Índice

1 Agradecimientos

Escribir agradecimientos acá.

2 Geometría y Topología de $\mathbb{R}^n$

2.1 Teoría

Definición 2.1. Una recta en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto L de la forma

$$L = \{t \cdot d + p \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

donde $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ se llama vector director y $p \in L$ se llama vector posición.

Definición 2.2. Un plano en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto P de la forma

$$P = \{t \cdot d_1 + s \cdot d_2 + p \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\},$$

donde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n$ son un par de vectores l.i. conocidos como los diredctores del plano, y $p \in P$ es un vector posición.

Observación 2.3. Tanto en la definición de recta como en la de plano, note que los vectores directores y de posición **no** están únicamente definidos. Por ejemplo, note que

$$\{t \cdot e_1 + 0 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (2,0,0) - (3,0,0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Eje X}.$$

Observación 2.4. Dado un plano $P = \{t \cdot d_1 + s \cdot d_2 + p \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ uno puede definir un vector normal de la forma

$$n = d_1 \times d_2.$$

Con esta definición se puede demostrar que el plano se puede reescribir como

$$P = P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - p) \cdot n = 0\}.$$

En este caso diremos que la ecuación $(x - p) \cdot n = 0$ es la ecuación del plano.

Observación 2.5. Para la siguiente definición será útil introducir la siguiente notación

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - p|| < r\}.$$

Este conjunto se conoce como la bola abierta de radio r centrada en $p \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.6. Diremos que X es un punto interior de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ si existe algún $r > 0$ tal que

$$x \in B_r(x) \subset D\,.$$

Adicionalmente diremos que $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si todo punto $x \in D$ es interior.

2.2 Ejercicios

Ejercicio 2.1. Pruebe que las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &= \{t \cdot (3,2,1) + (3,2,1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{t \cdot (1,0,1) + (1,2,3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{t \cdot (1,2,3) + (-2,-4,-6) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

son coplanares y calcule dicho plano.

Solución: Primero veamos que $0 \in L_1$ y $0 \in L_3$, de donde L_1, L_3 viven en el plano P generado por ambas curvas. Para determinar dicho plano veamos que podemos usar los directores de las rectas L_1 y L_3 junto a la posición 0, es decir,

$$P = \{t \cdot (1,2,3) + s \cdot (3,2,1) + (0,0,) \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Para calcular la ecuación de dicho plano usaremos el vector normal

$$n = (1,2,3) \times (3,2,1) = (-4,8,-4),$$

de donde la ecuación del plano será

$$(x - 0) * n = 0.$$

Finalmente, veamos que

$$(t \cdot (1,0,1) + (1,2,3)) \cdot n = (t+1, 2, t+3) \cdot (-4,8,-4) = 0,$$

por lo que la recta L_2 satisface la ecuación del plano y se comprueba que las rectas son coplanares.

Ejercicio 2.2. Pruebe que las rectas

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{t\cdot(1,1,0)+(0,0,6)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\}\\
L_2 &= \{t\cdot(0,2,2)+(6,0,0)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\}\\
L_3 &= \{t\cdot(3,0,3)+(0,6,6)\in\mathbb{R}^3 \mid t\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

comparten un punto y que son ortogonales entre ellas.

Ejercicio 2.3. Hallar la ecuación de el/los planos que contienen a la recta $x = 2y = 3z-1$ tal/tales que se encuentra/n a distancias 2/7 del origen.

Solución: Buscamos un plano P con ecuación digamos $ax+by+cz=d$. Como la forma más rápida de ir del plano al origen es usando su normal fijaremos $n=(a,b,c)$ de modo que $||n|| = 2/7$, de donde

$$a^2+b^2+c^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2. \tag{1}$$

Notemos además que $n\in P$, de donde

$$a^2+b^2+c^2 = d,$$

y así $d = \left(\frac{2}{7}\right)^2$.
Sea $(x,y,z)\in L$ y $t\in\mathbb{R}$ tal que

$$t = x = 2y = 3z-1,$$

luego $(x,y,z) = (t, t/2, (t+1)/3)\in L\subset P$ y así

$$at + b\frac{t}{2} + c\frac{t+1}{3} = d,$$

para todo $t\in\mathbb{R}$, lo cual solo es posible si

$$c = \frac{12}{49} \text{ y } b = \frac{-8}{49} - 2a.$$

Reemplazando todo lo anterior en la ecuación (1) se obtienen dos soluciones para a, digamos a_-, a_+ y los planos que se piden serán

$$P_1 : a_-x + by + cz = d$$

$$P_2 : a_+x + by + cz = d$$

con b, c, d como antes.

3 Límites, Continuidad y Diferenciabilidad

3.1 Teoría

Definición 3.1. **(Límite de funciones escalares)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $p \in D$ un punto interior de D. Diremos que

$$\lim_{x \to p} f(x) = l\,,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||x - p|| < \delta \implies |f(x) - l\,| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Observación 3.2. La definición del límite resulta extremadamente difícil de manipular en muchos casos, por lo que usaremos las siguientes proposiciones para facilitar el cálculo de límites en algunos casos particulares.

Proposición 3.3. **(Coordenadas polares)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $x \in D$ un punto interior de D. Sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta) + a, r\sin(\theta) + b),$$

siempre que el límite en el lado derecho **no** dependa de θ.

Proposición 3.4. **(Teorema del Sandwich)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $x \in D$ un punto interior de D y $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ otra función tal que

$$\lim_{x\to p} g(x) = 0.$$

Si pasa que para cada x en una vecindad de p se tiene que

$$|f(x) - l| < g(x),$$

entonces

$$\lim_{xp} f(x) = l\,.$$

Observación 3.5. **(Límite de funcioens vectoriales)** La definición del límite puede ser extendida fácilmente a funciones vectoriales cambiando los valores absolutos por normas en la proposición (2), sin embargo en lo que respecta al cálculo es más fácil introducir el límite de funciones vectoriales coordenada a coordenada, es decir, si $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, p es un punto interior de D y

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

entonces definiremos el límite de la función F en p por

$$\lim_{x\to p} F(x) = \left(\lim_{x\to p} f_1(x), \lim_{x\to p} f_2(x), \dots, \lim_{x\to p} f_m(x) \right),$$

siempre que los m límites en la parte derecha de la ecuación existan.

Proposición 3.6. **(Continuidad)** Diremos que una función $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $p \in D$ si

$$\lim_{x\to p} F(x) = F(p).$$

Adicionalmente, diremos que F es continua si F es continua para todo $p \in D$.

Definición 3.7. **(Derivadas parciales)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $p \in D$. Se define la derivada parcial en torno a la coordenada j por

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p + he_j) - f(p)}{h},$$

donde $e_j = (0, \dots, 0, j, 0, \dots, 0)$ es el vector canónico j-avo y siempre que el límite exista. Finalmente se define el gradiente de f por

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(p)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(p)}{\partial x_m} \right).$$

Observación 3.8. Con frecuencia se usará la notación

$$f_{x_j}(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial x_j},$$

más aún, como en los casos con $n = 2$ o 3 las variables suelen estar denotadas por x, y y z es frecuente escribir f_x, f_y, f_z para las derivadas parciales respecto a sus coordenadas.

Definición 3.9. **(Plano tangente)** En el caso con $n = 2$ se define el plano tangente a $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(a, b, f(a, b))$ por el plano dado por la ecuación

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b),$$

siempre que las derivadas parciales existan.

Definición 3.10. **(Diferenciabilidad)** Diremos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (a, b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - z(x, y)}{||(x, y) - (a, b)||} = 0\,,$$

donde $z(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$ es la variable z en función de las variables (x, y) en la ecuación del plano tangente a f en $(a, b, f(a, b))$.
Adicionalmente, diremos que f es diferenciable si lo es para cada $(a, b) \in D$.

Definición 3.11. Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in D$ y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Diremos que la función F es clase C^1 en D, denotado por $F \in C^1(D)$, si tanto $f_1, \ldots, f_m$ como sus derivadas parciales respecto a todas sus coordenadas son funciones continuas en D.

Proposición 3.12. Si $f \in C^1(D)$, entonces f es diferenciable.

Definición 3.13. **(Derivadas direccionales)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $p \in D$. Se define la derivada parcial en la dirección de $d \in \mathbb{R}^n$, $||d|| = 1$, por

$$\frac{\partial f(p)}{\partial d} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p + hd) - f(p)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Observación 3.14. Con frecuencia se usarán las notaciones

$$f'(p; d) = J_d f(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial d}.$$

Observación 3.15. Note que toda derivada parcial es una derivada direccional en la dirección de uno de los ejes, sin embargo las derivadas direccionales **no** necesariamente son derivadas parciales.

Proposición 3.16. Si f es diferenciable en p, entonces

$$f'(p,d) = \nabla f(p) \cdot d$$

3.2 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcule el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ usando el teorema del sandwich.

Solución: Primero veamos que

$$\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = |5y| \cdot \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq |5y|.$$

Ahora, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5y = 0,$$

se concluye por el teorema del sandwich que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Ejercicio 3.2. Pruebe que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x > 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3.3. Pruebe que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es discontinua.

Solución: primero notemos que la función f es claramente continua en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ debido a que en tales punto f es localmente una función racional sin indeterminaciones por lo que el candidato natural para determinar la discontinuidad debe ser el origen.

Considerando lo anterior, estamos interesados en demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

para esto basta ver que tal límite no existe, ya que si existiera en particular sería igual a través de cualquier camino que va al origen, sin embargo considerando los camino con parametrizaciones $(t,0)$ y $(0,t)$ se obtienen los límites

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+0^2} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0^2}{0^2+t^2} = 0$$

los cuales son cláramente distintos, probando así que el límite no existe y la función es discontinua en el origen,

Ejercicio 3.4. Pruebe que los límites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$

no existen.

Ejercicio 3.5. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Pruebe que f admite derivadas parciales en $(0,0)$.

b) Pruebe que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

a) Usando la definición de derivada parcial respecto a x en el origen se obtiene que

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} = 0,$$

y análogamente

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} = 0.$$

b) Para ver que f no es diferenciable primero calculemos su plano tangente

$$z - f(0,0) = f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0),$$

es decir, $z = 0$. Ahora, si la función fuese diferenciable, por definición se tendría que

$$\lim (x,y) \to (0,0) \frac{f(x,y) - z(x,y)}{||(x,y)-(0,0)||} = 0,$$

sin embargo reemplazando en la definición de la función y el plano $z(x,y) = 0$ dicho límite es igual a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{xy}{x^2+y^2} - 0}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

el cual no existe, ya que considerando el camino $x = y = t$ se obtiene el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{(t^2+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}.$$

4 Teoremas de la Función Inversa e Implícita

4.1 Teoría

Teorema 4.1. **(Teorema de la Función Inversa)** Sean $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(D)$ y $p \in D$ tal que $JF(p)$ es invertible. Luego, F es localmente invertible en p, es decir, existen vecindades U, V de p y $1 = F(p)$ respectivamente tales que la restricción de F, $F : U \to V$, es invertible.
Adicionalmente, el Jacobiano de la inversa de F en q es la inversa del Jacobiano de F en p, es decir,

$$JF^{-1}(q) = (JF(p))^{-1}.$$

Teorema 4.2. **(Teorema de la Función Implícita)** Sean $F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $F = F(x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, $F \in C^1(D)$ y $(p, q) \in D$ tal que $F(p) = 0$ y $J_y F(p)$ invertible. Luego, existen vecindades V, W de p y q respectivamente, y $\varphi : V \to W$ función tal que $f \in C^1(V)$ y

$$F(x, \varphi(x)) = 0,$$

para cada $x \in V$, es decir, podemos despejar $y = \varphi(x)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$.
Más aún,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

4.2 Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x < y < x\}$ y $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (x^2 + y^2, xy)\,.$$

a) Sea $p \in R$. Pruebe que F es localmente invertible en una vecindad de p.

b) Calcule $JF^{-1}(q)$ para $q = F(p)$ donde $p \in R$.

Solución:

a) Primero veamos que

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix},$$

de donde

$$\det JF(x, y) = 2x^2 - 2y^2.$$

Finalmente, si $(x, y) = p \in R$, se tiene que $-x < y < x$, de donde $x \neq y$ y $\det JF(x, y) \neq 0$, probando así que el Jacobiano es invertible y que por el teorema de la función inversa la función F es localmente invertible.

b) Por el teorema de la función inversa la derivada pedida será la inversa del jacobiano que calculamos en la parte anterior, es decir, si $(x, y) = p \in R$ y $F(p) = q$

$$JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.2. Sea $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

a) Pruebe que $F(1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0)$.

b) Pruebe que en una vecindad de $(1, 1, 1, 1, 1)$ puede despejar (x, y, z) como funciones de (u, v) de la ecuación

$$F(x, y, z, u, v) = (0, 0).$$

Ejercicio 4.3. Considere el sistema

$$\begin{cases} u + v &= x + y \\ xu + yv &= 1 \end{cases}.$$

a) Pruebe que u, v se despejan de (x, y) verca de $(0, 1, 0, 1)$.

b) Calcular

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(0, 1).$$

Solución:

a) Definamos $F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u + v - (x + y) \\ xu + yv - 1 \end{pmatrix}$ y notemos que $F(0, 1, 0, 1) = (0, 0)$. Más aún,

$$\partial_{(u,v)}F(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible, pues su determinante es 1.
Se concluye con lo anterior que uno puede despejar a u, v en función de (x, y) cerca de $(0, 1, 0, 1)$ de la ecuación $F(x, y, u, v) = (0, 0)$, la cual es equivalente al sistema de ecuaciones dado.

b) Por el Teorema de la función implícita, la derivada pedida será

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial(u, v)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial(x, y)}\right) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ u & v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando en $(x, y, u, v) = (0, 1, 0, 1)$ se obtiene que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Optimización

5.1 Teoría

Definición 5.1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que $p \in D$ es un punto crítico para f si $\nabla f(p) = 0$.

Teorema 5.2. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D abierto y $f \in C^1(D)$. Si f alcanza un máximo o mínimo local en p, entonces p es un punto crítico.

Teorema 5.3. **(Teorema de Heine-Borel)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D cerrado y acotado y $f \in C^1(D)$. Luego f alcanza su máximo y mínimo en D. Más aún, si p es el punto donde f alcanza su máximo o mínimo, entonces al menos una de las siguientes afirmaciones es correcta:

a) $p \in \partial D$

b) $p \in D \backslash \partial D$ y $\nabla f(p) = 0$.

Observación 5.4. Note que la segunda afirmación en el teorema anterior es equivalente a que p sea un punto crítico para la restricción de f en el interior de D.

Teorema 5.5. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D abierto, $f \in C^1(D)$ y p un punto crítico para f. Luego:

a) Si $Hf(p)$ es una matriz definida positiva, entonces $f(p)$ es un mínimo local.

b) Si $Hf(p)$ es una matriz definida positiva, entonces $f(p)$ es un máximo local.

c) Si $Hf(p)$ es una matriz indefinida, entonces $f(p)$ es un punto silla.

Teorema 5.6. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D abierto, $f \in C^1(D)$ y p un punto crítico para f. Luego:

a) Si $f(p)$ es un máximo local, entonces $Hf(p)$ es una matriz semidefinida negativa.

b) Si $f(p)$ es un mínimo local, entonces $Hf(p)$ es una matriz semidefinida positiva.

5.2 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

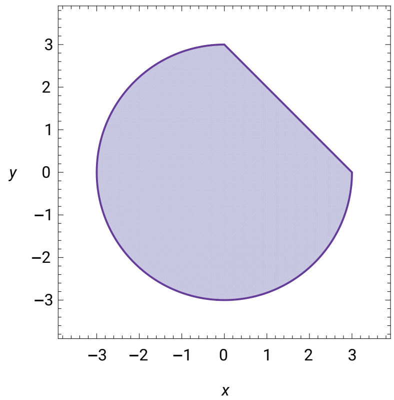
en $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9,\ y < 3 - x\}$.

a) Dibuje el dominio D.

b) Calcule los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Solución:

a) El gráfico del dominio D es



b) Para calcular los puntos críticos basta ver que la ecuación

$$\nabla f(x, y) = (-2x, -2y) = (0, 0)$$

se satisface únicamente para $(x, y) = (0, 0)$. Además,

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es una matriz definida negativa, por lo que $(0, 0)$ corresponde a un máximo local.

Ejercicio 5.2.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xy$$

en $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 < 4\}$.

a) Dibuje el dominio D.

b) Calcule los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Ejercicio 5.3. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = xyz$$

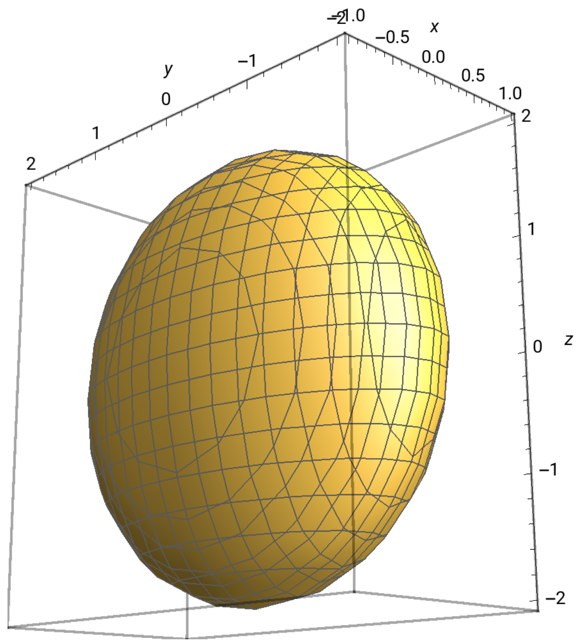
en $D = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$.

a) Dibuje el dominio D.

b) Calcule los puntos críticos de f y clasifíquelos.

Solución:

a) El gráfico del dominio D es



b) Para calcular los puntos críticos basta ver que la ecuación

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy) = (0, 0, 0)$$

se satisface siempre que dos de las variables sean nulas. Además,

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz indefinida siempre que dos de las variables se anulen y la tercera sea no nula. Por ejemplo, si $x \neq 0$ e $y = z = 0$, la matriz Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios a $\{0, x, -x\}$.
Adicionalmente, es fácil ver que $f(0,0,0) = 0$ y que f puede tomar valores positivos y negativos en toda vecindad del origen, por lo que en cualquier todos los puntos críticos corresponden a puntos silla.

6 Integrales Múltiples

6.1 Teoría

Teorema 6.1. **(Teorema de Fubini)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua con $D = [a,b] \times [c,d]$. Luego

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy\,.$$

Observación 6.2. El teorema anterior se generaliza de la manera evidente para dominios en más dimensiones. Sin embargo, es de extrema importancia la forma del dominio, es decir, este debe ser siempre de la forma

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Teorema 6.3. **(Cambios de variables)** Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $T : E \subset \mathbb{R}^n \to D \subset \mathbb{R}^n$ una biyección tal que $T \in C^1(E)$ y con Jacobiano invertible en todo su dominio. Luego

$$\iint\limits_D f(\vec{x})\, dA(\vec{x}) = \iint\limits_E f(T(\vec{u})) \cdot |\det(DT(\vec{u}))|\, dA(\vec{u})\,.$$

Observación 6.4. En el teorema anterior note que $T(\vec{u}) = \vec{x}$ simboliza el cambio de variables. Más aún, en ocasiones será más fácil escribir el cambio de variable con la función inversa $G(\vec{x}) = \vec{u}$, en cuyo caso el teorema se escribe en la forma

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(G^{-1}(\vec{x}))\, dA(\vec{x}) &= \iint\limits_E f(\vec{u}) \cdot |\det(DG^{-1}(\vec{u}))|\, dA(\vec{u}) \\ &= \iint\limits_E f(\vec{u}) \cdot |\det(DG(\vec{x}(\vec{u})))|^{-1}\, dA(\vec{u})\,.\end{aligned}$$

Cambios de variables notables

a) **(Coordenadas Polares)** El cambio a coordenadas polares consiste en usar la transformación

$$T(r,\theta) = (r\cos(\theta) + a, r\sin(\theta) + b)\,,$$

en cuyo caso

$$|\det T(r,\theta)| = r\,.$$

b) **(Coordenadas Cilíndricas)** El cambio a coordenadas cilíndricas consiste en usar la transformación

$$T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta) + a, r\sin(\theta) + b, z)\,,$$

en cuyo caso

$$|\det T(r,\theta,z)| = r\,.$$

c) **(Coordenadas Esféricas)** El cambio a coordenadas esféricas consiste en usar la transformación

$$T(r,\theta,\varphi) = (r\cos(\theta)\sin(\varphi) + a, r\sin(\theta)\sin(\varphi) + b, r\cos(\varphi) + c)\,,$$

en cuyo caso

$$|\det T(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin(\varphi)\,.$$

6.2 Ejercicios

Ejercicio 6.1. Calcule las siguientes integrales, invirtiendo el orden de integración en primer lugar.

a) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} \cos^2(x)dxdy$

b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} e^{x^2+y^2}dydx$

Solución:

a) Al reparametrizar el dominio se obtiene que

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} \cos^2(x)\,dxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \int_{x^2}^{3} \cos^2(x)\,dydx + \int_0^9 \int_{\sqrt{x}}^{3} \cos^2(x)\,dydx\,.$$

b) Al reparametrizar el dominio se obtiene que

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 e^{x^2+y^2}\, dydx = \int_{-3}^0 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} e^{x^2+y^2}\, dxdy\,.$$

Ejercicio 6.2. Calcule las siguientes integrales usando los cambios de variables pro-puestos.

a) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dA$ donde D es la región acotada por $x^2+y^2 \leq 16$ y $y \leq 0$, usando coordenadas polares.

b) $\displaystyle\iiint_E e^{-x^2-z^2}\, dV$ donde E es la región entre $x^2+z^2=4$, $x^2+z^2=9$, $1 \leq y \leq 5$ y $z \leq 0$, usando coordenadas cilíndricas.

c) $\displaystyle\iiint_E x^2\, dV$ donde E es la región entre la esfera $x^2+y^2+z^2=36$ y el cono invertido $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$, usando coordenadas esféricas.

Ejercicio 6.3. Calcule $\displaystyle\iint_R xy^2\, dA$ donde R es la región acotada entre $xy=1$, $xy=3$, $y=2$ e $y=6$ usando la transformación $T(u,v)=\left(\dfrac{v}{6u}, 2u\right)$.

Solución: Primero notemos que

$$xy = \frac{v}{6u}\cdot 2u = \frac{v}{3} \text{ y } y = 2u\,,$$

de donde $u \in (1,3)$ y $v \in (1/3, 1)$. Adicionalmente notemos que

$$\det(DT(u,v)) = \det\begin{pmatrix} -\frac{v}{6u^2} & \frac{1}{6u} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{v}{3u^2}\,.$$

Finalmente,

$$\iint_R xy^2\, dA = \int_{1/3}^1 \int_1^3 \frac{v}{6u}\cdot (2u)^2\, dudv = \frac{32}{27}\,.$$

Ejercicio 6.4. a) Considere una lámina triangular con vértices $(0,0),(0,3)$ y $(3,0)$, y densidad $\rho(x,y)=xy$. Calcule su masa, centro de masa y momentos de inercia respecto a los ejes.

b) Considere una lámina que ocupa la región R dentro del círculo $x^2+y^2<4$ y tal que $y<|x|$, con densidad $\rho(x,y)=x^2+y^2$. Calcule su masa, centro de masa y momentos de inercia respecto a los ejes.

Ejercicio 6.5. a) Considere un sólido que ocupa la región E bajo el plano de ecuación $x + 2y + 3z = 6$ que se encuentra en el primer octante, con densidad $\rho(x, y, z) = x^2yz$. Calcule su masa, centro de masa y momento de inercia.

b) Considere un sólido que ocupa la región acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$, $z > y$, el plano ZY y el paraboloide $-x = y^2 + z^2 - 16$. Calcule su masa, centro de masa y momento de inercia.

Solución:

a) Para determinar los límites de integración necesitamos determinar la intersección entre el plano $x+2y+3z = 6$ y los ejes coordenados. Para esto fijemos $y = z = 0$ y notemos que en dicho caso $x = 6$. Ahora si x está fijo y $z = 0$ se obtiene que $x + 2y = 6$, o bien, $y = \frac{6-x}{2}$. Sigue que los límites de integración serán

$$x \in (0, 6)\, y \in \left(0, \frac{6-x}{2}\right) \text{ y } z \in \left(0, \frac{6-x-2y}{3}\right).$$

Luego, la masa y el centro de masa serán M y $C = (C_x, C_y, C_z)$ dados por las integrales

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} x^2yz\, dzdydx,\\
C_x &= \frac{1}{M} \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} x \cdot x^2yz\, dzdydx,\\
C_y &= \frac{1}{M} \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} y \cdot x^2yz\, dzdydx,\\
C_z &= \frac{1}{M} \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} z \cdot x^2yz\, dzdydx.
\end{aligned}$$

Adicionalmente los momentos de inercia respecto a los ejes serán

$$\begin{aligned}
I_X &= \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} (y^2 + z^2) \cdot x^2yz\, dzdydx,\\
I_Y &= \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} (x^2 + z^2) \cdot x^2yz\, dzdydx,\\
I_Z &= \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} (x^2 + y^2) \cdot x^2yz\, dzdydx.
\end{aligned}$$

b) Usando coordenadas cilíndricas se tiene que la región en cuestión está dada por

$$D = \{(x, r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \mid r \in (0,2), \theta \in (\pi/4, 5\pi/4), x \in (0, 16 - r^2)\}.$$

Luego, la masa y el centro de masa serán M y $C = (C_x, C_y, C_z)$ dados por las integrales

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{0,2} \int_0^{16-r^2} k \cdot r\, dx dr d\theta, \\
C_x &= \frac{1}{M} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{0,2} \int_0^{16-r^2} x \cdot kr\, dx dr d\theta, \\
C_y &= \frac{1}{M} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{0,2} \int_0^{16-r^2} r\cos(\theta) \cdot kr\, dx dr d\theta, \\
C_z &= \frac{1}{M} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{0,2} \int_0^{16-r^2} r\sin(\theta) \cdot kr\, dx dr d\theta.
\end{aligned}$$

Adicionalmente los momentos de inercia respecto a los ejes serán

$$\begin{aligned}
I_X &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^2 \int_0^{16-r^2} r^2 \cdot kr\, dx dr d\theta, \\
I_Y &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^2 \int_0^{16-r^2} (x^2 + r^2\sin^2(\theta)) \cdot kr\, dx dr d\theta, \\
I_Y &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^2 \int_0^{16-r^2} (x^2 + r^2\cos^2(\theta)) \cdot kr\, dx dr d\theta.
\end{aligned}$$

7 Teoría local de curvas parametrizadas

7.1 Teoría

Definición 7.1. **(Longitud de curva)** Sea Γ una curva regular con parametrización $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Se define la longitud de la curva por

$$L = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

Definición 7.2. **(Arcoparámetro)** Sea Γ una curva regular con parametrización $\gamma(t)$, $t \in I$. Se define el **arcoparámetro** de Γ desde el punto $\gamma(a)$ por la función

$$s(t) = \int_a^t ||\gamma'(r)||\, dr.$$

Adicionalmente, diremos que la curva está **arcoparametrizada** si está parametrizada por su arcoparámetro, es decir $t = s$, o equivalentemente si para todo $t \in I$ se tiene que

$$||\gamma'(t)|| = 1$$

Receta de Arcoparametrización

Para determinar la arcoparametrización de una curva regular Γ siga los siguientes pasos:

a) Determine una parametrización regular $\gamma(t)$.

b) Determine el arcoparámetro asociada a la parametrización γ usando la ecuación

$$s = s(t) = \int_a^t ||\gamma'(r)||\, dr.$$

c) Invierta la relación $s = s(t)$, es decir, determine t en función de s como $t = t(s)$.

d) Concluya definiendo la arcoparametrización por

$$\lambda(s) = \gamma(t(s)).$$

Observación 7.3. El punto $\lambda(s)$ representa el punto de la curva que se encuentra a s unidades de distancia medidos a través de la curva y desde el punto $\lambda(0)$.

Definición 7.4. **(Vector Tangente, Normal y Binormal)** Dada una curva regular Γ con parametrización $\gamma(t)$ y arcoparametrización $\lambda(s)$. Se definen su vector Tangente, Tangente unitario, Normal y Normal unitario por $T, \hat{T}, N$ y $\hat{N}$ respectivamente dados por las fórmulas en el recuadro.

	$\gamma(t)$	$\lambda(s)$
T	$\gamma'(t)$	$\lambda'(s)$
$\hat{T}$	$\dfrac{T}{\|\|T\|\|}$	T
N	$\hat{T}'$	$\hat{T}'$
$\hat{N}$	$\dfrac{N}{\|\|N\|\|}$	N

Adicionalmente, y solo si la curva está en $\mathbb{R}^3$ se definen el vector Binormal y Binormal unitario por B y $\hat{B}$ dados por las ecuaciones en el siguiente recuadro.

	$\gamma(t)$	$\lambda(s)$
B	$T \times N$	$T \times N$
$\hat{B}$	$\hat{T} \times \hat{N}$	$\hat{T} \times \hat{N}$

Observación 7.5. El triplete de vectores $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ forma una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ en cada punto de la curva y se conoce como el **Triedro de Frenet-Serret**.

Definición 7.6. **(Curvatura y Torsión)** La **curvatura** y **torsión** de una curva Γ en el punto $\gamma(t)$ (o $\lambda(s)$ si está arcoparametrizada) se definen por $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ ($\kappa(s)$ y $\tau(s)$ en el caso arcoparametrizado) dados por las fórmulas en el siguiente recuadro.

	$\gamma(t)$	$\lambda(s)$
κ	$\dfrac{\|\|N\|\|}{\|\|T\|\|} = \dfrac{\|\|\gamma' \times \gamma''\|\|}{\|\|\gamma'\|\|^3}$	$\|\|N\|\| = \|\|\lambda''\|\|$
τ	$-\dfrac{\hat{B}' \cdot \hat{N}}{\|\|T\|\|} = \dfrac{\gamma' \cdot (\gamma'' \times \gamma''')}{\|\|\gamma' \times \gamma''\|\|^2}$	$-\hat{B}' \cdot \hat{N} = \dfrac{\lambda' \cdot (\lambda'' \times \lambda''')}{\|\|\lambda''\|\|^2}$

Observación 7.7. Se puede demostrar que una curva tiene **curvatura nula** si y solo si **es una recta**, por lo que la curvatura se puede entender como qué tan distinta es la curva de ser una recta, y por lo tanto cuánto se curva la curva.
Análogamente, se puede probar que una curva tiene **torsión nula** si y solo si es una **curva plana**, por lo que la torsión se puede entender como qué tan no plana es la curva, y por lo tanto cuánto se tuerce la curva.

Teorema 7.8. **(Fórmulas de Frenet-Serret)** Sea Γ una curva con parametrización regular $\gamma(t)$ y arcoparametrización $\lambda(s)$. Las siguientes igualdades son correctas

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}$$
$$\frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$$
$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$$

En el caso de las derivadas contra un parámetro arbitrario t hay que agregar la rapidez en el lado derecho:

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = ||T|| \cdot \kappa\hat{N}$$
$$\frac{d\hat{N}}{dt} = ||T|| \cdot (-\kappa\hat{T} + \tau\hat{B})$$
$$\frac{d\hat{B}}{dt} = ||T|| \cdot (-\tau\hat{N})$$

7.2 Ejercicios

Ejercicio 7.1. Calcule la curvatura en el punto p dado en cada uno de los siguientes casos.

a) Γ parametrizada por $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in (-1, 1)$ y $p = (0, 0)$.

b) Γ la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ y $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

c) Γ la gráfica de la función $f(x) = e^x$ en $p = (0, 1)$.

Solución: Para calcular la curvatura de las curvas en este ejercicio usaremos la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

donde

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$$

es una parametrización de la curva dada considerando $z = 0$ para poder usar las fórmulas en 3d.
Más aún, como las curvas de este ejercicio son 2d, en particular son planas, de donde todas tendrán torsión $\tau = 0$.

a) Usando la fórmula mencionada anteriormente se obtiene que

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}},$$

en particular en el punto $p = (0, 0)$, es decir, para $t = 0$, se tiene que la curvatura es $\kappa(0) = 2$.

b) Primero note que una parametrización para la elipse dada es $(\cos(t), 2\sin(t))$. Luego, usando la fórmula mencionada anteriormente se obtiene que

$$\kappa(t) = \frac{4\sqrt{2}}{(5 + 3\cos(2t))^{3/2}},$$

en particular en el punto $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$, es decir, para $t = \pi/4$, se tiene que la curvatura es $\kappa(\pi/4) = \frac{4\sqrt{10}}{25}$.

c) Primero note que una parametrización para la curva dada es (t, e^t). Luego, usando la fórmula mencionada anteriormente se obtiene que

$$\kappa(t) = \frac{e^t}{(e^{2t} + 1)^{3/2}},$$

en particular en el punto $p = (0, 1)$, es decir, para $t = 0$, se tiene que la curvatura es $\kappa(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ejercicio 7.2. Sea Γ la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos(t) + 1, \cos(t) + \sin(t), \sin(t) + 1).$$

a) Calcule $\kappa(t)$.

b) Pruebe que la curva es plana.

c) Calcule la distancia entre la curva Γ y el plano de ecuación $x - y + z = 0$.

Ejercicio 7.3. Sea Γ la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \right).$$

a) Pruebe que γ está arcoparametrizada.

b) Calcule la curvatura de la curva Γ en cada uno de sus puntos.

c) Calcule la torsión de la curva Γ en cada uno de sus puntos.

Solución:

a) Para probar que la curva está arcoparametrizada basta demostrar que $||\gamma'(t)|| = 1$. Notemos que

$$\gamma'(t) = \left(\frac{-\sin(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin(t)}{\sqrt{3}}, \frac{-\sin(t)}{\sqrt{3}} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \right),$$

por lo que calculando la norma se obtiene lo pedido.

b) Dado que la curva está aroparametrizada basta calcular $||\gamma''(t)||$. Para eso notemos que

$$\gamma''(t) = \left(\frac{-\cos(t)}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos(t)}{\sqrt{3}}, \frac{-\cos(t)}{\sqrt{3}} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \right),$$

de donde

$$||\gamma''(t)|| = 1$$

c) Finalmente, para calcular la torsión usaremos la fórmula

$$\tau = \frac{\gamma' \cdot (\gamma'' \times \gamma''')}{||\gamma''||^2}.$$

Sin embargo, note que $\{\gamma, \gamma''\}$ es un conjunto linealmente dependiente, de donde

$$\gamma' \cdot (\gamma'' \times \gamma''') = (\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = 0$$

y se concluye que $\tau = 0$.

Ejercicio 7.4. Sea $b = (4, 7, 4)$ y Ξ la curva parametrizada por $\xi(t)$. Asuma que la función $\xi(t)$ es suave y que satisface las siguientes condiciones

$$\xi'(t) = b \times \xi(t) \text{ y } \xi(0) = (2, 2, 1).$$

a) Pruebe que la función $f(t) = \xi(t) \cdot b$ es constante y calcule dicha constante.

b) Use lo anterior para calcular el ángulo entre $\xi(t)$ y b.

c) Pruebe que la función $g(t) = ||\xi(t)||^2$ es constante y calcule dicha constante.

d) Use las partes anteriores para calcular $||\xi'(t)||$.

e) Calcule el arco de la curva entre $\xi(0)$ y $\xi(\pi)$.

f) Pruebe que
$$\xi''(t) = -81\xi(t) + 26b.$$
Hint: Recuerde que
$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

g) Use lo anterior para calcular la curvatura de Ξ en cada uno de sus puntos.

h) Use la parte (a) de este ejercicio para demostrar que
$$(\xi(t) - \xi(0)) \cdot b = 0.$$

i) Use la parte h) para calcular la torsión de Ξ en cada uno de sus puntos.

Ejercicio 7.5. Sea Γ la curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t),$$

donde $t \in (0, \infty)$.

a) Arcoparametrice la curva Γ.

b) Calcule la curvatura de Γ en $(1, 1, 0)$.

c) Calcule la torsión de Γ en $(1, 1, 0)$.

Solución:

a) Usaremos la receta de arcoparametrización:

   a) Consideraremos la parametrización dada
   $$\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t),$$
   puesto que esta es regular.

b) Usando la fórmula del arcoparámetro se obtiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t ||\gamma'(r)||\, dr \\ &= \int_0^t ||(e^r, -e^{-r}, \sqrt{2})||\, dr. \\ &= \int_0^t e^r + e^{-r}\, dr. \\ &= e^t - e^{-t}. \end{aligned}$$

c) Ahora notemos que si $s = e^t - e^{-t}$, podemos usar el cambiode variable $u = e^t$ para reescribir esta ecuación en la forma

$$s = u - \frac{1}{u},$$

cuyas soluciones son

$$u = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2+4}\right).$$

Finalmente, como $u = e^t$, se tiene que

$$t = \ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right).$$

d) Se concluye entonces que la arcoparametrización de la curva será

$$\lambda(s) = \gamma(t(s)) = \left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}, \frac{2}{s+\sqrt{s^2+4}}, \sqrt{2}\ln\left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)\right).$$

b) Para calcular la curvatura usaremos la segunda derivada de la arcoparametrización, esto es,

$$\lambda''(t) = \left(\frac{2}{(s^2+4)^{3/2}}, \frac{2}{(s^2+4)^{3/2}}, -\frac{\sqrt{2}s}{(s^2+4)^{3/2}}\right).$$

Sigue que

$$\kappa(t) = ||\lambda''(t)|| = \frac{(8+2s^2)^{1/2}}{(s^2+4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{s^2+4}.$$

c) Para calcular la torsión usaremos la fórmula no arcoparametrizada, es decir,

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{||\gamma' \times \gamma''||^2} \\
&= \frac{\det \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \\
&= \frac{-2\sqrt{2}}{\left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} \\ \sqrt{2}e^t \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \\
&= \frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t + e^{-t})^2} = \frac{-\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}
\end{aligned}
$$

8 Integral de Línea

8.1 Teoría

Definición 8.1. **(Integral de línea de un campo escalar)** Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada por $\gamma(t)$ con $t \in (a,b)$ y $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Se define la integral de f sobre Γ por

$$\int\limits_{\Gamma} f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, ||\gamma'(t)||\, dt\,.$$

Definición 8.2. **(Integral de línea de un campo vectorial)** Sean $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva regular parametrizada por $\gamma(t)$ con $t \in (a,b)$ y $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Se define la integral de F sobre Γ por

$$\int\limits_{\Gamma} F\, dr = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt\,.$$

Observación 8.3. La diferencia entre estos dos tipos de integrales radica en la naturaleza del integrando. En el primer caso, se integra una función a valores reales, mientras que en el segundo es un campo vectorial .

Observación 8.4. Ambas integrales tienen interpretaciones geométricas. La primera integral puede entenderse como un área con signo abajo de una curva en un espacio n-dimensional. Por otro lado, la segunda suele introducirse como el trabajo ejercido por una fuerza a través de una trayectoria. Con precisión, la integral definida en la definición 5.2 suele llamarse el trabajo ejercido por F sobre la trayectoria Γ.

Observación 8.5. Con frecuencia la integral de un campo vectorial suele denotarse de una forma un poco distinta, por ejemplo, si $n = 3$ y $F = (P, Q, R)$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F\,dr &= \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_\Gamma P\,dx + \int_\Gamma Q\,dy + \int_\Gamma R\,dz\,.\end{aligned}$$

8.2 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Calcule integral

$$\int_\Gamma \sin(\pi y)\,dy + yx^2\,dx\,,$$

donde

a) Γ es el segmento de recta que va de $(0, 2)$ a $(1, 4)$.

b) Γ es el segmento de recta que va de $(1, 4)$ a $(0, 2)$.

c) Γ es la curva parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), 2 + 2\sin(t))$ con $t \in (-\pi/2, 0)$.

d) ¿Es cierto que el campo integrado en este problema es independiente de caminos?

Solución:

a) Una parametrización para la curva dada es

$$\gamma(t) = ((1, 4) - (0, 2))t + (0, 2) = (t, 2t + 2),$$

con $t \in (0, 1)$. Sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \sin(\pi y)\,dy + yx^2\,dx &= \int_0^1 \begin{pmatrix} yx^2 \\ \sin(\pi y)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 2t+2\end{pmatrix}'\,dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (2t+2)t^2 \\ \sin(\pi(2t+2))\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\end{pmatrix}\,dt \\ &= \int_0^1 (2t+2)t^2 + 2\sin(\pi(2t+2))\,dt = \frac{7}{6}\,.\end{aligned}$$

b) Una parametrización para la curva dada es

$$\gamma(t) = ((0,2) - (1,4))t + (1,4) = (-t+1, -2t+4),$$

con $t \in (0,1)$. Sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \sin(\pi y)\,dy + yx^2\,dx &= \int_0^1 \begin{pmatrix} yx^2 \\ \sin(\pi y)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t+1 \\ -2t+4\end{pmatrix}' dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (-2t+4)(-t+1)^2 \\ \sin(\pi(-2t+4))\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2\end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -(-2t+4)(-t+1)^2 - 2\sin(\pi(-2t+4))\,dt = -\frac{7}{6}\,.\end{aligned}$$

c) Usando la parametrización dada se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \sin(\pi y)\,dy + yx^2\,dx &= \int_{-\pi/2}^0 \begin{pmatrix} yx^2 \\ \sin(\pi y)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 2+2\sin(\theta)\end{pmatrix}' d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \begin{pmatrix} (2+2\sin(\theta))\cos^2(\theta) \\ \sin(\pi(2+2\sin(\theta))\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^0 (2+2\sin(\theta))\cos^2(\theta)(-\sin(\theta)) + \sin(\pi(2+2\sin(\theta))(2\cos(\theta))\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^0 -(2+2\sin(\theta))\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \\ &\qquad + \int_{-\pi/2}^0 \sin(\pi(2+2\sin(\theta))(2\cos(\theta))\,d\theta\end{aligned}$$

Resolviendo cada integral por su parte (¡no es directo!) se obtiene que

$$\int_{-\pi/2}^0 -(2+2\sin(\theta))\cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{-\pi/2}^0 \sin(\pi(2+2\sin(\theta))(2\cos(\theta))\,d\theta = 0,$$

concluyendo así que

$$\int_\Gamma \sin(\pi y)\,dy + yx^2\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{3}\,.$$

d) Note que las curvas en las que se integró en las partes *a*) y *c*) parten y terminan en los mismos puntos, sin embargo sus integrales son distintas, por lo que el campo no es independiente de caminos.

Ejercicio 8.2. Sean $F(x,y,z) = (y,x,z)$ y $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por

$$\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \theta^2)$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$. Calcule

$$\int_\Gamma F\,dr\,.$$

9 Campos Conservativos

9.1 Teoría

Definición 9.1. **(Campo Conservativo)** Un campo $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice conservativo si existe una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$F = \nabla f\,.$$

En este caso, diremos que la función $-f$ es un potencial para F.

Teorema 9.2. **(Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Línea)** Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo con potencial $-f$ y Γ una curva parametrizada por $\gamma(t)$ con $t \in (a, b)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\, dr &= \int_\Gamma \nabla f\, dr \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,. \end{aligned}$$

Definición 9.3. **(Rotor y Divergencia)** Sea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial con $F = (P, Q, R)$. Se definen su rotor y divergencia por

$$\begin{aligned} \text{Rot}F &= \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ R_x - P_z \\ Q_x - P_y \end{pmatrix} \\ \text{Div}F &= P_x + Q_y + R_z\,. \end{aligned}$$

En el caso 2-dimensional, es decir $F = (P, Q)$, se definen análogamente por

$$\begin{aligned} \text{Rot}F &= Q_x - P_y \\ \text{Div}F &= P_x + Q_y\,. \end{aligned}$$

Observación 9.4. Tanto el rotor como la divergencia son operadores diferenciales, es decir, funciones que actúan sobre funciones usando derivadas. Su importancia radica en que su definición facilita la escritura de los teoremas de Green, Gauss y Stokes.

Observación 9.5. Una manera de memorizar las fórmulas del rotor y de la divergencia consiste en entenderlos como el producto cruz y punto contra el gradiente respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}F &= \nabla \times F \\ \mathrm{Div}F &= \nabla \cdot F\,.\end{aligned}$$

Observación 9.6. Para poder introducir el siguiente teorema es importante definir algunos conceptos topológicas, sin embargo, hacer esto con precisión es complicado e innecesario, por lo que solo se introducirán de una forma intuitiva:

a) Diremos que un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si todo par de puntos en él pueden conectarse por una curva continua $\Gamma \subset \Omega$.

b) Diremos que un conjunto abierto es simplemente conexo si es conexo y no tiene hoyos.

Conjunto Disconexo — Conjunto conexo y simplemente conexo — Conjunto conexo pero no simplemente conexo

Teorema 9.7. **(Caracterización de Campos Conservativos)** Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo con $F \in C^1(D)$ y $n = 2$ o 3.

a) Si D es abierto y conexo, el campo F es conservativo si y solo si la integral

$$\oint_{\Gamma} F\, dr = 0,$$

para toda curva cerrada simple $\Gamma \subset D$.

b) Si D es abierto y simplemente conexo, el campo F es conservativo si y solo si

$$\mathrm{Rot} F = 0\,.$$

9.2 Ejercicios

Ejercicio 9.1. Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{xy^2}{a}, \dfrac{x^2y}{b}\right)$ un campo con parámetros $a, b \neq 0$.

a) Determine una condición neesaria y suficiente sobre los parámetros a, b para que el campo F sea conservativo.

b) Considere a, b tales que satisfacen la condición que determinó en la parte anterior y calcule

$$\int_{\Gamma} F\, dr\,,$$

donde Γ es la curva parametrizada por $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (\sqrt{a}t + \cos(2\pi t) - 1, \sqrt{b}t + \sin(\pi t))\,.$$

Solución:

a) Dado que el dominio del campo es $\mathbb{R}^2$, el cual es abierto y simplemente conexo, sigue que F es conservativo si y solo si tiene rotor nulo, es decir

$$\mathrm{Rot}(F) = \frac{2xy}{b} - \frac{2xy}{a} = 0,$$

es decir, basta con la condición $a = b$.

b) Si $a = b$ es fácil ver que

$$F = \nabla f,$$

donde $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{2a}$, por lo que por el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F\,dr &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\ &= f(\sqrt{a},\sqrt{b}) - f(0,0) \\ &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

Ejercicio 9.2. Sea $F : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x} + xye^{xy}, x^2e^{xy}\right).$$

a) Pruebe que F no es un campo conservativo.

b) Determine $n \in \mathbb{Z}$ tal que x^nF sí es conservativo.

c) Para el $n \in \mathbb{Z}$ que encontró en la parte anterior calcule la integral

$$\int_\Gamma x^nF\,dr,$$

donde Γ es la curva parametrizada por $\gamma(t) = (t, \sin(t))$ con $t \in (0, 8\pi)$.

Ejercicio 9.3. Sea $\lambda : (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ una curva simple que describe la posición de una partícula en función del tiempo y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que si la posición de una partícula en t es q, entonces $F(q) = ma$, donde a es la aceleración de la partícula en el tiempo t y $m > 0$ es una constante fija.

a) Pruebe que el trabajo ejercido por el campo F sobre la curva λ en el intervalo de tiempo (a,b) está dado por

$$E_c(\lambda(b)) - E_C(\lambda(a)),$$

donde $E_c(q) = \frac{1}{2}m|v|^2$ y v es la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición q.

b) Asuma que el campo F es conservativo con potencial $-f$ ($F = \nabla f$) y defina

$$E_p(q) = -f(q).$$

Muestre que la función

$$E(t) = E_c(\lambda(t)) + E_p(\lambda(t))$$

es una función constante.

c) Considere $m = 1$, $F = (x^2 - y, -x + \sqrt{y} + 2)$ y $\lambda(t) = (t, t^2)$ con $t > 0$. Compruebe que en este caso $F = ma$ y determine la función constante $E(t) = E_c(\lambda(t)) + E_p(\lambda(t))$.

Solución:

a) Por definición, el trabajo ejercido por F sobre la curva λ para $t \in (a,b)$ es

$$\int_a^b \langle F(\lambda(t)), \lambda'(t)\rangle dt = \int_a^b m\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle dt.$$

Ahora observe que

$$\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \lambda'(t), \lambda'(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\lambda'(t)||^2,$$

de donde

$$\int_a^b m\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle dt = \frac{m}{2}||\lambda'(t)||^2\Big|_a^b = E_c(\lambda(b)) - E_c(\lambda(a)).$$

b) Basta probar que $E'(t) = 0$. Para esto notemos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m||\lambda'(t)||^2 - f(\lambda(t))\right) \\ &= m\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle - \langle \nabla f(\lambda(t)), \lambda'(t)\rangle \\ &= m\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle - \langle F(\lambda(t)), \lambda'(t)\rangle \\ &= m\langle \lambda''(t), \lambda'(t)\rangle - \langle m\lambda''(t), \lambda'(t)\rangle = 0 \end{aligned}$$

c) Primero veamos que $m\lambda''(t) = (0,2)$ y que

$$F(\lambda(t)) = F(t,t^2) = (t^2 - t^2, -t + \sqrt{t^2} + 2) = (0,2),$$

de donde se cumple que $F = ma$.
Ahora veamos que

$$E_c(\lambda(t)) = \frac{1}{2}||(1,2t)||^2 = \frac{1}{2} + 2t^2,$$

y además $E_p(\lambda(t)) = -f(\lambda(t))$ donde f es un potencial para F. Mediante integración y derivación es fácil ver que un potencial es

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{2y^{3/2}}{3} + 2y,$$

de donde

$$E_p(\lambda(t)) = -f(t,t^2) = -\frac{t^3}{3} + t^3 - \frac{2t^3}{3} - 2t^2 = -2t^2.$$

Finalmente basta ver que

$$E(t) = E_c(\lambda(t)) + E_p(\lambda(t)) = \frac{1}{2},$$

concluyendo así que laduiseget función E es constante.

Ejercicio 9.4. Determine una función potencial para cada uno de los siguientes campos vectoriales y concluya que estos campos son conservativos.

a) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy + 2z)$ con dominio en $\mathbb{R}^3$.

b) $F(\vec{x}) = \dfrac{c\vec{x}}{||\vec{x}||}$ donde $c \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

10 Teoremas de Green y Gauss

10.1 Teoría

Teorema 10.1. **(Teorema de Green)** Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple y orientada positiva, $R \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por Γ, $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo con $F \in C^1(D)$ y D un abierto tal que $R \subset D$. Luego,

$$\oint_{\Gamma} F\,dr = \iint_{R} \mathrm{Rot}(F)\,dA\,.$$

Teorema 10.2. **(Teorema de Gauss)** Sean $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple y orientada positiva, $R \subset \mathbb{R}^2$ la región encerrada por Γ, $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo con $F \in C^1(D)$ y D un abierto tal que $R \subset D$. Luego, si $\hat{n}$ es un vector normal unitario y exterior a la curva Γ (que apunta afuera de la región encerrada por Γ), entonces

$$\oint_{\Gamma} F \cdot \hat{n}\,ds = \iint_{R} \mathrm{Div}(F)\,dA\,.$$

El truco del área

Para calcular el área de una región R basta con calcular

$$\text{Área}(R) = \iint_{R} 1\,dA(x,y).$$

Por otro lado, note que si $F(x,y)$ es un campo tal que $\mathrm{Rot}(F) = 1$, usando el teorema de Green se obtiene que

$$\int_{\partial R} F\,dr = \iint_{R} \mathrm{Rot}(F)\,dA = \text{Área}(R),$$

por lo que cualquier campo con rotor constante e igual a 1 sirve para calcular áreas de regiones (usando la fórmula anterior).

Observación 10.3. Algunos campos con rotor constante e igual a 1 son los siguientes:

a) $F(x,y) = (0,x)$

b) $F(x,y) = (-y,0)$

c) $F(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$

10.2 Ejercicios

Ejercicio 10.1. Use el teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\oint_\Gamma yx^2 dx - x^2 dy,$$

donde Γ es la curva orientada negativamente que corresponde a la frontera de la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ y } x \leq 0\}.$$

Solución: Usando el teorema de Green se tiene que

$$\oint_\Gamma yx^2 dx - x^2 dy = -\iint_R -2x - x^2 dA(x,y) = \iint_R 2x + x^2 dA(x,y).$$

Note que aparece un cambio de signo debido a la orientación de la curva. Para calcular la integral del lado derecho consideremos el cambio a coordenadas polares $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ con $r \in (0,2)$ y $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ y Jacobiano $dA(x,y) = rdA(r,\theta)$. Luego,

$$\begin{aligned}\iint_R 2x + x^2 dA(x,y) &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2 (2r\cos(\theta) + r^2\cos^2(\theta))rdrd\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{16}{3}(1 + 3\cos(\theta))\cos(\theta)d\theta \\ &= 8\pi - \frac{32}{3},\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\oint_\Gamma yx^2 dx - x^2 dy = 8\pi - \frac{32}{3}.$$

Ejercicio 10.2. Verifique el teorema de Green para el campo $F(x,y) = (xy^2 + x^2, 4x - 1)$ y Γ la curva orientada positiva que se compone por tres segmentos de recta uniendo los puntos $(0,0), (0,3)$ y $(-3,0)$.

Ejercicio 10.3. Use el teorema de Gauss para demostrar que

$$\oint_\Gamma \begin{pmatrix} x + e^{-y^2} \\ y + e^{-x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds = 2\pi r^2,$$

donde $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ orientada positivamente.
Solución: Primero note que el vector normal exterior unitario a la curva Γ es

$$n(x,y) = \frac{(x,y)}{||(x,y)||} = \frac{(x,y)}{r}.$$

Luego, si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ por el teorema de Gauss se tiene que

$$\oint_\Gamma \begin{pmatrix} x + e^{-y^2} \\ y + e^{-x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{r} ds = \frac{1}{r} \iint_C 1 + 1 \, dA(x,y) = \frac{2}{r}\pi r^2 = 2\pi r,$$

y multiplicando por r se obtiene que

$$\oint_\Gamma \begin{pmatrix} x + e^{-y^2} \\ y + e^{-x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds = \iint_C 1 + 1 \, dA(x,y) = 2\pi r^2.$$

Ejercicio 10.4. Sean $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ y Γ la curva orientada positivamente que corresponde a la frontera de la región $R = (a,b) \times (c,d)$. Calcule la integral de línea

$$\int_\Gamma F \, dr,$$

donde $F(x,y) = \Big(-\frac{y}{2} + \varphi(x), \frac{x}{2} + \psi(y)\Big)$.

Ejercicio 10.5. Sea $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \in C^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$ tal que $P_y = Q_x$.

a) Pruebe que existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\gamma F \, dr = a\,,$$

para toda curva regular cerrada simple orientada positiva γ que rodea al punto $(0,0)$.

b) Sea $G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Pruebe que existe una constante $b \in \mathbb{R}$ tal que el campo $H : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$H(x,y) = F(x,y) + b \cdot G(x,y)$$

es conservativo.

Solución:

a) Sean γ_1, γ_2 dos curvas regulares cerradas simples orientadas positivas y que rodean al punto $(0,0)$. Sea E la región entre las curvas γ_1 y γ_2. Sigue por el teorema de Green que

$$\left| \int_{\gamma_1} F\, ds - \int_{\gamma_2} F\, ds \right| = \iint_E Q_x - P_y\, dA = 0,$$

de donde

$$\int_{\gamma_1} F\, ds = \int_{\gamma_2} F\, ds$$

y por lo tanto el campo F integrado sobre cualquier curva regular cerrada simple orientada positiva y que rodea al origen da el mismo resultado, digamos $a \in \mathbb{R}$.

b) Basta probar que para alguna constante $b \in \mathbb{R}$ el campo H es independiente de caminos, o bien, que la integral de H sobre cualquier camino cerrado simple es nula. Sea γ una curva cerrada simple. Si la curva γ no rodea al origen tenemos que

$$\int_\gamma H\, ds = \int_\gamma F\, ds + b \int_\gamma G\, ds = 0,$$

debido a que tanto F como G son conservativos en un entorno de γ. Por otro lado, si γ rodea al origen tenemos que

$$\int_\gamma H\, ds = \int_\gamma F\, ds + b \int_\gamma G\, ds = a + b \cdot 2\pi,$$

de donde para que el campo H sea independiente de caminos basta considerar

$$b = \frac{-a}{2\pi}\,.$$

11 Superficies e Integral de Superficie

11.1 Teoría

Definición 11.1. Una superficie parametrizada es

$$S = \{r(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in D\},$$

donde $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función cuyo dominio es D. En este caso diremos que r es una parametrización para S.

Definición 11.2. Dada una superficie S con parametrización $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $r \in C^1(D)$, se define su vector normal en el punto $r(a, b)$ por

$$n(a, b) = r_u(a, b) \times r_v(a, b).$$

Observación 11.3. Note que dado que el vector normal se define para cada punto de la superficie, entonces uno puede entender a n como un campo vectorial. Este campo se conoce como el campo normal a la superficie.

Observación 11.4. Considerando que ya tenemos el vector normal a las superficie S en el punto $p = r(a, b) \in S$ podemos aprovechar esto para definir su plano tangente como

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot (x - p) = 0\}.$$

Definición 11.5. **(Integral de superficie de un campo escalar)** Sean S una superficie parametrizada por $r(u, v)$ con $(u, v) \in D$ y $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Se define la integral de f sobre S por

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(r(u, v))\, ||n(u, v)||\, dA(u, v)\,.$$

Definición 11.6. **(Integral de superficie de un campo vectorial)** Sean S una superficie parametrizada por $r(u,v)$ con $(u,v) \in D$ y $F : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Se define la integral de F sobre S por

$$\iint_S F\, d\mathbf{S} = \iint_D F(r(u,v)) \cdot n(u,v)\, dA(u,v)\,.$$

Observación 11.7. Note que distintas parametrizaciones pueden introducir vectores normales opuestos, sin embargo, se puede demostrar que la de haber algúna diferencia entre estas integrales cuando se cambia la parametrización esta sería el cambio de signo, por lo que para evitar problemas, con frecuencia notará que en los ejercicios se dice explícitamente para dónde apunta el campo normal en cuestión.

Observación 11.8. La diferencia entre estos dos tipos de integrales radica en la naturaleza del integrando. En el primer caso, se integra una función a valores reales, mientras que en el segundo es un campo vectorial.

Observación 11.9. Ambas integrales tienen interpretaciones geométricas. La primera integral puede entenderse como un volumen con signo sobre una superficie. Por otro lado, la segunda suele introducirse como el flujo de un fluído a través de una superficie. Con precisión, la integral definida en la definición 10.2 suele llamarse integral de flujo de F sobre S.

11.2 Ejercicios

Ejercicio 11.1. Calcule la integral

$$\iint_S xyz dS,$$

donde S es la superficie del sólido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } x,y,z \geq 0\}.$$

Solución: Primero note que la superficie en cuestión está compuesta de tres caras planas que viven en los planos XY, YZ y XZ, y una cara compuesta por un octavo de una esfera de radio 1.
Ahora observe que el campo escalar a integrar $f(x,y,z) = xyz$ se anula en los planos

XY, YZ y XZ, de donde las integrales en esas caras deben ser nulas.
Para integrar en la cara que corresponde con el octavo de esfera usaremos coordenadas esféricas

$$r(\theta,\varphi) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi)), \quad \theta \in (0,\pi/2) \text{ y } \varphi \in (0,\pi/2).$$

Sigue que

$$\begin{aligned} ||n|| &= ||r_\theta \times r_\varphi|| \\ &= ||(-\sin^2(\varphi)\cos(\theta), -\sin^2(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi)\sin(\theta))|| \\ &= \sin(\varphi), \end{aligned}$$

y por lo tanto la integral pedida será

$$\begin{aligned} \iint\limits_S xyz dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \cdot \int_0^{\pi/2}\sin^3(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.2. Calcule la integral

$$\iint\limits_S 40y dS,$$

dnde S es la superficie dada por las ecuaciones $z = 3x^2 + 3y^2$ con $z \in (0,6)$ y $x \geq 0$.

Ejercicio 11.3. Calcule la integral

$$\iint\limits_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\mathbf{S},$$

donde S es la superficie del sólido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } x,y,z \geq 0\},$$

y la integral se calcula con el vector normal exterior (apuntando afuera de la región acotada por la superficie).

Solución: Usando la parametrización del problema anterior se tiene que el vector normal será

$$n(\theta,\varphi) = (-\sin^2(\varphi)\cos(\theta), -\sin^2(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi)\sin(\theta)),$$

sin embargo, este vector normal es interior. Para solucionar esto basta cambiar el signo, es decir,

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\mathbf{S} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin^2(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \end{pmatrix} dA(\theta,\varphi) \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin^2(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \end{pmatrix} dA(\theta,\varphi) \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\sin^3(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi)\sin(\theta) + \sin^3(\varphi)\sin^2(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \frac{3+2\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11.4. Calcule la integral

$$
\iint\limits_S \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} d\mathbf{S},
$$

dnde S es la superficie dada por las ecuaciones $z = 3x^2 + 3y^2$ con $z \in (0,6)$ y $x \geq 0$, y la integral se calcula con el vector normal interior (apuntando adentro de la región acotada por la superficie).