Universidad de Santiago de Chile
Programa de Acceso Inclusivo, Equidad y Permanencia
Programa de Acceso a la Educación Superior
*Segundo Semestre 2022*

# Preparando la PEP 2

**Física II**

**Profesor Rubén Montecinos**

1.- Dos bloques de masa M y 3M se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se une a uno de ellos y los bloques se empujan juntos, con el resorte entre ellos. Una cuerda que inicialmente los mantiene unidos se quema y después de eso el bloque de masa 3M se mueve hacia la derecha con rapidez de 2 m/seg. a) Cual es la rapidez del bloque de masa M?
b) Encuentre la energía elástica original en el resorte si $M = 0,35$Kg.

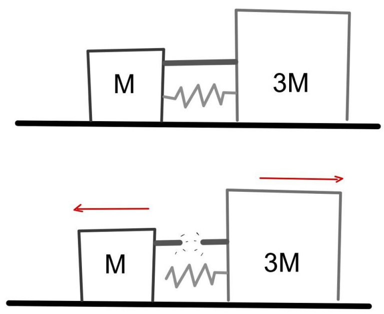


Figure 1: Esquema problema 2

$M =$ Masa del bloque pequeño de la izquierda.
$V_M =$ Velocidad del bloque pequeño de la izquierda.
3M = Masa del bloque grande de la derecha.
$V_{3M} =$ Velocidad del bloque grande de la derecha. $= 02$ m/seg.

$$-MV_M = 3M \cdot V_{3M}$$

Se cancela M a ambos lados de la igualdad

$$-V_M = 3V_{3M}$$
$$V_M = -6 \text{ m/seg}$$

b) Encuentre la energía elástica original en el resorte si $M = 0,35$Kg.

$$\frac{1}{2}\mathrm{kx}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\mathrm{V_M}\right)^2 + \frac{1}{2}3\mathrm{M}\left(\mathrm{V_{3M}}\right)^2$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{kx}^2 = \frac{1}{2}0,35(-6)^2 + \frac{1}{2}3^*0,35(2)^2$$
$$\frac{1}{2}\ \mathrm{kx} = 8,4J$$

2.- El momento cinético de un volante macizo, cuyo momento de inercia es $0,125$ kgm$^2$, disminuye desde 3 hasta 2 kg $\cdot$ m$^2$/s en un periodo de $1,5$ s.
a) ¿Cuál es el torque promedio que actúa sobre el volante durante este tiempo?
b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿cuántas revoluciones habrá girado el volante?
c) ¿Cuánto trabajo se habrá efectuado?

Como el torque (o momento de las fuerzas exteriores) es igual a la variación del momento angular

$$M = \frac{L_1 - L_2}{t} = \frac{2}{3} Kgm^2/s^2$$

Como el torque es constante, la aceleración angular es constante, el movimiento es circular uniformemente acelerado. Por tanto, si conocemos la aceleración angular y la velocidad angular inicial, podríamos calcular el ángulo girado por el volante. La aceleración angular se calcula a partir de

$$M = I\alpha$$

Donde M es el torque total o momento total de las fuerzas exteriores. Directamente se obtiene

$$\alpha = M/I = \frac{16}{3} rad/\ \mathrm{s}^{-2}$$

Por otra parte,

$$L_0 = I\omega_0$$

Donde $L_0$ y $\omega_0$ son, respectivamente, el momento angular y la velocidad angular iniciales. Por lo tanto,

$$\omega_0 = \frac{L_0}{I} = 24\frac{rad}{s}$$

Usando las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado, obtenemos:

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 30rad$$

Por tanto, el número de revoluciones será $30/(2\pi)$.

El trabajo efectuado será igual a la variación de la energía cinética del sistema.

$$W = E_{c1} - E_{c2} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Necesitamos saber el valor de la velocidad angular final $\omega_f$, que se puede calcular de la misma manera que hemos calculado la inicial anteriormente, con lo que

$$\omega_f = \frac{L_F}{I} = 16\frac{rad}{s}$$

Por lo tanto, $W = 20J$

3.- Un disco plano uniforme de masa $M$ y radio $R$, y situado en un plano vertical, gira en torno a un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su centro de masas con velocidad angular $\omega_0$.
a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuánto vale su momento cinético?
b) Del borde del disco se desprende un pequeño trozo de masa $m$, en un instante tal que el trozo se eleva verticalmente desde el punto en que se rompió. ¿Cuánto sube el trozo antes de empezar a caer?
c) ¿Cuál es la velocidad angular del disco una vez que ha perdido el trozo? ¿Cuál es la energía cinética final del disco?

Sabemos que

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

$$L_i = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

El trozo que se desprende del borde del disco tiene una velocidad en el momento de desprenderse

$$V_0 = R\omega_0$$

El punto más alto de su trayectoria será aquél en que su velocidad se anule,

$$v = R\omega_0 - gt = 0$$

Esto se verifica para

$$t = R\frac{\omega_0}{g}$$

Sabiendo el tiempo que tarda en subir podemos calcular el espacio recorrido:

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}$$

Como no hay fuerzas exteriores el momento angular se conserva y el momento angular final será el mismo que al principio. Teniendo en cuenta que el momento de inercia de la masa $m$ que está a una distancia $R$ es $mR^2$, podemos calcular la velocidad angular final usando:

$$I\omega_0 = I_f\omega_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}MR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{M}{M-2m}\omega_0$$

La energía cinética final es, pues:

$$E_{cf} = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{M^2R^2}{M-2m}\right)\omega_0^2$$

4.- El sistema mostrado en la figura 2 está formado por dos bloques de masas $m_1$=12kg y $m_2$=38kg que se mueven hacia la derecha. Los bloques están unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea de masa M=146Kg y radio R=0.7m. Los bloques se mueven sobre un plano inclinado y el coeficiente de roce en todas las superficies vale $\mu_k = 0.17$. Calcular: a) la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio $R$ y masa $M$, cuyo momento de Inercia con respecto a su eje de giro vale $I = \frac{MR^2}{2}$
b) la aceleración lineal de cada masa
c) las tensiones en la cuerda

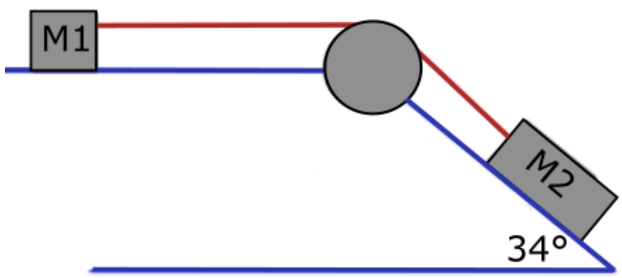


Figure 2: Esquema problema 4

La figura 3 muestra el diagrama de cuerpo libre para cada masa, incluida la polea.

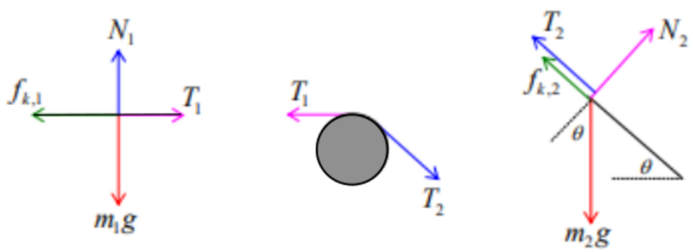


Figure 3: DCL problema 4

Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a los bloques que se desplazan. En componentes, se tiene, bloque de masa $m_1$ : Eje $X$ :

$$T_1 - \mu_k N_1 = m_1 a$$

Eje $Y$ :

$$N_1 = m_1 g$$

Reemplazando $N_1$ podemos escribir

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a$$

Bloque de masa $m_2$ : Eje $X$ : Para esta masa usamos ejes inclinados, de modo que el eje $X$ coincide con el plano inclinado.

$$m_2 g \sin\theta - \mu_k N_2 - T_2 = m_2 a$$

Eje $Y$ :

$$N_2 = m_2 g \cos\theta$$

Reemplazando $N_2$, podemos escribir

$$m_2 g \left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right) - T_2 = m_2 a$$

Para la polea de masa $M$ que gira respecto a un eje fijo en su centro:

Consideraremos positivos los torques que tienden a hacer rotar a la polea en el sentido de giro de la polea. Torque de $T_1$ :

$$\tau_1 = -T_1 R$$

donde $R$ es el brazo de la tensión $T_1$. El torque es negativo porque tiende a hacer girar a la polea en dirección contraria al movimiento real. Torque de $T_2$ :

$$\tau_2 = T_2 R$$

donde $R$ es el brazo de la tensión $T_2$. El torque es positivo porque tiende a hacer girar a la polea en dirección al movimiento real.

La ecuación análoga a la segunda ley de Newton para rotación respecto a un eje fijo, viene dada por

$$\tau_1 + \tau_2 = I\alpha$$

Reemplazando los resultados, se tiene,

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

Por otra parte, sabemos que la aceleración tangencial $a_T$ del borde de la polea de radio $R$ está relacionada con la aceleración angular $\alpha$ de la polea, a través de la siguiente ecuación:

$$a_T = \alpha R$$

Pero, la aceleración tangencial $a_T$ de un punto del borde de la polea es igual a la aceleración lineal $a$ de los bloques, es decir, $a_T = a$. Luego, la aceleración angular se puede expresar como,

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

El momento de inercia $I$ para la polea con respecto a su eje de giro vale, $I = \frac{MR^2}{2}$. Reemplazando I y $\alpha$, podemos escribir:

$$\left(T_2 - T_1\right) R = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$

Simplificando, se tiene

$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2} a$$

En resumen, las ecuaciones que describen el movimiento del sistema, son:

$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g (\sin\theta - \mu_k \cos\theta) - T_2 = m_2 a$$
$$T_2 - T_1 = \frac{M}{2} a$$

Usando los datos $m_1 = 12kg, m_2 = 38kg, M = 146kg, \mu_k = 0.17$ y $\theta = 34^0$, estas ecuaciones quedan,

$$T_1 - 19.992 = 12a$$
$$155.76 - T_2 = 38a$$
$$T_2 - T_1 = 73a$$

Si sumamos todas las ecuaciones entre sí, se eliminan las tensiones (son fuerzas de acción y reacción) y se obtiene la aceleración lineal de cada una de las masas, la cual a su vez es la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea de radio $R$ :

$$a = 1.104 \text{ m/s}^2$$

Cálculo de las tensiones $T_1$ y $T_2$ :

Podemos obtener $T_1$ usando la aceleración obtenida:

$$T_1 = 33,25N$$

Y $T_2$ :

$$T_2 = 113.81N$$

Claramente las tensiones a cada lado de la polea no son iguales, a diferencia del caso de las poleas ideales.

5.- El sistema de poleas acopladas mostrado en la figura tiene un momento de inercia $I = 100kgm^2$ respecto a su eje de giro. Los radios son $R_1 = 0.2m$ y $R_2 = 0.7m$. Calcular la diferencia de tensiones $\Delta T \equiv T_2 - T_1$ entre ambos lados de la cuerda cuando el bloque de masa $m = 500kg$ desciende con aceleración constante $a = 1.8m/s^2$.

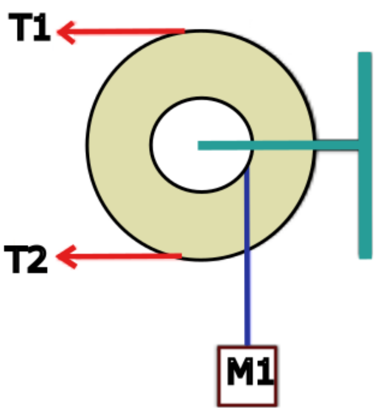


Figure 4: Esquema problema 5

El diagrama de cuerpo libre de la polea y para el bloque en la figura 5

Ahora apliquemos la segunda ley de Newton a la masa $m$ que desciende con aceleración $a$ :

$$mg - T = ma$$

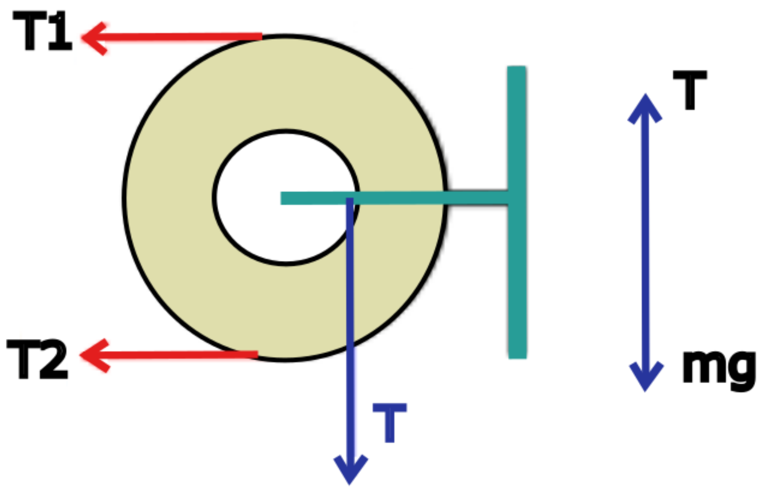


Figure 5: DCL problema 5

Calculemos ahora cada uno de los torques respecto al eje de giro de la polea, considerando positivos los torques que tienden a hacer girar a la polea en la dirección del movimiento de los punteros del reloj, es decir, en la dirección en que desciende la masa $m$.

Torque de $T_1$ :

$$\tau_{T_1} = -T_1 b_{T_1}$$

El torque es negativo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección contraria al movimiento de los punteros del reloj. $b_{T_1}$ es el brazo de la fuerza $T_1$, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_{T_1} = R_2$$

luego,

$$\tau_{T_1} = -T_1 R_2$$

Torque de $T_2$ :

$$\tau_{T_2} = +T_2 b_{T_2}$$

El torque es positivo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección del movimiento de los punteros del reloj, $b_{T_2}$ es el brazo de la fuerza $T_2$, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_{T_2} = R_2$$

luego,

$$\tau_{T_2} = +T_2 R_2$$

Torque de $T$ :

$$\tau_T = +T b_T$$

El torque es positivo porque tiende a hacer girar al cuerpo en dirección del movimiento de los punteros del reloj, $b_T$ es el brazo de la fuerza $T_2$, es decir, es la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al eje de giro. En este caso

$$b_{\bar{T}} = R_1$$

luego,

$$\tau_T = +T R_1$$

Usando los resultados de los torques, podemos escribir la ecuación dinámica rotacional como

$$-T_1 R_2 + T_2 R_2 + T R_1 = I\alpha$$

reordenando, se tiene,

$$(T_2 - T_1)\, R_2 = I\alpha - TR_1$$

Insertando la tensión $T$, nos queda

$$(T_2 - T_1) = \frac{I}{R_2}\alpha - m(g-a)\frac{R_1}{R_2}$$

Por otra parte, sabemos que la aceleración tangencial $a_T$ está relacionada con la aceleración angular $\alpha$ a través de la expresión

$$a_T = \alpha R$$

donde $R$ es la distancia desde el eje de giro al punto del borde donde queremos medir la aceleración tangencial. En nuestro caso, la aceleración tangencial de un punto del borde del resalte de radio $R_1$ viene dada por

$$a_T = \alpha R_1$$

pero esta aceleración tangencial $a_T$ es justo la aceleración lineal $a$ de la masa $m$ que cuelga de la cuerda, por lo tanto,

$$a = a_T = \alpha R_1$$

Despejando $\alpha$ en función de $a$, se tiene:

$$\alpha = \frac{a}{R_1}$$

Numéricamente, la aceleración angular vale,

$$\alpha = \frac{1.8 \text{ m/s}^2}{0.2 \text{ m}} = 9\text{rad/s}^2$$

Usando los datos $R_1 = 0.2m, R_2 = 0.7m, I = 100kgm^2, a = 1.8m/s^2$, se tien

$$(T_2 - T_1) = 142.86N$$

6.- Se tiene un sistema de dos poleas acopladas de radios $R_1 = 0.3m$ y $R_2 = 0.4m$, las cuales rotan respecto a su propio eje fijo. La pequeña polea de radio $R_1$ tiene masa despreciable, por lo tanto, para la combinación de poleas se considera un único momento de inercia $I_1 = 2.3kgm^2$. De la polea de radio $R_2$ cuelga una masa $m_1 = 1.7kg$, y de la polea de radio $R_1$ sale una cuerda que se conecta con otra polea de radio $R_3 = 0.2m$ y momento de inercia $I_2 = 1.2kgm^2$, de la cual cuelga una masa $m_2 = 4.6kg$, como se muestra en la figura. Hallar:
a) las aceleraciones angulares $\alpha_1$ y $\alpha_2$
b) las tensiones en las cuerdas.

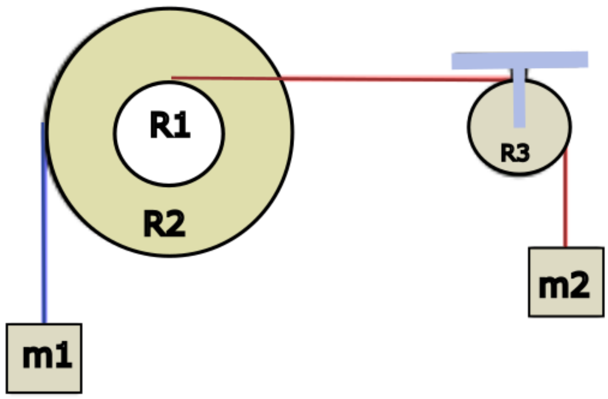


Figure 6: Esquema problema 6

La figura 7 muestra el diagrama de cuerpo libre de cada bloque y de cada polea.

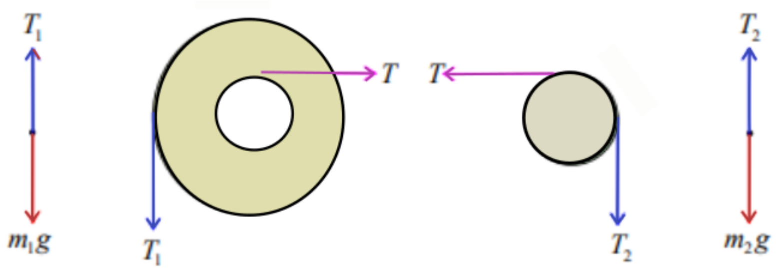


Figure 7: DCL problema 6

Aplicamos la segunda ley de Newton a las masas $m_1$ y $m_2$ que se trasladan:
*Masa* $m_1$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

La aceleración lineal $a_1$ es igual a la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea izquierda de radio $R_2$ que gira con aceleración angular $\alpha_1$,

$$a_1 = \alpha_1 R_2$$

luego

$$T_1 - m_1 g = m_1 \alpha_1 R_2$$

*Masa* $m_2$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

La aceleración lineal $a_2$ es igual a la aceleración tangencial de un punto del borde de la polea derecha de radio $R_3$ que gira con aceleración angular $\alpha_2$,

$$a_2 = \alpha_2 R_3$$

luego

$$m_2 g - T_2 = m_2 \alpha_2 R_3$$

Ahora aplicamos el análogo de la segunda ley de Newton para el caso rotacional a las dos poleas. El origen de torques de cada polea es el centro de la polea donde se encuentra el eje de giro.

*Polea izquierda que gira con aceleración angular* $\alpha_1$
Torque de $T_1$

$$\tau_{T_1} = -T_1 R_2$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_{T_1} = R_2$. Este torque es negativo porque tiende a hacer girar la polea izquierda en sentido contrario al sentido positivo.
Torque de $T$

$$\tau_T = T R_1$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_T = R_1$. Este torque es positivo porque tiende a hacer girar la polea izquierda en el sentido elegido como positivo. La ecuación análoga a la segunda ley de Newton queda

$$T R_1 - T_1 R_2 = I_1 \alpha_1$$

donde $I_1$ es el momento de inercia de la polea izquierda que gira con aceleración angular $\alpha_1$

*Polea derecha que gira con aceleración angular* $\alpha_2$.
Torque de $T_2$

$$\tau_{T_2} = T_2 R_3$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_{T_2} = R_3$. Este torque es positivo porque tiende a hacer girar la polea derecha en el sentido positivo.
Torque de $T$

$$\tau_T = -TR_3$$

Donde el brazo de esta fuerza vale $b_T = R_3$. Este torque es negativo porque tiende a hacer girar la polea derecha en el sentido contrario al sentido elegido como positivo. La ecuación análoga a la segunda ley de Newton queda

$$T_2R_3 - TR_3 = I_2\alpha_2$$

donde $I_2$ es el momento de inercia de la polea derecha que gira con aceleración angular $\alpha_2$ Además se cumple la igualdad de las aceleraciones tangenciales de todos los puntos de la cuerda que lleva la tensión $T$ :

$$\alpha_1 R_1 = \alpha_2 R_3$$

Nótese que la aceleración angular $\alpha_1$ es la misma para las dos poleas acopladas de radios $R_1$ y $R_2$, pero que sus aceleraciones tangenciales son distintas según el radio. Reemplazando $\alpha_2 R_3 = \alpha_1 R_1$ se tiene

$$m_2 g - T_2 = m_2 R_1 \alpha_1$$

Ahora, reemplazando $\alpha_2$ en la relación, nos queda

$$T_2 - T = \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1$$

Ahora tenemos las cuatro relaciones en función de $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} T_1 - m_1 g &= m_1 R_2 \alpha_1 \\ T\frac{R_1}{R_2} - T_1 &= \frac{I_1}{R_2}\alpha_1 \\ m_2 g - T_2 &= m_2 R_1 \alpha_1 \\ T_2 - T &= \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1 \end{aligned}$$

Si sumamos las ecuaciones, se elimina $T_1$ y se obtiene $T$ en función de $\alpha_1$ :

$$T = \frac{R_2}{R_1}\left[m_1 g + \left(m_1 R_2 + \frac{I_1}{R_2}\right)\alpha_1\right]$$

Las otras dos ecuaciones si las sumamos, se elimina $T_2$ y se obtiene $T$ en función de $\alpha_1$ :

$$T = m_2 g - \left(m_2 R_1 + \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\right)\alpha_1$$

Igualando, se tiene

$$\alpha_1 = \frac{(m_2 R_1 - m_1 R_2)\, g}{\left[m_1 R_2^2 + m_2 R_1^2 + I_1 + \frac{I_2 R_1^2}{R_3^2}\right]}$$

Numéricamente, tenemos

$$\alpha_1 = 1.21\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

Obtenemos $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{R_1}{R_3} = 1.81\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

Luego, las tensiones en las cuerdas, se tiene que

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 (g + R_2 \alpha_1) \\ T_1 &= 17.5N \end{aligned}$$

Además

$$T_2 = m_2\left(g - R_1\alpha_1\right)$$
$$T_2 = 43.4N$$

Y Finalmente, se tiene

$$T = T_2 - \frac{I_2 R_1}{R_3^2}\alpha_1$$
$$T = 32.6N$$