



Nombre: _____ Sección: _____

Pep 1 (versión B) - con Pauta

1.- Considere la función

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \sqrt{3} \cdot x + y$$

i) Determine el conjunto $h^{-1}(\{0, \frac{1}{2}\})$.

Solución: $h^{-1}(\{0, \frac{1}{2}\})$ consiste de elementos $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $\sqrt{3}x + y = 0$ o $\sqrt{3}x + y = \frac{1}{2}$.
(0,2 pts)

Sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{3}x + y = 0$. Entonces $\sqrt{3}x = -y$.

Si $x = 0$, entonces $y = 0$, y efectivamente $\sqrt{3}0 + 0 = 0$. (0,1 pts por considerar este caso por separado)

Si $x \neq 0$, entonces $\sqrt{3} = \frac{-y}{x} \in \mathbb{Q}$, lo que no es posible, ya que $\sqrt{3}$ no es racional. (0,2 pts)

Sea ahora $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{3}x + y = \frac{1}{2}$. Entonces $\sqrt{3}x = -y + \frac{1}{2}$.

Si $x = 0$, entonces $x = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, lo que no es posible. (0,1 pts)

Si $x \neq 0$, entonces $\sqrt{2} = \frac{1-2y}{2x} \in \mathbb{Q}$, lo que tampoco es posible. (0,2 pts)

Por ende $h^{-1}(\{0, \frac{1}{2}\}) = \{(0, 0)\}$. (0,2 pts)

ii) ¿Es h inyectiva? Justifique.

Solución: Si, h es inyectiva: (0,1 pts para adivinanza correcta)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, es decir $\sqrt{3}x_1 + y_1 = \sqrt{3}x_2 + y_2$. De eso queremos concluir que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. (0,2 pts si se nota que el alumno sabe como debería justificar su adivinanza - sea correcta o falsa)

$\sqrt{3}x_1 + y_1 = \sqrt{3}x_2 + y_2$ implica que $0 = \sqrt{3}(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$. (0,1 puntos)

Usando los mismos argumentos de antes, sabemos que eso es solamente posible si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. (0,1 puntos).

iii) ¿Es h sobreyectiva? Justifique.

Solución: No, la función no es sobreyectiva (0,1 pts para adivinanza correcta).

Para justificar eso, basta identificar algún número real que no puede ser escrito como $\sqrt{3}x + y$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. (0,2 pts si se nota que el alumno sabe como debería justificar su adivinanza - sea correcta o falsa)

Consideremos $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ (0,1 pts para identificar un buen candidato).

En la solución de parte (i) ya mostramos que $h^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = \emptyset$ (0,1 pts para justificar el candidato).

2.- Considere las funciones

$$f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \rightarrow x + 3$$

$$g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

i) ¿Es f inyectiva? ¿Es g inyectiva? Justifique.

Solución: g no es inyectiva. (0,1pt), ya que $g(0) = 0 = g(1)$ (0,2pt).

Pero f es inyectiva (0,1 pt), ya que $x_1 + 3 = x_2 + 3$ implica $x_1 = x_2$ para cualesquier $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$. (0,1 pt)

ii) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es g sobreyectiva? Justifique.

Solución: g es sobreyectiva (0,1 pt). Para cualquier $y \in \mathbb{N}_0$ pongamos $x = y + 2$. Si $y = 0$, entonces $x = 2$ y $f(2) = 0 = y$. Si $y > 0$, entonces $x > 1$ y $g(x) = x - 2 = y + 2 - 2 = y$. (0,2 pt).

Pero f no es sobreyectiva (0,1 pts), ya que $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x + 3 = 0\} = \emptyset$. (0,1 pts)

iii) De la regla de asignación de $f \circ f \circ g \circ g \circ g$ y de $g \circ g \circ g \circ f \circ f$.

Solución:

$$g \circ g \circ g \circ f \circ f(x) = g \circ g \circ g \circ f(x + 3) = g \circ g \circ g(x + 6) = g \circ g(x + 4) = g(x + 2) = x$$

.

(0,4 pts total - 0,1 pts por cada una de las últimas 4 igualdades correctas)

$$\begin{aligned} f \circ f \circ g \circ g \circ g(x) &= f \circ f \circ g \left(\begin{cases} g(0) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x - 2) & \text{si } x > 1 \end{cases} \right) = f \circ f \circ g \left(\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases} \right) \\ &= f \circ f \left(\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ x - 6 & \text{si } x > 5 \end{cases} \right) = f \left(\begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 5 \\ x - 3 & \text{si } x > 5 \end{cases} \right) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 5 \\ x & \text{si } x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

(0,5 pts total - 0,1 pts por igualdad correcta)

Obviamente $g \circ g \circ g \circ f \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}_0}$, y por tanto es biyectiva. (0,1 pts)

($f \circ f \circ g \circ g \circ g$ ni es inyectiva ni sobreyectiva.)

3.- Considere los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -75 \leq x \leq 75 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k + 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 25 \wedge \exists p \in \mathbb{Z} : x = 2p - 6\}$$

- i) Simplifique las descripciones comprensivas de A y B y determine los números $n(A)$, $n(B)$ y $n(A \cap B)$.

Solución:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -75 \leq x \leq 75 \wedge x \text{ es divisible por } 3\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 25 \wedge x \text{ es par}\}.$$

ya que cualquier entero par puede ser escrito de forma $2p - 6 = 2(p - 3)$ para algún $p \in \mathbb{Z}$ y cualquier numero divisible por 3 puede ser escrito por $3k + 6 = 3(k + 2)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $A \cap B$ consiste por los numeros enteros entre 0 y 25 divisible por 6.

Por tanto $n(A) = 51$, $n(B) = 25$ y $n(A \cap B) = 5$

(0,2 pts por valor correcto; todavía 0,1 pts por valor casi correcto donde se olvidó contar el cero. ! Pero ! Una simplificación sencilla incluso protege de este castigo; 0 pts por otros valores numericos.)

- ii) De fórmulas que calculen $n(A \cup B)$, $n(B - A)$ y $n(A \times B)$ a partir de las cantidades en i). Si no se le ocurre una fórmula, describa extensivamente el conjunto correspondiente y cuente su cardinalidad.

Solución:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 71.$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 20.$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 1275.$$

0,3 puntos por cada formula correcta (da lo mismo si valor correcto). En el caso de el valor por conteo es correcto sin formula, todavía 0,2 pts)

- iii) Defina una función inyectiva $f : B \rightarrow A$. (Justifique la buena definición y la inyectividad)

Solución: Podemos por ejemplo definir

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow A \\ x &\rightarrow 3x \end{aligned}$$

Esa función es bien definida, ya que $B \subseteq \mathbb{Z}$, por lo que $3x$ es un entero divisible por 3 para $x \in B$ (0,2 pts), y $0 \leq 3x \leq 75$ ya que $0 \leq x \leq 25$. (0,1 pts) Además f es inyectiva, ya que $3x_1 = 3x_2$ implica $x_1 = x_2$. (0,2 pts)

Observación: dependiendo de la naturaleza de la función, cuando la buena definición es más obvia, se puede dar los 0,3 pts también sin la necesidad de justificarla.