$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot \mathrm{i}) + (c + d \cdot \mathrm{i}) = (a + c) + (b + d) \cdot \mathrm{i}.$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot \mathrm{i}) \cdot (c + d \cdot \mathrm{i}) &= ac + bd\mathrm{i}^2 + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Para $z = a + b \cdot \mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenemos que $a^2 + b^2 \neq 0$, por lo que

$$z^{-1}\left\{\frac{a - b \cdot \mathrm{i}}{a^2 + b^2}\right. \cdot \underbrace{(a + bi)}_{z} = \frac{a^2 - b^2 \cdot \mathrm{i}^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Eso demuestra que z tiene un inverso multiplicativo

$$z^{-1} := \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot \mathrm{i}.$$

Fracciones de Complejos

Dado que cada numero complejo $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es multiplicativamente invertible, es claro que cada complejo $z_1 \in \mathbb{C}$ es divisible por z_2.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ números complejos.

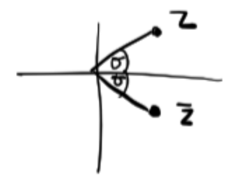
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot (z_2)^{-1} = (a + bi) \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Conjugado de un complejo

Definición: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número complejo en forma cartesiana. Definimos el **conjugado** de z, denotado por $\bar{z}$ como:

$$\bar{z} := a - bi.$$

(a, b) $(a, -b)$



Propiedades (Ejercicio): Sea $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \bar{z}$. $\Rightarrow b = 0$
- $\overline{(\bar{z})} = z$.
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

$z = \bar{z} \Leftrightarrow b = 0$, $z = a + bi$

Ecuaciones cuadráticas reales

Es conocido que si consideramos la ecuación cuadrática

$$1 \cdot x^2 + px + q = 0, \; p, q \in \mathbb{R},$$

$\Delta < 0$

entonces si $p^2 < 4q$, no hay soluciones reales. Sin embargo, si ampliamos nuestro sistema de números para permitir números complejos, las ecuaciones cuadráticas siempre tendrán una solución:

$$x_{\pm} := \frac{-p \pm \text{“}\sqrt{p^2 - 4q}\text{”}}{2}$$

$p^2 < 4ac$ $\Leftrightarrow \Delta < 0$

tiene significado en $\mathbb{C}$ cuando $p^2 < 4q$. En este caso tendremos "$\sqrt{p^2 - 4q}$" se escribirá $\sqrt{4q - p^2} \cdot \mathrm{i}$.

Por lo anterior podemos resolver cualquier ecuación cuadrática de la forma $Z^2 = w$ para un $w \in \mathbb{C}$, esto nos permite resolver ecuaciones cuadráticas generales de la forma

$$uZ^2 + vZ + w = 0$$

para cualquieras $0 \neq u, v, w \in \mathbb{C}$, ya que **completando cuadrado**

$$u\left(Z + \frac{v}{2u}\right)^2 + w - \frac{v^2}{4u} = 0,$$

basta con encontrar las soluciones $\widetilde{z}_{\pm}$ de la ecuación

$$\widetilde{Z}^2 = \frac{v^2 - 4wu}{4u^2},$$

y después calcular $z_{\pm} = \widetilde{z}_{\pm} - \dfrac{v}{2u}$.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

y por la multiplicación

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Propiedades del Módulo

Ejercicio 4. Demuestre que $\forall z \in \mathbb{C}$:

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|-z| = |z| = |\bar{z}|$
- $z\bar{z} = |z|^2$ $\quad (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

Note que la última afirmación nos permite recordar más fácilmente la fórmula para calcular el inverso multiplicativo de un complejo $z \neq 0$:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}. \qquad \text{(Ejercicio: verificar)}$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Ejercicio 5: Demuestre que para todo $0 \neq w, z \in \mathbb{C}$:

- $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Definición: Si $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, decimos que el número complejo

$(\overset{Re}{r\cdot\cos\sigma}, \overset{Im}{r\cdot \text{sen}\,\sigma})$

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + \mathrm{i} \cdot \text{sen}(\theta))$$

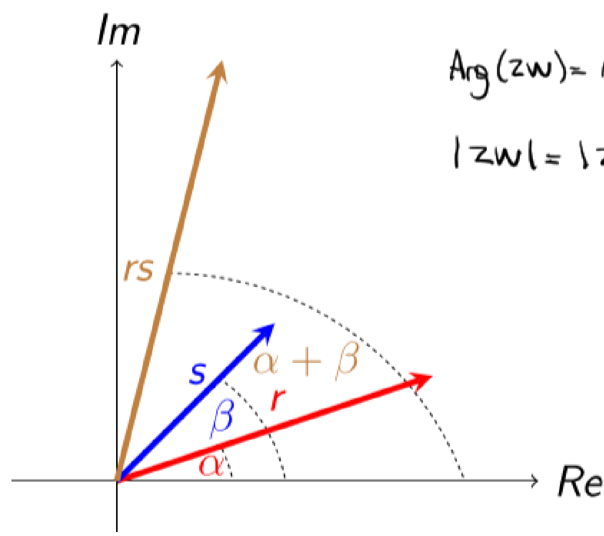
está en su **forma polar** o **forma trigonométrica**. El ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ se denomina el **argumento** de z y se anota $\arg(z) := \theta$.

Proposición: Considere los números complejos

$$z = r \cdot (\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{i}) \quad \text{y} \quad w = s \cdot (\cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cdot \mathrm{i})$$

escritos en su forma polar. Entonces la forma polar de su producto es

$$zw = rs \cdot (\cos(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{i}).$$



$\text{Arg}(zw) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$

$|zw| = |z| \cdot |w|$

Como consecuencia del resultado anterior, el inverso multiplicativo de un número $w = s \cdot (\cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cdot \mathrm{i}) \neq 0$ es

$$w^{-1} = s^{-1} \cdot (\cos(-\beta) + \text{sen}(-\beta) \cdot \mathrm{i}).$$

De esta manera, la división entre dos números complejos en

$$z = r \cdot (\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \cdot \mathrm{i}) \quad \text{y} \quad w = s \cdot (\cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cdot \mathrm{i})$$

en forma polar es

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot \Big(\cos(\alpha - \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \mathrm{i} \Big).$$

Teorema (De Moivre)

Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\colon\ \Big(\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cdot \mathrm{i}\Big)^n = \cos(n\cdot\theta) + \operatorname{sen}(n\cdot\theta)\cdot \mathrm{i}.$$

Corolario

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $w = r\Big(\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot \mathrm{i}\Big) \neq 0$. Entonces la ecuación

$$z^n = w$$

tiene como solución cualquier número de la forma

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\cdot \mathrm{i}\Big).$$

cualquiera sea $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En particular, existen n soluciones distintas para dicha ecuación.

$$\begin{aligned} z_k^n &= (\sqrt[n]{r})^n \cdot \left(\cos\left(n\cdot\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\cdot \mathrm{i}\right) \\ &= r\cdot\Big(\cos(\alpha + k2\pi) + \operatorname{sen}(\alpha + k2\pi)\cdot \mathrm{i}\Big) \\ &= r\cdot\Big(\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot \mathrm{i}\Big) = w \qquad \square \end{aligned}$$

$z^n = w$

$(z_k)^n = w$

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

*Todo polinomio no constante, con coeficientes en $\mathbb{C}$, posee **al menos** una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$.*

- Para un polinomio con coeficientes reales, el teorema implica que para cada raíz compleja z, su conjugado $\bar{z}$ también es raíz.
- Es importante notar que el teorema sólo habla de la existencia de una raíz, pero no ofrece una manera de calcularla.
- Aplicando el teorema iterativamente obtenemos que cada polinomio factoriza completamente en fatores lineales (no necesariamente todas distintas).