Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.
Coordinación Cálculo I

# Guía de Ejercicios

Preparación Pep 1

1. Resolver $|3 + |2 - x|| < 5$.

2. Resolver $\dfrac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0$

3. Determine los valores de $a$ y $b$ de modo que el conjunto solución de $|x - a| \leq b$ sea igual al conjunto solución de $x^2 - 7x - 8 \leq 0$.

4. Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que las soluciones de la ecuación
$$4x^2 - (k+1)x + (2-k) = 0$$
sean reales, distintas, pero del mismo signo.

5. Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la parábola de ecuación $y = (x+3)^2 + 2$ se intersecte con la recta de ecuación $y = 2x + k$ en un sólo punto. ¿En qué punto se produce dicha intersección?

6. Considere las funciones $f(x) = 1 - \sqrt{-x^2 - 2x}$ y $g(x) = 1 - |x|$. Determine:
   a) $\mathrm{Dom}(f \circ g)$
   b) Explícitamente $(f \circ g)(x)$

7. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real. Se definen las funciones $f_p$ y $f_i$ de la siguiente manera:
$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
Demuestre que $f_p$ es una función par y que $f_i$ es una función impar. Obtenga $f_p$ y $f_i$ para la función $f(x) = x^2 + 6x + 4$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$. Determine:
   a) $\mathrm{Dom}(f)$
   b) Si $f$ es creciente, decreciente o no es monónota.
   c) Si $f$ es par, impar o ninguna de las dos.
   d) $\mathrm{Rec}(f)$

9. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Determine:

   *a*) Dom$(f)$

   *b*) Paridad de $f$

   *c*) Intervalos de crecimiento

   *d*) Rec$(f)$

   *e*) Ceros de la función

   *f*) Restrinja el dominio de la función al mayor conjunto donde la función sea biyectiva y encuentre $f^{-1}$

10. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^2 + |x|}$$

    Demostrar que Rec$(f) \subset [-1, 1]$

11. Considere la función $f(x) = |x^2 - x - 6| - |x|$.

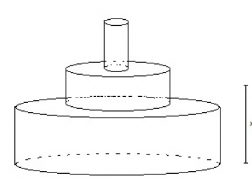
    *a*) Escríbala como una función por tramos

    *b*) Grafique $f(x)$

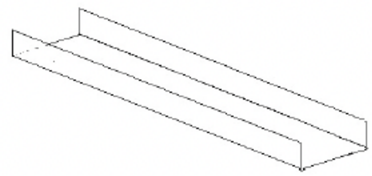
    *c*) A partir de lo anterior, grafique la función $g(x) = |f(x)|$

12. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
    Determine si $f \circ g = g \circ f$

13. Un sólido, que está siendo llenado con agua, está formado por tres cilindros concéntricos de radios 4, 2 y 1 $[cm]$ respectivamente. Las alturas de estos cilindros son 50, 65 y 70 $[cm]$ (ver figura). Obtenga el volumen de agua que ha ingresado en el sólido en función de $x$, donde $x$ es la altura del agua que ha ingresado en el sólido.




14. De un rectángulo de lata de $300[cm]$ de largo y de $2[m]$ de ancho se confecciona una canaleta para el agua doblando $x[cm]$ la orillas (ver figura). Exprese el volumen de agua que puede contener la canaleta en función de $x$. ¿Cuál es el mayor Volumen posible?



15. Un equipo de fútbol juega de local en un estadio que tiene una capacidad máxima de 50.000 personas. Con el precio de la entrada a $5.000, el público asistente a cada partido es de 30.000 personas. El club desea aumentar sus ingresos y ha realizado un estudio de mercado que indica que por cada $500 de rebaja en la entrada asistirán 4000 personas más.

    *a*) ¿Cuál es el mayor ingreso que podría conseguir el club? ¿Cómo logra tal ingreso?

    *b*) ¿Hay algún riesgo de que el club obtenga un ingreso menor al actual?

**Soluciones**

1. $]0,4[$
2. $]-1,0]\cup]1,2[$
3. $a=7/2$, $b=9/2$
4. $k\in]4\sqrt{7}-9,2[$
5. $k=7$. Se intersectan en el punto $P(-2,3)$
6. *a)* $[-3,-1]\cup[1,3]$

   *b)* $(f\circ g)(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{-4x-x^2-3} & \text{si } -3\leq x\leq -1 \\ 1-\sqrt{4x-x^2-3} & \text{si } 1\leq x\leq 3 \end{cases}$
7. $f_p(x)=x^2+4,\ f_i(x)=6x$
8. *a)* $[-1,1]$

   *b)* Creciente

   *c)* Impar

   *d)* $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
9. *a)* $\text{Dom}(f)=[-1,1]$

   *b)* $f$ es una función par

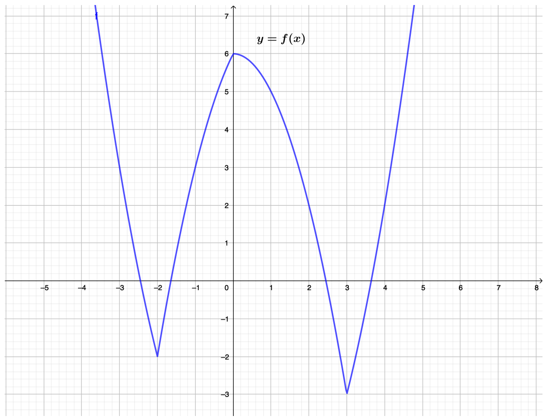
   *c)* $f$ es creciente en $]0,1[$ y decreciente en $]-1,0[$

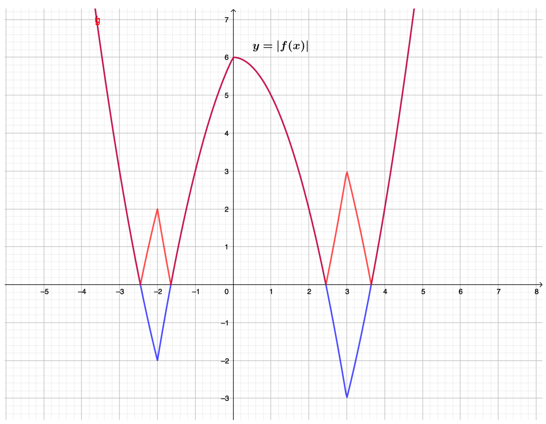
   *d)* $\text{Rec}(f)=[-1,1]$

   *e)* Ceros de la función $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   *f)* $f:[0,1]\to[-1,1]$ definida como $f(x)=|x|-\sqrt{1-x^2}$ es biyectiva y $f^{-1}(x)=\dfrac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}$

11. *a)* $f(x)=\begin{cases} x^2-6 & x\leq -2 \\ -x^2+2x+6 & -2<x<0 \\ -x^2+6 & 0<x\leq 3 \\ x^2-2x-6 & 3\leq x \end{cases}$

$b)$ 


$c)$ 


12. Si, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

13. $V(x) = \begin{cases} 16\pi x, & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 800\pi + 4\pi(x-50), & \text{si } 50 < x \leq 115 \\ 1060\pi + \pi(x-115), & \text{si } 115 < x \leq 185 \end{cases}$

14. $V(x) = 400(15x - x^2)$. El volumen máximo será de 22.500$[cm^3]$.

15. *a*) El ingreso máximo será de $153.125.000 y se obtiene con el precio de las entradas a $4.375

    *b*) El ingreso será menor al actual si el precio de las entradas en menor que $3.750