GUÍA 6 : **FUNIONES: EXPONENCIAL Y LOGARITMO**

1. Sea $f(x) = \log_3(x-1) - 2$.
   a) Determine dominio y conjunto imagen de la función f.
   b) Calcule ceros y signos de la función f.
   c) Usando traslaciones graficar la función f.
   d) Calcule $f^{-1}(x)$. En un mismo plano cartesiano graficar f y f^{-1}.

2. Sea $h(x) = 4^{-x-2} - 1$.
   a) Determine dominio y conjunto imagen de la función h.
   b) Calcule ceros y signos de la función h.
   c) Usando traslaciones graficar la función h.
   d) Calcule $h^{-1}(x)$. En un mismo plano cartesiano graficar h y h^{-1}.

3. Sean $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
   a) Determine los conjuntos $Dom(g \circ f)$ y $Dom(f \circ g)$.
   b) Calcule $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.
   c) ¿ Qué puede concluir con los resultados obtenidos de la composición?

4. Sean $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ y $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$.
   a) Determine los conjuntos $Dom(g \circ f)$ y $Dom(f \circ g)$.
   b) Calcule $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.
   c) ¿ Qué puede concluir con los resultados obtenidos de la composición?

5. Considere las funciones $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Demostrar que:
   a) $h^2(x) = g^2(x) + 1$
   b) $g(x+y) = g(x)h(y) + h(x)g(y)$
   c) $h(x+y) = h(x)h(y) + g(x)g(y)$

6. Convertir las siguientes expresiones en un solo logaritmo

   a)
   $$y = 3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$$
   b)
   $$y = 3\ln(s) + \frac{1}{2}\ln(t) - 4\ln(t^2+1)$$
   c)
   $$y = \ln 5 + 2\ln(x) + 3\ln(x^2+5)$$
   d)
   $$y = 4\log_{10}(x) - \frac{1}{3}\log_{10}(x^2+1) + 2\log_{10}(x-1)$$

7. Resolver las siguientes ecuaciones

a)
$$\log_{10}(25 - x^3) - 3\log_{10}(4 - x) = 0$$

b)
$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

c)
$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$$

d)
$$\ln(8) + (x^2 - 5x + 7)\ln(3) = \ln(24)$$

e)
$$\log_{10}(3x - 1) - \log_{10}(2x + 3) = 1 + \log_{10}(25)$$

f)
$$\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$$

g)
$$\ln(5x + 4) - \ln(2) = \frac{1}{2}\ln(x + 4)$$

h)
$$4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$$

8. Hallar el valor simplificado de
$$E = \frac{a^{\frac{\log_{10}(\log_{10}(a))}{\log_{10}(a)}}}{\log_{10}(a)}.$$

9. Sabiendo que $\log_{12} 3 = a$, calcule $\log_{12}(8)$ en términos de a.
Ayuda.- Podría empezar calculando $\log_{12}(3 \cdot 4)$.

10. Un lago formado por un dique contiene inicialmente 1000 peces. Se espera que su población aumente según
$$N(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-kt}}$$
donde N es el número de peces, en miles, que se espera después de t años.
Si se sabe que al cabo de 6 meses la población aumentó a 1900 peces y se planea que el lago estará abierto a la pesca cuando el número de peces sea de 20000. ¿Cuántos años pasarán para que se abra el lago a la pesca?

11. Después de que un estudiante con un virus gripal regresa a un campo universitario aislado de 3000 estudiantes, el número de estudiantes infectados después de t días, se pronostica por
$$f(t) = \frac{3000}{1 + 2999e^{-0{,}895t}}.$$

   a) ¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 10 días?
   b) ¿ En qué periodo de tiempo, se estima que los infectados, lleguen aproximadamente a 100 estudiantes?

12. La concentración de un médicamente en un órgano al instante t (en segundos) está dado por
$$x(t) = 0{,}08 + 0{,}12 \cdot e^{-0{,}002t}$$
donde $x(t)$ se mide en $[gr/cm^3]$.

a) ¿Cuál es la concentración pasado 1 minuto?

b) ''Cuánto tiempo tardará en alcanzar 0,18 [gr/cm^3] de medicamento en el órgano?

1. Sea $f(x) = \log_3(x-1) - 2$.

   a) Determine dominio y conjunto imagen de la función f.

   b) Calcule ceros y signos de la función f.

   c) Usando traslaciones graficar la función f.

   d) Calcule $f^{-1}(x)$. En un mismo plano cartesiano graficar f y f^{-1}.

a) $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-1>0\} = (1,+\infty)$

$\mathrm{Rec}\, f = \{y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

b) $f(x) < 0$

$\log_3(x-1) - 2 < 0$

$\log_3(x-1) < 2$

$x-1 < 3^2$

$x < 10 \cap (1,+\infty)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,10)$

$f(x) > 0$

$\log_3(x-1) - 2 > 0$

$\log_3(x-1) > 2$

$x-1 > 3^2$

$x > 10$

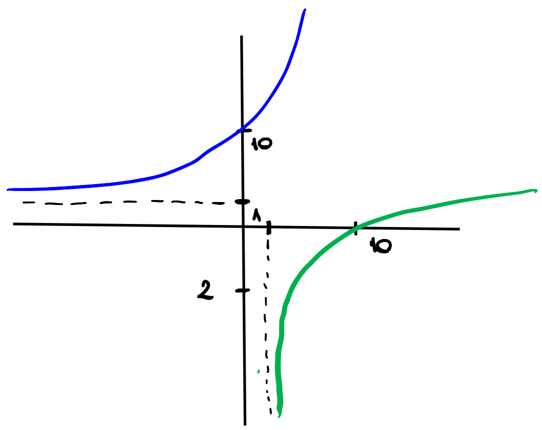
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (10,+\infty)$

$f(x) = 0$

A partir de

$f(x) < 0$ y $f(x) > 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$



$y = \log_3(x-1) - 2$

$y + 2 = \log_3(x-1)$

$3^{y+2} + 1 = x$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{(x+2)} + 1$

3. Sean $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

a) Determine los conjuntos $Dom(g \circ f)$ y $Dom(f \circ g)$.

b) Calcule $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$.

c) ¿ Qué puede concluir con los resultados obtenidos de la composición?

a) $Dom\, g = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} / x + \sqrt{x^2+1} > 0 \wedge x^2+1 > 0\}$

$Rec\, g = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Dom\, f = \mathbb{R}$

$Rec\, f = \mathbb{R}$

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom\, f \wedge f(x) \in Dom\, g\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathbb{R}$$

$$2.\ (g \circ f) = e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} - e^{-(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))}$$
$$= x + \sqrt{x^2+1} - e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}}$$
$$= (x + \sqrt{x^2+1}) - (x + \sqrt{x^2+1})^{-1}$$
$$= x + \sqrt{x^2+1} - (-x + \sqrt{x^2+1})$$

$$(g \circ f) = \frac{2x}{2}$$
$$= x$$

c) Se puede concluir que $g(x) = f^{-1}(x)$

y que $f(x) = g^{-1}(x)$

6. Convertir las siguientes expresiones en un solo logaritmo

a)
$$y = 3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

b)
$$y = 3\ln(s) + \frac{1}{2}\ln(t) - 4\ln(t^2+1)$$

c)
$$y = \ln 5 + 2\ln(x) + 3\ln(x^2+5)$$

d)
$$y = 4\log_{10}(x) - \frac{1}{3}\log_{10}(x^2+1) + 2\log_{10}(x-1)$$

a) $3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$

$\ln x^3 + \ln \sqrt{x+1}$

$\ln(x^3 \cdot \sqrt{x+1})$

b) $3\ln(m) + \frac{1}{2}\ln(t) - 4\ln(t^2+1)$

$\ln m^3 + \ln \sqrt{t} - \ln (t^2+1)^4$

$\ln m^3 \cdot \sqrt{t} - \ln (t^2+1)^4$

$\ln\left(\frac{m^3 \cdot \sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right)$

$\boxed{\text{Exponencial}}$ $f(x) = a^x + b$ Obs: $\{x \in \mathbb{R} : a^x = 0\} = \emptyset$

→ Creciente si $a > 1$, $-(a)^x$ es decreciente

→ Decreciente si $0 < a < 1$, $-(a)^x$ es creciente

reflexión // x o respecto a la asíntota horiz.

Ah: Asíntota horizontal

* $Ref(f) = (Ah, +\infty) \vee (-\infty, Ah)$

$\boxed{\text{Logaritmo}}$ $f(x) = \log_a(x) + b$ $a > 0,\ a \neq 1$

si $b = 0$ esta sí posee ceros a dif. de la exponencial