CACHORR@ 404

Tutoría 1 - 2/2021:

Cachorr@404

Cálculo 2 - Suma de Riemann y Teorema Fundamental del Cálculo

CACHORR@ 404

Tutores para esta sesión

Constanza Palomo

constanza.palomo@usach.cl

Bastián Onetto

bastian.onetto@usach.cl

????

????

Temario

Riemann

1

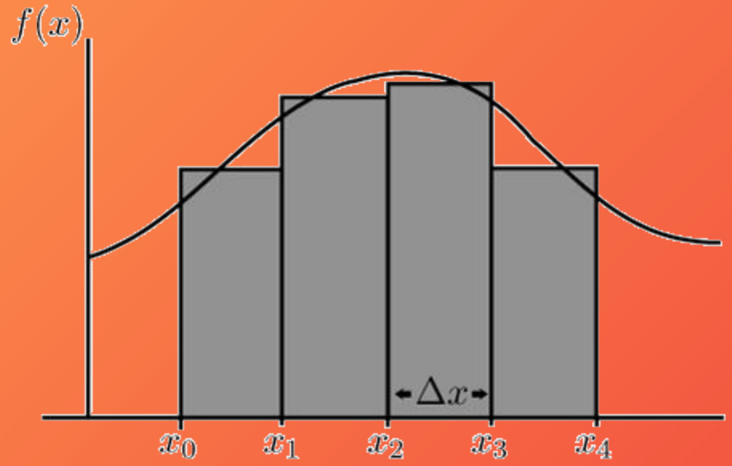
Teorema Fundamental del Cálculo

2

Ejercicios

3

Sumas de Riemann

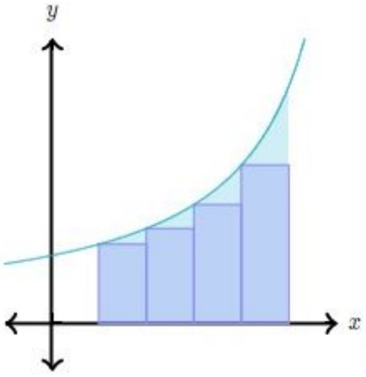


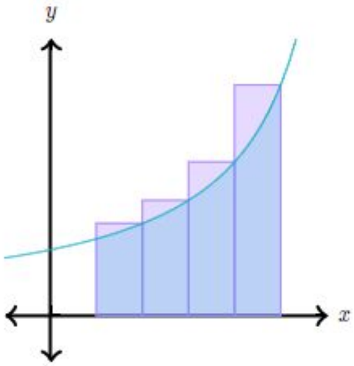
01

¿Qué es una suma de Riemann?

Una suma de Riemann es una aproximación del área bajo la curva, al dividirla en varias formas simples (tales como rectángulos o trapecios).

En una suma de Riemann **izquierda** aproximamos el área con rectángulos (normalmente de ancho igual), donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo izquierdo de su base.
En una suma de Riemann **derecha** la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo derecho de su base.





Sumas de Riemann en notación sigma

Queremos aproximar el área bajo la gráfica de una función en el intervalo [a, b] con n subdivisiones iguales.

Suma de Riemann izquierda	Suma de Riemann derecha
$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(x_i)$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$

Pasos:

1) Definir $\Delta x=(b-a)/n$ (Δx es la longitud de la base de cada rectángulo)
2) Definir $x_i= a+ \Delta x*i$ (El extremo derecho de cada rectángulo)
3) Definir $\Delta x * f(x_i)$ (El área de cada rectángulo)
4) Sumar :)

Tip:

Fórmulas de Interés

1. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Integral definida

Las integrales definidas representan el área bajo la curva de una función, y las sumas de Riemann nos ayudan a aproximar esas áreas. La pregunta es: ¿hay una manera de encontrar el valor ***exacto*** de una integral definida?

¿Podríamos hacer una suma de Riemann con infinitas divisiones?

ño

Pero podemos acudir a los límites c:

$$\lim_{n \to \infty} R(n)$$

Definición de integral definida

La integral definida de una función continua f en el intervalo $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, es igual al límite de una suma de Riemann conforme el número de subdivisiones tiende a infinito. Es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_i)$$

Un par de ejemplos:

$$\int_3^8 (3x^3 + 8x + 1)\,dx$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x)\,dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo

02

Teorema fundamental del Cálculo

Parte 1

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $h : [c, d] \to [a, b]$ diferenciable,

$$\frac{d}{dx} \int_a^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x), \quad \forall x \in [c, d].$$

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $h, k : [c, d] \to [a, b]$ funciones diferenciables.

$$\frac{d}{dx} \int_{k(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(k(x))k'(x), \quad \forall x \in [c, d].$$

Ejemplo: Parte 1

Ejemplo. Evalúe la siguiente derivada

$$\frac{d}{dx}\int_0^{sen(x)} \sqrt{1-t^2}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

TFC: Parte 2

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

En particular,

$$\int_a^x f(t)dt = g(x) - g(a), \quad x \in [a, b].$$

Ejemplo

Ejemplo. Considere

$$\int_a^b x^p\,dx, \quad p \neq -1.$$

En este caso, $f(x) = x^p$. ¿Qué función g satisface $g' = f$?

Ejercicios

CACHORR@ 404

Ejercicio 1

Considere $F(x) = \int_0^x \sqrt{\sin^2(x+t)}dt$, para $t > 0$ determine $F'(x)$.

Considere $F(x) = \int_0^x \sqrt{\sin^2(x+t)}dt$, para $t > 0$ determine $F'(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x} \underbrace{\sqrt{\sin^2(x+t)}\, dt}\right)$$

$$f(t) \quad \textcircled{1}\begin{cases} \sin(a) & t>0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\sin^2(a)} \quad \textcircled{2}\begin{cases} -\sin(a) & t>0 \end{cases}$$

(1) $f(t) = \sin(x+t)$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin(x+t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x (\sin(x)\cdot\cos(t) + \sin(t)\cdot\cos(x))\,dt\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (\sin(x)\cdot\cos(t))\,dt + \int_0^x \sin(t)\cdot\cos(x)\,dt\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\int_0^x \cos(t)\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\int_0^x \sin(t)\cdot dt\right)$$

$$\left(\frac{d}{dx}\sin(x)\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(t)\,dt}\right) + \left(\frac{d}{dx}\cos(x)\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t)\,dt\right)$$

$$\cos(x)\cdot\cos(x)\cdot 1 + \left(-\sin(x)\cdot\sin(x)\cdot 1\right)$$

$$F'_1 = (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$F'_2 = (-\cos^2(x) + \sin^2(x)$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 2

iii) Para $a \in \mathbb{R}$, determine el siguiente límite

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{x^2 - a^2} \int_a^x e^{sen(t)}\, dt \right).$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 2

CACHORR@ 404

Ejercicio 3

Use la definición de Riemann para calcular la integral: $\int_0^2 (4x^2 + x + 5)\,dx$

Use la definición de Riemann para calcular la integral: $\int_0^2 (4x^2+x+5)dx$ $\overset{a}{[0},\overset{b}{2]}$

1) Δx
2) x_i
3) $\Delta x \cdot f(x_i)$

Paso1)

$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

Paso2)

$x_i = a + \Delta x \cdot i = 0 + \frac{2}{n} \cdot i = \frac{2i}{n}$

Paso3) → suma de Riemann

$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right) + 5\right)$

$\sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Aplicando la def. de Integral defi:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right) + 5\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i^2}{n^2} + \frac{2i}{n} + 5\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{16}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + 5n\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\left(\frac{16}{\cancel{n^2}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right) + \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{n}} \cdot \left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right)\right) + 5n\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\frac{\overset{8}{\cancel{16}}(n+1)(2n+1)}{2\,\cancel{6}n} + (n+1) + 5n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{16(n+1)(2n+1)}{3n^2} + \frac{2(n+1)}{n} + 10$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{16(2n^2+n+2n+1)}{3n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}+\cancel{2}}{\cancel{n}} \Big/ \cdot \frac{n}{n} + 10 =$

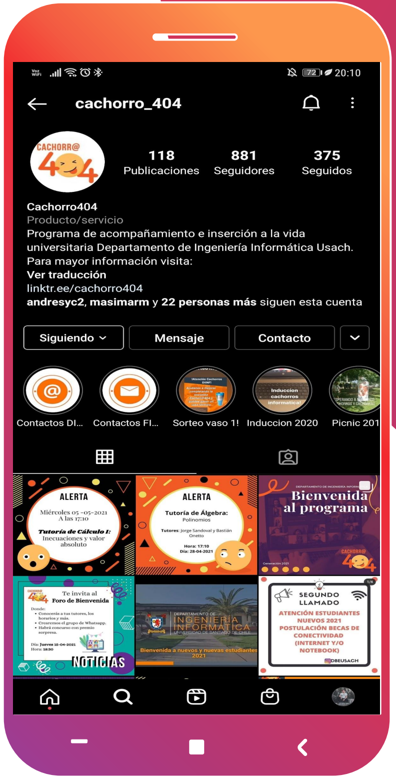
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{32n^2+16n+32n+16}{3n^2} \Big/ \cdot \frac{n^2}{n^2} + 2 + 10 =$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{32\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \cancel{\frac{16n}{n^2}}^{0} + \cancel{\frac{32n}{n^2}}^{0} + \cancel{\frac{16}{n^2}}^{0}}{\frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}} = \frac{32}{3} + 2 + 10$

$= \frac{32+6+30}{3} = \frac{68}{3}$ //

Síguenos en instagram!

@cachorro404



CACHORR@ 404

¡Gracias por asistir!

Agradecimientos a Ricardo Carvajal Barrios