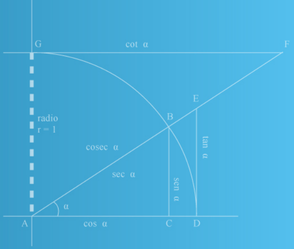
Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

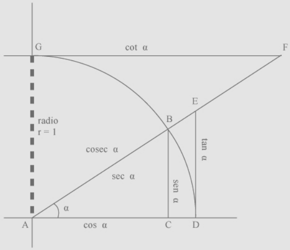
Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

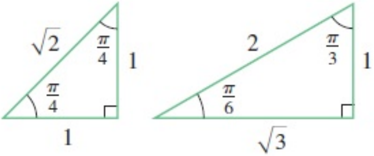
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Recordar: Los valores de seno, coseno y tangente para ángulos específicos de θ

Grados	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Para obtener de forma rápida valores especificos, es posible apoyarse de triángulos rectángulos comunes.



Con éstos valores encontrados, usando goemretría euclideana elemental más los que se podemos encontrar con la ayuda de la calculadora, podemos esbozar los gráficos de las funciones seno, coseno y demás.

Definición

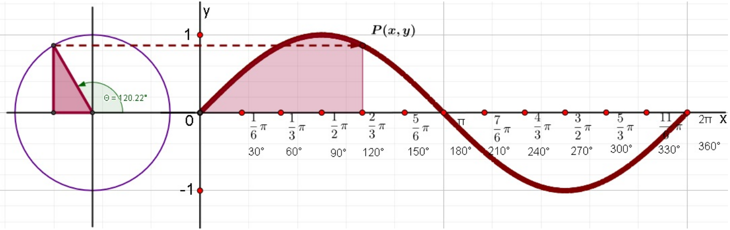
La función seno se define:

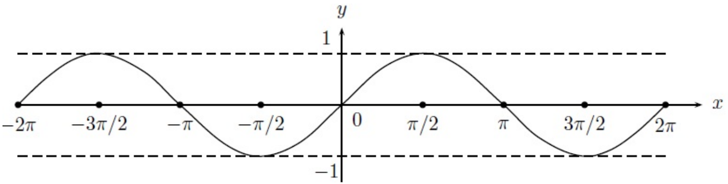
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = \sin(x) \end{aligned}$$

Definición

La función seno se define:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \sin(x)$$





Asi $f(x) = \sin(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Rec(f) = [-1, 1]$ $\qquad$ Raices o ceros en $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Definición

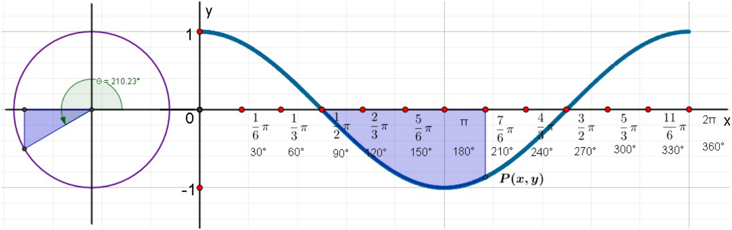
La función coseno se define:

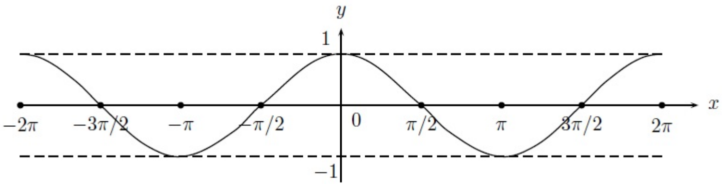
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = \cos(x) \end{aligned}$$

Definición

La función coseno se define:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = \cos(x)$$





Asi $f(x) = \cos(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad$ $Rec(f) = [-1, 1]$ $\quad$ Raices o ceros en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Definición

La función tangente se define:

$$f : \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

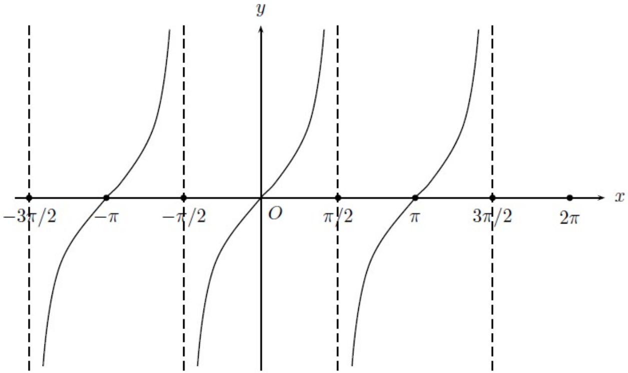
$$x \quad \rightarrow \; y = \tan(x), \qquad \textbf{donde } tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Definición

La función tangente se define:

$$f : \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \quad \to \quad y = \tan(x), \qquad \textbf{donde}\ tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$



Asi $f(x) = \tan(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$Rec(f) = \mathbb{R}$ Raices o ceros en $x{=}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Definición

La función cotangente se define:

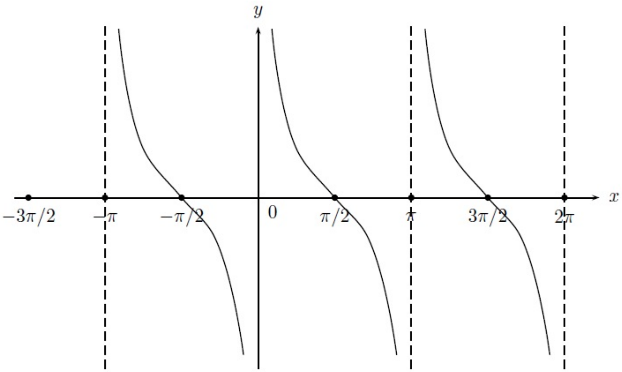
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{k\pi\} &\rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z} \\ x &\rightarrow y = \cot(x), \ \textbf{donde } cotan(x) = \tfrac{cos(x)}{sin(x)} \end{aligned}$$

Definición

La función cotangente se define:

$$f : \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \rightarrow y = \cot(x),\ \textbf{donde}\ cotan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$



Asi $f(x) = \cot(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}$
$Rec(f) = \mathbb{R}$

Raices o ceros en x$=\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Definición

La función secante se define:

$$f : \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

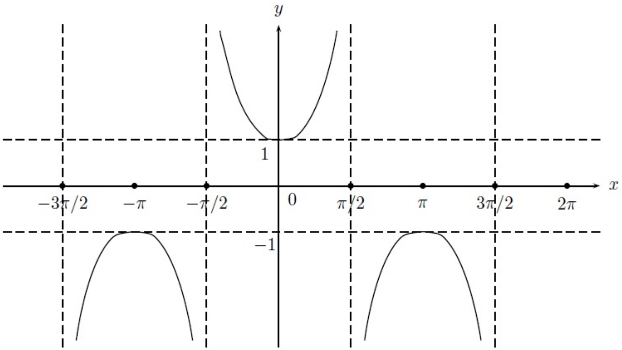
$$x \quad \rightarrow y = \sec(x), \ \textbf{donde } sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

Definición

La función secante se define:

$$f : \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \quad \rightarrow y = \sec(x), \ \textbf{donde}\ sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$



Asi $f(x) = \sec(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\}$
$Rec(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

No presenta Raices o ceros.

Definición

La función cosecante se define:

$$f : \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in Z$$

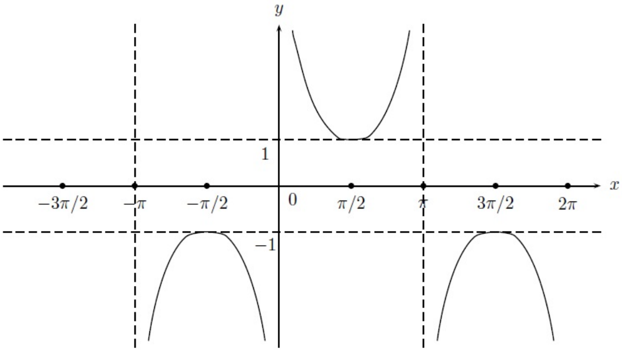
$$x \quad \rightarrow y = \csc(x), \ \textbf{donde} \csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$$

Definición

La función cosecante se define:

$$f : \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} \quad con\ k \in Z$$

$$x \quad \rightarrow y = \csc(x), \ \textbf{donde} \ \csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$$



Asi $f(x) = \csc(x)$:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}$
$Rec(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

No presenta Raices o ceros.

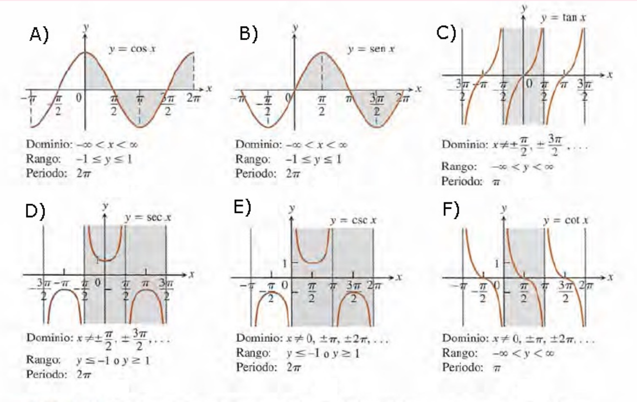
Definición

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo p, con $p > 0$, si $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El menor de los valores de p, usualmente es llamado periodo fundamental de f.

Definición

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo p, con $p > 0$, si $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El menor de los valores de p, usualmente es llamado periodo fundamental de f.

Gráficas de las seis funciones trigonométricas básicas



Ejemplo 2:

a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x+1)$ es periódica de periodo 2π.

Ejemplo 2:

a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x+1)$ es periódica de periodo 2π.
Solución:

$$\begin{aligned} \cos((x+2\pi)+1) &= \cos(x+2\pi)\cos(1) - \sin(x+2\pi)\sin(1) \\ &= \cos(x)\cos(1) - \sin(x)\sin(1) = \cos(x+1) \end{aligned}$$

Esto implica $f(x) = f(x+2\pi) = f(x+p)$. Así $f(x) = \cos(x+1)$ es una función periódica de período 2π.

Ejemplo 2:

a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x+1)$ es periódica de periodo 2π.
Solución:

$$\begin{aligned}\cos((x+2\pi)+1) &= \cos(x+2\pi)\cos(1) - \sin(x+2\pi)\sin(1)\\ &= \cos(x)\cos(1) - \sin(x)\sin(1) = \cos(x+1)\end{aligned}$$

Esto implica $f(x) = f(x+2\pi) = f(x+p)$. Así $f(x) = \cos(x+1)$ es una función periódica de período 2π.

b) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 + 3x$ no es periódica.

Ejemplo 2:

a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x+1)$ es periódica de periodo 2π.
Solución:

$$\begin{aligned} \cos((x+2\pi)+1) &= \cos(x+2\pi)\cos(1) - \sin(x+2\pi)\sin(1) \\ &= \cos(x)\cos(1) - \sin(x)\sin(1) = \cos(x+1) \end{aligned}$$

Esto implica $f(x) = f(x+2\pi) = f(x+p)$. Así $f(x) = \cos(x+1)$ es una función periódica de período 2π.

b) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 + 3x$ no es periódica.
Solución: Supongamos que $f(x)$ periódica, de periodo $p \in \mathbb{R} - 0$, entonces se debe satisfacer que $f(x+p) = f(x)$, esto es

$$\begin{aligned} f(x+p) = 2(x+p)^2 + 3(x+p) &= 2x^2 + 3x + 4px + 2p^2 + 3p \\ &= 2x^2 + (2p+3)x + p^2 + 3p = 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

lo cual es cierto sólo cuando $p = 0$, pero eso es absurdo, pues $p \neq 0$. Por lo tanto, $f(x)$ no es una función periódica.

Ejemplo 2:

a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x+1)$ es periódica de periodo 2π.
Solución:

$$\begin{aligned} \cos((x+2\pi)+1) &= \cos(x+2\pi)\cos(1) - \sin(x+2\pi)\sin(1) \\ &= \cos(x)\cos(1) - \sin(x)\sin(1) = \cos(x+1) \end{aligned}$$

Esto implica $f(x) = f(x+2\pi) = f(x+p)$. Así $f(x) = \cos(x+1)$ es una función periódica de período 2π.

b) Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 + 3x$ no es periódica.
Solución: Supongamos que $f(x)$ periódica, de periodo $p \in \mathbb{R} - 0$, entonces se debe satisfacer que $f(x+p) = f(x)$, esto es

$$\begin{aligned} f(x+p) = 2(x+p)^2 + 3(x+p) &= 2x^2 + 3x + 4px + 2p^2 + 3p \\ &= 2x^2 + (2p+3)x + p^2 + 3p = 2x^2 + 3x \end{aligned}$$

lo cual es cierto sólo cuando $p = 0$, pero eso es absurdo, pues $p \neq 0$. Por lo tanto, $f(x)$ no es una función periódica.

Ejercicio

¿Cuál es el período de las siguientes funciones? Ayuda: Diseñar un bosquejo gráfico.

a) $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$ b) $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$ c) $f(x) = \sin(x + \frac{x}{6})$

Las funciones de la forma $f(x) = a\sin(Bx) + b\cos(Bx)$, se llaman funciones sinusoidales, las cuales modelan problemas oscilatorios, como del tipo electromagnetismo, luz, por nombrar algunos contextos.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(Bx) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(Bx)\right)$$

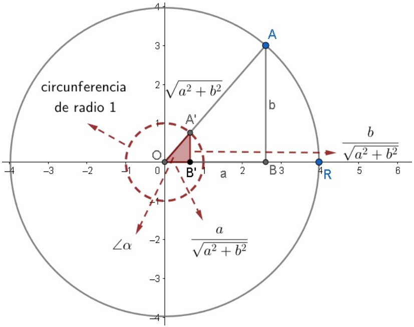


figura 1

Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, entonces el punto $A' = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria y por tanto existe un único $\angle\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$ tal que,

$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

Sea $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces:

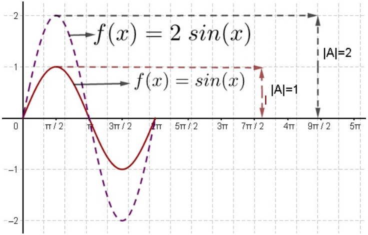
$$f(x) = A(\sin(Bx)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(Bx)) = A\sin(Bx + \alpha)$$

Amplitud (A)

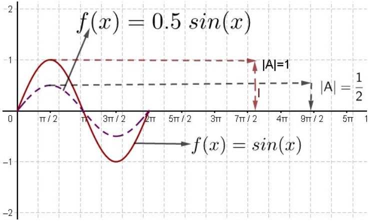
Al valor $|A|$ se denomina amplitud de la función sinusoidal.

$$f(x) = A\sin(x) \ , \ f(x) = A\cos(x)$$

a) Caso 1: Amplitud de $y = 2\sin(x)$ es $|A| = 2$



b) Caso 2: Amplitud de $y = \frac{1}{2}\sin(x)$ es $|A| = \frac{1}{2}$

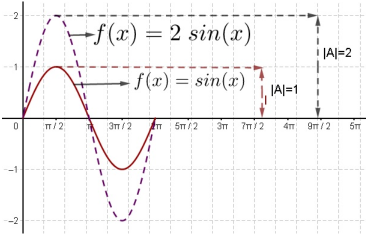


Amplitud (A)

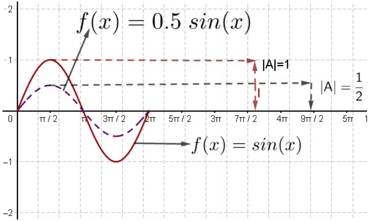
Al valor $|A|$ se denomina amplitud de la función sinusoidal.

$$f(x) = A\sin(x) \; , \; f(x) = A\cos(x)$$

a) Caso 1: Amplitud de $y = 2\sin(x)$ es $|A| = 2$



b) Caso 2: Amplitud de $y = \frac{1}{2}\sin(x)$ es $|A| = \frac{1}{2}$



Ejercicio

Determinar la Amplitud de las siguientes funciones

a) $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y = 0,12\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

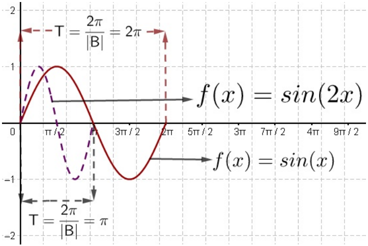
c) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

Período (T)

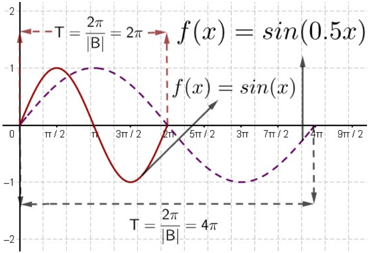
El número $T = \frac{2\pi}{|B|}$ se denomina período de la función sinusoidal.

$$f(x) = A\sin(Bx)\ ,\ f(x) = A\cos(Bx)$$

a) Caso 1: período de $y = \sin(2x)$ es $T = \frac{2\pi}{|B|} = \pi$



b) Caso 2: período de $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ es $T = \frac{2\pi}{|B|} = 4\pi$

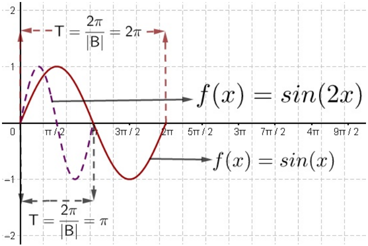


Período (T)

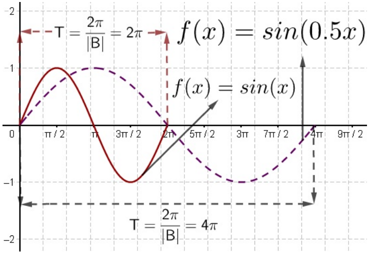
El número $T = \frac{2\pi}{|B|}$ se denomina período de la función sinusoidal.

$$f(x) = A\sin(Bx)\ ,\ f(x) = A\cos(Bx)$$

a) Caso 1: período de $y = \sin(2x)$ es $T = \frac{2\pi}{|B|} = \pi$



b) Caso 2: período de $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ es $T = \frac{2\pi}{|B|} = 4\pi$



Ejercicio

Determinar el período T de las siguientes curvas.

a) $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y = 0,12\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

c) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

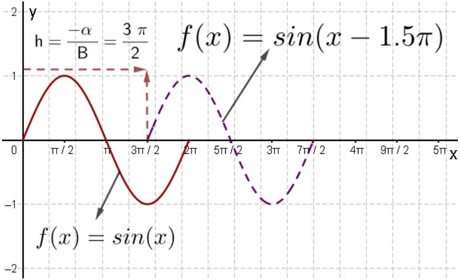
Desfase

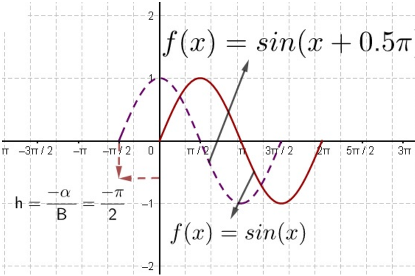
El ángulo $h = \frac{-\alpha}{B}$ se denomina desfase de la función sinusoidal, el cual es el ángulo donde la sinusoide está desfasada horizontalmente con respecto al origen. Así, el ciclo se inicia en el punto $(h, 0) = \left(\frac{-\alpha}{B}, 0\right)$.

$$f(x) = A\sin(Bx + \alpha) = A\sin\left(B\left(x - \left(\frac{-\alpha}{B}\right)\right)\right)$$

a) Caso 1: desfase de $y = \sin(x - \frac{3\pi}{2})$ es $h = \frac{3\pi}{2}$ pues $\alpha = \frac{-3\pi}{2}$ y $B = 1$.

b) Caso 2: desfase de $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ es $h = \frac{-\pi}{2}$ pues $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $B = 1$.





Ejercicio

Determinar el desfase $h = \frac{-\alpha}{B}$ de las siguientes curvas.

a) $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y = 0,12\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

c) $y = -5\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

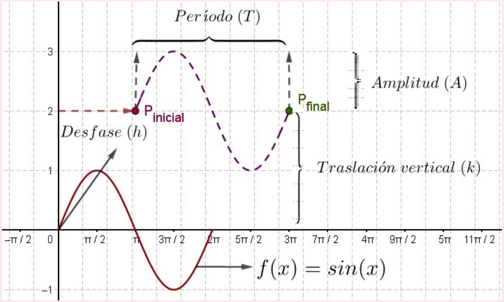
Ejercicio

Determinar el desfase $h = \frac{-\alpha}{B}$ de las siguientes curvas.

a) $y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{5}\right)$ b) $y = 0,12\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$ c) $y = -5\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

En síntesis: Amplitud, Desfase y período de funciones sinusoidales

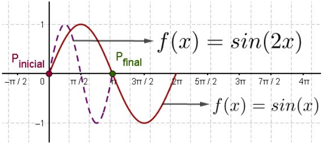
$$f(x) = A\sin(Bx + \alpha) + D$$



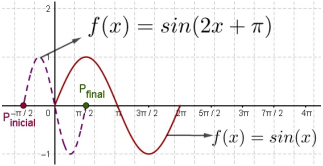
- Amplitud (A): $|A|$.
- Período (T): $T = \frac{2\pi}{|B|}$.
- Desfase (h): $h = \frac{-\alpha}{B}$.
- Traslación vertical (k): $k = D$.
- Punto inicial : $(h, k) = (\frac{-\alpha}{B}, D)$.
- Punto final : $(h + T, k) = (\frac{-\alpha}{B} + \frac{2\pi}{|B|}, D)$.

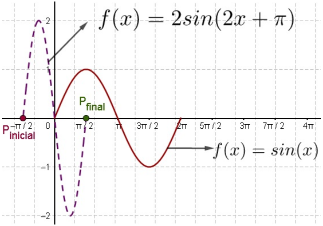
Ejemplo: ¿Cuál es la Amplitud, Desfase y período de la siguiente función? Diseñe un bosquejo gráfico para el caso $f(x) = 2\sin(2x+\pi)+1$

G1

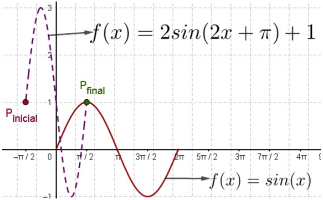


G2





- Amplitud (A): $|A| = 2$.
- Período (T): $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.
- Desfase (h): $h = \frac{-\pi}{2}$.
- Traslación vertical (k): $k = 1$.
- Punto inicial : $(h, k) = (\frac{-\pi}{2}, 1)$.
- Punto final : $(h+T, k) = (\frac{-\pi}{2}+\pi, 1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$.



Ejercicio

¿Cuál es la Amplitud, Desfase y período de las siguientes funciones? Diseñe un bosquejo gráfico para cada caso.

a) $f(x) = 2\sin(x+\pi) - 1$

b) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

c) $f(x) = -3\sin(x+\frac{\pi}{6})+1$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

e) $f(x) = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

f) $y = -\cos(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}) + 1$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

Coordinación de Cálculo I
Primera versión - Agosto 2020

Profesor:
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE