Tutoría 11:

Cachorr@404

Algebra I -Inducción

CACHORR@ 404

Tutores para esta sesión

Constanza Palomo

constanza.palomo@usach.cl

Bastián Onetto

bastian.onetto@usach.cl

Jorge Sandoval

jorge.sandoval.m@usach.cl

Inducción

CACHORR@ 404

01

Definición

Consiste en plantearse cierta afirmación proposicional P(n) y verificar su validez para todo N.

Analogía de los dominós

Para que se caigan los dominós en cascada debemos asegurar al menos dos cosas:

1) Que al menos uno caiga.
2) Que el que caiga empuje al siguiente.

Pasos a seguir

1

Encontrar un caso base válido

En general con n=1 funciona

2

Plantear hipótesis de inducción

n=k donde para todo k se asume que se cumple

3

Corroborar la hipótesis

n=k+1

Estos pasos aseguran que los dominós caen sin necesidad de verlos cayendo.

1) Sumatoria

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^i} = \boxed{2\,(2^n - 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Primer paso

$\underline{n=1}$

$$\sum_{i=1}^{1} 2^i = 2^1 = 2$$

$$2(2^1 - 1) = 2(1) = 2 \checkmark$$

$\underline{n=k}$

$$\sum_{i=1}^{k} 2^k = \underbrace{2(2^k - 1)} \quad \text{(H.I)} \checkmark$$

$\underline{n=k+1}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} 2^{(k+1)}} = \underbrace{2\,(2^{(k+1)} - 1)} \quad \text{(T)}$$

$$- \quad 2^k + 2^{k+1}$$

* [Tesis = Hip + Ultimo elemento]

$$\sum_{i=1}^{k} 2^i + 2^{(k+1)} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} 2^{k+1}} = 2 \cdot 2^k - 2 + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{k+1} - 2$$

$$= \underbrace{2(2^{k+1} - 1)}_{\text{qed}}$$

2) Divisibilidad

$2^{2n+1}+1$ es divisible por 3. $\forall n \in \mathbb{N}$

$n=1$

$2^{2\cdot 1+1}+1 = 3\cdot q \quad q \in \mathbb{Z}$

$2^3+1 = 3q$

$\frac{9}{3} = q$

$\boxed{3 = q}$ ✓

$\boxed{n=k}$ $\boxed{2^{2k+1}+1} = 3w$ H.I.

$\boxed{n=k+1}$ $2^{2(k+1)+1}+1 = 3j \quad j \in \mathbb{Z}$ T

$2^{2k+2+1}+1 = 3j$

$2^{2k+3}+1 = 3j$

$2^{2k+1}\cdot 2^2 + 1 = 3j$

$4\cdot \underbrace{2^{2k+1}+1} = 3j$

$(3+1)2^{2k+1}+1 =$

$3\cdot 2^{2k+1} + \underbrace{2^{2k+1}+1} = 3j$

$3\cdot 2^{2k+1} + 3w = 3j$

$\underbrace{3(2^{2k+1}+w) = 3j}$

$\boxed{j = 2^{2k+1}+w}$ qed.

3) Desigualdad

$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 4$ Se cumple que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n = \boxed{n! > 2^n}$

$n=4$ $\quad 4! > 2^4$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$2^4 = 16$

$24 > 16$ ✓ $\quad K \geq 4$

$n = K$ $\quad K! > 2^K$ $\quad$ H.I

$n = K+1$

$\boxed{(K+1)! > 2^{(K+1)}}$ $\quad$ T

$K! > 2^K \quad / \cdot (K+1)$

$\underbrace{K! \cdot (K+1)} > 2^K \cdot (K+1)$

$(K+1)! > 2^K (K+1) > 4 \cdot 2^K$

$K + 1 > 4 \quad / \, 2^K$

$\boxed{2^K (K+1)} > 4 \cdot 2^K$

$4 \cdot 2^K = 2^2 \cdot 2^K$

$= 2^{K+2}$

$\boxed{4 \cdot 2^K > 2 \cdot 2^K}$

$4 \cdot 2^K > 2^{K+1}$

$(K+1)! > 2^K (K+1) > 4 \cdot 2^K > 2^{K+1}$

$\boxed{(K+1)! > 2^{K+1}}$

qed

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función con la propiedad que
$f(x+2, y-1) = (3x+4, 5y-3)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
a) Determinar $f(2,2) \to$

$f(x,y) \to x = x-2 \to f((x-2)+2, (y+1)-1) = (3(x-2)+4, 5(y+1)-3)$

$y = y+1$

$f(x - \cancel{2} + \cancel{2}, y + \cancel{1} - \cancel{1}) = (3x - 6 + 4, 5y + 5 - 3)$

$f(x+2, y-1) = (3x+4, 5y-3)$

$\boxed{f(x,y) = (3x-2, 5y+2)}$

$f(2,2) = (3(2)-2, 5(2)+2) = (4, 12)$

$g(x,y) = (\underbrace{x+y}_{x}, \underbrace{x-y}_{y})$ $f(x,y) = (3x-2, 5y+2)$

¿$f \circ g$? $\Rightarrow f \circ g = (3(x+y)-2, 5(x-y)+2)$

$= (\underbrace{3x+3y-2}, \underbrace{5x-5y+2})$

i i $\to f \circ g \to$ i

s s $\to f \circ g \to$ s

$f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$

✓

4) Fórmula Recursiva

Sea (a_n) $n \in \mathbb{N}$ tq:

$\rightarrow a_1 = 2$

$\boxed{a_n = 3a_{n-1},\ \forall n > 1}$

$\rightarrow \boxed{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 1$

$a_1 = 2 \cdot \cancel{3^{1-1}}^{1}$

$\rightarrow a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot 3$

$a_2 = 6$

$n = k$

1) $a_k = 2 \cdot 3^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

2) $a_k = 3a_{k-1}$ $k > 1$

H.I

$n = k+1$

$a_{k+1} = 2 \cdot 3^k$

$a_{k+1} = 3a_k$

T

$2 \cdot 3^k = 3(2 \cdot 3^{k-1})$

$= 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1}$

$= 2 \cdot 3^k$ qed

Tribonacci

$T_1 = T_2 = T_3 = 1$

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, \quad n \geq 4$

$T_n < 2^n$

$n = 4,$

$T_4 = T_3 + T_2 + T_1$

$= 1 + 1 + 1$

$= 3$

$T_4 < 2^4$

$3 < 16$ ✓

$n = k,$

① $T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}$

② $T_k < 2^k$

H.I

$n = k+1,$

① $T_{k+1} = T_k + T_{k-1} + T_{k-2}$ (T)

② $T_{k+1} < 2^{k+1}$

$T_k < 2^k$

$T_{k-1} < 2^{k-1}$

$T_{k-2} < 2^{k-2}$

on H.I

$T_k + T_{k-1} + T_{k-2} < 2^{k+1}$

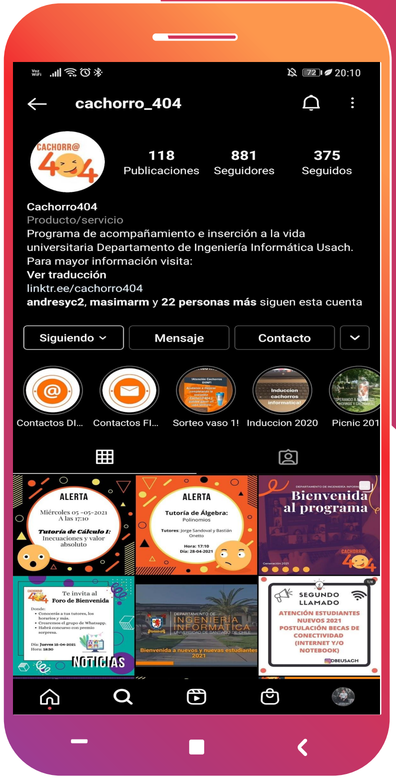
$2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} < 2^{k+1}$

$$\underbrace{2^{k+1}(2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}) < 2^{k+1}}_{\frac{7}{8}2^{k+1} < 2^{k+1}}$$

$\frac{7}{8}2^{k+1} < 2^{k+1}$ ✓ qed

Síguenos en instagram!

@cachorro404



¡Gracias por asistir!