Apuntes de Geometría Vectorial

Michael Yáñez Pérez
Profesor Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Facultad de Ciencia
Universidad de Santiago de Chile

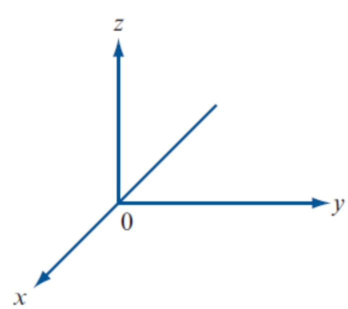
Estos apuntes pretenden ser un resumen adecuado que aporte elementos iniciales del estudio de geometría vectorial para su formación, específicamente respecto a cursos superiores relativos al Cálculo y Ecuaciones Diferenciales, entre otros.

1 Vectores en el espacio

Cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se pude representar como una terna ordenada de números reales:

$$(a, b, c) \tag{1}$$

Los vectores de la forma (1) constituyen el espacio $\mathbb{R}^3$. Para representar un punto en el espacio, se comienza por elegir un punto en $\mathbb{R}^3$. Se llama a este punto el origen, denotado por 0. Después se trazan tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se les llama el eje X, el eje Y y el eje Z. Dichos ejes se pueden seleccionar de diferentes formas, pero la más común tiene los ejes X y Y horizontales y el eje Z vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.



Los tres ejes en nuestro sistema determinan tres planos coordenados, que se denominan plano XY, plano XZ y plano YZ. El plano XY contiene los ejes X y Y. Se puede pensar en los planos XZ y YZ de modo similar.
Al tener nuestra estructura construida de ejes coordenados y planos, podemos describir cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ de una sola manera:

$$P = (x, y, z) \tag{2}$$

en donde la primera coordenada X es la distancia dirigida del plano YZ a P (medida en la dirección positiva del eje X a lo largo de una recta paralela al eje X), la segunda coordenada Y es la distancia dirigida desde el plano XZ hasta P (medida en la dirección positiva del eje Y y a lo largo de una recta paralela al eje Y) y la tercera coordenada Z es la distancia dirigida desde el plano XY hasta P (medida en la dirección positiva del eje Z y a lo largo de una recta paralela al eje Z).

En este sistema los tres planos coordenados dividen al espacio 3 en ocho octantes, de la misma forma que en 2 los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se selecciona como el primero.

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como sistema de coordenadas rectangulares o sistema de coordenadas cartesianas. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema le resulte familiar pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Entonces el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que se extiende de P a Q. Dos segmentos de recta dirigidos son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección.

Definición Geométrica de un Vector en el espacio

Un vector en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama una representación del vector.

Definición Algebraica de un Vector en el espacio

Un vector v en el espacio es un trio ordenado de números reales (a, b, c). Los números a, b y c se denominan elementos o componentes del vector v. El vector cero es el vector $(0, 0, 0)$.

Suma de vectores y multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y α un escalar entonces:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \tag{3}$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \tag{4}$$

Producto punto o producto escalar

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores en el espacio, entonces el producto escalar de u y v, denotado por $u \cdot v$, está dado por:

$$u \cdot v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \tag{5}$$

Distancias y normas

Magnitud o Norma de un vector en el espacio

Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la magnitud o longitud de un vector como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su dirección como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $v = (a, b, c)$ se encuentra que:

$$\|v\| = magnitud\, de\, v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{6}$$

Además, si v es un vector del espacio, entonces:

$$\|v\|^2 = v \cdot v \tag{7}$$

Ángulo entre vectores

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores en el espacio diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces:

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \tag{8}$$

Vectores paralelos y ortogonales

Dos vectores diferentes de cero u y v son:

i. **Paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 ó π. Se observa que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direccione opuestas.

ii. **Ortogonales (o perpendiculares)** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$

Además,

Si $u \neq 0$, entonces u y v son paralelos si y sólo si $v = \alpha u$ para algún escalar $\alpha \neq 0$
Si u y v son vectores diferentes de cero, entonces u y v son ortogonales si y sólo si $u \cdot v = 0$
Si $u \neq 0$, entonces para cualquier otro vector u el vector

$$w = u - \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \tag{9}$$

es ortogonal a v

Vector Unitario

Un vector unitario u es un vector con magnitud 1. Si un vector es diferente de cero, entonces

$$u = \frac{v}{\|v\|} \tag{10}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección de v

Dirección en $\mathbb{R}^3$

La dirección de un vector v en$\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario

$$u = \frac{v}{\|v\|} \tag{11}$$

Proyección

Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de u sobre v es un vector denotado por:

$$proy_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}\, v \tag{12}$$

Distancia entre dos puntos en el espacio

Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia entre P y Q está dada por:

$$d(PQ) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{13}$$

El Producto Cruz de dos Vectores

Hasta el momento el producto de vectores considerado ha sido el producto escalar o producto punto. Ahora se define un nuevo producto, llamado **producto cruz (o producto vectorial)** , que está definido sólo en $\mathbb{R}^3$.

Producto cruz

Sean $u = a_1i + b_1j + c_1k$ y $v = a_2i + b_2j + c_2k$, con $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)yk = (0, 0, 1)$. Entonces el producto cruz (producto vectorial) de u y v, denotado $u \times v$, es un nuevo vector definido por:

$$u \times v = (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_2 - a_1c_2)j + (a_2b_2 - b_1a_2)k \tag{14}$$

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.
Además,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_2 - a_1c_2)j + (a_2b_2 - b_1a_2)k$$

Nota: En realidad no se tiene un determinante porque i, j y k no son números. Sin embargo, al usar la notación de determinantes nos ayuda a recordar cómo calcular un producto cruz.

Propiedades

Sean u,v y w tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i. $u \times 0 = 0 \times u$

ii. $u \times v = -(v \times u)$ (propiedad anticonmutativa para el producto vectorial)

iii. $(\alpha)u \times v = \alpha(u \times v)$

iv. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$ (propiedad distributiva para el producto vectorial)

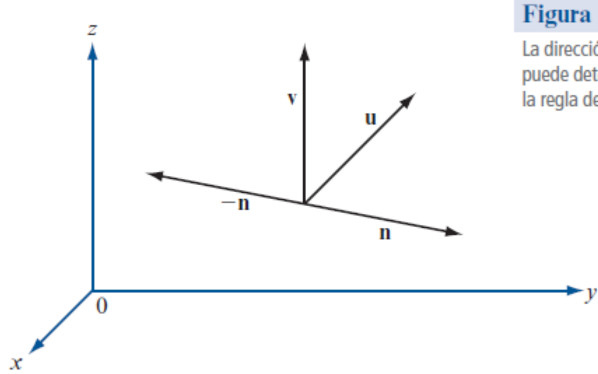
v. $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$ (esto se denomina triple producto escalar de u,v y w)

vi. $u \cdot (u \times v) = u \cdot (u \times v) = 0$ (es decir, $u \times v$ es ortogonal a u y a v)

vii. Si ni u ni v son vectores cero, entonces u y v son paralelos si y sólo si $u \times v = 0$

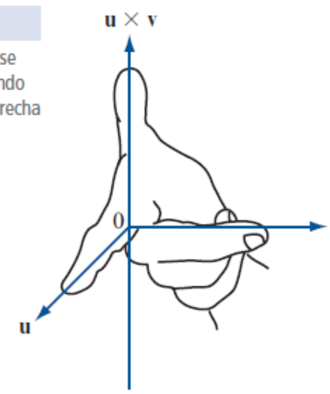
Figura

Existen exactamente dos vectores, **n** y −**n**, ortogonales a dos vectores no paralelos **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$



Figura

La dirección de **u** × **v** se puede determinar usando la regla de la mano derecha



Ángulo entre vectores

Si φ es un ángulo entre u y v, entonces:

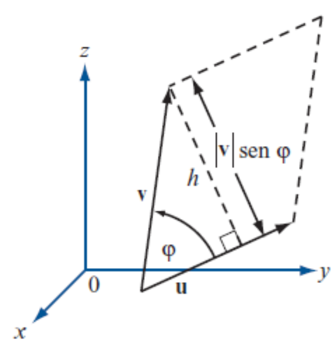
$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \, sen(\varphi) \tag{16}$$

Figura

φ es el ángulo entre **u** y **v**.

$\frac{h}{|\mathbf{v}|} = \text{sen}\,\varphi$ de manera que

$h = |\mathbf{v}|\,\text{sen}\,\varphi$



Área del paralelógramo

El área del paralelógramo que tiene lados adyacentes u y v es igual a:

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \, sen(\varphi) \tag{17}$$

Rectas y planos en el espacio

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien, un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

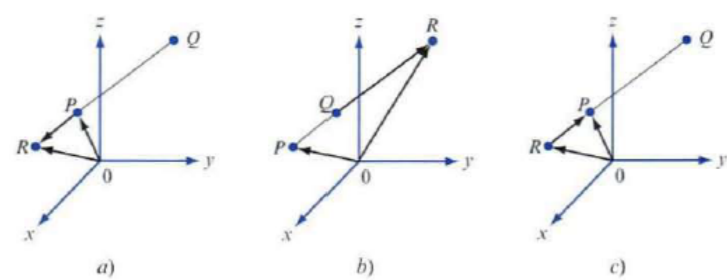
$$v = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \tag{18}$$

Es un vector paralelo a L. ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ que a su vez es paralelo a v, de manera que:

$$\overrightarrow{PR} = tv \tag{19}$$

Para algún número real t. Ahora vea la figura siguiente. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

Figura
En los tres casos
$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$



$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{20}$$

Y al combinar (19) con (20) se tiene:

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + tv \tag{21}$$

Ecuación vectorial de una recta

La ecuación (21) se llama ecuación vectorial de la recta L. Si R está sobre L, entonces (21) se satisface para algún número real t. Inversamente, si (21) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a v, lo que significa que R está sobre L. Si se extienden las componentes de la ecuación (21), se obtiene:

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + t(x_2 - x_1)i + t(y_2 - y_1)j + t(z_2 - z_1)k$$

0 sea

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{22}$$

Ecuaciones Paramétricas de una recta

Las ecuaciones (22) se llaman ecuaciones paramétricas de una recta, por último, al despejar t en (22) y definir $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$, $z_2 - z_1 = c$ se encuentra que si $abc \neq 0$,

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{23}$$

Ecuaciones Simétricas de una recta

Las ecuaciones (23) se llaman ecuaciones simétricas de una recta, válidas sólo si a,b y c son diferentes de cero.

Ecuación vectorial de un plano

La ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector paralelo a esta recta. Se pueden derivar ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama vector normal al plano y se denota por N.

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea N un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos del plano Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot N = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$.

Por lo general, un plano se denota por el símbolo Π.

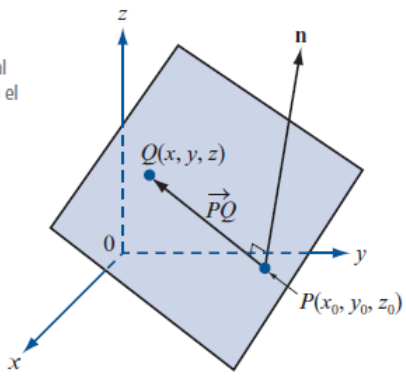
Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo dobre un plano con vector normal $N = ai + bj + ck$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp N$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot N = 0$ pero esto implica que:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{24}$$

Figura

El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano



Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (24):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \tag{25}$$

Donde

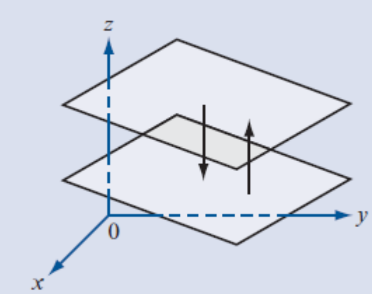
$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{PQ} \cdot N \tag{26}$$

Planos Paralelos

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

Figura

Se dibujaron dos planos paralelos



Bibliografía

Grossman, Stanley. Álgebra Lineal. Mc Graw Hill. 2008. 6ta Edición.