Índice

1 Agradecimientos

Escribir agradecimientos acá.

2 Preparando PEP 1

2.1 Teoría

Definición 2.1. **(Suma de Riemann)** Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

una partición del intervalo $[a, b]$. Una suma de Riemann de f en el intervalo $[a, b]$ usando la partición $\mathcal{P}$ se define por

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{j=1^n} f(c_j)\Delta x_j,$$

donde $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ y $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

Definición 2.2. **(Integral definida)** La integral de Riemann una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} S_{\mathcal{P}}(f),$$

siempre que tal límite exista.

Observación 2.3. En la práctica la definición de la integral resulta muy abstracta. Sin embargo, siempre que uno esté seguro que la integral exista, podemos escoger la partición $\mathcal{P}$ y el conjunto $\{c_j\}$ a gusto. Escogiendo la partición de intervalos equiespaciados y el conjunto $\{c_j\}$ como los extremos de los intervalos se obtiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)$$

Teorema 2.4. **(Teorema Fundamental del Cálculo)** Sea f una función continua en $[a, b]$ y F una primitiva para f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Luego,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Observación 2.5. La notación $\int f(x)dx$ (sin límites de integración) se conoce como integral indefinida y hace referencia al cálculo de primitivas. Por ejemplo,

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C.$$

Proposición 2.6. **(Área entre curvas)** El área entre las curvas definidas por dos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sobre el intervalo $[a, b]$ se puede calcular usando la expresión

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Teorema 2.7. **(Cambios de Variables)**

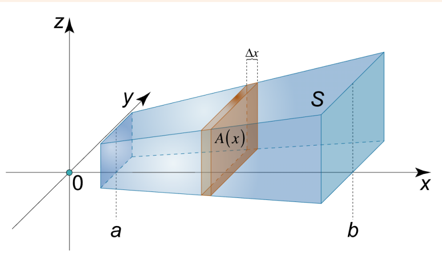
$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du\,.$$

Teorema 2.8. **(Integración por Partes)**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx\,.$$

Proposición 2.9. **(Volúmenes por secciones transversales)** Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en el eje x pertenezcan al intervalo $[a, b]$ y tal que sus secciones transversales respecto al eje x midan $A(x)$ (ver figura). Luego, el volúmen del sólido S es

$$\text{vol}(S) = \int_a^b A(x)\, dx.$$



Observación 2.10. Un ejemplo clásico de lo anterior se obtiene cuando el sólido se genera por la revolución de una curva. Es importante recalcar que en estos casos, la función $A(x)$ representa el área de un círculo, por lo que siempre tendrá la forma $\pi r^2(x)$ para una función $r(x)$ apropiada.

Tabla de Primitivas

En cada caso, $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$
$x^a, a \neq -1$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
x^{-1}	$\ln(x)$
$\cos(ax), a \neq 0$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$
$\sin(ax), a \neq 0$	$\dfrac{-\cos(ax)}{a}$

$f(x)$	$F(x)$
$\sec^2(x)$	$\tan(x)$
$e^{ax}, a \neq 0$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\dfrac{h'(x)}{h(x)}, h \in C^1$	$\ln(\lvert h(x)\rvert)$

Tabla de Sustituciones Trigonométricas

Si aparece	Use la sustitución
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin(t)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan(t)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec(t)$

2.2 Ejercicios

1. (a) Compruebe que
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}\,dx.$$
Solución: Primero veamos que si $x\in[-1,1]$, entonces $x^4\leq x^2$. Luego,
$$\begin{aligned} 1-x^2 &\leq 1-x^4 \\ \sqrt{1-x^2} &\leq \sqrt{1-x^4} \end{aligned}$$
Se concluye que:
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}dx$$
(b) Use que $x^2+y^2=1$ es la ecuación de un círculo de radio 1 centrado en el origen para argumentar geométricamente la igualdad
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$
Solución: Como $x^2+y^2=1$ es la ecuación de un círculo $y=\sqrt{1-x^2}$ representa la función que grafíca la mitad superior del mismo, de donde
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{\text{Área del círculo}}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
(c) Concluya que
$$\frac{\pi}{2}\leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}\,dx \leq 2\,.$$
Solución: Por la parte (a) y (b)
$$\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}dx$$
Por otro lado si $x\in[-1,1]$, $\sqrt{1-x^2}\leq 1$, de donde
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^4}dx \leq \int_{-1}^{1}1dx = 2$$

2. Sea $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por
$$F(y)=\int_{1}^{y}\int_{x+2}^{x^2} x^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\,dx.$$

(a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

Solución: Determinamos los intervalos para los que $F' > 0$ y $F' \leq 0$. Usando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$F'(y) = \int_{y+2}^{y^2} y^y e^{-t^2} dt$$

Ahora veamos que como $y^y > 0$ y $e^{-t^2} > 0$, la única forma en que $F' < 0$ es que $y+2 > y^2$, es decir, $F' < 0$ solo si $y \in (0,2)$. Se concluye entonces que F es creciente si $y > 2$ y decreciente si $0 < y < 2$.

(b) Calcule $F''(2)$.

Usando la regla del producto y el teorema fundamental del cálculo se sigue que:

$$\begin{aligned}
F''(2) &= \frac{d}{dy} y^y \int_{y+2}^{y^2} e^{-t^2} dt \\
&= \left(\frac{d}{dy} y^y\right) \cdot \int_{y+2}^{y^2} e^{-t^2} dt + y^y \cdot \frac{d}{dy} \int_{y+2}^{y^2} e^{-t^2} dt \\
&= \left(\frac{d}{dy} y^y\right) \cdot \int_{y+2}^{y^2} e^{-t^2} dt + y^y \left(e^{-(y^2)^2}\right) \cdot 2y - e^{-(y+2)^2} \cdot 1
\end{aligned}$$

Evaluando en $y = 2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
F''(2) &= \left(\frac{d}{dy} y^y\right)(2) \int_4^4 e^{-t^2} dt + 2^2 \left(e^{-(2^2)^2} \cdot 2 \cdot 2 - e^{-(2+2)^2} \cdot 1\right) \\
&= \left(\frac{d}{dy} y^y\right)(2) \cdot 0 + 4(e^{-16} \cdot 4 - e^{-16}) \\
&= 12e^{-16}
\end{aligned}$$

3. Calcule la siguiente integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(x)} dx$$

Solución: Primero veamos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(x)} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 - cos(x)}{\sin^2(x)} dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx
\end{aligned}$$

Para la primera integral recuerde que, así como

$$\frac{d}{dt}\tan(x) = \sec^2(x), \ \frac{d}{dt}\cot(x) = -^2(x)$$

.

Así,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sec^2(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} {}^2(x)dx = -\cot(x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -1 + 1 = 0$$

Para la segunda integral usaremos el cambio de variable $\sin(x) = u$, $\cos(x)dx = du$. Luego,

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{\sin^{-1}(x)}{-1} + c$$

Y así,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx = \left.\frac{\sin^{-3}(x)}{-3}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{-1}}{-1} + \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{-1}}{-1} = 0$$

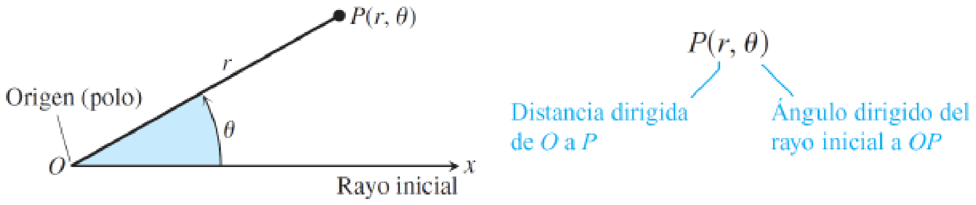
Se concluye entonces que sumando (2) y (3) que:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx = 0$$

3 Preparando PEP 2

3.1 Teoría

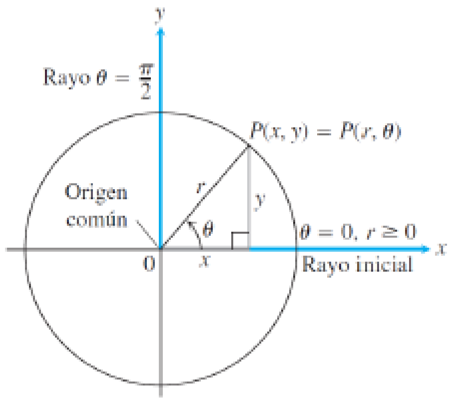
Definición 3.1. **(Coordenadas polares)** Si fijamos un origen O (llamado polo) y un rayo inicial desde O, se puede localizar cada punto P asignándole una pareja de coordenadas polares (r, θ) donde r es la distancia dirigida de O a P y θ es el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo OP.



Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

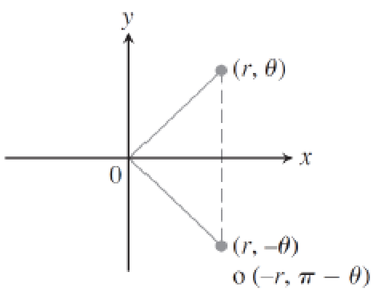
Si colocamos los dos orígenes juntos y tomamos el rayo inicial como eje x positivo y el rayo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ como el eje y positivo, entonces la relación entre los sistemas de coordenadas es:

$$x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad x^2 + y^2 = r^2; \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

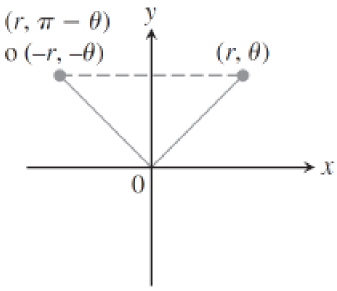


Simetría (Pruebas de simetría para graficas polares)

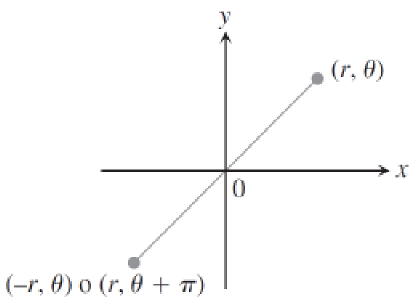
1. Simetría con respecto al eje x: Si el punto (r, θ) está en la gráfica, el punto $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$ se halla sobre la gráfica.
2. Simetría con respecto al eje y: Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, el punto $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ se halla sobre la gráfica.
3. Simetría con respecto al origen: Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces el punto $(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$ se halla sobre la gráfica.



(a) Con respecto al eje x



(b) Con respecto al eje y



(c) Con respecto al origen

Pendiente de la curva $r = f(\theta)$

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

Teorema 3.2. **(Área en coordenadas polares)** El área de la región entre el polo y la curva $r = f(\theta)$ con $\theta \in [\alpha, \beta]$ es dada por la integral de la diferencial del área:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

Área de la región acotada por $r_1 = f(\theta)$ **y** $r_2 = g(\theta)$
El área de la región que se encuentra entre dos curvas polares r_1 y r_2 está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

Teorema 3.3. **(Longitud de** $r = f(\theta)$**)** Si $r = f(\theta)$ tiene derivada continua para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y si el punto $P(r, \theta)$ traza la curva $r = f(\theta)$ exactamente una sola vez al variar θ de α a β, entonces la longitud de la curva es:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

Definición 3.4. **(Integral impropia tipo I)** Las integrales con límites de integración infinitos son integrales impropias del tipo I. Esto es:

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

   donde c es cualquier número real.

En cada caso, si el límite es finito, decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia **diverge**.

Definición 3.5. **(Integral impropia tipo II)** Las integrales de funciones que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración son integrales impropias de tipo II. Esto es:

1. Si $f(x)$ es continua en $(a,b]$ y es discontinua en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a,b)$ y es discontinua en b, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

3. Si $f(x)$ es discontinua en c, donde $a < c < b$, y es continua en $[a,c)\cup(c,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

En cada caso, si el límite es finito decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral **diverge**.

Observación 3.6. La diferencia fundamental entre los tipos de integrales impropias es donde está el problema que nos impide usar el *Teorema Fundamental del Cálculo*, por ejemplo, si el problema está en la función será de tipo I, mientras que si el problema está en el intervalo, será de tipo II.

Teorema 3.7. **(Criterio de comparación directa)** Sean f y g continuas en $[a,\infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$. Entonces,

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge.
2. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Teorema 3.8. **(Criterio de comparación en el límite)** Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Con $0 < L < \infty$. Entonces, las integrales

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ y } \int_a^\infty g(x)dx$$

ambas convergen o ambas divergen.

Definición 3.9. **(Series numéricas)** Una serie infinita S es la suma de una sucesión infinita de números, es decir:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

La suma de los n primeros términos es una suma finita, la cual se denomina n-ésima suma parcial.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie converge y que su suma es L, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

Teorema 3.10. **(Serie Geométrica)** La serie geométrica

$$\sum_{i=1}^{\infty} a \cdot r^{i-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica es divergente.

Teorema 3.11. **(Serie telescópica)** Una serie telescópica $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} - a_i$ es convergente si y solo si a_n es convergente y en tal caso:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1$$

Teorema 3.12. Si la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Observación 3.13. **(Test de la divergencia)** El teorema anterior es equivalente a:

Si el $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es divergente.

Teorema 3.14. **(Criterio de la integral)** Sea a_n una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua de x para toda $x \geq N$ (N es un entero positivo). Entonces, la serie $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ ambas convergen o ambas divergen. ee

Observación 3.15. Para probar que f es decreciente recuerde que una condición necesaria es que:

$$f'(x) < 0 \text{ para } n > N$$

Teorema 3.16. **(Residuo [Estimación del residuo])**
Suponga que a_k es una sucesión de términos positivos con $a_k = f(k)$, donde f es una función positiva, decreciente y continua de x para toda $x \geq n$ y que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge a S. Entonces el residuo $R_n = S - s_n$ satisface las desigualdades

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$$

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq S \leq s_n + \int_n^{\infty} f(x)dx$$

Teorema 3.17. **(Criterio de comparación en el límite)**
Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \geq N$ con N un número entero. Entonces:

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen ambas.

2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Observación 3.18. Para estudiar una serie usando comparación al límite es necesario conocer el comportamiento de alguna otra serie de antemano.
Las series típicas que se usan para comparar son las series tipo p, es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

La cual converge si y solo si $p > 1$.

Teorema 3.19. **(Criterio de comparación)**
Supongamos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$; $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ y $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i$ son series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N, $d_n \leq a_n \leq c_n$ para todo $n > N$. Entonces:

1. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ converge, entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ también converge.

2. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i$ diverge, entonces $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ también diverge.

3.2 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Pruebe que las curvas $r = a\sin(\theta)$ y $r = a\cos(\theta)$ se cortan en ángulos rectos.

Solución: Primero veamos que las curvas se intersectan para los ángulos θ tales que

$$a\sin(\theta) = a\cos(\theta),$$

es decir, $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.
Ahora veamos que para probar que las curvas se intersectan ortogonalmente, bastará probar que sus rectas tangentes en los puntos de intersección entre las curvas son ortogonales. Es decir, que el producto de sus pendientes es -1. Más aún, como las rectas tangentes tienen pendiente $\frac{dy}{dx}$ sigue que:

(a) La pendiente de la recta tangente a la curva $r = a\cos(\theta)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{r\cos(\theta) + r'\sin(\theta)}{-r\sin(\theta) + r'\cos(\theta)} \\ &= \frac{a\cos^2(\theta) - a\sin^2(\theta)}{-a\cos(\theta)\sin(\theta) - a\sin(\theta)\cos(\theta)} \\ &= -\frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{2\cos(\theta)\sin(\theta)} \\ &= -\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \\ &= -\text{cotan}(\theta).\end{aligned}$$

(b) La pendiente de la recta tangente a la curva $r = a\sin(\theta)$ es

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{r\cos(\theta) + r'\sin(\theta)}{-r\sin(\theta) + r'\cos(\theta)} \\ &= \frac{a\sin(\theta)\cos(\theta) + a\cos(\theta)\sin(\theta)}{-a\sin^2(\theta) + a\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} \\ &= \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \\ &= \tan(2\theta)\,.\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando las pendientes para $\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ se obtiene que

$$-\text{cotan}(2\theta) \cdot \tan(2\theta) = -1,$$

probando así lo pedido.

Ejercicio 3.2. i) Determine el área bajo la curva $y = 1/x^3$ desde $x = 1$ hasta $x = t$, y evalúe para $t = 10, 10^2$ y 10^3. Luego, determine el área total bajo esta curva en $x \geq 1$.

ii) Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia. Luego, evalúe la integral.

$$\int_1^\infty x^3 e^{-x^4}\, dx, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5}\, dx.$$

Solución:

(a) Para calcular la integral pedida note que

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x^3}\, dx &= \int_1^t x^{-3}\, dx \\ &= \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^t \\ &= \frac{t^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}\,.\end{aligned}$$

Para evaluar basta ver que

$$\begin{aligned}\int_1^1 0\frac{1}{x^3}\, dx &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 10^2} = \frac{99}{200}, \\ \int_1^{10^2} \frac{1}{x^3}\, dx &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 10^4} = \frac{9999}{20000}, \\ \int_1^{10^3} \frac{1}{x^3}\, dx &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 10^6} = \frac{999999}{2000000}.\end{aligned}$$

Finalmente para calcular el área bajo la curva en $x \in (1, \infty)$ debemos calcular el límite

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^3}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} \\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

(b) La primera integral es impropia debido a que el intervalo de integración tiene largo infinito. En este caso, por definición debemos calcular el límite

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} x^3e^{-x^4}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^3e^{-x^4}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left.\frac{-e^{-x^4}}{4}\right|_1^t\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{-e^{-t^4}}{4}+\frac{e^{-1}}{4}\\ &= \frac{1}{4e}\,.\end{aligned}$$

La siguiente integral es impropia por el mismo motivo. Por definición sigue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+5}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{x^2+5}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}\left.\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right|_t^0\\ &= \lim_{t\to-\infty}-\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variables trigonométrico $x=\sqrt{5}\tan(u)$ para calcular la primitiva de la integral dentro del límite.

Ejercicio 3.3. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j!}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}3^k}$

c) $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(i)}$

Solución:

a) Probaremos que la serie converge usando comparación directa. Para esto, primero note que si $j\in\mathbb{N}$ entonces

$$j\le j!,$$

de donde

$$2^{-j!}\le 2^{-j}\,.$$

Finalmente, sigue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j!} \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{1-2^{-1}} - 1 = 1\,,$$

donde hemos usado la serie geométrica.

b) Probaremos que la serie converge usando el criterio de la raíz. Para esto, primero note que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}3^k}\right)^{1/k} &= \frac{1}{3}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{1/k}}\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}\right)^{1/2}\\ &= \frac{1}{3} < 1,\end{aligned}$$

de donde por el criterio de la raíz, se prueba que la serie es convergente.

c) Para la tercera serie usaremos comparación directa juto al criterio integral. Primero veamos que si $i \in \mathbb{N}$

$$\ln(i) \leq i\ln(i)\,,$$

de donde

$$\frac{1}{i\ln(i)} \leq \frac{1}{\ln(i)}\,,$$

por lo que si probamos que la serie

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\ln(i)}$$

es divergente, podremos concluir que la serie original también debe serlo.

Para probar que la nueva serie es divergente basta notar que la sucesión $a_i = \dfrac{1}{i\ln(i)}$ es positiva, decreciente y

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln(x)}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\ln(\ln(x))\Big|_2^t\\ &= \infty,\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variables $u = \ln(x)$ para calcular la primitiva de la integral dentro del límite, y se comprueba por el criterio integral que la serie es divergente.