediante otro cuerpo. Podemos empujar un cuerpo. Podemos también tirar de un cuerpo mediante una cuerda, Podemos colocar el cuerpo sobre una superficie sólida. Igualmente es importante si el cuerpo se mueve dentro de fluidos, ya sean líquidos o gaseosos. es también claro que estas fuerzas tendrán alguna magnitud, alguna dirección y algún sentido.



Fuerza de contacto.

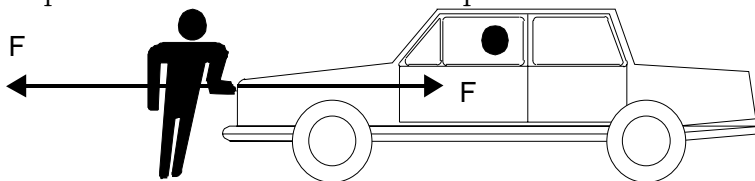
Este tipo de acción puede a primera vista parecer más natural que una acción a distancia. Sin embargo también caben algunas preguntas. Si la materia

está formada por átomos o moléculas, existiendo gran cantidad de espacio vacío entre ellos, ¿qué significa realmente que un cuerpo esté en contacto con otro?

### 3.1.3. Tercera ley de Newton

Cuando dos cuerpos se colocan en contacto, la fuerza de contacto que se desarrolla es en realidad una pareja de fuerzas. Una de esas fuerzas actúa sobre el primer cuerpo y es causada por el segundo, y la otra fuerza actúa sobre el segundo cuerpo y es causada por el primero. Se las reconoce como fuerzas de acción y de reacción. Cual de ellas se llame acción o reacción es irrelevante. La tercera ley de Newton establece que esas dos fuerzas tienen la misma dirección, igual magnitud, sentido contrario y actúan sobre una misma línea.

En un esquema la situación es como la que se muestra



### 3.1.4. Unidades de Fuerza

La unidad de fuerza en el sistema internacional de unidades es el Newton, simbolizado por N. A veces se usan otras unidades

La dina  $\text{dyn} = 0,000\,01\text{ N}$ ,

La libra fuerza  $\text{lbf} = 4,448\text{ N}$ ,

El kilogramo fuerza  $\text{kgf} = 9,8\text{ N}$

## 3.2. Tipos de fuerzas de contacto

Cuando dos cuerpos están en contacto, se manifiestan fuerzas de interacción que satisfacen la tercera ley de Newton, es decir la llamada ley de acción y reacción. Es conveniente clasificarlas en diversos tipos que explicaremos.



### 3.2.1. Fuerza normal

La componente de la fuerza de contacto perpendicular a la superficie en contacto, se denomina usualmente reacción normal  $N$ .

### 3.2.2. Fuerza de roce

La componente de la fuerza de contacto paralela a la superficie en contacto, se denomina fuerza de roce  $f$ .

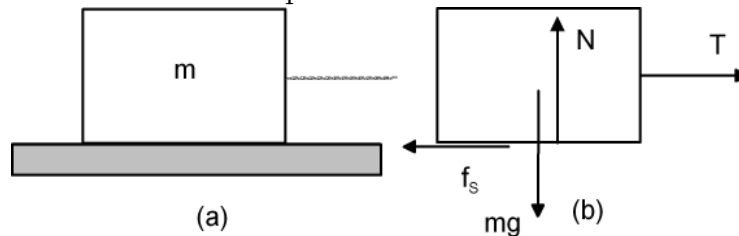
### 3.2.3. Tensiones

Cuando un cuerpo es tirado mediante una cuerda, la cuerda ejerce una fuerza de tracción llamada la tensión de la cuerda  $T$ .

La figura siguiente (a), ilustra a un cuerpo de masa  $m$  que está apoyado sobre el suelo y tirado mediante una cuerda. La figura (b) ilustra el sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo, en un diagrama llamado de cuerpo libre, donde los contactos se han sustituido por las respectivas fuerzas de acción, la normal  $N$ , la fuerza de roce estática  $f_s$ , la tensión  $T$  y la fuerza de acción a distancia, el peso del cuerpo de magnitud  $mg$ .

### 3.2.4. Superficies lisas o sin roce

Si las superficies son lisas o en otras palabras sin roce, la fuerza de roce es cero y entonces la acción es puramente normal.



## 3.3. Condiciones de equilibrio

Aunque el tema de los cuerpos en equilibrio será tratado con mayor profundidad en el capítulo siguiente, daremos algunos elementos aquí. Los cuerpos en equilibrio, es decir que permanecen en reposo bajo la acción de un

determinado conjunto de fuerzas, permite investigar (en el laboratorio) cuando un sistema de fuerzas puede ser reemplazado por otro.

**DEFINICION 3.3.1** *Diremos que dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando un mismo cuerpo permanece en equilibrio con ambos sistemas de fuerzas.*

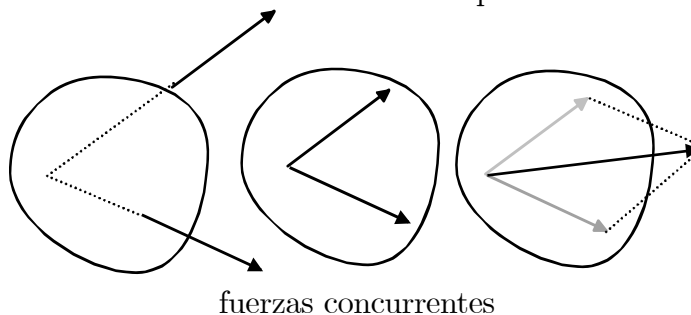
Sin embargo seguiremos otra estrategia que consiste en analizar la posibilidad de cambiar el punto de aplicación de una fuerza, determinando en cada caso el efecto que ese cambio produce.

### 3.3.1. Línea de acción y punto de aplicación

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo sólido indeformable, se ha comprobado experimentalmente que la fuerza se puede desplazar libremente sobre su línea de acción. En otras palabras la fuerza puede ser aplicada indistintamente en cualquier punto de su línea de acción, siempre y cuando se mantenga su magnitud, dirección y sentido. Sin embargo no resulta lo mismo si se traslada la fuerza a otra línea paralela a su línea de acción. Para cuerpos reales deformables, no es posible cambiar el punto de aplicación de la fuerza sin que ello cambie su efecto, las deformaciones que ellas causan.

### 3.3.2. Fuerzas concurrentes

Cuando sobre un cuerpo sólido indeformable actúan dos fuerzas que no son paralelas y que están sobre un mismo plano, por lo dicho anteriormente, es posible trasladarlas al punto de intersección de sus líneas de acción. Se ha comprobado que esas dos fuerzas actuando en ese punto son equivalentes a una sola fuerza aplicada en ese mismo punto. Lo importante es que esa única fuerza es la suma vectorial de las dos fuerzas aplicadas.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

### 3.3.3. Par de Fuerzas

Dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido contrario que no tienen la misma línea de acción, tienen una suma vectorial nula. Sin embargo su efecto no es nulo, pues ese par de fuerzas tiende a hacer rotar el cuerpo. El par  $\vec{M}$  de ellas se define como

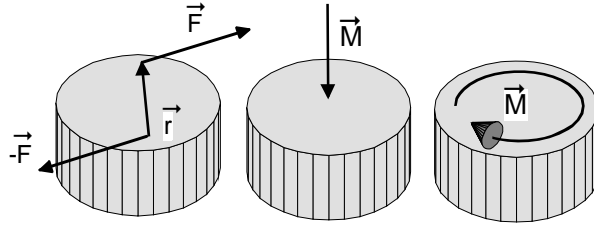
$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F},\end{aligned}\tag{3.1}$$

pues

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

El par  $\vec{M}$  resulta independiente del origen  $O$  puesto que sólo depende del vector posición relativo entre los dos puntos de aplicación. Tal vector que puede desplazarse libremente pues no depende del origen, se denomina el “par de las fuerzas”. El par de fuerzas es perpendicular al plano que contiene las fuerzas y no es una fuerza, de hecho su unidad en el sistema  $SI$  es  $[N\cdot m]$ .

Las figuras siguientes muestran varias formas de representar un “par de las fuerzas”:



La primera ilustra las dos fuerzas. La segunda, la representación vectorial del par y la última una representación simplificada donde se muestra en el plano de las fuerzas el efecto que el par produce.

### 3.3.4. Fuerzas no concurrentes

Como ya explicamos, una fuerza aplicada en un punto de un cuerpo rígido puede trasladarse libremente sobre su línea de acción. Para cambiarla a otra

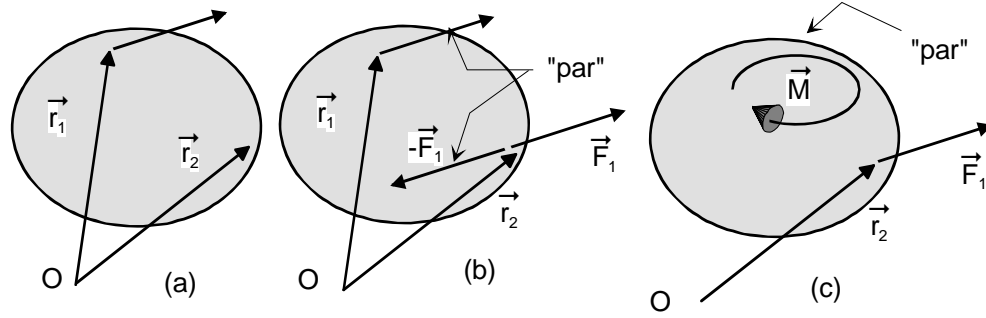


Figura 3.1:

línea paralela debe tenerse cuidado. La figura (3.1) (a) muestra una  $\vec{F}_1$  actuando en  $\vec{r}_1$  que se desea cambiar a otro punto arbitrario  $\vec{r}_2$ .

La manera de hacerlo es “agregando” en el punto  $\vec{r}_2$  un vector nulo (3.1) (b), que por supuesto no hace ni un efecto, es decir  $\vec{F}_1 + (-\vec{F}_1)$ , y como está ilustrado en (3.1) (c) queda actuando la fuerza  $\vec{F}_1$  aplicada en  $\vec{r}_2$  más un par de fuerzas  $\vec{M}$  dado por

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1. \quad (3.2)$$

Si se toma en cuenta que  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$  es el vector dirigido desde el punto donde se colocó la fuerza al punto donde estaba la fuerza, la receta es simplemente: cambie la fuerza  $\vec{F}$  manteniendo su magnitud, dirección y sentido a un punto arbitrario, considerando entonces que en el nuevo punto actúa la fuerza  $\vec{F}$  y además el par

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Como explicamos a continuación, este par es también el “torque” de la fuerza respecto al punto donde la fuerza se traslada.

### 3.3.5. Caso general

Si sobre un cuerpo actúan un conjunto de fuerzas  $\vec{F}_i$  aplicadas en  $\vec{r}_i$ , para sumarlas y obtener la fuerza resultante, de acuerdo a su suma vectorial, debemos hacerlas actuar en un mismo punto. Supongamos que las llevamos todas a un punto O arbitrario de posición  $\vec{r}_O$ . Generalizando lo anterior el cuerpo quedará sometido, además de la resultante en O,

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i,$$

a una serie de pares de fuerzas dado por

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_O) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_O) \times \vec{F}_2 + \dots$$

Cada “par” no depende del origen pero si del punto al cual se trasladaron las fuerzas. Esta sumatoria que depende del punto  $O$  elegido (pero no del origen) se denomina el torque resultante de las fuerzas respecto al punto  $O$  y se denota por

$$\vec{\tau}_O = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i. \quad (3.3)$$

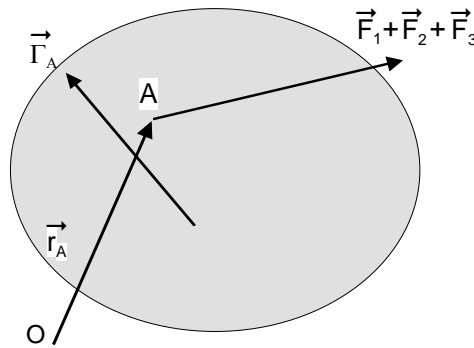
Si el origen del sistema de coordenadas se coloca precisamente en  $O$ , la expresión anterior se simplifica a

$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Nuevamente expresamos este resultado en palabras: Si desea sumar vectorialmente las fuerzas en un punto arbitrario del cuerpo, lo puede hacer pero tenga en cuenta entonces que sobre el cuerpo actúa esa fuerza resultante (la suma vectorial de todas ellas) y un torque respecto a ese punto dado por

$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (3.5)$$

La figura ilustra como se reduce un sistema de fuerzas arbitrario, donde se decidió sumar las fuerzas en el punto  $A$ , y luego se obtiene una fuerza resultante y un torque, lo que equivale a la situación de la figura (3.1):



siendo

$$\vec{\Gamma}_A = (\vec{r}_1 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_3.$$

### 3.4. Centro de masa

El centro de masa de un conjunto de partículas de masas  $m_i$  ubicadas en posiciones  $\vec{r}_i$  es un punto  $CM$  cuya posición se define mediante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3.6)$$

Como puede verse, el centro de masas corresponde a la posición promedio de las posiciones de las partículas con ponderaciones proporcionales a las masas de cada partícula.

#### 3.4.1. Cuerpos continuos

A veces es conveniente olvidarse de la discreticidad de la estructura atómica de la materia y considerar que la masa está distribuida en forma continua. Cuando un cuerpo puede considerarse un continuo de masa, es necesario definir las densidades de masa, de las cuales hay tres tipos dependiendo si el cuerpo es volumétrico, superficial o lineal. En este curso consideraremos solo cuerpos homogéneos donde las densidades son constantes.

Si el cuerpo es homogéneo, con una densidad de masa constante, entonces para los tres casos señalados, se definen

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho = \frac{M}{V} & [\text{kg m}^{-3}] & \text{densidad volumétrica} \\ \sigma = \frac{M}{A} & [\text{kg m}^{-2}] & \text{densidad superficial} \\ \lambda = \frac{M}{L} & [\text{kg m}^{-1}] & \text{densidad lineal} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

las densidades volumétrica, superficial y lineal de masa:  $\rho$ ,  $\sigma$ , y  $\lambda$ .  $M$  representa la masa total del cuerpo,  $V$  su volumen para el caso volumétrico,  $A$  su área para el caso superficial y  $L$  su longitud para el caso lineal.

### 3.5. Centroides

El concepto de centroide es bastante general y aplica a diversos conceptos. Por ejemplo existe el centroide de área, el centroide de volúmenes, el centroide de masas y otros más. En general se trata de un promedio ponderado de las cantidades involucradas. Por ejemplo considere un cuerpo plano que se ha subdividido en elementos infinitesimales de área  $dA$  ubicado en una posición

especificada por un vector (variable)  $\vec{r}$ . El centroide de áreas se define como un punto  $C$  ubicado en la posición

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA}. \quad (3.8)$$

Estas nociones requieren de elementos de la teoría matemática del Cálculo"que usted probablemente aún no conoce. No se preocupe, luego lo comprenderá mejor. Similarmente si un cuerpo tiene masa y se subdivide el cuerpo en elementos infinitésimos de volumen  $dV$  con masa  $dm$  ubicado en una posición especificada por un vector (variable)  $\vec{r}$ , se define el centroide de masas, conocido simplemente como centro de masa  $CM$ , al punto cuya posición es

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}. \quad (3.9)$$

Cuando el cuerpo es homogéneo, entonces las masas contenidas en los elementos de volumen son

$$dm = \frac{M}{V} dV,$$

donde  $M$  es la masa total del cuerpo y  $V$  es el volumen total del cuerpo. Entonces en este caso

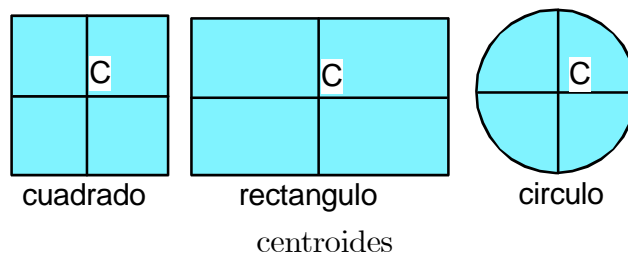
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \frac{M}{V} dV}{\int \frac{M}{V} dV} = \frac{\int \vec{r} dV}{\int dV}, \quad (3.10)$$

que es también llamado centroide del volumen. Naturalmente si el cuerpo es una figura plana, la integral que resultará es de superficie

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \frac{M}{A} dA}{\int \frac{M}{A} dA} = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA}. \quad (3.11)$$

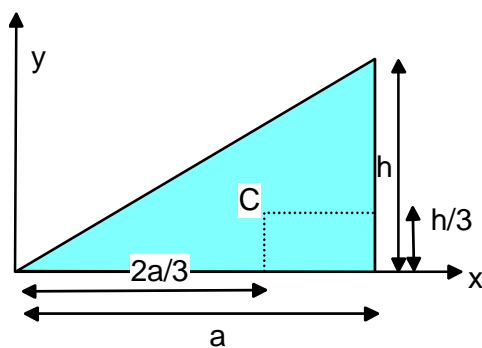
El centro de masa coincide con el centroide del área.

Las definiciones involucran el concepto de **integral** que usted probablemente no conoce, de modo que los centros de áreas de las figuras planas más importantes le serán dados. Es importante destacar que si la figura tiene un eje de simetría de rotación de  $180^\circ$ , entonces el centro de área debe estar sobre ese eje. Si hay dos ejes de simetría entonces el centro de área está donde se intersectan. Este es el caso del cuadrado, del rectángulo, del círculo y otras figuras con simetrías, como se indica en la figura



Para otras figuras importantes se dan resultados para la ubicación del centro de área y además de su área, por ser de importancia en algunos problemas de la estática.

### 3.5.1. Triángulo



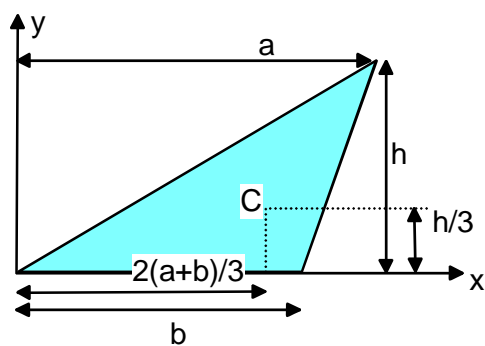
$$x_C = \frac{2}{3}a,$$

$$y_C = \frac{1}{3}h,$$

$$A = \frac{1}{2}ah.$$

### 3.5.2. Triángulo



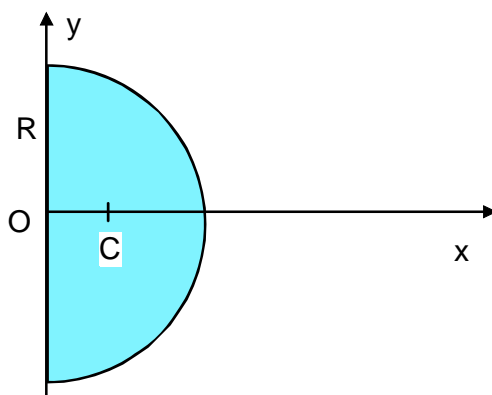


$$x_C = \frac{1}{3}(a + b),$$

$$y_C = \frac{1}{3}h,$$

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

### 3.5.3. Semi disco

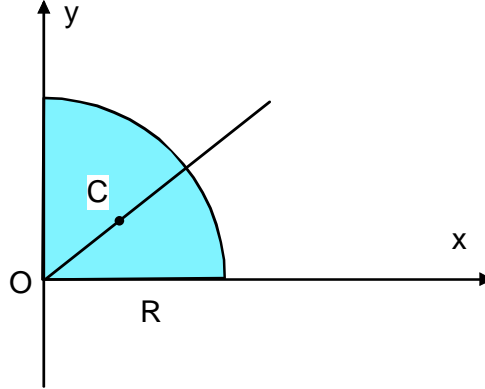


$$x_C = \frac{4R}{3\pi},$$

$$y_C = 0,$$

$$A = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

### 3.5.4. Cuarto de disco



$$\begin{aligned}x_C &= \frac{4R}{3\pi}, \\y_C &= \frac{4R}{3\pi}, \\A &= \frac{1}{4}\pi R^2.\end{aligned}$$

### 3.5.5. Combinación de áreas

De la expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dA}{A},$$

si subdividimos el área en dos partes  $A_1$  y  $A_2$ , podemos escribir

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\int_{A_1} \vec{r} dA + \int_{A_2} \vec{r} dA}{A_1 + A_2} \\&= \frac{A_1 \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \vec{r} dA + A_2 \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \vec{r} dA}{A_1 + A_2} \\&= \frac{A_1 \vec{r}_{CM_1} + A_2 \vec{r}_{CM_2}}{A_1 + A_2},\end{aligned}$$

expresión que permite obtener el centroide de área de combinación de figuras con centroides conocidos.

### 3.6. Resultante de fuerzas paralelas de igual magnitud

Cuando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son todas paralelas, tal como es el caso de la fuerza peso que actúa sobre un conjunto de partículas, entonces la resultante la podemos colocar en cualquiera de esas líneas, siempre y cuando se agregue el correspondiente torque. Por ejemplo para el caso del peso, si  $\hat{j}$  indica la dirección vertical hacia arriba, la resultante del peso colocada en  $O$  será

$$\vec{W} = \sum_i m_i g (-\hat{j}) = -Mg\hat{j}, \quad (3.12)$$

donde  $M$  representa la masa total del sistema  $M = \sum m_i$ . Pero existe además un torque dado por

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times (-m_i g \hat{j}), \\ &= \left( \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) m_i \right) \times (-g \hat{j}), \\ &= \sum_i \vec{r}_i m_i \times (-g \hat{j}) - \sum_i \vec{r}_O m_i \times (-g \hat{j}) \\ &= M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \times (-g \hat{j}). \end{aligned}$$

Note que el torque es nulo si  $\vec{r}_O = \vec{r}_{CM}$ , es decir si la resultante de las fuerzas paralelas se coloca en el centro de masa. De allí que se acostumbra a decir que la resultante de los pesos de las partes de un cuerpo actúa en el centro de masa, pues en ese caso el torque debido a trasladar las fuerzas paralelamente al centro de masa es nulo.

#### 3.6.1. Centro de Fuerzas paralelas

En general todo sistema de fuerzas paralelas actuando sobre un cuerpo rígido es equivalente a la pura resultante de ellas actuando en un punto  $A$  de una línea específica siempre que se agregue el torque de las fuerzas respecto a ese mismo punto, es decir

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum \vec{F}_i, \\ \vec{\Gamma}_A &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}. \end{aligned}$$

El punto  $A$  es arbitrario, pero puede ser conveniente escogerlo de manera que respecto a ese punto el torque de las fuerzas sea nulo. Ese punto, llamado centro de fuerzas, es un punto respecto al cual

$$\vec{\Gamma}_A = 0,$$

o sea

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Si las fuerzas son paralelas, digamos respecto al eje  $OZ$ , entonces las podemos trasladar sobre su línea de acción de manera que queden todas actuando en puntos del plano  $OXY$ . Para determinar  $\vec{r}_A$ , es decir la ubicación de ese punto sobre el plano  $OXY$ , la última ecuación la multiplicamos vectorialmente por  $\vec{F}$  resultando

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \times \vec{F} = (\vec{r}_A \cdot \vec{F})\vec{F} - F^2\vec{r}_A,$$

pero  $\vec{r}_A$  está sobre el plano  $OXY$  y la fuerza sobre el eje  $OZ$  de manera que

$$\vec{r}_A \cdot \vec{F} = 0$$

y se logra despejar

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2}, \quad (3.13)$$

que es la posición del centro de fuerzas, es decir donde se puede considerar actuando la fuerza resultante con torque nulo respecto a ese punto, es decir el sistema de fuerzas se reduce a la resultante de ellas en el centro de fuerzas y nada más. A ese punto lo llamaremos  $\vec{r}_F$  de ahora en adelante.

Debemos remarcar que existe un centro de fuerza exclusivamente si la magnitud de la fuerza resultante no es nula, es decir

$$F \neq 0.$$

y además de  $\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0}$  se deduce que sólo hay solución para  $\vec{r}_A$  si el torque en  $O$  es perpendicular a la fuerza resultante  $\vec{F}$ . Sin embargo no estamos analizando el caso más general, sino cuando todas las fuerzas son paralelas, digamos a la dirección  $\hat{k}$ . Se tiene entonces que

$$\vec{F} = \left( \sum F_i \right) \hat{k},$$

y

$$\vec{\Gamma}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left( \sum F_i \vec{r}_i \right) \times \hat{k},$$

entonces

$$\vec{r}_F = \frac{\hat{k} \times \sum F_i (\vec{r}_i \times \hat{k})}{F} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{F}. \quad (3.14)$$

### 3.6.2. Coordenadas del centro de fuerzas

Como todas las fuerzas son paralela a cierta dirección, digamos  $\hat{k}$  entonces la expresión anterior se simplifica si tomamos todos los  $\vec{r}_i$  en un plano perpendicular al eje  $OZ$  (los puntos de aplicación pueden cambiarse libremente en la dirección  $OZ$ )

$$\vec{r}_F = \frac{\hat{k} \times \sum F_i (\vec{r}_i \times \hat{k})}{F} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{F},$$

que conduce a las coordenadas del centro de fuerza. Si tomamos las componentes  $x$ ,  $y$  obtenemos

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \\ y_F &= \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Note que si las fuerzas  $F_i$  son constantes ( $i = 1, 2, 3 \dots N$ ), lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\sum x_i}{N}, \\ y_F &= \frac{\sum y_i}{N}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

**EJEMPLO 3.6.1** Considere una lámina cuadrada de arista  $a$  sobre el plano  $OXY$ , que está actuada en sus cuatro vértices por fuerzas iguales de magnitud  $F$  en la dirección del eje  $OZ$ . Determine la posición del centro de fuerza. (La respuesta es más que evidente, pero queremos probar la teoría elaborada)

**Solución.** Si un vértice se coloca en el origen y los lados paralelos a los ejes  $OXY$  se tiene con  $\vec{r}_1 = (0, 0)$ ,  $\vec{r}_2 = (0, a)$ ,  $\vec{r}_3 = (a, 0)$ ,  $\vec{r}_4 = (a, a)$

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{a + a}{4} = \frac{a}{2}, \\ y_F &= \frac{a + a}{4} = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

es decir el centro del cuadrado.

**EJEMPLO 3.6.2** Para la misma situación del problema anterior suponga ahora que las magnitudes son  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 2$ ,  $F_3 = 3$ ,  $F_4 = 4$ , determine el centro de fuerza.

**Solución.** Ahora

$$x_F = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{3a + 4a}{10} = \frac{7a}{10}$$

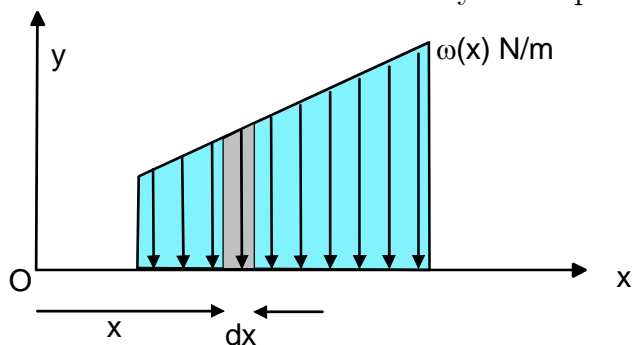
$$y_F = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{2a + 4a}{10} = \frac{6a}{10}.$$

### 3.6.3. Centro de fuerzas distribuidas paralelas

Si se tienen fuerzas distribuidas en forma continua por unidad de longitud, supongamos que verticalmente hacia abajo y actuando sobre una línea horizontal, el eje  $OX$ , entonces la fuerza que actúa en un elemento de longitud  $dx$  en posición  $x$  es

$$dF = w(x)dx.$$

A  $w(x)$  se le llama la densidad lineal de la fuerza y está expresada en  $\text{N m}^{-1}$ .



En el caso de la figura ??, se ha supuesto una fuerza distribuida cuya densidad lineal varía linealmente con la posición. La fuerza total y su centro de fuerza

se puede entonces calcular de acuerdo a la sección anterior como

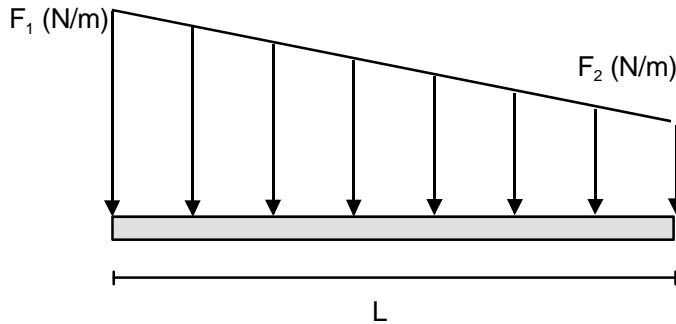
$$x_F = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \rightarrow \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx} = \frac{1}{A} \int x dA = x_C, \quad (3.17)$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \rightarrow \int w(x) dx (-\hat{j}) = -A\hat{j}.$$

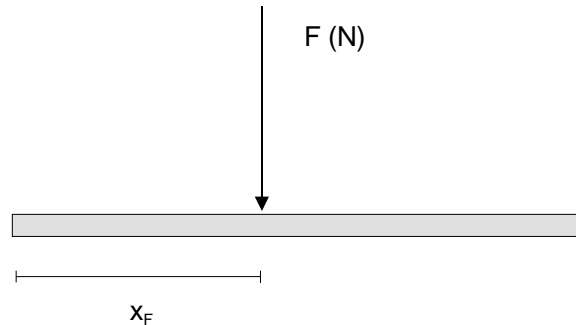
Donde  $A$  representa el “área” de la figura de la distribución de fuerza. Nuevamente nos encontramos con el concepto de integral, detalles que usted puede omitir, pero debe saber el resultado: el centro de fuerzas corresponde al centroide de la figura y la fuerza total es el “área” de la distribución de fuerza. En realidad se calcula como área, pero tiene unidades de fuerza:

$$A = \int w(x) dx.$$

**EJEMPLO 3.6.3** *La figura siguiente ilustra una barra cargada con fuerzas distribuidas linealmente. Se pide un sistema de fuerza equivalente con torque nulo.*



**Solución.**



El cálculo de la fuerza equivalente  $F$  y de la coordenada del centro de fuerza

se hace a continuación. La fuerza resultante es el área de la distribución de Fuerza, es decir

$$F = F_2 L + \frac{1}{2}(F_1 - F_2)L = \frac{1}{2}L(F_2 + F_1).$$

El centroide de la figura lo determinamos según

$$\begin{aligned} x_C &= x_F = \frac{\frac{1}{2}L(F_2 L) + \frac{1}{3}L(\frac{1}{2}(F_1 - F_2)L)}{(F_2 L) + (\frac{1}{2}(F_1 - F_2)L)} \\ &= \frac{1}{3}L \frac{2F_2 + F_1}{F_2 + F_1}. \end{aligned}$$

Note que el caso de un triángulo es un caso particular con  $F_1 = 0$  o  $F_2 = 0$ .



### 3.7. Trabajar con componentes

Aunque la mayor parte del trabajo de desarrollo ha sido hecho con los vectores, en la práctica prueba ser conveniente trabajar con las componentes de los vectores en algún sistema de referencia. Usualmente se utiliza un sistema cartesiano de referencia con ejes  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ . Aunque creemos que todo ha sido explicado en el capítulo de vectores, lo repetimos en parte para fuerzas y torques. Por ejemplo si una fuerza  $\vec{F}$  está en el plano  $OXY$ , y si  $\alpha$  es el ángulo que ella forma con el eje  $OX$  entonces

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j},$$

siendo

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad F_x = |\vec{F}| \cos \alpha, \text{ y } F_y = |\vec{F}| \sin \alpha \\ \vec{F} &= (F_x, F_y) = (|\vec{F}| \cos \alpha, |\vec{F}| \sin \alpha). \end{aligned}$$

Si el punto de aplicación de la fuerza es

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j},$$

entonces el torque de ella respecto al origen será

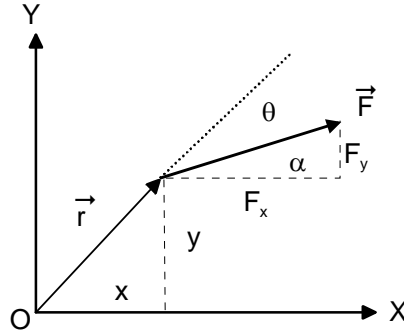
$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (xF_y - yF_x)\hat{k},$$



es decir

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= (x |\vec{F}| \sin \alpha - y |\vec{F}| \cos \alpha) \hat{k} \\ &= |\vec{F}| (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \hat{k}.\end{aligned}$$

La figura siguiente ilustra los diferentes términos involucrados.



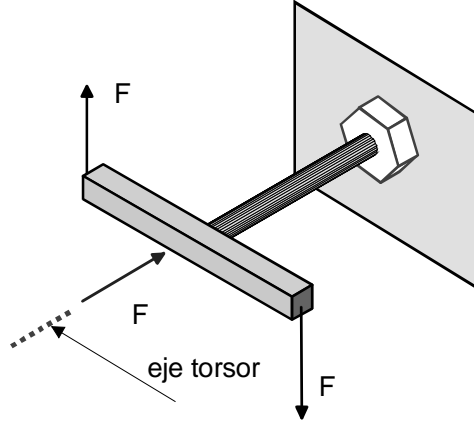
De todas maneras el producto cruz es posible realizarlo más fácilmente si se conoce el ángulo  $\theta$  entre el vector del punto de aplicación y la fuerza de la forma

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta (-\hat{k}),$$

donde el sentido se obtiene usando la regla de la mano derecha, es decir hacia adentro del papel.

### 3.7.1. Eje torsor

Como hemos visto, todo sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido es equivalente a la resultante vectorial de todas las fuerzas que actúan en un punto arbitrario  $O$  más el torque de todas las fuerzas respecto a ese punto. ¿Podemos elegir algún punto tal que la resultante de todas las fuerzas y el torque sean paralelos? Un caso simple que ilustra con claridad la existencia de un eje torsor es el que ilustra la figura, donde mediante una “llave” se aprieta una tuerca



Analicemos esta posibilidad de un punto de vista matemático. Sea en el origen o simplemente en un punto  $O$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum \vec{F}_i, \\ \vec{\Gamma}_O &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.\end{aligned}$$

Entonces en otro punto  $A$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_A &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \\ \vec{F} &= \sum \vec{F}_i.\end{aligned}$$

Para que el torque y la resultante sean paralelas debe ser

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \lambda \vec{F},$$

Si esta igualdad la multiplicamos  $\times \vec{F}$  resultará

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} - (\vec{r}_A \times \vec{F}) \times \vec{F} = \vec{0},$$

y haciendo uso de la identidad

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

podemos escribir

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} = (\vec{r}_A \cdot \vec{F})\vec{F} - |\vec{F}|^2 \vec{r}_A,$$

de donde, si  $|\vec{F}| \neq 0$ , podemos despejar una solución

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{|\vec{F}|^2}$$

Esto es, en el punto  $A$  el torque y la fuerza resultante son paralelas. La recta que pasa por  $A$  y es paralela a la fuerza resultante (y al torque) se denomina eje tursor. En algunas situaciones simples puede resultar que el torque en  $A$  sea nulo, pero no importa, un vector nulo es paralelo a cualquier vector. Como en estos casos el torque es nulo, el eje tursor pasa por lo que se denomina centro de fuerza.

**EJEMPLO 3.7.1** *Considere un cuerpo sometido a fuerzas de manera que en el punto  $O$  la resultante de las fuerzas sea*

$$\vec{F} = F\hat{k},$$

*y el torque respecto al punto  $O$  sea*

$$\vec{\Gamma}_O = \tau\hat{i} + \tau\hat{k},$$

*que evidentemente no son paralelos. Según nuestra fórmula, la posición del eje tursor resulta ser*

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{\hat{k} \times \tau\hat{i}}{F} = \frac{\tau}{F}\hat{j}.$$

*Si creemos en el resultado, en ese punto deben ser la fuerza resultante y el torque paralelos. Si aún no lo cree, verifiquemos. El en punto  $A$  actuará la fuerza*

$$\vec{F} = F\hat{k},$$

*y al torque en  $O$  hay que agregarle el torque producido al correr la fuerza, es decir*

$$\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O + (-\vec{r}_A \times \vec{F}),$$

*que se calcula y resulta*

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_A &= \tau\hat{i} + \tau\hat{k} + \left(-\frac{\tau}{F}\hat{j}\right) \times F\hat{k} \\ &= \tau\hat{i} + \tau\hat{k} - \tau\hat{i} = \tau\hat{k},\end{aligned}$$

*justamente paralelo a la fuerza.*

Notemos que a pesar de que las ecuaciones que determinan el centro de fuerza y el eje tursor son idénticas, hay una diferencia. Para la determinación del centro de fuerzas las fuerzas  $\vec{F}_i$  son todas paralelas, a diferencia del caso en que se calcula el eje tursor, donde se consideran el torque y la fuerza resultante dadas arbitrariamente en un punto. Para clarificar este punto considere el ejemplo:

**EJEMPLO 3.7.2** *Considere dos fuerzas iguales de magnitud  $F$  actuando perpendicularmente en los extremos de una barra de longitud  $2a$ . Determine el centro de fuerza y el eje tursor.*

**Solución.** Sea  $OZ$  la dirección de la fuerza,  $OY$  la dirección de la barra, tenemos entonces que

$$\vec{F} = 2F\hat{k},$$

y si el origen está en un extremo

$$\vec{\Gamma}_O = 2a\hat{j} \times F\hat{k} = 2aF\hat{i},$$

de donde

$$\vec{r}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{2F\hat{k} \times 2aF\hat{i}}{4F^2} = a\hat{j},$$

el centro de la barra. Si se calcula la posición del eje tursor, obtenemos la misma respuesta. Evidentemente como el torque es nulo respecto al centro de fuerza, él es paralelo a la fuerza. En el caso en que la fuerza resultante y el torque sean dados en un punto, podremos calcular el eje tursor solamente pero no el centro de fuerza, porque no hay razón para suponer que las fuerzas eran todas paralelas.



**EJEMPLO 3.7.3** *Considere una fuerza  $\vec{F}_1 = F(-1, 0, 0)$  actuando en el punto  $(0, 0, 0)$  y otra fuerza  $\vec{F}_2 = F(0, 0, -1)$  actuando en el punto  $A = (a, a, 0)$ , determine el eje tursor*

**Solución.** Aquí, llamaremos  $T$  al punto por donde pasa el eje tursor

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F(-1, 0, -1),$$

calculando resulta

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= aF(1, 1, 0) \times (0, 0, -1) = aF(-1, 1, 0) \\ \vec{r}_T &= \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{a}{2}(1, 1, -1)\end{aligned}$$

Para verificar calculamos el torque de las fuerzas respecto al punto  $T$  resultará

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_T &= -\frac{aF}{2}(1, 1, -1) \times (-1, 0, 0) + aF\left((1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, -1)\right) \times (0, 0, -1) \\ &= aF\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{aF}{2}(-1, 0, -1),\end{aligned}$$

paralelo a la fuerza resultante. Si buscamos el centro de fuerza ahora no podemos utilizar la relación establecida anteriormente porque las fuerzas no son paralelas. Deberíamos resolver la ecuación

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0},$$

pero evidentemente esta ecuación sólo puede tener solución para  $\vec{r}_A$  si el torque y la fuerza son perpendiculares, lo cual en este caso no se cumple de porque  $\vec{\Gamma}_O = aF(-1, 1, 0)$  y  $\vec{F} = F(-1, 0, -1)$  de manera que

$$\vec{\Gamma}_O \cdot \vec{F} = aF^2(-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, -1) = aF^2 \neq 0.$$

Es decir este sistema de dos fuerzas no tiene centro de fuerza.

---

### 3.8. De actualidad (no pertenece al programa)

A comienzos del siglo 20, se comprendían más o menos bien dos fuerzas fundamentales. La fuerza gravitacional que de acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton, es inversa al cuadrado de la distancia entre los cuerpos, proporcional al producto de las masas de los cuerpos y se manifiesta en forma instantánea cualquiera que sea la distancia entre los cuerpos. Por otro lado, después de un extenso trabajo en parte experimental y en parte teórico desarrollado por numerosos físicos, a lo largo de un periodo de alrededor de doscientos años después de la invención de la pila de Volta, se culminó con la segunda gran unificación de la Física. La teoría electromagnética que explica mediante una simple teoría todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. El desarrollo de la teoría electromagnética proporcionó las herramientas necesarias para investigar la estructura atómica de la materia y allí se producirían muchas otras novedades.

La contribución de Albert Einstein durante ese periodo es notable. La observación experimental de que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad del observador, le permite desarrollar una hermosa teoría conocida como la teoría de la Relatividad especial. Ello obliga a cambiar las leyes de Newton en el ámbito de velocidades altas. También obliga a descartar el concepto de tiempo absoluto de Newton reemplazándolo por el concepto de espacio tiempo, donde no sólo el espacio es relativo, sino que el tiempo también. El principio de equivalencia que es el reflejo de que todos los cuerpos aceleren de igual forma en un campo gravitacional además del conocido defecto de la teoría de la gravitación Universal de que es instantánea, le permite desarrollar una nueva teoría de la gravitación. En esta teoría realmente la fuerza gravitacional deje de ser una fuerza que actúa a distancia. La materia deforma la estructura del espacio tiempo en forma dinámica y los cuerpos se mueven de acuerdo a esa curvatura. Las ecuaciones son complicadas pero ese es el concepto.

Después de mucho éxitos, Einstein intentó su teoría final, la teoría del campo unificado. Describir mediante una teoría la gravitación y el electromagnetismo. A pesar de sus intentos falló.

Se cree que Einstein fracasó en su intento, por no haber creído en una nueva teoría que surge. La mecánica cuántica. El gran desarrollo de la tecnología debido al desarrollo de la teoría electromagnética, permite investigar lo que sucede en el mundo atómico. Se descubren el electrón, el protón, el neutrón. Se producen enormes avances en la electrónica y en la comprensión de la estructura atómica.

El mundo atómico, mostró comportarse de una manera completamente diferente a lo estudiado por la física clásica. Numerosos físicos culminan desarrollando una nueva teoría que explica maravillosamente bien, hasta nuestros días, todo lo que acontece en el mundo atómico. La Mecánica Cuántica. Una característica de esta teoría no gustó a Einstein. La teoría indica que a un cierto estado inicial e idénticas condiciones del entorno, existen varios futuros posibles y la teoría no permite saber cual ocurrirá. Sólo son calculables las probabilidades de esos futuros. A esto se le denomina "pérdida del determinismo clásico".

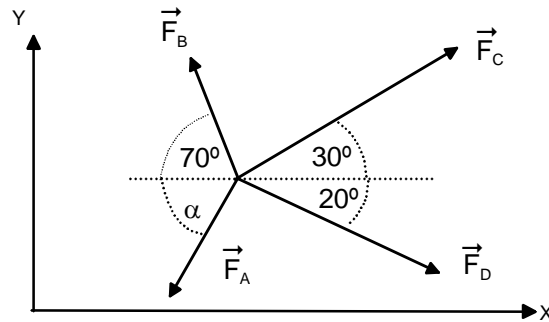
También se descubrieron otras dos fuerzas cuya explicación y descripción sólo es posible hacer mediante la Mecánica Cuántica. Estas son la fuerza débil, culpable de la radioactividad (radiación beta) y la nuclear, responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos. La teoría electromagnética fue también incorporada a la descripción cuántica,

quedando la fuerza gravitacional solamente fuera de este cuadro. Es entonces aparente que la unificación de las fuerzas se podría lograr con los procedimientos de la Mecánica Cuántica. En cierta medida esto se ha logrado. La teoría electro-débil, permite unificar la fuerza electromagnética y la fuerza débil. En esta formulación cuántica de las fuerzas, las fuerzas se manifiestan realmente intercambiando partículas llamadas partículas mediadoras de la fuerza. No es raro entonces que Einstein no lograra su teoría de Unificación. El llamado modelo estándar unifica las tres fuerzas, electromagnética, débil y nuclear, quedando fuera la fuerza gravitacional. De paso mencionamos que esta es normalmente la fuerza más débil de todas y tiene, normalmente, un efecto despreciable en el mundo microscópico.

Hoy, a pesar de todos los esfuerzos realizados, no se ha podido satisfactoriamente construir una teoría que unifique las cuatro fuerzas. Hay dos situaciones por lo menos donde tal unificación es necesaria para explicar lo que ocurre. Se trata de situaciones que involucran un tamaño microscópico y una enorme fuerza gravitacional. El instante inicial (Big Bang) y los agujeros negros, estrellas de tamaño microscópico con un enorme campo gravitacional (o enorme curvatura del espacio tiempo).

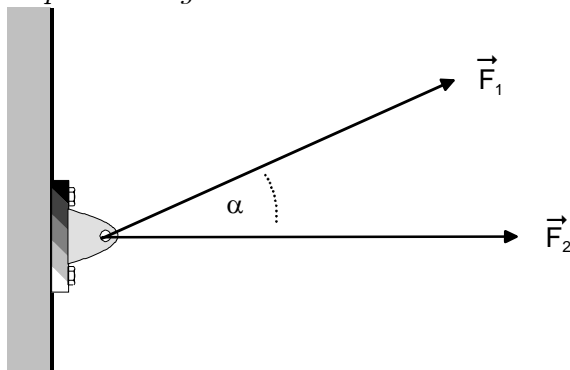
### 3.9. Ejercicios

**EJERCICIO 3.1** Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas en la figura tienen una resultante igual a cero. Si  $|\vec{F}_B| = 800 \text{ N}$ ,  $|\vec{F}_C| = 1000 \text{ N}$  y  $|\vec{F}_D| = 800 \text{ N}$  determine la magnitud de  $\vec{F}_A$  y el ángulo  $\alpha$ .

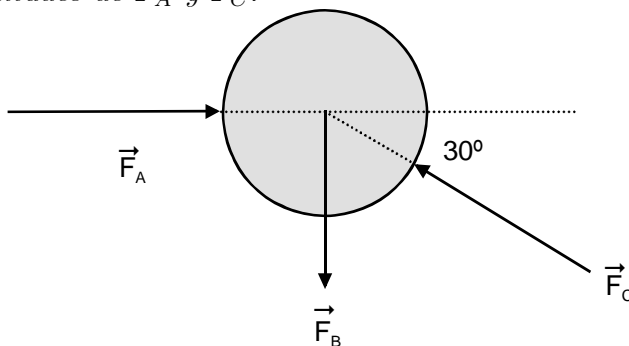


**EJERCICIO 3.2** Las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el soporte son, figura,  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100 \text{ N}$ . El soporte fallará si la magnitud de la

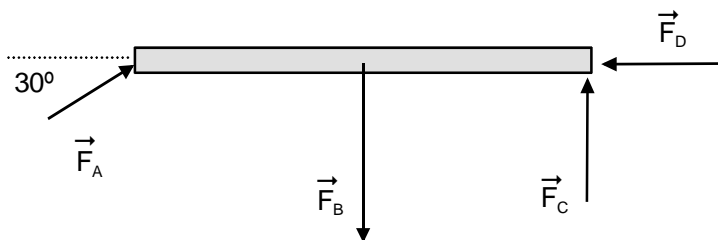
fuerza resultante que actúa sobre él excede 150 N. Determine el intervalo de valores aceptables para el ángulo  $\alpha$ .



**EJERCICIO 3.3** Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada en la figura. La magnitud de  $\vec{F}_B$  es de 60 N y la resultante de las tres es igual a cero. Determine las magnitudes de  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_C$ .

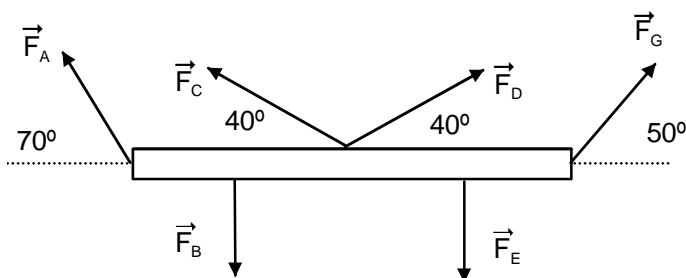


**EJERCICIO 3.4** Cuatro fuerzas actúan sobre una viga como se indica en la figura. La resultante de las cuatro fuerzas es cero y además  $|\vec{F}_B| = 10000$  N,  $|\vec{F}_C| = 5000$  N. Determine las magnitudes de  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_D$ .

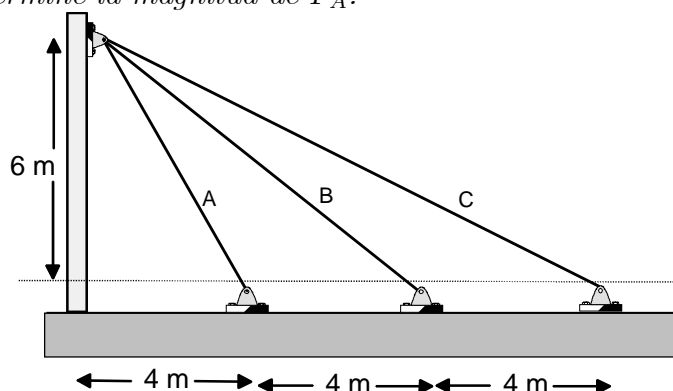




EJERCICIO 3.5 Seis fuerzas actúan sobre una viga que forma parte de la estructura de un edificio, como se indica en la figura, en los extremos, punto medio y a un cuarto de la longitud de la viga. Se sabe que la resultante de todas ellas es cero y que  $|\vec{F}_B| = |\vec{F}_E| = 5 \text{ kN}$ ,  $|\vec{F}_C| = 4 \text{ kN}$ ,  $|\vec{F}_D| = 2 \text{ kN}$ . Determine las magnitudes de  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_G$ .



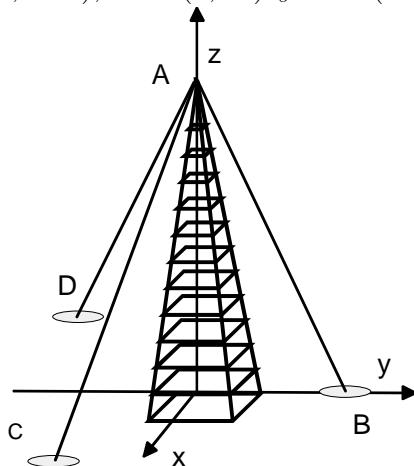
EJERCICIO 3.6 Los cables A, B y C, figura, ayudan a soportar una columna de una estructura. Las magnitudes de las tensiones en los cables son iguales  $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = |\vec{F}_C|$  y se sabe además que la magnitud de la resultantes es 200 kN. Determine la magnitud de  $\vec{F}_A$ .



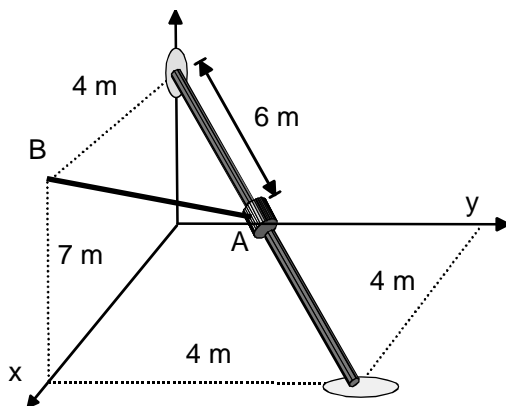
EJERCICIO 3.7 Se tiene una fuerza  $\vec{F} = 600\hat{i} - 700\hat{j} + 600\hat{k} \text{ N}$ . Determine los ángulos entre el vector  $\vec{F}$  y los ejes coordenados positivos.

EJERCICIO 3.8 La torre de 70 m de altura que se muestra en la figura está soportada por tres cables que ejercen sobre ella las fuerzas  $\vec{F}_{AB}$ ,  $\vec{F}_{AC}$  y  $\vec{F}_{AD}$ .

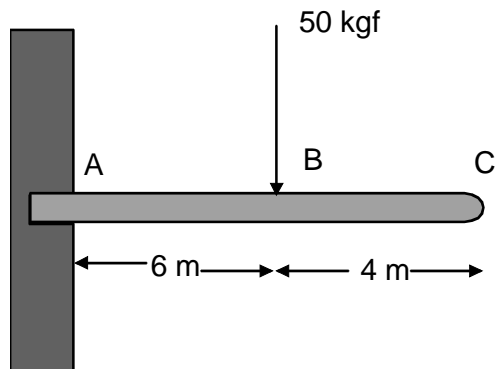
La magnitud de cada una de esas fuerzas es de 2 kN. Expresar vectorialmente la fuerza resultante ejercida por los cables sobre la torre. Las coordenadas de los apoyos son  $C = (40, -40)$ ,  $B = (0, 40)$  y  $D = (-60, -60)$ .



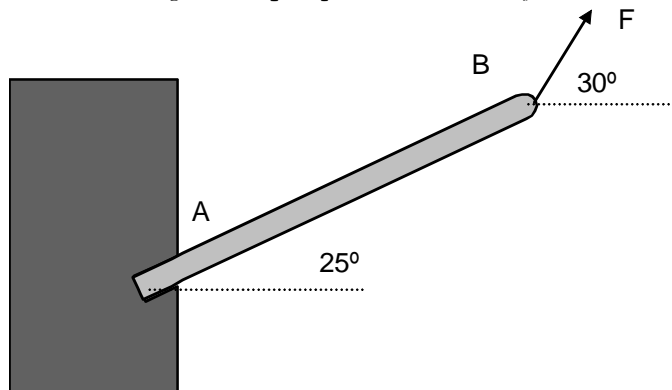
EJERCICIO 3.9 El cable  $AB$  mostrado en la figura ejerce una tensión de magnitud 32 N sobre el collarín en  $A$ . Expresar vectorialmente la fuerza de tensión  $\vec{T}$ .



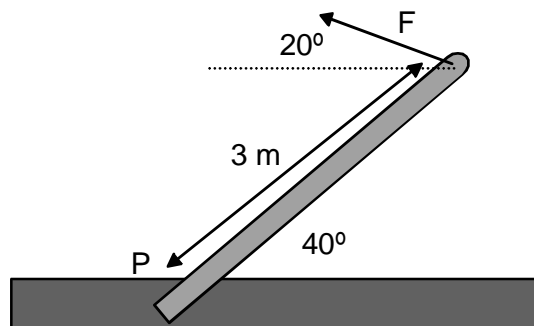
EJERCICIO 3.10 Determine el torque de la fuerza de 50 kgf respecto a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la figura.



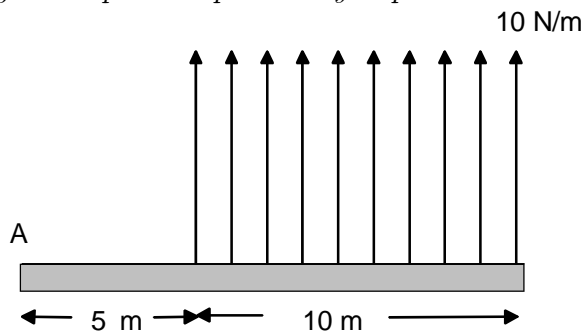
EJERCICIO 3.11 En la figura, la viga AB de 5 m de longitud fallará si el torque de la fuerza respecto al punto A excede de  $10 \text{ Nm}$ . Con esa condición determine la máxima magnitud que puede tener la fuerza.



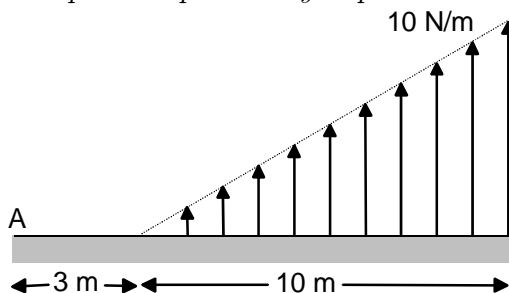
EJERCICIO 3.12 De acuerdo a la figura, determine el torque de la fuerza de  $80 \text{ N}$  respecto al punto P.



EJERCICIO 3.13 Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto A y la posición de su centro de fuerza.



EJERCICIO 3.14 Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto A y la posición de su centro de fuerza.



**Solución.** El “área” del triángulo es  $A = \frac{1}{2}(10 \times 10) = 50$  N, su centroide está a  $\frac{2}{3}10$  m del vértice izquierdo y luego el torque respecto al punto A tiene magnitud

$$\tau_A = \left(3 + \frac{2}{3}10\right)50 = \frac{1450}{3} \text{ N m.}$$



## CAPÍTULO 4

# Fuerzas y equilibrio

La estática determina las condiciones bajo las cuales un cuerpo actuado por diversas fuerzas permanece en equilibrio, es decir en reposo. El desarrollo de la estática viene desde mucho tiempo atrás, mucho antes del desarrollo de la dinámica. Algunos de sus principios fueron formulados por los egipcios y los babilónicos en problemas relacionados con la construcción de las pirámides y de templos. Entre los más antiguos escritos sobre este tema se puede mencionar a Arquímedes quién formuló los principios del equilibrio de fuerzas actuando en palancas y algunos principios de la hidrostática. Por estas razones no creemos conveniente considerar a la estática como un caso particular de la dinámica.

La principal razón para que desarrollo de la dinámica fuera posterior, está directamente relacionada con el desarrollo de los métodos para medir el tiempo, es decir del desarrollo de los relojes.

Generalmente ocurre algo similar. Un avance en una teoría permite la construcción de nuevos aparatos de medición que a su vez ayudan a perfeccionar la teoría y así sucesivamente. El desarrollo de nuevas tecnologías permite el avance en las teorías y recíprocamente. ¿Qué fue primero?. Nuestra posición es que lo primero es la observación del mundo natural mediante los instrumentos naturales básicos, nuestros sentidos.

## 4.1. Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática

### 4.1.1. Equilibrio de una partícula

La condición necesaria y suficiente para que una partícula permanezca en equilibrio (en reposo) es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella sea cero

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Naturalmente con esta condición la partícula podría también moverse con velocidad constante, pero si está inicialmente en reposo la anterior es una condición necesaria y suficiente.

### 4.1.2. De un sistema de partículas

Para que un sistema de partículas permanezca en equilibrio, cada una de sus partículas debe permanecer en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son, en parte de interacción  $\vec{f}_{ij}$  con las otras partículas del sistema y en parte proveniente del exterior  $\vec{F}_i^{ext}$ , es decir

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \quad (4.2)$$

Aquí  $\vec{f}_{ij}$  representa la fuerza que la partícula  $j$  ejerce sobre la partícula  $i$ . Pero las fuerzas de interacción satisfacen la tercera ley de Newton, ley llamada de acción y reacción que dice

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}, \quad (4.3)$$

además que  $\vec{f}_{ij}$  es paralela a la línea que une las partículas  $i$  con  $j$

$$\vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{0}. \quad (4.4)$$

De este modo un sistema de partículas está en equilibrio si

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}, \text{ para todo } i.$$

En otras palabras la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula debe ser nula.

### 4.1.3. Cuerpo rígido

En el desarrollo de la estática consideraremos situaciones de equilibrio de cuerpos rígidos, es decir que no se deforman. En rigor no existen cuerpos indeformables, de manera que la aplicación de las leyes de la estática es una aproximación que es buena si las deformaciones son despreciables frente a otras dimensiones del problema. El tema de la estática de cuerpos deformable es el tema de otros cursos.

Si el cuerpo rígido permanece en equilibrio con el sistema de fuerzas exteriores aplicado, entonces para que todas las partículas estén en equilibrio es suficiente que tres de sus partículas no colineales estén en equilibrio. Las demás no pueden moverse por tratarse de un cuerpo rígido. Las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido permanece en equilibrio son que la fuerza externa resultante y el torque externo resultante respecto a un origen arbitrario son nulos, es decir

$$\vec{F}^{ext} = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\Gamma}_O^{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.6)$$

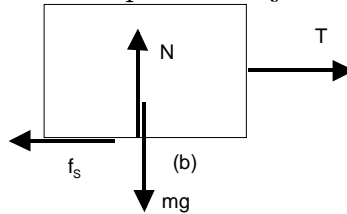
siendo  $O$  un punto arbitrario. De acuerdo a

$$\vec{\Gamma}_A = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \quad (4.7)$$

se constata que entonces el torque resultante es cero respecto a cualquier punto.

### 4.1.4. La fuerza de roce estática

Cuando los cuerpos están en equilibrio, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática  $f_s$ . En la figura siguiente se ilustra lo que acontece cuando un cuerpo permanece en equilibrio bajo el sistema de fuerzas indicado



La resultante de las fuerzas en el sentido horizontal y vertical debe ser nula,

entonces

$$\begin{aligned} T - f_S &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f_S &= T, \\ N &= mg. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Es decir, la fuerza de roce permanece igual a la fuerza aplicada de tensión. Pero eso tiene un límite, La fuerza de roce estática puede aumentar hasta un límite, el cual depende de la naturaleza de las superficies en contacto a través de un coeficiente  $\mu_S$  llamado coeficiente de roce estático, y del grado en que las superficies estén apretadas entre sí, esto es ese valor máximo es proporcional a la componente normal de la fuerza  $N$ . En este modelo entonces

$$f_S^{\text{máx}} = \mu_S N, \tag{4.9}$$

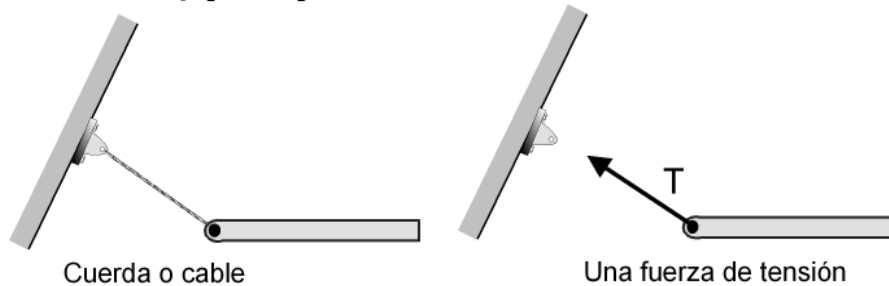
siendo entonces

$$f_S \leq \mu_S N. \tag{4.10}$$

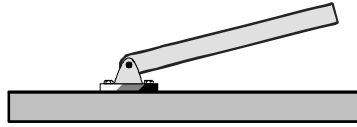
Si la fuerza aplicada  $T$  iguala a ese valor máximo se dice que el cuerpo está en equilibrio límite o bien a punto de resbalar. Para fuerzas aplicadas mayores el cuerpo se pondrá en movimiento acelerado, tema que será estudiado en el capítulo de dinámica.

#### 4.1.5. Fuerzas causadas por ciertos soportes

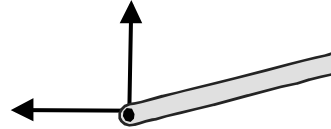
Es conveniente analizar en forma más o menos sistemática las fuerzas que causadas por ciertos tipos de soportes, cuerdas, resortes, empotraduras, articulaciones y otros, donde en las figuras que siguen se ilustran las componentes de fuerzas y pares que ellos causan.



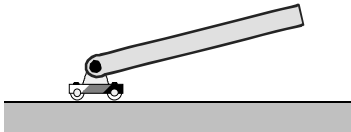




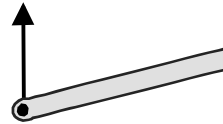
soporte de pasador



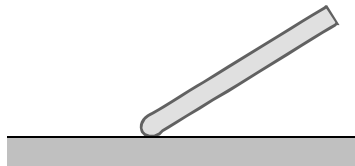
dos componentes de fuerzas



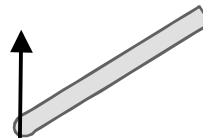
soporte de rodillo



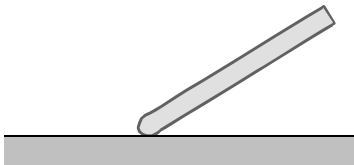
una componente de fuerza



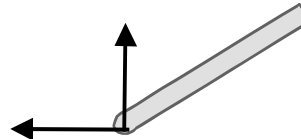
contacto con superficie lisa



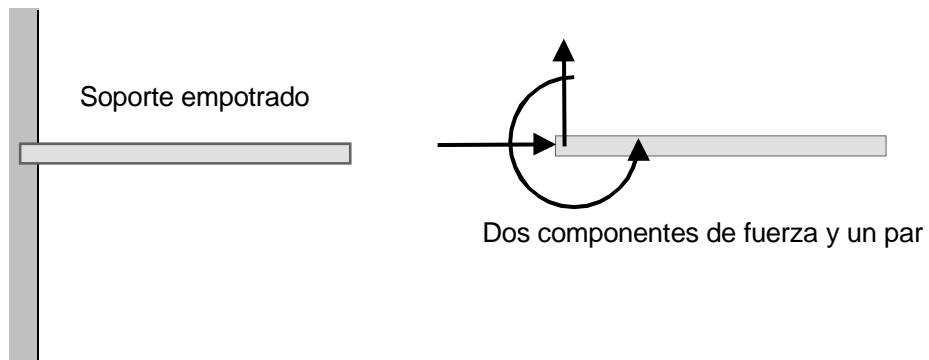
Una fuerza normal



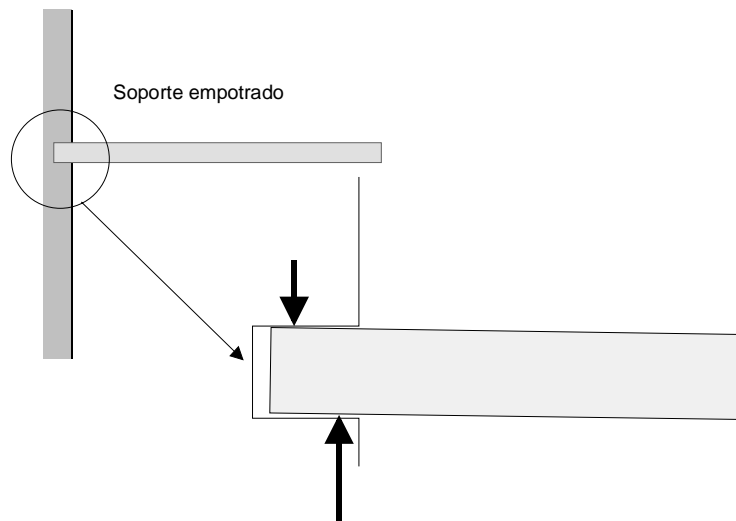
contacto con superficie rugosa



Una fuerza normal y una fuerza de roce

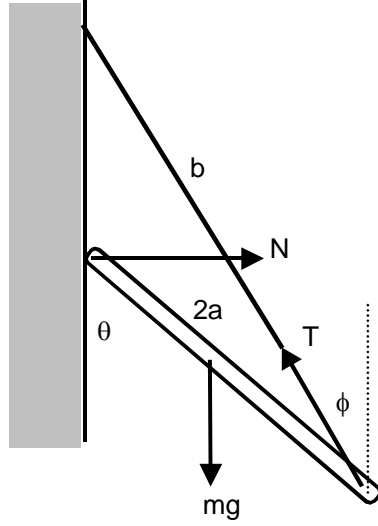


El origen del par se puede explicar de acuerdo a la figura que sigue donde en general se puede pensar que las reacciones verticales en la empotradura son dos, de diferente magnitud y, lo que es más importante, no están sobre la misma línea. Para sumarlas, es necesario trasladar una a la línea de acción de la otra y eso causa el denominado par de la fuerza.



## 4.2. Ejemplos

**EJEMPLO 4.2.1** La barra de la figura de masa  $m$  y largo  $2a$  está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo  $b$ . Determine los posibles ángulos  $\theta$  de equilibrio.



**Solución.** Tenemos

$$\begin{aligned} N - T \sin \phi &= 0, \\ T \cos \phi - mg &= 0, \\ mga \sin \theta - T2a \sin(\theta - \phi) &= 0, \end{aligned}$$

además de una relación geométrica

$$\sin \phi = \frac{2a}{b} \sin \theta.$$

De la segunda y la tercera

$$\sin \theta - 2 \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos \phi} = 0,$$

$$\begin{aligned} -\sin \theta \cos \phi + 2 \cos \theta \sin \phi &= 0, \\ \sin \theta \cos \phi &= 2 \cos \theta \frac{2a}{b} \sin \theta \end{aligned}$$

de donde una solución es  $\sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \theta = \pi$ . La otra sigue de

$$\cos \phi = \frac{4a}{b} \cos \theta,$$

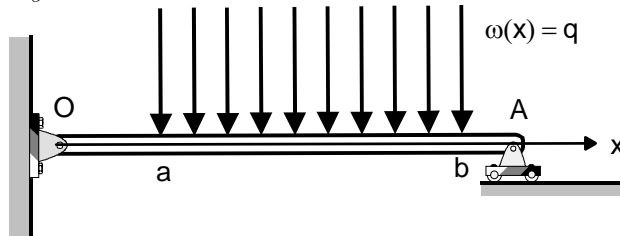
eliminando  $\phi$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4a^2}{b^2} \sin^2 \theta + \frac{16a^2}{b^2} \cos^2 \theta, \\ 1 - \frac{4a^2}{b^2} &= \frac{12a^2}{b^2} \cos^2 \theta, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{b^2 - 4a^2}{12a^2}}, \end{aligned}$$

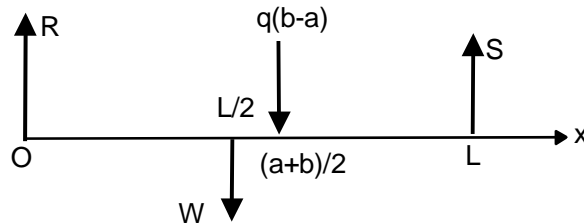
esta solución existe si  $b > 2a$  y

$$\begin{aligned} b^2 - 4a^2 &< 12a^2, \\ b &< 4a. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4.2.2** La barra de la figura de longitud  $L$  está articulada en  $O$ , apoyada en  $A$ , tiene un peso total  $W$  y está cargada por una fuerza distribuida uniforme de magnitud  $w(x) = q \text{ N m}^{-1}$  desde  $a$  hasta  $b$ . Determine las reacciones en  $O$  y en  $A$ .



**Solución.** El sistema equivalente de fuerzas es como en la figura siguiente



de modo que tenemos

$$\sum F_y = R + S - W - q(b - a) = 0$$

y momentando respecto a  $O$

$$\sum \Gamma_O = SL - W\frac{L}{2} - q(b-a)\frac{a+b}{2} = 0,$$

de donde despejamos

$$S = \frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L},$$

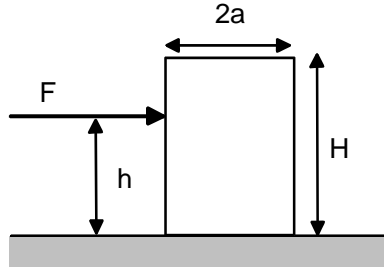
y de la primera

$$\begin{aligned} R &= W + q(b-a) - \left(\frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L}\right), \\ &= \frac{W}{2} + q(b-a)\left(1 - \frac{a+b}{2L}\right). \end{aligned}$$

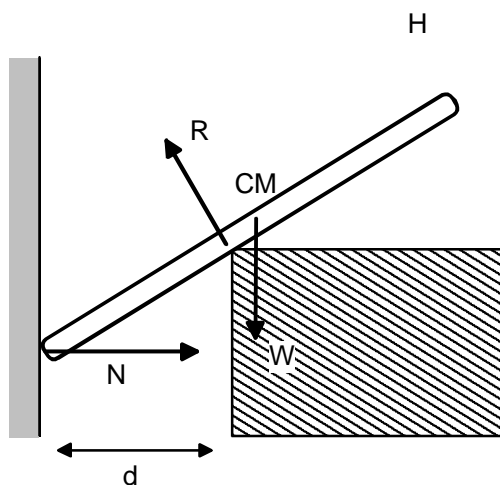


### 4.3. Ejercicios

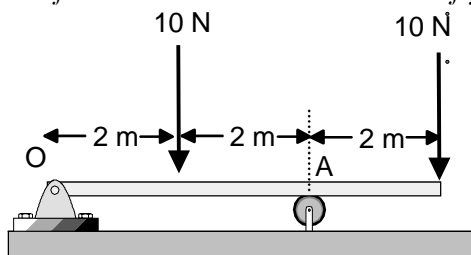
**EJERCICIO 4.1** *Un cuerpo homogéneo de masa  $M$  altura  $H$  y base de largo  $2a$ , es empujado por una fuerza horizontal  $F$  aplicada en un costado a la altura  $h$  del suelo. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y el cuerpo es  $\mu_S$ , determine la condición para que al romperse el equilibrio debido al aumento de  $F$  el cuerpo deslice o vuelque.*



**EJERCICIO 4.2** *Una barra de masa  $M$  y de largo  $L$  se equilibra como se indica en la figura. No hay roce. Determine el ángulo que hace la barra con la horizontal cuando hay equilibrio.*

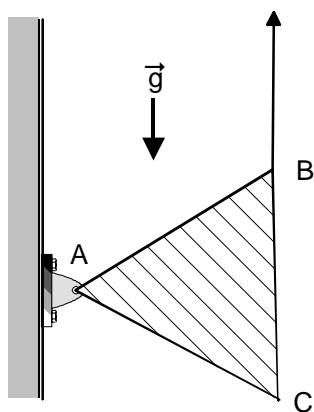


EJERCICIO 4.3 Una barra de largo  $L = 6\text{ m}$  y de peso  $W = 20\text{ N}$  está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo  $O$ , apoyada en un soporte liso en  $A$  y cargada por dos fuerzas como se indica en la figura

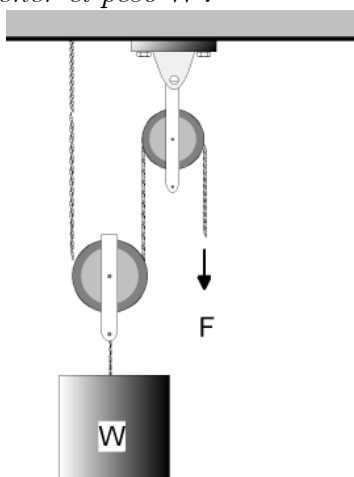


- Determine la reacción vertical en la articulación.
- Determine la reacción vertical en el soporte.

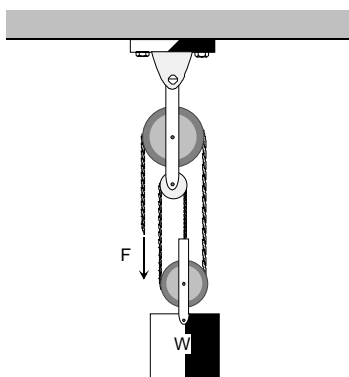
EJERCICIO 4.4 Una lámina de peso  $W$  en forma de triángulo equilátero de lado  $a$ , puede moverse en un plano vertical estando el vértice  $A$  articulado a un punto fijo. Si al vértice  $C$  se le aplica una fuerza vertical hacia arriba de magnitud  $F$ , determine el ángulo  $\theta$  que hace la arista  $AC$  con la vertical en la situación de equilibrio.



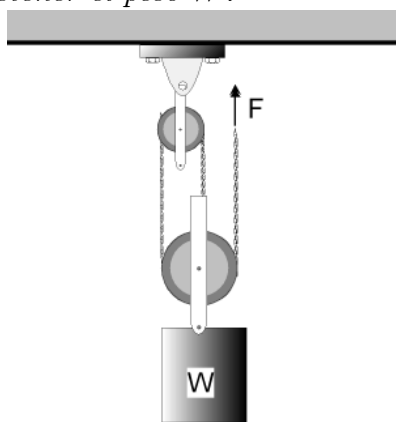
EJERCICIO 4.5 Considere el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza  $F$  necesaria para sostener el peso  $W$ .



EJERCICIO 4.6 Para el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza  $F$  necesaria para sostener el peso  $W$ .

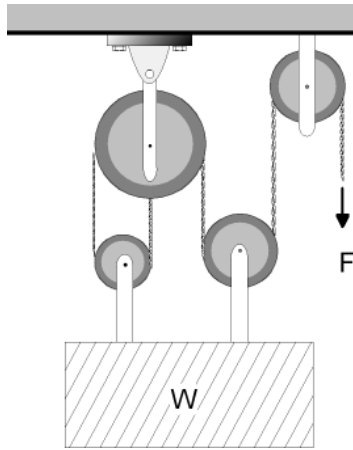


EJERCICIO 4.7 Para el sistema de la figura, no hay roce. Determine la fuerza  $F$  necesaria para sostener el peso  $W$ .



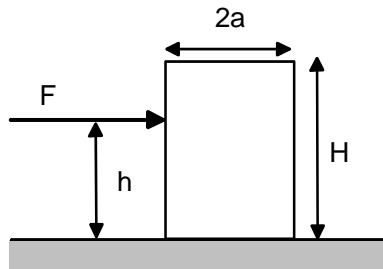
EJERCICIO 4.8 En el sistema indicado en la figura, no hay roce y las poleas son livianas. Determine la magnitud de la fuerza  $F$  necesaria para sostener el peso  $W$ .



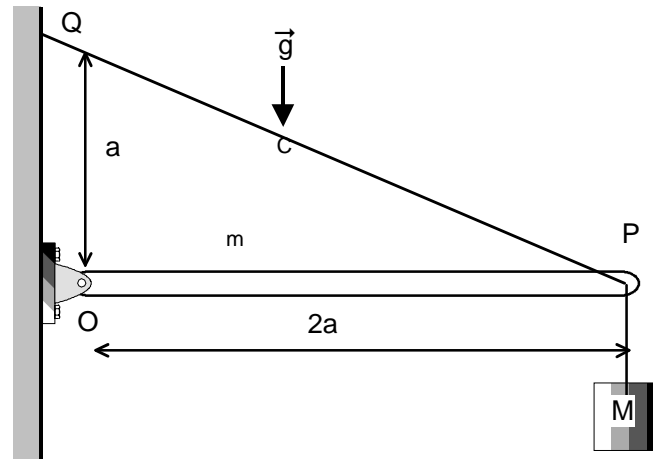


EJERCICIO 4.9 Tres esferas iguales de radio  $R$  están sobre un plano horizontal suave, en contacto entre ellas de modo que sus centros forman un triángulo equilátero de arista  $2R$ . A la altura de un radio, el conjunto se abraza por una cuerda inextensible que las sostiene. Una cuarta esfera se coloca sobre el centro del conjunto. Determine la tensión que se desarrolla en la cuerda.

EJERCICIO 4.10 El bloque de la figura tiene masa  $M$  y el coeficiente de roce estático con el suelo es  $\mu_s = 0,5$ , las longitudes indicadas son  $2a = 1\text{ m}$ ,  $H = 2\text{ m}$ ,  $h = 1,5\text{ m}$ . Determine qué sucede al aumentar la fuerza aplicada  $F$ .

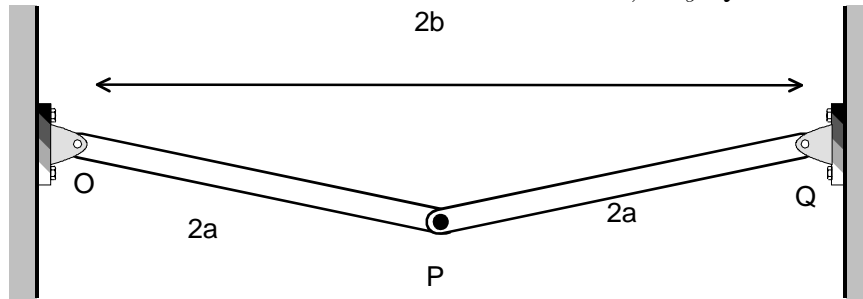


EJERCICIO 4.11 La barra  $OP$  de masa  $m$  y largo  $2a$  está articulada en un punto fijo  $O$ , sostenida por una cuerda amarrada al punto fijo  $Q$  a distancia  $a$  de  $O$ , y al extremo  $P$  de la barra, como se indica en la figura. En el extremo  $P$ , cuelga una masa  $M$ .

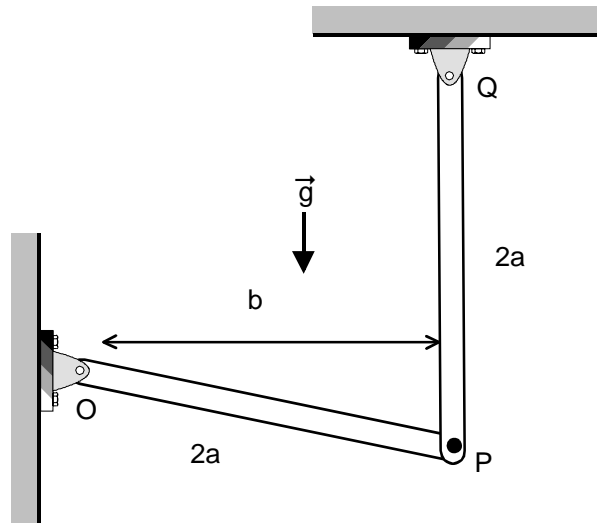


Determine la tensión en la cuerda  $QP$  y la reacción en  $O$ .

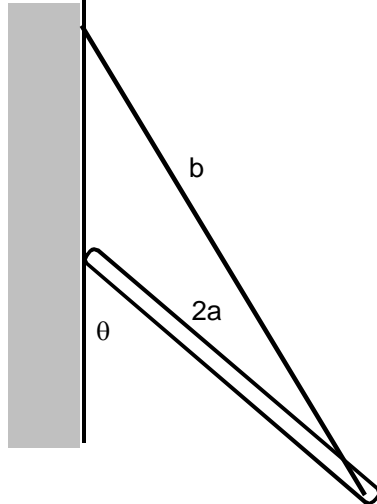
EJERCICIO 4.12 Dos barras de masa  $M$  y largo  $2a$  están articuladas en puntos fijos  $O$  y  $Q$  separados una distancia  $2b$  a la vez que están articuladas en  $P$ . Determine las reacciones en las articulaciones  $O$ ,  $P$  y  $Q$ .



EJERCICIO 4.13 Dos barras de masa  $M$  y largo  $2a$  están articuladas en puntos fijos  $O$  y  $Q$  a la vez que están articuladas entre sí en  $P$ , como se indica en la figura. Determine las reacciones en  $O$  y en  $Q$ .

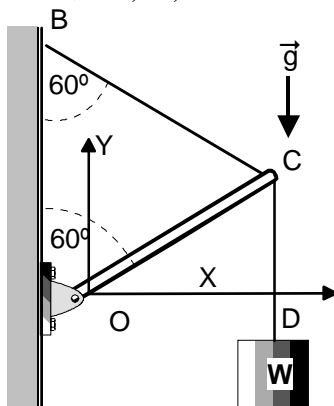


EJERCICIO 4.14 La barra de la figura de masa  $M$  y largo  $2a$  está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo  $b$ . Determine los posibles ángulos  $\theta$  de equilibrio.

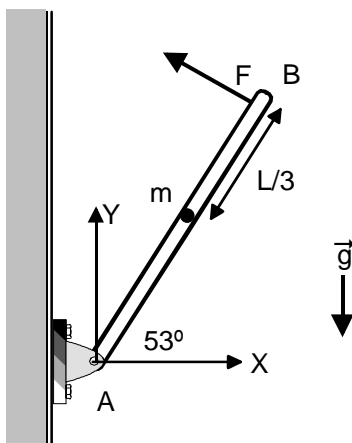


EJERCICIO 4.15 La figura muestra una barra homogénea  $OC$  de largo  $L = 1\text{ m}$  y masa  $M = 12\text{ kg}$ , pivoteada en  $O$  y en el otro extremo ligada a una cuerda  $BC$ . En el extremo  $C$  de la barra cuelga un peso  $W = 60\text{ N}$  por medio de una cuerda  $CD$ . Determinar (a) La tensión en la cuerda  $CD$ . (b) La

tensión en la cuerda  $BC$ . (c) La reacción  $\vec{R}$  en el extremo  $O$  de la barra. ( $R$ : (a) 60 N, (b) 120 N, (c) (103,9; 120) N)

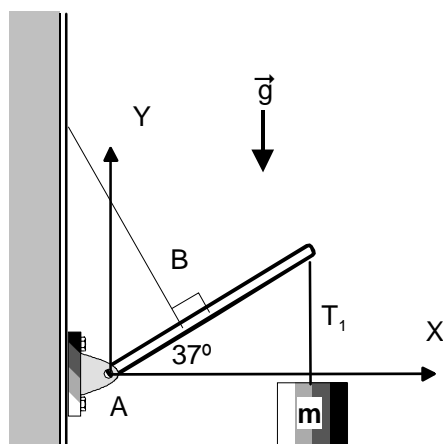


EJERCICIO 4.16 La figura muestra una barra delgada y homogénea  $AB$  de largo  $L = 2\text{ m}$  y de masa  $M = 12\text{ kg}$ , la cual se encuentra pivotada (articulada) en el extremo  $A$ . Sobre la barra en el punto  $C$ , se encuentra adherida una partícula de masa  $m = 1\text{ kg}$ . La barra se encuentra en equilibrio estático cuando se le aplica una fuerza de magnitud  $F$  en el extremo  $B$  perpendicular a la barra. Determine (a) La magnitud de la fuerza aplicada. (b) La reacción que ejerce la articulación sobre la barra. (c) La reacción que ejerce la barra sobre la articulación.

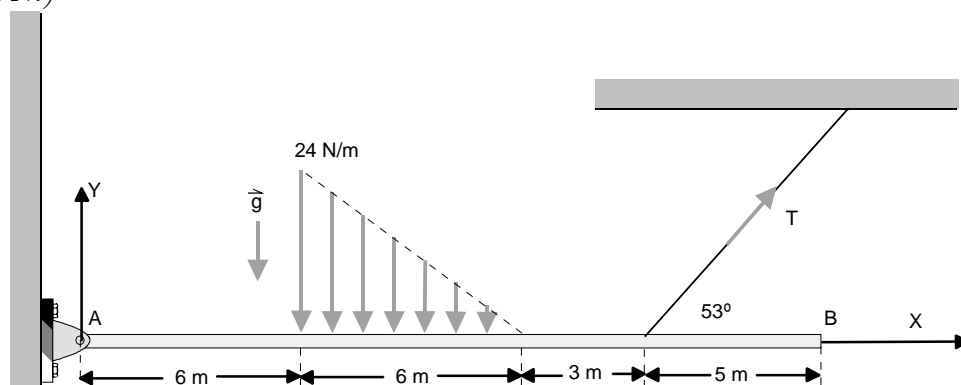


EJERCICIO 4.17 El sistema de la figura está en equilibrio. Si la barra es de longitud  $L$ , de masa  $M = 8\text{ kg}$  y la masa  $m$  es  $m = 10\text{ kg}$  y  $AB = L/3$

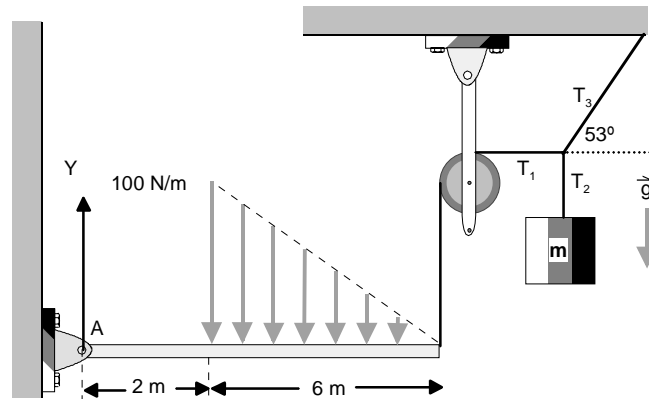
determine (a) La tensión  $T$ . (b) La tensión  $T_1$ . (c) La reacción en el pivote A.



EJERCICIO 4.18 Una viga de masa  $m = 6 \text{ kg}$  y largo  $L = 20 \text{ m}$  está sometida a una carga distribuida y a una tensión como se indica en la figura. La distribución de carga es lineal con un máximo de  $24 \text{ N m}^{-1}$ . Determine (a) La reacción en A. (b) La tensión en la cuerda. (R: (a)  $(-58,8; 53,6) \text{ N}$ . (b)  $98 \text{ N}$ .)



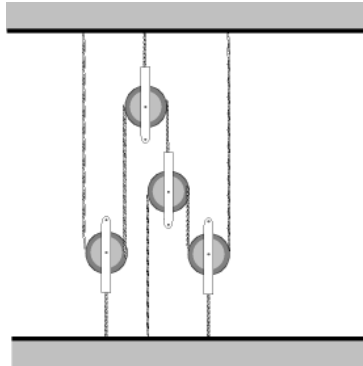
EJERCICIO 4.19 La figura muestra un sistema en equilibrio, donde la barra tiene masa despreciable, la distribución de carga aplicada es lineal con un máximo de  $100 \text{ N m}^{-1}$ . Determine la masa del cuerpo colgante. (R:  $20 \text{ kg}$ )



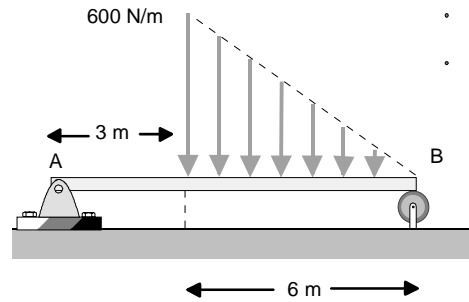
EJERCICIO 4.20 La placa de la figura pesa  $90\text{ N}$  y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales. (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determine

- La tensión en el cable que pasa por la polea A.
- La tensión en el cable que pasa por la polea B.

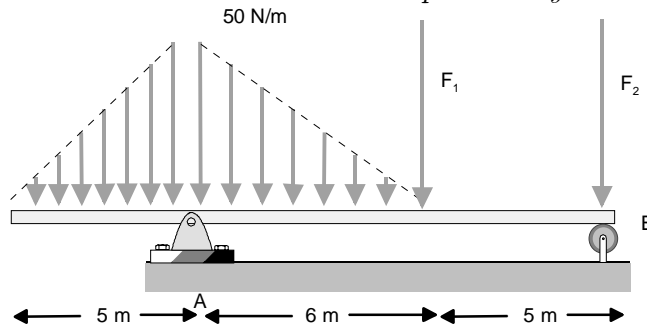
EJERCICIO 4.21 Las cinco cuerdas del sistema de la figura pueden soportar una tensión máxima de  $1500\text{ N}$  sin cortarse. Determine el peso máximo de la placa que puede ser soportada. (respuesta  $W = 2625\text{ N}$ )



EJERCICIO 4.22 La placa liviana de la figura de longitud  $9\text{ m}$  está soportando una fuerza distribuida en forma lineal con un máximo de  $600\text{ N m}^{-1}$ . Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.

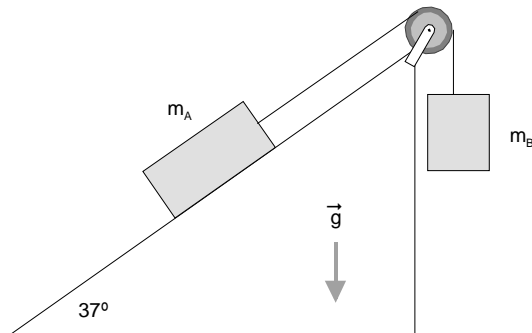


EJERCICIO 4.23 La placa de la figura de longitud 16 m y de masa 2 kg está soportando dos fuerzas distribuidas en forma lineal con máximos de  $50 \text{ N m}^{-1}$  además de dos fuerzas hacia abajo de magnitudes  $F_1 = 600 \text{ N}$  y  $F_2 = 400 \text{ N}$ . Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.

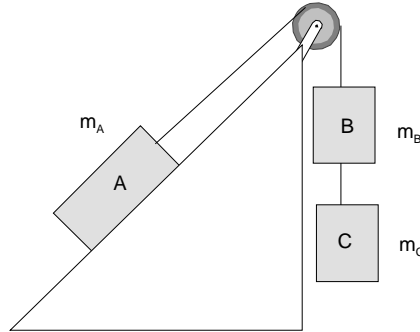


EJERCICIO 4.24 La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de  $37^\circ$  con la horizontal y dos bloques A y B en reposo, unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable. Si la masa del cuerpo A es  $m_A = 3 \text{ kg}$  y el coeficiente de roce estático es  $\mu_S = 0,2$ , determine

- i) Los valores máximos y mínimos de  $m_B$  compatibles con el equilibrio.
- ii) El valor de la tensión de la cuerda en los dos casos anteriores.



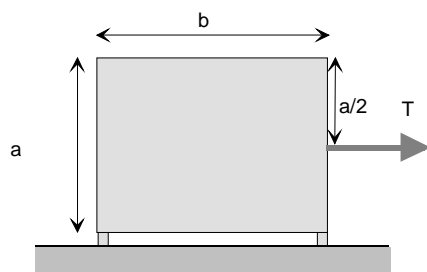
EJERCICIO 4.25 Tres cuerpos de masa  $m_A = 3 \text{ kg}$ ,  $m_B = 2 \text{ kg}$  y  $m_C = 1 \text{ kg}$  se encuentran en reposo como muestra la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. Se pide



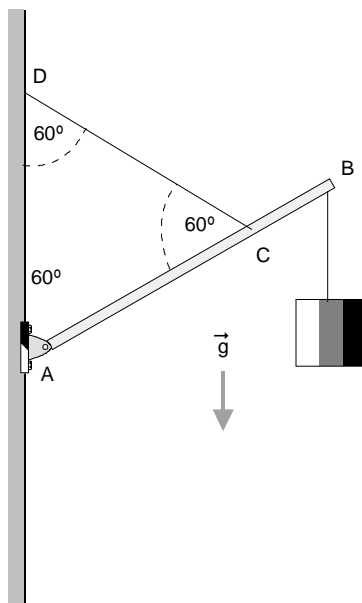
- El diagrama de fuerzas que actúan sobre  $m_A$ .
- El coeficiente de roce estático entre  $m_A$  y la superficie.
- Las tensiones en las cuerdas.

EJERCICIO 4.26 Un objeto homogéneo en forma de paralelepípedo de altura  $a$  y de ancho  $b$  está en reposo soportado por dos patitas de masa despreciable en uno y otro extremo como se indica en la figura. Si se aplica una fuerza horizontal  $T$  a altura  $a/2$  determine el valor máximo de  $\mu_S$  tal que al romperse el equilibrio aumentando  $T$ , el cuerpo deslice sin volcar. (respuesta:  $\mu_S = b/a$ )



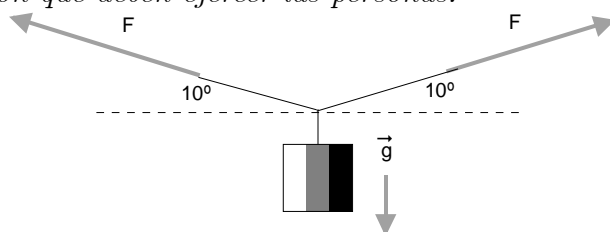


EJERCICIO 4.27 Se tiene un sistema formado por una barra uniforme de 6 m de longitud, de masa 100 kg articulada en el punto A a un mástil vertical. En el extremo B de la barra cuelga un cuerpo de masa 400 kg. La barra está sostenida por un cable inextensible atado a los puntos C sobre la barra a distancia 1,5 m del extremo B y D sobre el mástil, de tal modo que el triángulo ACD es equilátero. Determine



- La magnitud de la tensión del cable CD.
- Las componentes de la fuerza que hace el pivote en A sobre la barra.
- El torque ejercido por la tensión del cable sobre el mástil, respecto al punto A.

EJERCICIO 4.28 *Se ata un cuerpo de 200 N de peso al punto medio de una cuerda y dos personas tiran de la misma manera de sus extremos de tal modo que el cuerpo queda suspendido como se indica en la figura. Determine la fuerza de tensión que deben ejercer las personas.*



# Hidrostatica

## 5.1. Fluidos

El término hidrostática se refiere al estudio de los fluidos en reposo. Los fluidos son sustancias, idealizadamente un continuo de masa, donde su forma puede cambiar fácilmente por escurrimiento debido a la acción de fuerzas pequeñas. Son fluidos tanto los líquidos como los gases. Si se analizan las fuerzas que pueden actuar sobre una porción de fluido, ellas son de dos tipos: causada por agentes exteriores, típicamente el peso de él, y las causadas por el fluido que está en su exterior mediante contacto. Es conveniente distinguir la parte de esa última fuerza que actúa normal a la superficie, llamadas fuerzas debidas a la presión, de las fuerzas tangenciales o de viscosidad. Estas fuerzas tangenciales actuando sobre la superficie del elemento de fluido, no pueden ser equilibradas por fuerzas interiores, de modo que ellas causan escurrimiento del fluido. Si nos limitamos a fluidos en reposo, las fuerzas tangenciales no pueden existir. Ellas son relevantes en los casos donde los fluidos no están en equilibrio, tema que no será tratado aquí. Aquí es necesario utilizar un sistema inercial de referencia y no debe existir movimiento del fluido respecto a las superficies en contacto con el. Cuando hay movimiento de fluidos sin existir aceleraciones, se habla de situaciones estacionarias que tampoco serán tratadas aquí.

## 5.2. Concepto de Presión

Si una superficie se coloca en contacto con un fluido en equilibrio (en reposo) el fluido, gas o líquido, ejerce fuerzas normales sobre la superficie. Las fuerzas tangenciales que un fluido puede ejercer sobre una superficie se originan cuando hay movimiento del fluido respecto a la superficie. Si sobre una superficie actúan fuerzas normales distribuidas en forma continua, como se indica en la figura (5.1), se define la presión actuando sobre algún punto de ella como la fuerza por unidad de área que actúa sobre la superficie. Esta puede ser variable o constante de punto en punto de la superficie. Por esa razón su definición involucra un elemento infinitésimo de área  $dA$ .

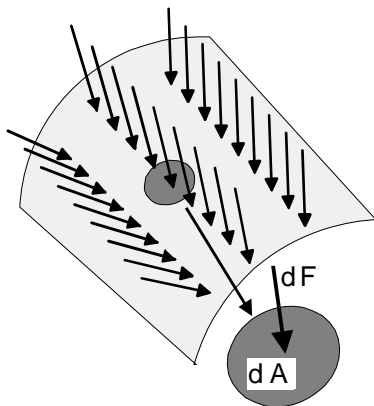


Figura 5.1: Fuerzas de presión

O sea la presión en el punto donde se ubica el elemento de área (infinitésimo)  $dA$  se define por

$$P = \frac{dF}{dA}. \quad (5.1)$$

Como se verá más adelante, la presión en un fluido en equilibrio aumenta con la profundidad, de modo que las presiones serán uniformes sólo en superficies planas horizontales en el fluido. Si la fuerza total  $F$  está distribuida en forma uniforme sobre el total de un área horizontal  $A$  como se indica en la figura (5.2), la presión en cualquier punto de esa área será

$$P = \frac{F}{A}. \quad (5.2)$$

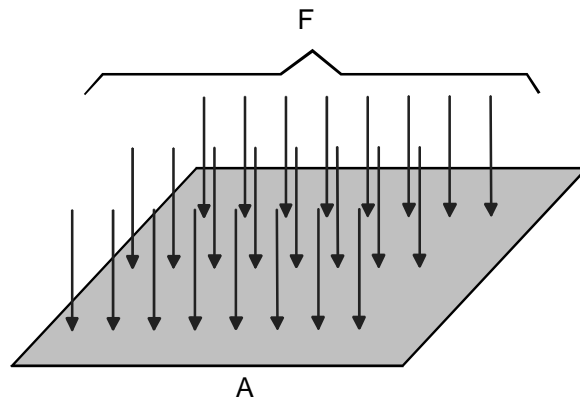


Figura 5.2: fuerza distribuida uniforme

### 5.2.1. Unidades de Presión

La unidad SI de presión es el Pascal, simbolizado Pa

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$$

pero existen varias otras de uso corriente. La tabla siguiente las define y se dan algunas equivalencias.

Unidad		Símbolo	equivalencia		
bar	1	bar	$1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$		
atmósfera	1	atm	101 325 Pa	1,01325 bar	1013,25 mbar
milímetros de mercurio	1	mmHg	133.322 Pa		
Torr	1	torr	133.322 Pa		
lbf in <sup>-2</sup>	1	psi	0,068 0 atm		
kgf cm <sup>-2</sup>	1		0,9678 atm		
	1	atm	760.0 mmHg		
	1	psi	6894.75 Pa		

### 5.2.2. Propiedades de la presión

La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas direcciones, esto es que la fuerza que experimenta un elemento de área dentro de un fluido, no depende de la orientación de ese elemento de área. Además la presión

en un mismo plano horizontal en el interior de un fluido en reposo, es la misma. Estas propiedades fueron enunciadas como “principios” por Pascal, pero ahora pueden ser demostradas de modo muy simple usando las leyes de la estática, demostración que omitiremos aquí.

### 5.3. Densidad o masa específica

En un fluido, es importante la densidad o masa específica ella permite calcular el peso del elemento de volumen que se considere, que es una posible fuerza exterior actuando sobre cada elemento de fluido. Para un elemento de volumen  $dV$  ubicado en algún punto del fluido y que contenga una masa  $dM$ , la densidad  $\rho$  en ese punto se define mediante

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (5.3)$$

en consecuencia la unidad *SI* de densidad será  $\text{kg m}^{-3}$  pero es usual especificar densidades en  $\text{g cm}^{-3}$ , existiendo la equivalencia

$$1 \text{ g cm}^{-3} = 1000 \text{ kg m}^{-3}.$$

#### 5.3.1. Densidad relativa

Es posible utilizar una escala de densidades relativas a la de alguna sustancia específica, por ejemplo existen las densidades de los fluidos respecto al agua, es decir

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}, \quad (5.4)$$

que es en consecuencia adimensional, es decir sin unidades.

### 5.4. Peso específico

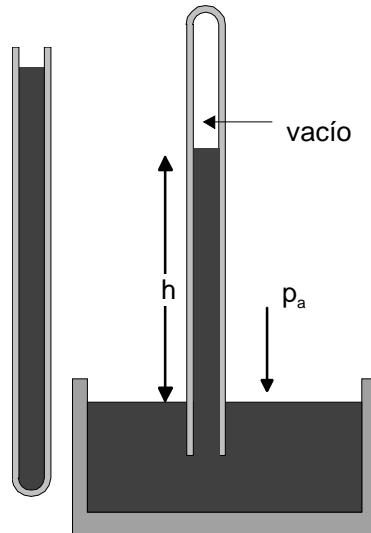
El peso específico denotado por  $\gamma$  se define como el peso por unidad de volumen del fluido, es decir

$$\gamma = \rho g, \quad (5.5)$$

donde la unidad SI será  $\text{N m}^{-3}$ .

## 5.5. Presión atmosférica

La atmósfera está constituida por aire, una mezcla en ciertas proporciones de Nitrógeno y Oxígeno principalmente, que como toda substancia es atraída por el campo gravitacional terrestre, es decir la atmósfera tiene peso. La atmósfera es un fluido de varios kilómetros de altura, que producto de su peso, ejerce presión sobre todos los objetos sumergidos en ella. Esta presión se denomina presión atmosférica y como veremos, ella disminuye con la altura. El famoso experimento de Torricelli, determinó por primera vez su valor. Considere un tubo de vidrio de alrededor de 1 m de longitud, cerrado en un extremo, lleno de mercurio, un fluido el cual tiene una densidad de alrededor  $13,6 \text{ g cm}^{-3}$ . Tapando con un dedo el extremo abierto del tubo se invierte el tubo y se sumerge el extremo abierto en un recipiente que también contiene mercurio. Si este experimento es realizado al nivel del mar, se logra una situación de equilibrio como se indica en la figura, donde una altura de  $h = 76 \text{ cm}$  de mercurio (760 mm) permanece equilibrada con vacío en su parte superior.



Un pequeño análisis de las fuerzas involucradas en el equilibrio de la columna suspendida de mercurio, nos da el valor de la presión atmosférica  $P_a$ . Si  $A$  denota el área basal de esa columna, la fuerza que actúa por abajo es

$$P_a A$$

la cual equilibra el peso de la columna de mercurio el cual es

$$\rho_{Hg} g h A$$

de modo que

$$P_a = \rho_{Hg}gh = 760 \text{ mmHg},$$

puesto que la altura suspendida es precisamente 760 mmHg. Este experimento da origen al aparato llamado barómetro de mercurio y también a la unidad de presión llamada mmHg. Si la presión atmosférica varía por cualquier razón, también lo hará la altura de la columna de mercurio, constituyendo entonces este dispositivo, un aparato para medir la presión atmosférica, directamente en mmHg.

## 5.6. Variación de la presión con la profundidad

Así como la presión atmosférica disminuye con la altura, es de esperar que la presión en el interior de un líquido, aumente con la profundidad. Recordando que la presión es la misma en todos los puntos al mismo nivel de un fluido en reposo, considere la primera figura, el elemento de fluido marcado, está en equilibrio sometido a fuerzas externas verticales, debidas a la presión en las secciones (1) y (2), y a su peso  $W$ , de manera que la condición de equilibrio es

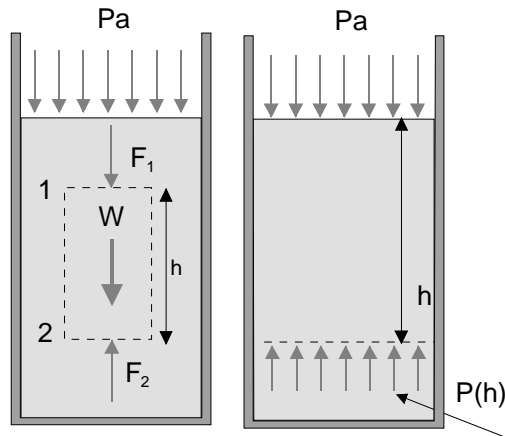


Figura 5.3:



$$F_2 - F_1 - W = 0,$$

y si  $A$  denota la sección transversal, la ecuación anterior se puede escribir

$$p_2 A - p_1 A = \rho g h A,$$

o bien

$$p_2 = p_1 + \rho g h.$$

Entonces, considerando la segunda figura, la presión a una profundidad  $h$ , desde la superficie del fluido que está a la presión atmosférica, será

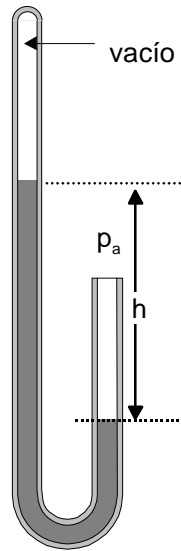
$$p = p_a + \rho g h. \quad (5.6)$$

## 5.7. Medidores de presión

Existen diversos aparatos para medir la presión pero nos limitaremos a describir aquellos que están basados en propiedades muy simples del equilibrio de columnas de fluidos. Los aparatos para medir la presión atmosférica se llaman barómetros, y los que miden presión en general, se llaman manómetros.

### 5.7.1. Barómetro de mercurio en U

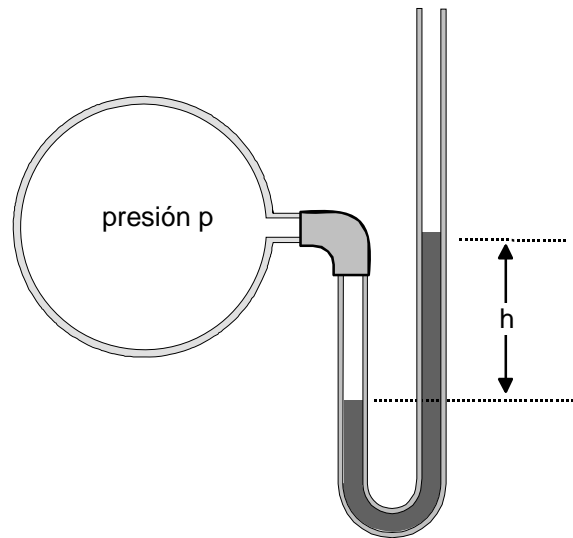
Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar



$$P_a = h \text{ mmHg} = h \text{ torr.}$$

### 5.7.2. Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases

La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la situación de equilibrio, cuando la presión  $p$  en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da



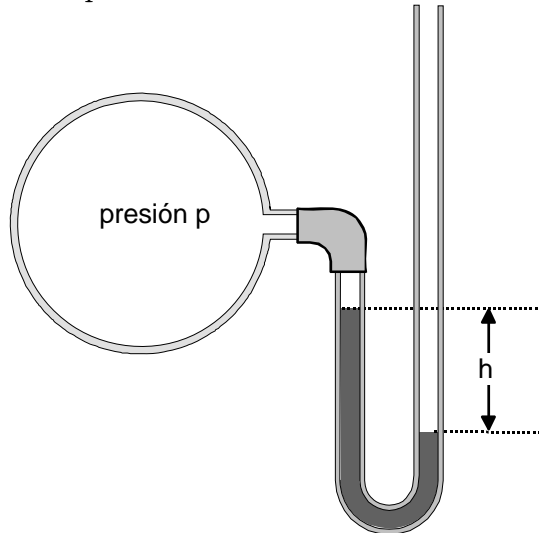
$$p = p_a + \rho_L g h,$$

de modo que si se mide la altura  $h$ , la presión relativa (a la atmosférica) será

$$p - p_a = \rho_L g h.$$

La presión absoluta  $p$  puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.

Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente



de modo que la condición de equilibrio será

$$p + \rho_L gh = p_a,$$

dando para la presión relativa

$$p - p_a = -\rho_L gh,$$

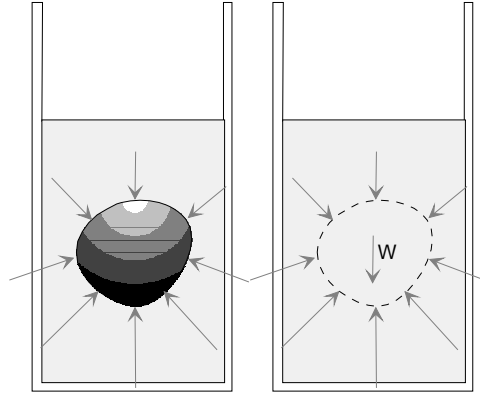
un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica. Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$$p = p_a - \rho_L gh.$$

Otras situaciones simples como estas se dejan como ejercicios planteados al final.

## 5.8. Principio de Arquímedes

Cuando un cuerpo sólido está en equilibrio en el interior de un fluido, él estará sometido a fuerzas exteriores de dos tipos: su peso u otras fuerzas aplicadas, y además las fuerzas distribuidas sobre su superficie causadas por la presión dentro del fluido. Esas últimas actúan normalmente a la superficie del cuerpo y su resultante vertical puede ser fácilmente calculada. En efecto, si se considera la segunda de las figuras donde el cuerpo no está presente, pero se ha marcado la región donde el cuerpo estaba, las fuerzas sobre esa superficie imaginaria son naturalmente las mismas que actuaban sobre el cuerpo. Pero ahora, ellas equilibran verticalmente al fluido encerrado por esa superficie, de modo que la resultante vertical hacia arriba, debe igualar al peso del fluido encerrado por dicha superficie. Se tiene entonces el llamado principio de Arquímedes.



Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, él experimenta una fuerza ascendente, llamada fuerza de empuje, que es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

En términos matemáticos, si  $V$  denota el volumen sumergido,  $\rho_L$  la densidad del líquido y  $E$  la magnitud del empuje, entonces

$$E = \rho_L V g. \quad (5.7)$$

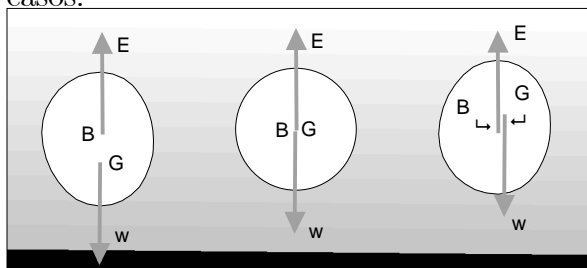
## 5.9. Fuerza de Flotación

La fuerza de empuje, que es igual al peso del fluido desplazado, tiene como punto de aplicación el centro de gravedad del volumen de fluido que es desplazado por el cuerpo. Si suponemos que el fluido es homogéneo, entonces ese punto coincide con el centroide de la región del cuerpo que ha desplazado al fluido. Ese punto se denomina centro de flotación y en las figuras lo denotaremos por  $B$ . Por otro lado, el peso del cuerpo actúa equivalentemente en el centro de masa del cuerpo  $G$  el cual puede o no coincidir con el centro de flotación, dando origen a la necesidad de analizar las estabilidad de cuerpos sumergidos en equilibrio.

### 5.9.1. Cuerpo totalmente sumergido

Cuando un cuerpo está totalmente sumergido, pueden ocurrir tres casos según el centroide del líquido desplazado, punto  $B$ , esté sobre, coincida o esté

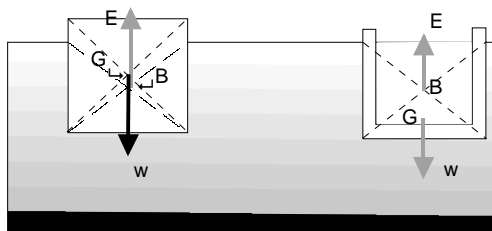
más abajo que el centro de masa del cuerpo, punto  $G$ . La figura siguiente ilustra esos tres casos.



En el primero, la fuerza de empuje actúa más arriba del peso, luego para una rotación del cuerpo, aparece un par que tiende a restaurar la posición original, en consecuencia este equilibrio es estable. En el segundo caso, no aparece par al girar el cuerpo, luego el equilibrio es indiferente y en el último, el par que se origina tiende a alejar el cuerpo de la posición de equilibrio, la cual es en consecuencia, inestable.

### 5.9.2. Cuerpo parcialmente sumergido

La figura siguiente ilustra dos casos para cuerpos parcialmente sumergidos.



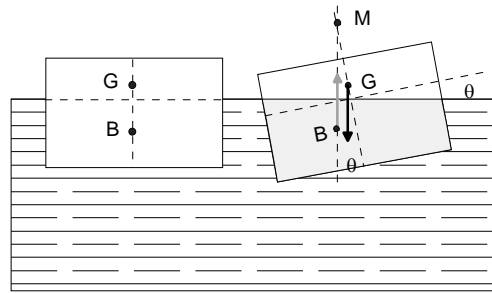
En el primer caso, se trata de un cuerpo homogéneo parcialmente sumergido. El centro de masa  $G$  está en el centro del cuerpo, sin embargo el centro de flotación  $B$ , correspondiente al centroide de la parte sumergida, está más abajo. Entonces en la situación de equilibrio  $E = W$  pero hay aparentemente problemas con la estabilidad. La cuestión de qué ocurre si el cuerpo se inclina levemente la analizaremos en la sección siguiente. A primera vista parecería que si el cuerpo se inclina algo hacia la derecha, el torque del par de las dos fuerzas paralelas pero no colineales, tendería a inclinarlo aún más. Ya se explicará que ocurre.

En segundo caso se trata de un cuerpo inhomogéneo que flota, y para el caso de la figura  $G$  está más abajo que  $B$  y el equilibrio es evidentemente

estable, porque al inclinar el cuerpo, el par de fuerzas tiende a restaurar la posición original.

### 5.9.3. Estabilidad de un cuerpo prismático inhomogéneo

Considere un cuerpo prismático inhomogéneo, de modo que su centro de masa está más arriba del centroide, como se ilustra en la figura. Si el cuerpo está parcialmente sumergido, de modo que el centro de flotación  $B$  está más abajo que  $G$ , hay problemas con la estabilidad. Analizaremos lo que ocurre con el par de las fuerzas para variaciones pequeñas de la inclinación del cuerpo.



Altura metacéntrica.

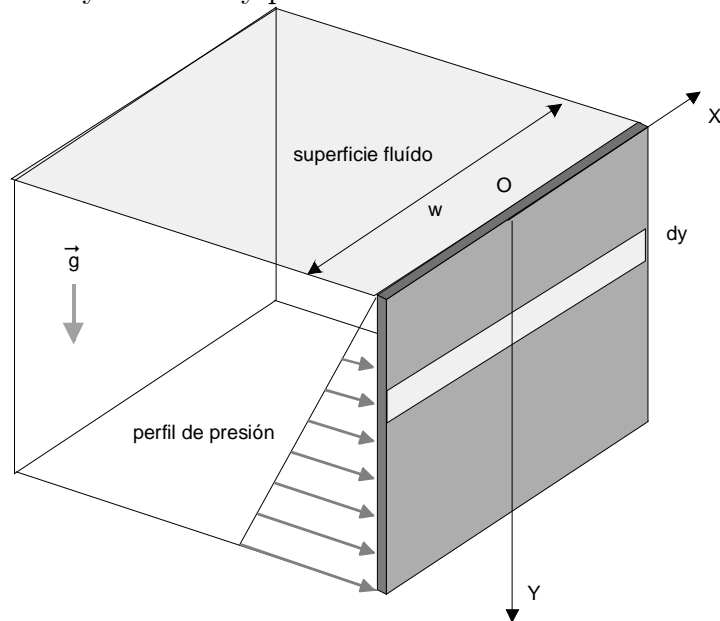
La figura de la izquierda representa la situación de equilibrio, aparentemente inestable por estar  $G$  arriba del centro de flotación  $B$ . Sin embargo, si la figura se inclina un ángulo pequeño  $\theta$  como se muestra en la figura derecha, el centro de gravedad cambia relativamente poco, pero el centro de flotación, el centroide de la zona marcada gris, puede cambiar bastante como se ilustra en la figura. La vertical que pasa por  $B$ , la línea de acción del empuje, corta a la línea central donde está  $G$  en un punto  $M$  que se denomina metacentro. Si ese punto queda más arriba de  $G$  el par de las fuerzas es restaurador y el equilibrio es estable, que es el caso de la figura. La distancia  $MG$  se denomina altura metacéntrica y el par restaurador está dado por

$$MG \cdot W \sin \theta,$$

donde  $W$  es el peso del cuerpo. Si  $M$  está abajo de  $G$  el equilibrio es inestable y si coinciden indiferente.

## 5.10. Fuerzas sobre las paredes o compuertas

Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. Como se explicó en el capítulo de Estática, la resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto arbitrario, más el torque de todas esas fuerzas distribuidas respecto a ese mismo punto. Es sin embargo conveniente calcular la resultante de esas fuerzas en un cierto punto, llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es nulo. Explicaremos entonces la forma de hacerlo. Esto requiere sin embargo de elementos de cálculo integral que trataremos de omitir. Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie. La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.



En términos de la profundidad  $y$  la fuerza neta que actúa a esa profundi-



dad sobre el elemento de área de ancho  $w$  y altura  $dy$  es

$$\begin{aligned} dF &= p w dy, \\ &= \rho g y w dy. \end{aligned}$$

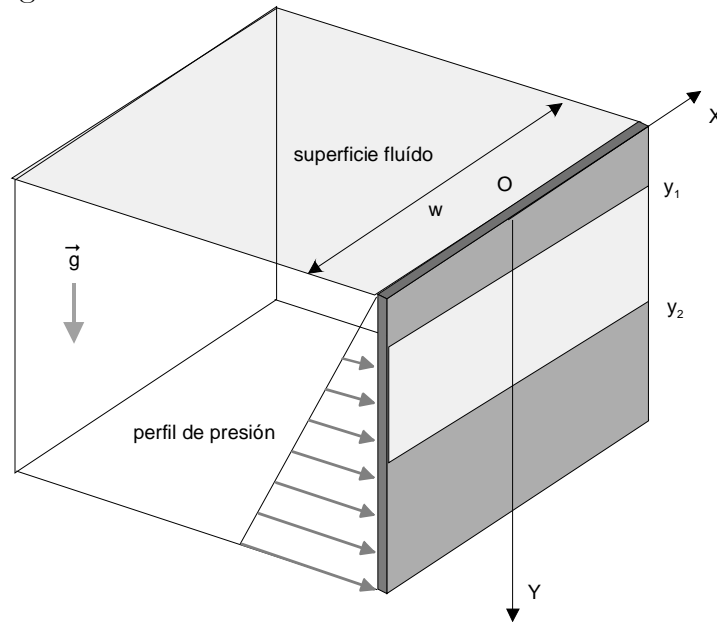
Entonces se tiene una fuerza distribuida cuya magnitud por unidad de longitud varía linealmente de la forma

$$\frac{dF}{dy} = \rho w g y \quad \text{N m}^{-1}.$$

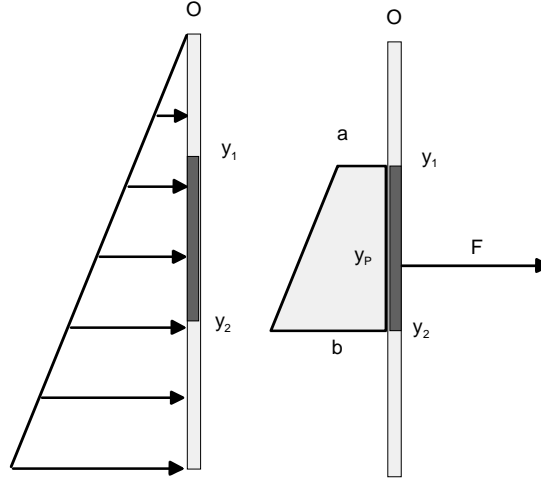
El cálculo de la fuerza resultante dependerá de la forma de la superficie que se considere.

### 5.10.1. Superficie rectangular

El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue



donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas distribuidas entre  $y_1$  e  $y_2$ . Como vimos en el capítulo de fuerzas, la resultante y el punto de aplicación corresponden al área y al centroide de la figura correspondiente a la fuerza distribuida entre  $y_1$  e  $y_2$ .



Como sabemos el área es

$$\frac{1}{2} (a + b) (y_2 - y_1)$$

y el centroide está (medido desde  $y_1$  hacia abajo)

$$\frac{1}{3} \frac{(a + 2b)}{a + b} (y_2 - y_1)$$

donde  $a$  y  $b$  son las fuerzas por unidad de longitud en  $y_1$  e  $y_2$

$$a = \rho w g y_1,$$

$$b = \rho w g y_2,$$

así entonces la fuerza resultante es

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (\rho w g y_1 + \rho w g y_2) (y_2 - y_1) \\ &= \frac{1}{2} \rho w g (y_2^2 - y_1^2) \end{aligned}$$

y su punto de aplicación será

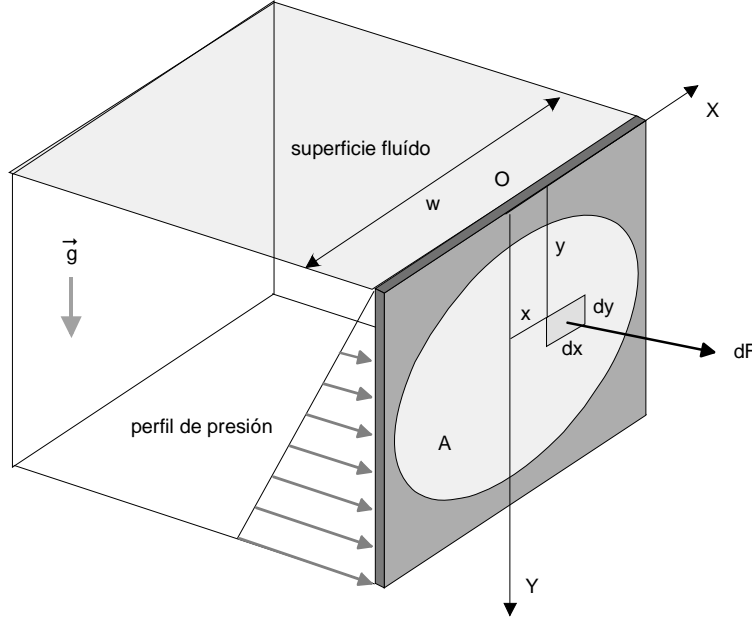
$$\begin{aligned} y_P &= y_1 + \frac{1}{3} \frac{(a + 2b)}{a + b} (y_2 - y_1) \\ &= \frac{2 y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{3 y_1 + y_2}. \end{aligned}$$

En particular si la superficie está entre  $y_1 = 0$  e  $y_2 = h$  resultará

$$y_P = \frac{2}{3} h. \quad (5.8)$$

### 5.10.2. Superficie de forma arbitraria

Si la superficie no es rectangular, como se ilustra en la figura que sigue



es necesario recurrir al cálculo integral. La fuerza actuando sobre el elemento de área  $dA = dx dy$  indicado en la figura será

$$dF = \rho g y dA = \rho g y dx dy$$

de modo que la fuerza resultante será

$$F = \rho g \int_A y dx dy$$

y la posición del centro de fuerza estará dada por sus coordenadas

$$x_P = \frac{\int_A x dF}{F}, \quad y_P = \frac{\int_A y dF}{F}, \quad (5.9)$$

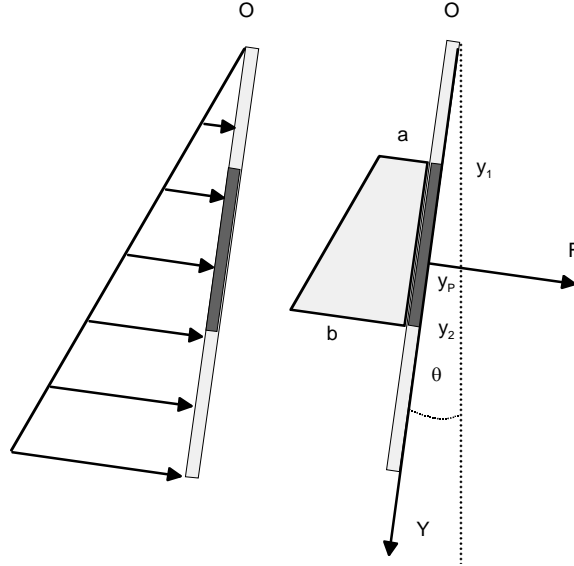
que pueden escribirse

$$x_P = \frac{\int_A x y dx dy}{\int_A y dx dy}, \quad y_P = \frac{\int_A y^2 dx dy}{\int_A y dx dy},$$

integrales que podrían hacerse si se conoce la forma del área. Como usted no domina aún el tema de las integrales, no se preocupe demasiado por esta sección.

### 5.11. Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada

En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo  $\theta$  con la vertical, el cálculo es muy parecido.



pero ahora, el eje  $OY$  está inclinado luego debemos tomar

$$\begin{aligned} a &= \rho w g y_1 \cos \theta, \\ b &= \rho w g y_2 \cos \theta, \end{aligned}$$

y luego resultarán

$$F = \frac{1}{2} \rho w g (y_2^2 - y_1^2) \cos \theta, \quad (5.10)$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2}{3} \frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2}. \quad (5.11)$$

Note que la expresión para el centro de fuerza es la misma.

### 5.11.1. Torque

Es a veces necesario calcular el torque ejercido por las fuerzas de presión sobre una compuerta, ya sea sobre el extremo inferior  $\Gamma_{y_2}$  o sobre el extremo superior  $\Gamma_{y_1}$ . Usando las dos últimas ecuaciones se obtienen sus magnitudes

$$\begin{aligned}\Gamma_{y_2} &= \frac{1}{2}\rho w g (y_2^2 - y_1^2) (y_2 - y_P) \cos \theta, \\ &= \frac{1}{2}\rho w g (y_2^2 - y_1^2) \left(y_2 - \frac{2}{3} \frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2}\right) \cos \theta, \\ &= \frac{\rho g w}{6} (y_2 y_1 + y_2^2 - 2y_1^2) (y_2 - y_1) \cos \theta,\end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}\Gamma_{y_1} &= \frac{1}{2}\rho w g (y_2^2 - y_1^2) (y_P - y_1) \cos \theta, \\ &= \frac{1}{2}\rho w g (y_2^2 - y_1^2) \left(\frac{2}{3} \frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2} - y_1\right) \cos \theta, \\ &= \frac{1}{6} (2y_2^2 - y_1^2 - y_2 y_1) (y_2 - y_1) g w \rho \cos \theta.\end{aligned}$$

## 5.12. Ejemplos

Los siguientes valores numéricos de densidades pueden ser necesarios para algunos problemas y ejemplos ( $p_a = 1 \text{ atm}$ ,  $t = 0^\circ \text{C}$ )

Substancia	$\rho \text{ kg m}^{-3}$	Substancia	$\rho \text{ kg m}^{-3}$
Hielo	$0,917 \times 10^3$	Agua	$1,000 \times 10^3$
Aluminio	$2,70 \times 10^3$	Agua de mar	$1,03 \times 10^3$
Hierro	$7,86 \times 10^3$	Alcohol etílico	$0,806 \times 10^3$
Cobre	$8,92 \times 10^3$	Benceno	$0,879 \times 10^3$
Plata	$10,5 \times 10^3$	Mercurio	$13,6 \times 10^3$
Plomo	$11,3 \times 10^3$	Aire	1,29
Oro	$19,3 \times 10^3$	Oxígeno	1,43
Platino	$21,4 \times 10^3$	Hidrógeno	$8,99 \times 10^{-2}$
Glicerina	$1,26 \times 10^3$	Helio	$1,79 \times 10^{-1}$

**EJEMPLO 5.12.1** *Un pedazo de aluminio se suspende de una cuerda y se sumerge completamente en un recipiente con agua. La masa del trozo de aluminio es de 1 kg. Calcule la tensión de la cuerda antes y después de sumergir el trozo de aluminio.*

**Solución.** La tensión antes es simplemente el peso del trozo de aluminio es decir

$$W = mg = 1 \times 9,8 = 9,8 \text{ N.}$$

Cuando se sumerge la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_2O} V_{Al} g,$$

pero el volumen del aluminio es

$$V_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}}$$

de modo que la fuerza de empuje será

$$\begin{aligned} E &= \rho_{H_2O} \frac{m}{\rho_{Al}} g \\ &= 10^3 \frac{1}{2,70 \times 10^3} 9,8 = 3.6 \text{ N} \end{aligned}$$

y finalmente la tensión en la cuerda será la diferencia

$$T = 9,8 - 3.6 = 6.2 \text{ N}$$



**EJEMPLO 5.12.2** *Un cubo de Hielo flota en agua. Determine la fracción del hielo que queda sobre la superficie del agua.*

**Solución.** Sea  $m$  la masa de hielo. Su peso será

$$W = mg.$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_{Hielo}},$$

de modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$W = \rho_{Hielo} V g$$

Cuando una fracción  $V_S$  del volumen queda sumergido, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_2O} g V_S.$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

$$\rho_{Hielo} V g = \rho_{H_2O} g V_S,$$

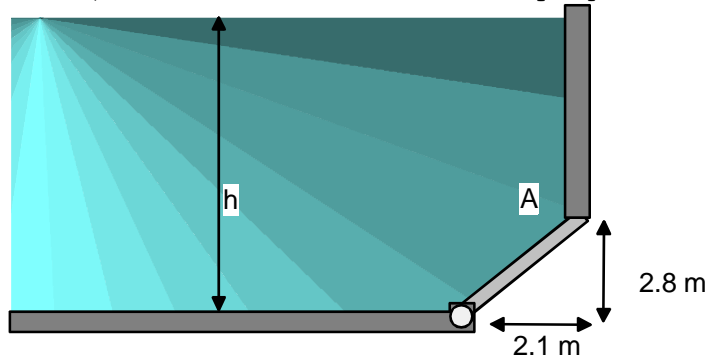
de donde

$$\frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{Hielo}}{\rho_{H_2O}} = 0,917$$

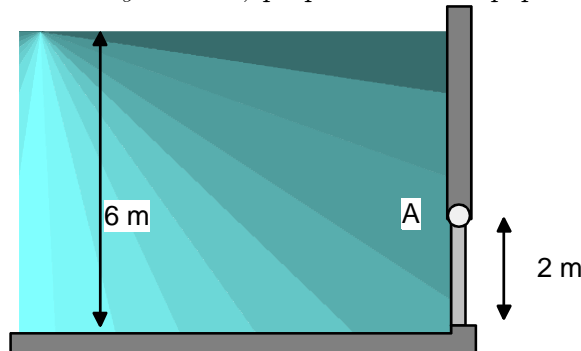
o sea hay un 91,7 % sumergido y por lo tanto 8,3 % sobre el nivel del agua.

### 5.13. Ejercicios

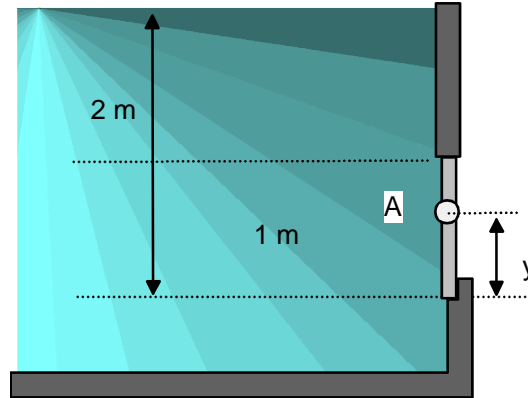
EJERCICIO 5.1 La compuerta de la figura tiene 2 m de ancho y contiene agua. Si el eje que soporta la compuerta que pasa por A soporta un par máximo de 150 kN m, determine la máxima altura  $h$  que puede tener el agua.



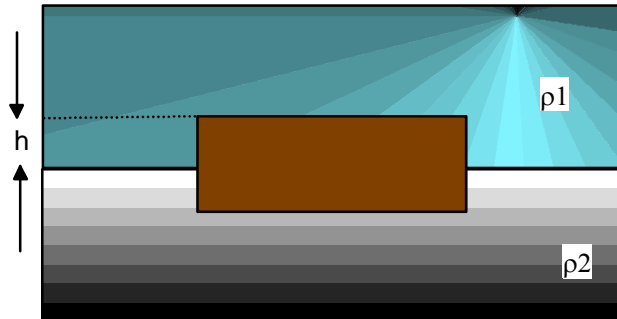
EJERCICIO 5.2 Determínese el par que se requiere hacer en A para sostener la compuerta indicada cuyo ancho, perpendicular al papel es  $w = 2$  m.



EJERCICIO 5.3 Determine la ubicación “ $y$ ” del pivote fijo  $A$  de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.



EJERCICIO 5.4 Un bloque con una sección transversal de área  $A$ , altura  $H$  y densidad  $\rho$ , está en equilibrio entre dos fluidos de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , con  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $H$  y  $h$ .



EJERCICIO 5.5 Un cuerpo de material desconocido pesa 4 N en el aire y 2,52 N sumergido en agua. Encuentre la densidad específica del material.

EJERCICIO 5.6 Una balsa de área  $A$ , espesor  $h$  y masa 400 kg flota en aguas tranquilas con una inmersión de 5 cm. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de 7,2 cm. Encuentre la masa de la carga.

EJERCICIO 5.7 Un cuerpo homogéneo prismático de 20 cm de espesor 20 cm de ancho y 40 cm de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a

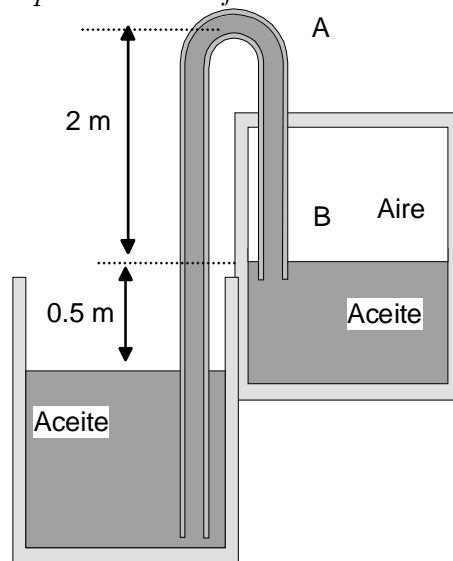


50 cm de profundidad al aplicar sobre él una tensión de 50 N . ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?

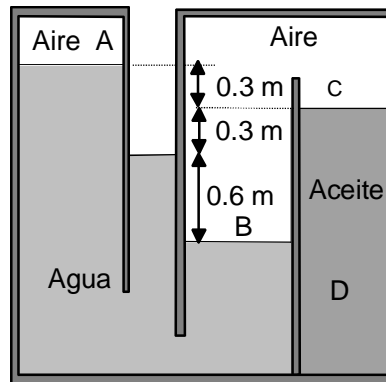
EJERCICIO 5.8 ¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?

EJERCICIO 5.9 Un tarro cilíndrico de 20 cm de diámetro flota en agua con 10 cm de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de 100 N de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro  $7,8 \text{ g cm}^{-3}$ .

EJERCICIO 5.10 Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad  $\rho = 0,85 \text{ g cm}^{-3}$ . Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B si la presión atmosférica es 1 atm.



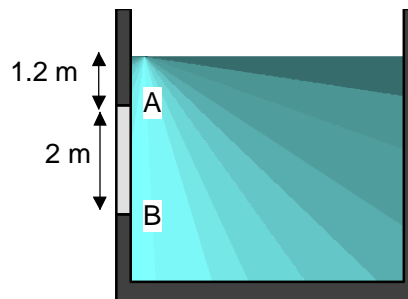
EJERCICIO 5.11 Con respecto a la figura, determine la presión en los puntos A, B, y C de la figura donde el aceite tiene densidad  $0,90 \text{ g cm}^{-3}$  y el agua  $1,00 \text{ g cm}^{-3}$ .



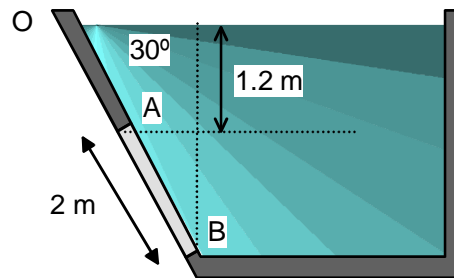
EJERCICIO 5.12 En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de 0,3 y cuyas dimensiones son 120 cm de largo, 100 cm de ancho y 25 cm de alto. Determine

- La fuerza de empuje.
- La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.
- El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6 cm más.

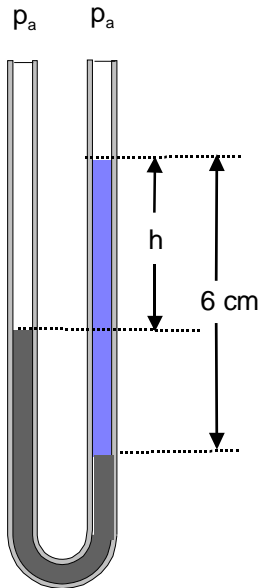
EJERCICIO 5.13 Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura  $AB = 2\text{ m}$  y de ancho 1 m (hacia adentro del papel), donde el punto A está a profundidad de 1,2 m.



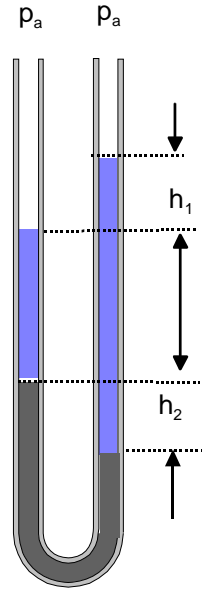
EJERCICIO 5.14 Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de  $30^\circ$  respecto a la vertical.



EJERCICIO 5.15 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte keroseno de densidad  $0,82 \text{ g cm}^{-3}$  en uno de los lados que forma una columna de 6 cm de altura. Determine la diferencia de altura  $h$  entre las superficies de los dos líquidos.*



EJERCICIO 5.16 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniendo una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde  $h_2 = 1 \text{ cm}$ . Determine la diferencia de altura  $h_1$  entre las superficies de los dos niveles de agua.*



**Solución.** Sea  $\rho_a$  la densidad del agua y  $\rho_m$  la densidad del mercurio. La presión al nivel inferior del mercurio en ambas ramas es la misma y puede calcularse por las dos ramas obteniendo

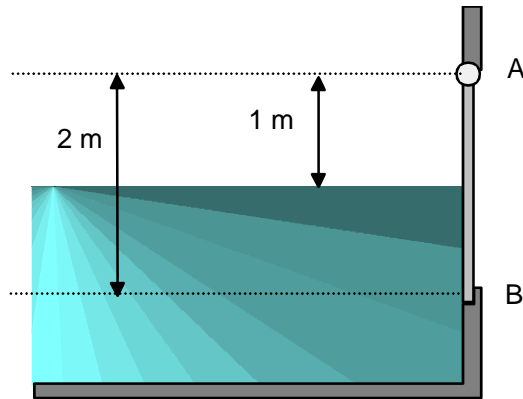
$$\rho_m g h_2 = \rho_a g h_2 + \rho_a g h_1,$$

de donde

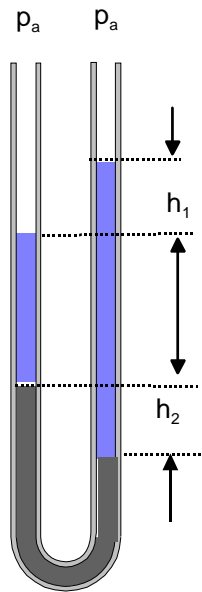
$$h_1 = \left( \frac{\rho_m}{\rho_a} - 1 \right) h_2.$$



**EJERCICIO 5.17** La compuerta de la figura tiene una altura de 2 m un ancho de 2 m, está articulada en A y apoyada en B como se indica en la figura. Si el fluido es agua de densidad  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  y su nivel llega hasta la mitad de la compuerta, determine las reacciones horizontales en los puntos A y B.



EJERCICIO 5.18 *El tubo en U de la figura está abierto a la presión atmosférica en ambos extremos y contiene dos líquidos (1) y (2) que no se mezclan como se indica en la figura. Determine la razón de las densidades  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ .*





# Cinemática

### 6.1. Introducción

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar sus causas. Como se explicó en el primer capítulo, muchos años han pasado para llegar a la descripción actual de las características del movimiento. El estudio lo separaremos en los casos en que el movimiento es en una línea recta, caso llamado unidimensional, y cuando el movimiento es en el espacio, en dos o tres dimensiones. Este estudio requiere de elementos de matemáticas, del cálculo diferencial, que quizás usted aún no conozca. Tenga confianza en los resultados y deje por último las demostraciones para una comprensión futura. Primero analizaremos el movimiento de una partícula, cuerpo cuyas dimensiones se pueden despreciar y considerar como un punto. El concepto de movimiento está relacionado con los conceptos de posición y de tiempo. La posición de un punto es un concepto relativo al sistema de referencia que se utilice. Un sistema de referencia es precisamente un sistema respecto al cual se especifican las posiciones de los puntos. Las posiciones se especifican respecto a un determinado sistema de referencia mediante un conjunto de coordenadas, de las cuales hay de diversos tipos, cartesianas, esféricas, polares, cilíndricas y muchas otras. El concepto de tiempo es un concepto complicado relacionado con la ocurrencia de eventos o sucesos y con la cuestión de cual ocurre antes, cual ocurre después o si ocurrieron simultáneamente. El tiempo permite establecer un orden de ocurrencia de sucesos en el sentido explicado recién. Para Newton el tiempo es un concepto absoluto, es decir

para todos los observadores del Universo el tiempo transcurre de la misma manera. Tal punto de vista tuvo un cambio asombroso a comienzos del siglo veinte. En efecto, Albert Einstein tuvo éxito en proponer una teoría donde el tiempo no es más un concepto absoluto, su teoría especial de la relatividad. No ahondaremos en eso en este curso.

## 6.2. Concepto de movimiento

Se dice que una partícula o punto se mueve respecto a un determinado sistema de referencia si sus coordenadas de posición, todas o alguna de ellas, cambian a medida que transcurre el tiempo. En lenguaje matemático esto es sus coordenadas son funciones del tiempo. Si las coordenadas son todas constantes diremos que el cuerpo está en reposo, respecto a este determinado sistema de referencia. Desde un punto de vista Matemático, es aparente que la definición de un sistema de referencia no tiene nada que ver con la materia presente en el Universo. Sin embargo desde el punto de vista de la Física no parece posible definir sistemas de referencia sin relación a los objetos Físicos del Universo. En otras palabras si el Universo estuviera totalmente vacío ¿cómo podríamos definir un sistema de referencia?

Como veremos la formulación de las teorías Físicas se hace en sistemas de referencia que tienen estrecha relación con la presencia de materia en el Universo.

## 6.3. Concepto de tiempo

En la formulación Newtoniana de la Mecánica Clásica, el concepto de tiempo es un concepto absoluto. Es decir para todos los observadores, independientemente de su movimiento, el tiempo transcurre de la misma forma. Esto significa entre otras cosas que el concepto de simultaneidad es absoluto. Si dos sucesos ocurren simultáneamente para algún observador, entonces ellos ocurren simultáneamente para todos. Hoy día, la teoría actual de la Mecánica, ha puesto al tiempo como un concepto relativo. Esos temas son tratados en la llamada teoría de la relatividad.



## 6.4. Movimiento rectilíneo

Cuando una partícula se mueve en una línea recta, su posición está descrita por una sola coordenada. Los desplazamientos son entonces todos sobre una misma línea, y no es entonces necesario considerar el carácter vectorial de ellos, lo cual simplifica el estudio del movimiento. Es en dos o tres dimensiones donde los vectores se hacen necesarios para la descripción del movimiento.

Si usamos coordenadas cartesianas, la posición de un punto móvil estará determinada por su coordenada  $x$  la cual, si el punto se mueve, será alguna función del tiempo

$$x = x(t) \text{ m.} \quad (6.1)$$

Aquí  $x$  representa la coordenada y  $x(t)$  alguna función del tiempo generalmente indicada con el mismo nombre que la coordenada.

### 6.4.1. Desplazamientos

El desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$  se define por la diferencia entre sus coordenadas final e inicial

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) \text{ m.} \quad (6.2)$$

Este desplazamiento no dice nada realmente de que le ocurrió al móvil durante cada instante de tiempo ni del espacio que la partícula recorrió durante ese intervalo.

### 6.4.2. Espacio recorrido

El espacio recorrido por el móvil que será denotado por  $s$  y que se expresa en metros ( m) es la magnitud del desplazamiento si acaso el móvil no cambia el sentido del movimiento. Si el móvil cambia el sentido del movimiento, el espacio recorrido es la suma de las magnitudes de los desplazamientos que ocurren entre sucesivos cambios de sentido del movimiento. Por ejemplo si un móvil avanza una distancia  $L$  y luego se devuelve esa misma distancia, el desplazamiento será cero pero el espacio recorrido será  $s = 2L$ .

### 6.4.3. Velocidad media

La velocidad media cuando ocurre un desplazamiento  $\Delta x$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  se define mediante

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ m s}^{-1}. \quad (6.3)$$

#### 6.4.4. Velocidad instantánea

La velocidad instantánea o simplemente la llamada velocidad  $v(t)$  se define como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, es decir

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}. \quad (6.4)$$

Una definición equivalente es

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (6.5)$$

Este límite que permite levantar la indeterminación tipo 0/0 que se produce, se conoce como la derivada de  $x(t)$  respecto al tiempo y para denotarla hay diversas notaciones

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = x'(t). \quad (6.6)$$

En matemáticas, usualmente la variable independiente se denomina  $x$ , y las funciones  $y(x)$  o  $f(x)$ . En tal caso la derivada se indicará

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La existencia de el límite puede verse gráficamente pues el corresponde a la pendiente de la curva

#### 6.4.5. Rapidez

La rapidez de una partícula en el instante de tiempo  $t$  se define como la magnitud de la velocidad, en el caso unidimensional esto simplemente

$$|v(t)| \text{ m s}^{-1}$$

### 6.4.6. Aceleración media

La aceleración de la partícula en el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$  se define mediante

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ m s}^{-2},$$

o bien

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (6.7)$$

donde  $\Delta t = t_2 - t_1$  y  $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$

### 6.4.7. Aceleración instantánea

La aceleración instantánea de la partícula en el instante  $t$  se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, es decir

$$a(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1} = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (6.8)$$

esto es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6.9)$$

Las unidades *SI* de posición, velocidad y aceleración son respectivamente m,  $\text{m s}^{-1}$ ,  $\text{m s}^{-2}$ .

En las figuras que siguen se ilustran los gráficos  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $a(t)$  para un ejemplo donde  $x(t) = t^2$ .

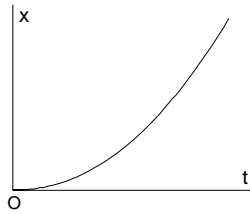


Figura 6.1: Posición vs tiempo.

La velocidad resulta  $v(t) = dx/dt = 2t$  es decir una línea recta y la aceleración  $a = dv/dt = 2$  es constante

Este es un caso particular, un movimiento con aceleración constante, con velocidad inicial nula y posición inicial nula.

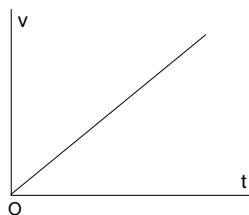


Figura 6.2: Velocidad vs tiempo.

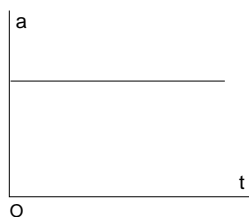


Figura 6.3: Aceleración vs tiempo.

### 6.4.8. Interpretación gráfica

Algunos de los conceptos descritos en las secciones anteriores admiten una interpretación gráfica.

- En un gráfico  $x$  versus  $t$  la velocidad por ser la derivada  $dx/dt$  es entonces la pendiente de la curva, o sea como se indica en la figura (6.4) es la tangente del ángulo  $\theta$ .

$$v(t_1) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = \tan \theta.$$

De ese modo a simple vista puede deducirse donde la velocidad es positiva, negativa o cero, lo cual es de utilidad para decidir el sentido del movimiento del móvil.

- En un gráfico  $v_x$  versus  $t$ , figura (6.5) el área entre dos tiempos es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt = x(t_2) - x(t_1),$$

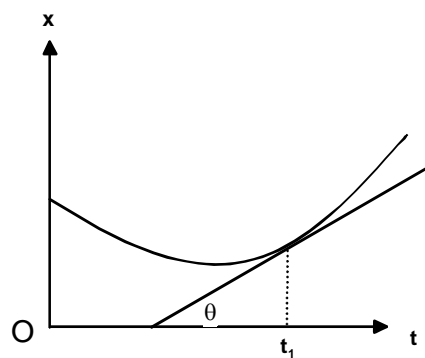


Figura 6.4:

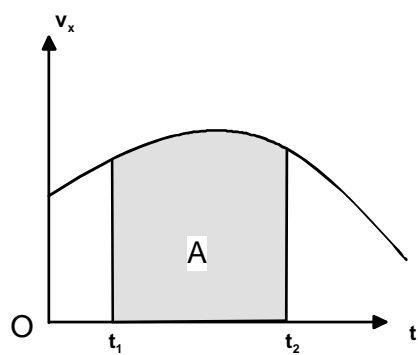


Figura 6.5:

y esto corresponde al desplazamiento entre esos dos tiempos. El desplazamiento no corresponde en general al espacio recorrido por el móvil. Para determinar el espacio recorrido por un móvil hay que ser cuidadoso como se explica en la situación siguiente. En la figura (6.6), el

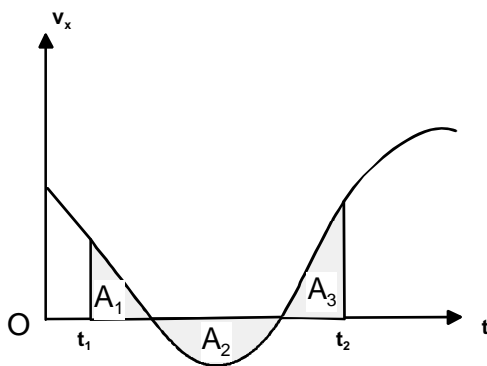


Figura 6.6:

desplazamiento entre  $t_1$  y  $t_2$  sigue siendo el área bajo la curva, esto es

$$A_1 + A_2 + A_3 = x(t_2) - x(t_1),$$

pero si se calcula el área  $A_2$  mediante integración esta resulta negativa, lo que significa que  $v_x$  es negativa o sea el móvil se está devolviendo. El espacio recorrido es la suma de las magnitudes de las áreas, esto es

$$s = |A_1| + |A_2| + |A_3|,$$

que en general será mayor o igual al desplazamiento.

**NOTA 6.1** El área bajo una curva es calculable mediante integrales, materia que usted quizás aún no conozca. Para situaciones simples donde la velocidad varía linealmente con el tiempo, dichas áreas podrán ser calculadas geométricamente.

#### 6.4.9. Movimiento uniformemente acelerado

Se dice que un movimiento es uniformemente acelerado si la aceleración del móvil es constante. En general, si la aceleración  $a$  es constante se tiene

que

$$\frac{dv(t)}{dt} = a,$$

expresión que podemos integrar dos veces obteniendo

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a dt,$$

o sea

$$v(t) = v(0) + at, \quad (6.10)$$

e integrando de nuevo

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v(0) + at) dt,$$

luego, realizando la integral resulta

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2. \quad (6.11)$$

Aquí  $x(0)$  representa la posición inicial y  $v(0)$  la velocidad inicial. Si despejamos el tiempo de la primera y reemplazamos en la segunda se obtiene

$$x(t) - x(0) = \frac{v^2(t) - v^2(0)}{2a}, \quad (6.12)$$

que tiene importancia en ciertas situaciones. Por ejemplo si la aceleración es negativa (movimiento desacelerado), el espacio recorrido hasta detenerse será

$$x(t) - x(0) = \frac{-v^2(0)}{2a}.$$

**NOTA 6.2** Se habla de movimiento desacelerado cuando la aceleración tiene signo contrario a la velocidad. En movimientos más generales se dice que el movimiento es desacelerado cuando la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad.

#### 6.4.10. Solución gráfica

En algunos casos simples la integral no es necesaria. Por ejemplo si la aceleración es constante, entonces el gráfico velocidad tiempo es una línea

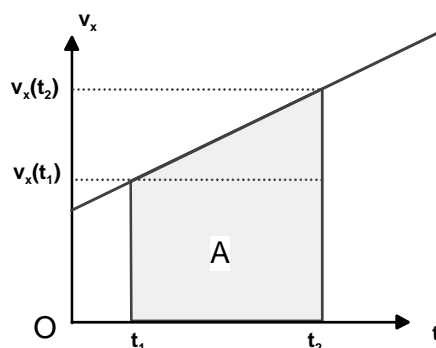


Figura 6.7:

recta. La figura siguiente lo ilustra. La aceleración, es decir la pendiente de la curva, es

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1},$$

de donde

$$v(t_2) - v(t_1) = a(t_2 - t_1),$$

y el desplazamiento que es el área será (área de un rectángulo más área de un triángulo) resulta

$$\begin{aligned} A &= x(t_2) - x(t_1) = v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(v(t_2) - v(t_1))(t_2 - t_1) \\ x(t_2) - x(t_1) &= v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2, \\ x(t_2) &= x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2, \end{aligned}$$

que generaliza el resultado anterior. Además podemos obtener otro resultado aplicable al cálculo de la velocidad media. La velocidad media en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  está definida mediante

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$



Utilizando los resultados anteriores la podemos escribir

$$\begin{aligned}v_m &= \frac{v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2}{t_2 - t_1} = v(t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1), \\v_m &= v(t_1) + \frac{1}{2}(v(t_2) - v(t_1)), \\v_m &= \frac{1}{2}(v(t_1) + v(t_2)),\end{aligned}$$

resultado válido cuando la aceleración es constante. Para aceleración constante la velocidad media es el promedio de las velocidades en los extremos del intervalo.

## 6.5. Movimiento en el espacio

### 6.5.1. En coordenadas cartesianas

Los conceptos son análogos al caso unidimensional. Se definen ahora

- Trayectoria, es la curva que sigue el punto en el espacio al moverse.
- El vector posición del punto móvil en términos de las coordenadas cartesianas del punto

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}. \quad (6.13)$$

- El desplazamiento del punto entre  $t_1$  y  $t_2$  se define mediante

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad \text{m.}$$

- El intervalo de tiempo se llamará

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{s.}$$

- La velocidad media entre  $t_1$  y  $t_2$  se define mediante

$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{m s}^{-1}$$

- Velocidad instantánea en un instante  $t$ . Esta se define mediante un proceso límite

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Este proceso límite define la llamada derivada de la posición

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

- Aceleración media entre  $t_1$  y  $t_2$  se define mediante

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t}.$$

- Aceleración instantánea en un instante  $t$ . Esta se define mediante un proceso límite

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

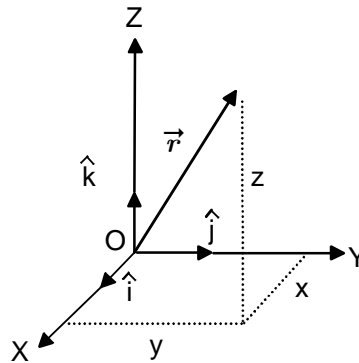
Este proceso límite define la llamada derivada de la velocidad

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Al usar un sistema cartesiano fijo para describir el movimiento los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  son constantes y sólo varían las coordenadas de modo que la velocidad y aceleración pueden expresarse en términos de las derivadas de las coordenadas solamente y resultan ser

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}, \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \end{aligned} \tag{6.14}$$

esto es hay que sumar vectorialmente velocidades y aceleraciones en los distintos ejes.



Hemos usado la notación común en Física de representar derivadas, cuando ello sea claro, mediante “puntos”, por ejemplo

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- Rapidez. La rapidez de la partícula se define como la magnitud del vector velocidad, es decir

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

que es siempre no negativa.

- Consideraciones generales sobre trayectoria velocidad y aceleración

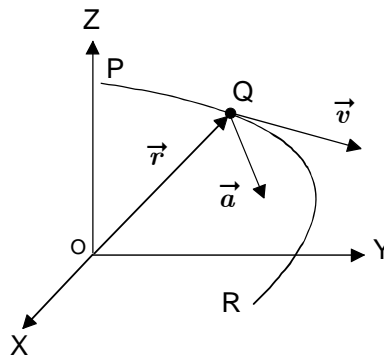


Figura 6.8:

trayectoria es la curva  $PQR$  seguida por la partícula. Cuando la partícula está en  $Q$ , el desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  es un vector que va desde  $Q$  a un punto cercano  $Q'$  que no se muestra. Si el tiempo  $\Delta t \rightarrow 0$  el punto  $Q'$  se acerca a  $Q$ . El desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  tiende a cero en magnitud. Sin embargo la dirección y sentidos no son números y obviamente no tienden a cero. La dirección límite del desplazamiento  $\overrightarrow{QQ'}$  es evidentemente la recta tangente a la curva en el punto  $Q$ . Por lo tanto, la velocidad es tangente a la trayectoria en el punto  $Q$  y así en todos los puntos de la trayectoria. Como veremos más adelante porque es un poco más complicado, al restar dos velocidades para calcular la aceleración  $\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$  y luego hacer  $\Delta t \rightarrow 0$ , la dirección de la aceleración resultará una parte posiblemente tangente y otra parte normal a la trayectoria hacia el llamado centro de curvatura. La excepción es la trayectoria rectilínea donde al restar dos velocidades sobre una misma recta, resultará una aceleración sobre la misma recta.

### 6.5.2. En coordenadas polares

Es posible utilizar muchos sistemas de coordenadas para describir un movimiento. En particular si el movimiento tiene lugar en un plano, las coordenadas polares pueden ser apropiadas. La figura siguiente ilustra tal sistema. Consiste en un eje, llamado eje polar, un origen  $O$  en él. Entonces los puntos del plano tienen una posición especificada por  $r$  la distancia al origen y  $\theta$  el llamado ángulo polar

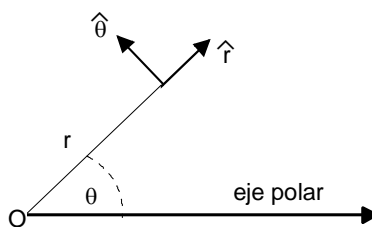


Figura 6.9:

Los vectores unitarios son el vector unitario radial  $\hat{r}$  y el vector unitario transversal  $\hat{\theta}$  cuyo sentido se elige de acuerdo al sentido de crecimiento del ángulo, como se indica en la figura. El eje polar puede estar orientado

arbitrariamente pero en la práctica conviene elegirlo hacia donde esté la partícula inicialmente de manera de tener  $\theta(0) = 0$ . Si una partícula se mueve, entonces serán variables sus coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ . Esto es

$$\begin{aligned} r &= r(t), \\ \theta &= \theta(t), \end{aligned}$$

Siendo  $r(t)$  y  $\theta(t)$  funciones del tiempo. Además, a diferencia del sistema cartesiano, ahora son también variables los vectores unitarios  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ . Ellos pueden expresarse en términos de los vectores unitarios cartesianos constantes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \end{aligned}$$

De aquí derivando respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \dot{\theta} \hat{\theta}, \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{r}. \end{aligned}$$

De estas expresiones es posible obtener

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{r},$$

resultado que será usado en la sección siguiente para calcular derivadas de vectores unitarios en casos más complicados. En definitiva, el vector posición y la velocidad pueden expresarse de la siguiente forma

$$\vec{r} = r\hat{r}, \tag{6.15}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{6.16}$$

La aceleración será

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}, \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}), \end{aligned}$$

o sea

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}. \quad (6.17)$$

Las componentes polares de la aceleración son en consecuencia

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad (6.18)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}, \quad (6.19)$$

componentes polares que llamaremos componentes radial y transversal respectivamente. Hay casos particulares importantes que analizamos a continuación.

### 6.5.3. Movimiento circular

En particular, si la partícula describe una circunferencia de radio  $R$  constante con centro en el origen, luego  $r = R$  y  $\dot{r} = 0$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (6.20)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}. \quad (6.21)$$

Las direcciones de los vectores unitarios son ahora:  $\hat{r}$  normal a la circunferencia y  $\hat{\theta}$  tangencial a la circunferencia. Entonces la velocidad es tangente a la circunferencia y la aceleración siempre tiene una parte de la aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia, la aceleración centrípeta, y en general otra parte tangente a la circunferencia, la aceleración tangencial.

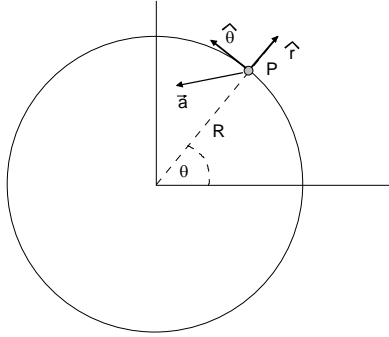


Figura 6.10: Movimiento circular.

A la primera derivada del ángulo respecto al tiempo se la denomina velocidad angular  $\omega$  y a la segunda derivada del ángulo respecto al tiempo, se la denomina aceleración angular  $\alpha$  es decir

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\theta}, \\ \alpha &= \ddot{\theta},\end{aligned}$$

y en términos de éstas se tiene

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}, \quad (6.22)$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{r} + R\alpha\hat{\theta}. \quad (6.23)$$

#### 6.5.4. Caso particular. Movimiento circular uniforme.

Este caso ocurre si la rapidez es constante. Se tiene entonces que  $\alpha = 0$  y luego

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = v\hat{\theta}, \quad (6.24)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}. \quad (6.25)$$

Además, como  $\dot{\theta}$  es constante

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0), \quad (6.26)$$

y por integración se obtiene

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t, \quad (6.27)$$

es decir el ángulo crece linealmente con el tiempo.

#### 6.5.5. Caso particular. Aceleración angular constante

Este caso ocurre si la aceleración angular es constante. En general, si la aceleración angular es constante (no nula) se obtendría por integración

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) + \alpha t, \quad (6.28)$$

y además

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad (6.29)$$

que muestran que la rapidez angular  $\dot{\theta}$  varía linealmente con el tiempo y el ángulo varía cuadráticamente con el tiempo.

### 6.5.6. Notación alternativa

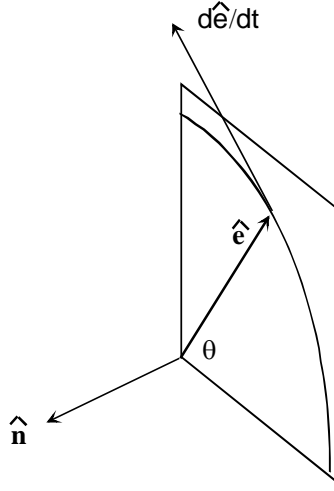
Algunos prefieren la notación  $\dot{\theta}(t) = \omega$  y  $\ddot{\theta} = \alpha$ , de manera que las relaciones anteriores pueden escribirse

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t, \quad (6.30)$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (6.31)$$

### 6.5.7. Derivadas de los vectores unitarios

En muchos sistemas de coordenadas si el punto se mueve, los vectores unitarios cambian de dirección y son por lo tanto vectores variables.



Si un vector unitario  $\hat{e}$  como el de la figura varía con el tiempo porque el ángulo  $\theta$  varía con el tiempo, entonces su derivada es la velocidad de su punta. Si recuerda la última nota de la sección anterior, la derivada puede ser obtenida mediante el producto cruz  $\dot{\theta}\hat{n} \times \hat{e}$  o sea

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = (\dot{\theta}\hat{n}) \times \hat{e}$$

Si hay más ángulos variables debemos sumar vectorialmente los cambios obteniendo

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = (\dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\hat{m} + \dots) \times \hat{e} = \vec{\omega} \times \hat{e} \quad (6.32)$$

Donde  $\vec{\omega}$  se denomina la velocidad angular del movimiento de  $\hat{e}$ . Los vectores unitarios  $\hat{n}$ ,  $\hat{m}$  son perpendiculares a los planos donde se definen los ángulos.



## 6.5.8. Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas

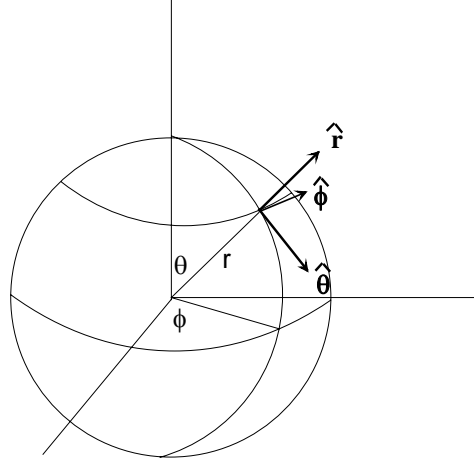


Figura 6.11:

Las coordenadas esféricas son:  $r$  la distancia al origen,  $\theta$  el ángulo polar y  $\phi$  el ángulo azimutal. Como el vector posición es

$$\vec{r} = r\hat{r},$$

el cálculo de la velocidad y de la aceleración requiere derivar los vectores unitarios, lo cual es más fácil realizar con lo explicado anteriormente, ecuación (6.32).

En efecto para coordenadas esféricas

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{\phi}$$

y como

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$$

tenemos que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi} \quad (6.33)$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{dt} &= \left( \dot{\phi}(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) + \dot{\theta} \hat{\phi} \right) \times \hat{r} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \left( \dot{\phi}(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) + \dot{\theta} \hat{\phi} \right) \times \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \left( \dot{\phi}(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) + \dot{\theta} \hat{\phi} \right) \times \hat{\phi}\end{aligned}\tag{6.34}$$

y haciendo los productos cruz se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\phi} \hat{\phi} \sin \theta + \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi} - \dot{\theta} \hat{r} \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\dot{\phi}(\cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \hat{r})\end{aligned}$$

### 6.5.9. Velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt} r \hat{r} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r(\dot{\phi} \hat{\phi} \sin \theta + \dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \sin \theta + r \dot{\theta} \hat{\theta}\end{aligned}\tag{6.35}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\tag{6.36}$$

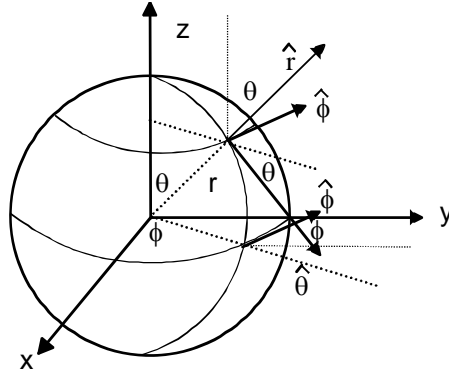
### 6.5.10. Aceleración

Omitimos los detalles, pero los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta &= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + r \ddot{\phi} \sin \theta\end{aligned}\tag{6.37}$$

### 6.5.11. Vectores unitarios esféricos

Puede ser de interés relacionar con los vectores unitarios cartesianos. Para ello la siguiente figura es más apropiada



Los vectores  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  tienen evidentemente proyecciones en el eje  $z$  y en la dirección  $\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$ , de modo que resultan

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \sin \theta (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) + \cos \theta \hat{k}, \\ \hat{\theta} &= \cos \theta (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) - \sin \theta \hat{k},\end{aligned}$$

y el otro tiene sólo componentes en el plano  $xy$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}.$$

### 6.5.12. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son: la altura  $z$  sobre el plano  $OXY$ , la distancia  $\rho$  de la proyección del punto en el plano  $OXY$  al origen y el ángulo que forma la línea del origen a la proyección con el eje  $OX$ .

Como hay un sólo ángulo variable, la velocidad angular resulta

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k},$$

y el vector posición es

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}.$$

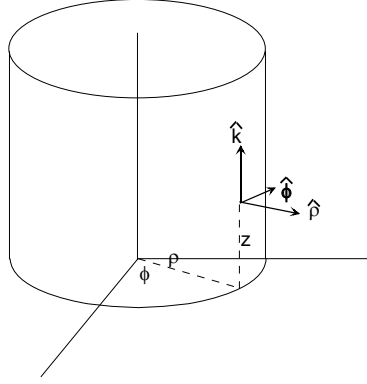


Figura 6.12:

Calculemos las derivadas de los vectores unitarios

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{k} \times \hat{\rho} = \dot{\phi}\hat{\phi}, \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{k} \times \hat{\phi} = -\dot{\phi}\hat{\rho},\end{aligned}$$

de modo que derivando el vector posición resulta

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}), \\ &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{z}\hat{k}, \\ &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k},\end{aligned}\tag{6.38}$$

y derivando el vector velocidad resulta para la aceleración

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}) \\ &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{d}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k} \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.\end{aligned}\tag{6.39}$$

En resumen

$$\begin{aligned}
 v_\rho &= \dot{\rho} \\
 v_\phi &= \rho \dot{\phi} \\
 v_z &= \dot{z} \\
 a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \\
 a_\phi &= 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho \ddot{\phi} \\
 a_z &= \ddot{z}
 \end{aligned}$$

### 6.5.13. Coordenadas intrínsecas

Si una partícula se mueve sobre una curva dada, la posición del punto será una función de la longitud de arco  $s$  medida desde un origen arbitrario  $O'$  en la curva hasta la posición  $P$  del punto en tiempo  $t$ , es decir

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)). \quad (6.40)$$

Aquí

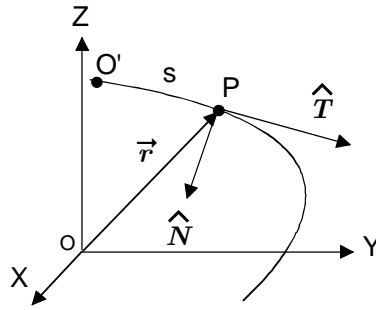


Figura 6.13:

- $\hat{T}(s)$  representa al vector unitario tangente a la trayectoria en el lugar donde está la partícula móvil.
- $\hat{N}(s)$  representa al vector unitario normal a la trayectoria y hacia el centro de curvatura, en el lugar donde está la partícula móvil

Puede demostrarse (vea apéndice) que la velocidad y aceleración están dadas por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{T} = v\hat{T}. \quad (6.41)$$

y

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}, \quad (6.42)$$

y para movimientos en un plano, es suficiente considerar

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v},$$

y

$$\hat{N} = \pm \hat{k} \times \hat{T},$$

donde  $\hat{k}$  es perpendicular al plano del movimiento y el signo debe elegirse de modo que  $\hat{N}$  resulte hacia el centro de curvatura. El llamado radio de curvatura  $\rho$  puede calcularse si se conoce la trayectoria en forma cartesiana  $y = y(x)$  mediante

$$\rho = \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

## 6.6. Resumen

Por su utilidad se presentan resumidamente los resultados para las componentes de la velocidad y aceleración en los sistemas estudiados en la sección anterior

cartesianas		
$v_x = \dot{x}$	$v_y = \dot{y}$	$v_z = \dot{z}$
$a_x = \ddot{x}$	$a_y = \ddot{y}$	$a_z = \ddot{z}$

polares	
$v_r = \dot{r}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

cilíndricas		
$v_\rho = \dot{\rho}$	$v_\phi = \rho\dot{\phi}$	$v_z = \dot{z}$
$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$	$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$	$a_z = \ddot{z}$

esféricas		
$v_r = \dot{r}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$v_\phi = r\dot{\phi} \sin \theta$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$	$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta$
$-r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$	$-r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$	$+r\ddot{\phi} \sin \theta$
intrínsecas		
$v_T =  \vec{v}  = v$	$v_N = 0$	
$a_T = \dot{v}$	$a_N = v^2/\rho$	

## 6.7. Movimiento de proyectiles

El movimiento de proyectiles en la vecindad de la superficie terrestre, es un caso de movimiento con aceleración constante. La aceleración de gravedad es de magnitud constante  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ , vertical y dirigida hacia abajo. Entonces se tiene que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = -g\hat{j}, \quad (6.43)$$

donde el eje  $OY$  es vertical hacia arriba.

NOTA 6.3 Se despreciarán efectos causados por el roce con el aire y los efectos que produce la rotación terrestre.

### 6.7.1. Análisis del movimiento

Si un objeto es lanzado desde una altura  $h$  del eje  $y$  con rapidez inicial  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, ver figura ??, entonces se tiene que la aceleración del objeto está verticalmente dirigida hacia abajo. Si el eje  $Ox$  es horizontal y el eje  $Oy$  es vertical dirigido hacia arriba, entonces en componentes se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= -g, \end{aligned}$$

de modo que por integración se tiene que las componentes de velocidad y posición son

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha, \\
x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\
\dot{y}(t) &= v_0 \sin \alpha - gt, \\
y(t) &= h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2,
\end{aligned} \tag{6.44}$$

### 6.7.2. Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo entre las coordenadas de posición se obtiene

$$y = h + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{6.45}$$

### 6.7.3. Angulo de disparo

Aquí responderemos la siguiente pregunta. Si un proyectil es disparado desde un punto  $(0, h)$  con rapidez inicial dada  $v_0$  ¿es posible pasar por un punto de coordenadas  $(x, y)$ ? Para dar en un blanco a un punto  $(x, y)$  debemos averiguar si existe un ángulo de disparo adecuado. Este puede despejarse de la trayectoria, escrita en la forma

$$y = h + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha), \tag{6.46}$$

que constituye una ecuación de segundo grado para  $\tan \alpha$  y cuya solución es

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{(v_0^4 - 2gyv_0^2 + 2ghv_0^2 - g^2x^2)}}{gx}. \tag{6.47}$$

### 6.7.4. Parábola de seguridad

La existencia del ángulo de disparo depende del signo de la cantidad subradical. Si ella es positiva, hay dos ángulos. Si ella es negativa el punto  $(x, y)$  no es alcanzable. Si la cantidad subradical en la expresión anterior es justo cero, estamos en la frontera de la región alcanzable por los disparos puesto que para puntos más lejanos la cantidad subradical es negativa. Entonces la ecuación de esa curva frontera será

$$v_0^4 - 2gyv_0^2 + 2ghv_0^2 - g^2x^2 = 0,$$



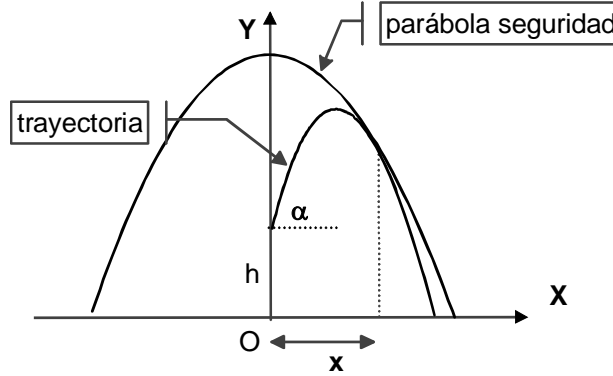
de donde despejamos

$$y = h + \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2. \quad (6.48)$$

Para llegar a puntos en el límite, o sea sobre la parábola de seguridad, el ángulo de disparo estará dado por

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx}. \quad (6.49)$$

Aquí,  $x$  es la abscisa del punto donde la trayectoria toca tangente a la parábola de seguridad y  $\alpha$  es el ángulo adecuado de disparo.



Los conceptos de esta sección son especialmente útiles cuando se trata de maximizar el alcance de un proyectil en cualquier dirección. Por ejemplo para maximizar el alcance al nivel del suelo de un proyectil disparado desde una altura  $h$ , basta hacer  $y = 0$  en la parábola de seguridad

$$h + \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2 = 0,$$

de aquí el alcance máximo será

$$x = \sqrt{(v_0^2 + 2gh)} \frac{v_0}{g},$$

y el ángulo para lograrlo será

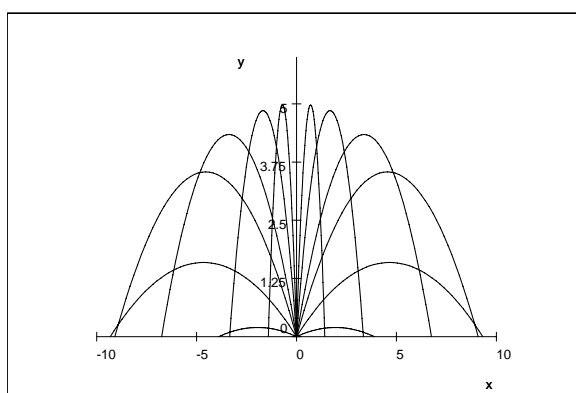
$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}, \quad (6.50)$$

menor de  $45^\circ$  a menos que  $h = 0$ .

### 6.7.5. Formulación alternativa (requiere más matemáticas)

Para una dada posición inicial del disparo y una dada rapidez, si variamos los ángulos de disparo, tenemos una familia de trayectorias, las cuales se muestran en la figura que sigue para varios ángulos de disparo

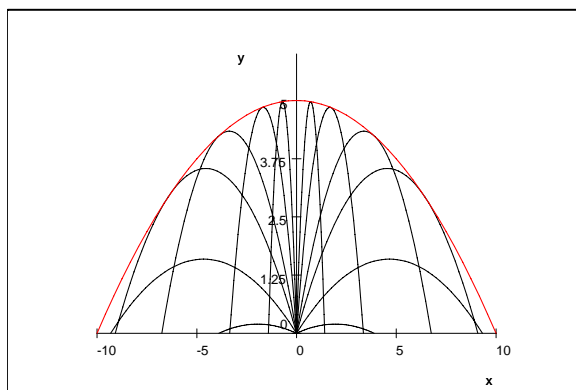
$$y(x, \alpha) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$



Hemos tomado  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  y  $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$

La envolvente de esa familia de curvas, que es tangente a todas las curvas de la familia, es la parábola de seguridad

$$f(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$



La condición matemática es que donde se tocan la envolvente con alguna curva de la familia, ellas son tangentes, es decir

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= f(x), \\ y(x + dx, \alpha + d\alpha) &= f(x + dx) \\ \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial x} &= \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Desarrollando la segunda

$$y(x, \alpha) + \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial x} dx + \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Se cancelan dos términos quedando

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Para nuestro caso

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \\ 0 &= x \sec^2 \alpha - \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^3 \alpha} \sin \alpha, \end{aligned}$$

debemos eliminar  $\alpha$ . De la segunda

$$0 = 1 - \frac{gx}{v_0^2} \tan \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx},$$

reemplazamos obteniendo

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2}\right), \end{aligned}$$

esto es

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (6.51)$$

### 6.7.6. Parábola de seguridad en forma polar

Si colocamos el origen donde está el cañón y elegimos al eje  $OX$  como eje polar, tendremos en coordenadas polares

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

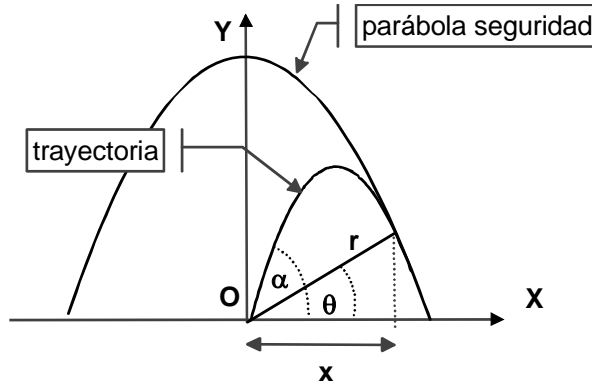
y si reemplazamos en (6.51) se obtiene

$$r \sin \theta = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gr^2 \cos^2 \theta}{2v_0^2},$$

de donde podemos despejar  $r$  obteniendo (algo de álgebra)

$$r = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}, \quad (6.52)$$

la forma polar de la parábola de seguridad. Esta forma es particularmente útil para encontrar el alcance máximo  $r$  en una determinada dirección  $\theta$ .



Por ejemplo podemos relacionar el ángulo de disparo  $\alpha$  con el ángulo  $\theta$  para el alcance máximo  $r$ . Recuerde que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{v_0^2}{gx}, \\x &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

entonces

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0^2}{gr \cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Esta expresión puede simplificarse porque existe la identidad

$$\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \tan \left( \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta \right),$$

luego

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta.$$

Esta expresión da los ángulos de disparo  $\alpha$  para maximizar el alcance en una dirección arbitraria  $\theta$ . Si  $\theta = 0$  entonces  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  entonces  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

## 6.8. Movimiento relativo

Desde hace bastante tiempo (mucho antes de la teoría de la relatividad) se ha reconocido que el movimiento es relativo. Si hay dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro, entonces los observadores en ambos sistemas determinarán posiciones relativas distintas y velocidades relativas distintas y relacionadas entre sí según cual sea el movimiento de un sistema respecto al otro. Primero analizaremos que ocurre si un sistema se considera fijo, y el otro se traslada sin rotaciones respecto al primero. Siguiendo a Newton, supondremos que el tiempo es absoluto, o sea que transcurre igual en ambos sistemas de referencia.

### 6.8.1. Traslación de un sistema

La figura ilustra como están relacionadas las posiciones para sistemas dos sistemas, figura (8.1), que se trasladan, uno respecto de otro, con velocidad relativa  $\vec{v}_{O'}$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}', \quad (6.53)$$

pero

$$\vec{r}_{O'} = \vec{v}_{O'} t,$$

luego

$$\vec{r}' = \vec{v}_{O'} t + \vec{r}.$$

De la relación entre posiciones, derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}', \quad (6.54)$$

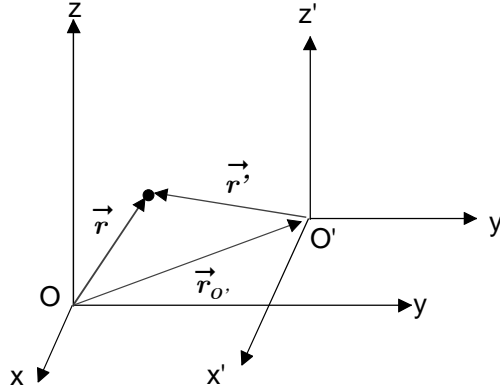


Figura 6.14: transformación de Galileo

la llamada transformación de Galileo de velocidades. En el apéndice se discute porqué esta transformación ha debido modificarse si las velocidades se acercan a la velocidad de la luz.

### 6.8.2. Movimiento general de un sistema

En general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. En el apéndice se demuestra que

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}', \quad (6.55)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}', \quad (6.56)$$

siendo  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ . Debe observarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}.$$

Estas son las expresiones necesarias para realizar el estudio dinámico de los movimientos en sistemas de referencia que rotan. De hecho, nuestro propio sistema de referencia, la Tierra, tiene una rotación, respecto a su eje, prácticamente constante y afortunadamente no muy alta. Una vuelta por día.

## 6.9. Ejercicios

EJERCICIO 6.1 *La posición de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas está dada*

$$x(t) = 1 + 8t - 2t^2,$$

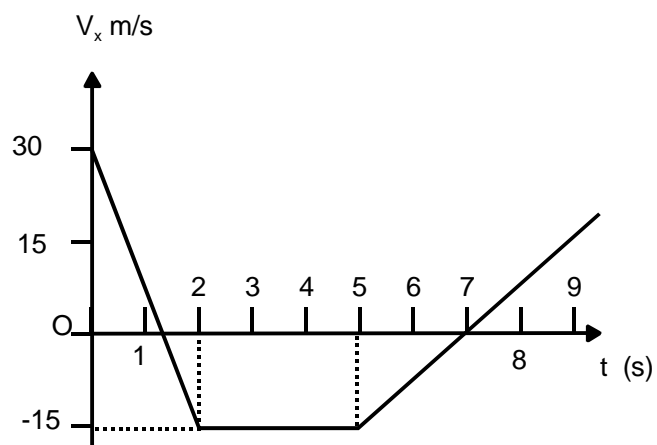
*donde la posición está en metros y el tiempo en segundos. Determine*

- a) La velocidad en  $t = 5$  s.*
- b) La aceleración en  $t = 2$  s.*
- c) El instante en que la partícula cambia su sentido de movimiento.*
- d) El desplazamiento de la partícula entre  $t = 0$  y  $t = 4$  s.*
- e) El espacio recorrido entre  $t = 0$  y  $t = 4$  s.*
- f) El espacio recorrido entre  $t = 0$  y  $t = 5$  s.*

EJERCICIO 6.2 *Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas con aceleración constante. En el instante inicial pasa por la posición  $x(0) = -10$  m con una velocidad  $v(0) = -20$  m s<sup>-1</sup> y en  $t = 3$  s su posición es  $x(3) = -52$  m. Determine*

- a) La posición de la partícula en función del tiempo  $x(t)$ . (o ecuación itinerario)*
- b) El espacio recorrido por la partícula entre  $t = 3$  s y  $t = 6$  s.*
- c) La velocidad media entre  $t = 4$  s y  $t = 7$  s.*
- d) Los intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen.*

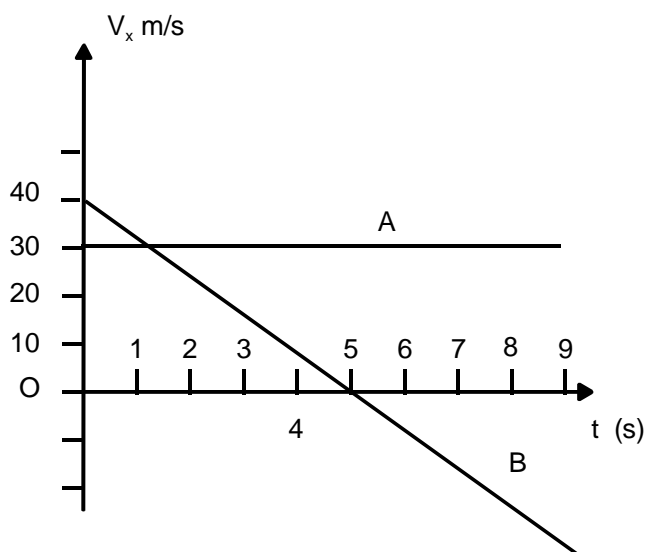
EJERCICIO 6.3 *El gráfico siguiente ilustra la variación de la velocidad  $v(t)$  de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas con el tiempo. Si en  $t = 0$  la partícula está en el origen del sistema, determine*



- a) La aceleración de la partícula en  $t = 1$  s.
- b) El desplazamiento de la partícula entre  $t = 0$  s y  $t = 3$  s.
- c) La velocidad media de la partícula entre  $t = 4$  s y  $t = 9$  s.
- d) La posición de la partícula en función del tiempo  $x(t)$  (ecuación itinerario) en el intervalo de  $t = 0$  s a  $t = 2$  s.
- e) Los intervalos de tiempo en que la partícula se dirige hacia el origen.

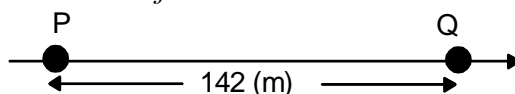
**EJERCICIO 6.4** En el gráfico de la figura están representadas las velocidades de dos partículas A y B que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas. Determine





- La aceleración de B.
- Espacio recorrido por A desde  $t = 0$  hasta cuando B alcanza la velocidad  $v_B = 30 \text{ m s}^{-1}$ .
- El desplazamiento de B en el intervalo de  $t = 0 \text{ s}$  a  $t = 10 \text{ s}$ .
- La posición de la partícula A en función del tiempo  $t$ , si su posición inicial es  $x(0) = 8 \text{ m}$ .

**EJERCICIO 6.5** Dos partículas A y B se mueven con velocidad constante sobre un mismo eje OX en sentido contrario de manera que en  $t = 0$  cuando B pasa por Q su velocidad es  $v_B(0) = -5 \text{ m s}^{-1}$ , A pasa por P con velocidad  $v_A(0) = 6 \text{ m s}^{-1}$ . La distancia entre los puntos P y Q es 142 m. Determine las desaceleraciones constantes que deben aplicar ambas partículas para que se detengan simultáneamente justo antes de chocar.



**EJERCICIO 6.6** Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje OX con una rapidez constante de  $50 \text{ m s}^{-1}$  durante 10 s. A partir de este último

*instante acelera constantemente durante 5 s hasta que su rapidez es  $80 \text{ m s}^{-1}$ . Determine:*

- a) La aceleración de la partícula en los primeros 10 s.*
- b) La aceleración de la partícula entre  $t = 10 \text{ s}$  y  $t = 15 \text{ s}$ .*
- c) El desplazamiento de la partícula entre  $t = 0 \text{ s}$  y  $t = 15 \text{ s}$ .*
- d) La velocidad media de la partícula entre  $t = 10 \text{ s}$  y  $t = 15 \text{ s}$ .*

**EJERCICIO 6.7** *Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, recorre en los dos primeros segundo un espacio de 16,72 m y durante los dos segundos siguientes un espacio de 23,46 m. Determine*

- a) El espacio que recorre en los siguientes cuatro segundos.*
- b) La velocidad inicial.*
- c) La aceleración del cuerpo.*

**EJERCICIO 6.8** *Dos partículas A y B salen al mismo tiempo desde el origen de un sistema de coordenadas moviéndose en el sentido positivo del eje OX. La partícula A tiene una velocidad inicial de  $v_A(0) = 18 \text{ m s}^{-1}$  y una aceleración constante  $a_A = 4 \text{ m s}^{-2}$ , mientras que la partícula B tiene una velocidad inicial de  $v_B(0) = 10 \text{ m s}^{-1}$  y una aceleración constante  $a_B = 8 \text{ m s}^{-2}$ . Determine el instante en que las partículas se encuentran nuevamente.*

**EJERCICIO 6.9** *En una carrera de 100 m dos jóvenes A y B cruzan la meta empatados, marcando ambos 10,2 s. Si, acelerando uniformemente, A alcanza su rapidez máxima a los 2 s y B a los 3 s y ambos mantienen la rapidez máxima durante la carrera, determine:*

- a) Las aceleraciones de A y B.*
- b) Las rapideces máximas de A y B.*
- c) El que va adelante a los 10 s y la distancia que los separa en ese instante.*

EJERCICIO 6.10 Una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje  $OX$  parte del origen con una velocidad inicial  $v(0) = 5 \text{ m s}^{-1}$  y desacelera constantemente con una aceleración  $a = -10 \text{ m s}^{-2}$ . Determine la posición máxima que alcanza sobre el eje de movimiento y la velocidad cuando pasa nuevamente por el origen.

EJERCICIO 6.11 Si una partícula en que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje  $OX$  parte del origen con velocidad nula y aceleración constante  $a$ , demuestre que las distancias recorridas en cada segundo aumentan en la proporción

$$1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

EJERCICIO 6.12 Si una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje  $OX$  parte del origen con velocidad  $V_0$  y desacelera con aceleración constante  $-a$ , demuestre que la partícula regresará al origen en un tiempo

$$t = \frac{2V_0}{a}.$$

EJERCICIO 6.13 Dos partículas  $A$  y  $B$  que se mueven en movimiento unidimensional sobre el eje  $OX$  parten del origen. La partícula  $A$  parte en  $t = 0$  con velocidad  $V_A(0) = 10 \text{ m s}^{-1}$ . La partícula  $B$  parte en  $t = 1 \text{ s}$  con velocidad  $V_B(1) = -10 \text{ m s}^{-1}$ . Ambas desaceleran con aceleración de magnitud  $a = 6 \text{ m s}^{-2}$ . Determine la máxima distancia entre ellas antes que se crucen.

EJERCICIO 6.14 Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza una partícula con rapidez  $v_0$  formando un ángulo de  $37^\circ$  con la horizontal y choca al cabo de  $3 \text{ s}$  con una pared en el punto  $(x, y)$ . Si se cambia el ángulo de lanzamiento a  $53^\circ$  con la horizontal, manteniendo la misma rapidez de lanzamiento  $v_0$ , la partícula impacta la pared en el punto  $(x, y+7)$ . a) Determinar el tiempo que demora el proyectil lanzado a  $53^\circ$  sobre la horizontal en llegar a la pared. b) Determine la rapidez de lanzamiento de la partícula.

EJERCICIO 6.15 Por un tubo de diámetro despreciable ubicado en el suelo, sale un chorro de agua en un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal (dentro del tubo las partículas de agua tienen distintas velocidades). El grueso del agua forma en el suelo un charco aproximadamente circular de radio  $2,2 \text{ m}$  cuyo centro se encuentra ubicado a  $12,2 \text{ m}$  del origen. Determine entre que valores varía la rapidez con que sale el grueso del agua por el tubo despreciando las fuerzas viscosas.

EJERCICIO 6.16 Una partícula en  $t = 0$  pasa por el origen de un sistema de coordenadas fijo en el espacio con velocidad  $\vec{v}_0 = 2\hat{i} - \hat{k} \text{ m s}^{-1}$  moviéndose en el espacio con una aceleración que en cualquier instante está dada por la expresión  $\vec{a}(t) = t\hat{i} - \hat{j} \text{ m s}^{-2}$ . Determine en  $t = 2 \text{ s}$ : a) Los vectores posición y velocidad de la partícula. b) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.

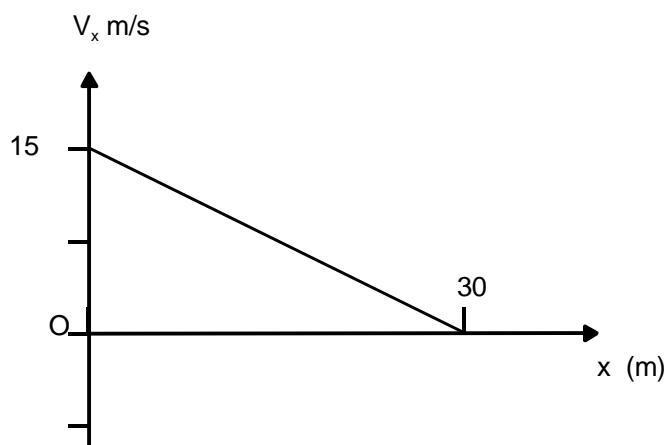
EJERCICIO 6.17 Un tanque se desplaza con velocidad constante de  $10\hat{i} \text{ m s}^{-1}$  por una llanura horizontal. Cuando  $t = 0$ , lanza un proyectil que da en el blanco a  $9 \text{ km}$ . Si la inclinación del cañón respecto de la horizontal es  $37^\circ$ , determine la rapidez con que sale el proyectil respecto del cañón.

EJERCICIO 6.18 Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza un proyectil en dirección de un objeto situado en la posición  $(2h; h)$ . Al momento de lanzar el proyectil, se suelta el objeto que cae por efecto de la gravedad. Determine en función de  $h$  la separación entre el proyectil y el objeto cuando el proyectil haya recorrido horizontalmente una distancia  $h$ .

EJERCICIO 6.19 Desde un barco que se mueve a  $20 \text{ km h}^{-1}$  se ve a otro barco que está a  $20 \text{ km}$  cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de  $15 \text{ km h}^{-1}$ . ¿ Después de cuánto tiempo la distancia que separa los barcos es mínima?

EJERCICIO 6.20 Una partícula  $A$  es lanzada sobre una línea recta horizontal con cierta velocidad. Su aceleración es constante. Un segundo más tarde y desde el mismo lugar otra partícula  $B$  es lanzada tras la primera con una velocidad igual a la mitad de la de  $A$  y una aceleración el doble de  $A$ . Cuando  $B$  alcanza a  $A$ , las rapidezces son  $22 \text{ m s}^{-1}$  y  $31 \text{ m s}^{-1}$  respectivamente. Calcule la distancia que las partículas han viajado.

EJERCICIO 6.21 La velocidad de una partícula en el movimiento rectilíneo decrece desde  $15 \text{ m s}^{-1}$  a una velocidad que tiende a cero, cuando  $x = 30 \text{ m}$  tal como lo muestra la figura. Demuestre que la partícula nunca alcanzará los  $30 \text{ m}$  y calcule la aceleración cuando  $x = 18 \text{ m}$ .



EJERCICIO 6.22 Una partícula se mueve a lo largo de la curva  $r = 3\theta$  tal que  $\theta = 2t^3$  donde  $t$  se mide en segundos,  $r$  en metros y  $\theta$  en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en coordenadas polares para  $\theta = 0,2$  rad.

EJERCICIO 6.23 Desde una altura de 20 m, con respecto al eje  $X$  de un sistema de coordenadas ubicado en Tierra, se lanza una partícula  $A$  con una rapidez de  $50 \text{ m s}^{-1}$  y formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Simultáneamente y desde la posición  $X = 200 \text{ m}$  se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil  $B$  de modo que cuando la partícula  $A$  llega a Tierra, el proyectil  $B$  está en su altura máxima. Calcular: a) el tiempo transcurrido para que la distancia que separa  $A$  de  $B$  sea mínima; b) la velocidad relativa de  $A$  respecto a  $B$  en  $\text{m s}^{-1}$ .

EJERCICIO 6.24 Un cañón está montado sobre un promontorio de altura  $h$ . Se dispara un proyectil con una rapidez  $v_0$  y ángulo de elevación  $\alpha$ . Demuestre que el alcance horizontal  $d$ , distancia a lo largo del plano horizontal que pasa por la base del promontorio, es:

$$d = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left[ v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right].$$

EJERCICIO 6.25 Un cañón es montado sobre un promontorio de altura  $h$ . Se dispara un proyectil con una rapidez de salida  $v_0$ . Demuestre que el alcance

horizontal  $d$  es máximo cuando el ángulo de elevación es:

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{\frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2gh}}.$$

EJERCICIO 6.26 Una partícula es lanzada al espacio de modo que su alcance sobre el plano horizontal es  $R$  y su máxima altura  $h$ . Demuestre que el, alcance horizontal máximo, con la misma rapidez de salida  $v_0$ , es:

$$2h + \frac{R^2}{8h}.$$

EJERCICIO 6.27 Se monta un cañón sobre la base de un plano inclinado que forma un ángulo  $\beta$  con la horizontal. Este cañón dispara un proyectil hacia la parte superior del plano, siendo el  $\alpha$  ángulo que forma la velocidad de salida del proyectil con el plano. Calcule el ángulo de elevación del plano para que el proyectil impacte sobre el plano inclinado paralelamente a la horizontal.

EJERCICIO 6.28 Un proyectil se dispara con rapidez inicial  $v_0$ , y ángulo de inclinación variable. ¿Para qué ángulo el alcance del proyectil será máximo a lo largo de la recta  $y = x \tan \theta$  ?.

EJERCICIO 6.29 Un aeroplano que vuela horizontalmente a 1 km de altura y con una rapidez de 200 km h<sup>-1</sup>, deja caer una bomba contra un barco que viaja en la misma dirección y sentido con una rapidez de 20 km h<sup>-1</sup>. Pruebe que la bomba debe soltarse cuando la distancia horizontal entre el avión y el barco es de 705 m (considere  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ).

EJERCICIO 6.30 Se deja caer una pelota verticalmente sobre un punto A de un plano inclinado que forma un ángulo de 20° con un plano horizontal. La pelota rebota formando un ángulo de 40° con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote tiene lugar en B a distancia 10 m de A más abajo del plano, calcule:

- a) el módulo de la velocidad con la cual rebota la pelota en A,
- b) el tiempo transcurrido desde que la pelota rebota en A hasta que la pelota rebota en B.

EJERCICIO 6.31 Si el alcance máximo horizontal de un proyectil es  $R$ , calcular el ángulo  $\alpha$  que debe usarse, con la misma rapidez de lanzamiento, para que el proyectil impacte en un blanco situado al mismo nivel de lanzamiento y a una distancia  $R/2$ .

EJERCICIO 6.32 Una partícula se mueve a lo largo de una parábola  $y = x^2$  de tal manera que para todo instante se cumple que  $v_x = 3 \text{ m s}^{-1}$ . Calcule la velocidad y aceleración de la partícula cuando  $x = 2/3 \text{ m}$ .

EJERCICIO 6.33 Una partícula se mueve en el plano  $XY$  de acuerdo a la ley:  $a_x = -4 \sin t$ ;  $a_y = 3 \cos t$ . Se sabe que cuando  $t = 0$ ,  $x = 0$ ;  $y = 3$ ;  $v_x = 4$ ;  $v_y = 0$ . Encuentre la expresión cartesiana de la trayectoria y además calcule la velocidad cuando  $t = \pi/4$ . Exprese sus magnitudes en unidades SI.

EJERCICIO 6.34 Una partícula se mueve sobre el plano  $XY$  de manera que sus coordenadas están dadas por  $x = t$ ;  $y = t^3/6$ , siendo  $t$  la variable independiente tiempo. Determine para  $t = 2 \text{ s}$  la magnitud de la aceleración, las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en dicho instante.

EJERCICIO 6.35 Una partícula se mueve describiendo una circunferencia de acuerdo a la ley  $s = t^3 + 2t^2$ , donde  $s$  se mide en metros y  $t$  en segundos. Si la magnitud de la aceleración de la partícula es  $16\sqrt{2} \text{ m s}^{-2}$  cuando  $t = 2 \text{ s}$ , calcule el radio de la circunferencia.

EJERCICIO 6.36 Una partícula describe una trayectoria dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:  $x = t$ ;  $y = t^2/2$ . Determinar la curva y el radio de curvatura.

EJERCICIO 6.37 Dada la curva:  $x = t$ ;  $y = t^2$ ; calcular: a) la curvatura  $K$ , b) el radio de curvatura en el punto  $(\sqrt{a}; a)$ .

EJERCICIO 6.38 Demuestre que la curvatura de la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  es:

$$K = \frac{a^4 b}{[a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

EJERCICIO 6.39 La aceleración de una partícula es:  $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{i} + 5\cos t\hat{j}$ . En el instante  $t = 0$  se encuentra en el punto  $P(1; 3)$  siendo su velocidad  $\vec{v} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ . Encuentre su posición y velocidad para cualquier instante  $t > 0$ .

EJERCICIO 6.40 Una partícula se mueve sobre una trayectoria tal que su vector de posición en cualquier instante es:  $\vec{r} = t\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j} + t\hat{k}$ . Determine: a) la velocidad, b) la rapidez c) la aceleración, d) la magnitud de la aceleración tangencial y e) la magnitud de la aceleración normal.

EJERCICIO 6.41 Una partícula se mueve en el plano  $XY$  de tal manera que:  $a_x = 4pe^{4t}$  y  $v_y = 2\pi q \cos 2\pi t$  donde  $p$  y  $q$  son constantes positivas. Cuando  $t = 0$ ;  $x = p/4$ ;  $y = 0$ ;  $v_x = p$ . Determinar: a) el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula en función del tiempo; b) la trayectoria de la partícula.

EJERCICIO 6.42 Una partícula se mueve en el plano  $XY$  describiendo la curva  $y = \ln x$ ; calcule: a) la rapidez en función de  $x$  y  $\dot{x}$ , b) la magnitud de la aceleración en función de  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ , c) si  $\dot{x} = c$ , calcule en  $x = a$ , las magnitudes de la aceleración tangencial y normal.

EJERCICIO 6.43 Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo por

$$\begin{aligned}x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2\end{aligned}$$

Determine a) Las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración. b) Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración. c) Las componente normal y tangencial de la velocidad y aceleración. d) La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas. e) La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

EJERCICIO 6.44 Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes  $a$  y  $b$  centrada en el origen de un sistema de coordenadas con rapidez constante  $v_0$ , siendo la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro. b) El tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse. c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero explique el método a seguir.



EJERCICIO 6.45 *La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como*

$$r = \frac{c}{1 - e \cos \theta}$$

*siendo  $c$  y  $e$  constantes. Si el ángulo varía proporcionalmente al tiempo  $t$  con constante de proporcionalidad  $\lambda$ , determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.*

EJERCICIO 6.46 *Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio  $R$  con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza  $n$  vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.*

EJERCICIO 6.47 *Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de  $12,5 \text{ m s}^{-1}$ . La pelota llega a tierra  $4,25 \text{ s}$ , después. Determine: a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio. b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.*

EJERCICIO 6.48 *Se deja caer un cuerpo desde una altura inicial de  $33 \text{ m}$ , y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de  $1 \text{ m s}^{-1}$ . Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de  $18 \text{ m}$ .*

EJERCICIO 6.49 *Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo  $68,3 \text{ m}$ . Encontrar la altura desde donde cae.*

EJERCICIO 6.50 *Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra. Desde la misma altura se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra,  $2 \text{ s}$  más tarde, con una rapidez de  $30 \text{ m s}^{-1}$ . Si ambas golpean el piso simultáneamente, encuentre la altura del acantilado.*

EJERCICIO 6.51 *Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de  $40 \text{ m s}^{-1}$ . Calcule el tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de  $2,5 \text{ m s}^{-1}$  y la distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.*

EJERCICIO 6.52 *Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en  $3 \text{ s}$ . Encuentre la altura desde la cual se soltó y el tiempo total de caída.*

EJERCICIO 6.53 *Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 m de altura con una rapidez de  $180\text{ m s}^{-1}$  y formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Calcule: a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil. b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo. c) La componente normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.*

EJERCICIO 6.54 *Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de  $300\text{ m s}^{-1}$ . El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 m detrás de un cerro cuya altura es de 1000 m ubicado a 1200 m del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.*

EJERCICIO 6.55 *Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.*

EJERCICIO 6.56 *Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 m. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 m del lanza granada, determine: a) La altura mínima que debe subirse el lanza granada. b) La rapidez de lanzamiento. c) El ángulo de lanzamiento.*

EJERCICIO 6.57 *Se dispara a un objeto que se encuentra sobre un plano inclinado en ángulo  $\alpha$ . El disparo se hace desde un punto del plano inclinado con rapidez inicial  $v_0$ . Determine la máxima distancia sobre el plano inclinado alcanzable por el disparo y el ángulo de lanzamiento para lograrlo.*

EJERCICIO 6.58 *Un atleta lanza la bala desde una altura  $h$  con rapidez inicial  $v_0$ . Determine el máximo alcance horizontal a nivel del suelo y el ángulo de disparo necesario para ese alcance.*

EJERCICIO 6.59 *Un cazador que no sabe que los proyectiles caen, dispara directamente a un mono que está sobre un árbol. El mono que tampoco sabe física, se deja caer justo cuando el cazador dispara. Pruebe que el disparo llega justo al mono.*

EJERCICIO 6.60 *En una feria de diversiones, se dispara al blanco sobre una hilera de blancos que pasan frente al que dispara, a una distancia  $d$  con una rapidez  $u_0$ . Los disparos salen con una rapidez  $v_0$ . Determine el ángulo en adelante en que hay que apuntar para dar en el blanco al objeto que pasa justo frente al que dispara.*

EJERCICIO 6.61 Una piedra se deja caer a un pozo de profundidad desconocida. El ruido del impacto en el fondo se escucha un tiempo  $T$  después de soltada la piedra. Si la rapidez del sonido es  $u_s$  determine en términos de  $T$ ,  $u_s$  y  $g$ , la profundidad del pozo.

EJERCICIO 6.62 Una pelota se deja caer desde una altura  $h$  y en cada rebote contra el suelo, la rapidez del rebote es un factor “ $e$ ” de la rapidez que tenía justo antes de chocar contra el suelo ( $e < 1$ ). Determine el tiempo que demora la pelota en quedar en reposo y la distancia total recorrida por la pelota.

EJERCICIO 6.63 Una persona lanza un objeto con rapidez inicial  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal. Determine la aceleración constante con que debe correr la persona, partiendo del reposo, para justo alcanzar el objeto al mismo nivel de lanzamiento.

EJERCICIO 6.64 Un automóvil viaja hacia el norte con una rapidez de  $60 \text{ km h}^{-1}$  en una carretera recta. Un camión viaja en dirección opuesta con una rapidez de  $50 \text{ km h}^{-1}$ . (a) ¿Cuál es la velocidad del automóvil respecto al camión? (b) ¿Cuál es la velocidad del camión respecto al automóvil?

EJERCICIO 6.65 Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Inter estatal a  $80 \text{ km h}^{-1}$  y es seguido por un auto patrulla que viaja a  $95 \text{ km h}^{-1}$ . (a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla? (b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?

EJERCICIO 6.66 Un río tiene una rapidez uniforme de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Un estudiante nada corriente arriba una distancia de  $1 \text{ km}$  y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de  $1,2 \text{ m s}^{-1}$  en aguas tranquilas, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.

EJERCICIO 6.67 Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador, en reposo sobre la orilla del río, determina sus rapidezces que resultan ser de  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.

EJERCICIO 6.68 *Un bote cruza un río que mide de ancho  $D$  y cuya corriente fluye con una rapidez uniforme de  $u$ . El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de  $v \text{ ms}^{-1}$  con respecto al agua. De acuerdo a los datos ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla? ¿ Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?*

EJERCICIO 6.69 *Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.*

EJERCICIO 6.70 *Un avión va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de  $150 \text{ km h}^{-1}$ . Si existe un viento de  $30 \text{ km h}^{-1}$  hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.*

EJERCICIO 6.71 *El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a  $50 \text{ km h}^{-1}$ . Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de  $200 \text{ km h}^{-1}$ , a) ¿ en qué dirección debe dirigirse el avión? b) ¿ cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?*

EJERCICIO 6.72 *Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de  $50 \text{ km h}^{-1}$ . Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de  $60^\circ$  con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto al automóvil y con respecto a la Tierra.*

EJERCICIO 6.73 *Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de  $2,5 \text{ km h}^{-1}$ . El niño está a  $0,6 \text{ km}$  de la orilla y a  $0,8 \text{ km}$  corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino. a) Si el bote procede a su rapidez máxima de  $20 \text{ km h}^{-1}$  con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote? b) ¿*

*Cuál es el ángulo que hace la velocidad  $v$  del bote con respecto a la orilla?  
c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?*

*EJERCICIO 6.74 Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de  $2,5\text{ m s}^{-2}$  se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a: (a) el carro del tren? (b) la estación de tren estacionaria?*

*EJERCICIO 6.75 Un estudiante de la Facultad de Ingeniería está parado sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de  $V\text{ m s}^{-1}$ . El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de  $\alpha$  con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?*



# Dinámica de la partícula

El propósito de la dinámica es predecir el comportamiento futuro de un sistema, en particular de una partícula cuando son conocidas las fuerzas y las restricciones que actúan sobre ella y se conoce el presente. Este conocimiento se da en la forma llamada “condición inicial”. Para una partícula este se expresa en suponer conocidas la posición y velocidad inicial de ella,  $\vec{r}(0)$  y  $\vec{v}(0)$ . Como veremos este propósito es logrado mediante la llamada Mecánica Clásica, salvo excepcionalmente para sistemas que tienen comportamiento caótico y que están fuera del alcance de este curso. Para estudiar el movimiento de un cuerpo puede escogerse algún sistema de referencia arbitrario y entonces el estudio es relativo a ese sistema de referencia. Para hacer dinámica, la elección del sistema de referencia adecuado no es arbitraria, en necesario utilizar sistemas inerciales de referencia, concepto que se explica más adelante.

## 7.1. Leyes de Newton

Desde los tiempos de Galileo se ha reconocido que no es necesario aplicar fuerzas para mantener el movimiento de los cuerpos. Esto evidentemente choca con lo observado diariamente puesto que si se dejan de aplicar fuerzas, los cuerpos se detienen. El problema está en que en realidad no se han dejado de aplicar todas las fuerzas. Normalmente existen fuerzas, llamadas de roce que están presentes y cuya tendencia es frenar los cuerpos. Es difícil eliminarlas, pero si se logra, entonces el movimiento se mantiene. Sin embargo hay otros

detalles. Se mantiene pero ¿respecto a qué sistema de referencia?

### 7.1.1. Primera ley de Newton

La primera ley de Newton suele enunciarse así. Si un cuerpo no está sometido a fuerzas, se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

El problema que es que así enunciada, no puede estar correcta. Si ello es cierto en algún sistema de referencia, inmediatamente deja de ser cierto si el observador está en un sistema acelerado respecto al primero, ver figura. Por ello, para mantenerla, se han definido sistemas de referencia especiales donde ella es cierta.

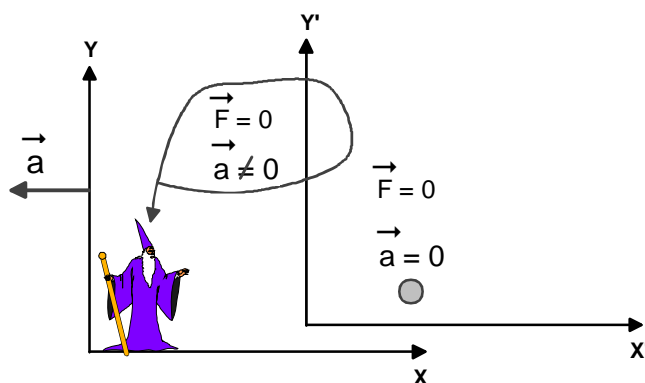


Figura 7.1:

### 7.1.2. Sistema inercial de referencia

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia*. Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre, es decir no sometida a fuerza, tiene velocidad constante o en particular nula. Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de



acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo del sistema FK5. Hay abundantes referencias sobre este tema en la WEB, por ejemplo vea <http://rorf.usno.navy.mil/ICRF/>.

La definición de un sistema inercial reemplaza la primera ley de Newton, puesto que su validez: “la aceleración respecto a un sistema es nula cuando la fuerza es nula”, define lo que se denomina un sistema inercial de referencia.

Así entonces Newton formula sus leyes respecto a un sistema de referencia absoluto o inercial. Si el Universo estuviera vacío uno puede preguntarse que podría ser tal sistema. No existe aparentemente diferencia alguna entre un sistema “acelerado” un sistema rotante “si no hay nada respecto a lo cual establecer la realidad de la “aceleración” de la rotación”. Sin embargo Newton creía firmemente que el espacio mismo existe como algo absoluto, real como una entidad física, respecto al cual los conceptos de aceleración o de rotación podrían definirse. Así Newton dice que un objeto está acelerando cuando lo hace respecto al espacio absoluto.

Pero a mediados de los 1800 un filósofo y físico Ernst Mach llegó con nuevas ideas que además, entre otras cosas, tuvieron un profundo impacto en el pensamiento de Albert Einstein. Las ideas de Mach se entienden del análisis de un balde que contiene agua en su interior. Si el balde se mantiene suspendido y quieto, la superficie del agua permanece plana. Si se hace rotar el balde respecto a la cuerda que lo sostiene, la superficie del agua adquirirá una forma cóncava. ¿Respecto a qué sistema el balde rota?

Si vamos más lejos y nos imaginamos flotando en el espacio interestelar, si uno mira el cielo y ve las estrellas estacionarias uno podría decir que está en reposo y no experimenta fuerza alguna. Justo entonces un compañero de viaje, se acerca y le da un impulso de modo que comienza a rotar. Seguro que se notarán dos efectos: las estrellas parecerán girar en grandes círculos en torno a uno, y uno experimentará fuerzas que tenderán a separar sus brazos y piernas. Si repetimos la misma situación pero en un espacio absolutamente vacío, sin estrellas, galaxias, sólo una total oscuridad, ¿sentiremos esa fuerza si alguien nos coloca en rotación? Según Mach, no. En un universo totalmente vacío no puede haber diferencia entre aceleración o no aceleración. Entre rotación y no rotación. De manera que, según Mach, si cuesta una fuerza acelerar un cuerpo, ello se debe a la existencia de todas las galaxias del Universo.

Posteriormente, Albert Einstein, al desarrollar la teoría general de la re-

latividad introduce el concepto de espacio tiempo, un concepto que tiene existencia real y con propiedades que se ajustan según sea la distribución de masa y energía del Universo. El espacio tiempo es algo absoluto respecto al cual pueden definirse los movimientos de los cuerpos. Sin embargo la teoría de Einstein no confirma totalmente las ideas de Mach. En un Universo vacío, el espacio tiempo no está curvado, está plano, pero existe. De manera que una persona rotando en un Universo vacío, sí sentiría fuerza que tendería a separarle sus brazos y piernas. Podría decirse que las ideas de Mach provocaron de alguna manera el desarrollo de la Teoría general de la relatividad pero la teoría que se desarrolló, no confirmó las ideas que la inspiraron. Una excelente discusión sobre este tema la puede encontrar en el libro de Brian Greene, "The fabric of the Cosmos". En la actualidad el espacio tiempo es el sistema absoluto de referencia y los observadores inerciales son los que se mueven libremente, es decir no sometidos a fuerzas eléctricas, magnéticas u otras. Es decir los observadores inerciales son los observadores que están en caída libre.

### 7.1.3. Segunda ley de Newton

En un sistema inercial de referencia (el espacio absoluto de Newton) las fuerzas son las causas de las aceleraciones en la forma que estableció Newton. En los sistemas de referencia no inerciales, las aceleraciones no son necesariamente causadas por fuerzas. Respecto a un sistema inercial de referencia la aceleración es causada por la fuerza resultante  $\vec{F}$  de acuerdo a

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (7.1)$$

o bien

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (7.2)$$

siendo  $\vec{a}$  la aceleración,  $\vec{F}$  la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la cual se expresa en Newtons [N] y  $m$  la masa inercial de la partícula. La masa inercial es entonces alguna propiedad que distingue las partículas en cuanto a la dificultad que ofrecen ellas a ser aceleradas. Es necesario aclarar que conceptualmente existe otra propiedad que distingue a las partículas, consecuencia de su masa gravitacional  $m_g$ , esto es, la masa gravitacional da cuenta de la magnitud con que se atraen dos partículas por efecto de la fuerza

gravitacional. De acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton

$$F = G \frac{m_{1g} m_{2g}}{d^2}, \quad (7.3)$$

siendo aquí  $m_{1g}$  y  $m_{2g}$  las masas gravitacionales de las partículas. Si usted lee el libro recién recomendado de Greene ( y muchos otros) se encontrará que, desde el punto de vista moderno, la fuerza gravitacional no es una fuerza. Sin embargo en este libro se desarrollará la teoría clásica de la Mecánica de Newton solamente.

#### 7.1.4. Principio de equivalencia

De acuerdo a los experimentos de Galileo, todos los cuerpos en la vecindad de la tierra, despreciando el roce del aire, caen con la misma aceleración de magnitud

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}. \quad (7.4)$$

Si se utiliza la segunda ley de Newton donde la fuerza es la fuerza gravitacional resulta

$$m_1 g = G \frac{m_{1g} m_{Tg}}{R^2},$$

es decir la masa inercial  $m_1$  es proporcional a la masa gravitacional  $m_{1g}$ . En la última expresión  $R$  es el radio terrestre y  $m_{Tg}$  es la masa gravitacional terrestre. Si las unidades se eligen adecuadamente (iguales), entonces tenemos el principio de equivalencia

$$m = m_g.$$

#### 7.1.5. Sobre las fuerzas

Las fuerzas, las que permiten acelerar los cuerpos, en general pueden clasificarse en dos tipos, fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto. Las fuerzas de contacto realmente no existen porque la materia está formada por átomos y cargas de igual signo no pueden juntarse. Sin embargo, si la distancia de interacción es del orden de magnitudes atómicas, hablamos de fuerzas de contacto.

#### 7.1.6. Fuerzas de acción a distancia

Son ejercidas por los cuerpos a distancia. Son en general conocidas como campos de fuerza y de ellas son bien conocidas la fuerza gravitacional, la

fuerza electrostática, la fuerza magnética y otras. En estos apuntes la más importante de ellas será la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre los objetos cerca de su superficie, dirigida verticalmente hacia abajo y de magnitud

$$F = G \frac{m_1 m_T}{R^2} = m_1 g,$$

donde

$$g = G \frac{m_T}{R^2}, \quad (7.5)$$

es la aceleración de gravedad.

### 7.1.7. Fuerzas de contacto

Son ejercidas recíprocamente cuando dos cuerpos se tocan. Si se descompone la fuerza de contacto en su parte paralela y en su parte normal a la superficie en contacto, esas componentes se denominan fuerza de roce  $f$  y fuerza normal  $N$ . También existen fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando éste se mueve en el interior de un fluido (líquidos o gases). Estas fuerzas se denominan fuerzas de roce viscosas y son funciones complicadas de la rapidez del cuerpo, de la forma del cuerpo y de propiedades de la superficie del cuerpo y del fluido.

### 7.1.8. La fuerza de roce estática

Cuando no hay movimiento relativo entre dos cuerpos que están en contacto, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática. Considere un bloque en reposo sobre una superficie horizontal que es tirado por una fuerza horizontal  $F$  como se indica en la figura

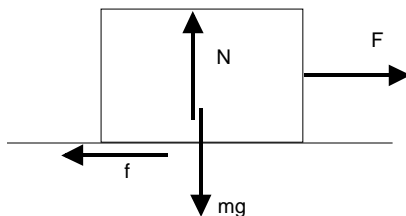


Figura 7.2: Fuerza de roce.

Como el cuerpo tiene aceleración nula entonces

$$\begin{aligned}F - f &= 0, \\N - mg &= 0,\end{aligned}$$

es decir la fuerza de roce es igual a la fuerza aplicada  $F$ . Si se aumenta  $F$  aumenta la fuerza de roce de la misma manera. Pero eso tiene un límite. La fuerza de roce no puede crecer indefinidamente. Este límite tiene que ver con propiedades de las superficies en contacto y con el grado en que las superficies están apretadas entre sí. El modelo que utilizaremos es

$$f^{\text{máx}} = \mu_s N, \quad (7.6)$$

donde  $\mu_s$  se denomina coeficiente de roce estático entre las superficies.

### 7.1.9. Fuerza de roce cinética

Si la fuerza aplicada supera al máximo valor de la fuerza de roce o si el cuerpo está en movimiento relativo, la fuerza de roce, llamada ahora fuerza de roce cinética, está dada por

$$f = \mu_k N, \quad (7.7)$$

donde  $\mu_k$  se denomina coeficiente de roce cinético. Normalmente  $\mu_k < \mu_s$  que pone de manifiesto que cuesta menos mantener el movimiento que iniciarlo.

### 7.1.10. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton, suele enunciarse así: si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, entonces el segundo hace una fuerza de igual de magnitud y de sentido contrario sobre el primero y ambas fuerzas están sobre la misma línea de acción.

Esta ley se supone válida para fuerzas de contacto y para fuerzas de acción a distancia. Sin embargo, en el segundo caso, hay problemas. Difícilmente pueden las fuerzas de acción y reacción ajustarse en forma instantánea a nuevas posiciones de los cuerpos porque la información de uno al otro no puede propagarse con velocidad infinita. Eso sin embargo, es tema de otro curso.

### 7.1.11. Definiciones

Daremos de inmediato definiciones de otras propiedades físicas de los cuerpos que tienen que ver con su masa y con su velocidad. La utilidad de estas definiciones descansa en que hay relaciones o teoremas que las involucran y que pueden en consecuencia escribirse de manera más simplificada.

		concepto	unidad
$m$	.. .....	masa partícula.	kg
$\vec{r}$	.. .....	vector posición partícula.	m
$\vec{v}$	$= d\vec{r}/dt..$	velocidad partícula.	$\text{m s}^{-1}$
$\vec{a}_i$	$= d\vec{v}_i/dt$	aceleración partícula.	$\text{m s}^{-2}$
$\vec{F}$	.. .....	fuerza resultante actuando sobre la partícula.	N
$\vec{p}$	$= m\vec{v}$	Momentum lineal de la partícula.	$\text{kg m s}^{-1}$
$K$	$= \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de la partícula.	J
$\vec{L}_0$	$= m\vec{r} \times \vec{v}$	Momentum angular de la partícula respecto a $O$ .	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
$\vec{\Gamma}_O$	$= \vec{r} \times \vec{F}$	Torque resultante respecto a $O$ .	N m
$V$	.. .....	Energía potencial.	J
$E$	$= K + V$	Energía mecánica.	J
$W_{i \rightarrow f}$	$= \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Trabajo realizado por $\vec{F}$ desde $i$ a $f$ .	J

La descripción del movimiento de los cuerpos y las definiciones de velocidad y aceleración se hicieron en el capítulo de cinemática

## 7.2. Teoremas

Pueden entonces demostrarse los siguientes teoremas que involucran las definiciones anteriores:

### ► TEOREMA 7.1

*Variación del momentum lineal:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (7.8)$$

DEMOSTRACION 3 *Este teorema sigue inmediatamente de la segunda Ley de Newton que puede escribirse*

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.9)$$

si la masa es constante.

► TEOREMA 7.2

*Variación del momentum angular. Un torque resultante respecto a algún origen produce cambios en el momentum angular respecto a ese mismo origen de acuerdo a*

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O. \quad (7.10)$$

DEMOSTRACION 4 *Si la segunda ley de Newton es multiplicada vectorialmente por  $\vec{r} \times$  resulta*

$$m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7.11)$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7.12)$$

si la masa es constante, esto es

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O. \quad (7.13)$$

► TEOREMA 7.3

*Teorema de conservación del momentum lineal. Si una componente de la fuerza resultante se anula, es decir  $F_x = 0$ , entonces*

$$p_x = \text{constante.}$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 5 *Este teorema sigue directamente de*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

que si es proyectada en una dirección fija,  $OX$  por ejemplo da

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x,$$

luego si  $F_x = 0$  se tiene

$$p_x = \text{constante}.$$

► TEOREMA 7.4

Teorema de conservación del momentum angular. Si  $\vec{\Gamma}_O = \vec{0}$  entonces

$$\vec{l}_O = \text{constante}.$$

DEMOSTRACION 6 Este teorema sigue directamente de

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O$$

de manera que si  $\vec{\Gamma}_O = \vec{0}$  entonces se tiene que

$$\vec{l}_O = \text{constante}.$$

► TEOREMA 7.5

Teorema de conservación de una componente del momentum angular. Si  $\Gamma_{O_x} = 0$ , entonces

$$l_{O_x} = \text{constante},$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 7 Este teorema sigue directamente de

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O,$$

que si es proyectada en una dirección fija, digamos  $OX$  da

$$\frac{dl_{O_x}}{dt} = \Gamma_{O_x},$$

de manera que si  $\Gamma_{O_x} = 0$  se obtiene

$$l_{O_x} = \text{constante}.$$



## ► TEOREMA 7.6

Teorema energía cinética–trabajo

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}.$$

DEMOSTRACION 8 De la segunda ley de Newton podemos escribir

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

de donde multiplicando escalarmente por un vector desplazamiento infinitésimo  $d\vec{r}$  se obtiene

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz,$$

y sigue que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

y el lado izquierdo puede modificarse a

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

de manera que tenemos un teorema

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \vec{F} \cdot d\vec{r}, \\ dK &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW, \end{aligned}$$

y finalmente hemos obtenido el teorema energía cinética trabajo

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}, \quad (7.14)$$

donde

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.15)$$

## 7.3. Paréntesis matemático. Derivadas y diferenciales

### 7.3.1. De una variable independiente

Los pasos de la sección anterior requieren de considerar la derivada como un cuociente y ello merece una explicación. La derivada de una función  $f(x)$

de una variable independiente es la pendiente de la curva  $y = f(x)$ . En la figura que sigue se ha definido el llamado diferencial de la función

$$dy = df(x),$$

como el cateto del triángulo dibujado, cuya hipotenusa es tangente a la curva. Entonces la derivada es

$$f'(x) = \frac{dy}{\Delta x},$$

o

$$dy = f'(x)\Delta x$$

En particular para la función lineal  $y = f(x) = x$  resultará

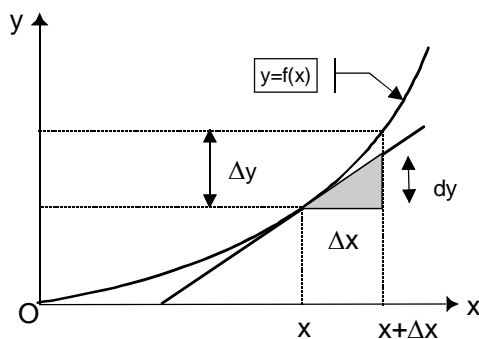


Figura 7.3:

$$dx = \Delta x,$$

o sea

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx, \\ \frac{dy}{dx} &= f'(x), \end{aligned}$$

lo que significa que la derivada es el cociente entre dos cantidades finitas  $dy$  y  $dx$ , que son llamadas diferenciales de  $y$ ,  $x$ . Note que las diferenciales no son necesariamente cantidades pequeñas. También puede notarse que en general  $dy \neq \Delta y$  como se ilustra en la figura, a menos que la curva sea una línea recta.

### 7.3.2. De más variables independientes

Para dos variables independientes considere una función  $f(x, y)$ . Similarmente se define su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son las llamadas derivadas parciales de la función, respecto a  $x$  e  $y$  respectivamente y donde de nuevo para las variables independientes  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$  de manera que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

y similarmente para funciones de más variables. Aquí, una expresión de la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

no es necesariamente la diferencial de alguna función. Para este efecto existe un teorema

► TEOREMA 7.7

La forma  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  es la diferencial de alguna función de  $x$ ,  $y$  si y solo si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (7.16)$$

DEMOSTRACION 9 *Deberá ser*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

*o bien como las variables son independientes*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x, y), \end{aligned}$$

*pero para funciones bien comportadas*

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

*y de allí sigue el teorema.*

EJEMPLO 7.3.1 *Determine una función  $F$  cuya diferencial sea*

$$dF = y^2 dx + 2xy dy.$$

*Primero identifiquemos*

$$\begin{aligned} P &= y^2, \\ Q &= 2xy, \end{aligned}$$

*y calculemos sus derivadas parciales*

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2y, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y, \end{aligned}$$

*que resultan iguales. Entonces tenemos derecho a escribir*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

*y luego*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2xy. \end{aligned}$$

*Integrando la primera respecto a  $x$  resulta*

$$F = y^2 x + C(y)$$

*donde  $C$  es una función arbitraria de  $y$ . Reemplazando en la segunda*

$$2yx + C'(y) = 2xy$$

*o sea  $C'(y) = 0$  o sea  $C(y) = C$  es constante y finalmente*

$$F = y^2 x + C.$$

## 7.4. Fuerzas conservativas (C) y no conservativas (NC)

### 7.4.1. Concepto de trabajo

El trabajo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  escrita en componentes cartesianas

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z, \quad (7.17)$$

se define como

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (7.18)$$

y como el desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$  es

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz,$$

resulta

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (7.19)$$

Este trabajo será independiente del camino si el integrando es la diferencial de alguna función, es decir si

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV.$$

El signo menos es convencional. La existencia de esa función  $V$  llamada energía potencial define a lo que se denomina una fuerza conservativa. Para estas fuerzas se tiene que

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

y su trabajo será en este caso

$$W_{i \rightarrow f}^C = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -(V_f - V_i). \quad (7.21)$$

que es obviamente independiente del camino. Este resultado es completamente general y aplica a todas las fuerzas conservativas. El trabajo que realiza una fuerza conservativa es igual a la disminución de la energía potencial asociada a esa fuerza. Se deduce entonces que si el sistema regresa al punto inicial, el trabajo realizado por la fuerza conservativa en un camino cerrado tiene que ser cero.

### 7.4.2. Energías potenciales

Para algunas fuerzas conservativas importantes, se listan a continuación sus energías potenciales.

### 7.4.3. Fuerza peso

Para la fuerza constante peso, si el eje  $OY$  es vertical hacia arriba, ella puede escribirse

$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

y la energía potencial asociada al peso es

$$V = mgy. \quad (7.22)$$

### 7.4.4. Fuerza elástica

Para la fuerza elástica, donde  $x$  representa la deformación del resorte

$$\vec{F} = -kx\hat{i}, \quad (7.23)$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7.24)$$

### 7.4.5. Fuerza gravitacional

Para la fuerza gravitacional, donde  $r$  representa la distancia entre los dos cuerpos

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (7.25)$$

sus componentes son

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}x, \\ F_y &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}y, \\ F_z &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}z, \end{aligned}$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pero es simple establecer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} &= -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} &= -\frac{y}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} &= -\frac{z}{r^3}, \end{aligned}$$

luego las componentes de la fuerza gravitacional pueden escribirse

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{Gm_1m_2}{r} \right), \\ F_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{Gm_1m_2}{r} \right), \\ F_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{Gm_1m_2}{r} \right) \end{aligned}$$

de donde identificamos la energía potencial

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (7.26)$$

#### 7.4.6. Fuerza electrostática

Para la fuerza electrostática

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (7.27)$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}, \quad (7.28)$$

con explicación similar dada para la fuerza gravitacional.

NOTA 7.1 Para el lector que domine matemáticas más avanzadas. Hemos buscado energía potenciales mediante un método que podríamos llamar de simple inspección. Sin embargo existe un método más general. La fuerza es conservativa si  $\nabla \times \vec{F} = 0$ . Luego, si ese es el caso, se tiene que

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(V(\vec{r}) - V(\vec{r}_1)),$$

para cualquier camino de  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}$ . Como la fuerza es conocida esa integral puede hacerse y se obtiene

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si  $\vec{r}_1$  se elige adecuadamente como punto de referencia puede tomarse  $V(\vec{r}_1) = 0$ .

#### 7.4.7. Teoremas sobre la energía

Por su importancia se agrupan aquí los teoremas relativos a la energía y al trabajo.

##### ► TEOREMA 7.8

*Teorema energía–trabajo. Si  $E = K + V$  representa la energía mecánica de la partícula entonces*

$$E_f - E_i = W_{i \rightarrow f}^{NC}. \quad (7.29)$$

*o en palabras: El cambio de la energía mecánica  $E$  de un sistema es igual al trabajo realizado por la fuerza no conservativa. El cambio puede ser una ganancia o pérdida de energía. Si la fuerza no conservativa es el roce, contrario al desplazamiento, tendremos pérdida de energía.*



DEMOSTRACION 10 *Se ha demostrado que*

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f},$$

*si la fuerza se separa en sus posibles partes conservativas y no conservativas entonces*

$$W_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f}^C + W_{i \rightarrow f}^{NC} = -(V_f - V_i) + W_{i \rightarrow f}^{NC},$$

*luego se obtiene*

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= -(V_f - V_i) + W_{i \rightarrow f}^{NC}, \\ K_f + V_f - (K_i + V_i) &= W_{i \rightarrow f}^{NC}, \end{aligned}$$

*que prueba el teorema.*

► TEOREMA 7.9

*Teorema de conservación de la energía cinética. Si  $W_{i \rightarrow f} = 0$  entonces*

$$K_i = K_f.$$

*O en palabras, si el trabajo de la fuerza resultante es cero, entonces la energía cinética no cambia de valor.*

DEMOSTRACION 11 *Este teorema sigue directamente de*

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}, \quad (7.30)$$

*haciendo  $W_{i \rightarrow f} = 0$*

► TEOREMA 7.10

*Teorema de conservación de la energía mecánica. Si las fuerzas no conservativas no realizan trabajo, es decir si  $W_{i \rightarrow f}^{NC} = 0$ , entonces*

$$E_i = E_f,$$

*la energía permanece constante.*

DEMOSTRACION 12 *Este teorema sigue directamente de*

$$E_f - E_i = W_{i \rightarrow f}^{NC}, \quad (7.31)$$

*haciendo  $W_{i \rightarrow f}^{NC} = 0$ . Debe remarcarce que la energía se conservará en todos los casos donde no hay fuerzas no conservativas o bien si existen, ellas no realizan trabajo. Por ejemplo, las reacciones normales que son fuerzas no conservativas, no realizan trabajo por ser el desplazamiento del cuerpo perpendicular a la fuerza.*

## 7.5. Sobre la energía

En general, el hombre desea poner en movimiento las cosas para satisfacer diferentes necesidades. En otras palabras se desea que los cuerpos adquieran energía cinética. De acuerdo a lo explicado, una forma de lograrlo es mediante una fuerza que realice algún trabajo. Pero obtener una fuerza que realice trabajo no es tan simple. Por ejemplo para mover un automóvil, un tren, un avión o simplemente mover un motor, de donde sacar la fuerza que lo haga. De acuerdo al teorema de conservación de energía, que se supone válido en esta discusión, si un cuerpo gana energía, entonces otro la pierde. Afortunadamente existen en la Tierra muchas fuentes de energía. Estas en general son sistemas que tienen energía potencial acumulada. Por ejemplo una cantidad de agua a cierta altura tiene energía potencial acumulada. Los núcleos de los átomos tienen energía eléctrica almacenada. Los combustibles fósiles tienen energía potencial acumulada, de naturaleza química. Otra pregunta surge. ¿Quién realizó el trabajo necesario para acumular esas cantidades de energía? Casi sin excepción la respuesta es: nuestro Sol. La enorme energía liberada por el Sol y parcialmente recibida en la Tierra, causa a lo largo del tiempo esas acumulaciones de energía potencial. Los árboles crecen, se transforman eventualmente en Carbón que posee una enorme cantidad de energía acumulada. O, los mares se evaporan, llueve sobre la cordillera y allí tenemos una enorme cantidad de energía potencial acumulada. Hay una enorme cantidad de otros ejemplos: la energía del viento, la energía de las mareas del mar, la energía de las tempestades, etcétera.

Mención aparte recibe la energía acumulada en los núcleos atómicos. Fue necesario vencer la enorme repulsión eléctrica de los protones para formar los núcleos de los átomos, que al formarse, tienen una enorme cantidad de energía acumulada. Al final, la fuerza responsable de que eso haya ocurrido largo tiempo atrás en alguna estrella, es la enorme fuerza gravitacional presente en los núcleos de las estrellas como consecuencia de su enorme masa. Sin embargo para que esa energía quede acumulada, se requiere de algo que mantenga al núcleo unido. La fuerza responsable de que ello ocurra es la fuerza nuclear.

Utilizar esas energías acumuladas ha sido posible gracias al gran desarrollo de la tecnología.

El desafío actual consiste en tratar de utilizar la mayor de las fuerzas conocidas por el hombre para estos fines: la fuerza nuclear. La fuerza nuclear es la responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos, es siempre atrac-

tiva, de enorme magnitud y de muy corto alcance y se manifiesta entre los componentes del núcleo atómico, protones y neutrones.

De manera que para que la fuerza nuclear se manifieste y realice algún trabajo, se hace necesario acercar protones a muy corta distancia, tarea muy difícil porque ellos se repelen y muy intensamente cuando se tratan de acercar. Los intentos de realizar este proceso en la Tierra en forma controlada han avanzado, pero no hay certeza de cuando se logrará. Este proceso, llamado de fusión nuclear, es logrado en los centros de las estrellas y el agente responsable es la enorme presión que ejerce la masa de la estrella sobre su centro producto de la fuerza gravitacional.

### 7.5.1. La energía cinética de los asteroides

Hace aproximadamente 65 millones de años atrás un asteroide de alrededor de  $R = 20$  km de radio y una velocidad del orden  $v = 20 \text{ km s}^{-1}$  impactó la Tierra y causó el fin de la mayor parte de la vida en la Tierra. Si suponemos una densidad del orden de  $\rho = 5000 \text{ kg m}^{-3}$  (5 veces la del agua) su energía cinética será

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) v^2 = 8.38 \times 10^{24} \text{ J},$$

y como 1 megaton equivale a  $4.2 \times 10^{15} \text{ J}$  esa energía es aproximadamente

$$K = 2 \times 10^9 \text{ megatones},$$

quizás la explosión de todo el arsenal nuclear actual. La bomba atómica lanzada en Hiroshima fue del orden  $\frac{1}{60}$  megaton.



### 7.5.2. Integración de la ecuación de movimiento

La mecánica clásica es determinista, es decir conocida la posición y velocidad inicial de un cuerpo, la fuerza permite determinar la posición y velocidad futura del cuerpo. El propósito de la dinámica es ese. Dadas las condiciones iniciales de un sistema y las fuerzas, determinar mediante la segunda ley de Newton la posición y velocidad futura del sistema. La segunda ley de Newton, también llamada ecuación de movimiento, determina la aceleración del sistema  $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ . Este es un problema matemático. Conocida la fuerza resultante deberemos integrar la ecuación de movimiento y obtener la velocidad  $\vec{v}(t)$  y posición  $\vec{r}(t)$  si se conocen las condiciones iniciales del movimiento, es decir la velocidad y posición iniciales  $\vec{v}(0)$  y  $\vec{r}(0)$ . Como veremos dependiendo de las fuerzas actuando, la integración de la ecuación de movimiento es más o menos simple.

Para el caso de la dinámica de *un* cuerpo la fuerza podría depender del tiempo, de su posición y de su velocidad, es decir la ecuación que resulta es

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (7.32)$$

que en general no puede integrarse directamente porque el lado derecho, la fuerza, depende precisamente de la incógnita  $\vec{r}(t)$  y de su derivada  $\vec{v}(t)$ . En el apéndice se profundiza más sobre diversos casos integrable y aquí nos limitamos a los principales. En el capítulo de sistemas de partículas se explican las dificultades adicionales que se presentan en el caso de la dinámica de varios cuerpos.

Como posiblemente los alumnos de este curso aún no dominan el tema de las integrales y menos el de las ecuaciones diferenciales, deje para más adelante la comprensión de todos los pasos intermedios, pero analice los resultados y sus aplicaciones.

### 7.5.3. Fuerza constante

Este es el caso más simple. Como veremos se volverán a obtener los resultados conocidos del movimiento con aceleración constante. De la segunda ley

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

es inmediato obtener por dos integraciones sucesivas

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{F}}{2m}t^2.\end{aligned}\tag{7.33}$$

Estos resultados coinciden con lo establecido en la sección de cinemática para el caso en que la aceleración es constante.

#### 7.5.4. Fuerza dependiente del tiempo $\vec{F}(t)$

Aquí se puede dejar expresado

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F}(t') dt', \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{m} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} \vec{F}(t') dt',\end{aligned}\tag{7.34}$$

donde las integrales se podrán hacer cuando la fuerza sea dada en forma explícita.

#### 7.5.5. Fuerza dependiente de la posición

En movimiento unidimensional. Si  $\vec{F} = F(x)\hat{i}$  tenemos que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x),\tag{7.35}$$

que constituye una ecuación donde está la incógnita  $x$  y su segunda derivada. Es una ecuación diferencial. Ella no puede integrarse inmediatamente respecto a  $t$  porque  $x$  es una función del tiempo aún no determinada. Una forma de resolverla es usando la identidad

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \dot{x}^2,$$

de modo que se tiene una ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \dot{x}^2 = \frac{1}{m} F(x),$$

que ahora si podemos integrarla una vez respecto a  $x$  porque se supone la fuerza es una función conocida de  $x$ . Así resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\dot{x}^2 &= \frac{1}{m} F(x) dx, \\ \frac{1}{2} \int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)} d\dot{x}^2 &= \frac{1}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx \\ \dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0) &= \frac{2}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx, \end{aligned}$$

o bien

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx} = \frac{dx}{dt}. \quad (7.36)$$

Tenemos ahora una primera derivada. Se puede finalmente separar variables en la forma

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^x F(x) dx}},$$

e integrar por segunda vez

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^x F(x) dx}}. \quad (7.37)$$

El problema estaría resuelto si dada  $F(x)$ , la integral la realizamos y es posible de allí despejar  $x(t)$ . Tarea no necesariamente simple. Lo anterior puede simplificarse o calcularse para casos específicos de fuerzas.

### 7.5.6. Por ejemplo la fuerza elástica

$$F(x) = -kx,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} t &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{2}{m} \int_{x(0)}^x kx dx}} \\ &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}(x^2 - x^2(0))}}. \end{aligned}$$

Sin perder demasiado podemos suponer que  $x(0) = 0$  de modo que

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{k}\dot{x}^2(0) - x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)} \end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (7.38)$$

Más detalles serán dados al estudiar más adelante el llamado movimiento armónico simple.

### 7.5.7. Solución más simple

Para el último caso particular, existe un método alternativo más fácil. En efecto de

$$m\ddot{x} = -kx,$$

y si se define

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

tenemos que

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

y usted puede fácilmente comprobar, si tiene alguna experiencia, que una solución general es de la forma

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi).$$

La evaluación de las constantes  $C$  y  $\phi$  según sean las condiciones iniciales  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ , se hará más adelante al estudiar el movimiento armónico simple.

### 7.5.8. Movimiento unidimensional con fuerza viscosa

Consideraremos el efecto que produce la presencia de una fuerza contraria y proporcional a la velocidad de la forma

$$F_x = -\beta m \dot{x}.$$

Este tipo de fuerza se manifiesta cuando un cuerpo se mueve en el interior de un fluido, líquido o gas.

La ecuación de movimiento será

$$m\ddot{x} = -\beta m \dot{x}, \quad (7.39)$$

o bien si llamamos  $v = \dot{x}$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v,$$

de donde es trivial separar variables

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt,$$

y se puede integrar

$$\begin{aligned} \ln \frac{v(t)}{v(0)} &= -\beta t, \\ v(t) &= v(0)e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

que puede integrarse por segunda vez

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}). \quad (7.40)$$

Note que la velocidad tiende a cero y la posición alcanza un máximo

$$x_{\text{máx}} = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}.$$



## 7.6. Movimiento armónico simple

El movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza elástica da lugar a un movimiento conocido como movimiento armónico simple. Esta fuerza se manifiesta cuando un cuerpo oscila unido a un resorte ideal. Un resorte ideal tiene dos características, su longitud natural  $l_0$  que es su longitud sin estar sometido a fuerzas y su constante elástica  $k$ . La deformación del resorte es proporcional a la fuerza aplicada según

$$F = k(l - l_0), \quad (7.41)$$

donde  $l$  es la longitud del resorte deformado, como se indica en la figura

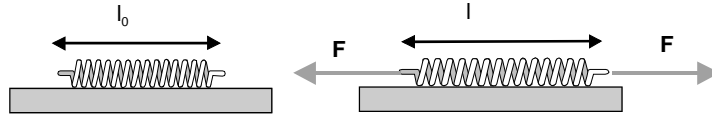


Figura 7.4:

Si una partícula de masa  $M$  se mueve en una dimensión, digamos el eje  $OX$  sometido a una única fuerza restauradora elástica de la forma, conviene medir la coordenada de posición  $x$  a partir de la longitud natural del resorte de manera que

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\hat{i} = -kx\hat{i}, \quad (7.42)$$

entonces la segunda ley de Newton nos da

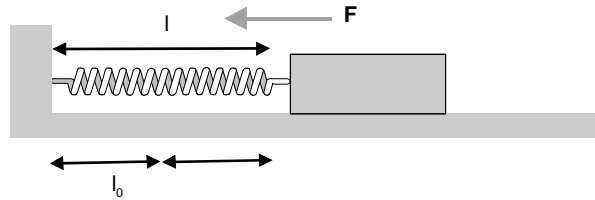


Figura 7.5:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -kx, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned} \quad (7.43)$$

donde se ha definido

$$\omega^2 = \frac{k}{M}. \quad (7.44)$$

La coordenada  $x$  satisface la célebre ecuación del movimiento armónico simple (MAS) cuya solución puede escribirse en términos de dos constantes  $A$  y  $\phi$  como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (7.45)$$

La constante  $A$  se conoce como la amplitud del movimiento y  $\phi$  se conoce como la fase inicial.

### 7.6.1. Evaluación de las constantes

Si las condiciones iniciales son conocidas

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0, \end{aligned}$$

entonces al imponer dichas condiciones en (7.45) y su primera derivada resulta

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \phi, \\ v_0 &= -A\omega \sin \phi, \end{aligned} \quad (7.46)$$

de donde

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad (7.47)$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (7.48)$$

### 7.6.2. Energía

La fuerza elástica restauradora es

$$\vec{F} = -kx\hat{i},$$

y su única componente puede escribirse

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right),$$

de modo que la energía potencial elástica será

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7.49)$$

Si no hay otras fuerzas actuando o ellas no realizan trabajo entonces la energía total  $E$  se conserva, esto es

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}. \quad (7.50)$$

### 7.6.3. Amplitud del movimiento

La constante  $A$  se conoce como la amplitud del movimiento. Se caracteriza que cuando  $x$  tiene ese valor, entonces la partícula se detiene e invierte su movimiento. Si usamos la conservación de la energía podemos relacionar la posición con la velocidad en la forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (7.51)$$

Esta última relación entre velocidad y posición puede escribirse con  $v = \dot{x}$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2, \quad (7.52)$$

$$\left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1, \quad (7.53)$$

que es la ecuación de una elipse sobre la cual se destacan las velocidades máximas  $v = \pm\omega A$  y desplazamientos máximos  $x = \pm A$ .

### 7.6.4. Periodo y frecuencia

Evidentemente la función

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

es periódica con periodo  $T$  dado por

$$\omega T = 2\pi, \quad (7.54)$$

de modo que el periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}, \quad (7.55)$$

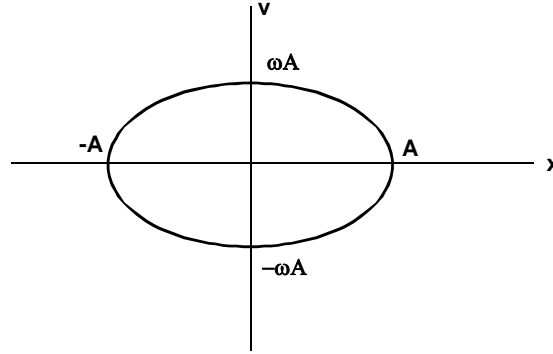


Figura 7.6:

y la frecuencia, es el recíproco del periodo, es decir

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (7.56)$$

La frecuencia angular será

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (7.57)$$

Como veremos en el ejemplo que sigue, movimientos armónico simples pueden darse en variadas situaciones, aún sin resortes.

**EJEMPLO 7.6.1** *Considere una barra de masa  $M$  que se apoya en dos cilindros que giran en sentido contrario como se indica en la figura. El coeficiente de roce cinético entre la barra y los cilindros es  $\mu$  y la distancia entre los centros es  $L$ . Demuestre que el movimiento horizontal de la barra es un movimiento armónico simple y determine su frecuencia angular.*

**Solución.** Si el centro  $C$  de la barra se desplaza  $x$  hacia la derecha, las reacciones normales se hacen distintas de acuerdo a

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= Mg, \\ N_1\left(\frac{L}{2} + x\right) &= N_2\left(\frac{L}{2} - x\right), \end{aligned}$$

de donde se obtienen ellas

$$N_2 = \frac{1}{2}Mg \frac{L + 2x}{L}, \quad N_1 = \frac{1}{2}Mg \frac{L - 2x}{L}.$$

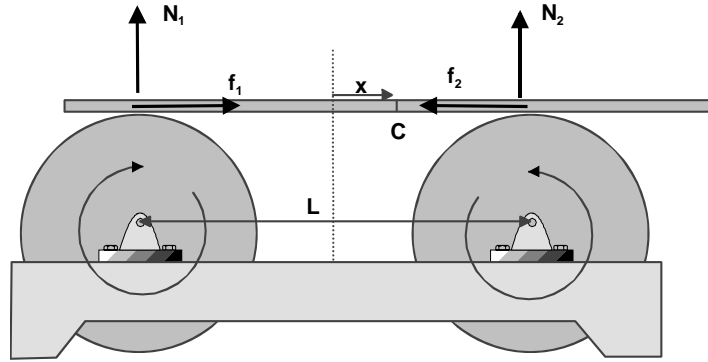


Figura 7.7:

La fuerza resultante horizontal será

$$F_x = f_1 - f_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{2\mu Mg}{L}x,$$

que es del tipo de una fuerza elástica con

$$k = \frac{2\mu Mg}{L},$$

y la frecuencia angular será

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

## 7.7. Movimiento armónico amortiguado

En nuestro mundo siempre existe roce de manera que el tratamiento del movimiento armónico simple no refleja exactamente lo que ocurre. Por ejemplo si el movimiento se realiza en presencia de aire y suponemos que además de la fuerza elástica actúa una fuerza de roce viscosa contraria a la velocidad de la forma

$$\vec{f} = -2\beta\dot{x}\hat{i}, \quad (7.58)$$

con  $\beta$  alguna constante, la ecuación de movimiento será

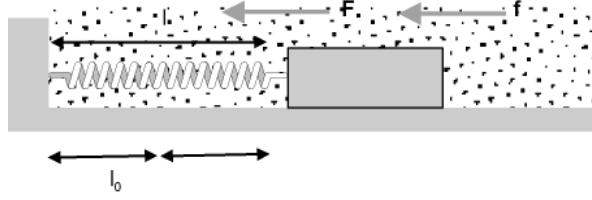


Figura 7.8:

$$M\ddot{x} = -kx - 2\beta\dot{x},$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0. \quad (7.59)$$

Ahora llamaremos

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M},$$

de modo que la ecuación para el movimiento amortiguado es

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.60)$$

La solución de esta ecuación se obtiene suponiendo una solución exponencial de la forma

$$x(t) = Ae^{pt},$$

que al ser sustituida conduce a

$$p^2 + \frac{2\beta}{M}p + \omega_0^2 = 0$$

es decir, hay a lo más dos valores de  $p$  para los cuales hay una solución. Estos valores son

$$p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}$$

La naturaleza de las soluciones depende crucialmente del signo de la cantidad subradical. Así distinguimos tres casos:

### 7.7.1. Caso sub amortiguado

Si el roce es pequeño, en forma más precisa si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 < 0,$$

y definimos

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}}, \quad (7.61)$$

la solución puede escribirse en términos de dos constantes  $A$  y  $\phi$  así

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} \cos(\omega t - \phi), \quad (7.62)$$

es decir hay oscilaciones cada vez de menor amplitud. El movimiento se denomina cuasi periódico y el cuasi período está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}}}. \quad (7.63)$$

Este es el único caso donde el cuerpo efectúa oscilaciones pero de amplitudes cada vez más pequeñas, como se ilustra en la figura

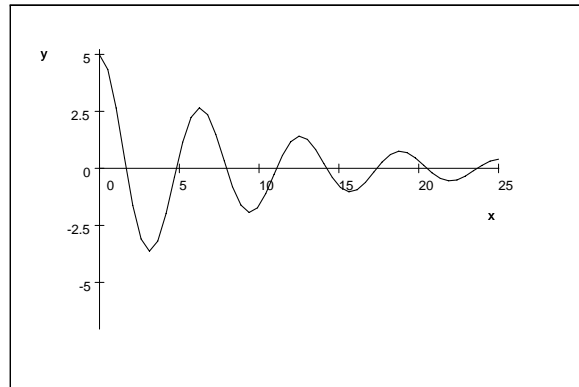


Figura 7.9: movimiento oscilatorio amortiguado

### 7.7.2. Caso amortiguado crítico

Aquí

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 = 0,$$

los dos valores de  $p$  son iguales y la solución es

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\beta}{M}t},$$

donde dependiendo de los signos de las constantes  $A$  y  $B$  puede haber a lo más una oscilación y luego la amplitud decae asintóticamente a cero. La figura ilustra un caso donde  $M = 1$ ,  $\beta = 0,1$  e inicialmente  $x(0) = 1,5$  m,  $\dot{x}(0) = -0,5$  m s<sup>-1</sup> de donde puede obtenerse

$$x(t) = (1,5 - 0,35t)e^{-0,1t}$$

donde el cuerpo cruza una sola vez la posición de equilibrio del resorte ( $x = 0$ )

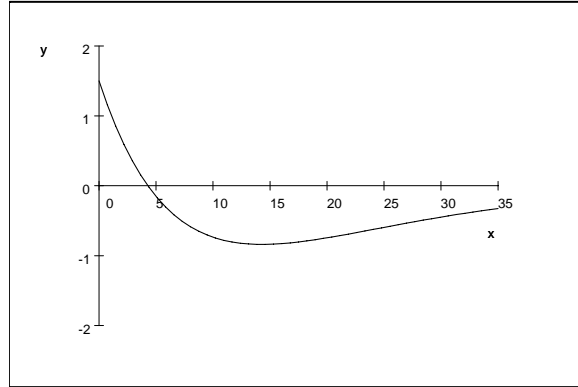


Figura 7.10:  $x(t)$  vs  $t$

y después el resorte se aproxima asintóticamente a su longitud natural o sea con  $x = 0$ .

### 7.7.3. Caso sobre amortiguado

Si el roce es grande, es decir si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 > 0, \tag{7.64}$$



los dos valores de  $p$  son reales y distintos luego las soluciones son

$$p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)},$$

y luego

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{M}t} (Ae^{\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}t} + Be^{-\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}t}), \quad (7.65)$$

la coordenada cae exponencialmente a cero sin que se cruce ni una vez la coordenada  $x = 0$ .

#### 7.7.4. Movimiento amortiguado forzado

Si se agrega una fuerza externa forzadora de la forma  $F(t)$ , la ecuación de movimiento será

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = F(t). \quad (7.66)$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden, no homogénea. Un teorema de las matemáticas nos informa que la solución es la suma de una solución particular de esa ecuación más la solución de la parte homogénea, que corresponde a la encontrada en la sección anterior. La solución de la parte homogénea, en cualquiera de los tres casos explicados a la larga decae a cero, luego si nos olvidamos de los transientes iniciales, el cuerpo terminará moviéndose de acuerdo a la solución particular.

#### 7.7.5. Una solución particular

Si la fuerza forzadora es periódica de la forma

$$F(t) = A \cos \Omega t,$$

es conveniente darse cuenta que con  $i = \sqrt{-1}$  se tiene

$$F(t) = A \cos \Omega t = \operatorname{Re}(Ae^{i\Omega t}),$$

y resolver la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = Ae^{i\Omega t},$$

en el entendido que en la solución que encontremos debemos quedarnos con la parte real. (repase álgebra de números complejos)

La solución puede adivinarse de la forma

$$x(t) = Ce^{i\Omega t},$$

que si es sustituida conduce a

$$-\Omega^2 C + \frac{2\beta}{M} i\Omega C + \omega_0^2 C = A,$$

de donde

$$C = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}},$$

es la amplitud de la respuesta del sistema. Finalmente la solución puede escribirse

$$x(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}} e^{i\Omega t} \right),$$

donde  $\operatorname{Re}(z)$  indica la parte real del número complejo  $z$ . Si usted repasa sus conocimientos de números complejos podrá escribirla en la forma

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\beta\Omega}{M}\right)^2}} \cos(\Omega t - \phi). \quad (7.67)$$

Una característica de esta solución es que es una función que tiene la periodicidad de la fuerza forzante y que su amplitud presenta un máximo para un cierto valor de  $\Omega$  como se explica a continuación.

### 7.7.6. Fenómeno de resonancia

Puede observarse que el movimiento forzado que ha resultado, después que terminan los transientes iniciales, es de la frecuencia de la fuerza forzadora, con alguna diferencia de fase  $\phi$  con la fuerza, y lo más destacable es que su amplitud

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\beta\Omega}{M}\right)^2}}, \quad (7.68)$$

tiene un máximo cuando la frecuencia de la fuerza forzadora sea

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\beta^2}{M^2}} \quad (7.69)$$

y si el roce es pequeño es casi la frecuencia natural  $\omega_0$  del sistema. Las matemáticas permiten demostrar que el denominador de la amplitud tiene un mínimo si

$$\frac{d}{d\Omega}((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\frac{2\beta\Omega}{M})^2) = 0,$$

o sea

$$\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{2\beta^2}{M^2} = 0,$$

y de ahí sigue lo establecido.

## 7.8. Dinámica del movimiento circular

Para el movimiento circular es conveniente expresar las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia, de modo que la segunda ley de Newton

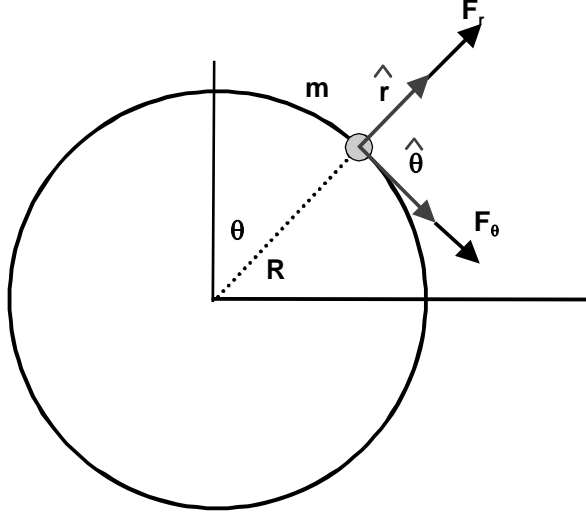
$$\vec{F} = m\vec{a},$$

y recordando lo establecido en el capítulo de Cinemática

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (7.70)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}, \quad (7.71)$$

se tiene que



$$F_r = -m\frac{v^2}{R} = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (7.72)$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \quad (7.73)$$

Aquí  $F_r$  representa la componente radial (o normal) de la fuerza resultante y  $F_\theta$  la parte tangente de la fuerza resultante. Existen diversas posibilidades para el tipo de movimiento circular, dependiendo de las fuerzas que actúen, cuestión que se plantea en los ejercicios. Si la fuerza es puramente radial,  $F_\theta = 0$ , de lo cual se deduce que el movimiento es circular uniforme, es decir  $\dot{\theta}$  es constante. En los desplazamientos de la partícula la componente  $F_r$  por ser perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo. Si la componente  $F_\theta$  es una fuerza conservativa la energía será constante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \text{constante}. \quad (7.74)$$

Si existe roce, entonces al menos una parte de la fuerza tangencial es no conservativa y entonces la energía disminuirá.

**EJEMPLO 7.8.1** *Una partícula de masa  $m$  puede moverse por el interior de una superficie circular lisa de radio  $R$  cuyo plano está vertical. Inicialmente la partícula parte del punto más bajo con una rapidez inicial  $v_0$ . Analice las diversas posibilidades que tiene el movimiento de la partícula en función de la rapidez inicial.*

**Solución.** La figura ilustra las dos fuerzas que actúan sobre la partícula mientras ella permanezca en contacto con la superficie. Antes de plantear nada matemático usted debe darse cuenta de las posibilidades y luego que eso esté claro, proceder a un análisis más detallado. Es más o menos evidente que si la rapidez inicial es pequeña, la partícula efectuará oscilaciones. Si ella es más grande, la partícula puede perder el contacto pasado los noventa grados. Si es mayor aún, podrá dar vueltas completas. Las ecuaciones generales se

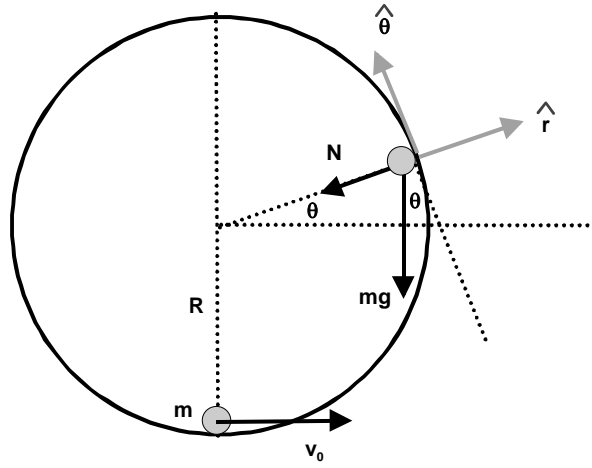


Figura 7.11:

reducen en este caso a

$$F_r = -N - mg \sin \theta = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (7.75)$$

$$F_\theta = -mg \cos \theta = mR\ddot{\theta}, \quad (7.76)$$

$$E_i = E_f, \quad (7.77)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mg(R + R \sin \theta). \quad (7.78)$$

De la tercera

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta) = R\dot{\theta}^2$$

De la primera, eliminando  $\dot{\theta}^2$  se obtiene

$$\begin{aligned} N &= -mg \sin \theta + m\left(\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta)\right), \\ N &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3 \sin \theta + 2). \end{aligned}$$

de la primera

$$N - mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta \quad (7.79)$$

- Vueltas completas. La partícula realizará vueltas completas si  $N$  permanece positiva para todo  $\theta$ . Observando la expresión para  $N$  es caso más desfavorable ocurre si  $\theta = \pi$ , luego la condición será

$$\frac{mv_0^2}{R} + mg(-3 - 2) \geq 0,$$

o sea

$$v_0 \geq \sqrt{5gR}.$$

- Oscilaciones. Para que esto ocurra la partícula debe detenerse antes que la normal se anule. Esto significa que  $\dot{\theta} = 0$  antes que  $N$  se anule. Pero si  $\theta > 0$  la ecuación (7.79) indica que

$$\begin{aligned} N - mR\dot{\theta}^2 &= -mg \sin \theta < 0, \\ N &< mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

o sea no puede anularse  $\dot{\theta}$  primero. Luego pueden haber oscilaciones sólo si  $\dot{\theta} = 0$  para  $\theta < 0$ , y eso requiere que

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta) = 0 \text{ para } \theta < 0,$$

de donde

$$v_0 = \sqrt{2gR(1 + \sin \theta)} \leq \sqrt{2gR}.$$

- Despegues. Para que la partícula despegue, pierda el contacto, debe ser  $N = 0$  con  $0 < \theta < \pi/2$  luego

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3 \sin \theta + 2), \\ v_0 &= \sqrt{gR(2 + 3 \sin \theta)}, \\ \sqrt{2gR} &< v_0 < \sqrt{5gR}. \end{aligned}$$

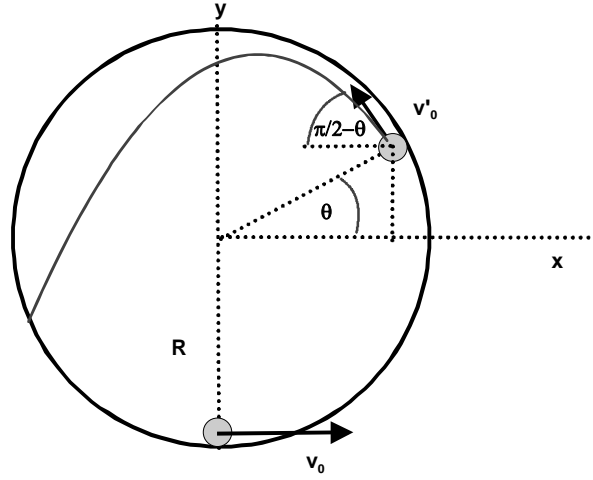


Figura 7.12:

- Análisis del despegue y siguiente punto de impacto Sea  $\theta > 0$  el ángulo del despegue. De  $N - mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta$  para  $N = 0$  podemos evaluar

$$v'_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{gR \sin \theta},$$

y usando las ecuaciones de los proyectiles

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta - v'_0 t \cos(\pi/2 - \theta), \\ y &= R \sin \theta + v'_0 t \sin(\pi/2 - \theta) - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

reduciendo

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta - \sqrt{gR \sin \theta} t \sin \theta, \\ y &= R \sin \theta + \sqrt{gR} \sqrt{\sin \theta} t \cos \theta - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

calculemos

$$x^2 + y^2 = R^2 - g\sqrt{gR}\sqrt{\sin \theta} t^3 \cos \theta + \frac{1}{4}g^2 t^4$$

y para  $x^2 + y^2 = R^2$  que caracteriza al punto de caída, se obtiene el tiempo

$$t = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\sin \theta} \cos \theta$$

y así evaluamos las coordenadas del punto de caída resultando después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned}x &= R \cos 3\theta = R \cos(-3\theta), \\y &= -R \sin 3\theta = R \sin(-3\theta).\end{aligned}$$

Esto es el punto de caída se produce en el ángulo  $-3\theta$ .



## 7.9. Ejemplos

### 7.9.1. Fuerzas constantes o dependientes del tiempo

**EJEMPLO 7.9.1** *Un cuerpo de masa 10 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético  $\mu_s = 0,2$  y  $\mu_k = 0,1$ , respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal de magnitud 60 N que actúa sólo durante 10 s, determine la posición y velocidad en tiempo  $t$ .*

**Solución.** La fuerza de roce estática máxima es

$$f_s^{\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s mg = 0,2 \times 10 \times 9,8 = 19,6 \text{ N},$$

luego el bloque acelera. Hay que hacer el análisis por tramos.

$$\blacksquare \quad 0 < t \leq 10$$

$$\begin{aligned}ma &= F - \mu_k mg, \\a &= \frac{60 - 0,2 \times 10 \times 9,8}{10} = 4,04 \text{ m s}^{-2}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}at^2 = 2,02t^2, \\v(t) &= 4,04t.\end{aligned}$$



- $10 < t \leq t_{\text{máx}}$ . El tiempo máximo es cuando el bloque se detiene y se sabrá luego. Ahora

$$\begin{aligned} ma &= -\mu_k mg, \\ a &= -\frac{0,2 \times 10 \times 9,8}{10} = -1,96 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

La posición y velocidades iniciales son las finales del primer intervalo

$$\begin{aligned} x(10) &= 2,02 \times (10)^2 = 202 \text{ m}, \\ v(10) &= 4,04 \times 10 = 40,4 \text{ m s}^{-1}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} v(t) &= v(10) + a(t - 10) = 40,4 - 1,96(t - 10) = 60,0 - 1,96t \text{ m s}^{-1}, \\ x(t) &= x(10) + v(10)(t - 10) + \frac{1}{2}a(t - 10)^2 \\ &= 202 + 40,4 \times (t - 10) - \frac{1}{2}1,96(t - 10)^2 \\ &= -300,0 + 60,0t - 0,98t^2. \end{aligned}$$

El instante en que la velocidad es nula da

$$t_{\text{máx}} = \frac{60,0}{1,96} = 30,61 \text{ s}.$$

---

**EJEMPLO 7.9.2** *Sobre un bloque de masa  $m$  que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza constante  $F$  durante un tiempo  $T$ , luego la fuerza se invierte y actúa otro intervalo de tiempo  $T$ , luego la fuerza no se aplica más. Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

**Solución.** En los diferentes intervalos de tiempo la segunda ley nos dice que

$$a = \pm \frac{F}{m}.$$

Integramos por tramos considerando que las posiciones y velocidades finales son las iniciales del siguiente tramo.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2, \quad 0 < t \leq T, \\ v(t) &= \frac{F}{m} t, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(T) + v(T)(t - T) - \frac{1}{2} \frac{F}{m} (t - T)^2, \quad T < t \leq 2T, \\
 v(t) &= v(T) - \frac{F}{m} (t - T), \quad T < t \leq 2T,
 \end{aligned}$$

ahora la aceleración es nula

$$\begin{aligned}
 v(t) &= v(2T), \quad 2T < t, \\
 x(t) &= x(2T) + v(2T)(t - 2T), \quad 2T < t.
 \end{aligned}$$

Procediendo a los reemplazos resulta

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} (4Tt - t^2 - 2T^2), \quad T < t \leq 2T, \\
 v(t) &= F \frac{2T - t}{m}, \quad T < t \leq 2T, \\
 v(t) &= v(2T) = 0, \quad 2T < t, \\
 x(t) &= x_2(2T) = \frac{F}{m} T^2, \quad 2T < t.
 \end{aligned}$$

---

**EJEMPLO 7.9.3** *Sobre un bloque de masa  $m$  que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza  $F = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$ . Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

**Solución.** Este ejemplo tiene un parecido con el ejemplo anterior en el sentido que la fuerza va cambiando de signo periódicamente, pero es más fácil. En efecto basta integrar dos veces

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

luego

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

integremos de nuevo

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}).$$


---

### 7.9.2. Fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad

En estos casos la segunda ley será de la forma

$$m \frac{dv}{dt} = F(v),$$

y la técnica que permite integrar se denomina separación de variables. Basta reordenar la ecuación en la forma

$$m \frac{dv}{F(v)} = dt,$$

y es inmediato poder integrar una vez

$$m \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} = \int_0^t dt = t.$$

Si  $F(v)$  no es demasiado compleja quizás usted pueda hacer la integral. Después deberá despejar  $v(t)$  e integrar por segunda vez.

Alternativa: Si se multiplica la segunda ley por  $dx$  resulta

$$m dx \frac{dv}{dt} = dx F(v),$$

reordenando

$$mv \frac{dv}{F(v)} = dx,$$

que se puede integrar para obtener la relación entre velocidad y posición

$$m \int_{v_0}^{v(x)} v \frac{dv}{F(v)} = \int_0^x dx = x.$$

**EJEMPLO 7.9.4** *Una partícula de masa  $m$ , se lanza con rapidez inicial  $v_0$  sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad  $k$ . Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.*

**Solución.** La segunda ley será

$$m \frac{dv}{dt} = -kv,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{k}{m}t,$$

despejando  $v(t)$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

que muestra que la partícula se detiene en  $t \rightarrow \infty$ . Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}),$$

que muestra que la partícula recorre una distancia máxima

$$x_{\text{máx}} = \frac{mv_0}{k},$$

a pesar que no se detiene nunca.

Alternativa:

En este caso podemos también escribir

$$mdx \frac{dv}{dt} = -kvdv,$$

luego

$$mvdv = -kvdv,$$

$$dv = -\frac{k}{m}dx,$$

que es integrable

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\frac{k}{m} \int_0^x dx,$$

luego

$$v(t) = v_0 - \frac{kx}{m},$$

que indica como varía la velocidad de la partícula con su posición hasta que se detenga.

---

**EJEMPLO 7.9.5** Una partícula de masa  $m$ , se lanza con rapidez inicial  $v_0$  sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad  $k$ . Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.

**Solución.** Ahora

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = - \int_0^t \frac{k}{m} dt,$$

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{kt}{m},$$

despejando  $v(t)$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}},$$

que muestra que la partícula se detiene en  $t \rightarrow \infty$ . Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}} dt = \frac{m}{k} \ln \left( 1 + \frac{ktv_0}{m} \right),$$

ahora la partícula recorre una distancia infinita.

Alternativa: multiplique por  $dx$  la segunda ley

$$m dx \frac{dv}{dt} = -kv^2 dx,$$

reordenando

$$m v dv = -kv^2 dx,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dx,$$

integrando

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{kx}{m},$$

o sea la relación entre velocidad y posición es

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{kx}{m}}.$$

---

**EJEMPLO 7.9.6** Una partícula de masa  $m$  está sometida a una fuerza elástica  $-kx$ , e inicia su movimiento con rapidez inicial  $v_0$  y  $x = 0$  sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad  $\beta$ . Calcule la velocidad de la partícula en función de la posición mientras avanza hacia la derecha.

**Solución.** Ahora

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \mp \beta v^2,$$

donde el signo menos aplica cuando la partícula se mueve hacia la derecha y el más cuando se mueve hacia la izquierda. Ahora no es trivial separar variables. Pero existe la identidad

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx},$$

lo cual permite dejar dos variables,  $v$  y  $x$

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - \beta v^2,$$

o

$$m v dv \pm \beta v^2 dx = -k x dx.$$

Veamos si al multiplicar ambos miembros por alguna función  $g(x)$  que hay que determinar para que el lado izquierdo sea la diferencial de alguna función de  $x$  y  $v$ . (El llamado factor integrante)

$$m v g(x) dv + \beta v^2 g(x) dx = -g(x) k x dx.$$

Como se explicó, vea (7.16) debe ser

$$\frac{\partial}{\partial x} m v g(x) = \frac{\partial}{\partial v} \beta v^2 g(x),$$

o sea

$$m \frac{\partial}{\partial x} g(x) = 2\beta g(x),$$

de donde

$$g(x) = e^{\frac{2\beta x}{m}},$$

luego

$$\begin{aligned} mvdve^{\frac{2\beta x}{m}} + \beta v^2 dx e^{\frac{2\beta x}{m}} &= -kx dx e^{\frac{2\beta x}{m}}, \\ d\left(\frac{1}{2}mv^2 e^{\frac{2\beta x}{m}}\right) &= -kx dx e^{\frac{2\beta x}{m}}, \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 e^{\frac{2\beta x}{m}} &= -\frac{1}{2}kx^2 e^{\frac{2\beta x}{m}} + C, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= Ce^{-\frac{2\beta x}{m}}, \end{aligned}$$

en  $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= C, \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 e^{\mp \frac{2\beta x}{m}} \end{aligned}$$

finalmente

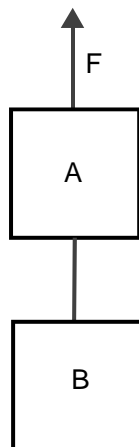
$$v = \sqrt{v_0^2 e^{-\frac{2\beta x}{m}} - \frac{k}{m}x^2}.$$

## 7.10. Ejercicios

### 7.10.1. Dinámica unidimensional

**EJERCICIO 7.1** *Un cuerpo de masa 16 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético  $\mu_s = 0,3$  y  $\mu_k = 0,25$ , respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal  $\vec{F}$ , determine: a) La fuerza resultante sobre el bloque si  $F = 45$  N. b) La magnitud mínima de  $F$  para poner en movimiento al cuerpo. c) La distancia horizontal que recorre el cuerpo, hasta llegar a detenerse, si  $F = 80$  N y actúa sólo durante 4 s.*

EJERCICIO 7.2 Dos bloques A y B de masa  $m_A = 14\text{ kg}$  y  $m_B = 10\text{ kg}$ , están unidos por una **cuerda cuya masa total** es  $m = 8\text{ kg}$  como se indica en la figura. Si se aplica al bloque superior A una fuerza vertical  $\vec{F}$  de módulo  $480\text{ N}$ , se pide calcular:



a) La aceleración del sistema. b) La tensión en los extremos superior e inferior de la cuerda.

EJERCICIO 7.3 Un disco de hockey abandona el palo de un jugador con una rapidez de  $5\text{ m s}^{-1}$  y desliza  $36\text{ m}$  antes de detenerse. Demuestre que el coeficiente de roce entre el disco y el hielo es  $0,035$ .

EJERCICIO 7.4 Una partícula se mueve sobre el eje X de un sistema de coordenadas, sometido a una fuerza de atracción hacia el origen de magnitud  $k/x^2$ , donde  $k$  es una constante positiva. Si la partícula parte del reposo en  $x = a$ , demuestre que ella llegará al origen en un tiempo  $t$ , dado por

$$t = \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

EJERCICIO 7.5 Sobre una partícula de masa  $m$ , inicialmente en reposo, actúa una fuerza  $\vec{F}$  de magnitud:  $F = F_o [1 - (t - T)^2/T^2]$  durante un intervalo de tiempo  $0 < t < 2T$ . Pruebe que la rapidez de la partícula al final del intervalo es:  $v = 4F_o T/3m$

EJERCICIO 7.6 Una partícula de masa  $1\text{ kg}$ , se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza cuya magnitud es:  $F = 4\pi^2 \sin 8\pi t$ , donde  $F$  está medido en N y  $t$  en s. Cuando  $t = 0\text{ s}$ , la rapidez de la partícula es



$40 \text{ ms}^{-1}$ . Calcule: a) La rapidez de la partícula cuando  $t = 0,2 \text{ s}$ . b) Si en  $t = 0 \text{ s}$ ,  $x = 0 \text{ m}$ , determine la posición de la partícula en  $t = 0,2 \text{ s}$ .

EJERCICIO 7.7 Una partícula de masa  $m$ , que está inicialmente en reposo en el origen, queda sujeta a la acción de una fuerza resultante, cuya magnitud está dada por  $F = kt^2$ . Demuestre que:

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

EJERCICIO 7.8 Un globo cuyo peso total es  $W$ , incluyendo el lastre, está sujeto a la acción de una fuerza ascendente vertical constante  $\vec{P}$ . En un determinado instante, el globo comienza a descender con una aceleración constante de magnitud “ $a$ ”. ¿Qué cantidad de lastre debe arrojar fuera del globo para que éste se eleve con aceleración constante de magnitud  $a$ ? No considere la resistencia del aire.

EJERCICIO 7.9 Sobre una partícula que se mueve sobre el eje  $X$ , actúa una fuerza dada por:  $\vec{F} = -\frac{k}{v_x} \hat{i}$ . Se sabe que en  $t = 0$ ,  $x_0 = a$ ,  $\dot{x}_0 = v_0$ . Calcule: a)  $\dot{x}$  en función de  $t$  y b)  $\dot{x}$  en función de  $x$ .

EJERCICIO 7.10 La fuerza neta que actúa sobre una partícula de masa  $26 \text{ kg}$ , tiene la dirección sobre el eje de las  $X$  de un sistema de coordenadas y está dada por la expresión:

$$F = At^3 + Be^{-ct}$$

en que  $A = 216 \text{ N s}^{-3}$ ,  $B = 1 \text{ N}$ ,  $c = 1 \text{ s}^{-1}$  y  $t$  está expresado en segundos. Si en el instante  $t = 0$ , la partícula está pasando por el origen moviéndose a  $3 \text{ ms}^{-1}$  en el sentido positivo del eje  $X$ , determine: a) La velocidad de la partícula en el instante  $t = 3 \text{ s}$ . b) Su distancia al origen en ese instante.

EJERCICIO 7.11 Una partícula de masa “ $m$ ”, parte del reposo desde el origen de un sistema de coordenadas bajo la acción de una fuerza neta cuya magnitud es  $F = f_0 - kt^2$ , en que  $f_0$  y  $k$  son constantes positivas. a) Encuentre las expresiones para la velocidad y para el itinerario de la partícula, en función del tiempo. b) Si  $m = 800 \text{ kg}$ ,  $f_0 = 1500 \text{ N}$ ,  $k = 15 \text{ N s}^{-2}$  y el tiempo está dado en segundos, determine en qué instante se detiene la partícula y a qué distancia.

EJERCICIO 7.12 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una línea recta (en el eje  $X$ ) sometida a una fuerza elástica  $-Kx$  y a una fuerza de roce viscosa de la forma  $-2\beta\dot{x}$ . Si inicialmente la velocidad es  $V$  y la posición es  $x = 0$ , determine las expresiones para la posición de la partícula en función del tiempo, en los tres casos: sub amortiguado, amortiguado crítico y sobre amortiguado.

EJERCICIO 7.13 Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es:

$$y = A \sin \omega t$$

siendo  $A$  y  $\omega$  constantes y  $t$  el tiempo. Determine la condición que deben cumplir esas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.

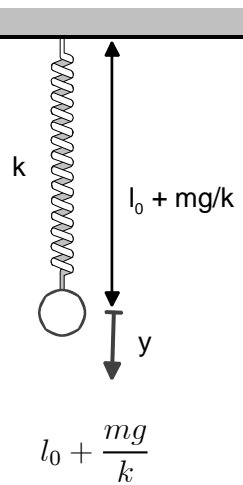
EJERCICIO 7.14 Un cuerpo se ata a un extremo de un hilo inextensible y el otro extremo del hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud  $a$ , realizando  $n$  oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo no permanecerá siempre tenso a menos que

$$n^2 \leq \frac{g}{4\pi^2 a}.$$

EJERCICIO 7.15 Un cuerpo de masa  $m = 1 \text{ kg}$  es empujado por una fuerza horizontal  $F$  de módulo  $15 \text{ N}$ , desde el pie de un plano inclinado en  $37^\circ$  respecto a la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético es  $0,2$ . Si la fuerza  $F$  actúa durante tres segundos solamente, determine: la distancia que alcanza a subir por el plano y el tiempo que demora en volver al punto de Partida.

### 7.10.2. Movimiento armónico simple

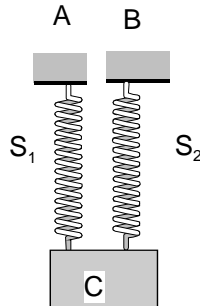
EJERCICIO 7.16 Si un cuerpo se suspende de un resorte de longitud natural  $l_0$  y constante elástica  $k$ , en la posición de equilibrio estático el resorte queda estirado con un largo



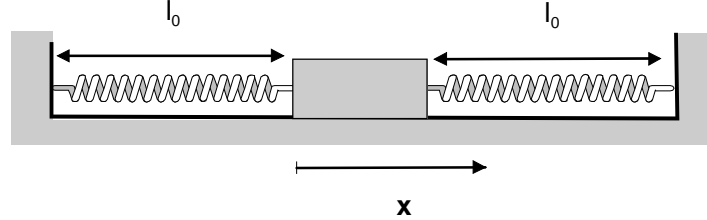
Si se perturba, determine la ecuación de movimiento para el desplazamiento  $y$ .

**EJERCICIO 7.17** Un cuerpo cuya masa es  $m = 2\text{ kg}$  está suspendido de un resorte cuya constante elástica es  $K = 5\text{ N m}^{-1}$ . Inicialmente el cuerpo está en la posición de equilibrio estático colgando con el resorte vertical, y se le imprime una velocidad hacia debajo de magnitud  $0,5\text{ m s}^{-1}$ . Determine la posición del cuerpo respecto a su posición de equilibrio estático, en función del tiempo.

**EJERCICIO 7.18** Dos resortes  $S_1$  y  $S_2$  de longitudes iguales a  $0,5\text{ m}$ , pero con diferentes constantes elásticas  $K_1 = 50\text{ N m}^{-1}$  y  $K_2 = 100\text{ N m}^{-1}$ , están unidos a dos soportes A y B, que se encuentran a la misma altura. Un cuerpo C de masa  $2,5\text{ kg}$ , está entre los dos resortes y es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿Cuál es la aceleración que adquiere el cuerpo C cuando se deja libre?



**EJERCICIO 7.19** Se tiene el sistema de la figura donde un bloque de masa  $M$  se mueve unida a dos resortes iguales de largo natural  $l_0$  y constante elástica  $K$ . Si el sistema se coloca en movimiento,  $x$  indica el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio. Determine la frecuencia y periodo del movimiento del bloque partícula. No hay roce.

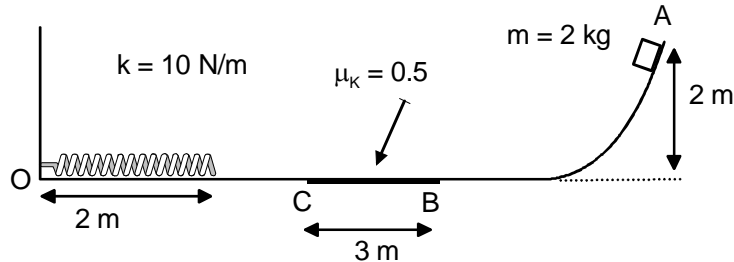


**EJERCICIO 7.20** Una partícula de masa  $m = 2 \text{ kg}$  tiene un movimiento armónico simple de modo que su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio está dado por

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

Determine: a) La frecuencia del movimiento en oscilaciones por segundo. b) La amplitud del movimiento en (m). c) La energía mecánica  $E$  en (J). d) La máxima magnitud de la aceleración de la partícula en  $\text{ms}^{-2}$ . e) La máxima magnitud de la velocidad de la partícula en  $\text{ms}^{-1}$ .

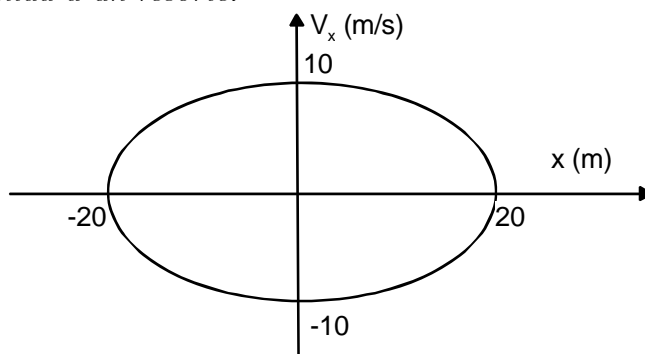
**EJERCICIO 7.21** Un bloque de masa  $m = 2 \text{ kg}$  parte del reposo en A ubicado a 2 m de altura y baja deslizando sobre una curva que a nivel del suelo continúa en línea recta. Hay roce solamente en el tramo CB donde  $\mu_K = 0,5$ . Pasado el tramo con roce el bloque comienza a comprimir un resorte de longitud natural 2 m y constante elástica  $k = 10 \text{ N m}^{-1}$  hasta detenerse e invertir su sentido de movimiento. Determine:



a) La rapidez de la partícula en el punto B. b) La rapidez de la partícula en

el punto C. c) La longitud mínima que alcanza el resorte. d) La ubicación del punto entre C y B donde finalmente se detiene el bloque.

**EJERCICIO 7.22** Una partícula de masa 8 kg oscila con movimiento armónico simple unida a un resorte.



La figura muestra la variación de la componente  $v_x$  de la velocidad con respecto al alargamiento  $x$ . Si en  $t = 0$  s, la partícula pasa por la posición de equilibrio,  $x(0) = 0$ , moviéndose hacia la izquierda con cierta rapidez, determine a) La ecuación itinerario  $x(t)$ . b) La energía mecánica del sistema  $E$ .

### 7.10.3. Dinámica en dos o tres dimensiones

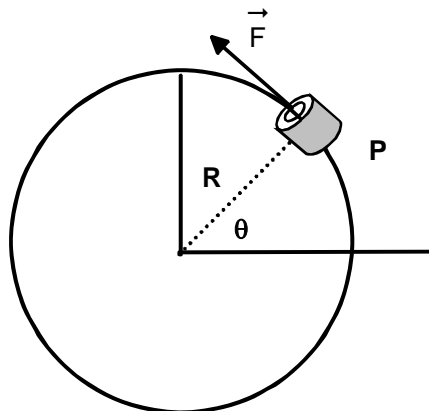
**EJERCICIO 7.23** Un cuerpo de masa 8 kg, describe una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son:  $x = 2 + 5t - 2t^2$  m e  $y = t^2$  m. Determine la fuerza aplicada sobre el cuerpo en  $t = 2$  s.

**EJERCICIO 7.24** Una partícula de masa 25 g se hace girar, de modo que describa una trayectoria circular en un plano vertical, mediante una cuerda de largo 40 cm. Si la rapidez angular es constante y de magnitud  $30 \text{ rad s}^{-1}$ , calcule: a) La aceleración centrípeta en el punto más alto de la trayectoria. b) La tensión en el punto más bajo de la trayectoria.

**EJERCICIO 7.25** Un anillo  $P$  de masa  $m$ , está engarzado en un alambre liso, que forma una circunferencia fija de plano vertical y radio  $R$  como se indica en la figura. Bajo la acción de una fuerza tangencial  $\vec{F}$  de magnitud desconocida, el anillo describe la circunferencia con rapidez angular igual a:

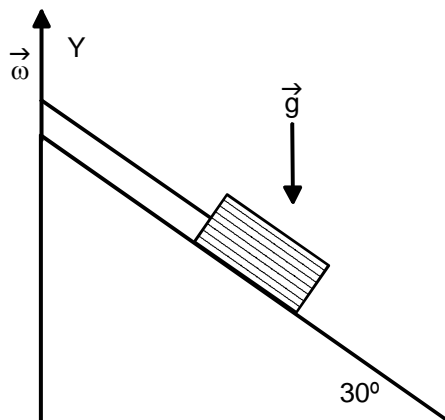
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

determine:



- a) La magnitud de la fuerza  $\vec{F}$  en función de  $\theta$ . b) La reacción normal del alambre sobre el anillo.

EJERCICIO 7.26 Un bloque de masa 5 kg, descansa sobre un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal, unida a un eje vertical eje mediante una cuerda de longitud  $10/\sqrt{3}$  m. El plano gira junto con el bloque en torno a un eje vertical con rapidez angular  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ . Calcule:



- a) La tensión en la cuerda; b) La velocidad angular para la cual el bloque pierde contacto con el plano.

EJERCICIO 7.27 Una pelota de peso  $W$  está unida a una cuerda de longitud  $L$  y está moviéndose como péndulo cónico. Es decir, está girando en un círculo horizontal con rapidez constante  $v_0$ . Sea  $\theta$  el ángulo formado por la cuerda y la vertical. Despreciando el peso de la cuerda, determinar: a) La tensión de la cuerda. b) La rapidez  $v_0$  en función de  $g$ ,  $L$  y  $\theta$ .

EJERCICIO 7.28 Demuestre que la ecuación de movimiento de un péndulo simple, formado por una partícula de masa  $m$  suspendida de un hilo liviano de largo  $L$ , es :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

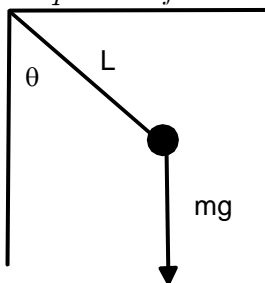
EJERCICIO 7.29 Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso vertical de radio  $R$  que tiene su plano vertical, sometida a su peso y a la reacción normal. Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que la partícula realice vueltas completas sin perder contacto con el aro.

EJERCICIO 7.30 Respecto a la situación del problema anterior, si la velocidad en el punto más bajo es la  $3/4$  de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.

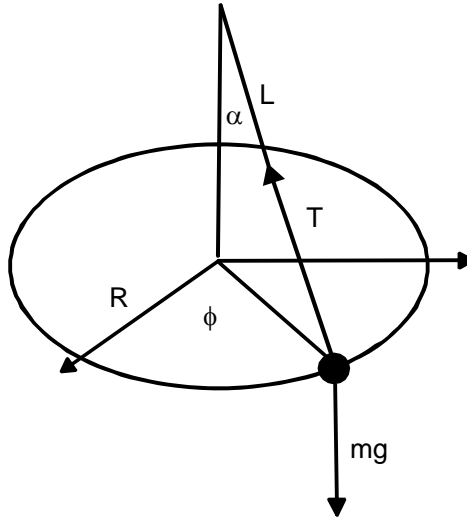
EJERCICIO 7.31 Respecto a la situación del problema anterior, si la rapidez en el punto más bajo es  $v_0$  determine la reacción normal  $N$  en función de  $\theta$ .

EJERCICIO 7.32 Una partícula de masa  $m$  se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio  $R$  y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.

EJERCICIO 7.33 Se tiene un péndulo constituido por una partícula de masa  $m$  unida por un hilo de largo  $L$  a un punto fijo. Si la rapidez de la partícula en el punto más bajo es  $v_0$  determine la energía mecánica de la partícula considerando que en el punto más bajo la energía potencial es cero. Determine además la ecuación diferencial que satisface el ángulo  $\theta$ .



EJERCICIO 7.34 Un péndulo cónico que se ilustra en la figura, se mueve manteniendo el ángulo  $\alpha$  constante siendo  $m$  la masa de la partícula,  $L$  el largo del hilo.



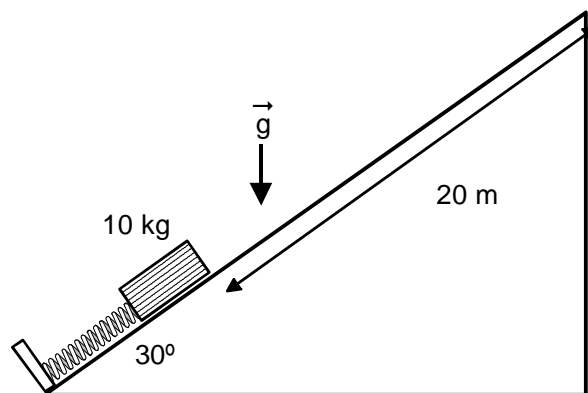
Determine a) La rapidez angular  $\dot{\phi}$ . b) La tensión del hilo.

#### 7.10.4. Trabajo y energía

EJERCICIO 7.35 Un proyectil de masa  $m = 1 \text{ kg}$ , se lanza desde el origen de un sistema de coordenadas, con rapidez  $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$ , formando un ángulo  $\alpha = 37^\circ$  con la horizontal. Si se desprecia la resistencia del aire, calcule: a) La energía mecánica del proyectil después del lanzamiento. b) El trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre el proyectil, desde que se lanza hasta que adquiere la altura máxima. c) La energía cinética del proyectil en el punto de impacto contra el suelo.

EJERCICIO 7.36 Un bloque de masa  $m = 10 \text{ kg}$  se encuentra en reposo comprimiendo a un resorte de constante elástica  $k = 2000 \text{ N m}^{-1}$  en  $1 \text{ m}$  respecto a su largo natural como se indica en la figura. Si el cuerpo se suelta comienza a subir por el plano inclinado liso que se ilustra en la figura.





Determine la máxima altura que sube el bloque respecto a su altura inicial. No hay roce.

EJERCICIO 7.37 Una partícula de masa  $m$  se mueve en el plano  $XY$  tal que:

$$\vec{r} = a\hat{i} \cos \omega t + b\hat{j} \sin \omega t,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. a) Encuentre la trayectoria de la partícula. b) Calcule la fuerza que actúa sobre la partícula. c) Demuestre que la fuerza es conservativa. d) ¿Cuál es la energía potencial en  $x = a$  e  $y = b$ ? e) Calcule el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de  $A$  hacia  $B$ . f) La energía total de la partícula.

EJERCICIO 7.38 Una partícula de masa  $m$ , se mueve por la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial es  $U(x)$ . Si en  $t_1$  la partícula está en  $x_1$  y en  $t_2$  está en  $x_2$ , demuestre que: a)

$$t_2 - t_1 = \sqrt{m/2} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

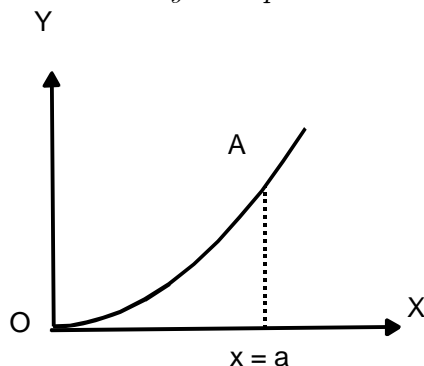
donde  $E$  es la energía total. b) Si  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  y en  $t = 0$ ,  $x = a$ ,  $\dot{x} = 0$ . Demuestre que:

$$x = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

EJERCICIO 7.39 En la parábola  $y = x^2/a$  que está colocada verticalmente según la figura, además del peso, de la fuerza de reacción normal, actúa sobre la argolla una fuerza dada por:

$$\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}.$$

Inicialmente, la argolla está en A y su rapidez es nula.



- a) Determinar el trabajo que hace la fuerza  $F$  cuando la argolla se mueve desde A hasta O. b) Calcule la rapidez de la argolla cuando pasa por O.

EJERCICIO 7.40 Una partícula de masa  $m$ , se lanza con rapidez inicial  $v_0$  sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad  $k$ . Calcule: a) La distancia total que recorre la partícula. b) La energía cinética de la partícula en la mitad del recorrido. c) El trabajo total que realiza la fuerza resistente.

EJERCICIO 7.41 Sobre una partícula de masa  $m = 2$  kg, actúa una fuerza  $F$  desconocida. La partícula se mueve sobre un plano horizontal áspero, de acuerdo a la ecuación itinerario  $x = 3 + t^2$  donde  $x$  está en metros y  $t$  en segundos. El coeficiente de roce cinético entre el plano y la partícula es  $\mu_k = 0,3$ . Calcule: a) La energía cinética de la partícula en el instante  $t = 3$  s. b) El trabajo realizado por la fuerza  $F$  en el intervalo  $0 - 3$  s.

EJERCICIO 7.42 Un bloque de masa  $m = 4$  kg, inicialmente en reposo, asciende a lo largo de un plano inclinado áspero de largo 1 m e inclinación respecto de la horizontal  $\alpha = 53^\circ$ , debido a la acción de una fuerza horizontal constante de magnitud 60 N. Si al término del recorrido el bloque tiene una rapidez de  $1,2 \text{ ms}^{-1}$ , calcule: a) El trabajo realizado por la fuerza de roce. b) El trabajo neto resultante. c) El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano.

### 7.10.5. Problemas que requieren más matemáticas

Problemas de este tipo no se colocarán en pruebas. Sin embargo el hacerlos, contribuye fuertemente a su formación.

**EJERCICIO 7.43** Una partícula de masa  $m$  moviéndose en una línea recta está sometida a una resistencia que produce una fuerza de retardo  $kv^3$ , donde  $v$  es la velocidad y  $k$  es una constante. Muestre que la velocidad  $v$  y el tiempo  $t$  están dados en términos de la distancia  $s$  mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{1 + kmsu}, \\ t &= \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2. \end{aligned}$$

donde  $u$  es la velocidad inicial.

**EJERCICIO 7.44** Una partícula se mueve en una línea recta bajo la acción de una fuerza de roce de la forma  $kv^{n+1}$  donde  $v$  es la velocidad a tiempo  $t$ . Muestre que, si  $u$  es la velocidad en  $t = 0$

$$kt = \frac{m}{n} \left( \frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n} \right),$$

y obtenga una fórmula correspondiente para el espacio en términos de  $v$ .

**EJERCICIO 7.45** Una bala disparada con una velocidad horizontal de  $800 \text{ m s}^{-1}$  viaja con una velocidad de  $500 \text{ m s}^{-1}$  al final de un segundo. Suponiendo válido el modelo del problema anterior con  $m = 1/2$ , calcule  $k$  y el espacio recorrido en el primer segundo, despreciando el efecto de la gravedad.

**EJERCICIO 7.46** Se dispara verticalmente hacia arriba una piedra en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa proporcional a la velocidad ( $kv$ ) cuando la rapidez es  $v$ . Si  $v_0$  es la rapidez del disparo, pruebe que la piedra vuelve al punto inicial después de un tiempo  $t_1$ , donde

$$(g + kv_0)(1 + e^{-kt_1}) = gkt_1.$$

**EJERCICIO 7.47** Una partícula se lanza hacia arriba con velocidad inicial  $u$  y se mueve en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa  $kv^2$ . Pruebe que la partícula vuelve al punto de partida después de un tiempo

$$\frac{1}{\sqrt{kg}} (\alpha + \ln(\sec \alpha + \tan \alpha)),$$

donde

$$\tan \alpha = u \sqrt{\frac{k}{g}}.$$

EJERCICIO 7.48 Una partícula de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba ( en el eje  $Y$ ) con velocidad inicial  $V$  sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma  $-2\beta\dot{y}$  . Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.

EJERCICIO 7.49 Una partícula de masa  $m$  se suelta desde una altura  $h$  sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma  $-\beta\dot{y}$ . Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.

EJERCICIO 7.50 Una partícula de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba ( el eje  $Y$ ) con velocidad inicial  $V$  sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa proporcional al cuadrado de la rapidez, de la forma  $\pm 2\beta\dot{y}^2$ . Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo. Considere que debe elegirse el signo adecuadamente para la subida y la bajada de la partícula.

EJERCICIO 7.51 Sea

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}.$$

Encuentre la función potencial escalar asociada a  $F$ .

EJERCICIO 7.52 Se deja caer una bolita de masa  $m$  desde una altura  $h$ . Sobre la bolita, además del peso, actúa una fuerza resistiva proporcional a la velocidad de la forma  $\vec{F} = -k\dot{y}\hat{j}$  , calcule la rapidez de la bolita cuando ha transcurrido un tiempo  $t = m/k$ .

EJERCICIO 7.53 Un cuerpo de masa  $4\text{ kg}$ , es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de  $60\text{ m s}^{-1}$ . La fuerza resistente del aire es:  $\vec{F} = -\frac{3}{100}\vec{v}$  (unidades en el Sistema Internacional). Calcule el tiempo que demora el cuerpo en alcanzar la altura máxima y el valor de la altura máxima.

# Sistema de Partículas

## 8.1. Ecuaciones de movimiento

Esta parte de la Mecánica trata del movimiento de varios cuerpos cuyas dimensiones permitan considerarlos como partículas. Aún con esta simplificación la existencia de las fuerzas de interacción hacen de este un tema complejo. Se muestran las principales definiciones y relaciones cinemáticas, así como las ecuaciones clásicas de movimiento para un sistema de partículas puntuales. Se supondrá que las fuerzas de interacción cumplen el principio de acción y reacción, la llamada tercera ley de Newton. Esto es, si una partícula hace una fuerza sobre otra, la segunda hace una fuerza igual y contraria sobre la primera. Esta es una concepción clásica donde se supone que por alguna razón una partícula puede efectuar una fuerza sobre otra que está a cierta distancia. También se supone aquí que esta fuerza se manifiesta instantáneamente, esto es sí las posiciones de las partículas cambian, la fuerza de interacción cambia instantáneamente. Ambas fuerzas, que son llamadas de acción y reacción, están sobre la línea que une las partículas. Las definiciones de cantidades Físicas cinemáticas, que involucran las masas, las posiciones, las velocidades, tales como la energía cinética, momentum lineal, momentum angular, son naturalmente relativas al sistema de referencia que se escoja porque las velocidades y posiciones lo son. Por lo tanto, las relaciones que existan entre esas cantidades físicas para dos sistemas que se trasladan uno respecto al otro con velocidad constante, se desprenderán de las transformaciones de Galileo para dos sistemas, que se trasladan, sin rotar, uno respecto

del otro, con velocidad constante  $\vec{v}$ . Suponiendo que los orígenes coinciden cuando  $t = 0$ , se tiene que  $\vec{r}_{O'} = \vec{v}t$  y por lo tanto de la figura (8.1) se tiene

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'. \quad (8.1)$$

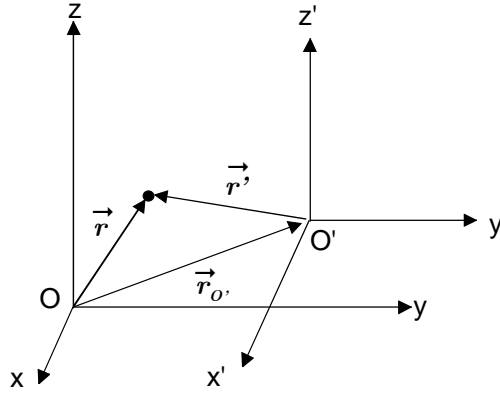


Figura 8.1:

Por otro lado, para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. Las relaciones generales entre velocidades y aceleraciones para sistemas que rotan y se trasladan son (ver apéndice)

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^{rel}, \quad (8.2)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^{rel}, \quad (8.3)$$

siendo  $\vec{\omega}$  el llamado vector velocidad angular del sistema que rota y  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$  la llamada aceleración angular. Debe notarse que la velocidad y la aceleración relativas, son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}. \quad (8.4)$$

### Definiciones y notación

Respecto a un sistema de referencia inercial, ver figura(8.2), haremos las siguientes definiciones

$i$	índice	$i = 1, 2, 3 \dots N$
$N$	entero	número de partículas del sistema.
$m_i$	.. .. .	masa partícula $i$ .
$\vec{r}_i$	$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$	vector posición partícula $i$ .
$\vec{v}_i$	$= d\vec{r}_i/dt = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$	velocidad partícula $i$ en sistema cartesiano.
$\vec{a}_i$	$= d\vec{v}_i/dt = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$	aceleración partícula $i$ en sistema cartesiano.
$\vec{F}_i$	.. .. .	fuerza externa actuando sobre partícula $i$ .
$\vec{f}_{ij}$	.. .. .	fuerza que partícula $j$ ejerce sobre la partícula $i$ .
$\vec{P}$	$= \sum_i m_i \vec{v}_i$	Momentum lineal del sistema.
$K$	$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$	Energía cinética del sistema.
$\vec{L}_0$	$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$	Momentum angular del sistema respecto a $O$ .
$\vec{F}^{ext}$	$= \sum_i \vec{F}_i$	Fuerza externa resultante.
$\vec{\Gamma}_O^{ext}$	$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$	Torque resultante externo respecto a $O$ .
$M$	$= \sum_i m_i$	masa total sistema.
$\vec{r}_G$	$= \sum_i m_i \vec{r}_i / M$	posición del centro de masa.

Las sumatorias son todas desde  $i = 1$  hasta  $i = N$  es decir para todas las partículas del sistema.

La figura siguiente ilustra algunas partículas de un sistema que están actuadas por fuerzas externas y fuerzas de interacción. Las fuerzas externas son por ejemplo los pesos de las partículas y las fuerzas que aparecen por posibles contactos de las partículas con cuerpos exteriores al sistema considerado.

### 8.1.1. Ecuaciones de movimiento

Con respecto a un sistema inercial de referencia, cada una de las  $N$  partículas cumple con la llamada segunda ley de *Newton*

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots N. \quad (8.5)$$

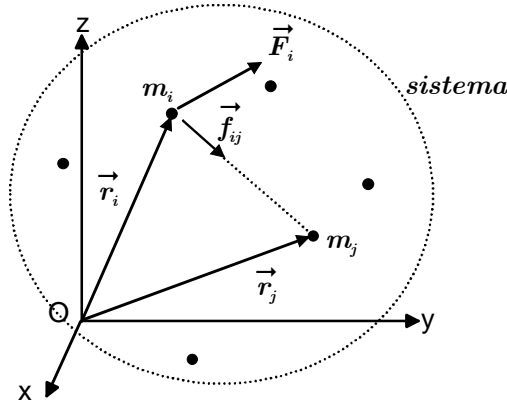


Figura 8.2: Sistema de partículas

Las fuerzas externas  $\vec{F}_i$  pueden ser los pesos de las partículas, reacciones causadas por superficies en contacto con las partículas, fuerzas ejercidas externamente mediante cuerdas, etcétera. Las fuerzas de interacción pueden ser, atracción gravitacional, fuerza eléctrica si las partículas tienen cargas eléctricas, fuerzas de contacto entre las partículas, etcétera. El término de la sumatoria es sobre  $i$ , es para todos los valores del índice  $i$  pero excluyendo a  $i = j$ . La notación  $\vec{f}_{ij}$  representa la fuerza que actúa sobre  $i$  y que es producida por  $j$ .

Más adelante se aplicarán estas ecuaciones al sistema de dos cuerpos con interacción gravitacional entre ellos, el caso soluble más notable. El sistema de ecuaciones (8.5) tiene como gran dificultad matemática al hecho de que las fuerzas de interacción  $\vec{f}_{ij}$  dependen de las posiciones de las dos partículas, esto es

$$\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j).$$

Esa dificultad es tal que se ha demostrado que no hay solución general analítica de tal sistema de ecuaciones si el número de partículas es mayor de dos. Sin embargo hay casos particulares donde si hay solución. Soluciones numéricas siempre serán posibles de encontrar.

Si las fuerzas de interacción  $\vec{f}_{ij}$  satisfacen la llamada ley de acción y reacción, es decir que son fuerzas iguales y contrarias y están sobre la línea que une las partículas, o sea en términos matemáticos

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0, \quad \text{y} \quad \vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0,$$



pueden demostrarse, a partir de las  $N$  ecuaciones de movimiento, las siguientes dos importantes ecuaciones o teoremas

► TEOREMA 8.1

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad (8.6)$$

o equivalentemente

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (8.7)$$

DEMOSTRACION 13 *Simplemente sume todas las ecuaciones de movimiento*

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \sum \vec{f}_{ij},$$

pero de acuerdo a la tercera ley de Newton la sumatoria doble  $\sum_{j \neq i} \sum \vec{f}_{ij}$  es cero porque se están sumando todas las fuerzas de interacción y las de acción y reacción suman cero, luego

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{a}_i &= \sum_i \vec{F}_i, \\ \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i &= \vec{F}^{ext}, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

El teorema (8.7) establece que el movimiento del centro de masa de un sistema depende exclusivamente de las fuerzas exteriores y no depende de las interacciones. Su validez está basada en la validez de la tercera ley de Newton. Por ejemplo en el sistema solar el movimiento de los diversos planetas, de los satélites, del sol, es un tema complicado. Sin embargo la fuerza externa que actúa sobre el sistema solar completo es prácticamente nula, lo cual trae la simple consecuencia de que el centro de masa del sistema solar va hacia alguna parte con velocidad prácticamente constante.

Si el centro de masa de un sistema está en reposo no es posible acelerarlo ejerciendo fuerzas interiores. ¿Cómo entonces puede acelerar un cohete en el espacio vacío? Expulsando masa a gran velocidad hacia atrás. El centro de masa del sistema permanece donde mismo pero una parte de él, el cohete, acelera hacia adelante.

Si se dispara un proyectil, como sabemos el sigue una trayectoria parabólica. ¿Qué sucede si en algún punto de la trayectoria el proyectil explota y se divide en varios fragmentos? La fuerza externa no ha cambiado, sigue siendo el peso del proyectil original, por lo tanto el centro de masa de los fragmentos debe continuar moviéndose sobre la misma parábola.

► TEOREMA 8.2

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (8.8)$$

DEMOSTRACION 14 *Para demostrarlo, basta considerar que*

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji},$$

*porque los nombres de los índices de suma son irrelevante y se han intercambiado. Entonces*

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0,$$

*donde para obtener la última igualdad se ha usado  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ . Luego si se multiplican las ecuaciones de movimiento  $\vec{r}_i \times$  y se suman todas se obtiene*

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij},$$

*la última sumatoria doble es cero luego*

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \\ \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \end{aligned}$$

*que prueba el teorema.*

### 8.1.2. Sobre el momentum angular

La ecuación (8.8) nos dice que el momentum angular de un sistema puede cambiar solamente si se efectúa un torque externo sobre el sistema. El significado del momentum angular o la cantidad de movimiento angular no es tan simple de explicar como lo es la cantidad de movimiento lineal. En situaciones simples podemos buscar una interpretación. Por ejemplo si dos partículas iguales de masa  $m$  giran en torno a su centro de masa en reposo con rapidez  $v$  unidas por una cuerda liviana inextensible de longitud  $L$  entonces

$$\vec{L}_G = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2,$$

pero en esta situación  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v}$  luego

$$\vec{L}_G = m(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v},$$

que es perpendicular al plano del movimiento y tiene magnitud

$$L_G = mLv.$$

Las ecuaciones (8.6) y (8.8) son, en general, insuficientes para determinar las posiciones de las partículas, siendo la excepción más notable un sistema rígido de partículas, que tiene justamente 6 grados de libertad, o en otras palabras, que su posición puede especificarse con solo 6 coordenadas o parámetros. Existen otros teoremas relativos al momentum angular y a la energía cinética que consideran dos sistemas de referencia, uno inercial con origen en  $O$  y otro no necesariamente inercial con origen en el centro de masa  $G$  y tal que sus ejes no roten, como se ilustra en la figura. Ahora se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_G + \vec{r}', \\ \vec{v} &= \vec{v}_G + \vec{v}',\end{aligned}$$

que permite relacionar expresiones dependientes de las velocidades y posiciones, cantidades cinemáticas, en ambos sistemas. Esas relaciones son los siguientes teoremas.

► TEOREMA 8.3  
(Koenig)

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G. \quad (8.9)$$

donde ahora  $\vec{L}_G = \sum m\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i$  involucra posiciones y velocidades respecto a un sistema con origen en  $G$  tal que sus ejes no roten.

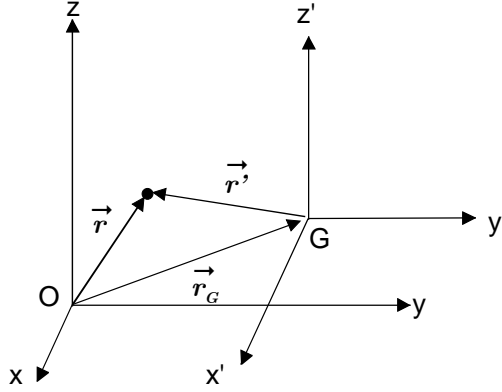


Figura 8.3:

DEMOSTRACION 15 *Tenemos que*

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_G + \vec{r}'_i, \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_G + \vec{v}'_i,\end{aligned}$$

de donde sigue que

$$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}_G + \vec{r}'_i) \times (\vec{v}_G + \vec{v}'_i),$$

desarrollando

$$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_G \times \vec{v}_G + \sum m_i \vec{r}_G \times \vec{v}'_i + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_G + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i,$$

pero

$$\frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{M} = \vec{r}'_G = 0,$$

lo cual causa que el segundo y tercer término de la expansión de  $\vec{L}_O$  se anulen probando entonces que

$$\vec{L}_O = M \vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G. \quad (8.10)$$

► TEOREMA 8.4

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}. \quad (8.11)$$

DEMOSTRACION 16 *Derivamos el teorema anterior respecto al tiempo obteniendo*

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = M\frac{d}{dt}(\vec{r}_G \times \vec{v}_G) + \frac{d}{dt}\vec{L}_G,$$

o

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_G = \frac{d}{dt}\vec{L}_O - M\frac{d}{dt}(\vec{r}_G \times \vec{v}_G) = \frac{d}{dt}\vec{L}_O - M(\vec{r}_G \times \vec{a}_G),$$

usando teoremas anteriores

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{L}_G &= \vec{\Gamma}_O^{ext} - \vec{r}_G \times \vec{F}^{ext}, \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_G \times \sum_i \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_G^{ext},\end{aligned}$$

que prueba el teorema.

► TEOREMA 8.5  
(Koenig)

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + K_G, \quad (8.12)$$

siendo  $K_G$  la energía cinética relativa al sistema con origen en  $G$ .

DEMOSTRACION 17 *La demostración sigue de*

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_G) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G) \cdot (\vec{v}'_i) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_G) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}'_i),\end{aligned}$$

donde la segunda y tercera sumatoria son nulas, luego

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (v'_i)^2, \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + K_G,\end{aligned}$$

que prueba el teorema.

### 8.1.3. Torque en punto arbitrario

En general, si se considera otro sistema con origen en un punto  $A$ , cuyos ejes no roten, definimos el momentum angular respecto a ese sistema con origen en  $A$  mediante

$$\vec{L}_A = \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_A), \quad (8.13)$$

entonces demostraremos el siguiente teorema.

► TEOREMA 8.6

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A, \quad (8.14)$$

DEMOSTRACION 18 *Derivando (8.13) tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \sum m_i\vec{r}_i \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) - \sum m_i\vec{r}_A \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \frac{d\vec{L}_0}{dt} - M\vec{r}_G \times \vec{a}_A - \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_i^{ext} + M\vec{r}_A \times \vec{a}_A \\ &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} + M(\vec{r}_A - \vec{r}_G) \times \vec{a}_A. \end{aligned}$$

*que prueba el teorema*

Sigue entonces que, la relación entre la derivada del momentum angular y torque, es válida para puntos ( $A$ ) que cumplan una de las siguientes condiciones:

$$A = G, \quad \vec{a}_A = \vec{0}, \quad \vec{a}_A \text{ paralela a } \vec{AG}.$$

La tercera condición es de utilidad en algunos problemas de la dinámica del cuerpo rígido, como se ilustra en ese capítulo, cuando se tiene información sobre el movimiento de un punto determinado. Vea la publicación de Luis Rodríguez V, Torque and the rate of change of angular momentum at an arbitrary point. Am.J.Phys. 71, 1201 (2003), donde se ilustra la aplicación de (8.14) para ciertos sistemas.

También podemos demostrar otro teorema

## ► TEOREMA 8.7

En general se tiene

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\vec{AG} \times \vec{v}_A + \vec{L}_A.$$

DEMOSTRACION 19 En efecto

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum m_i(\vec{r}_i' + \vec{r}_A) \times (\vec{v}_i' + \vec{v}_A) \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times \vec{v}_A), \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times \vec{v}_A),\end{aligned}$$

siendo ahora

$$\begin{aligned}\sum m_i \vec{r}_i' &= M\vec{AG}, \\ \sum m_i \vec{v}_i' &= M(\vec{v}_G - \vec{v}_A),\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + \sum m_i(\vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A) \quad (8.15) \\ &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_A + M\vec{r}_A \times (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + M\vec{AG} \times \vec{v}_A \\ &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\vec{AG} \times \vec{v}_A.\end{aligned}$$

#### 8.1.4. Sobre la fuerza gravitacional

La fuerza gravitacional entre partículas en posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  siempre está presente y de acuerdo a Newton ella está dada por

$$\vec{f}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

A pesar de lo bien que ella aplica a la explicación del sistema Solar, tema que se presenta más adelante, su expresión deja de manifiesto un defecto que varios habían notado. Si  $\vec{r}_2$  o  $\vec{r}_1$ , cambian, esa fuerza cambia instantáneamente. O sea la información del cambio viajó de una partícula a la otra con velocidad infinita. Albert Einstein con su formulación de su teoría de la relatividad especial establece que no hay cuerpos o señales que puedan viajar a más velocidad que la luz, por lo que se propuso construir una nueva teoría de la gravitación que no tuviera ese problema. Después de algún tiempo lo logra al construir una de las más hermosas teorías de la Física, la teoría de la relatividad general.

### 8.1.5. Teorema Energía Trabajo

#### Fuerzas conservativas y no conservativas

En el capítulo de dinámica se presentó este tema de un punto de vista más elemental. Como se explicó algunas fuerzas que dependen de la posición y que se llaman fuerzas conservativas,  $\vec{F}(\vec{r})$  tienen componentes que pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

o bien

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}), \quad (8.17)$$

con

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

el llamado operador "Nabla". Si eso se cumple, la fuerza se llama conservativa y la función escalar  $V(\vec{r})$  se denomina la energía potencial asociada a esa fuerza. De las matemáticas se sabe es necesario que la fuerza satisfaga

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0},$$

o, en otras palabras, que su circulación para contornos cerrados arbitrarios sea nula

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Las fuerzas que no satisfagan el anterior requisito se denominan fuerzas no conservativas.

### 8.1.6. Trabajo realizado por una fuerza

El trabajo infinitésimo realizado por una fuerza  $\vec{F}$  cuando ella tiene un desplazamiento infinitésimo  $d\vec{r}$ , se define mediante

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8.18)$$



Debe destacarse que ese trabajo es una cantidad infinitesimal porque el desplazamiento lo es. Excepcionalmente cuando la fuerza es conservativa, ese trabajo es una diferencial exacta. También es un caso especial cuando la fuerza es constante y se desplaza una distancia  $d$  sobre su línea de acción, el trabajo es

$$W = Fd.$$

En general será necesario integrar la expresión (??) lo cual requiere conocer como varía la fuerza a lo largo del camino de integración entre un punto inicial ( $i$ ) y un punto final ( $f$ ). Note como se indica en la figura (8.4) que  $d\vec{r}$  es tangente al camino  $C$  y la fuerza  $\vec{F}$  no lo es necesariamente

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

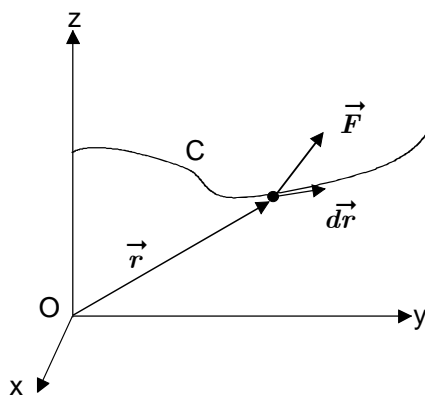


Figura 8.4:

### 8.1.7. Trabajo realizado por una fuerza conservativa (C)

La última afirmación puede establecerse de la siguiente forma. Si  $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$  entonces ese trabajo que llamaremos  $dW^C$  se reduce como se indica

$$\begin{aligned} dW^C &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz, \\ &= -dV, \end{aligned}$$

y para un desplazamiento finito se tiene

$$W_{i \rightarrow f}^C = \int_i^f -dV = -(V_f - V_i) = -\Delta V, \quad (8.19)$$

que es evidentemente independiente del camino por ser la resta de una función evaluada en el punto final y en el punto inicial.

De las ecuaciones de movimiento es posible escribir una primera integral, donde, sin perder generalidad, se separarán las fuerzas externas en sus posibles partes conservativa y no conservativa. Además se supone que las fuerzas de interacción son conservativas, es decir son derivables de un potencial de interacción dependiente de la distancia entre las dos partículas y posiblemente de parámetros propios de ellas dos (masas, cargas, etc.). En el caso de un sistema rígido de partículas, la última suposición no es necesaria, por cuanto el trabajo que realizan las fuerzas de interacción es nulo, al mantenerse constantes las distancias entre partículas. Este teorema es:

► TEOREMA 8.8

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}, \quad (8.20)$$

o

$$\Delta E = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}$$

*Aquí el trabajo no conservativo (NC) externo (ext) es la integral de línea*

$$W_{1 \rightarrow 2}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}^{ext, NC} \cdot d\vec{r}, \quad (8.21)$$

$V$  es la energía potencial asociada a la posible parte conservativa de la fuerza externa y  $V^{int}$  la energía potencial de interacción. La energía mecánica  $E$  se ha definido mediante

$$E = K + V + V^{int}.$$

Si el lado derecho, que representa el trabajo realizado por la posible parte no conservativa de la fuerza exterior es cero, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. En el caso importante de un sistema rígido de partículas, al no variar las distancias entre las partículas, puede tomarse  $V^{int} = 0$ .

DEMOSTRACION 20 De las ecuaciones de movimiento (8.5) multiplique  $\cdot d\vec{r}_i$  y sume todas las ecuaciones

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{j \neq i} \sum_i \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i,$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i m_i d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \sum_i m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = d \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = dK. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^C \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{NC} \cdot d\vec{r}_i \\ &= -dV + dW^{NC}. \end{aligned}$$

Supondremos además que las fuerzas de interacción son conservativas de modo que

$$\sum_{j \neq i} \sum_i \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -dV^{int},$$

luego se tiene

$$dK = -dV + dW^{NC} - dV^{int},$$

e integrando

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}.$$

La suma de las energía cinética y potenciales se denomina energía mecánica del sistema  $E$

$$E = K + V + V^{int},$$

luego el teorema energía trabajo es

$$\Delta E = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}$$

## 8.2. Sistema de dos partículas

El sistema de dos partículas interactuando a través de una fuerza conservativa es un caso soluble de sistemas de partículas. Tomando en cuenta la validez del principio de acción y reacción, las dos ecuaciones para ese caso son

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.22)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (8.23)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.24)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (8.25)$$

no es posible integrarlo directamente pues si la primera intentamos integrarla, allí está  $\vec{r}_2$  que no es conocida y similar problema existe si intentamos integrar la segunda. Para desacoplar estas ecuaciones conviene utilizar nuevas variables la posición del centro de masa

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (8.26)$$

y la posición relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (8.27)$$

resultando

$$\begin{aligned} M \vec{a}_G &= \vec{0}, \\ \mu \vec{a} &= \vec{f}(\vec{r}), \end{aligned}$$

siendo  $\mu$  la masa reducida del sistema de dos partículas, es decir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.28)$$

Entonces, el problema se ha reducido a resolver el problema de una partícula de masa reducida  $\mu$  en presencia de una fuerza central, con centro de fuerza en una de las partículas. Este resultado es sorprendentemente simple considerando que el origen (la posición de una de las partículas) está acelerado. Si se determinan  $\vec{r}_G$  y  $\vec{r}$ , las ecuaciones (8.26) y (8.27) pueden invertirse obteniendo

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_G + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_G - \frac{m_1}{M} \vec{r}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

### 8.2.1. La energía cinética

La energía cinética del sistema

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

puede escribirse en términos de la velocidad del centro de masa y de la velocidad relativa entre ellas. Derivando las dos ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_G + \frac{m_2}{M} \vec{v}, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_G - \frac{m_1}{M} \vec{v}, \end{aligned}$$

y resulta

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 \left( \vec{v}_G + \frac{m_2}{M} \vec{v} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \vec{v}_G - \frac{m_1}{M} \vec{v} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2, \end{aligned} \quad (8.30)$$

donde  $M = m_1 + m_2$ . Como  $v_G$  permanece constante consideremos sólo la parte variable

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (8.31)$$

### 8.3. Campo central de Fuerza

Consideraremos una partícula de masa  $\mu$  sobre la cual actúa una fuerza central conservativa cuya dirección es paralela al vector posición  $\vec{r}$ . Más adelante, consideraremos más en detalle la presencia de los dos cuerpos y la transformación entre coordenadas relativas y coordenadas del laboratorio. Por ahora, el vector posición  $\vec{r}$  representará el vector posición relativo entre las dos partículas. Si escribimos la fuerza central como

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r}, \quad (8.32)$$

la ecuación de movimiento será

$$\mu\vec{a} = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r}, \quad (8.33)$$

y se deducen de aquí

► **TEOREMA 8.9**

*Se conserva el momentum angular  $\vec{l}_O = \mu\vec{r} \times \vec{v}$ .*

DEMOSTRACION 21 *Basta darse cuenta que*

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{0},$$

*y entonces por un teorema ya demostrado*

$$\vec{l}_O = \text{constante}.$$

► **TEOREMA 8.10**

*La trayectoria está sobre un plano fijo, perpendicular al vector constante  $\vec{l}_O$ .*

DEMOSTRACION 22 *Si*

$$\mu\vec{r} \times \vec{v} = \vec{l}_O = \text{constante},$$

*entonces evidentemente*

$$\vec{l}_O \cdot \vec{r} = 0,$$

*que corresponde a la ecuación de un plano que pasa por el origen y es perpendicular a  $\vec{l}_O$ .*

Por lo tanto, es suficiente utilizar coordenadas polares  $(r, \theta)$  en el plano del movimiento. En esas coordenadas, las ecuaciones de movimiento serán

$$\mu \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \dot{\theta}^2 \right) = - \frac{dV(r)}{dr} \quad (8.34)$$

y

$$l_O = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}. \quad (8.35)$$

Eliminando  $\dot{\theta}$  es posible escribir una ecuación radial para  $r(t)$  y su primera integral que corresponde a la conservación de la energía  $E$ . Es decir

$$\mu \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{l_O^2}{\mu^2 r^3} \right) = - \frac{dV(r)}{dr}$$

y

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante}. \quad (8.36)$$

Si llamamos potencial efectivo para la coordenada radial a

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r), \quad (8.37)$$

resulta que este es diferente de cero incluso para una partícula libre. El efecto del primer término es siempre repulsivo lo cual se puede entender, para el caso de una partícula libre que se mueve en línea recta, simplemente porque la distancia  $r$  al origen pasa siempre por un mínimo. Para potenciales  $V(r)$  atractivos pueden haber máximos y mínimos de la distancia  $r$ , los llamados *puntos de retorno*.

### 8.3.1. Ecuación diferencial para la órbita

La dependencia de las variables polares en el tiempo es compleja. Es más simple encontrar la dependencia de la distancia con el ángulo, es decir encontrar la órbita. En efecto, haciendo uso de la conservación del momentum angular, es posible eliminar el tiempo de la ecuación radial (8.34) mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l_O^2}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta},$$

resultando para  $s = 1/r$  la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Binet):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l_O^2} \frac{dV(1/s)}{ds}. \quad (8.38)$$

Para un campo de fuerza inverso al cuadrado de la distancia, la integración de la última ecuación es simple. Es decir si

$$V(r) = -\frac{K}{r},$$

siendo la constante de proporcionalidad (no confundir con energía cinética)  $K > 0$  para el caso atractivo y  $K < 0$  para el caso repulsivo. Entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu}{l_O^2} K,$$

cuya solución general, en términos de dos constantes  $e$  y  $\alpha$  es

$$s = \frac{\mu K}{l_O^2} (1 - e \cos(\theta - \alpha)),$$

o bien

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}, \quad (8.39)$$

con  $e$  la excentricidad de la órbita y  $\alpha$  la orientación del semi-eje mayor de la cónica resultante, que son constantes por determinar en términos de condiciones físicas conocidas inicialmente o en un punto de la trayectoria. Si se considera la definición de una cónica en términos de un foco y su distancia a la directriz  $p$ , como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de las distancias al foco y a la directriz es una constante  $e$ , la llamada excentricidad de la cónica, se obtiene una ecuación de la misma forma. En efecto, con respecto a la figura (8.5), puede obtenerse

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = e \implies r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}.$$

En el caso atractivo,  $K > 0$ , la trayectoria es una elipse si  $0 \leq e < 1$ , una parábola si  $e = 1$  y una hipérbola si  $e > 1$ . Valores de  $e$  negativos no son necesarios de considerar, pues ello correspondería simplemente a rotar la órbita en 180 grados, lo cual es preferible hacer con un valor adecuado de  $\alpha$ , ver figura.(8.6).



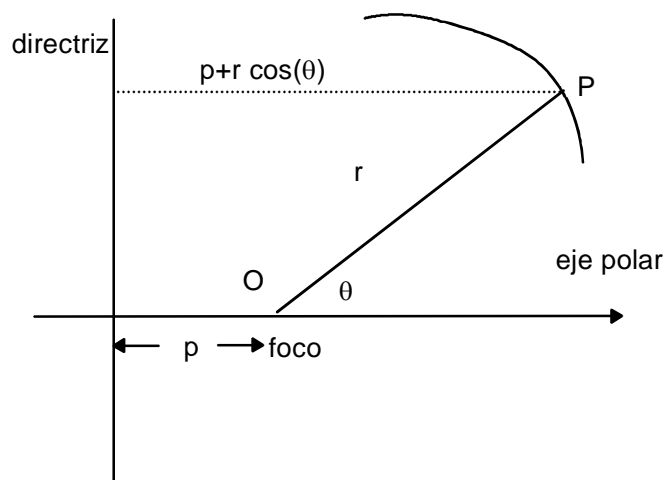


Figura 8.5: sección cónica

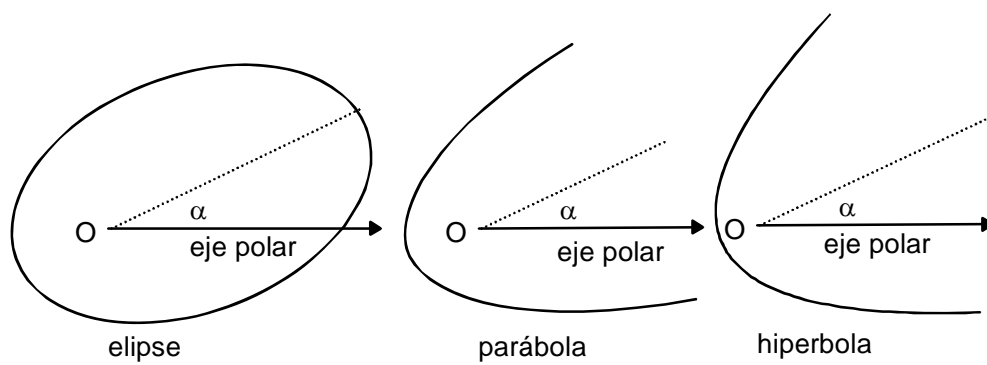


Figura 8.6: tres tipos de cónicas

En el caso repulsivo,  $K < 0$ , la solución debería escribirse

$$r = \frac{l_O^2}{\mu |K|} \frac{1}{e \cos(\theta - \alpha) - 1}, \quad (8.40)$$

es decir, en este caso, las trayectorias son hipérbolas.

### 8.3.2. Excentricidad

Demostraremos que la excentricidad  $e$  en términos de la energía  $E$  está dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{mk^2}. \quad (8.41)$$

NOTA 8.1 Si se trata de un satélite artificial de masa  $m$  en órbita respecto a un cuerpo mucho más masivo de masa  $M$  la masa reducida

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \simeq \frac{1}{m} \Rightarrow \mu \simeq m,$$

resulta ser prácticamente la masa  $m$  del satélite.

Para esta situación, la ecuación de la órbita es

$$r = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

con

$$\begin{aligned} l_0 &= \mu r^2 \dot{\theta}, \\ E &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}, \\ &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{\mu^2 r^2}) - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Si evaluamos la energía en el punto más cercano  $r_1$  con  $\theta = \pi$ , allí por tratarse de una distancia mínima,  $\dot{r} = 0$  resulta

$$r_1 = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1 + e},$$

y

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{l_0^2}{\mu^2 r_1^2}\right) - \frac{k}{r_1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{l_0^2}{\mu}\right)\left(\frac{\mu k}{l_0^2}(1+e)\right)^2 - k\left(\frac{\mu k}{l_0^2}(1+e)\right) = -\frac{1}{2}k^2\mu\frac{1-e^2}{l_0^2}, \end{aligned}$$

de donde sigue el resultado

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{\mu k^2}. \quad (8.42)$$

A pesar que la energía  $E$  es negativa para órbitas cerradas, el lado derecho de la fórmula anterior no es negativo. De análisis anterior

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{\mu^2 r^2}) - \frac{k}{r} \geq \frac{1}{2}\mu\left(\frac{l_0^2}{\mu^2 r^2}\right) - \frac{k}{r}.$$

Pero la última expresión tiene un mínimo cuando

$$-\left(\frac{l_0^2}{\mu r^3}\right) + \frac{k}{r^2} = 0 \implies r = \frac{l_0^2}{k\mu},$$

y el mínimo resulta

$$\left(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{l_0^2}{\mu^2 r^2}\right) - \frac{k}{r}\right)_{\min} = -\frac{\mu k^2}{2l_0^2},$$

entonces

$$E \geq -\frac{\mu k^2}{2l_0^2}. \quad (8.43)$$

O sea la energía puede ser negativa, pero tiene una cota inferior, a menos que el momentum angular sea cero. Esto prueba el resultado.

### 8.3.3. Semi ejes de la elipse

Para el caso de órbita elíptica, demostraremos que los semi-ejes mayor y menor de la elipse están dados respectivamente por

$$a = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1-e^2}, \quad b = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (8.44)$$

La ecuación de la órbita es

$$r = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

de manera que

$$\begin{aligned} 2a &= r(0) + r(\pi) \Rightarrow \\ a &= \frac{l_0^2}{2\mu k} \left( \frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right) \\ &= \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1 - e^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$b = (r \sin \theta)_{\text{máx}},$$

o sea debemos maximizar

$$y = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{\sin \theta}{1 - e \cos \theta},$$

derivando e igualando a cero, el máximo ocurre cuando

$$\cos \theta = e,$$

y de allí sigue

$$b = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{\sin \theta}{1 - e \cos \theta} = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2} = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

### 8.3.4. Ley de Kepler de los períodos

Demostraremos la ley de Kepler de los periodos, es decir que el periodo  $T$  en el caso de movimiento elíptico está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (8.45)$$

Considere que

$$l_0 = |\mu \vec{r} \times \vec{v}| = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}.$$

El área barrida en un intervalo de tiempo  $dt$  es

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{l_0}{2\mu} dt,$$

de manera que

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{\frac{l_0}{2m}} = \frac{2\mu}{l_0} \pi ab, \\ T^2 &= \frac{4\mu^2}{l_0^2} \pi^2 a^2 b^2, \end{aligned}$$

pero ya sabemos que

$$b^2 = \frac{l_0^4}{\mu^2 k^2} \frac{1}{1 - e^2} = \frac{l_0^2}{\mu k} a,$$

entonces

$$T^2 = \frac{4\mu^2}{l_0^2} \pi^2 a^2 \frac{l_0^2}{\mu k} a = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3, \quad (8.46)$$

que prueba el resultado. Además si los cuerpos tienen masas  $m$  y  $M$ ,  $k = GMm$ , luego

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{mM}{GMm(M+m)} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3, \quad (8.47)$$

la forma más conocida de la tercera ley de Kepler.

## 8.4. Choques

Por choques entenderemos la interacción impulsiva o impulso, que ocurre cuando dos cuerpos sólidos se colocan en contacto animados de alguna velocidad, y como consecuencia de esa interacción, las velocidades experimentan cambios finitos en un intervalo de tiempo muy corto que, en una aproximación ideal, consideraremos infinitesimal. Si  $\vec{F}$  indica la fuerza de interacción que actúa sobre uno de los cuerpos, el impulso  $\vec{J}$  se define por

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a} dt, \quad (8.48)$$

para el intervalo de tiempo que dura la interacción. Podemos integrar la expresión anterior y escribir

$$\vec{J} = m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)), \quad (8.49)$$

es decir el impulso que actúa sobre un cuerpo es igual al cambio de la cantidad de movimiento del cuerpo.

En los choques idealizados, que duran un instante infinitesimal de tiempo, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema entre el instante inmediatamente anterior al choque y el inmediatamente posterior al choque. Esto es una consecuencia de desprestigiar otras fuerzas exteriores que se mantienen pequeñas respecto a la fuerza de interacción impulsiva que alcanza una magnitud muy grande en ese pequeñísimo lapso de tiempo. Entonces una simple aplicación de la ley de acción y reacción para el intervalo de tiempo que dura el choque nos da

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}, \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= -\vec{F}, \end{aligned}$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza de interacción y en consecuencia

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}.$$

de aquí se deduce que en un choque se conserva la cantidad de movimiento lineal  $\vec{P}$ . Si las velocidades de las partículas (1) y (2) se distinguen colocando una ( $\prime$ ) a sus valores inmediatamente después del choque entonces se tiene

$$\vec{P} = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (8.50)$$

Además si los cuerpos tienen superficies suaves y continuas, se conserva la velocidad tangencial a la superficie de contacto pues, para la dirección tangencial, la fuerza de interacción es nula. Entonces, si distinguimos mediante un subíndice  $T$  a las componentes tangenciales, se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dv_{1T}}{dt} &= F_T = 0, \\ m_2 \frac{dv_{2T}}{dt} &= -F_T = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} v'_{1T} &= v_{1T}, \\ v'_{2T} &= v_{2T}. \end{aligned} \tag{8.51}$$

NOTA 8.2 Dos cuerpos materiales no pueden en realidad ponerse en contacto. La realidad es que cuando dos cuerpos relativamente rígidos parecen chocar o ponerse en contacto, lo que se manifiesta es la enorme fuerza de repulsión eléctrica de los electrones superficiales de un cuerpo con los del otro. A pesar de esto, idealizaremos la situación a la aparición de una fuerza de contacto cuando dos cuerpos chocan.

### 8.4.1. Coeficiente de restitución

Cuando dos cuerpos chocan, aun cuando la duración sea muy corta, existen dos etapas. Primero existe una etapa en que los cuerpos se comprimen, etapa que llamaremos de compresión y en segundo lugar, existe una etapa donde los cuerpos se dilatan en cierta medida, etapa que llamaremos de restitución. De la misma forma separaremos la fuerza impulsiva o impulso que se desarrolla, en dos partes: el impulso de compresión  $\vec{J}_C$  y el impulso de restitución  $\vec{J}_R$ . Es un hecho experimental que el impulso de restitución es de magnitud menor o igual al de compresión, cuestión que define el coeficiente de restitución  $e$  mediante

$$\vec{J}_R = e\vec{J}_C,$$

con  $0 \leq e \leq 1$ . Además, la dirección del impulso  $\vec{J}$  ocurre en la dirección normal, de modo que podemos analizar lo que ocurre con las componentes normales de las velocidades de los cuerpos. Notemos que cuando termina la etapa de compresión, las componentes normales de las velocidades de los dos cuerpos son iguales. De la tercera ley de Newton se tiene que los impulsos  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  que actúan sobre las partículas cumplen

$$\vec{J}_1 = -\vec{J}_2.$$

Aplicando la ecuación 8.49 a cada partícula y a cada etapa tenemos para

las componentes normales que

$$\begin{aligned} J_{C_1} &= m_1(v_N - v_{1N}), \\ J_{C_2} &= m_2(v_N - v_{2N}), \\ J_{R_1} &= m_1(v'_{1N} - v_N), \\ J_{R_1} &= m_2(v'_{2N} - v_N), \end{aligned}$$

donde  $v_N$  indica la componente normal de velocidad común a ambos cuerpos al fin de la etapa de compresión y al inicio de la etapa de restitución. De acuerdo a la definición del coeficiente  $e$  y a la tercera ley, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned} J_{C_1}/m_1 &= v_N - v_{1N}, \\ -J_{C_1}/m_2 &= v_N - v_{2N}, \\ eJ_{C_1}/m_1 &= v'_{1N} - v_N, \\ -eJ_{C_1}/m_2 &= v'_{2N} - v_N. \end{aligned}$$

Restando las dos primeras y las dos últimas se obtiene

$$\begin{aligned} J_{C_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) &= v_{2N} - v_{1N}, \\ eJ_{C_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) &= v'_{1N} - v'_{2N}, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$v'_{1N} - v'_{2N} = e(v_{2N} - v_{1N}), \quad (8.52)$$

que indica la forma en que varían las componentes relativas normales de las partículas como resultado de un choque.

Se pueden distinguir tres casos según sea el valor del coeficiente de restitución:

- a) Choque plástico  $e = 0$ .
- b) Choque inelástico  $0 < e < 1$ .
- c) Choque elástico  $e = 1$ .



### 8.4.2. Choques unidimensionales

En un choque frontal, las velocidades permanecen sobre una misma línea antes e inmediatamente después del choque no siendo entonces necesario considerar más que la dirección normal, es decir se trata de una situación unidimensional donde en particular aplicarán

$$P = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (8.53)$$

$$v'_1 - v'_2 = e(v_2 - v_1). \quad (8.54)$$

de donde se pueden despejar las velocidades resultantes en la forma

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{em_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{em_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Si el choque es elástico,  $e = 1$ , las ecuaciones anteriores se reducen a

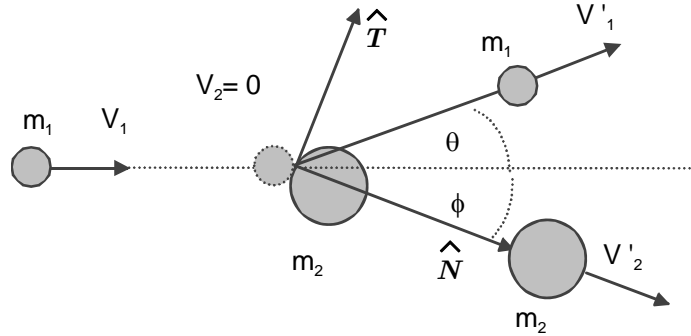
$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

y si las masas son iguales  $m_1 = m_2$

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1.$$

### 8.4.3. Choques bidimensionales de esferas

Considere una esfera (2) inicialmente en reposo y otra (1) que se acerca con una cierta velocidad de magnitud  $v_1$  de manera que ellas salen en ángulos  $\theta$  y  $\phi$  como se indica en la figura. La dirección normal, que es la dirección del impulso, queda determinada por la dirección de la velocidad adquirida por la esfera que partió del reposo.



Esto es, la esfera (2) por estar en reposo antes del choque, fue golpeada en la dirección en que ella sale. Esa es entonces la dirección normal  $\hat{N}$ . La dirección tangente  $\hat{T}$  está a  $90^\circ$  de la dirección normal. Entonces podemos escribir la ecuación de conservación del momentum  $\vec{P}$ , en componentes normales y tangenciales

- Normal

$$m_1 v_1 \cos \phi = m_1 v'_1 \cos(\theta + \phi) + m_2 v'_2, \quad (8.57)$$

- Tangencial

$$m_1 v_1 \sin \phi = m_1 v'_1 \sin(\theta + \phi), \quad (8.58)$$

- La definición del coeficiente de restitución da

$$e v_1 \cos \phi = v'_2 - v'_1 \cos(\theta + \phi). \quad (8.59)$$

Entre la primera y tercera eliminemos  $v'_2$

$$(m_1 - e m_2) v_1 \cos \phi = (m_1 + m_2) v'_1 \cos(\theta + \phi),$$

y si dividimos por la tercera se obtiene

$$(m_1 - e m_2) \cot \phi = (m_1 + m_2) \cot(\theta + \phi), \quad (8.60)$$

que establece una relación entre los ángulos. En el caso particular donde las masas son iguales y el choque es elástico, resulta

$$\cot(\theta + \phi) = 0,$$

es decir la suma de los ángulos es  $\pi/2$ , típicamente lo que sucede en el Billar.

#### 8.4.4. Discusión

Las tres ecuaciones 8.57, 8.58, 8.59 pueden ser consideradas tres ecuaciones lineales y homogéneas para las rapidezces  $v_1$ ,  $v'_1$  y  $v'_2$ . La relación entre los ángulos es en realidad la condición de determinante nulo, para que existan soluciones no triviales para las rapidezces.

$$\begin{aligned} m_1 v_1 \cos \phi - m_1 v'_1 \cos(\theta + \phi) - m_2 v'_2 &= 0, \\ m_1 v_1 \sin \phi - m_1 v'_1 \sin(\theta + \phi) &= 0, \\ e v_1 \cos \phi + v'_1 \cos(\theta + \phi) - v'_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde al igualar a cero el determinante de la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} m_1 \cos \phi & -m_1 \cos(\theta + \phi) & -m_2 \\ \sin \phi & -\sin(\theta + \phi) & 0 \\ e \cos \phi & \cos(\theta + \phi) & -1 \end{pmatrix}$$

conduce a

$$(m_1 - e m_2) \cos \phi \sin(\theta + \phi) = \sin \phi \cos(\theta + \phi) (m_1 + m_2).$$

Con la condición de determinante satisfecha, podemos calcular  $v'_1$  y  $v'_2$  en términos de  $v_1$

$$\begin{aligned} \frac{v'_1}{v_1} &= \frac{\sin \phi}{\sin(\theta + \phi)} \geq 0, \\ \frac{v'_2}{v_1} &= \frac{m_1}{m_2} (\cos \phi - \sin \phi \cot(\theta + \phi)) \\ &= \frac{m_1}{m_2} \left(1 - \frac{(m_1 - e m_2)}{m_1 + m_2} \cos \phi\right) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + e) \cos \phi \geq 0 \end{aligned}$$

O sea

$$\phi < \frac{\pi}{2}.$$

Esto lo saben todos los que juegan pool. Es imposible que la esfera en reposo salga a  $90^\circ$  de la dirección de la esfera incidente. De la relación entre ángulos (8.60) se deduce que  $\cot(\theta + \phi)$  tiene el mismo signo que  $m_1 - e m_2$ . Hay en consecuencia tres casos

- Si  $m_1 - em_2 = 0$  se tiene que  $\theta + \phi = \pi/2$ .
- Si  $m_1 - em_2 > 0$  se tiene que  $\theta + \phi < \pi/2$ .
- Si  $m_1 - em_2 < 0$  se tiene que  $\theta + \phi > \pi/2$ .

Si  $\theta \rightarrow 0$ , choque casi rasante, entonces  $\cot \phi \rightarrow 0$  y eso significa que  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  y  $v'_2 \rightarrow 0$ .

Si ambas velocidades antes del choque son dadas, y si se trata de choque de esferas, las direcciones normales y tangenciales pueden ser determinadas haciendo consideraciones geométricas.

Por ejemplo, vea la figura (8.7)

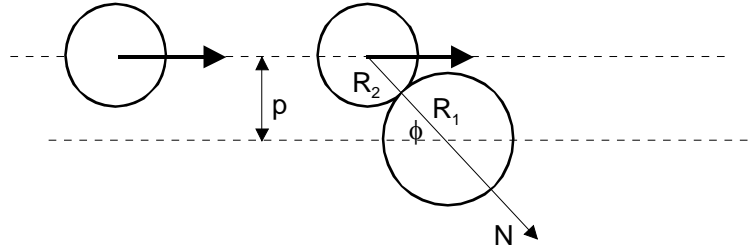


Figura 8.7: Choque esferas

Si la esfera de radio  $R_2$  se acerca a otra de radio  $R_1$  que está en reposo siendo  $p$  la distancia entre las líneas que contienen los centros en la dirección de la velocidad de la esfera incidente, entonces el ángulo  $\phi$  que da la dirección de la normal, queda determinado geométricamente por

$$\sin \phi = \frac{p}{R_1 + R_2}.$$

Esto es el ángulo  $\phi$  queda determinado por  $p$  y los radios y el ángulo  $\theta$  será determinado de acuerdo a

$$(m_1 - em_2) \cot \theta = (m_1 + m_2) \cot(\theta + \phi). \quad (8.61)$$

#### 8.4.5. Consideraciones sobre la energía

Como veremos cuando ocurren choques en general se pierde energía. Fue demostrado al estudiar el problema de dos cuerpos que la energía cinética del sistema es

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \quad (8.62)$$

Donde  $\mu$  es la masa reducida del sistema

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

El choque no afecta la velocidad del centro de masa, luego la variación de la energía cinética que ocurre en un choque es

$$K' - K = \frac{1}{2}\mu v'^2 - \frac{1}{2}\mu v^2.$$

Aquí,  $v$  es la rapidez relativa entre las partículas

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_{2T} - v_{1T})^2 + (v_{2N} - v_{1N})^2, \\ v'^2 &= (v'_{2T} - v'_{1T})^2 + (v'_{2N} - v'_{1N})^2 \end{aligned}$$

pero las componentes tangenciales no son afectadas, luego

$$\begin{aligned} v'^2 - v^2 &= (v'_{2N} - v'_{1N})^2 - (v_{2N} - v_{1N})^2 \\ &= (e^2 - 1)(v_{2N} - v_{1N})^2 \\ &= -(1 - e^2)(v_{2N} - v_{1N})^2, \end{aligned}$$

es decir en general, hay una pérdida de energía cinética dada por

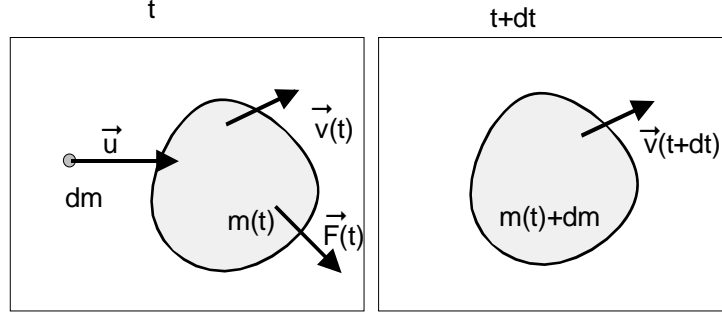
$$K' - K = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_{2N} - v_{1N})^2. \quad (8.63)$$

Hay conservación de Energía solamente en el caso de choque elástico  $e = 1$ . El caso  $v_{2N} - v_{1N} = 0$  se descarta porque eso significa que no hay choque.

## 8.5. Sistemas de masa variable

Con algunas consideraciones pueden tratarse sistemas que ganan o pierden masa en forma continua. Para ello considere un análisis diferencial de lo que ocurre cuando un sistema de masa inicial  $m(t)$  con una velocidad  $\vec{v}(t)$  y sobre el que actúa una fuerza externa  $\vec{F}(t)$ , incorpora una cantidad infinitesimal de masa  $dm$  la cual tiene, justo antes de incorporarse, una velocidad

$\vec{u}(t)$ . Transcurrido un tiempo  $dt$ , la masa del sistema es  $m(t) + dm$ . La cuestión es: ¿cuánto ha variado la velocidad del sistema en este proceso?



Para este efecto considere que el sistema total es de masa constante, por lo tanto podemos usar el hecho que el cambio de la cantidad de movimiento total es producido por la fuerza  $\vec{F}(t)$  solamente, es decir

$$\vec{F}(t)dt = (m(t) + dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)) - (\vec{u}(t)dm + m(t)\vec{v}(t)),$$

de aquí, despreciando infinitésimos de segundo orden, se establece el resultado

$$\vec{F}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - (\vec{u}(t) - \vec{v}(t))\frac{dm(t)}{dt}. \quad (8.64)$$

Aun cuando el análisis ha sido hecho para sistemas que ganan masa, el mismo resultado se obtiene para sistemas que pierden masa, pero en este último caso  $\vec{u}(t)$  representará la velocidad de los elementos de masa justo después de abandonar el sistema.

Note que  $(\vec{u}(t) - \vec{v}(t))$  representa la velocidad relativa de los elementos de masa  $dm$  con respecto al sistema de masa  $m(t)$ .

La ecuación 8.64 también puede escribirse

$$\vec{F}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + (\vec{v}(t) - \vec{u}(t))\frac{dm(t)}{dt}, \quad (8.65)$$

siendo en este caso  $(\vec{v}(t) - \vec{u}(t))$  la velocidad relativa del sistema de masa  $m(t)$  con respecto a los elementos de masa  $dm$ .

**EJEMPLO 8.5.1** Una cadena flexible de longitud total  $L$  y de masa total  $M$  se suspende de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo y se suelta. Determine la reacción que ejerce el suelo sobre el montón que se acumula mientras la cadena cae. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el suelo).

**Solución.** Sea el sistema de masa variable el montón acumulado, de modo que, en la dirección vertical

$$v(t) = 0, \quad u(t) = -gt, \quad F(t) = R(t) - mg, \quad m = \frac{M}{L} \frac{1}{2} gt^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (8.64) nos da

$$R(t) - mg = -u \frac{dm}{dt},$$

y finalmente

$$R(t) = \frac{3}{2} \frac{M}{L} g^2 t^2.$$

---

**EJEMPLO 8.5.2** Una cadena flexible de longitud total  $L$  y de masa total  $M$  viene deslizando sobre una superficie horizontal lisa con rapidez  $v_0$ , en la dirección positiva del eje  $OX$ . Al llegar al origen se encuentra con un bloque de masa  $M$  inicialmente en reposo. Determine la posición del bloque en función del tiempo mientras la cadena se acumula contra él. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el bloque).

**Solución.** Sea  $x$  la coordenada del bloque. La masa total del sistema, bloque más trozo acumulado será

$$m(t) = M + \frac{M}{L}(v_0 t - x),$$

además  $u(t) = v_0$ ,  $v(t) = \dot{x}$ ,  $F(t) = 0$ , de modo que la ecuación (8.64) conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$0 = \left( M + \frac{M}{L}(v_0 t - x) \right) \ddot{x} - \frac{M}{L}(v_0 - \dot{x})^2,$$

o bien, en términos de una variable auxiliar  $z = L + v_0 t - x$

$$0 = z\ddot{z} + \dot{z}^2,$$

con condiciones iniciales  $z(0) = L$ ,  $\dot{z}(0) = v_0$ . Integrando dos veces se obtiene

$$\dot{z} = \frac{Lv_0}{z}, \quad \frac{1}{2} \dot{z}^2 = \frac{1}{2} L^2 + Lv_0 t,$$

y finalmente

$$x = L + v_0 t - \sqrt{L^2 + 2Lv_0 t}, \quad \text{si } t < L/v_0.$$

Más tarde, el sistema continúa moviéndose con la rapidez constante alcanzada al agotarse la cadena. (Ello ocurre cuando  $(v_0 t - x)M/L = M$ , o bien  $z = 2L$ )



**EJEMPLO 8.5.3** *Una cadena flexible de masa distribuida uniformemente  $\lambda \text{ kg m}^{-1}$  está amontonada en el suelo y se aplica a uno de sus extremos, una fuerza constante hacia arriba  $F$ . Determine la altura de la cadena levantada en función del tiempo.*

**Solución.** Sea  $y$  la altura. Aquí  $u = 0$ ,  $v = \dot{y}$ ,  $m = \lambda y$ , de modo que la ecuación de movimiento será

$$F - \lambda y g = \lambda y \ddot{y} + \lambda \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \lambda \left( y \frac{d\dot{y}^2}{dy} + 2\dot{y}^2 \right)$$

la cual puede ser integrada mediante un factor integrante  $y$ . Así resulta

$$2Fy - 2\lambda y^2 g = \lambda \frac{d}{dy} (y^2 \dot{y}^2),$$

entonces  $F - \frac{2}{3}\lambda y g = \lambda \dot{y}^2$  de donde se obtiene

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3}yg}, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3}yg}},$$

y finalmente

$$y = t \sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \frac{1}{6} g t^2.$$

Aunque parezca paradójico, la rapidez inicial del extremo de la cadena después de aplicada la fuerza no es cero, es  $\sqrt{F/\lambda}$  cuestión que se explica pues se ha aplicado una fuerza finita, a un elemento infinitésimo de masa lo cual causa ese repentino cambio de velocidad. Además puede observarse que la cadena se detiene cuando  $F = \frac{2}{3}\lambda y g$ , y para ese instante el largo levantado tiene un peso  $\lambda y g = \frac{3}{2}F$ , que es mayor que la fuerza aplicada. Naturalmente después bajará hasta que finalmente sea  $\lambda y g = F$ . Es un buen problema de investigación explicar las sucesivas oscilaciones de la cadena hasta que se detenga en su posición de equilibrio final.



---

**EJEMPLO 8.5.4** *Un depósito cilíndrico de masa despreciable con base circular de radio  $R$  tiene líquido (agua por ejemplo) inicialmente hasta una altura  $h_0$ . Al nivel del suelo liso se hace un pequeño agujero circular radio  $r$  por el cual sale agua horizontalmente. Determine la aceleración del depósito producto de la pérdida de masa.*

**Solución.** Sea  $h(t)$  la altura del agua en el depósito y  $\rho$  su densidad. Si suponemos que la aceleración no afecta demasiado la superficie del agua podemos estimar la forma en que decrece la masa del líquido en el recipiente si  $r \ll R$ , para el depósito estacionario. La rapidez de salida por el orificio (relativa al recipiente) será de magnitud  $\sqrt{2gh}$ , de modo que el caudal másico de salida será  $\rho\sqrt{2gh}\pi r^2$ . Entonces la masa del líquido disminuye de la forma

$$\frac{dm}{dt} = -\rho\sqrt{2gh}\pi r^2,$$

pero

$$m = \rho\pi R^2 h$$

luego

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh}\frac{r^2}{R^2}$$

de donde integrando se obtiene

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}t.$$

Ahora planteamos la ecuación de movimiento suponiendo que la velocidad relativa del agua que sale es

$$u - v = -\sqrt{2gh}$$

así resulta

$$\begin{aligned} 0 &= m(t)\frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right)\frac{dm(t)}{dt}, \\ 0 &= \rho\pi R^2 h\frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right)(-\rho\sqrt{2gh}\pi r^2) \end{aligned}$$

simplificando

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{2gr^2}{R^2}$$

mientras quede líquido en el recipiente. Si el recipiente tiene una masa  $M$  el único cambio que se produce es

$$0 = (M + \rho\pi R^2 h) \frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right) (-\rho\sqrt{2gh}\pi r^2)$$

de donde

$$a = \frac{dv}{dt} = 2g \frac{h\rho\pi r^2}{M + \rho\pi R^2 h},$$

donde ahora influye la altura que es función del tiempo

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t\right)^2.$$

---

### 8.5.1. Resumen de fórmulas movimiento en un campo central de fuerza

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}.$$

El álgebra de esta materia puede resultar tediosa y muy repetida en diversos problemas, por lo cual se dan aquí las principales fórmulas para hacer referencias a ellas en las soluciones. En lo que sigue  $k = GMm$  es la constante de la ley de Fuerza, no la confunda con la energía cinética

$$r = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)},$$

$$b = \frac{l_0^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu F(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2},$$

$$l_0 = |\mu \vec{r} \times \vec{v}| = \mu r^2 \dot{\theta},$$

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{\mu k^2},$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r},$$

### 8.5.2. Lanzamiento desde la superficie terrestre

Aquí preferimos usar  $M$  masa tierra,  $m$  masa proyectil o satélite

$$k = GMm,$$

$$\mu \simeq m.$$

Si un proyectil se lanza de la superficie terrestre, formando un ángulo  $\beta$  con la horizontal, como se indica en la figura, que es materia de varios problemas, preferimos deducir aquí todas las relaciones.

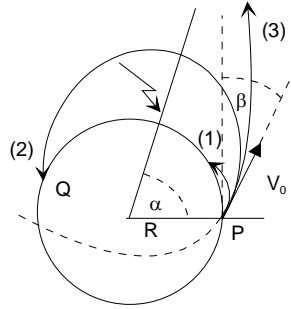


Figura 8.8:

### 8.5.3. Energía

$$E = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m(V_0^2 - V_e^2).$$

### 8.5.4. Momentum angular

$$l_0 = mRV_0 \cos \beta.$$

### 8.5.5. Velocidad de escape desde la superficie

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

### 8.5.6. Excentricidad

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{m\mu(GMm)^2} \\ &= 1 + \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2 \beta}{V_e^4}. \end{aligned}$$

### 8.5.7. Ecuación de la órbita

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{m(GMm)} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} \\ r &= \frac{2V_0^2}{V_e^2} \frac{R \cos^2 \beta}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}. \end{aligned}$$

### 8.5.8. Orientación $\alpha$ del semieje mayor (figura, caso (2))

Si  $r = R$  en  $\theta = 0$ , se deduce que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2V_0^2}{V_e^2} \frac{\cos^2 \beta}{1 - e \cos \alpha} \implies \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2}{V_e^2} \cos^2 \beta}{\sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}\right) \frac{V_0^2}{V_e^2} \cos^2 \beta}} \\ \sin \alpha &= \frac{2\frac{V_0^2}{V_e^2} \cos \beta \sin \beta}{\sqrt{1 - 4\frac{V_0^2}{V_e^2} \left(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}\right) \cos^2 \beta}} \end{aligned}$$

### 8.5.9. Casos elípticos

Si  $V_0 < V_e$  y  $\beta > 0$  casos (1) y (2) de la figura, el proyectil cae de nuevo a la Tierra, y el alcance angular de  $P$  a  $Q$  está dado por

$$2\alpha$$

### 8.5.10. Alcance máximo

Deseamos obtener una expresión para el ángulo  $\beta$  de lanzamiento que da un alcance máximo para una rapidez inicial dada  $V_0 < V_e$ . La inclinación del semi eje mayor está dada por

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{2V_0^2}{V_e^2} \cos^2 \beta}{\sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}) \frac{V_0^2}{V_e^2} \cos^2 \beta}}.$$

Sean, para simplificar la notación

$$\frac{V_0}{V_e} = \sin \varsigma, \quad \cos^2 \beta = u$$

de modo que

$$\cos \alpha = \frac{1 - 2u \sin^2 \varsigma}{\sqrt{1 - 4u \cos^2 \varsigma \sin^2 \varsigma}}.$$

Es una buena tarea probar que hay un extremo de  $\cos \alpha$  cuando

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2 \cos^2 \varsigma} = \cos^2 \beta \Rightarrow \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varsigma} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}}} \end{aligned}$$

(Note que si  $V_0$  es muy pequeño, el ángulo de disparo óptimo será  $\beta = \pi/4$ )  
Podemos entonces calcular para ese ángulo de disparo

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{\text{máx}} &= \frac{1 - 2u \sin^2 \varsigma}{\sqrt{1 - 4u \cos^2 \varsigma \sin^2 \varsigma}} \\ &= \frac{\sqrt{(-1 + 2 \cos^2 \varsigma)}}{\cos^2 \varsigma} \text{ si } \cos \varsigma > \sin \varsigma \end{aligned}$$

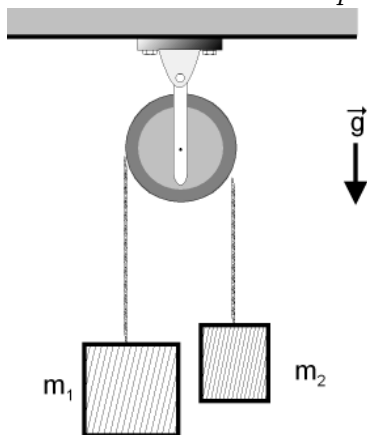
Esta última condición puede escribirse  $V_0 < V_e \sqrt{2}$  y para este caso (más álgebra)

$$\sin \alpha_{\text{máx}} = \frac{\frac{V_0^2}{V_e^2}}{1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}} = \frac{V_0^2}{V_e^2 - V_0^2} \text{ si } V_0 < V_e \sqrt{2}$$

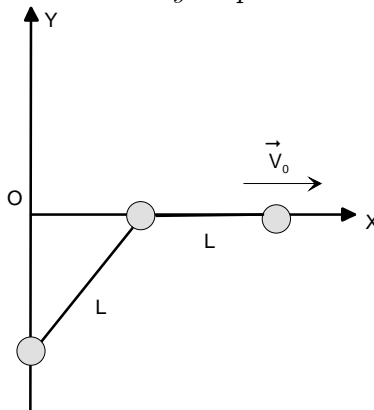
## 8.6. Ejercicios.

### 8.6.1. Problema de sistema de partículas

EJERCICIO 8.1 La figura muestra una polea fija de masa despreciable y sin roce de la cual penden 2 partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ), unidas por una cuerda liviana e inextensible. Calcule la aceleración de cada partícula y la aceleración del centro de masa del sistema de partículas.

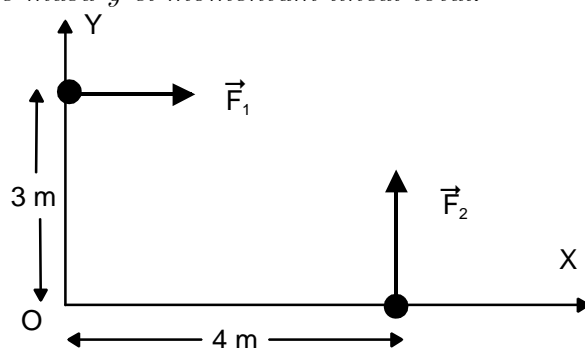


EJERCICIO 8.2 Tres partículas de igual masa  $m$ , unidas por barras rígidas de largo  $L$  y masa despreciable, están obligadas a moverse sobre los ejes tal como lo muestra la figura. Si la partícula de la derecha tiene la velocidad  $\vec{v} = v_0 \hat{i}$ , determine la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema respecto del centro de masa y respecto del origen  $O$ .

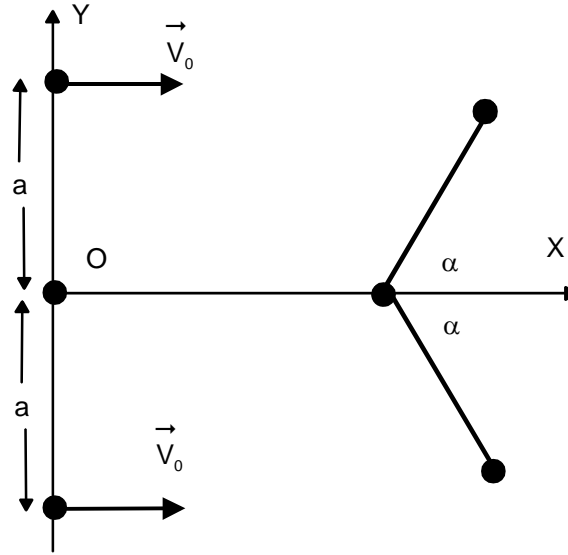


EJERCICIO 8.3 Las posiciones de dos partículas  $A$  y  $B$  de masa  $m_a = 1 \text{ kg}$  y  $m_b = 2 \text{ kg}$  son respectivamente  $\vec{r}_a = (4 - t; 3t^2)$  y  $\vec{r}_b = (5 - 2t - t^2, 10)$ . Determine en  $t = 4 \text{ s}$  la fuerza neta exterior sobre el sistema de partículas, el momentum angular y torque respecto del origen del sistema de coordenadas.

EJERCICIO 8.4 La figura muestra un sistema formado por dos partículas cuyas masas son  $m_1 = 10 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 6 \text{ kg}$ . Las fuerzas netas que actúan sobre cada una de ellas respectivamente  $\vec{F}_1 = 8\hat{i} \text{ N}$  y  $\vec{F}_2 = 6\hat{j} \text{ N}$ . Inicialmente el sistema se encuentra en reposo. Calcule en función del tiempo las coordenadas del centro de masa y el momentum lineal total.



EJERCICIO 8.5 Tres partículas de igual masa  $m$  descansan sobre una superficie horizontal lisa, unidas mediante cuerdas de largo  $a$  sin masa, ubicadas en la línea recta que la une tal como se muestra en la figura. Inicialmente, a las partículas de los extremos se les da una velocidad inicial perpendicular a la cuerda de magnitud  $V_0$  mientras la partícula del centro continúa en reposo. Determine:



- La velocidad del centro de masa en cualquier instante,
- La velocidad de las partículas en el instante que chocan las partículas extremas,
- El momentum angular del sistema de partícula respecto al origen del sistema.

EJERCICIO 8.6 Tres partículas de masa  $m_1 = 2\text{ kg}$ ,  $m_2 = 3\text{ kg}$  y  $m_3 = 5\text{ kg}$ , se mueven bajo la influencia de un campo de fuerza de modo que sus posiciones relativas a un sistema de coordenadas son:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 2t\hat{i} - 3\hat{j} + t^2\hat{k} \text{ m} \\ \vec{r}_2 &= (t+1)\hat{i} + 3t\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m} \\ \vec{r}_3 &= t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t-1)\hat{k} \text{ m}\end{aligned}$$

Calcule:

- El momentum angular total del sistema,
- El torque total externo aplicado al sistema respecto del origen,
- El momento angular total y el torque respecto al centro de masa.



EJERCICIO 8.7 Una granada inicialmente en reposo, estalla en 3 pedazos de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  cuyas velocidades son respectivamente:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= 6\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \\ \vec{v}_2 &= -5\hat{i} - 7\hat{j} - 8\hat{k}, \\ \vec{v}_3 &= -8\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\end{aligned}$$

Determine la relación entre sus masas.

EJERCICIO 8.8 Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo  $O$  con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto  $O$ , demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.

EJERCICIO 8.9 Un conjunto de partículas de masas  $m$ , puede deslizarse libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.

EJERCICIO 8.10 Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.

EJERCICIO 8.11 Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en  $O$ . Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.

EJERCICIO 8.12 Dos partículas de masa  $m$  cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares  $OX$  y  $OY$  y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo  $K$  la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:

$$\begin{aligned}x(0) &= a, & y(0) &= a, \\ \dot{x}(0) &= -V_0, & \dot{y}(0) &= 0,\end{aligned}$$

a) Determine  $x(t)$ ,  $y(t)$  y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.

EJERCICIO 8.13 *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante  $k$  y largo natural  $a$ . Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que une las partículas. Determine  $V_0$  si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es  $2a$ .*

EJERCICIO 8.14 *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta, igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos " $a$ ". La partícula del medio está inicialmente en reposo, y a las partículas externas se les da una velocidad  $V_0$  perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

### 8.6.2. Choques

EJERCICIO 8.15 *Una partícula de masa  $M$  se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa  $m$  se acerca con rapidez  $v$  y la choca frontalmente siendo  $e$  el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

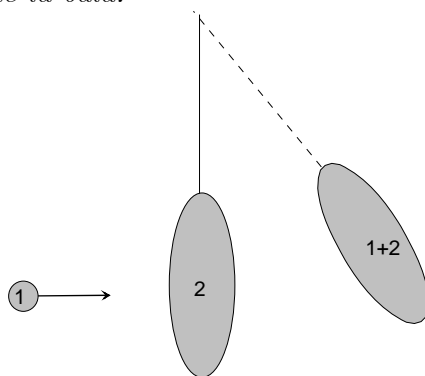
EJERCICIO 8.16 *Una partícula de masa  $M$  se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa  $m$  se acerca con rapidez  $v$  y la choca frontalmente siendo  $e = 0$  el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

EJERCICIO 8.17 *Una partícula de masa  $m$  se suelta desde una altura  $h$  y los choques que ocurren contra el suelo son con coeficiente de restitución  $e$ . Determine el tiempo total que demoran en ocurrir todos los choques.*

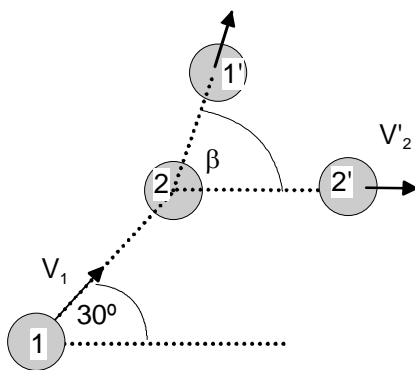
EJERCICIO 8.18 *Respecto a la situación del problema anterior, determine la distancia total recorrida por la partícula.*

EJERCICIO 8.19 *Una partícula de masa  $m = 1\text{ kg}$  está en reposo mientras que otra de masa  $m = 3\text{ kg}$  se acerca con rapidez  $5\text{ m s}^{-1}$  por la izquierda y la choca con coeficiente de restitución  $e = 0,5$ . La partícula que estaba en reposo se coloca en movimiento y choca frontalmente contra una pared fija con coeficiente de restitución  $e = 1$ , devolviéndose. Determine las velocidades finales una vez que todos los choques terminen.*

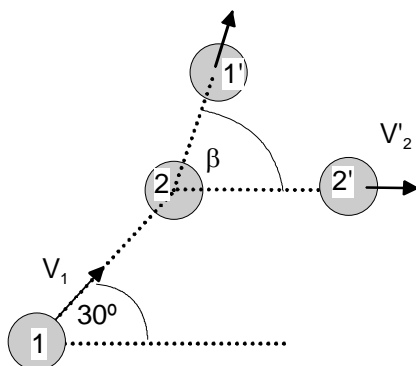
EJERCICIO 8.20 Una partícula de masa  $m$  (una bala) se acerca horizontalmente con rapidez  $V$  y se incrusta en un saco de arena de masa  $M$  que cuelga de un cordel de longitud  $L$ . Por efecto del choque el sistema “saco + bala”, sube una altura  $h$ , respecto a su altura inicial. Determine en términos de  $m$ ,  $M$ ,  $L$ ,  $h$  la velocidad de la bala.



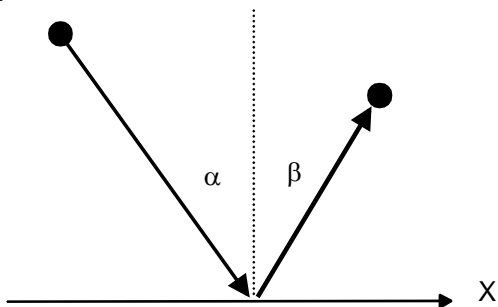
EJERCICIO 8.21 La figura muestra el choque de dos bolas de billar. La bola 2 se encuentra inicialmente en reposo y la bola 1, antes del choque, tiene una velocidad de  $V_1$  en la dirección que se indica. Después del choque la bola 2 sale en la dirección indicada con una rapidez de  $V'_2$ . Determine la mínima rapidez posible  $V'_2$ .



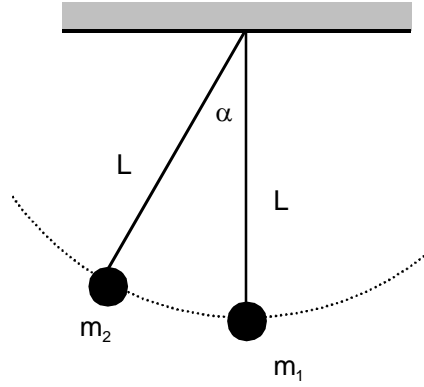
EJERCICIO 8.22 Respecto a la situación del problema anterior si  $V_1 = 4 \text{ m s}^{-1}$  y  $e = 0,5$  determine la rapidez  $V'_2$  y el ángulo  $\beta$ .



EJERCICIO 8.23 Una pelota de  $0,5\text{ kg}$  incide sobre una superficie horizontal rígida con una rapidez de  $50\text{ m s}^{-1}$  en un ángulo de  $\alpha = 60^\circ$  con la vertical, ver figura. Si el coeficiente de restitución de la pelota con el suelo es  $e = 0,6$ , determine el valor absoluto del cambio de momentum lineal experimentado por la tierra en el intervalo de tiempo que dura el choque y el ángulo  $\beta$  con que rebota la pelota.



EJERCICIO 8.24 Una esfera de masa  $m_1$ , en reposo, cuelga de una cuerda inextensible de largo  $L$ . Otra esfera masa  $m_2$ , unida a una cuerda de igual longitud, se suelta del reposo como se muestra en la figura. Determine en términos de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $l$  y la altura a que vuelve a subir  $m_2$  respecto a la posición inicial de  $m_1$  si el choque es: (a) elástico (b) plástico y (c) inelástico con coeficiente de restitución  $e$ .

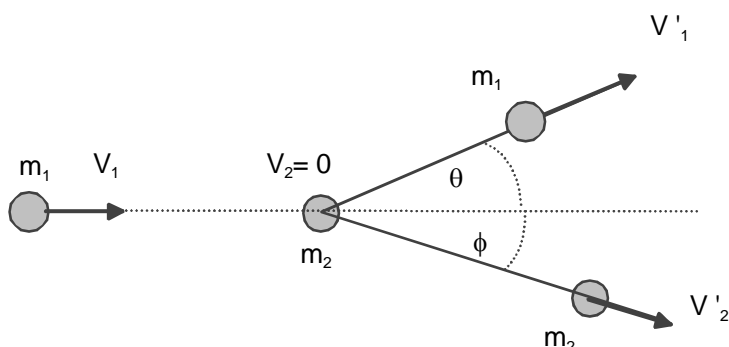


EJERCICIO 8.25 Una partícula de masa  $m_1$  y velocidad  $\vec{v}_1$  choca con otra partícula de masa  $m_2$  en reposo. El choque no es elástico de modo que  $0 < e < 1$ . Después del choque la masa  $m_1$  se mueve perpendicularmente a la dirección de incidencia. Si  $Q$  es la energía disipada durante el choque y  $K_1$  la energía cinética de  $m_1$  antes del choque, demostrar que la energía cinética  $K'_1$  de  $m_1$  después del choque es:

$$K'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[ K_1 \frac{(m_2 - m_1)}{m_2} - Q \right]$$

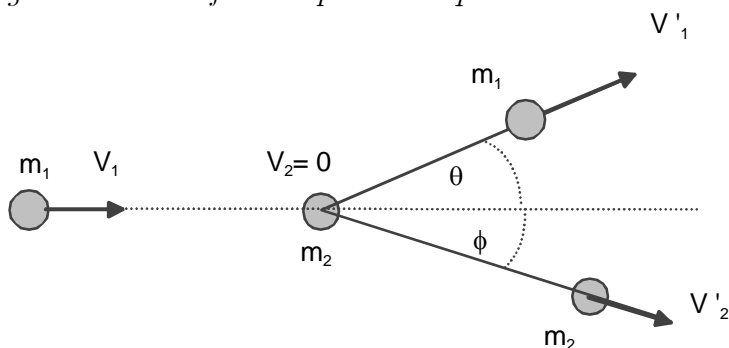
Determine además, el calor disipado  $Q$  en función del coeficiente de restitución  $e$ .

EJERCICIO 8.26 Una partícula (2) de masa  $m$  está en reposo y otra de la misma masa (1) se acerca con rapidez  $V$  y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en  $\theta = 30^\circ$  respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución  $e < 1$  determine el ángulo  $\phi$  de desviación de la partícula incidente. Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.



**EJERCICIO 8.27** Demuestre que en el choque lateral y elástico de dos partículas de la misma masa una de las cuales estaba en reposo, los ángulos en que se desvían las partículas respecto a la dirección de incidencia de la móvil, suman 90 grados, es decir que  $\theta + \phi = \pi/2$ .

**EJERCICIO 8.28** Una partícula (2) de masa  $m_2$  está en reposo y otra de masa  $m_1$  (1) se acerca con rapidez  $V_1$  y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución es  $e < 1$  determine la suma  $\theta + \phi$  en términos de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $e$  y  $\theta$ . Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.

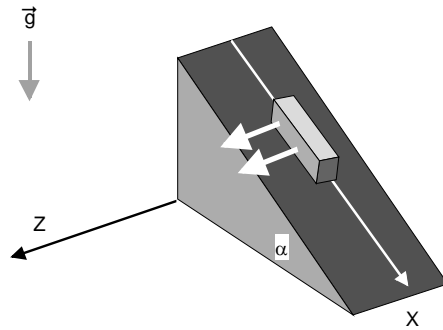


### 8.6.3. Masa variable

**EJERCICIO 8.29** Una gota de agua de masa 0,1 g se deja caer desde cierta altura en un ambiente de vapor de agua. El vapor de agua se condensa en ella

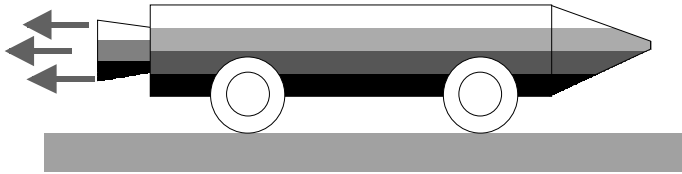
a razón constante de  $0,001 \text{ g s}^{-1}$ . Considerando en reposo el vapor, determine la rapidez de la gota al cabo de  $10 \text{ s}$ .

**EJERCICIO 8.30** Un carro con arena de masa  $100 \text{ kg}$  parte del reposo rodando sobre rieles inclinados en  $\alpha = 30^\circ$  respecto de la horizontal. Debido a cierto dispositivo, del carro sale un chorro de arena a una tasa constante de  $2 \text{ kg s}^{-1}$  con una velocidad relativa al carro de  $1 \text{ km s}^{-1}$  como se muestra en la figura. Despreciando efectos disipativos, determine en  $t = 10 \text{ s}$  la fuerza neta que actúa sobre el sistema.



**EJERCICIO 8.31** Un cohete de lanzamiento vertical, sube con una aceleración de  $g/7 \text{ ms}^{-2}$ . Si la velocidad relativa de los gases respecto del cohete es constante y de valor absoluto  $800 \text{ ms}^{-1}$ , determine la masa del cohete en función del tiempo si su masa inicial, incluido el combustible es de  $4000 \text{ kg}$ .

**EJERCICIO 8.32** La figura muestra un móvil de masa  $1000 \text{ kg}$ , inicialmente en reposo, que contiene además  $200 \text{ kg}$  de combustible. Su motor quema el combustible a razón constante  $10 \text{ kg s}^{-1}$ . El móvil puede desplazarse sobre una superficie horizontal lisa. Si la velocidad relativa del móvil respecto de los gases quemados es de  $20 \text{ ms}^{-1}$ , determine la velocidad del móvil transcurridos  $15 \text{ s}$ .



**EJERCICIO 8.33** Un cohete de prueba de masa  $M_0$ , incluido el combustible, desliza por una rampla horizontal sin roce con una rapidez  $v_0$ . Con el fin de

frenarlo, expulsa gases en sentido opuesto al movimiento a razón constante de  $\sigma \text{ kg s}^{-1}$ . Si la rapidez del cohete en función del tiempo es:

$$v = \frac{M_0 v_0 - K \sigma t}{(M_0 - \sigma t)}$$

calcule:

- a) La magnitud de la velocidad absoluta con que se expelen los gases,
- b) La distancia que recorre (horizontalmente) el cohete hasta detenerse.

**EJERCICIO 8.34** Un balde de masa  $m$  está siendo tirado hacia arriba por una cuerda la cual ejerce una fuerza de magnitud constante  $F$ . Inicialmente el balde contiene una masa  $m_0$  de agua, pero pierde agua a razón constante de  $\sigma \text{ kg s}^{-1}$  de modo que después de cierto tiempo, el balde queda vacío.

- a) ¿Cuál es la velocidad del balde justo cuando queda vacío?
- b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento y la energía mecánica del sistema?

**EJERCICIO 8.35** Una cadena de densidad de masa  $\sigma \text{ kg m}^{-1}$ , posee en un extremo un cuerpo de masa  $M$ , El sistema se encuentra apilado en el suelo. En el instante  $t = 0$  se aplica una fuerza  $F$  vertical sobre el cuerpo de masa  $M$  para levantar el conjunto con velocidad constante  $\vec{v}$ . Calcule la magnitud de la fuerza cuando haya transcurrido un tiempo igual a  $\frac{v}{2g}$ .

**EJERCICIO 8.36** Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  se suspende verticalmente de modo que su extremo inferior está justo a nivel del suelo. Si la cadena se suelta, determine la reacción del suelo, mientras la cadena se deposita cayendo por su propio peso.

**EJERCICIO 8.37** Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  está amontonada sobre el suelo. Si la cadena se levanta de un extremo aplicando una fuerza constante  $F$  hacia arriba, determine la altura que sube la cadena en función del tiempo. Discuta sobre la altura máxima que alcanza la cadena, supuestamente muy larga de tal modo que siempre queda cadena depositada.



EJERCICIO 8.38 Una gota esférica de agua atraviesa una capa de nube en reposo. Suponiendo que se condensa agua por unidad de tiempo sobre la gota, proporcionalmente a su superficie con constante de proporcionalidad  $K$  conocida, determine como crece el radio de la gota con el tiempo y como varía la altura de ella a medida que transcurre el tiempo.

EJERCICIO 8.39 Un carrito, inicialmente de masa  $M$  y en reposo sobre un plano horizontal liso, comienza a moverse debido a que es impulsado por un chorro continuo de masa que se le va incorporando. Dichas masas salen desde el punto de partida (como de una ametralladora) con rapidez  $U_0$  y a razón de  $\lambda$  unidades de masa por unidad de tiempo y se incrustan en el carrito cuando lo impactan. Determine la forma en que varían la aceleración, la velocidad y la posición del móvil con el tiempo.

EJERCICIO 8.40 Un cohete de masa total  $M$ , de la cual  $fM$ , con  $f$  menor que uno, es de combustible, descansa verticalmente antes de encender los motores. Si se encienden los motores, que arrojan masa a razón constante  $\sigma$  ( $\sigma = -dm/dt$ ) con rapidez relativa al cohete de magnitud  $U_0$ , establezca la condición que debe cumplirse para que el cohete comience a despegar de inmediato. Para este caso, determine la máxima altura que alcanza, suponiendo aceleración de gravedad constante y despreciando el roce con el aire.

EJERCICIO 8.41 Una cadena de largo total  $M$  y longitud  $L$ , flexible, es sostenida colgando de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo. Si el extremo superior de la cadena se suelta, determine la reacción del suelo contra la parte depositada, en función del tiempo.

EJERCICIO 8.42 Una cadena flexible tiene masa total  $M$  y longitud  $L$ . La cadena está inicialmente amontonada en el suelo. Una cuerda se hace pasar sobre una polea lisa, uno de los extremos unido a un extremo de la cadena y el otro extremo de la cuerda a un partícula de masa  $M$ . Si la partícula se suelta partiendo del reposo

a) escriba la ecuación de movimiento para el extremo de la cadena.

b) determine la rapidez del extremo de la cadena en función de su posición.

### 8.6.4. Campo central. Orbitas.

Note que en problemas donde una masa  $m$  es mucho menor que la del otro cuerpo  $M$  se ha tomado la masa reducida  $\mu \simeq m$ .

EJERCICIO 8.43 *Un satélite de masa  $m$  describe órbitas circulares alrededor de la tierra, a una distancia  $r = 2R$  del centro de fuerza. Determine en función de  $G$ ,  $M$  y  $R$ : a) la rapidez del satélite, b) su período de revolución, c) la aceleración de gravedad que actúa sobre el satélite y compárela con el valor  $g$  en la superficie terrestre.*

EJERCICIO 8.44 *Calcule la rapidez mínima con que debe lanzarse verticalmente una partícula de masa  $m$ , para que abandone la superficie terrestre sin retornar a ella (velocidad de escape). Además, calcule el tiempo requerido para que esta partícula llegue a una altura igual al radio terrestre sobre la superficie de la Tierra.*

EJERCICIO 8.45 *Demuestre que la ecuación de la energía se puede escribir de la forma:*

$$\left[ \frac{du}{d\theta} \right]^2 + u^2 = \frac{2(E - U)}{mh^2},$$

siendo  $u = \frac{1}{r}$ ,  $h = \frac{l_0}{m}$ .

EJERCICIO 8.46 *Se lanza un proyectil de masa  $m$  desde la superficie de la Tierra hacia el espacio, con rapidez inicial  $v_0$ . Despréciase la resistencia del aire y determine: a) la rapidez a una altura  $h$  sobre la superficie terrestre y b) la menor rapidez con que debe ser lanzado el proyectil para que no retorne a Tierra.*

EJERCICIO 8.47 *Una partícula que se mueve en un campo central de fuerzas definido por  $\vec{F} = -kr^2\hat{r}$ . Si parte del reposo de un punto de una circunferencia de radio  $a$ , demuestre que cuando llega al punto de una circunferencia de radio  $b$  su rapidez será*

$$v = \sqrt{\frac{2k(a^3 - b^3)}{3m}}.$$

EJERCICIO 8.48 *Una partícula de masa  $m$ , se mueve sobre un plano horizontal sometida a una fuerza que la atrae hacia un punto  $O$  fijo del plano,*

siendo la magnitud de la fuerza proporcional a la distancia de la partícula al punto  $O$  ( $k > 0$ , constante de proporcionalidad). Cuando la partícula se encuentra en  $P$  con  $OP = 2a$ , la velocidad de la partícula es perpendicular a  $OP$  y su magnitud es  $v = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{k}{m}}$ , determine la distancia mínima al punto  $O$ , que puede alcanzar la partícula.

EJERCICIO 8.49 Una partícula está en órbita circular de radio  $a$  en torno a la tierra, supuesta esférica, en reposo, de masa total  $M$ , de radio  $R$ , y sin considerar roce con el aire. Demuestre que si la velocidad de la partícula es repentinamente cambiada por un factor  $f$ , la excentricidad de la órbita resultante es

$$e = |f^2 - 1|.$$

EJERCICIO 8.50 Respecto a la situación del problema anterior, determine el factor  $f$  para que la partícula pase tangente a la superficie terrestre.

EJERCICIO 8.51 Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Mostrar que si  $k$  disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

EJERCICIO 8.52 Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semi-eje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética.

EJERCICIO 8.53 Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno de la otra con un período  $\tau$ . Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

EJERCICIO 8.54 *Dos masas que se atraen,  $m_1$  y  $m_2$  ( $m_1 + m_2 = M$ ), están separadas una distancia  $r_0$  y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea  $r$  menor que  $r_0$ , las velocidades serán*

$$\begin{aligned} v_1 &= m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, \\ v_2 &= m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 8.55 *Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley  $F(r) = kr$ . Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.*

EJERCICIO 8.56 *Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

*Demuestre que si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces  $n = 5$ .*

EJERCICIO 8.57 *Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es " $\gamma R_T$ " donde  $R_T$  es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y  $\gamma < 1$ , demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por*

$$\sqrt{2(1-\gamma)}(1+2\gamma)/3\pi \text{ años}$$

EJERCICIO 8.58 *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

*con  $k > 0$ . Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa.*

EJERCICIO 8.59 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por  $r = k\theta$ , siendo  $k$  una constante.*

EJERCICIO 8.60 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por  $r = Ke^{a\theta}$  siendo  $k$  y  $a$  constantes.*

EJERCICIO 8.61 *Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia  $b\sqrt{2}$  de un punto  $P$ . Si la partícula es atraída hacia  $P$  con una fuerza proporcional a  $\frac{k}{r^5}$  y el momento angular respecto de  $P$  es  $\sqrt{k}/b$ , demuestre que la trayectoria está dada por*

$$r = b \coth(\theta/\sqrt{2}).$$

EJERCICIO 8.62 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula al centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(nt + \alpha), \\ y &= B \sin(nt + \beta) \end{aligned}$$

*La constante  $n$  está relacionada con la masa de la partícula y la constante de proporcionalidad de la fuerza.*

EJERCICIO 8.63 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza 0 por una fuerza de forma  $k/r^2$ . La partícula es lanzada desde un punto  $P$  con una velocidad de magnitud  $V_0$  en un ángulo  $\alpha$  respecto de  $OP$ . Demuestre que la órbita es una elipse si  $OP \leq 2k/(mV_0^2)$ . Determine además, en términos de  $m$ ,  $k$ ,  $V_0$ ,  $\alpha$ , y  $OP = r_0$  la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de  $OP$ .*

EJERCICIO 8.64 *Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio  $R$  y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\xi_0$  con la vertical del lugar. Si*

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

*donde  $G$  es la constante de gravitación,  $M$  la masa terrestre y  $V_0 < V_e$ , demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil*

son:

$$e = \sqrt{1 - \sin^2(2\beta) \sin^2(\xi_0)},$$

$$R/r = \frac{(1 - e \cos(\theta - \alpha))}{2 \sin^2(\beta) \sin^2(\xi_0)}$$

siendo

$$\sin \beta = V_0/V_e,$$

$$\sin \alpha = \sin^2 \beta \sin(2\xi_0)/e$$

**EJERCICIO 8.65** Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de  $R_0$  y  $V_0$ : la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.

**EJERCICIO 8.66** Una partícula de masa  $m = 1$  es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo  $O$  y se mueve describiendo la elipse:

$$r = \frac{100}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}.$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es  $V = 1$ , determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

**EJERCICIO 8.67** Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a  $V = \sqrt{\alpha} V_0$  siendo  $\alpha > 1$ , demuestre que si  $\alpha \geq 2$  la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si  $\alpha < 2$ , determine la ecuación de la nueva órbita en términos de  $R_0$ ,  $V_0$  y  $\alpha$ .

**EJERCICIO 8.68** Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.

EJERCICIO 8.69 Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo  $k/r^2$  con  $k < 0$ . Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2}.$$

EJERCICIO 8.70 Una partícula de masa  $m$  se mueve en una órbita circular de radio  $R_0$  con rapidez  $V_0$  atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en términos de  $R_0$  y  $V_0$  la ecuación de la nueva órbita.

EJERCICIO 8.71 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.

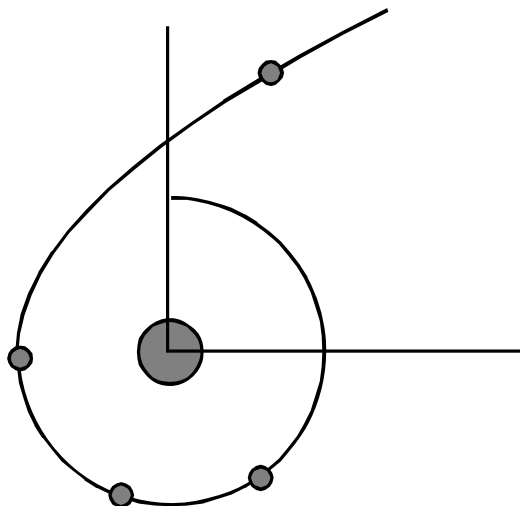
EJERCICIO 8.72 Un satélite de masa  $m$  está en órbita circular de radio  $2R$  en torno a la tierra supuesta esférica, de masa  $M$  y radio  $R$ , en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor  $f$ , determine: a) la ecuación de la nueva órbita. b) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite chocará con la tierra. c) el rango de valores de  $f$  para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.

EJERCICIO 8.73 Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre  $M$ , la constante de gravitación  $G$ ,  $\Omega$  la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.

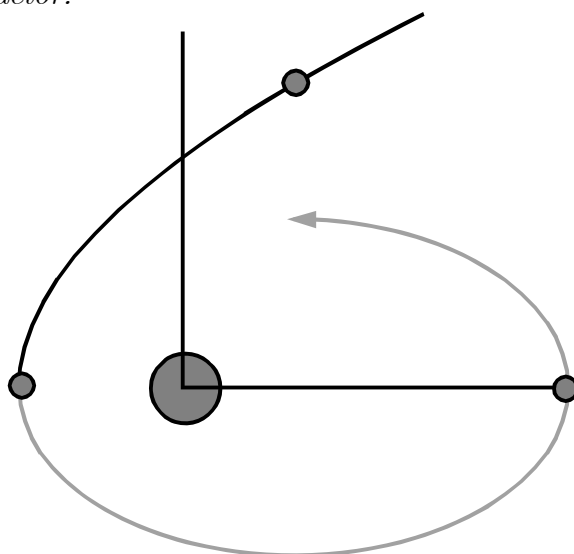
EJERCICIO 8.74 Considere la tierra como esférica, en reposo de masa  $M$  y radio  $R$ , sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial  $V_0$  formando un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es  $G$ .

EJERCICIO 8.75 Un cuerpo de masa pequeña se acerca a la Tierra en una órbita parabólica. En el punto mas cercano a la Tierra se debe cambiar la

velocidad en un cierto factor para que la órbita continúe circular. Determine ese factor.



EJERCICIO 8.76 *Un cuerpo de masa pequeña se acerca a la Tierra en una órbita parabólica. En el punto mas cercano a la Tierra se debe cambiar la velocidad en un cierto factor para que la órbita continúe elíptica de excentricidad conocida  $e$  con ese punto el más cercano de la elipse a la Tierra. Determine ese factor.*





EJERCICIO 8.77 Una nave orbita alrededor de la tierra en una trayectoria circunferencial de radio  $2R$ . En cierto instante se le aplica una fuerza impulsora que cambia la rapidez de manera tal que queda orbitando en una órbita elíptica cuyo distancia máxima al centro de la Tierra  $6R$ . Determine la excentricidad de la órbita y la razón entre los momentum angular antes y después del impulso.

EJERCICIO 8.78 Un satélite de masa  $m$  gira alrededor de la tierra de masa  $M$  con una energía mecánica de  $E = -\frac{1}{16}mv_0^2$ . Con el eje polar coincidiendo con el eje mayor. Cuando  $\theta = 90^\circ$  su distancia al centro de la tierra es  $3R$ . Determine en función de  $M$ ,  $R$  y  $v_0$  el momentum angular y los valores de las distancias máximas y mínimas del satélite al centro de la tierra.

EJERCICIO 8.79 Desde una altura  $R$  sobre la superficie terrestre se lanza horizontalmente un proyectil de tal forma que cae justo en el lado opuesto de la tierra. Determine la rapidez de lanzamiento en función de la velocidad de escape  $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$  a nivel del suelo. Considere despreciable la resistencia con el aire. (Utilice las cantidades conservadas)

EJERCICIO 8.80 Un satélite es lanzado paralelamente a la superficie terrestre desde una posición  $r_0 > R$  siendo  $R$  el radio Terrestre con una rapidez dada por  $\sqrt{\frac{3GM}{2r_0}}$ . Determine la separación máxima del satélite respecto del centro de la tierra en función de  $r_0$ .



# Dinámica del cuerpo rígido

## 9.1. Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido no es más que un sistema de partículas donde las distancias entre ellas permanecen invariable, por lo tanto aplica todo lo de un sistema de partículas que ya se estudió. La descripción del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio, es materia de otro curso (Mecánica racional). Por ahora nos limitaremos a la descripción del movimiento plano de un cuerpo rígido, es decir cuando todas las velocidades son paralelas a un plano fijo. Como se explicará, la novedad respecto a un sistema de partículas, es la forma específica como se calculan el momentum angular y la energía cinética del cuerpo, no habiendo más cambios de fondo. La cinemática del cuerpo rígido es una cuestión previa que debe ser explicada. La rigidez del cuerpo introduce simplificaciones a la descripción del movimiento de ese sistema de partícula pues no es necesario conocer las posiciones ni el movimiento de cada una de ellas, sino que el movimiento de unas pocas determina el de todas.

## 9.2. Cuerpo rígido continuo

Este es un concepto idealizado donde nos olvidamos de las partículas reales que componen el cuerpo, los átomos o moléculas, y el cuerpo es reemplazado por un continuo de masa donde las "*partículas*" son elementos infinitesimales de volumen  $dV$  que tiene alguna cantidad de masa también infinitesimal que llamaremos  $dm$ . La rigidez se establece aquí manteniendo constantes las

distancias entre los puntos de este cuerpo. Esta es otra idealización porque en la vida real no existen cuerpos rígidos. Todos los cuerpos son deformables en alguna medida.

### 9.3. Cinemática de un cuerpo rígido en el espacio

Un cambio arbitrario de posición de un cuerpo rígido en el espacio puede siempre ser reducido a una traslación paralela seguida de una rotación en torno a un eje fijo. Sin embargo este hecho no es tan simple entender. La cinemática y dinámica de un cuerpo rígido en el espacio es normalmente un tema difícil de comprender por los alumnos. Por esa razón en este curso nos limitaremos a analizar la dinámica y cinemática de un cuerpo rígido en dos dimensiones. Cuando un cuerpo tal como una lámina se mueve sobre un plano fijo, el ángulo que el cuerpo gira se define entre alguna línea fija en el cuerpo con alguna línea fija en el plano.

### 9.4. Cinemática plana de un cuerpo rígido

#### 9.4.1. Desplazamientos de un cuerpo rígido

Para desplazamientos de un cuerpo rígido en un plano, las cuestiones son más simples pues es bastante evidente que un cambio de posición de un cuerpo rígido en un plano, puede ser logrado de modo equivalente mediante una traslación paralela  $\overrightarrow{AA'}$  seguida de una rotación en torno a un eje fijo, perpendicular al plano del movimiento, punto fijo, o bien la rotación primero seguida de la traslación. Lo mismo es cierto en tres dimensiones, pero su demostración es más engorrosa. La figura siguiente muestra lo que acontece cuando en la traslación paralela  $\overrightarrow{AA'}$  un punto, digamos  $A$  pasa a ocupar su posición final  $A'$  mediante esa traslación paralela. Los otros puntos no están aún en su posición final. Basta entonces rotar el cuerpo en un cierto ángulo  $\theta$  en torno al punto  $A'$  para que el cuerpo quede en su posición final. Es decir hay que girar  $\overrightarrow{A'P'}$  en un ángulo  $\theta$ .

Si el tiempo transcurrido es infinitésimo  $dt$  entonces todos los despla-

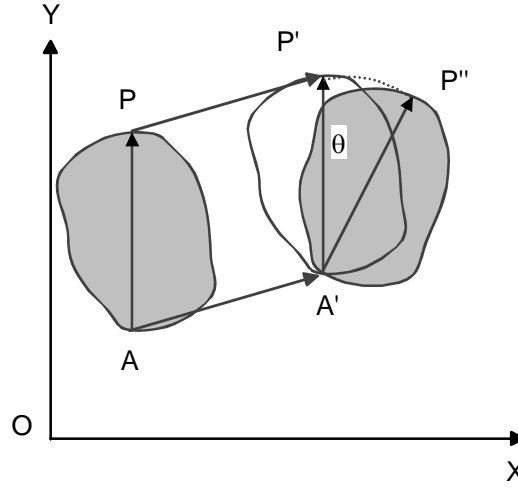


Figura 9.1: Desplazamiento plano de un cuerpo

mientos señalados son infinitésimos. Llamemos

$$\begin{aligned}\vec{r}_P(t) &= \overrightarrow{OP}, \\ \vec{r}_P(t+dt) &= \overrightarrow{OP''}, \\ \vec{r}_A(t) &= \overrightarrow{OA}, \\ \vec{r}_A(t+dt) &= \overrightarrow{OA'}.\end{aligned}$$

Para relacionar las cosas necesitamos evaluar  $\overrightarrow{P'P''}$ . Pero ese desplazamiento es circular con centro en  $A'$  luego puede evaluarse mutiplicando la velocidad tangencial por  $dt$ . Además el vector unitario tangencial es

$$\hat{T} = \frac{\hat{k} \times \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|},$$

luegp

$$\overrightarrow{P'P''} = |\overrightarrow{A'P'}| \dot{\theta} \hat{T} dt = |\overrightarrow{AP}| \dot{\theta} \hat{T} dt = -\dot{\theta} \hat{k} \times \overrightarrow{AP} dt.$$

Considere ahora que

$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''},$$

y considerando que  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}_A dt$  obtendremos

$$\vec{r}_P(t + dt) = \vec{r}_P(t) + \vec{v}_A dt - \dot{\theta} \hat{k} \times \overrightarrow{AP} dt,$$

de manera que

$$\frac{\vec{r}_P(t + dt) - \vec{r}_P(t)}{dt} = \vec{v}_A - \dot{\theta} \hat{k} \times \overrightarrow{AP},$$

y se obtiene la relación fundamental de la cinemática de un cuerpo rígido

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \quad (9.1)$$

donde se ha definido

$$\vec{\omega} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{k}, \quad (9.2)$$

la llamada velocidad angular del cuerpo. El signo colocado frente a  $\vec{\omega}$  está de acuerdo a la definición del ángulo y a la regla de la mano derecha. Lo que la relación (9.1) establece es que la velocidad de un punto  $P$  es la velocidad de traslación del cuerpo con la velocidad del punto  $A$  más lo que resulta de la rotación de  $P$  en torno de  $A$ . Para el movimiento plano la velocidad angular tiene como magnitud la derivada del ángulo que gira el cuerpo, dirección perpendicular al plano de movimiento y sentido de acuerdo a la regla de la mano derecha de acuerdo al crecimiento del ángulo definido.

#### 9.4.2. Condición de rigidez

De la relación (9.1) se deduce que

$$\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP} \quad (9.3)$$

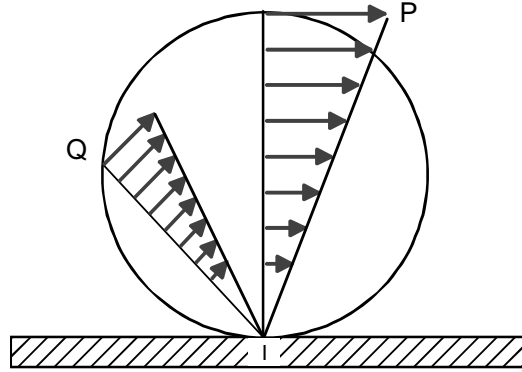
que se conoce como condición de rigidez pues establece que ambos puntos tienen las mismas componentes de velocidad en la línea que une los dos puntos. En otras palabras eso significa que la distancia entre los dos puntos no varía.

#### 9.4.3. Ejemplos

Algunas figuras ayudarán a entender lo explicado.

- a) Disco que rueda sin deslizar. Por definición de "no deslizamiento", el punto de contacto  $I$  con el suelo tiene velocidad nula y en la figura se muestran como resultan las velocidades de puntos del disco que están sobre las rectas  $IP$  e  $IQ$ . Para este caso la relación anterior con  $\vec{v}_I = \vec{0}$  se reduce a

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$$



o sea velocidades perpendiculares a  $\overrightarrow{IP}$  y de magnitudes proporcionales a la distancia  $|\overrightarrow{IP}|$ . El punto del disco en contacto con el suelo tiene velocidad instantánea nula, pero acelera hacia arriba y luego se moverá en una curva que se denomina cicloide.

- b) Disco que avanza girando y su punto de contacto resbala con velocidad  $\vec{v}_I \neq \vec{0}$ . Ahora será

$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP},$$

de modo que ahora todos los vectores velocidad de la figura anterior es necesario agregarles  $\vec{v}_I$ . Si hacemos

$$\vec{v}_I = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QI},$$

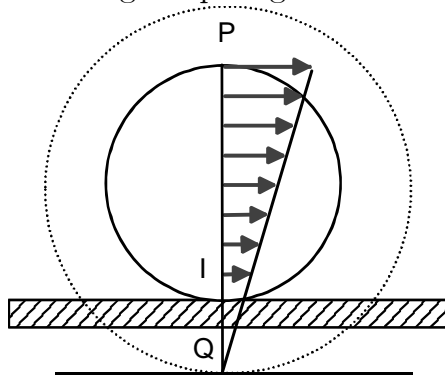
donde  $Q$  es un cierto punto cuya ubicación se muestra en la figura que sigue. Entonces será

$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QI} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{QP},$$

lo cual significa que los puntos del disco tienen velocidades *tal como* si el disco rodara sin resbalar sobre una línea ubicada más abajo del suelo a distancia

$$d = \frac{|\vec{v}_I|}{|\vec{\omega}|},$$

cuestión que se ilustra en la figura que sigue



En el espacio la demostración es más complicada pero sigue siendo cierto que todo cambio de posición de un cuerpo puede ser logrado equivalentemente mediante una traslación paralela seguida de una rotación en torno a un eje fijo. Ese punto  $Q$  se denomina centro instantáneo de rotación y en la sección que sigue, se generaliza.

#### 9.4.4. Centro instantáneo de rotación

En el movimiento plano de un cuerpo rígido se tiene el siguiente teorema:

► **TEOREMA 9.1**

*En el movimiento plano de un cuerpo rígido, siempre existe un punto de él (o de una extensión rígida de él) que tiene velocidad instantánea nula y en consecuencia el movimiento equivale a una pura rotación instantánea del cuerpo en torno de ese punto. Tal punto se conoce como centro instantáneo de rotación.*

DEMOSTRACION 23 Como

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

entonces si existe un punto  $A = I$  con velocidad nula debe ser

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \quad (9.4)$$

entonces  $\vec{v}_P$  es perpendicular a  $\overrightarrow{IP}$ , o bien  $\overrightarrow{IP}$  está sobre una recta en el plano de movimiento que es perpendicular a  $\vec{v}_P$ . En consecuencia si se conocen las velocidades (no paralelas) de dos puntos de un cuerpo  $\vec{v}_A$  y  $\vec{v}_B$ , el



centro instantáneo estará donde se intersecten las perpendiculares a esas dos velocidades. La excepción la constituyen los cuerpos que tienen traslaciones puras, es decir cuando el cuerpo se traslada paralelamente y entonces  $\vec{\omega} = \vec{0}$ . En estos casos se podría decir que el centro instantáneo está en el infinito.

La posición del centro instantáneo también puede determinarse si se conoce una velocidad y la velocidad angular del cuerpo. En efecto de (9.4) se puede despejar  $\vec{PI}$ . para ello multiplique  $\times \vec{\omega}$  y desarrolle

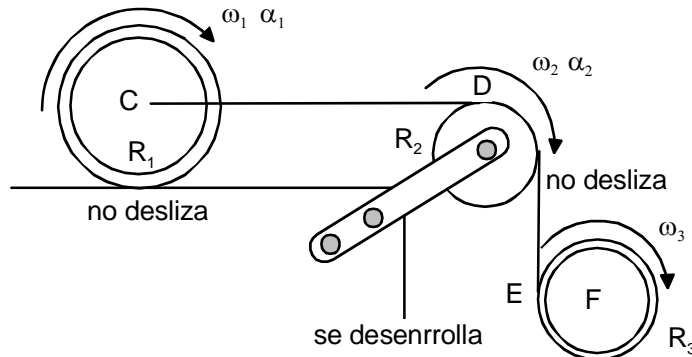
$$\begin{aligned}\vec{v}_P \times \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \times \vec{IP}) \times \vec{\omega}, \\ &= \omega^2 \vec{IP} - (\vec{IP} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega},\end{aligned}$$

pero  $(\vec{IP} \cdot \vec{\omega}) = 0$  porque son vectores perpendiculares. Entonces si  $\omega^2 \neq 0$  se deduce que

$$\vec{PI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_P}{\omega^2}. \quad (9.5)$$

#### 9.4.5. Algunas relaciones entre velocidades y aceleraciones

En diversas aplicaciones existen relaciones debidas a la presencia de cuerdas inextensibles, cuerdas apoyadas o enrolladas en poleas, cuerpos que no resbalan y otras. En la siguiente figura se ilustra una situación donde hay diversas velocidades lineales ( $v$ ), velocidades angulares ( $\omega$ ), aceleraciones lineales ( $a$ ) y angulares ( $\alpha$ ) que están relacionadas de alguna manera entre sí. Esas relaciones son necesarias cuando deben determinarse las aceleraciones de los sistemas.



Hay un disco que rueda sin deslizar, una cuerda que pasa por una polea sin

deslizarse y otro disco baja desenrollando la cuerda. Primero, la velocidad de  $C$  estará dada por

$$v_C = \omega_1 R_1.$$

Además por pertenecer a una cuerda, la velocidad de  $C$  y  $D$  son iguales de donde se deduce que

$$\omega_1 R_1 = v_C = v_D = R_2 \omega_2.$$

Por la misma razón el punto  $D$  tiene la misma velocidad (en magnitud) que el punto  $E$ , de modo que

$$v_E = v_D = v_C.$$

El punto  $F$  tiene una velocidad adicional debida a la rotación de ese disco respecto al punto  $E$ ,  $\omega_3$  de modo que

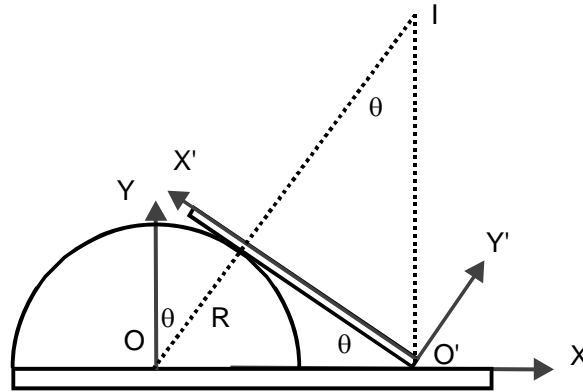
$$v_F = v_E + R_3 \omega_3 = R_2 \omega_2 + R_3 \omega_3.$$

Si usted necesita relacionar aceleraciones, derive las relaciones anteriores respecto al tiempo obteniendo las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} a_C &= \alpha_1 R_1, \\ \alpha_1 R_1 &= \alpha_2 R_2, \\ a_F &= R_2 \alpha_2 + R_3 \alpha_3. \end{aligned}$$

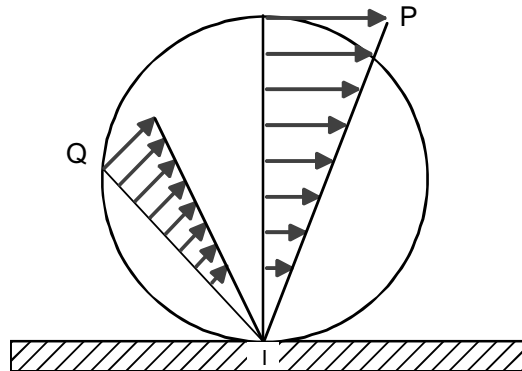
Existen muchísimas posibilidades más de modo que trate de comprender cabalmente este ejemplo.

**EJEMPLO 9.4.1** *La figura ilustra una barra que se desliza apoyada en el suelo y sobre una semicircunferencia y en ella se muestra la ubicación del centro instantáneo  $I$ . Por las condiciones de apoyo, hay dos puntos de la barra que tienen direcciones conocidas y eso determina la posición de  $I$ . Como usted puede comprender, las velocidades de todos los puntos de la barra son, en el instante mostrado, perpendiculares a la línea que va desde  $I$  al punto que sea.*



#### 9.4.6. Curvas rueda y riel

Como se explicó, en el movimiento plano de un cuerpo rígido siempre existe un punto de él, o de una extensión rígida del cuerpo, que tiene velocidad instantánea cero. Esto significa que en todo instante el cuerpo está moviéndose como si solamente rotara respecto a ese punto. Pero ese punto en general se mueve, de manera que el centro instantáneo describe una curva. El movimiento de ese punto puede ser mirado desde un sistema fijo y en ese caso la curva que describe se denomina curva riel. Si el movimiento de ese punto es observado desde un sistema de referencia fijo al cuerpo, la curva que se observa, se denomina curva rueda. El caso más simple es el de un disco que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, como en la figura. Las velocidades de los puntos son perpendiculares a la línea que va del punto de contacto al punto y crecen proporcionalmente a su distancia al punto de contacto.

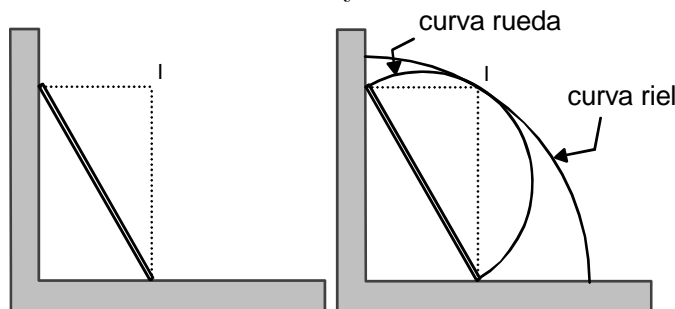


Como se observa, a medida que el cuerpo se mueve, el punto  $I$  se mueve en

línea recta sobre el suelo de manera que la curva riel es la línea horizontal sobre la cual el disco rueda. Si se observa el movimiento de  $I$  desde el cuerpo, ese punto permanece a distancia el radio  $R$  del disco de su centro, por lo cual la curva rueda coincide con el perímetro del disco, de allí su nombre.

Cualquiera que sea la forma del cuerpo que se mueve ocurre algo parecido..

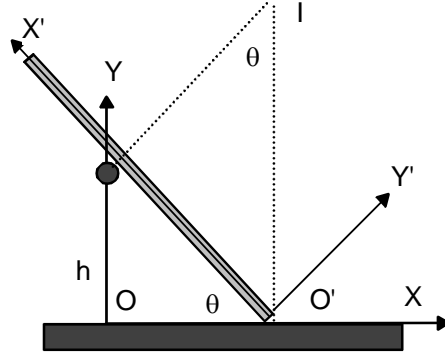
La clave para esta descripción es comprender que  $I$  está donde se intersectan las perpendiculares a dos velocidades de direcciones conocidas del cuerpo. En las dos figuras que siguen se explica esto para el caso de una barra que se mueve apoyada en dos paredes. El centro instantáneo  $I$  resulta estar donde está indicado porque las velocidades de los extremos de la barra son paralela a la pared vertical y paralela al suelo. Por razones geométricas simples  $I$  resulta estar a distancia constante del origen y respecto de la barra  $I$  permanece sobre una semicircunferencia donde la barra es su diámetro. De manera que la curva riel es la circunferencia con centro en el origen y la curva rueda es la semicircunferencia cuyo diámetro es la barra.



Note que todos los puntos del semicírculo cuyo diámetro es la barra son aquí considerados una extensión rígida de la barra.

**EJEMPLO 9.4.2** Una barra se mueve de manera que uno de sus extremos se mueve sobre una línea horizontal y además permanece apoyada sobre un tarugo a altura  $h$  sobre el suelo. Determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.

**Solución.** Considere la figura



Las coordenadas del centro instantáneo serán

$$\begin{aligned}x &= OO' = h \cot \theta, \\y &= O'I = h + x \cot \theta,\end{aligned}$$

y eliminando  $\theta$  se determina la ecuación de la curva riel

$$y = h + \frac{x^2}{h}.$$

Las coordenadas relativas al cuerpo  $x', y'$  serán

$$\begin{aligned}x' &= \frac{h}{\sin \theta}, \\y' &= x' \cot \theta = \frac{h}{\sin \theta} \cot \theta = \frac{h \cos \theta}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

donde debemos eliminar  $\theta$ . Así resulta

$$y' = \frac{x'}{h} \sqrt{(x')^2 - h^2},$$

la ecuación de la curva rueda.

#### 9.4.7. Modelo continuo de un cuerpo rígido

Como se explicó, aún cuando un cuerpo rígido sea un sistema de partículas, resulta preferible en la mayoría de los casos olvidarse de ello y suponer que el cuerpo es un continuo de masa donde las distancias entre sus puntos permanecen constantes. Las partículas del cuerpo son entonces reemplazadas

por elementos de volumen  $dV$  los cuales tienen masa  $dm$ . Las sumatorias sobre partículas pasarán entonces a ser integrales sobre el volumen del cuerpo, esto es

$$\sum m_i \rightarrow \int dm$$

lo cual es en general más fácil de realizar sobre todo cuando el número de partículas reales del cuerpo es muy grande.

### 9.4.8. Momentum angular y energía cinética

Como las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido están relacionadas de acuerdo a 9.1, es una tarea más o menos simple establecer expresiones que permiten el cálculo de la energía cinética y del momentum angular. Debemos distinguir dos casos. Cuando en el movimiento del cuerpo se mantiene un punto fijo y cuando no. Cuando hay un punto que se mantiene fijo el movimiento se denomina rotacional.

#### Movimiento rotacional

Si el cuerpo puede moverse manteniendo un punto  $O$  fijo, entonces el movimiento del cuerpo es se llama rotacional. Si plano de movimiento es el plano  $OXY$  entonces el eje de rotación es el eje  $OZ$ . Si el ángulo que describe la rotación del cuerpo lo llamamos  $\theta$ , y su aumento corresponde según la regla de la mano derecha al eje  $OZ$ , entonces

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k},$$

dado que  $\vec{v}_O = 0$  las velocidades de los otros puntos del cuerpo serán

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}, \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

con esto evaluaremos el momentum angular y la energía cinética.

### 9.4.9. El momentum angular

Todas las partículas del cuerpo, los elementos de masa  $dm$ , tienen movimiento circunferencial con centro en  $O$  y podemos calcular el momentum angular como sigue

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \rightarrow \int dm (\vec{r} \times \vec{v}), \\ &= \int dm (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})),\end{aligned}$$

desarrollando el doble producto cruz

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}, \quad (9.7)$$

donde para movimiento plano el segundo término se anula, luego

$$\vec{L}_O = \left( \int r^2 dm \right) \vec{\omega}.$$

En esta expresión se ha separado el factor que tiene que ver con el movimiento  $\vec{\omega}$  con otro factor que sólo tiene que ver con la distribución de masa del cuerpo

$$I_O = \int r^2 dm, \quad (9.8)$$

luego tenemos

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \quad (9.9)$$

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \hat{k}. \quad (9.10)$$

Aquí  $I_O$  se conoce como el momento de inercia en el punto  $O$  del cuerpo respecto al eje  $OZ$ . Si miramos a la integral como una sumatoria entonces el momentum angular es "la suma de las masas por sus distancias al cuadrado al eje de la rotación".

#### 9.4.10. Ejemplos de cálculo de momentos de inercia

Los momentos de inercia serán dados pero es conveniente entender como se calculan.

- Para una barra de largo  $L$  y de masa  $M$  en un extremo. Si se elige el eje  $OX$  a lo largo de la barra entonces como la densidad lineal de masa es  $\frac{M}{L}$

$$\begin{aligned}dm &= \frac{M}{L} dx, \\ I_O &= \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2.\end{aligned}$$

- Para una barra de largo  $L$  y de masa  $M$  en su centro de masa. Si se elige el eje  $GX$  a lo largo de la barra entonces respecto al cálculo anterior, los límites de la integral son otros

$$dm = \frac{M}{L}dx,$$

$$I_G = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12}ML^2.$$

- Para un disco de masa  $M$  y radio  $R$  en su centro. Ahora podemos tomar como elemento de masa la masa entre  $r$  y  $r + dr$ . La densidad superficial de masa es  $\frac{M}{\pi R^2}$  de modo que

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr,$$

resultando

$$I_G = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2}MR^2.$$

- Aro de masa  $M$  y radio  $R$  en su centro. Ahora todas las masas están a distancia  $R$  de modo que

$$I_G = \int R^2 dm = MR^2.$$

#### 9.4.11. Momentum angular y momentum lineal

Para comprender mejor sobre el significado del momento de inercia, comparemos las expresiones para el momentum lineal  $\vec{P}$  y el momentum angular  $\vec{L}_O$  es decir

$$\vec{P} = M\vec{v}_G,$$

$$\vec{L}_O = I_O\vec{\omega},$$

y las respectivas ecuaciones de movimiento sobre las cuales se profundizará más adelante

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext},$$

$$I_O\vec{\alpha} = \vec{\Gamma}_O^{ext},$$



donde  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$  es la aceleración angular.

Se puede entonces comprender que la cantidad de movimiento lineal es proporcional a la velocidad de traslación  $\vec{v}_G$  y la constante de proporcionalidad es la masa. Similarmente resulta que la cantidad de movimiento angular es proporcional a la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. O sea el momento de inercia juega el rol de la masa cuando hay rotaciones. Similarmente se pueden comparar los roles dinámicos. A una dada fuerza, el cuerpo acelera menos a mayor masa. A un dado torque un cuerpo acelera angularmente menos a mayor momento de inercia.

#### 9.4.12. La energía cinética

Haciendo un cálculo similar para la energía cinética, resultará

$$\begin{aligned} K &= \sum m_i v_i^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \int v^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} dm = \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm, \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O, \end{aligned} \quad (9.11)$$

pero

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega},$$

de modo que

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2, \quad (9.12)$$

que nuevamente puede compararse con la energía cinética cuando hay pura traslación

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2. \quad (9.13)$$

#### 9.4.13. Movimiento de rotación y traslación

Si el cuerpo se mueve en el plano  $OXY$  sin restricciones, entonces el cuerpo tiene simultáneamente movimiento de traslación y de rotación. El cuerpo se desplaza y además gira un ángulo  $\theta$ , por lo tanto nuevamente

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}.$$

Entonces el momentum angular respecto al centro de masa  $G$  resultará

$$\vec{L}_G = I_G \dot{\theta} \hat{k}, \quad (9.14)$$

y el teorema de Koenig determina el momentum angular respecto a  $O$  que resulta ser

$$\vec{L}_O = M \vec{r} \times \vec{v}_G + I_G \dot{\theta} \hat{k}. \quad (9.15)$$

La energía cinética será, de acuerdo al teorema de Koenig, la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2. \quad (9.16)$$

El término  $I_G$  se denomina momento de inercia del cuerpo en el centro de masa respecto al eje  $GZ$  y está dado por

$$I_G = \int (x'^2 + y'^2) dm. \quad (9.17)$$

donde  $x', y'$  son coordenadas de los elementos de masa respecto al centro de masa  $G$ . La expresión (9.16) muestra que la energía cinética es la suma de la parte traslacional  $\frac{1}{2} M v_G^2$  más la parte rotacional en torno al centro de masa  $\frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$ .

#### 9.4.14. Movimiento en el espacio

Aún cuando este tema no será profundizado en este texto, explicaremos algo de lo que ocurre cuando un cuerpo rígido se mueve libremente en el espacio, esto es en tres dimensiones. Ahora su velocidad angular no permanece con dirección fija y en general tendremos

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k},$$

siendo las componentes de la velocidad angular funciones de las derivadas de los ángulos de orientación del cuerpo.

Si el cuerpo mantiene un punto fijo, entonces sigue siendo válido que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

de manera que igualmente se obtiene

$$\vec{L}_O = \int dm (\vec{r} \times \vec{v}) = \int dm (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})).$$

Si desarrollamos el doble producto cruz se obtiene

$$\vec{L}_O = \int dm(r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}).$$

Ahora, a diferencia del movimiento plano,

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} \neq 0,$$

luego debemos desarrollar

$$\vec{L}_O = \int dm((x^2 + y^2 + z^2)\vec{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\vec{r}). \quad (9.18)$$

Si tomamos las componentes cartesianas de esta ecuación se obtienen tres ecuaciones

$$\begin{aligned} L_{O_x} &= \int dm((y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z), \\ L_{O_y} &= \int dm((x^2 + z^2)\omega_y - yx\omega_x - yz\omega_z), \\ L_{O_z} &= \int dm((x^2 + y^2)\omega_z - zx\omega_x - zy\omega_y). \end{aligned}$$

Al usar notación de matrices, estas ecuaciones lineales en  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$  pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} L_{O_x} \\ L_{O_y} \\ L_{O_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

donde los elementos de la diagonal de la matriz indicada, denominados momentos de inercia respecto a los ejes, están dados por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int dm((y^2 + z^2)), \\ I_{yy} &= \int dm((x^2 + z^2)), \\ I_{zz} &= \int dm((x^2 + y^2)), \end{aligned} \quad (9.20)$$

y los elementos de fuera de la diagonal, denominados productos de inercia, están dados por

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy dm, \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \int xz dm, \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \int yz dm. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Esta matriz  $3 \times 3$  la denotaremos por  $H_O$  y se conoce como la *matriz* de inercia del cuerpo en el origen  $O$ , es decir

$$H_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.22)$$

y la relación fundamental entre cantidad de movimiento angular y velocidad angular, puede escribirse

$$\vec{L}_O = H_O \vec{\omega}, \quad (9.23)$$

en el entendido que tanto  $\vec{L}_O$  como  $\vec{\omega}$  son matrices columna con las componentes de los respectivos vectores como sus elementos. Similarmente, para la energía cinética puede demostrarse que

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot H_O \vec{\omega}. \quad (9.24)$$

No ahondaremos más en este tema en estos apuntes porque el curso se limitará a casos de dos dimensiones solamente.

## 9.5. Dinámica de un cuerpo rígido

### 9.5.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido son las mismas que se indicaron en el capítulo de sistemas de partículas, es decir

$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (9.25)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } \frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (9.26)$$

Además para un punto arbitrario  $A$  se tiene la relación general

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A, \quad (9.27)$$

que es de utilidad en ciertos problemas donde el movimiento de un punto  $A$  es conocido.

### 9.5.2. Ecuaciones para el caso de movimiento plano

Cuando el movimiento es plano, las ecuaciones anteriores pueden escribirse

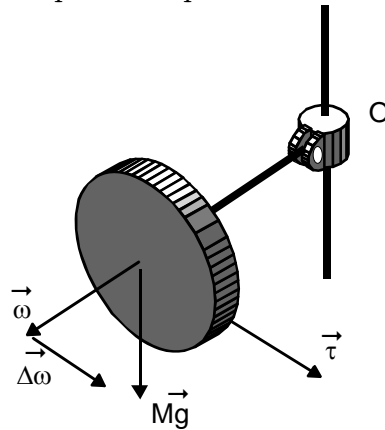
$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (9.28)$$

$$I_G \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } I_O \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (9.29)$$

El resultado

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}$$

nos dice que la derivada del momentum angular, esto es el cambio del momentum angular, está en la dirección del torque. En la figura que sigue se ilustra el curioso efecto que el peso que actúa hacia abajo sobre un disco que gira sobre su eje. El torque del peso  $\vec{\tau}$  está en un plano horizontal y luego el cambio de  $\vec{\omega}$  también lo está. O sea el efecto del torque del peso hará que el sistema tienda a girar respecto a la vertical en vez de a caer. La explicación del movimiento de un trompo tiene que ver con este efecto.



Estas complejidades del movimiento en tres dimensiones no están presentes en los problemas de dinámica en un plano. En efecto, cuando el movimiento es plano, tanto la velocidad angular como el torque están en dirección perpendicular al plano de movimiento, digamos el eje  $z$ , de manera que

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= I_O \dot{\theta} \hat{k}, \\ \vec{\tau}_O &= \tau_O \hat{k},\end{aligned}$$

y luego resultará

$$I_O \ddot{\theta} = \tau_O,$$

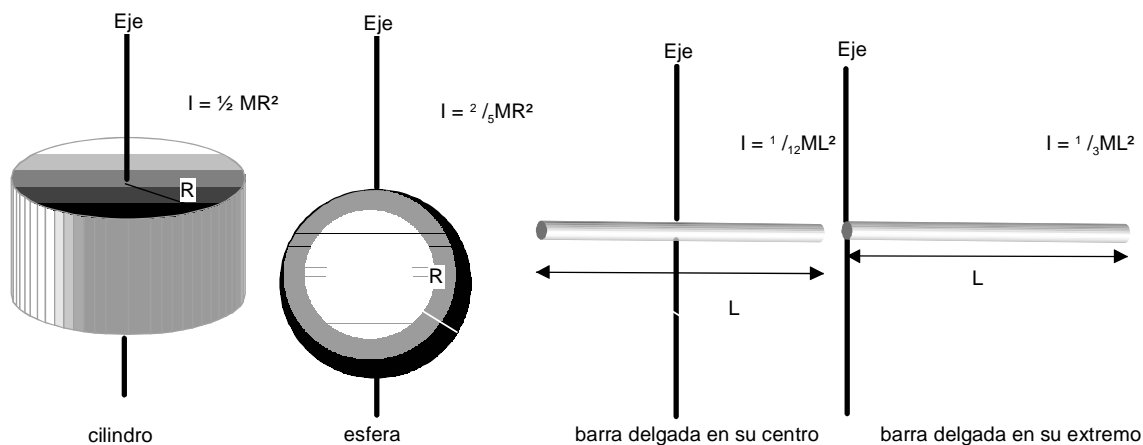
o si llamamos  $\alpha = \ddot{\theta}$  a la aceleración angular

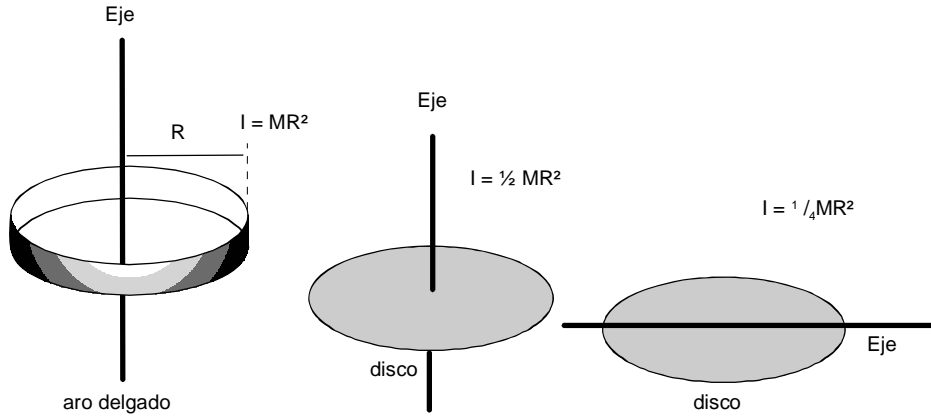
$$I_O \alpha = \tau_O,$$

de modo que el único efecto del torque será causar una aceleración angular  $\alpha = \ddot{\theta}$ .

### 9.5.3. Momentos de Inercia

El cálculo de momentos de Inercia requiere realizar integraciones. Además el cálculo debe ser en algún origen específico del cuerpo y para ejes determinados. Normalmente se encuentran los momentos de Inercia para orígenes coincidiendo con el centro de masa y para ejes que coinciden con ejes de simetría, cuando los hay. Se darán algunos ejemplos de cálculo, pero ahora daremos los resultados para los cuerpos de formas más simples.





#### 9.5.4. Teorema de Steiner

Conocido el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa  $G$ , se puede calcular el momento de inercia para otro eje paralelo al anterior en un punto  $A$  mediante la relación conocida como teorema de Steiner

$$I_A = I_G + Md^2,$$

donde  $d$  es la distancia entre esos dos ejes. Para demostrarlo considere ejes  $GX'Y'Z'$  con origen en  $G$ , y ejes paralelos  $AXYZ$  con origen en  $A$ . Consideremos solamente momentos de inercia respecto al eje  $Z$ , porque la demostración para los otros es análoga. Entonces tenemos

$$I_G = \int dm(x'^2 + y'^2),$$

$$I_A = \int dm(x^2 + y^2),$$

pero las coordenadas están relacionadas. De

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}'$$

se obtienen

$$\begin{aligned} x &= x_G + x', \\ y &= y_G + y', \\ z &= z_G + z', \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x_G + x')^2 + (y_G + y')^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + 2x_G x' + 2y_G y' + x_G^2 + y_G^2, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} I_A &= \int dm(x^2 + y^2) = \int dm(x'^2 + y'^2 + 2x_G x' + 2y_G y' + x_G^2 + y_G^2) \\ &= I_G + \int dm(2x_G x' + 2y_G y') + (x_G^2 + y_G^2) \int dm. \end{aligned}$$

Pero

$$\int dm(x') = \int dm(y') = 0,$$

porque son coordenadas relativas al centro de masa y  $\sqrt{(x_G^2 + y_G^2)} = d$  es la distancia entre los ejes  $Z$ . Ha resultado entonces

$$I_A = I_G + Md^2, \quad (9.30)$$

o sea entre dos ejes paralelos, uno que pasa por el centro de masa y otro que pasa por el punto  $A$  estando ambos eje a una distancia  $d$ , al momento de inercia en el centro de masa hay que agregarle  $Md^2$  para obtener el momento de inercia en  $A$ . Por ejemplo considere una barra donde el momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro es

$$I_G = \frac{1}{12}ML^2,$$

entonces respecto a su extremo será

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

## 9.6. Ejemplos de dinámica plana

### 9.6.1. Dinámica de rotación

El caso más simple ocurre cuando el cuerpo puede solamente girar en torno a un eje fijo. Si llamamos  $O$  al punto del cuerpo por donde pasa el eje



de rotación, nuestra relación fundamental entre torque y momentum angular es

$$I_O \ddot{\theta} = \tau_O,$$

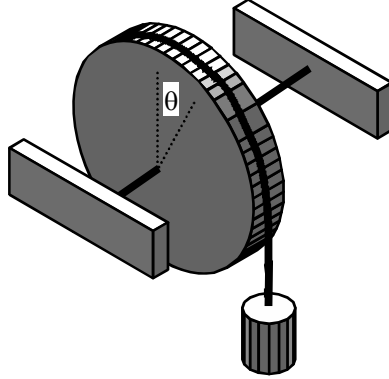
la energía cinética del cuerpo es

$$K = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2,$$

que pueden también escribirse

$$\begin{aligned} I_O \alpha &= \tau_O, \\ K &= \frac{1}{2} I_O \omega^2. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.6.1** *Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  puede rotar respecto a un eje fijo que pasa por su centro. Mediante un hilo enrollado se sostiene otro cuerpo de masa  $m$  que cuelga. Si el sistema se libera y comienza a moverse, determine la aceleración angular del disco y la altura que baja el cuerpo que cuelga en función del tiempo transcurrido.*



**Solución.** Si llamamos  $T$  a la tensión del hilo, tenemos:

$$I \ddot{\theta} = \tau = TR,$$

y para el cuerpo que baja

$$mg - T = ma.$$

Pero lo que baja el cuerpo está relacionado con lo que gira el cilindro en la forma (y hacia abajo)

$$y = R\theta,$$

de manera que

$$a = \ddot{y} = R\ddot{\theta}.$$

Si colocamos además  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MR\ddot{\theta} &= T, \\ mg - T &= mR\ddot{\theta},\end{aligned}$$

o bien

$$mg - \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} = mR\ddot{\theta},$$

de donde se obtiene la aceleración angular del disco

$$\ddot{\theta} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{R}.$$

Esto es simple de integrar dos veces y se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{R} t, \\ \theta &= \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{2R} t^2,\end{aligned}$$

y luego lo que baja el cuerpo es

$$y = R\theta = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{2} t^2.$$

---

NOTA 9.1 Es interesante comprobar que la energía se conserva. En efecto la energía cinética es

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)}g^2t^2\end{aligned}$$

y la energía potencial es

$$V = -mgy = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{\frac{1}{2}M + m}g^2t^2,$$

esto es

$$K + V = 0.$$

NOTA 9.2 Si un cuerpo rota respecto a un eje fijo y el torque es nulo, entonces

$$\frac{d}{dt}I_O\dot{\theta} = 0,$$

entonces se conserva el momentum angular

$$I_O\dot{\theta} = \text{constante}.$$

Si  $I_O$  es constante el último resultado dice simplemente que la velocidad angular es constante. Si el momentum angular varía, entonces varía la velocidad angular.

**EJEMPLO 9.6.2** *Colapso de una estrella. Este es un ejemplo de la astrofísica, donde se establece que la última forma estable de una estrella que tiene suficiente masa y que a terminado su energía, es en la forma de estrella neutrónica, donde toda la materia de ella se ha transformado en neutrones, uno al lado del otro y de un tamaño bien pequeño y de muy alta densidad. Supongamos entonces que la estrella tenía antes del colapso un radio del orden de nuestro Sol  $R \approx 7 \times 10^5$  km y que da una revolución cada 10 días. Si al transformarse en estrella neutrónica su radio se reduce a  $R' = 10$  km, determine su nueva velocidad angular.*

**Solución.** De acuerdo a la última nota (conservación del momentum angular) tenemos que

$$I_O\dot{\theta} = I'_O\dot{\theta}',$$

o bien

$$\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta} = \frac{2}{5}MR'^2\dot{\theta}'$$

de donde

$$\dot{\theta}' = \frac{R^2}{R'^2}\dot{\theta} = \left(\frac{7 \times 10^5}{10}\right)^2\dot{\theta},$$

pero  $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{10 \times 24 \times 3600} \text{ rad/s}$  y calculando se obtiene

$$\dot{\theta}' = 35633.8 \text{ rad/s}$$

o bien una frecuencia de

$$f' = \frac{\dot{\theta}'}{2\pi} = 5671.3 \text{ Hz},$$

un valor enorme de vueltas por segundo.

NOTA 9.3 No tome demasiado en serio este cálculo. La velocidad radial resultaría  $v = 10000 \times 35633.8 = 3.56338 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  mayor que la velocidad de la Luz (?). En realidad esta situación pertenece al ámbito de la relatividad general, cuestión que escapa a este curso.

### 9.6.2. Dinámica de rotación y traslación

En estos casos el cuerpo se traslada y además rota respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento. En estos casos es conveniente considerar las rotaciones respecto a un eje que pasa por el centro de masa porque se cumple que

$$I_G \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \quad (9.31)$$

o bien para la componente perpendicular al plano del movimiento

$$I_G \frac{d}{dt} \omega = \Gamma_G^{ext}, \quad (9.32)$$

$$I_G \alpha = \Gamma_G^{ext}, \quad (9.33)$$

además de

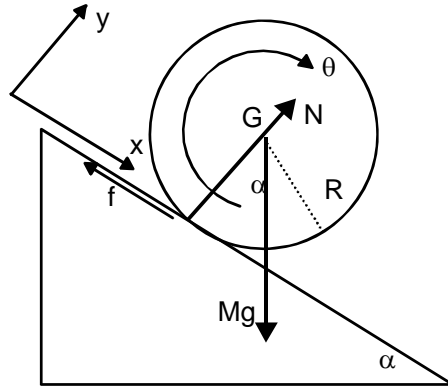
$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}. \quad (9.34)$$

Puede ser útil la energía cinética, cuya expresión es

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2, \quad (9.35)$$

siendo la primera parte  $\frac{1}{2} M v_G^2$  llamada energía cinética de traslación y la segunda parte  $\frac{1}{2} I_G \omega^2$  energía cinética de rotación.

**EJEMPLO 9.6.3** *Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  baja rodando sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal. Determine (a) la aceleración angular del disco, (b) la aceleración lineal de  $G$ , (c) la fuerza de roce.*



**Solución.** Aquí  $\omega$  está hacia adentro del papel al igual que el torque de  $f$  respecto de  $G$ , de manera que tenemos

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = Rf,$$

además de la ecuación para el eje  $X$

$$Mg \sin \alpha - f = Ma_G,$$

pero como no hay deslizamiento lo que avanza el disco está relacionado con el ángulo que gira de la forma

$$x = R\theta$$

de donde se deduce que

$$a_G = R \frac{d\omega}{dt}.$$

Combinando estas ecuaciones podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{I_G}{R} \frac{d\omega}{dt} &= f, \\ Mg \sin \alpha - f &= MR \frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

o bien

$$MgR \sin \alpha = (I_G + MR^2) \frac{d\omega}{dt}$$

o sea la aceleración angular es

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR \sin \alpha}{I_G + MR^2},$$

la aceleración lineal es

$$a_G = R \frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR^2 \sin \alpha}{I_G + MR^2},$$

y la fuerza de roce es

$$f = \frac{I_G}{R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{I_G}{I_G + MR^2} Mg \sin \alpha.$$

Faltaría solamente reemplazar  $I_G = \frac{1}{2}MR^2$ . Si se hace los resultados son

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2g \sin \alpha}{3R}, \\ a_G &= \frac{2g \sin \alpha}{3}, \\ f &= \frac{1}{3} Mg \sin \alpha. \end{aligned}$$



### 9.6.3. Casos donde el movimiento de un punto es conocido

En varios ejemplos se ilustra la potencia de la relación

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M \vec{AG} \times \vec{a}_A. \quad (9.36)$$

entre torque y derivada del momentum angular en un punto arbitrario. Como se explica esta relación es particularmente útil cuando el movimiento o la aceleración del punto  $A$  es conocida. El movimiento dado del punto  $A$  y por lo tanto su aceleración es causada por alguna fuerza desconocida aplicada en  $A$ , por lo cual conviene considerar el torque respecto a ese punto porque esa fuerza no produce torque respecto a ese punto. En los ejemplos que siguen es una buena tarea para el lector intentar llegar a los mismos resultados sin usar la relación (9.36) como se muestra en un ejemplo con soluciones (a) y (b).

EJEMPLO 9.6.4 *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  oscila verticalmente de la forma  $y_A = a \sin \omega t$ . Determine la aceleración angular  $\ddot{\theta}$ .*

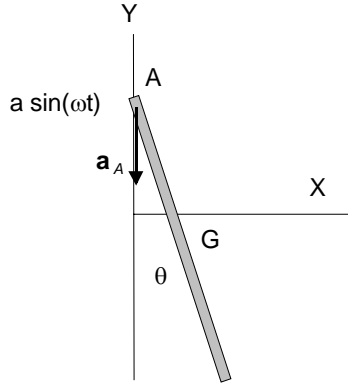


Figura 9.2: Péndulo cuyo punto de suspensión oscila

**Solución.** Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero puede fácilmente verse que  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \sin \theta$  obteniendo en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

---

EJEMPLO 9.6.5 *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  oscila horizontalmente en la forma  $x_A = a \sin \omega t$ . Determine la aceleración angular  $\ddot{\theta}$ .*

**Solución.** Para este caso

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero similarmente  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \cos \theta$  entonces obtenemos en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \cos \theta.$$

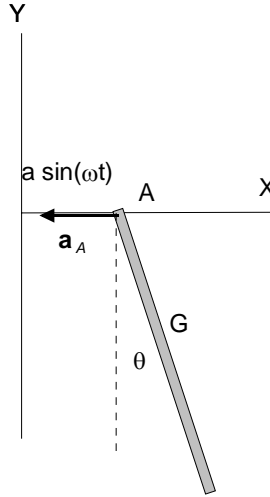


Figura 9.3: Péndulo forzado

---

**EJEMPLO 9.6.6** *Péndulo de longitud  $L$ , masa  $M$  cuyo punto de suspensión  $A$  se mueve sobre una circunferencia vertical de radio  $R$  con velocidad angular constante  $\omega$ .*

**Solución.** Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a \omega^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta)$  obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \cos(\omega t - \theta).$$


---

**EJEMPLO 9.6.7** *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica (su centro de masa está desplazado de su centro geométrico), de radio  $R$  y masa  $M$  sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto  $A$  del cuerpo con el suelo es de magnitud  $a_A = R\dot{\theta}^2$  hacia arriba. Determine la aceleración angular  $\ddot{\theta}$ .*



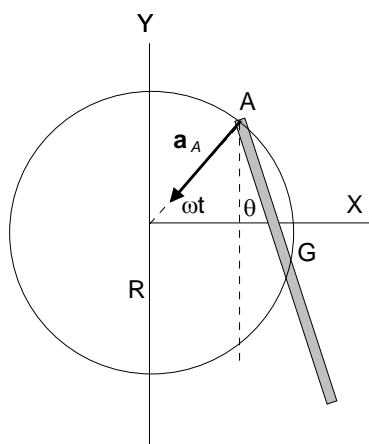


Figura 9.4: Problema de barra

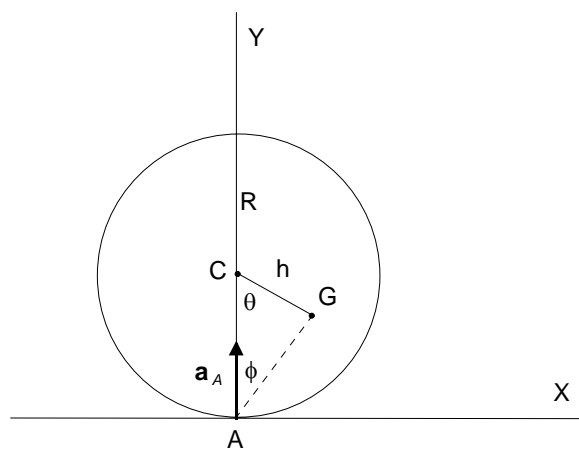


Figura 9.5: Disco que rueda

**solución (a).** Suponiendo que el centro de masas está a distancia  $h$  del centro geométrico, tenemos

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| R \dot{\theta}^2 \sin \phi,$$

pero

$$\frac{\sin \phi}{h} = \frac{\sin \theta}{|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A|},$$

entonces

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R \dot{\theta}^2 h \sin \theta,$$

y finalmente

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh \dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

El momento de inercia puede ser obtenido mediante el teorema de Steiner

$$I_A = I_G + M(h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta).$$

**solución (b).** El torque respecto a  $G$  debido a la fuerza de roce  $f$  (supuesta hacia la derecha) y la normal  $N$  son es

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_G &= f |\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90 - \phi) \hat{k} - Nh \sin \theta \hat{k}, \\ \vec{L}_G &= I_G \dot{\theta} \hat{k}, \\ x_G &= -R\theta + h \sin \theta, \\ y_G &= R - h \cos \theta, \end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones de movimiento serán

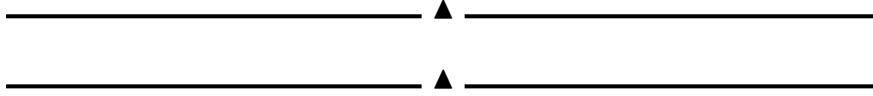
$$\begin{aligned} f &= M \frac{d^2}{dt^2} (-R\theta + h \sin \theta), \\ N - Mg &= M \frac{d^2}{dt^2} (-h \cos \theta), \\ I_G \ddot{\theta} &= f |\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90 - \phi) - Nh \sin \theta, \\ I_G \ddot{\theta} &= f(R - h \cos \theta) - Nh \sin \theta, \end{aligned}$$

en la última reemplazamos  $N$  y  $f$  obteniendo (con bastante álgebra)

$$\begin{aligned} I_G \ddot{\theta} &= M(R - h \cos \theta) \frac{d^2}{dt^2} (-R\theta + h \sin \theta) \\ &\quad - (Mg + M \frac{d^2}{dt^2} (-h \cos \theta)) h \sin \theta, \\ (I_G + M(R^2 + h^2 - 2hR \cos \theta)) \ddot{\theta} &= -Mgh \sin \theta - MhR \dot{\theta}^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

que es la misma ecuación que habíamos obtenido

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$



**EJEMPLO 9.6.8** *El mismo ejemplo anterior, pero ahora actúa sobre la rueda una fuerza horizontal constante de magnitud  $F$  aplicada en su centro. Determine la aceleración angular  $\ddot{\theta}$ .*

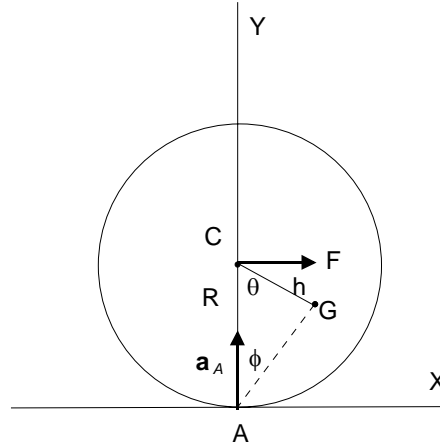


Figura 9.6: Rueda tirada con una fuerza.

**Solución.** Simplemente agregamos el torque de  $F$  obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - FR - MR\dot{\theta}^2 h \sin \theta.$$



**EJEMPLO 9.6.9** *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio  $a$  sobre un cilindro fijo de radio  $R$ . Determine la aceleración angular  $\ddot{\theta}$ .*

**Solución.** En este caso, demuestre primero que la aceleración del punto  $A$  del cuerpo en contacto con el cilindro es de magnitud  $a_A = aR\omega^2/(R + a)$  hacia el centro de la rueda. Aquí la velocidad angular de la rueda está

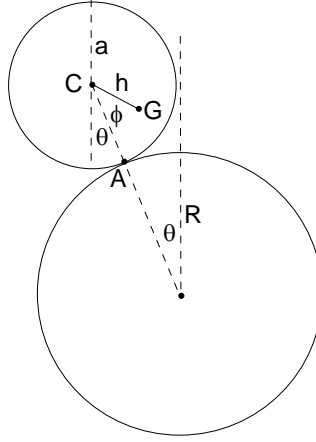


Figura 9.7: Rueda sobre cilindro.

relacionada con el ángulo  $\theta$  mediante  $\omega = (R+a)\dot{\theta}/a$  y  $R\theta = a\phi$ . Si el centro de masa está a distancia  $h$  del centro geométrico, podemos obtener

$$\begin{aligned} (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} &= a_A h \sin \phi \\ &= \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin \phi, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} I_A \alpha &= -Mg(h \sin(\theta + \phi) - a \sin \theta) - M \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin \phi, \\ \frac{R+a}{a} I_A \ddot{\theta} &= -Mgh \sin(1 + \frac{R}{a})\theta + Mga \sin \theta - M \frac{aR\dot{\theta}^2}{R+a} h \frac{(R+a)^2}{a^2} \sin \frac{R}{a} \theta, \\ I_A \ddot{\theta} &= -Mgh \frac{a}{R+a} \sin \frac{R+a}{a} \theta + \frac{Mga^2 \sin \theta}{(R+a)} - MR\dot{\theta}^2 h \sin \frac{R}{a} \theta, \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.6.10** *Movimiento de rodadura de una rueda de masa  $M$  y radio  $R$ , sobre una plataforma que oscila de la forma  $a \sin \omega t$ .*

**Solución.** Aquí la aceleración del punto  $A$  tiene dos componentes,  $a\omega^2 \sin \omega t$ ,  $R\dot{\theta}^2$  pero solo la primera importa, dando por simple inspección  $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = Raw^2 \sin \omega t$  lo cual conduce a

$$I_A \ddot{\theta} = -MRa\omega^2 \sin \omega t.$$

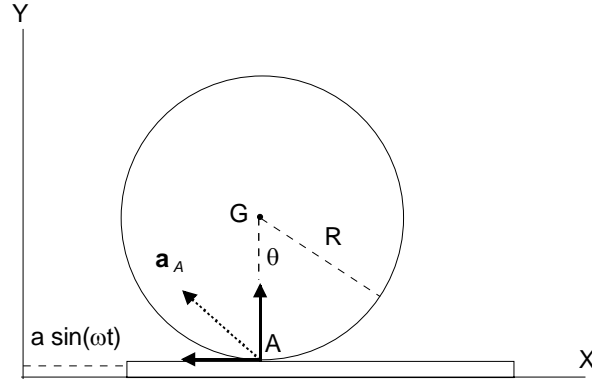


Figura 9.8: Rueda sobre plataforma móvil.

PROBLEMA 9.6.1 Repita los ejemplos anteriores, pero calculando el torque respecto del centro de masa, es decir haciendo uso de la ecuación

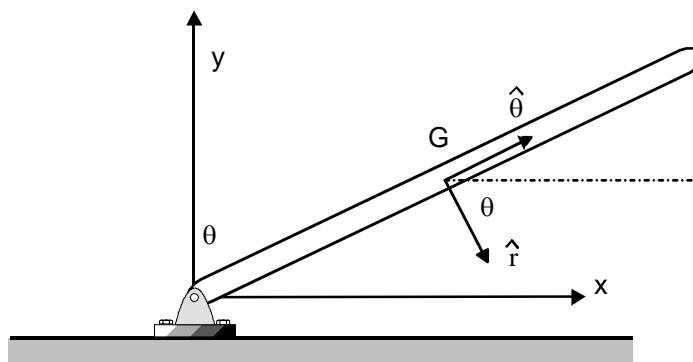
$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}.$$

## 9.7. Ejercicios

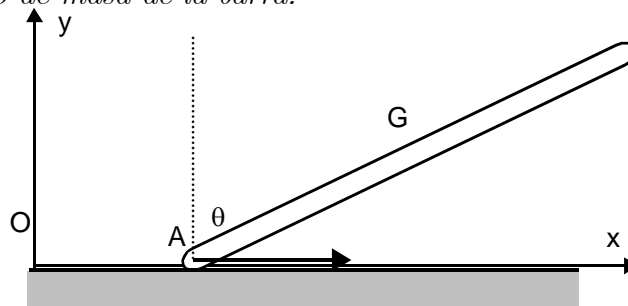
### 9.7.1.

### 9.7.2. Ejercicios de cinemática plana

EJERCICIO 9.1 Una barra de longitud  $L$  tiene un extremo fijo y ella rota en un plano fijo respecto a ese extremo de manera que el ángulo que ella forma con un eje fijo en el plano del movimiento es  $\theta = \omega_0 t$  siendo  $\omega_0$  una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.

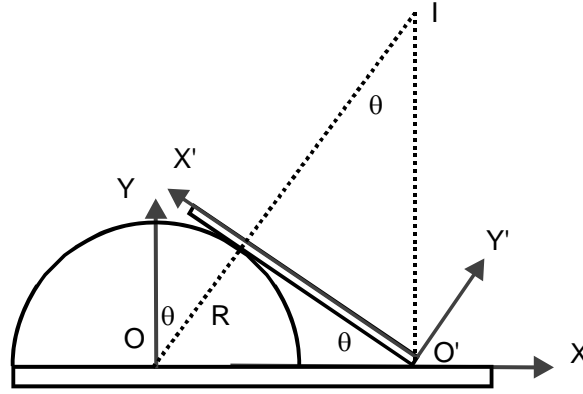


**EJERCICIO 9.2** Una barra de longitud  $L$  tiene se mueve en un plano vertical de manera que su extremo inferior  $A$  desliza sobre un eje  $OX$  horizontal con velocidad de magnitud  $v_A$  constante y el ángulo que ella forma con la vertical  $OY$  es  $\theta = \omega_0 t$  siendo  $\omega_0$  una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.



**EJERCICIO 9.3** Para la situación del problema anterior, determine la posición del centro instantáneo en función del desplazamiento  $x_A$  del extremo  $A$ , de  $\omega_0$  y de  $v_A$ .

**EJERCICIO 9.4** Una barra de longitud  $L$  se mueve apoyada sobre un semicírculo de radio  $R$  y centro en  $O$  y su extremo derecho  $A$  desliza sobre un eje  $OX$  que coincide con la base del semicírculo con rapidez  $v_A$ . Si  $\theta$  indica el ángulo que la barra forma con el eje  $OX$ , determine:



- La posición del centro instantáneo en función del ángulo  $\theta$ .
- La rapidez del centro de masa de la barra en función del ángulo  $\theta$ .

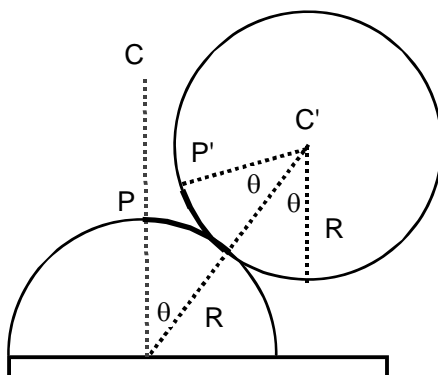
EJERCICIO 9.5 Para la situación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.

EJERCICIO 9.6 Una lámina rígida se mueve en el plano  $OXY$  de manera de dos puntos de ella  $A = (1, 2, 0)$  y  $B = (2, 1, 0)$  tienen velocidades  $\vec{v}_A = (2, 3, 0)$  y  $\vec{v}_B = (0, 1, 0)$ .

- Compruebe que esos puntos tienen velocidades compatibles con la condición de rigidez (9.3).
- Determine la velocidad angular del cuerpo en ese instante.

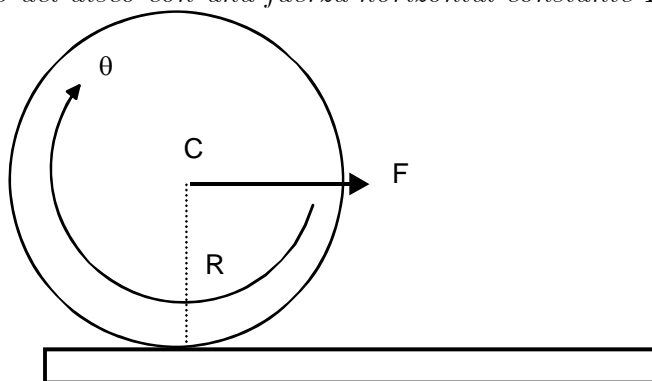
EJERCICIO 9.7 Un disco de radio  $R$  rueda sin deslizar apoyado sobre un semicilindro de radio igual  $R$ . Si  $\theta$  es el ángulo que forma la línea que une los centros con una línea fija, demuestre que la velocidad angular del disco tiene magnitud

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$



### 9.7.3. Ejercicios de dinámica

**EJERCICIO 9.8** *Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante  $F$ , determine:*

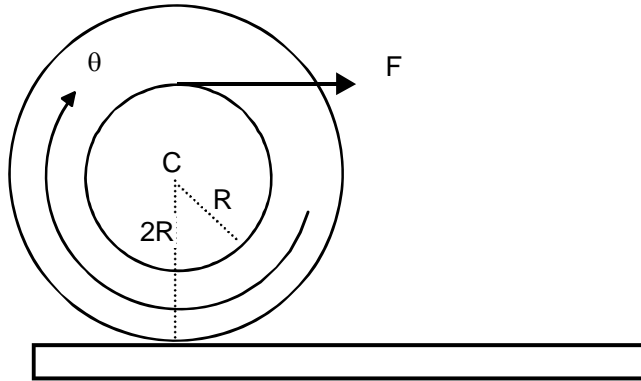


- a) *La aceleración del centro de masa del disco.*
- b) *La aceleración angular del disco.*
- c) *La fuerza de roce.*

**EJERCICIO 9.9** *Un disco de masa  $M$  y radio  $2R$  se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un reborde de radio  $R$  como se indica en la figura, en el cual*

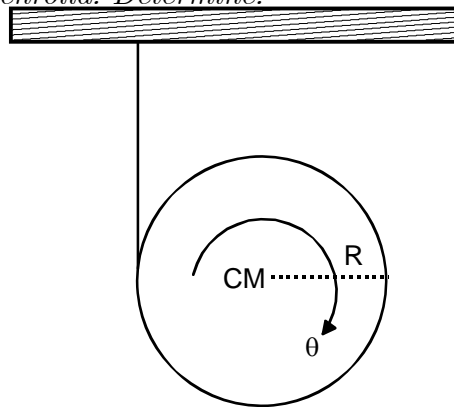


se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante  $F$ , determine:



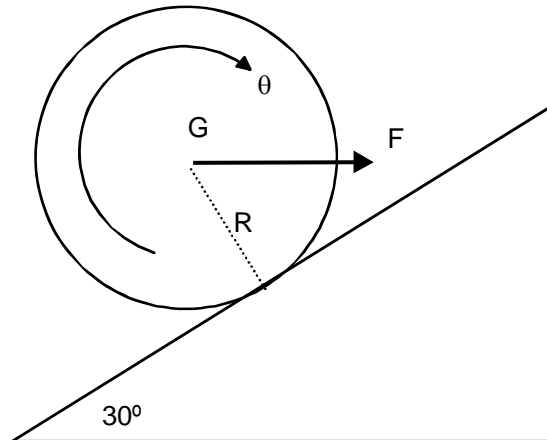
- a) La aceleración del centro de masa del disco.
- b) La aceleración angular del disco.
- c) La fuerza de roce.

EJERCICIO 9.10 Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:



- a) La aceleración de bajada del disco.
- b) La tensión de la cuerda.

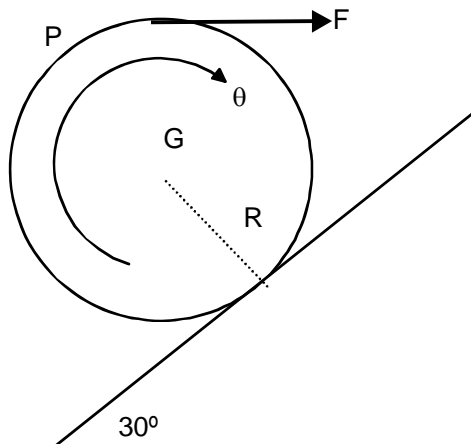
EJERCICIO 9.11 Un disco de masa  $10\text{ kg}$  y de radio  $2\text{ m}$  puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en  $30^\circ$  respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud  $100\text{ N}$  aplicada en su centro, como se indica en la figura.



Determine:

- a) La aceleración del centro del disco.
- b) La fuerza de roce.

EJERCICIO 9.12 Un disco de masa  $10\text{ kg}$  y de radio  $2\text{ m}$  puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en  $30^\circ$  respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud  $100\text{ N}$  aplicada en el punto  $P$ , como se indica en la figura.

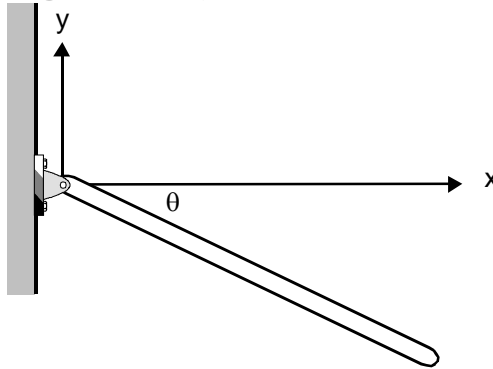


Determine:

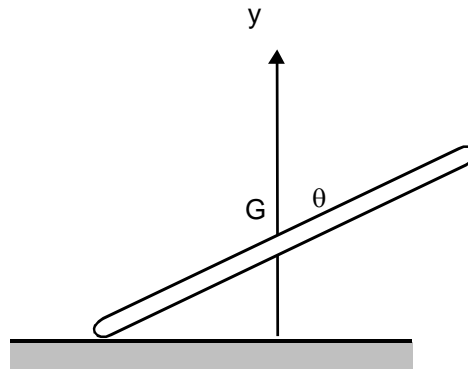
a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

**EJERCICIO 9.13** Una barra de largo  $2L$  y masa  $M$  está articulada en un extremo a un punto fijo  $O$ , inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.

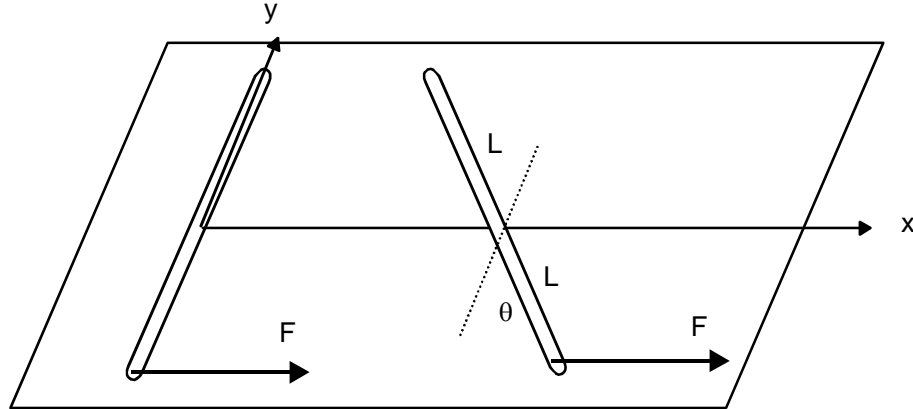


**EJERCICIO 9.14** Una barra de longitud  $2L$  y masa  $M$  se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.

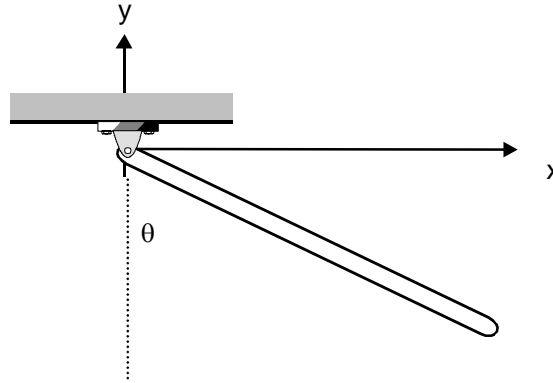


**EJERCICIO 9.15** Una barra de longitud  $2L$  y masa  $M$  se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante  $F$ , inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a

moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.

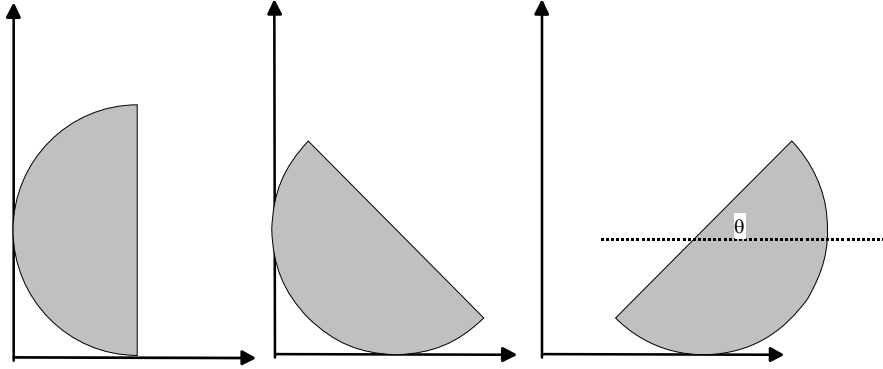


**EJERCICIO 9.16** Una barra de longitud  $L$  y masa  $M$  puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.



**EJERCICIO 9.17** Una semiesfera homogénea de radio “ $a$ ” está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre, además que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son  $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}}g/a$ ,  $v = \frac{3}{8}a\omega$  respectivamente. Demuestre además, durante

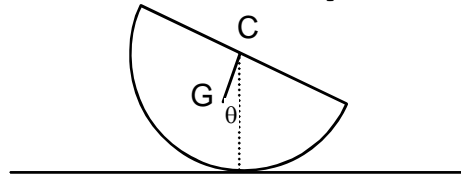
el movimiento siguiente, que el ángulo entre la base y la horizontal no excede de  $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$ .



**EJERCICIO 9.18** Un disco uniforme de radio  $a$  que está rotando con rapidez angular inicial  $\Omega$  alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es  $\mu$ . Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo  $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$ .

**EJERCICIO 9.19** Una barra de masa  $M$  y largo  $2a$  se mueve apoyada en superficies lisas  $OY$  vertical y  $OX$  horizontal. Inicialmente la barra estaba vertical con  $\theta = \pi/2$  y se perturbó levemente. Determine  $\dot{\theta}$  y las reacciones en función de  $\theta$ .

**EJERCICIO 9.20** Una semiesfera de masa  $M$  y radio  $R$  se coloca apoyada sobre una superficie horizontal con roce de modo que la semiesfera sólo puede rodar sin resbalar. Inicialmente la base está paralela al plano horizontal.



Si se le da a la esfera una velocidad angular inicial  $\dot{\theta}(0) = \Omega$  sin que el cuerpo resbale, determine  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$ .



# Apéndice

## 10.1. Opcional

Aunque sería deseable que en un primer curso de física no se usara matemáticas, ello es difícil pues las matemáticas son la herramienta mediante la cual se formulan las leyes en física. Aunque trataremos de no usar matemáticas complicadas, ciertos elementos como la derivada e integral, son imprescindibles. Aquí trataremos algunos tópicos, cada cual con diversas aplicaciones, y sin rigor matemático.

### 10.1.1. Sumatorias

La suma de  $n$  términos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  será representada por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

#### Sumatorias notables

Se deja como ejercicio probar que

$$\sum_{n=1}^N r^n = \frac{r^{N+1} - r}{r - 1}$$

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{1}{2}N(N+1),$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1),$$

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{1}{4}N^2(N+1)^2,$$

### 10.1.2. Derivadas

Si se considera una función de una variable  $y = f(x)$  su gráfico con escalas uniformes es una curva, genéricamente como la que se ilustra en la figura. En ella se indican dos puntos cercanos (1) y (2), se ha dibujado la tangente a la curva en el punto (1) y la cuerda del punto (1) al punto (2).

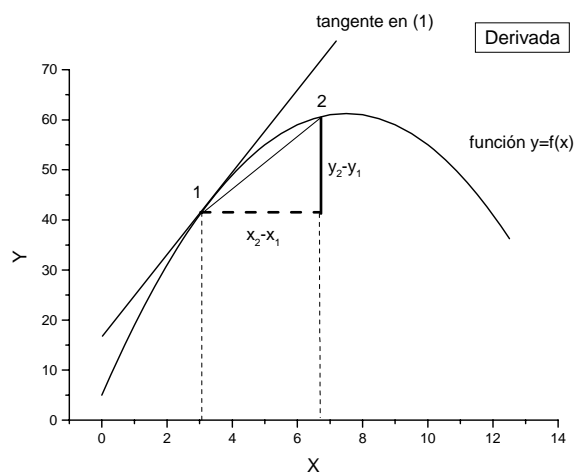


Figura 10.1: Tangente y derivada.



Una medida de la tasa de crecimiento promedio de la función en el intervalo  $(x_1, x_2)$ , puede ser definida por la razón

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si nos imaginamos que los dos puntos están muy cerca, y en caso límite  $x_2$  se acerca a  $x_1$  hasta confundirse con el, podemos observar que

- la cuerda 1-2, se aproxima y se confunde con la tangente a la curva. La hipotenusa del triángulo indicado en la figura se confunde con la tangente a la curva.
- El triángulo rectángulo señalado se hace de lados cada vez menores, cero en el caso límite.
- Es claro que la razón  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  es la tangente del ángulo que hace la cuerda con el eje  $x$ , cualquiera que sea el tamaño de los catetos del triángulo. (Note que aquí  $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ )

Se deduce entonces que el límite cuando  $x_1$  tiende a  $x_2$ , lo que se escribe como

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

existe y es igual a la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva en el punto (1) con el eje  $x$  ( $\tan(\theta)$ ). Tal límite se llama la derivada de la función en el punto  $x_1$  y se denota por

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

### 10.1.3. Diferenciales

El diferencial de una función, correspondiente a un cambio  $\Delta x$  de su variable independiente se define por

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Como además la derivada de  $y = f(x) = x$  respecto a  $x$  es evidentemente  $f'(x) = 1$ , se trata de una recta inclinada en  $45^\circ$ , entonces

$$dx = \Delta x,$$

y en consecuencia, la derivada de una función es igual al cociente de los diferenciales de la función y de la variable independiente  $x$ , o sea

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Como se observa en la figura siguiente el diferencial de la función, nos indica la variación de la función desde un punto inicial hasta la recta tangente a la curva, cantidad que no es necesariamente pequeña. En todo caso, esto permite tratar a las derivadas como cociente de diferenciales.

El proceso límite implícito en la definición de derivada, se ha hecho para las funciones más importantes, tabulando esos resultados. Esas tablas, junto a unas pocas reglas, permiten calcular la derivada de prácticamente cualquier función. Un fragmento de tabla es

$f(x)$	$f'(x)$
$x^a$	$ax^{a-1}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$ag(x) + bh(x)$	$ag'(x) + bh'(x)$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$a$ (constante)	0
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$

#### 10.1.4. Integrales

##### El área bajo una curva

Si se tiene una función  $y = f(x)$ , planteamos el problema de determinar el área entre la curva representativa de la función y el eje  $X$ , entre los valores  $x_1$  y  $x_2$ . Una aproximación a la solución de este problema consiste en aproximar el área por una suma de rectángulos como se indica en la figura.

Si el intervalo de  $x_1$  a  $x_2$  lo llenamos con  $N$  rectángulos que lleguen hasta la curva, entonces los anchos de los rectángulos serán

$$d = \frac{x_2 - x_1}{N},$$

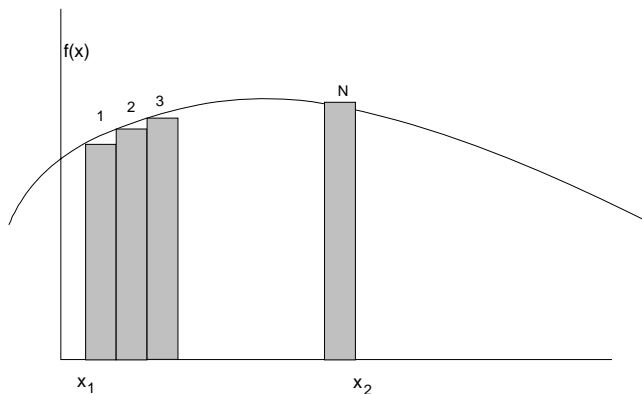


Figura 10.2: Area bajo la curva.

las abscisas de sus vértices inferiores izquierdos serán

$$x_i = x_1 + (i - 1)d, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

o

$$x_i = x_1 + (i - 1)\frac{x_2 - x_1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

entonces el área  $A$  será aproximadamente

$$A \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N}.$$

Como puede observarse, el error que se comete debido a que los rectángulos tienen un déficit o exceso de área respecto a la curva, se hará cero si tomamos el límite haciendo que los anchos de los rectángulos tiendan a cero. Eso se logra tomando el límite  $N \rightarrow \infty$ , es decir

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f\left(x_1 + (i - 1)\frac{x_2 - x_1}{N}\right) \frac{x_2 - x_1}{N}, \end{aligned}$$

### La integral definida

El último límite se denomina la integral definida de la función entre  $x_1$  y  $x_2$  y se representa por

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Como veremos el cálculo de este límite puede hacerse pues está relacionado con el concepto de derivada. Esto es veremos que si sabemos derivar, entonces sabremos integrar.

**EJEMPLO 10.1.1** Calcule el área bajo la curva  $y = x^2$  entre  $x_1 = 0$  y  $x_2 = x$ .

**Solución.** Debemos en este caso evaluar

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (x_1 + (i-1) \frac{x_2 - x_1}{N})^2 \frac{x_2 - x_1}{N}, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (i-1)^2 \frac{x^2}{N^2} \frac{x}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \sum_{i=1}^N (i-1)^2, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} i^2. \end{aligned}$$

Pero  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  de modo que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \frac{1}{6} (N-1)N(2N-1), \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} x^3 \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(2 - \frac{1}{N}\right), \\ &= \frac{1}{3} x^3. \end{aligned}$$

Resulta entonces que hemos logrado calcular una integral, es decir

$$\int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3.$$



### Relación con la derivada

Considere la integral

$$A(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Esto es el área bajo la curva entre  $a$  y  $x$ . Esta puede ser considerada una función de  $x$  y por lo tanto la podemos derivar respecto a  $x$ . Si usamos la definición de derivada entonces

$$\frac{dA(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(A(x + \Delta x) - A(x))}{\Delta x}.$$

El numerador es una diferencia de áreas y si  $\Delta x$  es pequeño, esa área será la del rectángulo  $f(x)\Delta x$ , ver figura

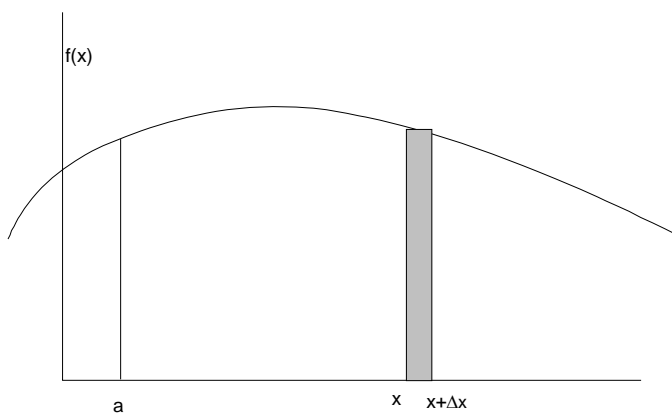


Figura 10.3: Elemento de área.

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dA(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(A(x + \Delta x) - A(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x). \end{aligned}$$

Este notable resultado muestra que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)dx = f(x),$$

o sea que la integración es la operación inversa de la derivada. O sea que el cálculo de una integral se hace buscando que función tiene por derivada  $f(x)$ . Como las derivadas de las constantes son cero, esta búsqueda queda indeterminada en una constante aditiva, por ejemplo

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

siendo  $C$  una constante. Esa constante puede evaluarse considerando que

$$\int_a^a x^3 dx = 0,$$

de modo que resulta

$$C = -\frac{a^4}{4}.$$

Finalmente

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}.$$

### Resultado final

Todo lo dicho se puede resumir en que la integral definida tiene la propiedad

$$\int_a^x f'(x) dx = f(x) - f(a).$$

### La integral indefinida

La operación inversa de la derivada se denomina integral indefinida, es decir

$$\int f'(x) dx = f(x).$$

## 10.2. Ecuaciones diferenciales

Este es un tópico que usted aún no conoce pero que en su forma más elemental se necesita en este curso. Presentaremos algunas ideas y trucos que pueden ser de utilidad en la solución de algunos problemas planteados en el texto. Una ecuación diferencial establece relaciones de una función desconocida  $x(t)$  donde por lo menos aparece su primera derivada. En matemáticas

usualmente uno se preocupa de funciones de la variable independiente  $x$ , pero en física la variable independiente más significativa es el tiempo. Así, las ecuaciones diferenciales más simples serían

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

que se resuelven, es decir se encuentra  $x(t)$ , simplemente integrando el número necesario de veces. Así resulta para el primer caso

$$x(t) = x(0),$$

y para el segundo caso

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{x}(0), \\ x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)t.\end{aligned}$$

Sin embargo hay situaciones más complicadas.

### 10.2.1. Ecuación diferencial lineal, homogénea, con coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_0 x = 0.$$

Aunque parezca muy complicada, ella se resuelve probando una solución exponencial de la forma

$$x(t) = Ae^{pt},$$

al calcular sus derivadas y sustituir, el intento es exitoso si

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \cdots + a_0 = 0,$$

esto es si  $p$  es alguna de las  $n$  soluciones de esa ecuación algebraica de grado  $n$  que supondremos distintas. El caso de raíces repetidas no se estudiará aquí. Si esas raíces se denotan por

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

entonces la solución general es

$$x(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}.$$

### 10.2.2. Separación de variables

Para algunas ecuaciones diferenciales, por ejemplo

$$\ddot{x} = -g - \beta \dot{x},$$

el método de separación de variables consiste en:

Primero: deje dos variables en la ecuación (si ello es posible). En el ejemplo si llamamos  $\dot{x} = v$ , la ecuación es

$$\frac{dv}{dt} = -g - \beta v,$$

que contiene como variables a  $v$  y  $t$ . Sepárelas, es decir déjelas a lados distintos de la igualdad. Esto es

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -g dt.$$

Se ha ganado que ahora se puede integrar

$$\begin{aligned} \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \beta v} &= -g dt = -g \int_0^t dt, \\ \frac{1}{\beta} \ln \frac{g + \beta v(t)}{g + \beta v(0)} &= -gt. \end{aligned}$$

De aquí se despeja  $v(t) = \dot{x}(t)$  y puede integrarse por segunda vez. Pero eso puede hacerlo usted.

### 10.2.3. Identidades útiles

Si  $x(t)$  es alguna función del tiempo entonces

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x}(t))^2.$$

Así, una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{x}(t) = f(x),$$

puede reducirse a una forma integrable pues entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x}(t))^2 &= f(x), \\ \frac{1}{2} d(\dot{x}(t))^2 &= f(x) dx, \end{aligned}$$



que es obviamente integrable una vez

$$\frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2 - \frac{1}{2}(\dot{x}(0))^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} f(x) dx$$

Si  $f(s(t))$  es una función de un parámetro que depende del tiempo, puede ser útil saber que

$$\frac{d^2}{dt^2} f(s(t)) = \frac{1}{2f'(s(t))} \frac{d}{ds} (\dot{s} f'(s))^2. \quad (10.1)$$

Esto es particularmente útil en un caso como el siguiente. Sea

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\sin \theta},$$

evalúe

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta$$

de acuerdo a lo explicado sería

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta &= -\frac{1}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{g}{a} \sin^3 \theta \right) \\ &= \frac{3g}{2a} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Muchos problemas de la dinámica presentan este tipo de cálculos.

### 10.3. Coordenadas intrínsecas

Este desarrollo es algo complejo pero se presenta de todos modos para que usted lo tenga. En el resumen final de esta sección, están los resultados más importantes de esta sección aplicables a los problemas que usted tendrá.

Considere la trayectoria de una partícula en el espacio, esto es alguna curva que la partícula describe en el espacio. Dada esa curva, la posición del punto será una función de la longitud de arco  $s$  medida desde un origen arbitrario en la curva hasta la posición del punto en tiempo  $t$ , es decir

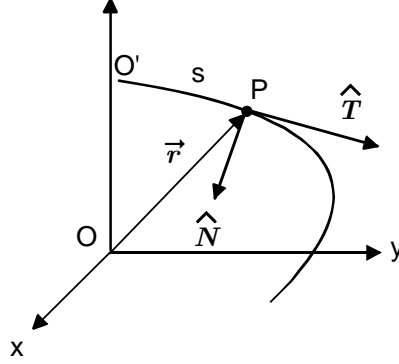


Figura 10.4:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'(s(t)). \quad (10.2)$$

Naturalmente la derivada de  $\vec{r}$  respecto a  $s$  será tangente a la curva de modo que podemos escribir

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (10.3)$$

que es unitario pues

$$|d\vec{r}| = |ds|.$$

Dado que  $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$  resulta al derivar

$$\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

por lo cual  $\frac{d\hat{T}}{ds}$  es perpendicular a  $\hat{T}$ . Denotemos por  $\vec{N}$  a ese vector ortogonal a  $\hat{T}$ , llamado vector normal

$$\vec{N} = \frac{d\hat{T}}{ds}. \quad (10.4)$$

Completemos una triada ortogonal construyendo el llamado vector binormal  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \hat{T} \times \vec{N}. \quad (10.5)$$

**Velocidad angular**

A medida que el punto se mueve a lo largo de la curva, la triada  $\vec{B}, \hat{T}, \vec{N}$  puede rotar. A su “velocidad angular” la denotaremos por  $\vec{\Omega}$ . Entonces

$$\vec{N} = \frac{d}{ds}\hat{T} = \vec{\Omega} \times \hat{T} \quad (10.6)$$

que si la multiplicamos cruz con  $\vec{N}$  conduce a

$$\vec{0} = \vec{N} \times (\vec{\Omega} \times \hat{T}),$$

o bien desarrollando

$$\vec{0} = (\vec{N} \cdot \hat{T})\vec{\Omega} - (\vec{N} \cdot \vec{\Omega})\hat{T},$$

o bien

$$\vec{N} \cdot \vec{\Omega} = 0,$$

es decir  $\vec{\Omega}$  no tiene componente a lo largo de  $\vec{N}$ . Podemos entonces escribir (note que ahora trabajamos con los unitarios)

$$\vec{\Omega} = \frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho},$$

siendo  $\sigma$  y  $\rho$  escalares que interpretaremos después. De aquí siguen las

**Ecuaciones de Frenet**

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\hat{T} &= \vec{\Omega} \times \hat{T} = \frac{\hat{B}}{\rho} \times \hat{T} = \frac{1}{\rho}\hat{N}, \\ \frac{d}{ds}\hat{B} &= \vec{\Omega} \times \hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}, \\ \frac{d}{ds}\vec{N} &= \vec{\Omega} \times \vec{N} = \left( \frac{\hat{B}}{\sigma} - \frac{\hat{T}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

### Significado y cálculo de $\sigma$ , $\rho$

De la primera

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\hat{T}(s + \Delta s) - \hat{T}(s)|}{\Delta s},$$

y de acuerdo a la figura

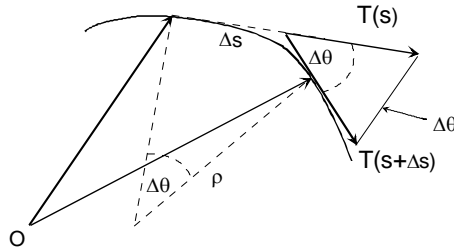


Figura 10.5:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (10.8)$$

El recíproco del radio de curvatura  $\rho$  se denomina la curvatura  $\kappa$  que está dada por la razón del cambio del ángulo de la tangente a la curva con respecto al arco recorrido

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

De

$$\frac{d}{ds} \hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

podemos dar una interpretación similar a  $\frac{1}{\sigma}$ , la denominada torsión, pero respecto al ángulo que gira la dirección binormal  $\hat{B}$ .

### Cálculo del radio de curvatura $\rho$

- Para una curva dada en función del parámetro longitud de arco  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Usando

$$\frac{d}{ds} \hat{T} = \frac{1}{\rho} \hat{N},$$

se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d}{ds} \hat{T} \right| = \left| \frac{d^2}{ds^2} \vec{r} \right|.$$

- Para una curva dada en función del tiempo  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  debemos considerar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \vec{r} &= \frac{1}{\dot{s}(t)} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \vec{r}(t), \\ \frac{d^2}{ds^2} \vec{r} &= \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right), \\ &= \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{v} \vec{v} \right), \\ &= -\frac{\dot{v}}{v^3} \vec{v} + \frac{1}{v^2} \vec{a}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{v^3} |-\dot{v} \vec{v} + v \vec{a}|, \\ &= \frac{1}{v^3} \sqrt{\dot{v}^2 v^2 - 2\dot{v} v \vec{v} \cdot \vec{a} + v^2 a^2}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Pero

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \\ v\dot{v} &= \dot{x}\ddot{x} + \dots = \vec{v} \cdot \vec{a}, \end{aligned}$$

con lo cual es simple establecer que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}.$$

- Curva plana  $y = y(x)$ . Considere  $x = t$  de modo que

$$\begin{aligned} \vec{r} &= t\hat{i} + y(x)\hat{j}, \\ \vec{v} &= \hat{i} + y'(x)\hat{j}, \\ \vec{a} &= y''(x)\hat{j}, \end{aligned}$$

resultando

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|}. \tag{10.10}$$

- Cálculo de la torsión  $1/\sigma$ . Para  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  tenemos que

$$\frac{d}{ds}\hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

$$\frac{d}{ds}(\hat{T} \times \hat{N}) = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

pero  $d\hat{T}/ds$  es paralelo a  $\hat{N}$  luego

$$\hat{T} \times \frac{d}{ds}\hat{N} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

pero

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{N}$$

entonces

$$\hat{T} \times \left( \frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

de aquí sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} &= \hat{N} \cdot \left( \left( \frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) \times \hat{T} \right) \\ &= \hat{N} \times \left( \frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) \cdot \hat{T} \\ &= \rho \hat{N} \times \left( \frac{d^2\hat{T}}{ds^2} \right) \cdot \hat{T} \\ &= \rho^2 \frac{d\hat{T}}{ds} \times \left( \frac{d^2\hat{T}}{ds^2} \right) \cdot \hat{T} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{1}{\sigma} = \rho^2 \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \left( \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (10.11)$$

- Para  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , puede obtenerse que la torsión es

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\rho^2}{v^6} \vec{a} \times \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{v} \quad (10.12)$$

**Velocidad y aceleración**

Ahora es trivial establecer que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{T} = v\hat{T}.$$

Además

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}\frac{d\hat{T}}{dt} \\ &= \ddot{s}\hat{T} + \dot{s}^2 \frac{d\hat{T}}{ds} \\ &= \ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N} \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}. \end{aligned} \tag{10.13}$$

**10.3.1. Resumen**

Para movimientos planos, será suficiente considerar

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v},$$

y

$$\hat{N} = \pm \hat{k} \times \hat{T},$$

donde  $\hat{k}$  es perpendicular al plano del movimiento y el signo debe elegirse de modo que  $\hat{N}$  resulte hacia el centro de curvatura.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

donde el radio de curvatura puede calcularse si se conoce la trayectoria  $y = y(x)$  de la forma

$$\rho = \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

## 10.4. Movimiento relativo

### 10.4.1. Movimiento general del sistema

En general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. En efecto si colocamos  $\vec{r}'$  en términos de sus coordenadas en el sistema móvil, tenemos

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}',$$

y además

$$\vec{v} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}',$$

es decir

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'.$$

Si usted recuerda que las derivadas de los vectores unitarios móviles se obtienen de acuerdo a

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}',$$

y similarmente para los otros. Al derivar dos veces puede obtenerse, con bastante trabajo, que

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}', \quad (10.14)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}', \quad (10.15)$$

siendo  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ . Debe observarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}.$$

Estas son las expresiones necesarias para realizar el estudio dinámico de los movimientos en sistemas de referencia que rotan. De hecho, nuestro propio sistema de referencia, la Tierra, tiene una rotación, respecto a su eje, prácticamente constante y afortunadamente no muy alta. Una vuelta por día.



### 10.4.2. Transformación de Lorentz

La transformación de Galileo de velocidades para sistemas que se trasladan uno respecto del otro

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}',$$

está en contradicción con un hecho experimental muy bien establecido. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia de modo que ella no satisface esta última relación. La solución de esa inconsistencia obligó a abandonar la transformación de Galileo en el ámbito de velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Fue Albert Einstein quien relativizando el concepto de tiempo, es decir el tiempo no es más un concepto absoluto, escribió las ecuaciones correctas de transformación de coordenadas y tiempos de acuerdo a

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - v_A t), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v_A x}{c^2}\right),\end{aligned}$$

siendo  $c$  la rapidez de la luz, considerando el movimiento del sistema móvil tiene lugar sólo en el eje  $x$  del sistema fijo. Además el valor de

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}},$$

es prácticamente uno si las velocidades no son muy altas, recobrándose en ese caso la transformación de Galileo. Este tema ha traído enormes consecuencias en el desarrollo de la física actual, materia que está lejos del alcance de este curso por lo cual no será profundizado más.

