

Elementos de Álgebra
Lógica, Conjuntos, Relaciones, Funciones
y algo más...

Dr. Carlos Lizama
Departamento de Matemática y C.C.
Facultad de Ciencias
Universidad de Santiago de Chile

Prefacio

Este texto de estudio está dirigido a estudiantes de primer ciclo de enseñanza en la Universidad de Santiago de Chile. En él se abordan los aspectos básicos de matemática, como son sus fundamentos axiomáticos a partir de la lógica y la teoría de conjuntos. Se han escrito los primeros capítulos de este libro en la convicción que una buena base formativa en el primer año de enseñanza universitaria son fundamentales para el buen avance y progreso del estudiante en su trayecto en la universidad. De esta manera se aborda desde un principio la idea de la demostración o prueba matemática pero de una manera simple y gradual, avanzando hacia formas más abstractas hacia el final del segundo capítulo. En el tercer capítulo se aborda un clásico tema: Inducción Matemática. Se espera que con una buena comprensión y ejercitación de los contenidos previos, el estudiante pueda abordar este tópico con menor grado de dificultad que el que tradicionalmente ocurre.

Los capítulos siguientes son una elección arbitraria del autor. Se pretende cubrir materias que requieren de un manejo fluido y que son el mínimo necesario para tratar de asegurar el éxito posterior del estudiante. Es común encontrar jóvenes con falencias cuya causal es motivo de discusión y preocupación en diversos estamentos. Sin embargo el objetivo aquí es ocuparse del problema, e intentar dar los elementos para resolverlo. Para ello, el cuarto y quinto capítulos comienzan abordando conceptos básicos de geometría analítica. La idea de gráfico, recta y funciones cuadráticas son cubiertos con gran detalle. El sexto capítulo cubre el material de función exponencial y logaritmo. Es común encontrar fallas en el estudiante cuando ocupa propiedades básicas de estas funciones que son fundamentales en álgebra y cálculo avanzado. Sin embargo un adecuado estudio mediante la visualización gráfica y, a partir de ello, el estudio de sus principales propiedades subsana notablemente el problema. Finalmente, el séptimo capítulo introduce la no-

ción de sistemas de ecuaciones y matrices, a fin de preparar el camino para un curso posterior sobre teoría de matrices y álgebra lineal.

No es fácil escribir un texto de matemática a nivel elemental cuando ya se han escrito muchos y de muy buena calidad. Es factible, sin embargo, reorganizar el material ya existente en un texto que esté orientado a las condiciones particulares de los estudiantes de una universidad o de un programa particular. Esto es precisamente lo que se ha pretendido hacer de estos apuntes.

El autor agradece desde ya a aquellos lectores que puedan contribuir a la mejoría de estos apuntes y a la enseñanza de la matemática mediante sus opiniones y sugerencias.

Especiales agradecimientos a Maricel Cáceres, quien escribió en Latex, en tiempo récord y con mucha dedicación y paciencia el material de este texto.

Dr. Carlos Lizama

Santiago, 2002.

Índice General

1	Lógica	6
1.1	Tablas de verdad	6
1.2	Implicación y Bicondicional	10
1.3	Tautologías	16
1.4	Argumentos y el principio de demostración	18
1.5	Cuantificadores	24
1.6	Métodos de Demostración	26
1.7	Ejercicios	31
2	Conjuntos, Relaciones y Funciones	36
2.1	Conjuntos	36
2.2	Conjuntos de validez de funciones proposicionales	44
2.3	Relaciones	47
2.4	Particiones y relaciones de equivalencia	59
2.5	Funciones	64
2.6	Ejercicios	76
3	Inducción matemática	80
3.1	Formas equivalentes de inducción	85
3.2	El binomio de Newton	90
3.3	Ejercicios	94

4	Funciones y gráficas	98
4.1	Gráficas de ecuaciones	100
4.2	Rectas	108
4.3	Gráfica de una función real	116
4.4	Funciones cuadráticas	126
4.5	Álgebra de funciones	129
4.6	Ejercicios	131
5	Secciones Cónicas	136
5.1	Parábolas	136
5.2	Elipses	139
5.3	Hipérbolas	142
5.4	Ejercicios	146
6	Funciones Exponenciales y Logarítmicas	150
6.1	Funciones exponenciales	150
6.2	Funciones logarítmicas	155
6.3	Propiedades de los logaritmos	158
6.4	Ejercicios	162
7	Sistemas de Ecuaciones y Matrices	166
7.1	Sistemas de ecuaciones	166
7.2	Sistemas de ecuaciones lineales	171
7.3	Matrices	173
7.4	Álgebra de matrices	178
7.5	Inversa de una matriz	182
7.6	Ejercicios	184

Capítulo 1

Lógica

1.1 Tablas de verdad

La construcción de la lógica se realiza mediante *proposiciones*. Una proposición es una sentencia declarativa la cual puede ser verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo, por ejemplo, “2 es mayor que 3” y “todos los triángulos equiláteros son equiangulares” son proposiciones, mientras que “ $x < 3$ ” y “esta afirmación es falsa” no lo son (la primera de estas es una sentencia declarativa pero no se le puede asignar un valor de verdad hasta que se conozca lo que “ x ” representa; por otro lado, no es posible asignarle un valor verdad a la segunda).

Denotaremos las proposiciones por letras minúsculas : p, q, r, s , etc. En cualquier discusión dada, diferentes letras pueden o no representar diferentes proposiciones, pero una letra que aparezca más de una vez en una discusión representa siempre la misma proposición. A una proposición verdadera corresponde el valor de verdad V (verdadero) y a una proposición falsa un valor de verdad F (falso). Así, “ $2 + 3 < 7$ ” tiene un valor de verdad V , mientras que “ $2 + 3 = 7$ ” tiene un valor de verdad F .

Nos interesa combinar proposiciones simples (o subproposiciones) para construir proposiciones más complicadas (o proposiciones compuestas). Se combinan proposiciones con *conectivos* que, entre otros, son “y”, “o” e “implica”.

Si p, q son dos proposiciones, entonces “ p y q ” es también una proposición llamada la *conjunción* de p y q , y denotada por

$$p \wedge q.$$

El valor de verdad de $p \wedge q$ depende de los valores de verdad de las proposiciones p y q : $p \wedge q$ es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas, de otra manera es falsa. Notar que este es el significado usual que se asigna a “y”

Una manera conveniente de describir lo anterior es por una *tabla de verdad*. Como cada una de las proposiciones p, q tiene dos valores posibles de verdad, juntas ellas tienen $2 \times 2 = 4$ posibles valores de verdad de manera que la siguiente tabla combina todas las posibilidades :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla anterior se considera también como la definición del conectivo \wedge .

Notar que la tabla anterior no tiene nada que ver con p y q ; estos últimos son sólo variables, en la misma forma que tiene el rol de x en la notación funcional $f(x) = 2x - 3$.

Para mejor comprensión de este punto se propone el siguiente :

Ejercicio : Se define el conectivo \star como $p \star q$ es verdadero sólo cuando q es verdadero y p es falso, y es falso de otra forma.

a) Escribir la tabla de verdad de $p \star q$.

b) Escribir la tabla de verdad de $q \star p$.

Otro conectivo común es “o”, llamado también *disjunción*. La disjunción de p y q denotada por

$$p \vee q,$$

es verdadera cuando *al menos uno* de p , q es verdadero. Este es llamado el “o inclusivo”. Observemos que en la conversación habitual se usa a menudo “o” en el sentido exclusivo, esto es, válido sólo cuando *exactamente una* de las subproposiciones es verdadera. Por ejemplo, la verdad de “cuando me llames estaré en el dormitorio o paseando al perro” no incluye usualmente ambas posibilidades. En matemática se usa siempre el “o” en el sentido inclusivo y su tabla de verdad es la siguiente :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dada cualquier proposición p , se puede formar una nueva proposición con el valor de verdad opuesto, llamado la *negación* de p , que se denota por

$$\neg p.$$

También se lee : “no p ”. La tabla de verdad es

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplos

- a) $3 + 5 > 7$.
- b) No es el caso que $3 + 5 > 7$.
- c) $3 + 5 \leq 7$.
- d) $x^2 - 3x + 2 = 0$ no es una ecuación cuadrática.
- e) No es verdad que $x^2 - 3x + 2 = 0$ no es una ecuación cuadrática.
- f) $x^2 - 3x + 2 = 0$ es una ecuación cuadrática.

Observemos que (b) y (c) son negaciones de (a); (e) y (f) son negaciones de (d). Sin embargo, (c) y (f) se prefieren sobre (b) y (e) respectivamente.

Se usará la misma convención para \neg que como para $-$ en álgebra, esto es, se aplica sólo al símbolo siguiente, que en nuestro caso representa una proposición. Así $\neg p \vee q$ significa $(\neg p) \vee q$ en vez de $\neg(p \vee q)$, tal como $-3 + 4$ representa 1 y no -7 .

La convención anterior no es siempre fácil de entender en el lenguaje habitual. Supongamos que p representa “ $2 + 2 = 4$ ” y q representa “ $3 + 2 < 4$ ”. Entonces “No es el caso que $2 + 2 = 4$ ó $3 + 2 < 4$ ” ¿significa $\neg(p \vee q)$ o $(\neg p) \vee q$?

Si adoptamos la primera forma entonces ¿Cómo escribimos la segunda en palabras? Adoptaremos la siguiente convención: la frase “no es el caso que ” (o cualquier otra similar como “es falso que”) se aplica a todo lo que sigue, salvo por algún tipo de puntuación gramatical. Así “no es el caso que $2 + 2 = 4$ ó $3 + 2 < 4$ ” significa $\neg(p \vee q)$, mientras que “no es el caso que $2 + 2 = 4$, o $3 + 2 < 4$ ” significa $\neg p \vee q$.

Las tablas de verdad se pueden utilizar para expresar los posibles valores de verdad de proposiciones compuestas. Por ejemplo, construyamos la tabla

de verdad para $\neg(p \vee \neg q)$:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

Ejercicio : Construir las tablas de verdad para

- a) $\neg p \vee q$.
- b) $\neg p \wedge p$.
- c) $(\neg p \vee q) \wedge r$.
- d) $\neg(p \wedge q)$.
- e) $\neg p \wedge \neg q$.
- f) $\neg p \vee \neg q$.
- g) $p \vee \neg p$.
- h) $\neg(\neg p)$.

1.2 Implicación y Bicondicional

Si escribimos las tablas de verdad de $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ (Ejercicio (d) y (f) de la sección anterior) y las comparamos, notaremos que estas dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad de manera que, en algún sentido, son lo mismo. Este es un concepto importante que requiere una definición.

Definición 1 *Suponga que dos proposiciones p , q tienen la misma tabla de verdad. Entonces diremos que p y q son lógicamente equivalentes, lo cual se denotará*

$$p \Longleftrightarrow q.$$

Básicamente, cuando dos proposiciones son lógicamente equivalentes ellas tienen la misma forma, y se puede sustituir una por la otra en cualquier otra proposición o teorema. Es importante notar que es la *forma* y no el valor de verdad de una proposición lo que determina si ella es (o no es) lógicamente equivalente a otra proposición. Por ejemplo, “ $2 + 2 = 4$ ” y “ $7 - 5 = 2$ ” son ambas proposiciones verdaderas pero *no son* lógicamente equivalentes ya que ellas tienen diferentes tablas de verdad (si se representa la primera por p entonces la otra necesita tener otro símbolo, digamos q , y sabemos que estas no tienen la misma tabla de verdad). Por otra parte, “ $2 + 3 = 5$ ó $3 - 4 = 2$ ” y “ $3 - 4 = 2$ ó $2 + 3 = 5$ ” *son* lógicamente equivalentes. Para comprobar esto, sea p que represente “ $3 - 4 = 2$ ” y q represente “ $2 + 3 = 5$ ”. Entonces la primera es de la forma $q \vee p$ y la segunda es de la forma $p \vee q$. Si construimos la tabla de verdad comprobamos que ambas son iguales (Ejercicio).

Usando la idea anterior de equivalencia lógica se puede establecer la relación entre negación, conjunción y disjunción, llamado *Leyes de De Morgan* : Sean p, q proposiciones. Entonces

$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q.$$

La segunda de ellas se verificó en ejercicio (d) y (f) de la sección anterior. La primera se deja como ejercicio.

Una de las formas proposicionales más importantes en matemática es la implicación, llamado también *condicional*. En efecto, todos los teoremas en matemática tienen la forma de una implicación : Si “hipótesis” entonces “conclusión”.

La forma general de una implicación es “si p entonces q ”, donde p, q son proposiciones. Se denota lo anterior como

$$p \longrightarrow q.$$

En el condicional $p \longrightarrow q$, p se llama la *premisa* (o hipótesis, o antecedente) y q se llama la *conclusión* (o consecuencia, o consecuente). La tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ es

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si pensamos sobre el sentido usual que le damos a *implica*, coincidiremos en que las dos primeras líneas de la tabla anterior corresponde al sentido común, pero las dos últimas no lo son. Naturalmente, esto es propio de una *definición*, sin embargo es interesante observar que la definición anterior también coincide con el sentido común en al menos un ejemplo.

Para este fin consideremos la “parábola del cliente insatisfecho”. Supongamos que hemos comprado un detergente llamado *Omo*, después de escuchar un anuncio publicitario que dice “Si usted usa *Omo* entonces su lavado será blanco”. ¿Bajo que circunstancias nos quejaríamos con el fabricante? Ciertamente no lo haríamos si no usamos *Omo* (el anuncio publicitario no dice nada de lo que sucederá si, por ejemplo, usamos *Drive*). Tampoco nos quejaríamos si usamos *Omo* y nuestro lavado resulta blanco. De esta manera, sólo podemos quejarnos si usamos *Omo* y nuestro lavado no resulta blanco (como promete el anuncio).

Usando nuestra notación proposicional denotemos por p “usamos *Omo*” y por q “nuestro lavado es blanco”. Entonces la promesa del anuncio publicitario es

$$p \longrightarrow q$$

y nos quejaremos (esto es, la promesa es falsa) sólo cuando

$$p \wedge \neg q$$

es verdadera. Así, $p \wedge \neg q$ debería ser lógicamente equivalente a $\neg(p \longrightarrow q)$. Escribiendo la tabla de verdad de $p \wedge \neg q$ obtenemos

p	q	$p \wedge \neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Como la tabla anterior es lógicamente equivalente a la negación de $p \longrightarrow q$, la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ debería ser la negación de ésta (chequee esto observando la tabla de $p \longrightarrow q$). De esta forma nuestra definición lógica de implicación coincide con nuestro sentido común (al menos en lo que a lavado se refiere).

Notemos que el único caso en el cual $p \longrightarrow q$ es falso es cuando p es verdadera y q es falsa; esto es, cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa. Así, las siguientes implicaciones son todas verdaderas.

- a) Si $2 + 2 = 4$ entonces $1 + 1 = 2$.
- b) Si $2 + 3 = 4$ entonces $1 + 1 = 5$.
- c) Si verde es rojo entonces la luna está hecha de queso.
- d) Si verde es rojo entonces la luna no está hecha de queso.
- e) $7 < 2$ si $2 < 1$.

Observando la tabla de verdad debe notarse que si una implicación ($p \longrightarrow q$) es verdadera entonces su conclusión (q) puede ser verdadera o falsa (Ejem-

plos a) y b)):

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Sin embargo, si una implicación es verdadera *y* la hipótesis es verdadera entonces la conclusión *debe* ser verdadera (línea 1 de la tabla anterior). Esta es la forma básica de un teorema en matemática : Si se conoce que un teorema (una implicación) es correcto (verdadero) y la hipótesis del teorema es verdadera entonces podemos tomar la conclusión del teorema como verdadera.

Existen varias formas de establecer el condicional en palabras. Las siguientes son todas equivalentes :

- a) Si p entonces q .
- b) p implica q .
- c) p es más fuerte que q .
- d) q es más débil que p .
- e) p sólo si q .
- f) q si p .
- g) p es suficiente para q .
- h) q es necesario para p .
- i) Una condición necesaria para p es q .
- j) Una condición suficiente para q es p .

La mayoría de las veces usamos las dos primeras, pero es importante familiarizarse con el resto.

Si observamos la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ se nota que no es simétrica con respecto a p y q ; esto es, la tabla de verdad de $p \longrightarrow q$ no es lo mismo que la tabla de verdad de $q \longrightarrow p$. En otras palabras, estas dos proposiciones *no son* lógicamente equivalentes de manera que no podemos sustituir una por la

otra. Debido a esta pérdida de simetría es conveniente hacer las siguientes definiciones:

Dada una implicación $p \longrightarrow q$:

$q \longrightarrow p$ se llama la *recíproca*,

$\neg p \longrightarrow \neg q$ se llama la *inversa*,

$\neg q \longrightarrow \neg p$ se llama la *contrapositiva* .

Nótese que la contrapositiva es lo mismo que la implicación. No así la inversa.

Uno de los errores lógicos más comunes es el de confundir una implicación con su inversa. Por ejemplo si nos dicen “Si usa *Omo* entonces su lavado será blanco”(lo cual puede ser cierto) uno podría creer que si no usamos *Omo* entonces nuestro lavado no será blanco. Pero esto es la inversa de la afirmación original.

Sin embargo, una implicación y su contrapositiva *son* lógicamente equivalentes y se pueden usar indistintamente. En este caso, esto significa que si nuestro lavado no es blanco entonces no usamos *Omo* (forma equivalente del aviso publicitario).

El último conectivo que trataremos será el *bicondicional*. Si p, q son dos proposiciones entonces la proposición “ p si y sólo si q ”(abreviado “ p ssi q ”), se denota por

$$p \longleftrightarrow q,$$

y se llama el *bicondicional*. Diremos que $p \longleftrightarrow q$ es verdadero cuando p, q tienen el mismo valor de verdad y falso cuando tienen distintos valores de verdad. La tabla es :

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Otras formas de expresar $p \longleftrightarrow q$ son :

p es necesario y suficiente para q .

p es equivalente a q .

Como los nombres (bicondicional, si y sólo si) y notación sugieren, existe una conexión entre condicional y bicondicional. En efecto, $p \longleftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ (Ejercicio).

1.3 Tautologías

Una clase importante de proposiciones son aquellas cuyas tablas de verdad contienen sólo V en la columna final; esto es, proposiciones que son siempre verdaderas y el hecho que ellas lo sean depende sólo de su forma y no del significado que se le asigne a ellas. Por ejemplo : $p \vee \neg p$. Tales proposiciones son llamadas *tautologías*.

Es importante distinguir entre proposiciones verdaderas y tautologías. Por ejemplo “ $2 + 2 = 4$ ” es una proposición verdadera, pero no es una tautología debido a que su forma es p , la cual no es siempre verdadera (por definición de proposición). Por otro lado “5 es una raíz de 17 ó 5 no es una raíz de 17” es una tautología independientemente de lo que signifique “raíz”. Esta es una tautología en virtud sólo de su forma $(p \vee \neg p)$.

La negación de una tautología, esto es, una proposición que es siempre falsa, es llamada una *contradicción*. Debemos distinguir entre contradicciones y afirmaciones falsas en la misma forma en que distinguimos afirmaciones verdaderas y tautologías.

Como ejemplo considere : $p \longrightarrow (p \vee q)$ una tautología y $(p \longrightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$, una contradicción (Ejercicios).

La siguiente es una lista de las tautologías más comunes.

1. $p \vee \neg p$
2. $\neg(p \wedge \neg p)$
3. $p \longrightarrow p$
4. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } p \longleftrightarrow (p \vee p) \\ \text{b) } p \longleftrightarrow (p \wedge p) \end{array} \right\} \quad \text{leyes de idempotencia}$
5. $\neg\neg p \longleftrightarrow p$
6. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p) \\ \text{b) } (p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p) \\ \text{c) } (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow p) \end{array} \right\} \quad \text{leyes conmutativas}$
7. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \vee (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \vee r) \\ \text{b) } (p \wedge (q \wedge r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r) \end{array} \right\} \quad \text{leyes asociativas}$
8. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \wedge (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \\ \text{b) } (p \vee (q \wedge r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \end{array} \right\} \quad \text{leyes distributivas}$
9. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \vee \mathbf{c}) \longleftrightarrow p \\ \text{b) } (p \wedge \mathbf{c}) \longleftrightarrow \mathbf{c} \\ \text{c) } (p \vee \mathbf{t}) \longleftrightarrow \mathbf{t} \\ \text{d) } (p \wedge \mathbf{t}) \longleftrightarrow p \end{array} \right\} \quad \text{leyes de identidad}$
10. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } \neg(p \wedge q) \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ \text{b) } \neg(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \end{array} \right\} \quad \text{leyes de De Morgan}$
11. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) \\ \text{b) } (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ \text{c) } (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q) \end{array} \right\} \quad \text{equivalencias}$
12. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q) \\ \text{b) } \neg(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \end{array} \right\} \quad \text{implicación}$
13. $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p) \quad \text{contrapositiva}$
14. $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c}) \quad \text{reducción al absurdo}$
15. $\left. \begin{array}{l} \text{a) } ((p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)) \longleftrightarrow ((p \vee q) \longrightarrow r) \\ \text{b) } ((p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)) \longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \wedge r)) \end{array} \right\}$

16. $((p \wedge q) \longrightarrow r) \longleftrightarrow (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$
17. $p \longrightarrow (p \vee q)$
18. $(p \wedge q) \longrightarrow p$
19. $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q$ modus ponens
20. $((p \longrightarrow q) \wedge \neg q) \longrightarrow \neg p$ modus tollens
21. $((p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$ silogismo
22. $((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q$ silogismo disjuntivo
23. $(p \longrightarrow \mathbf{c}) \longrightarrow \neg p$
24. $((p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s)) \longrightarrow ((p \vee r) \longrightarrow (q \vee s))$
25. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((p \vee r) \longrightarrow (q \vee r))$

En general se debe conocer la tabla anterior lo cual no es difícil si notamos que muchas de las tautologías anteriores están ya incorporadas en nuestra manera de pensar. Por ejemplo, si decimos “Este chaleco es de nylon o lana. No es de nylon” ¿Qué podemos concluir sobre el chaleco? Concluimos que es un chaleco de lana, y en esto hemos usado el siguiente silogismo :

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \longrightarrow q.$$

Similarmente, si decimos “Si hago las tareas entonces me gusta la clase. Yo hice las tareas hoy”, concluimos que a la persona en cuestión le gusta la clase de hoy. Esto es una aplicación de Modus Ponens

$$(p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow q.$$

1.4 Argumentos y el principio de demostración

¿Cómo ganar un argumento? Aparte de intimidación, abuso de poder, coerción, etc. Estamos hablando de convencer a alguien por medio de un razona-

miento lógico. Si decimos : ¿Aceptas que p , q y r son verdaderas? y la respuesta es : Si, por supuesto; se puede decir : Entonces concluimos que t debe ser verdadera. Para ganar un argumento, entonces, debemos hacer uso de que

$$(p \wedge q \wedge r) \longrightarrow t$$

es una tautología, esto es, no hay forma que p , q , r sean verdaderas (aceptadas por nuestro oponente) y nuestra conclusión t sea falsa.

En matemática las demostraciones llevan la misma idea : Se debe mostrar que siempre y cuando las premisas del teorema sean verdaderas, la conclusión es también verdadera.

En lo que sigue, intentaremos poner esta idea de manera formal.

Por un *argumento* (o *teorema*) entenderemos una proposición de la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \longrightarrow q.$$

Llamaremos a p_1, p_2, \dots, p_n las *premisas* (o hipótesis) y q la *conclusión*.

Un argumento es *válido* (o el teorema es verdadero) si este es una tautología.

Observemos que un argumento válido es una implicación lógica. Así, si las premisas son todas verdaderas y el argumento es válido entonces la conclusión debe ser verdadera. Note que si un argumento es válido, la conclusión podrá ser verdadera o falsa; todo lo que se asegura es que *si* las premisas son todas verdaderas *entonces* la conclusión debe ser verdadera. Por ejemplo, consideremos el siguiente argumento

$$(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p.$$

El argumento anterior también se podría escribir como sigue

$$\frac{\neg q \quad p \longrightarrow q}{\neg p}$$

Para probar la validez del argumento se puede usar una tabla de verdad:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \longrightarrow q$	$\neg q \wedge (p \longrightarrow q)$	$(\neg q \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Como el argumento es una tautología, este es un argumento válido. Note que esto significa que siempre y cuando las premisas sean todas verdaderas (en este caso la línea 4), la conclusión es también verdadera.

Ahora consideremos el siguiente argumento

$$\frac{\neg p \quad p \longrightarrow q}{\neg p}$$

Escribimos la tabla

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \longrightarrow q$	$\neg p \wedge (p \longrightarrow q)$	$(\neg p \wedge (p \longrightarrow q)) \longrightarrow \neg q$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Como este argumento no es una tautología (en línea 3 se observa que las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa) éste no es válido.

Para hacer los ejemplos anteriores un poco más concretos, sea p que representa “ $2 + 2 = 4$ ” y q representa “ $3 + 5 = 7$ ”. Entonces el primer argumento se traduce como

$$\begin{array}{l}
 3 + 5 \neq 7 \\
 \text{Si } \underline{2 + 2 = 4} \text{ entonces } 3 + 5 = 7 \\
 2 + 2 \neq 4
 \end{array}$$

El segundo es

$$\begin{array}{l}
 2 + 2 \neq 4 \\
 \text{Si } \underline{2 + 2 = 4} \text{ entonces } 3 + 5 = 7 \\
 3 + 5 \neq 7
 \end{array}$$

En el primer caso (un argumento válido) se ve que la conclusión es falsa, mientras que en el segundo caso (un argumento no válido) se ve que la conclusión es verdadera. ¿Qué sucede? La respuesta es que la validez (o no) de un argumento esta basada solamente en la *forma del argumento* y no tiene nada que ver con la validez o falsedad de las proposiciones involucradas.

Otra vez, es importante recordar que la validez de un argumento garantiza la verdad de la conclusión sólo cuando todas las premisas son verdaderas. En el primer argumento observamos que la segunda premisa, “Si $2 + 2 = 4$ entonces $3 + 5 = 7$ ” es falsa.

Aunque el procedimiento anterior usando tablas de verdad para chequear la validez de un argumento es simple, no es muy conveniente cuando hay un gran número de proposiciones.

Otro método de probar la validez de un argumento es llamado el *principio de demostración* :

Una demostración que el argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \longrightarrow q$ es válido es una secuencia de proposiciones s_1, s_2, \dots, s_k tal que s_k (la última proposición en la secuencia) es q y cada s_i , $1 \leq i \leq k$, en la secuencia satisface uno o más de los siguientes requerimientos :

- a) s_i es una de las hipótesis
- b) s_i es una tautología

c) s_i es una lógica consecuencia de proposiciones anteriores en la secuencia.

Como un ejemplo de esto, consideremos el siguiente, que chequeamos anteriormente usando tabla de verdad

$$\frac{\neg q \quad p \longrightarrow q}{\neg p}$$

Una demostración sería como sigue :

	<i>Proposición</i>	<i>Razón</i>
1.	$\neg q$	hipótesis
2.	$p \longrightarrow q$	hipótesis
3.	$\neg q \longrightarrow \neg p$	contrapositiva
4.	$\neg p$	modus ponens

Existen varias maneras de hacer una demostración correctamente y aún en este simple caso se puede proceder de manera un poco diferente :

	<i>Proposición</i>	<i>Razón</i>
1.	$\neg q$	hipótesis
2.	$p \longrightarrow q$	hipótesis
3.	$\neg p$	modus tollens

Ejercicio : Establezca la validez del siguiente argumento usando el método de demostración

$$\frac{p \vee q \quad q \longrightarrow \neg p \quad p \longrightarrow q}{q}$$

Una extensión del principio de demostración, llamado el método de *prueba indirecta* (o prueba por contradicción), esta basada en la reducción al absurdo. Aplicando esta forma a nuestro argumento, obtenemos

$$((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \longrightarrow q) \longleftrightarrow ((p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge q) \longrightarrow \mathbf{c}).$$

Ya que esta es una equivalencia lógica podemos substituir el lado derecho por el lado izquierdo. Esto significa, en lo que se refiere a nuestra demostración, que se tiene una hipótesis adicional, $\neg q$ (la negación de la conclusión) y nuestra demostración estará completa cuando se obtiene una contradicción (*cualquier* contradicción).

Como un ejemplo de este método, consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ q \longrightarrow \neg p \\ \hline p \longrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

	<i>Proposición</i>	<i>Razón</i>
1.	$\neg q$	hipótesis
2.	$p \vee q$	hipótesis (negación de conclusión en prueba indirecta)
3.	p	consecuencia de 1 y 2 (# 22 de la lista)
4.	$p \longrightarrow q$	hipótesis
5.	q	consecuencia de 3 y 4 (modus ponens)
6.	$q \wedge \neg q$	consecuencia de 1 y 5
7.	q	consecuencia de 6 (prueba indirecta)

Es interesante notar que la hipótesis $q \longrightarrow \neg p$ no fue usada en esta demostración. Se deja como ejercicio hallar una prueba directa de la validez del argumento sin usar esta hipótesis.

El principio de demostración nos da un buen método para establecer la validez de argumentos pero tiene la desventaja de no mostrar que un argumento no es válido. El hecho que no se pueda dar una demostración de un argumento particular, no es suficiente para demostrar que un argumento no es válido.

Sin embargo, existe otra manera, distinta a usar tablas de verdad, de mostrar que un argumento no es válido. Si recapitulamos a que se entiende por un argumento válido, recordaremos que la conclusión debe ser verdadera siempre y cuando todas las premisas sean verdaderas. De esta manera, si se puede hallar *sólo un caso* donde las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa, entonces se tendrá probado que el argumento no es válido.

Por ejemplo consideremos el siguiente argumento

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \hline \neg p \vee q \\ q \longrightarrow p \end{array}$$

Se observa que si q es V y p es F entonces

$$p \longrightarrow q \quad \text{es} \quad V$$

$$\neg p \vee q \quad \text{es} \quad V$$

pero $q \longrightarrow p$ es F . Luego, el argumento no es válido.

1.5 Cuantificadores

Vimos en la sección anterior que “ $x < 3$ ” no es una proposición. Sin embargo, se puede considerar como una *función proposicional* (x es una *variable*).

Lo anterior es similar al concepto de función : Por ejemplo, si $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(-1) = -5$ y $f(5) = 7$.

Denotemos por $p(x)$ a “ $x < 3$ ” y consideremos como dominio de $p(x)$ a \mathbb{R} (conjunto de los números reales). Luego, si $x = 2$ se obtiene $p(2) : “2 < 3”$ que es una proposición con valor de verdad V . En cambio si $x = 8$ se obtiene $p(8) : “8 < 2”$ que es una proposición con valor de verdad F .

Otro ejemplo de función proposicional es: “ $x < y$ ”. Denotémosla: $p(x, y)$. Entonces: $p(1, 2)$, $p(-2, 14)$ y $p(0, 5)$ son proposiciones con valores de verdad V y $p(0, 0)$, $p(2, 1)$ y $p(\pi, 3)$ son proposiciones con valores de verdad F .

Sea D el dominio de una función proposicional p (en general este dominio se da explícitamente o bien se infiere del contexto).

Un método de hacer de una función proposicional una proposición, es substituyendo elementos de D en p , como vimos. Un segundo método se denomina *cuantificación*.

Básicamente hay dos formas de cuantificar una función proposicional. La primera es anteceder la función proposicional con “Para todo x en D tal que”. La notación es:

$$\forall x \text{ en } D, p(x).$$

La segunda es anteceder la función proposicional con “Existe un x en D tal que”. La notación es:

$$\exists x \text{ en } D \ni p(x) \quad \text{ó} \quad \exists x \text{ en } D \text{ tal que } p(x).$$

\forall se denomina *cuantificador universal*

\exists se denomina *cuantificador existencial*.

Se asignan valores de verdad a las proposiciones anteriores: Así,

$$\forall x \text{ en } D, p(x)$$

tiene un valor de verdad V si $p(x)$ es verdadero *para cada* interpretación de x en D . De otra manera tiene el valor de verdad F .

Por ejemplo, si $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ entonces

$$\forall x \text{ en } D, p(x)$$

es equivalente a la conjunción:

$$p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(x_3) \wedge \dots \wedge p(x_n).$$

Por otra parte,

$$\exists x \text{ en } D \ni q(x)$$

es equivalente a la disjunción, esto es:

$$p(x_1) \vee p(x_2) \vee p(x_3) \vee \dots \vee p(x_n).$$

Por ejemplo, si $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ y p es la función proposicional $p(x) : "x < 3"$ entonces

$$\forall x \text{ en } D, p(x)$$

es falsa (ya que $p(3)$ es falsa). Por otra parte,

$$\forall x \text{ en } S, p(x) ; \exists x \text{ en } D \ni p(x)$$

son verdaderas.

Observación : El valor de verdad de una función proposicional cuantificada depende del dominio utilizado.

1.6 Métodos de Demostración

La mayoría de las demostraciones en matemática están escritas de manera “informal”. Sin embargo, ellas utilizan la misma estructura lógica en cada

caso: Asumiendo que las hipótesis son verdaderas, se escribe una secuencia de proposiciones que son consecuencia lógica de lo que se ha escrito previamente, finalizando con la conclusión del teorema.

Por ejemplo:

Teorema 2 *Si m y n son enteros pares entonces $m + n$ es un entero par.*

(Recordemos que un entero n es par si existe un entero k tal que $n = 2k$; n es impar si existe un entero k tal que $n = 2k + 1$.)

Demostración. Sean m y n enteros pares. Entonces existen enteros j, k tales que $m = 2j$, $n = 2k$. Así $m + n = 2j + 2k = 2(j + k)$. Por lo tanto, $m + n$ es par. ■

La demostración anterior es *directa*.

Observemos que en el enunciado del Teorema hay cuantificadores “bajo la superficie”. Un enunciado más cuidadoso debiera ser :

$$“\forall m, \forall n (m \text{ es par y } n \text{ es par}) \rightarrow (m + n \text{ es par}) ”.$$

¿Cómo es que probamos el teorema considerando sólo dos enteros (m y n) siendo que queremos probar que el resultado vale para *todos* los enteros?

¿Habría sido diferente si hubiésemos solamente observado que 2 y 4 son enteros pares y que su suma, 6, es también par?

En efecto, es *muy diferente*. La demostración anterior contiene un ejemplo de el uso de: *variables fijas pero arbitrarias*.

Hay otros métodos usados comúnmente para una demostración:

- Contrapositiva
- Reducción al absurdo.

Ambas están basadas en las correspondientes equivalencias lógicas:

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$$

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c}).$$

Ejemplo: Prueba contrapositiva del Teorema 2. Nuestra hipótesis es $m + n$ no es par (la negación de la conclusión).

Demostración. Supongamos que m, n son enteros y $m+n$ no es par, entonces impar. Luego existe un entero k tal que $m + n = 2k + 1$.

Ahora, m es ya sea par o impar.

Si m es impar, entonces la demostración está concluida.

Si m es par, entonces existe un entero j tal que $m = 2j$.

Luego

$$n = (m + n) - m = 2k + 1 - 2j = 2(k - j) + 1.$$

Esto prueba que n es impar y la demostración es completa. ■

Analicemos esta demostración en detalle:

Sea p : “ m es un entero par”

q : “ n es un entero par”

r : “ $m + n$ es un entero par”

Entonces el Teorema es:

$$(p \wedge q) \longrightarrow r.$$

Así, la contrapositiva es:

$$\neg r \longrightarrow \neg(p \wedge q).$$

Usando las leyes de De Morgan, se obtiene la forma equivalente:

$$\neg r \longrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

y esta es la forma que se utilizó en la demostración anterior. Una traducción de lo anterior en palabras sería:

“ Si $m + n$ es impar entonces m es impar ó n es impar ”.

Así la forma contrapositiva del teorema tiene una disjunción como conclusión y, recordemos, una disjunción es verdadera cuando al menos una de sus subproposiciones es verdadera. Así, para demostrar que la conclusión es verdadera se necesita demostrar que m es impar o n es impar.

La demostración anterior hizo esto diciendo que m es impar o par (recordar que $p \vee \neg p$ es una tautología) y entonces se consideran ambos casos (un ejemplo de análisis exhaustivo): Si m es impar entonces “ m es impar o n es impar” es verdadero y la demostración está concluida. Si m es par entonces n es impar (aquí se requirió un poco más de trabajo), luego “ m es impar o n es impar” es verdadero, lo que concluye la demostración.

Ejemplo: Prueba indirecta o por contradicción del Teorema 2

$$\begin{aligned}(p \longrightarrow q) &\iff (\neg(p \longrightarrow q) \longrightarrow \mathbf{c}) \\ &\iff ((p \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{c}).\end{aligned}$$

Observe que esta prueba involucra partir con una hipótesis adicional: La negación de la conclusión. La demostración está completa cuando se obtiene una contradicción.

Demostración. Supongamos que m y n son enteros pares tales que $m + n$ es impar. Entonces existen enteros j, k tales que $m = 2j$ y $m + n = 2k + 1$. Así

$$n = (m + n) - m = 2k + 1 - 2j = 2(k - j) + 1$$

por lo tanto n es al mismo tiempo par e impar, una contradicción, lo cual completa la demostración. ■

Una de las ventajas de la prueba indirecta es que nos da una hipótesis adicional con la cual podemos trabajar. Esto es particularmente útil para demostrar la no existencia de objetos matemáticos.

Resumiendo las tres formas de demostración, se tiene:

a) Prueba directa : Se asume hipótesis

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

b) Prueba contrapositiva: Se asume negación de la conclusión

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

c) Prueba indirecta: Se asume hipótesis y negación de la conclusión

(cuerpo de la demostración)

Conclusión.

Es importante notar que: *No existe una forma de demostración en la cual se asuma la conclusión. Tampoco existe forma de demostración en la cual se asuma la negación de la hipótesis.*

Si el teorema a demostrarse tiene la forma $p \longleftrightarrow q$ entonces la demostración se puede realizar en dos partes, una mostrando que $p \longrightarrow q$ y la otra mostrando que $q \longrightarrow p$.

Usualmente no se puede usar una técnica de demostración para mostrar que una conjetura es falsa. En este caso se procede por contraejemplos. Como ilustración, la conjetura:

“ Si x es un entero impar e y es un entero par entonces $x + y$ es par ”

se puede mostrar que es falsa produciendo el contraejemplo $x = 3$, $y = 2$ y observando que $x + y = 5$ es impar. Así, se ha construido un ejemplo que satisface las hipótesis pero no la conclusión.

1.7 Ejercicios

1. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
 - a) Si $2 + 1 = 4$ entonces $3 + 2 = 5$.
 - b) Rojo es blanco si sólo si verde es azul.
 - c) $2 + 1 = 3$ y $3 + 1 = 5$ implica que 4 es impar.
 - d) Si 4 es impar entonces 5 es impar.
 - e) Si 4 es impar entonces 5 es par.
 - f) Si 5 es impar entonces 4 es impar.
2. Sean p : “7 es un entero par”, q : “ $3 + 1 = 4$ ” y r : “24 es divisible por 8”
 - a) Escriba en forma simbólica y asigne valores de verdad:
 - i) $3 + 1 \neq 4$ y 24 es divisible por 8.
 - ii) No es cierto que 7 es impar o $3 + 1 = 4$.
 - iii) $3 + 1 = 4$ pero 24 no es divisible por 8.
 - b) Escriba en palabras y asigne valores de verdad:
 - i) $p \vee \neg q$.
 - ii) $\neg(r \wedge q)$.
 - iii) $\neg r \vee \neg q$.
3. Suponga que se define el conectivo \star diciendo que $p \star q$ es verdadera solamente cuando q es verdadera y p es falsa y es falsa en cualquier otro caso.
 - a) Escriba la tabla de verdad para $p \star q$.

- b) Escriba la tabla de verdad para $q \star p$.
 - c) Escriba la tabla de verdad para $(p \star p) \star q$.
4. Dé ejemplos de proposiciones lógicas con las siguientes condiciones.
- a) Implicación verdadera con la conclusión falsa.
 - b) Implicación verdadera con la conclusión verdadera.
 - c) Implicación falsa con la conclusión verdadera.
 - d) Implicación falsa con la conclusión falsa.
 - e) Implicación falsa con la hipótesis falsa.
 - f) Implicación falsa con la hipótesis verdadera.
 - g) Implicación verdadera con la hipótesis verdadera.
 - h) Implicación verdadera con la hipótesis falsa.
5. Suponga que las proposiciones p , $\neg q$ y r son verdaderas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
- a) $p \longrightarrow q$.
 - b) $q \longrightarrow p$.
 - c) $p \longrightarrow (q \vee r)$.
 - d) $p \longleftrightarrow q$.
 - e) $p \longleftrightarrow r$.
 - f) $(q \vee p) \longrightarrow p$.
 - g) $(q \wedge p) \longrightarrow q$.
6. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias?

- a) $(\neg q \wedge p) \longrightarrow (q \vee \neg p)$.
- b) $\neg p \longrightarrow p$.
- c) $\neg p \longleftrightarrow p$.
- d) $(\neg p \wedge p) \longrightarrow p$.
- e) $(\neg p \wedge p) \longrightarrow q$.
- f) $(\neg q \wedge p) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$.
- g) $[(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow r] \longleftrightarrow [p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)]$.

7. Encuentre:

- a) La contrapositiva de $\neg p \longrightarrow q$.
- b) La recíproca de $\neg q \longrightarrow p$.
- c) La inversa de la recíproca de $q \longrightarrow \neg p$.
- d) La negación de $p \longrightarrow \neg q$.
- e) La recíproca de $\neg p \wedge q$.

8. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

- a) $(p \longleftrightarrow q) \implies (p \longrightarrow q)$.
- b) $(p \longrightarrow q) \implies (p \longleftrightarrow q)$.
- c) $(p \longrightarrow q) \implies q$.

9. ¿Es \longrightarrow asociativa?; esto es: $((p \longrightarrow q) \longrightarrow r) \iff (p \longrightarrow (q \longrightarrow r))$.

10. ¿Es \longleftrightarrow asociativa?; esto es: $((p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r) \iff (p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r))$.

11. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautología?

- a) Si $2 + 2 = 4$ entonces 5 es impar.

- b) $3 + 1 = 4$ y $5 + 3 = 8$ implica $3 + 1 = 4$.
- c) $3 + 1 = 4$ y $5 + 3 = 8$ implica $3 + 2 = 5$.
- d) Rojo es amarillo o rojo no es amarillo.
- e) Rojo es amarillo o rojo es rojo.
- f) Si 4 es impar ó 2 es par y 2 es impar implica que 4 sea impar.
- g) Si 4 es impar ó 2 es par y 2 es impar implica que 4 sea par.

12. Determine la validez de los siguientes argumentos usando tablas de verdad.

- | | | |
|---|--------------------------------------|-------------------------|
| a) $p \longrightarrow q$ | b) $p \vee q$ | c) $p \vee \neg q$ |
| $\frac{q \vee \neg p}{q \longrightarrow p}$ | $\frac{r \longrightarrow q}{\neg r}$ | $\frac{\neg p}{\neg q}$ |

13. Dé ejemplos de proposiciones con las condiciones, donde sea posible y si no es posible explique por qué.

- a) El argumento no válido con la conclusión falsa.
- b) El argumento válido con la conclusión verdadera.
- c) El argumento no válido con la conclusión verdadera.
- d) El argumento válido con la conclusión falsa.
- e) El argumento válido con la la hipótesis verdadera y la conclusión falsa.
- f) El argumento no válido con la la hipótesis verdadera y la conclusión falsa.
- g) El argumento válido con la la hipótesis falsa y la conclusión verdadera.

14. Establezca la validez de los siguientes argumentos usando las propiedades lógicas o, dé contraejemplos en caso que estos no sean válidos.

a) $\neg p \vee q$

$$\frac{p}{q}$$

b) $p \longrightarrow q$

$$\frac{r \longrightarrow \neg q}{p \longrightarrow \neg r}$$

c) $\neg p \vee q$

$$\frac{\neg r \longrightarrow \neg q}{p \longrightarrow \neg r}$$

d) $p \longrightarrow q$

$$\frac{\neg q \longrightarrow \neg r}{s \longrightarrow (p \vee r)}$$

$$\frac{s}{q}$$

e) $p \vee q$

$$\frac{q \longrightarrow \neg r}{\neg r \longrightarrow \neg p}$$

$$\neg(p \wedge q)$$

f) $p \longrightarrow q$

$$\frac{\neg q \longrightarrow \neg r}{r \longrightarrow \neg p}$$

$$\neg p$$

Capítulo 2

Conjuntos, Relaciones y Funciones

2.1 Conjuntos

El término *conjunto* y *elemento de un conjunto* son términos primitivos y no definidos. De un punto de vista intuitivo parece ser que cualquier colección de objetos puede ser considerado un conjunto. Sin embargo esto no es así, ya que de lo contrario se llega a paradojas. En general podemos decir informalmente que los conjuntos no pueden ser “demasiado grandes”. (El lector interesado puede consultar la referencia: Charles C. Pinter, Set Theory, Addison-Wesley, 1971)

De esta manera, siempre supondremos que todos los conjuntos son elementos de un conjunto universal, U . A menudo U no se menciona explícitamente, tal como ocurre con el dominio de una función proposicional.

Los conjuntos los denotamos por letras mayúsculas:

$$A, B, C, \dots$$

y los elementos por letras minúsculas

$$a, b, c, \dots$$

“ a es un elemento del conjunto A ” (o “ a es un miembro de A ” o “ a está en A ” o “ a pertenece a A ”) se denota: $a \in A$.

Si un conjunto no tiene muchos elementos se pueden escribir todos ellos. Por ejemplo si A es el conjunto con los elementos 1, 2, 3, 4 se indica como:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Otra forma de especificar los elementos de un conjunto es dando una regla. Por ejemplo:

$$A = \{a : a \text{ es un entero y } 1 \leq a \leq 4\}$$

o

$$A = \{x : (x - 2)(x - 1)(x - 4)(x - 3) = 0\}$$

representan el mismo conjunto.

La notación $\{a : p(a)\}$ se lee: “El conjunto de todos los a tales que $p(a)$ es verdadero”. También se escribe $\{a / p(a)\}$.

Note que el orden en el cual se escriben los elementos de un conjunto no es importante.

Definición 3 *Un conjunto A es igual a un conjunto B , denotado $A = B$, si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A . En símbolos:*

$$(A = B) \longleftrightarrow [(\forall x, x \in A \longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \longrightarrow x \in A)]$$

o

$$(A = B) \longleftrightarrow (\forall x, x \in A \longleftrightarrow x \in B).$$

Ejemplo

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{x : 1 \leq x \leq 3 \text{ y } x \text{ es un entero}\}.$$

Los siguientes conjuntos son usualmente empleados en matemática:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{x : x \text{ es un número entero } x \geq 1\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{Conjunto de los números naturales})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{x : x \text{ es un entero}\} \\ &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{Conjunto de los números enteros})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \left\{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\right\} \\ &= \left\{\dots, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \quad (\text{Conjunto de los números racionales})\end{aligned}$$

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ es número real}\}.$$

Definición 4 Sean A, B conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B si y sólo si cada elemento de A es un elemento de B . Se denota por:

$$A \subseteq B \quad \text{ó} \quad B \supseteq A.$$

En símbolos:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow (\forall x, x \in A \longrightarrow x \in B).$$

Si A no es subconjunto de B , se escribe $A \not\subseteq B$.

Note que $A \subseteq A$. Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ se dice que A es un *subconjunto propio* de B , y se escribe

$$A \subset B \quad \text{ó} \quad B \supset A.$$

Si A no es un subconjunto propio de B , se escribe:

$$A \not\subset B.$$

Es posible tener un conjunto *sin* elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los estudiantes que miden 6 metros. Tal conjunto se llama *conjunto vacío* y se denota \emptyset . En símbolos:

$$\emptyset = \{x : p(x) \wedge \neg p(x)\}$$

donde $p(x)$ es cualquier función proposicional.

Definición 5 Sean A, B conjuntos. La unión de A y B (denotada $A \cup B$) es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B . En símbolos:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

La intersección de A y B (denotada $A \cap B$) es el conjunto de todos los elementos que están en A y en B . En símbolos:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

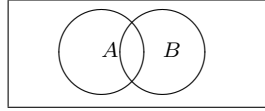
Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son *disjuntos*.

El complemento relativo de A en B (o complemento de A con respecto a B), denotado por $B - A$ (o $B \setminus A$) es el conjunto de todos los elementos en B que no están en A . En símbolos:

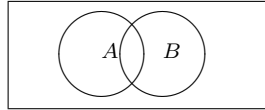
$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Si B es U , el conjunto universal, entonces $U \setminus A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} = \{x : x \notin A\}$ es llamado el complemento de A y se denota A^c (o $C_U A$).

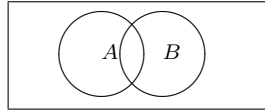
Es útil representar la definición anterior en términos de Diagramas de Venn:



$$A \cap B$$

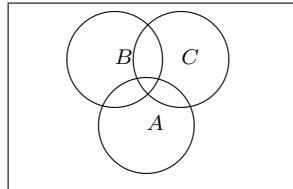


$$A \cup B$$



$$A \setminus B$$

Análogamente se puede representar, por ejemplo, $A \cap (B \cup C)$:



Note que un diagrama de Venn con dos conjuntos consiste de 4 regiones, mientras que un diagrama con tres conjuntos consiste de 8 regiones ($2 \times 2 \times 2 = 8$). Así, un diagrama con 6 conjuntos requiere de $2^6 = 64$ regiones. Esto hace que los diagramas de Venn sean de uso limitado.

Definición 6 Sea A un conjunto. El conjunto de todos los subconjuntos de A , denotado por $\mathbb{P}(A)$ (o 2^A) se llama conjunto potencia de A (o partes de A). En símbolos:

$$\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Ejemplo: Sea $U = \mathbb{N} = \{x : x \text{ es un entero, } x \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Sean $A = \{x : x \text{ es par}\}$, $B = \{x : x = 2k - 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$,

$$C = \{y : y \leq 4\} \quad , \quad D = \{1, 3\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \cup B &= U \quad ; \quad A \cap B = \emptyset \quad ; \quad A^c = B \quad ; \quad A \setminus B = A \quad ; \\ B^c &= A \quad ; \quad B \setminus A = B \quad ; \quad C \cap D = D \quad ; \quad C \not\subseteq D \quad ; \\ D \setminus C &= \emptyset \quad ; \quad D \subseteq C \quad ; \quad D \subset C \quad ; \quad D^c \supseteq A \quad ; \\ \mathbb{P}(D) &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \quad ; \quad 1 \not\subseteq D \quad ; \quad 1 \in D \quad ; \quad A \cup C = A \cup D \quad ; \\ \emptyset &\in \mathbb{P}(D) \quad ; \quad \{1\} \in \mathbb{P}(D) \quad ; \quad 1 \notin \mathbb{P}(D). \end{aligned}$$

En lo que sigue veremos algunos teoremas con respecto a propiedades de conjuntos.

Teorema 7 Sean A y B conjuntos, tales que $A \cap B = A$. Entonces $A \subseteq B$.

Demostración. Sean A y B conjuntos, tales que $A \cap B = A$. Sea $a \in A$.

Entonces

⋮

“Algo usando la hipótesis $A \cap B = A$ ”

⋮

Así, $a \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

Comentarios

Se comenzó la demostración “copiando el enunciado”. Esto es positivo pero, en general, las demostraciones en matemática y especialmente en textos avanzados, omiten esto y asumen que el lector lo infiere del contexto.

¿Cuán detallada debe ser una demostración? No hay una respuesta a ello, pero por regla general se debe incluir suficiente información como para

que una persona de un nivel menor a lo que se lee, sea capaz de entender la demostración.

Cuando se comienza a hacer demostraciones en matemática una buena idea es escribirla con el suficiente detalle de manera que al volver a leerla, a la semana siguiente, seamos capaces de entenderla. De lo contrario, debemos incluir mayores detalles.

Note que la demostración comienza: “Sea $a \in A$ ”. Este es otro ejemplo del uso de una variable “fija pero arbitraria”. Se asume que a es un elemento de A pero nada más.

Observemos que en “Sea $a \in A$ ” estamos en realidad incluyendo *dos* casos, uno de los cuales no hemos mencionado. Cuando se dice “Sea $a \in A$ ”, estamos asumiendo que $A \neq \emptyset$. ¿Qué sucede si $A = \emptyset$? La razón de lo anterior es que si $A = \emptyset$ la demostración es trivial. En efecto, \emptyset es subconjunto de cualquier conjunto, en particular de B . Así, cada vez que escribamos algo de la forma :

“Sea $a \in A$ ”

debemos estar siempre seguros que el caso $A = \emptyset$ no causa problemas.

Ejercicio: Complete la demostración anterior.

Teorema 8 Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A - B = A \cap B^c.$$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Primero se prueba que $A - B \subseteq A \cap B^c$.

Sea $x \in A - B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$ (definición de $A - B$). Pero $x \notin B$ implica que $x \in B^c$. Por lo tanto $x \in A$ y $x \in B^c$. Luego $x \in A \cap B^c$. Esto prueba que $A - B \subseteq A \cap B^c$.

Supongamos ahora que $x \in A \cap B^c$. Esto significa que $x \in A$ y $x \in B^c$ (por definición de intersección). Pero $x \in B^c$ significa que $x \notin B$. Por lo tanto $x \in A$ y $x \notin B$, esto es, $x \in A - B$. Así $A \cap B^c \subseteq A - B$. Ya que se ha probado que $A - B \subseteq A \cap B^c$ y $A \cap B^c \subseteq A - B$, se tiene demostrado que $A - B = A \cap B^c$. ■

Teorema 9 Si A, B, C son conjuntos con $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración. Sean A, B, C conjuntos con $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Sea $a \in A$. Ya que $A \subseteq B$ se tiene $a \in B$. Además, ya que $B \subseteq C$ y $a \in B$ se tiene que $a \in C$. Por lo tanto $A \subseteq C$. ■

Teorema 10 Sean A, B conjuntos. Entonces

$$A \subseteq B \longleftrightarrow A \cap B = A.$$

Demostración. Sean A, B conjuntos. Primero, mostraremos que $A \subseteq B$ implica $A \cap B = A$.

Supongamos que $A \subseteq B$. Sea $z \in A \cap B$. Entonces $z \in A$ y $z \in B$. Luego $z \in A$ y, por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.

Ahora, sea $z \in A$. Ya que $A \subseteq B$, $z \in B$. Por lo tanto $z \in A$ y $z \in B$, lo que significa $z \in A \cap B$. Así, hemos probado que $A \subseteq A \cap B$. Esto, junto a $A \cap B \subseteq A$, implica que $A = A \cap B$.

Ahora, para demostrar que $A \cap B = A$ implica $A \subseteq B$, supongamos que $A \cap B = A$. Sea $a \in A$. Entonces, ya que $A = A \cap B$, $a \in A \cap B$. Luego, $a \in B$. Esto implica que $A \subseteq B$. ■

Teorema 11 Sean A, B conjuntos. Entonces $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Demostración. Sean A, B conjuntos. Como \emptyset es un subconjunto de cualquier conjunto se tiene $\emptyset \subseteq A \cap (B - A)$. De esta manera, sólo debemos mostrar que $A \cap (B - A) \subseteq \emptyset$. Haremos esto indirectamente, esto significa que asumiremos que existe un elemento en $A \cap (B - A)$ que no es un elemento de \emptyset y obtendremos una contradicción. Note que como \emptyset no tiene elementos, lo único que se puede hacer es asumir un elemento en $A \cap (B - A)$ y llegar a una contradicción.

Suponga que existe $y \in A \cap (B - A)$. Entonces $y \in A$ y $y \in B - A$. Pero $y \in B - A$ implica que $y \in B$ y $y \notin A$. Así, se tiene que $y \in A$ y $y \notin A$, una contradicción. Esto completa la prueba. ■

2.2 Conjuntos de validez de funciones proposicionales

Como una aplicación de la teoría de conjuntos desarrollada, consideremos la siguiente definición.

Definición 12 Sea p una función proposicional con dominio D . El conjunto de validez de p es:

$$P := \{x \in D : p(x) \text{ es verdadero} \}.$$

Ejemplos

a) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $p(x) : “x \text{ es par}”$ y $q(x) : “x \text{ es un primo}”$. Entonces se tiene:

$$P = \{2, 4, 6\} \quad Q = \{2, 3\}.$$

b) Sea $D = \mathbb{R}$, $p(x) : "x^2 - 3x + 2 = 0"$ y $q(x) : "\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1"$.
Entonces

$$P = \{1, 2\} \quad Q = \mathbb{R}$$

(Verificación: Ejercicio).

En álgebra se denominan también a los conjuntos anteriores: *Conjuntos solución*.

Se pueden usar las operaciones entre conjuntos para expresar los conjuntos de validez de funciones proposicionales compuestas. Así, por ejemplo, si P , Q corresponden a los conjuntos de validez de funciones proposicionales p , q respectivamente, entonces

$$P \cap Q = \{x : p(x) \wedge q(x)\},$$

es el conjunto de validez para $p(x) \wedge q(x)$.

$$P \cup Q = \{x : p(x) \vee q(x)\},$$

es el conjunto de validez para $p(x) \vee q(x)$.

$$P^c = \{x : \neg p(x)\},$$

es el conjunto de validez de $\neg p(x)$.

¿Qué ocurre con $p(x) \longrightarrow q(x)$? Recordemos que

$$(p \longrightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$$

entonces se ve que

$$P^c \cup Q = \{x : \neg p(x) \vee q(x)\}$$

es el conjunto de validez de $p(x) \longrightarrow q(x)$.

Ejemplos

a) Sea $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $p(x) : “x \text{ es par}”$, $q(x) : “x \text{ es impar}”$, $r(x) : “x \text{ es 2 ó 3}”$. Entonces :

i) El conjunto de validez de $p(x) \vee q(x)$ es:

$$P \cup Q = D.$$

ii) El conjunto de validez de $p(x) \wedge q(x)$ es:

$$P \cap Q = \emptyset.$$

iii) El conjunto de validez de $p(x) \longrightarrow q(x)$ es:

$$P^c \cup Q = \{1, 3, 5\}.$$

iv) El conjunto de validez de $\neg r(x)$ es:

$$R^c = \{1, 4, 5, 6\}.$$

b) Sea $D = \mathbb{R}$ y $p(x) : “x^2 - 3x + 2 > 0”$. Entonces sabemos que, algebraicamente, $p(x)$ es equivalente a:

$$(x - 2)(x - 1) > 0.$$

Sean : $p_1(x) : “x - 2 > 0”$

$p_2(x) : “x - 1 > 0”$

$p_3(x) : “x - 2 < 0”$

$p_4(x) : “x - 1 < 0”$

Entonces $p(x)$ es equivalente a:

$$[p_1(x) \text{ y } p_2(x)] \text{ o } [p_3(x) \text{ y } p_4(x)].$$

Observemos ahora que (en notación de intervalos):

$$\begin{aligned}P_1 &= (2, \infty) \\P_2 &= (1, \infty) \\P_3 &= (-\infty, 2) \\P_4 &= (-\infty, 1).\end{aligned}$$

Entonces, el conjunto de validez para $p(x)$ es:

$$(P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4),$$

esto es :

$$[(2, \infty) \cap (1, \infty)] \cup [(-\infty, 2) \cap (-\infty, 1)] = (2, \infty) \cup (-\infty, 1) = \mathbb{R} - [1, 2].$$

(Verificación: Ejercicio).

2.3 Relaciones

Sabemos que un conjunto está determinado por sus elementos; esto es, $\{a, b\} = \{b, a\}$ y que el orden en el cual los elementos aparecen no hace diferencia.

En ocasiones, deseamos distinguir cuando los mismos elementos están puestos en orden diferente. Para hacer esto introducimos el concepto de *par ordenado*.

Es posible realizar lo anterior en términos de conjuntos (ver lista de ejercicios), sin embargo esta definición no es muy útil, de manera que consideraremos un par ordenado como un *término indefinido*. La notación será estándar:

$$(a, b)$$

donde a es el *primer elemento* y b es el *segundo elemento*. La propiedad en la cual estamos realmente interesados es:

Definición 13 Sean (a, b) , (c, d) pares ordenados. Entonces $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Note que la definición anterior distingue orden: $(a, b) \neq (b, a)$ a menos que $a = b$.

Con el concepto de par ordenado, se puede definir una nueva operación entre conjuntos: El producto cartesiano de dos conjuntos:

Definición 14 Sean A , B conjuntos. El producto cartesiano de A con B , denotado $A \times B$; es el conjunto de todos los pares ordenados con primer elemento en A y segundo elemento en B . En símbolos:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \emptyset$ entonces:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A \times C = \emptyset$$

$$B \times C = \emptyset.$$

Se puede graficar $A \times B$ en un arreglo rectangular:

$$\begin{array}{cccc} & b & (1, b) & (2, b) & (3, b) \\ B & & & & \\ & a & (1, a) & (2, a) & (3, a) \\ & & & & \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & & & A & \end{array}$$

Observe en este ejemplo que $A \times B \neq B \times A$ y que $A \times C = B \times C$ no implica que $A = B$.

Definición 15 Sean A, B conjuntos. Una relación de A a B es un subconjunto de $A \times B$. Si \mathcal{R} es una relación de A a B entonces un elemento $(a, b) \in \mathcal{R}$ será denotado como:

$$a\mathcal{R}b.$$

El *dominio* de \mathcal{R} (denotado $Dom(\mathcal{R})$) es el conjunto de todos los primeros elementos de \mathcal{R} ; en símbolos

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a : (a, b) \in \mathcal{R}\} = \{a : a\mathcal{R}b\}.$$

La *imagen* de \mathcal{R} (denotado por $Im(\mathcal{R})$) es el conjunto de todos los segundos elementos de \mathcal{R} ; en símbolos

$$Im(\mathcal{R}) = \{b : (a, b) \in \mathcal{R}\} = \{b : a\mathcal{R}b\}.$$

Observe que $Dom(\mathcal{R}) \subseteq A$ y $Im(\mathcal{R}) \subseteq B$.

Si $A = B$ se dice que \mathcal{R} es una *relación en* A .

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y \mathcal{R} la relación “menor que” en A ; esto es: $a\mathcal{R}b$ si y sólo si $a < b$. Se puede ilustrar lo anterior con un diagrama:

	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
A	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & A & \end{array}$$

donde cada elemento de este arreglo es un elemento de $A \times A$ y, $(1, 3)$, $(2, 3)$ y $(1, 2)$ son los pares ordenados de la relación \mathcal{R} .

En este ejemplo: $Dom(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$, $Im(\mathcal{R}) = \{2, 3\}$.

Antes de seguir adelante con la teoría, veremos una serie de ejemplos para fijar ideas.

a) Sea A el conjunto de todas las personas (vivas) del mundo. Para $x, y \in A$ definimos:

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } y \text{ es el padre de } x.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en A . Los pares ordenados son de la forma: $(x, \text{padre de } x)$ y $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x : \text{uno de los padres de } x \text{ esta vivo}\}$.

Ejercicio: Encuentre $\text{Im}(\mathcal{R})$.

b) Sea $A = \mathbb{R}$. Para $x, y \in \mathbb{R}$ definimos

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } y = x^2.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{R} y los pares ordenados son de la forma (x, x^2) . Note que lo anterior corresponde a nuestra familiar *parábola*. $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(\mathcal{R}) = \{x : x \geq 0\}$. En general todas las funciones que conocemos son relaciones.

c) Sea A cualquier conjunto. Para $x, y \in A$ se define

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } x = y.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en A . Los pares ordenados son de la forma (x, x) , $\text{Dom}(\mathcal{R}) = A$ y $\text{Im}(\mathcal{R}) = A$.

d) Sea A cualquier conjunto. Si B, C son subconjuntos de A se define:

$$B\mathcal{R}C \text{ si y sólo si } B \subseteq C.$$

Entonces \mathcal{R} es una relación en $\mathbb{P}(A)$ y $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{P}(A)$. En particular, si $A = \{1, 2\}$, entonces

$$\mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, A), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, A), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, A), (A, A)\}$$

e) Sea A el conjunto de todos los chilenos y sea B el conjunto de enteros positivos menor que 100.000.000. Para $x \in A$ y $y \in B$ definimos

$x\mathcal{R}y$ si y sólo si y es el número de carné de x .

Entonces \mathcal{R} es una relación de A en B . Los pares ordenados son de la forma:

(persona , número de carné de la persona),

$Dom(\mathcal{R}) = \{x : x \text{ es una persona que tiene un número de carné}\}$ y $Im(\mathcal{R}) = \{x : x \text{ es algún número de carné}\}$.

f) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$. Entonces $\mathcal{R} = \{(3, 1), (3, 2)\}$, $\mathcal{S} = \emptyset$, $\mathcal{T} = A \times B$ son todas relaciones de A en B .

$$Dom(\mathcal{R}) = \{3\} , Im(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$$

$$Dom(\mathcal{S}) = \emptyset , Im(\mathcal{S}) = \emptyset$$

$$Dom(\mathcal{T}) = A , Im(\mathcal{T}) = B.$$

Note que las relaciones no necesariamente “tienen sentido”, o poseen una particular regla de formación.

g) Sean A, B conjuntos de proposiciones y para $p \in A, q \in B$ se define: $p\mathcal{R}q$ si y sólo si $p \longrightarrow q$ es una tautología. Entonces \mathcal{R} es una relación de A en B y un par ordenado $(p, q) \in \mathcal{R}$ si y sólo si q es una consecuencia lógica de p .

Ejercicio: Encuentre $Im(\mathcal{R})$.

h) Sea A el conjunto de todos los triángulos en el plano. Si $s, t \in A$ diremos que $s\mathcal{R}t$ si y sólo si s es similar (semejante) a t . Entonces \mathcal{R} es una relación en A y $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = A$ (Verificación: Ejercicio).

i) Para $x, y \in \mathbb{R}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x \leq y$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{R} con $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{R}$.

j) Para $x, y \in \mathbb{Z}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si x divide a y (lo cual se denota: $x|y$) y se define como:

$$x|y \longleftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} \ni y = xz.$$

Así: $3|6$, $2|8$, $-3|6$, $3|-9$, $2|0$ y 2 no divide a 9, que se escribe $2 \nmid 9$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{Z} , con $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}$ (ya que cada entero se divide a si mismo). Elementos típicos de \mathcal{R} son: $(1, 3)$, $(7, 21)$, $(1001, 1001)$, $(-1, 3)$.

k) Para $x, y \in \mathbb{N}$ se define $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $5|(x - y)$. Entonces \mathcal{R} es una relación en \mathbb{N} con $Dom(\mathcal{R}) = Im(\mathcal{R}) = \mathbb{N}$ (Verificación: Ejercicio).

Existen ciertas propiedades que una relación puede o no poseer; algunas de las más importantes son las siguientes:

Definición 16 Sea \mathcal{R} una relación en el conjunto A . Diremos que:

- a) \mathcal{R} es reflexiva si y sólo si $\forall a \in A, a\mathcal{R}a$.
- b) \mathcal{R} es simétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, a\mathcal{R}b \longrightarrow b\mathcal{R}a$.
- c) \mathcal{R} es transitiva si y sólo si $\forall a, b, c \in A, (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \longrightarrow a\mathcal{R}c$.
- d) \mathcal{R} es antisimétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \longrightarrow a = b$.
- e) \mathcal{R} es irreflexiva si y sólo si $\forall a \in A, \neg(a\mathcal{R}a)$ (ó $a\not\mathcal{R}a$).
- f) \mathcal{R} es completa si y sólo si $\forall a, b \in A, a \neq b \longrightarrow (a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$.
- g) \mathcal{R} es asimétrica si y sólo si $\forall a, b \in A, a\mathcal{R}b \longrightarrow \neg(b\mathcal{R}a)$.
- h) \mathcal{R} es una relación de equivalencia si y sólo si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.
- i) \mathcal{R} es un orden parcial si y sólo si \mathcal{R} es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- j) \mathcal{R} es un orden parcial estricto si y sólo si \mathcal{R} es irreflexiva y transitiva.
- k) \mathcal{R} es un orden total si y sólo si \mathcal{R} es un orden parcial y completa.

l) \mathcal{R} es un orden total estricto si y sólo si es un orden parcial estricto y completa.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

$$\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$$

$$\mathcal{T} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Entonces:

\mathcal{R} no es reflexiva, no es simétrica, no es transitiva, es antisimétrica, es irreflexiva, no es completa, es asimétrica.

\mathcal{S} no es reflexiva, no es simétrica, es transitiva, no es antisimétrica, no es irreflexiva, no es completa, no es asimétrica.

\mathcal{T} es reflexiva, es simétrica, es transitiva, es antisimétrica, no es irreflexiva, no es completa, no es asimétrica.

Se puede también tener una idea gráfica de las propiedades anteriores. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces para que \mathcal{R} sea reflexiva, debe contener *al menos* la diagonal principal.

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)

1	2	3	4
A			

Si \mathcal{R} es simétrica, entonces su gráfico debe ser simétrico con respecto a la diagonal principal: Así, si $(2, 3)$ y $(4, 2)$ son elementos de \mathcal{R} entonces $(3, 2)$

y $(2, 4)$ deben también estar en \mathcal{R} .

4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)

1	2	3	4
A			

Algunos de los ejemplos dados (a)-k)) también satisfacen algunas propiedades de la definición 16. Por ejemplo:

$=$: es una relación de equivalencia.

\leq y \subseteq : son ordenes parciales.

$<$ y \subset : son ordenes parciales estrictos.

\leq : es un orden total.

$<$: es un orden total estricto.

En general, podemos pensar en *relación de equivalencia* como una idea abstracta de igualdad y en *orden parcial* como una idea abstracta del concepto de orden en los números reales.

Definición 17 Sea \mathcal{R} una relación de A en B . La relación inversa, denotada \mathcal{R}^{-1} , es la relación de B en A dada por: $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si $y\mathcal{R}x$. En símbolos:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

Se observa que $Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Im(\mathcal{R})$ y $Im(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$.

Por ejemplo, si \mathcal{R} es la relación “padre” del ejemplo a), entonces \mathcal{R}^{-1} es la relación “hijo”: $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si y es un hijo de x .

Otro ejemplo es el siguiente: Si \mathcal{R} es la relación en \mathbb{N} dada por $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x < y$, entonces $x\mathcal{R}^{-1}y$ si y sólo si $y < x$.

Definición 18 Sea \mathcal{R} una relación de A en B y sea \mathcal{S} una relación de B en C . Entonces \mathcal{R} compuesta con \mathcal{S} , denotada $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, es la relación de A en C dada por

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) : \exists y \in B \ni [(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}]\}.$$

La razón de revertir el orden de \mathcal{S} y \mathcal{R} en la notación anterior tendrá sentido al trabajar con funciones posteriormente. Observe que, en efecto, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una relación de A en C pues si $(x, y) \in \mathcal{R}$ entonces $x \in A$ y, si $(y, z) \in \mathcal{S}$ entonces $z \in C$. Luego $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq A \times C$.

Como un ejemplo de compuestas de relaciones, sean

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}, C = \{4, 5, 6\}$$

y

$$\mathcal{R} = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}, \mathcal{S} = \{(a, 5), (b, 4), (a, 6), (c, 6)\}.$$

Entonces nos preguntamos: ¿Qué segundas coordenadas de elementos de \mathcal{R} coinciden con primeras coordenadas de elementos de \mathcal{S} ? Esto producirá los elementos de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Por ejemplo, $(1, a) \in \mathcal{R}$ y $(a, 5) \in \mathcal{S}$ nos da $(1, 5) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Continuando, obtenemos:

$$(1, 4) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (1, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, 4) \in \mathcal{S}$$

$$(3, 5) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (3, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 5) \in \mathcal{S}$$

$$(1, 6) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (1, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 6) \in \mathcal{S}$$

$$(3, 6) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ pues } (3, a) \in \mathcal{R} \text{ y } (a, 6) \in \mathcal{S}$$

Así, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 5), (1, 4), (3, 5), (1, 6), (3, 6)\}$.

Definición 19 Sea A un conjunto. La relación identidad en A , denotada por I_A , es definida por

$$I_A = \{(x, x) : x \in A\}.$$

Así aI_Ab si y sólo si $a = b$.

Ejemplo Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y \mathcal{R} la relación en A dada por $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Entonces

- a) $\mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.
- b) $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
- c) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.
- d) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}$.
- e) $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3)\}$.
- f) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1)\}$.
- g) $\mathcal{R} \circ I_A = I_A \circ \mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
- h) $\mathcal{R}^{-1} \circ I_A = I_A \circ \mathcal{R}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

Una conclusión adicional que podemos obtener de este ejemplo es:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \neq \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R},$$

luego la composición no es conmutativa.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ con

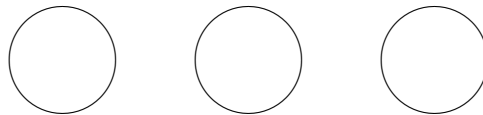
$$\mathcal{R} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$$

una relación de A en B , y

$$\mathcal{S} = \{(4, 2), (4, 3), (6, 2)\}$$

una relación de B en C .

Lo anterior se puede mostrar con un diagrama:



Algunos cálculos muestran que:

a) $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 2)\}.$

b) $\mathcal{R}^{-1} = \{(4, 1), (5, 1), (6, 2), (4, 3)\}.$

c) $\mathcal{S}^{-1} = \{(2, 4), (3, 4), (2, 6)\}.$

d) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}.$

e) $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (2, 2)\}.$

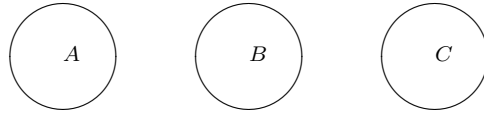
Se observa que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$ no están definidos y que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} = (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}.$

A fin de practicar un poco más con demostraciones, veremos que esta última igualdad es siempre verdadera.

Teorema 20 Sean A, B, C conjuntos; \mathcal{R} una relación de A en B y \mathcal{S} una relación de B en C . Entonces

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}.$$

Demostración. Es de ayuda considerar la siguiente figura para tener en mente los diferentes tipos de relaciones involucradas:



Primero, observamos que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ es una relación de C en A , de la misma forma que lo es $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Así, al menos hay una chance que sean iguales.

Recordando que las relaciones son conjuntos, para demostrar que son iguales debemos probar que los conjuntos son iguales.

Sea $(x, z) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$. Entonces $(z, x) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. Luego, existe $y \in B$ tal que $(z, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{S}$. Concluimos que $(y, z) \in \mathcal{R}^{-1}$ y $(x, y) \in \mathcal{S}^{-1}$. Por lo tanto $(x, z) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Esto prueba que $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} \subseteq \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

Para probar la inclusión opuesta, sea $(x, z) \in \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$. Entonces existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in \mathcal{S}^{-1}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}^{-1}$. Luego $(y, x) \in \mathcal{S}$ y $(z, y) \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $(z, x) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, de donde $(x, z) \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ como queríamos. ■

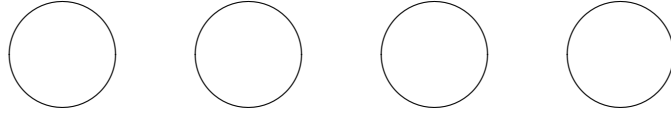
Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7, 8\}$ y $D = \{1, 4, 6\}$. Definimos las siguientes relaciones

$$\mathcal{R} = \{(1, 4), (3, 5), (3, 6)\} \text{ relación de } A \text{ en } B$$

$$\mathcal{S} = \{(4, 6), (6, 8)\} \text{ relación de } B \text{ en } C$$

$$\mathcal{T} = \{(6, 1), (8, 6), (6, 4)\} \text{ relación de } C \text{ en } D.$$

Estas relaciones se ilustran en la siguiente figura:



Entonces podemos formar

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 6), (3, 8)\} \text{ una relación de } A \text{ en } C$$

y

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \{(4, 1), (4, 4), (6, 6)\} \text{ una relación de } B \text{ en } D.$$

Ahora, las relaciones anteriores se pueden componer con \mathcal{T} y \mathcal{R} para obtener

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \{(1, 1), (1, 4), (3, 6)\} \text{ una relación de } A \text{ en } D$$

y

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (3, 6)\} \text{ una relación de } A \text{ en } D.$$

Observemos que son iguales. Esto no es excepcional a este ejemplo. La propiedad se denomina: Composición de relaciones es asociativa. El resultado es como sigue:

Teorema 21 Sean A, B, C, D conjuntos y \mathcal{R} una relación de A en B , \mathcal{S} una relación de B en C y \mathcal{T} una relación de C en D . Entonces

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}.$$

Se deja la demostración del resultado anterior como un ejercicio, así como la del siguiente:

Teorema 22 Sea \mathcal{R} una relación en A . Entonces \mathcal{R} es transitiva si y sólo si

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}.$$

2.4 Particiones y relaciones de equivalencia

Veamos con un poco más de detalle la relación de equivalencia del ejemplo siguiente: \mathcal{R} es una relación en \mathbb{N} dada por:

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } 5|(x - y) \quad (\longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 5k = x - y).$$

Si definimos

$$S_i = \{x : x\mathcal{R}i\}, i \in \mathbb{N},$$

se tiene

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x : x\mathcal{R}1\} = \{1, 6, 11, 16, \dots\} \\ S_2 &= \{x : x\mathcal{R}2\} = \{2, 7, 12, 17, \dots\} \\ S_3 &= \{x : x\mathcal{R}3\} = \{3, 8, 13, 18, \dots\} \\ S_4 &= \{x : x\mathcal{R}4\} = \{4, 9, 14, 19, \dots\} \\ S_5 &= \{x : x\mathcal{R}5\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\} \\ S_6 &= \{x : x\mathcal{R}6\} = \{1, 6, 11, 16, \dots\} = S_1 \\ S_7 &= S_2, S_8 = S_3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Gráficamente

\mathbb{N}				
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5

Hay varias cosas interesantes de observar.

En una primera impresión, se podría haber supuesto que los conjuntos S_i eran infinitos, pero sólo hay 5 de ellos.

También, la unión de estos conjuntos es \mathbb{N} ; esto es, dado cualquier elemento $y \in \mathbb{N}$, y es un elemento de estos cinco conjuntos. Más precisamente, *hay exactamente uno* de estos conjuntos que tiene “ y ” como un elemento.

Lo anterior significa también que, dados dos conjuntos S_i entonces ya sea son iguales o disjuntos.

Veremos que cada relación de equivalencia genera conjuntos con las propiedades anteriores. Para ello necesitaremos previamente de algunas definiciones.

Definición 23 *Sea A un conjunto no vacío. Una partición Π de A es una colección de subconjuntos no vacíos de A tales que cada elemento de A es un elemento de exactamente uno de estos conjuntos.*

Observe que si Π es una partición de A , entonces los elementos de Π son subconjuntos de A , que denominaremos *bloques* de Π . Se nota que si B y C son bloques de Π , entonces $B = C$ ó $B \cap C = \emptyset$. También, la unión de todos los elementos de Π es A .

Podemos pensar de una partición de un conjunto como en un “corte” del conjunto en pedazos disjuntos.

Ejemplos

a) Sea A un conjunto no vacío. Entonces $\Pi_1 = \{\{x\} : x \in A\}$ y $\Pi_2 = \{A\}$ son particiones de A . En cierto sentido, Π_1 es la partición “más fina” de A mientras que Π_2 es la partición “menos fina”.

b) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces $\Pi_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ y $\Pi_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ son particiones de A .

c) Con respecto a los conjuntos S_i de la introducción, se observa que $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ es una partición de \mathbb{N} .

Hay una interrelación muy estrecha entre particiones y relaciones de equivalencia. En efecto, dada una relación de equivalencia en un conjunto se puede generar una partición (Ejemplo de \mathbb{N} anteriormente) y dada una partición se puede generar una relación de equivalencia.

Para analizar lo anterior en detalle, requerimos la siguiente definición.

Definición 24 Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A . Sea $x \in A$. La clase de equivalencia de x módulo \mathcal{R} , denotada $[x]_{\mathcal{R}}$ (ó $x|\mathcal{R}$), es el conjunto de todos los elementos de A que están \mathcal{R} -relacionados a x . En símbolos:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A : y\mathcal{R}x\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota $[A]_{\mathcal{R}}$ (ó $A|\mathcal{R}$) y se llama A módulo \mathcal{R} . En símbolos

$$[A]_{\mathcal{R}} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in A\}.$$

Con respecto al ejemplo de la introducción, tenemos:

$$\begin{aligned} [2]_{\mathcal{R}} &= S_2 = \{2, 7, 12, 17, \dots\} \\ [4]_{\mathcal{R}} &= [9]_{\mathcal{R}} = [14]_{\mathcal{R}} \\ [\mathbb{N}]_{\mathcal{R}} &= \{[1]_{\mathcal{R}}, [2]_{\mathcal{R}}, [3]_{\mathcal{R}}, [4]_{\mathcal{R}}, [5]_{\mathcal{R}}\} \\ &= \{[6]_{\mathcal{R}}, [12]_{\mathcal{R}}, [18]_{\mathcal{R}}, [9]_{\mathcal{R}}, [25]_{\mathcal{R}}\} \end{aligned}$$

Como otros ejemplos, sea A un conjunto no vacío y \mathcal{R} la relación de igualdad: $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $x = y$. Sea $\mathcal{S} = A \times A$ (también una relación de equivalencia). Entonces, para cada $x \in A$:

$$\begin{aligned} [x]_{\mathcal{R}} &= \{x\} \text{ y } [x]_{\mathcal{S}} = A \\ [A]_{\mathcal{R}} &= \{\{x\} : x \in A\} \text{ y } [A]_{\mathcal{S}} = \{A\}. \end{aligned}$$

Algunas propiedades generales de las clases de equivalencia se presentan en el siguiente resultado.

Teorema 25 *Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia en el conjunto no vacío A . Entonces*

- a) $\forall x \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
- b) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ si y sólo si $x\mathcal{R}y$.
- c) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ si y sólo si $x\mathcal{R}y$.
- d) $\forall x, y \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}}$ si y sólo si $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Demostración.

a) Ya que \mathcal{R} es reflexivo, $x\mathcal{R}x \forall x \in A$. Luego, $x \in [x]_{\mathcal{R}}$ y, por lo tanto $\forall x \in A, [x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

b) Suponga que x, y son elementos de A y que $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$. Sea $z \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$. Entonces $x\mathcal{R}z$ y $y\mathcal{R}z$. Ya que \mathcal{R} es simétrica, $z\mathcal{R}y$. Además \mathcal{R} es transitiva por lo que $x\mathcal{R}y$ como deseabamos.

Supongamos que $x\mathcal{R}y$. Entonces $y \in [x]_{\mathcal{R}}$. Pero $y \in [y]_{\mathcal{R}}$ también.

Luego, $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

c) Si $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ entonces $y \in [x]_{\mathcal{R}}$, luego $x\mathcal{R}y$.

Supongamos ahora que $x\mathcal{R}y$ y sea $z \in [x]_{\mathcal{R}}$. Entonces $x\mathcal{R}z$. Por la simetría de \mathcal{R} se tiene $y\mathcal{R}x$. Luego, por transitividad, $y\mathcal{R}z$. Luego $z \in [y]_{\mathcal{R}}$. Esto prueba que $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$.

Se deja como ejercicio probar que $[y]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{R}}$.

Finalmente, observe que d) se obtiene directamente de b) y c). ■

Teorema 26 *Sea A un conjunto no vacío y \mathcal{R} una relación de equivalencia en A . Entonces $[A]_{\mathcal{R}}$ es una partición de A .*

Demostración. Ejercicio.

Hemos visto que una relación de equivalencia induce una partición del conjunto. Este proceso también trabaja en reversa, esto es, una partición de un conjunto induce una relación de equivalencia en el conjunto.

Antes de probar lo anterior, daremos un nombre a dicha relación.

Definición 27 *Sea Π una partición de un conjunto A . Se define una relación $A|\Pi$ (“ A módulo Π ”) en A por: $(x, y) \in A|\Pi$ si y sólo si existe $B \in \Pi$ tal que $\{x, y\} \subseteq B$.*

En palabras: x está relacionado con y si y sólo si x e y son ambos elementos del mismo bloque de la partición.

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\Pi_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, entonces

$$A|\Pi_2 = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)\}.$$

Teorema 28 *Sea Π una partición de un conjunto no vacío A . Entonces $A|\Pi$ es una relación de equivalencia en A .*

Demostración. Sea Π una partición de A . Por conveniencia, denotemos \mathcal{R} a $A|\Pi$. Debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

\mathcal{R} es reflexiva: Sea $x \in A$. Como x es un elemento de algún bloque de Π , se tiene $x\mathcal{R}x$. Luego, \mathcal{R} es reflexiva.

\mathcal{R} es simétrica: Si $x\mathcal{R}y$, donde x e y están en el mismo bloque de Π lo cual implica que $y\mathcal{R}x$. Así \mathcal{R} es simétrica.

\mathcal{R} es transitiva: Suponga que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$. Entonces existen $B, C \in \Pi$ tales que $\{x, y\} \subseteq B$ y $\{y, z\} \subseteq C$. Ahora, $y \in B \cap C$, luego $B \cap C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B = C$. Así $\{x, z\} \subseteq B$ lo que dice que $x\mathcal{R}z$. Concluimos que \mathcal{R} es transitiva y luego una relación de equivalencia. ■

2.5 Funciones

Las funciones juegan un papel muy importante en matemática. Una precisa definición es la siguiente.

Definición 29 Sea f una relación de A en B . Entonces f es una función de A en B (denotado $f : A \rightarrow B$ y se lee “ f es una función de A en B ”) si y sólo si

$$a) \text{ Dom}(f) = A$$

$$b) \forall x \in A, \forall y, z \in B \quad [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f] \rightarrow y = z.$$

En palabras, lo anterior dice que si f es una relación de A en B tal que para cada $x \in A$ existe exactamente un $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, entonces f es una función.

La condición a) garantiza que para cada $x \in A$ existe *al menos* un tal “ y ” y la condición b) garantiza que hay *a lo más* uno. Así, tomados juntos, hay *exactamente uno*.

Si f es una función de A en B entonces la “propiedad funcional” de *cada* $x \in A$ relacionado a *exactamente un* $y \in B$ permite el uso de la notación funcional

$$y = f(x).$$

Como ejemplos de relaciones que son funciones y algunas que no lo son, consideremos los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ f &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\} \\ g &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\} \\ h &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

Entonces f , g y h son relaciones de A en B , pero sólo f es una función; g no es función ya que $(1, 2)$ y $(1, 3)$ son elementos de g . Tampoco h es una función ya que $\text{Dom}(h) = \{1, 2, 3\} \neq A$.

Observemos que f tiene una simple forma y puede ser descrita por una fórmula: $\forall x \in A, f(x) = x + 1$.

La mayoría de las funciones conocidas en cálculo son dadas por una fórmula. Sin embargo esto no es necesario y, en general en matemática, las funciones no están dadas por fórmulas.

Usaremos las siguientes notaciones y nombres cuando trabajemos con funciones.

Sea $f : A \rightarrow B$ y $(x, y) \in f$ entonces escribimos $y = f(x)$.

Observe que el nombre de la función es f y que $f(x)$ no es el nombre de la función sino un elemento de B .

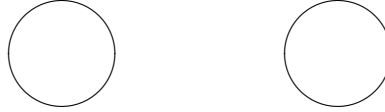
Si $y = f(x)$ entonces decimos que y es *la imagen* de x y que x es *una preimagen* de y .

Observe que se usa “la” cuando se habla de imagen y se usa “una” cuando se habla de preimágenes ya que un elemento de B puede tener varios elementos de A relacionados.

Ya que f es una relación se puede hablar de su dominio e imagen, componer f con otras relaciones y analizar su inversa.

Note que aunque $Dom(f) = A$, no necesariamente es $Im(f) = B$. De esta manera es conveniente tener también un nombre para B . Usualmente se le denomina *codominio* de f .

Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y definamos $f : A \rightarrow B$ por $f(1) = b$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = d$, $f(5) = a$. Gráficamente:



La imagen de 2 es b . Una preimagen de a es 5 (otra es 3). c no tiene preimágenes.

El siguiente resultado es útil para determinar cuando dos funciones son iguales.

Teorema 30 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$. Entonces $f = g$ si y sólo si $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Demostración. Primero, supongamos que $f = g$ y sea $z \in A$. Entonces $\exists y \in B \ni (z, y) \in f$. Ya que $f = g$, $(z, y) \in g$. Luego $y = g(z)$ y $y = f(z)$. Esto prueba que $g(z) = f(z)$.

Ahora supongamos que $\forall x \in A, f(x) = g(x)$. Ya que funciones son relaciones y relaciones son conjuntos de pares ordenados, para mostrar que $f = g$ se debe mostrar que ellos son iguales como conjuntos de pares ordenados. Con este fin, sea $(w, z) \in f$. Entonces $z = f(w) = g(w)$. Luego

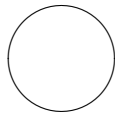
$(w, z) \in g$ y se tiene $f \subseteq g$. Intercambiando los roles de f y g se puede mostrar que $g \subseteq f$ de lo cual se obtiene que $f = g$. ■

Existen ciertas propiedades que las funciones pueden o no tener. Si estas propiedades son usadas frecuentemente entonces requieren nombres. Algunos de estos son dados en la siguiente definición.

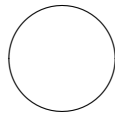
Definición 31 Sea $f : A \rightarrow B$. Entonces:

- a) Se dice que f es uno a uno (o f es inyectiva) si y sólo si $\forall w, z \in A$, $f(w) = f(z)$ implica $w = z$.
- b) Se dice que f es sobre (o f es sobreyectiva) si y sólo si $Im(f) = B$.
- c) Se dice que f es biyectiva (o biunivoca) si y sólo si f es a la vez uno a uno y sobre.

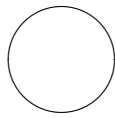
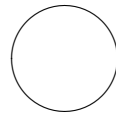
Las siguientes figuras ilustran varias posibilidades.



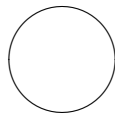
Sobreyectiva pero no 1-1



1-1 pero no sobre



No es sobre y no es 1-1



1-1 y sobre

Recordemos que ya que funciones son relaciones, ellas tienen inversas que son relaciones. Así, podemos hablar de la inversa de cualquier función, pero no hay razón para esperar que esta inversa sea también una función.

En este sentido las funciones biyectivas son importantes, ya que ellas son exactamente aquellas funciones cuyas inversas son también funciones.

Teorema 32 Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es una función si y sólo si f es biyectiva.

Demostración. Primero, supongamos que f^{-1} es una función de B en A . Debemos mostrar que f es 1-1 y sobre.

Supongamos que $f(x) = f(y) = z$. Esto significa que $(x, z) \in f$ y $(y, z) \in f$. Entonces $f^{-1}(z) = x$ y $f^{-1}(z) = y$. Pero f^{-1} es una función, luego $x = y$. Esto muestra que f es 1-1.

Para mostrar que f es sobre, sea $y \in B$. Ya que $Dom(f^{-1}) = B$, existe un $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. Luego $(y, x) \in f^{-1}$, lo cual implica que $(x, y) \in f$.

Así, $y \in Im(f)$. Esto prueba que $B \subseteq Im(f)$. Ya que es evidente que $Im(f) \subseteq B$ se tiene mostrado que $Im(f) = B$.

Ahora supongamos que f es 1-1 y sobre. Se debe mostrar que f^{-1} es una función de B en A ; esto es, se debe mostrar que $Dom(f^{-1}) = B$ y que si $(y, x) \in f^{-1}$ y $(y, z) \in f^{-1}$ entonces $x = z$.

Primero, sea $y \in B$. Entonces ya que f es sobre, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$ ó $(x, y) \in f$. Así $(y, x) \in f^{-1}$ y luego $x \in Dom(f^{-1})$. Esto prueba que $B = Dom(f^{-1})$.

Ahora, supongamos que $(y, x) \in f^{-1}$ y $(y, z) \in f^{-1}$. Entonces $f(x) = y$ y $f(z) = y$. Pero f es 1-1, luego lo anterior implica que $x = z$. Luego f^{-1} es una función. ■

Se observa que el hecho que f es 1-1 implica que f^{-1} tiene la propiedad de función y que f^{-1} sobre implica que $Dom(f^{-1}) = B$.

Así, si $f : A \rightarrow B$ es tal que f es 1-1 pero no sobre B , entonces f^{-1} es una función de $Im(f)$ en A pero no es una función de B en A .

Se deja como un ejercicio mostrar que la composición de funciones es también una función.

Si $f : A \rightarrow B$ y $G : B \rightarrow C$ entonces $(g \circ f) : A \rightarrow C$ denota la

composición de f y g .

Si $(g \circ f)(x) = z$, entonces $(x, z) \in (g \circ f)$, lo cual significa que existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ y $(y, z) \in g$. Luego, $f(x) = y$ y $g(y) = z$. Por lo tanto, $z = g(y) = g(f(x))$ ó

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

que es la notación usual.

Ya que funciones son relaciones se pueden componer y, en consecuencia, los resultados para relaciones valen para funciones. Así, si f, g son funciones con dominios e imágenes apropiadas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

aunque $(g \circ f)^{-1}$, f^{-1} y g^{-1} pueden no ser funciones.

El teorema 32 nos dice que si f, g son biyectivas entonces f^{-1} y g^{-1} serán funciones.

Teorema 33 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f) : A \rightarrow C$ es biyectiva.

Demostración. Debemos probar que $(g \circ f) : A \rightarrow C$ es biyectiva.

Primero, supongamos que existen $x, y \in A$ tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Entonces $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es 1-1, $f(x) = f(y)$. Ahora, como f es 1-1, $x = y$. Luego, $g \circ f$ es 1-1.

Segundo, para demostrar que $g \circ f$ es sobre, sea $z \in C$. Ya que g es sobre, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Pero f también es sobre, luego existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Así, $g \circ f$ es sobre. ■

La demostración anterior es típica para mostrar que una cierta función es biyectiva. Sin embargo hay otras alternativas.

Sea $f : A \rightarrow B$. Una demostración *directa* para probar que f es 1-1 podría tomar la siguiente forma: Sean $x, y \in A$ con $f(x) = f(y)$.

$$\vdots$$

“Alguna cosa u otra dependiente de f ”

$$\vdots$$

Así $x = y$ y f es 1-1.

Una demostración *contrapositiva* debería ser de la forma: Sean $x, y \in A$, con $x \neq y$.

$$\vdots$$

“Alguna cosa dependiendo de f ”

$$\vdots$$

Así $f(x) \neq f(y)$ y f es 1-1.

Una demostración directa para mostrar que f es sobre, podría ser: Sea $y \in B$

$$\vdots$$

“Algo dependiente de f ”

$$\vdots$$

Así, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego f es sobre.

En resumen: Para mostrar que f es 1-1 se debe probar que distintos elementos en el dominio tienen distintas imágenes y para mostrar que f es sobre se debe probar que cada elemento de B tiene una preimagen.

Ejemplo: Demostremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, es biyectiva.

Primero una prueba directa que f es 1-1.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = f(y)$. Entonces $ax + b = ay + b$, lo cual implica que $ax = ay$. Ya que $a \neq 0$, se tiene $x = y$ y por lo tanto f es 1-1.

Una prueba contrapositiva podría ser: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$. Entonces ya que $a \neq 0$, $ax \neq ay$. Luego se tiene $ax + b \neq ay + b$ y así $f(x) \neq f(y)$.

Para mostrar que f es sobre, sea $z \in \mathbb{R}$. Entonces $\frac{z-b}{a}$ es también un elemento de \mathbb{R} (ya que $a \neq 0$) y

$$f\left(\frac{z-b}{a}\right) = a\left(\frac{z-b}{a}\right) + b = z - b + b = z.$$

Luego f es sobreyectiva.

Observe que la elección de $\frac{z-b}{a}$ fué el resultado de resolver la ecuación $f(x) = ax + b = z$ para x .

Teorema 34 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ biyectivas. Entonces $(g \circ f)^{-1} : C \rightarrow A$ y $\forall x \in C$,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)).$$

La demostración queda como ejercicio. Sin embargo note que la mayor parte ya fué mostrada previamente.

Observemos que la relación identidad en A , I_A , es una función de A en A que llamaremos *función identidad*. Usando una notación funcional: $I_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

La razón del nombre anterior se aclara en el siguiente resultado.

Teorema 35 Sea $f : A \rightarrow B$. Entonces

a) $f \circ I_A = f$.

b) $I_B \circ f = f$.

c) Si f es biyectiva entonces $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$ (ó $\forall x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$ y $\forall x \in B$, $f(f^{-1}(x)) = x$).

Demostración.

a) y b) son fáciles de probar, pues si $x \in A$, entonces

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

y

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x).$$

Para mostrar c), observemos primero que como f es biyectiva, f^{-1} es una función, de modo que $f(x) = y$ si y sólo si $f^{-1}(y) = x$.

Ahora, sea $x \in A$ y sea $y = f(x)$. Entonces

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_A(x).$$

Análogamente, sea $x \in B$ y sea $f^{-1}(x) = y$. Entonces

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) = x = I_B(x).$$

■

Se puede extender la idea de función en una manera natural desde elementos individuales del dominio a subconjuntos del dominio. Esto es, $f : A \rightarrow B$ puede ser extendido a $f : \mathbb{P}(A) \rightarrow \mathbb{P}(B)$.

Definición 36 Sea $f : A \rightarrow B$. Si $C \subseteq A$ entonces se define

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Si $D \subseteq B$ entonces

$$f^{-1}(D) = \{x : f(x) \in D\}.$$

$f(C)$ se llama la imagen de C y $f^{-1}(D)$ la preimagen de D .

Ejemplo: Sea $f : A \rightarrow B$ donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y f es dada por $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\{1, 3\}) &= \{1, 5\}, & f(\{1, 2\}) &= \{1\}, \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{1, 2\}, & f^{-1}(\{4\}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Teorema 37 Sea $f : A \rightarrow B$ y sean $C \subseteq D \subseteq B$. Entonces

$$f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D).$$

Demostración. Sea $x \in f^{-1}(C)$. Entonces $x \in A$ y $f(x) \in C$. Ya que $C \subseteq D$, $f(x) \in D$. Pero esto dice que $x \in f^{-1}(D)$. ■

Observemos que nuestras familiares operaciones aritméticas $(+, -, \cdot, \div)$ son funciones, como también lo son los conectivos lógicos $(\vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow)$ y las operaciones entre conjuntos (\cap, \cup, \setminus) . Hay un nombre especial para funciones de esta clase.

Definición 38 Sea A un conjunto. $*$ se llama una operación binaria en A si y sólo si $*$: $A \times A \rightarrow A$ es una función.

Se observa que una operación binaria en A asocia a cada par de elementos de A otro elemento de A . Debido a esto, en este caso nos apartamos de nuestra notación usual y escribimos

$$a * b = c \text{ en vez de } *((a, b)) = c.$$

Por ejemplo, con $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (suma de números reales) se escribe $2+3 = 5$ en vez de $++((2, 3)) = 5$.

Hay varias propiedades que una operación binaria puede o no poseer.

Definición 39 Sea $*$ una operación binaria en un conjunto A . Entonces:

a) Se dice que $*$ es conmutativa si y sólo si $\forall a, b \in A$,

$$a * b = b * a.$$

b) Se dice que $*$ es asociativa si y sólo si $\forall a, b, c \in A$,

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

c) Se dice que $e \in A$ es una identidad para $*$ si y sólo si $\forall a \in A$, $a * e = e * a = a$.

d) Si e es una identidad para $*$ y $x \in A$ se dice que x es invertible si y sólo si $\exists y \in A \ni x * y = y * x = e$. El elemento “ y ” es llamado una inversa de x .

e) Se dice que $a \in A$ es idempotente para $*$ si y sólo si $a * a = a$.

Ejemplos:

a) $+$ en \mathbb{R} es conmutativo, asociativo, tiene 0 como una identidad y cada elemento es invertible (el inverso de x es $-x$). El único elemento idempotente es 0.

b) $-$ en \mathbb{R} no es conmutativo, no es asociativo, no tiene elemento identidad y el único elemento idempotente es 0.

c) \cup en $\mathbb{P}(A)$, para algún conjunto A . Esta operación es conmutativa, asociativa, \emptyset es una identidad y cada elemento es idempotente.

Algunos resultados sobre operaciones binarias son los siguientes.

Teorema 40 Sea $*$ una operación binaria en A . Entonces existe a lo más una identidad para $*$.

Demostración. Supongamos que e y e' son identidades para $*$. Entonces,

$$e = e * e' = e'.$$

(Observe que la primera igualdad es verdadera pues e' es una identidad y la segunda es válida pues e es una identidad). Concluimos que $e = e'$ y luego $*$ tiene a lo más una identidad. ■

Teorema 41 Si $*$ es una operación binaria asociativa con identidad e en A y $x \in A$, entonces x tiene a lo más una inversa.

Demostración. Suponga que $x \in A$ tiene y e y' como inversas. Entonces $x * y = y * x = e$ y $x * y' = y' * x = e$. Luego

$$y = y * e = y * (x * y') = (y * x) * y' = e * y' = y'.$$

■

En virtud de los teoremas anteriores podemos hablar de *la* identidad y *el* inverso de un elemento (si existe).

2.6 Ejercicios

1. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x : (x - 2)^2(x - 3) = 0\}$ y $C = \{x : x \text{ es impar}\}$. Hallar

a) $A \cup B$ b) $A \cap (B \cup C)$ c) $C - A$ d) $C \cup A^c$
 e) $(A \cup C)^c$ f) $A^c \cap C^c$ g) $\mathbb{P}(B)$

2. Sean A , B , C conjuntos y U el conjunto universal. Demuestre las siguientes propiedades

a) $A \cup \emptyset = A$ b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
 c) $A - \emptyset = A$ d) $A \cup U = U$
 e) $A \cap U = A$ f) $A \cup A^c = U$
 g) $A \cap A^c = \emptyset$ h) $A - A = \emptyset$
 i) $A - B \subseteq A$ j) $A \cap B \subseteq A$
 k) $A \cup B \supseteq A$ l) $A \cap B \subseteq A \cup B$
 m) $(A^c)^c = A$ n) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 o) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ p) $A \cup (B - A) = A \cup B$
 q) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
 r) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
 s) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 t) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Sean A , B conjuntos. Considere las conjeturas siguientes. Demuestre que son verdaderas ó bien de un contraejemplo para mostrar que son falsas.

a) $\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$

- b) $\mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cap B)$
 - c) $\mathbb{P}(A \cup B) \subseteq \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$
 - d) $\mathbb{P}(A \cap B) \subseteq \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$
 - e) $\mathbb{P}(A \cap B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$.
4. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5, 6\}$.
- a) Dé la lista de los elementos de $A \times B$, $B \times A$, $A \times C$.
 - b) Dé ejemplos de relaciones de A en B y de B en A , con 4 elementos cada una.
5. Sean A , B , C , D conjuntos. Demuestre o de contraejemplos para las siguientes conjeturas.
- a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 - b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 - c) $(A \times B) \cap (A^c \times B) = \emptyset$
 - d) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \longrightarrow A \times C \subseteq B \times D$
 - e) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$
 - f) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$
 - g) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
 - h) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
6. Sean A , B conjuntos y \mathcal{R} , \mathcal{S} relaciones de A en B . Demuestre:
- a) $Dom(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Dom(\mathcal{R}) \cup Dom(\mathcal{S})$
 - b) $Dom(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq Dom(\mathcal{R}) \cap Dom(\mathcal{S})$
 - c) $Im(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = Im(\mathcal{R}) \cup Im(\mathcal{S})$
 - d) $Im(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq Im(\mathcal{R}) \cap Im(\mathcal{S})$

7. Se define el par ordenado (a, b) por: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Demuestre que con la definición anterior se tiene:

$$(a, b) = (c, d) \longleftrightarrow (a = c \wedge b = d).$$

8. Sean $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$. Sean $R = \{(1, 3), (1, 4), (4, 4)\}$ una relación de A en B , $S = \{(1, 1), (3, 4), (3, 2)\}$ una relación de B en A y $T = \emptyset$ una relación de A en B . Encuentre:

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------|
| a) $Dom(R)$ | b) $Dom(S)$ | c) $Dom(T)$. |
| d) $Im(R)$ | e) $Im(S)$ | f) $Im(T)$. |
| g) $S \circ R$ | h) $R \circ S$. | |
| i) $Dom(S \circ R)$ | j) $Im(S \circ R)$. | |
| k) $Dom(R \circ S)$ | l) $Im(R \circ S)$. | |
| m) R^{-1} | n) S^{-1} . | |
| o) I_A | p) I_B . | |
| q) $R^{-1} \circ S^{-1}$ | r) $S^{-1} \circ R^{-1}$. | |
| s) $(R \circ S)^{-1}$ | t) $(S \circ R)^{-1}$. | |
| u) T^{-1} | v) I_B^{-1} . | |
| w) $(R \circ S) \circ R$ | x) $R \circ (S \circ R)$. | |

9. Sean R una relación de A en B y S una relación de B en C . Muestre que:

- $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.
- $Im(S \circ R) \subseteq Im(S)$.
- $Im(R) \subseteq Dom(S)$ implica $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$.

10. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\Pi = \{\{2, 4, 6\}, \{1, 5\}, \{3\}\}$. Liste los elementos de $A|\Pi$. Encuentre $[2]_{A|\Pi}$.

11. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $f : A \rightarrow A$ una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ si } x \neq 6; \\ 1 & , \text{ si } x = 6. \end{cases}$$

- a) Encuentre $f(3)$, $f(6)$, $f \circ f(3)$, $f(f(2))$.
 - b) Encuentre una preimagen de 2 y de 1.
 - c) Muestre que f es inyectiva.
12. Muestre que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es 1-1 y sobre mientras que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$ no es 1-1 ni es sobre.
13. Sean A , B y $f : A \rightarrow B$ tales que

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Encuentre $f^{-1} \circ f$.

14. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y $f : A \rightarrow B$ dada por

$$f(1) = f(4) = f(6) = 3 ; f(2) = 5 \text{ y } f(3) = f(5) = 4.$$

Encuentre:

- a) $f(\{1, 2, 3\})$, $f(A - \{2\})$, $f(A) - \{2\}$.
- b) $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{4, 5\})$, $f^{-1}(\{2\})$.
- c) $f(\{1, 2\} \cap \{2, 6\})$, $f(\{1, 2\}) \cap f(\{2, 6\})$.

Capítulo 3

Inducción matemática

A menudo deseamos probar proposiciones de la forma $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$. Por ejemplo:

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

$$(2) \forall n \in \mathbb{N}, (n - 2)^2 = n^2 - 2n + 4.$$

$$(3) \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ par implica } n^2 \text{ par}.$$

Proposiciones (2) y (3) se pueden probar usando la técnica de variable “fija pero arbitraria” que vimos anteriormente (ejercicio para el lector), pero esto no funciona para la proposición (1).

Una razón para esta dificultad es que el lado izquierdo de la igualdad no está en forma cerrada y, por lo tanto, no se puede manipular algebraicamente.

En efecto, aún para entender que significa la expresión del lado izquierdo tenemos que recurrir a una propiedad de los números naturales: Dado un número natural k existe un “siguiente” número natural, que se llama $k + 1$.

Así, podríamos esperar que una demostración de (1) involucre esta propiedad “siguiente” de los números naturales.

En efecto, la propiedad de \mathbb{N} a que nos referimos es uno de los cinco postulados de Peano para los números naturales. El lector interesado en los

fundamentos axiomáticos de \mathbb{N} puede consultar la bibliografía: E. Landau, Foundations of Analysis, Chelsea, New York, 1951.

Axioma 42 (Principio de inducción matemática) Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ con la propiedad que:

a) $1 \in S$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}, k \in S \longrightarrow k + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

podemos usar el principio de inducción matemática para probar una proposición de la forma $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$ haciendo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es verdadera} \}.$$

Así, consideramos que $p(1)$ es verdadero ($1 \in S$) y $p(k) \longrightarrow p(k + 1)$ ($k \in S \longrightarrow k + 1 \in S$) entonces $S = \mathbb{N}$ ó

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(n).$$

En consecuencia, demostraciones usando el principio de inducción matemática toman la siguiente forma:

a) Mostrar que $p(1)$ es verdadero.

b) Mostrar que $p(k) \longrightarrow p(k + 1)$.

Ejemplo: Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Aquí $p(n)$ es “ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ ”. Así $p(1)$ es

$$“1 = \frac{1}{2}(1)(1 + 1)”$$

que es claramente verdadero.

Para completar la inducción se debe demostrar que una cierta implicación ($\forall k, p(k) \longrightarrow p(k + 1)$) es verdadera.

Usaremos nuestro método directo de demostración para esta proposición: Elegimos un número natural k fijo pero arbitrario, asumimos que la hipótesis $(p(k))$ es verdadera y deducimos la validez de la conclusión $(p(k+1))$.

Para comenzar, sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $p(k)$ es verdadero, esto es,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Así, $p(k+1)$ es verdadero, lo que completa la demostración.

Ejemplos

a) Si $x \geq 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+x^n$.

Demostración por inducción: Cuando $n = 1$ se tiene $1+x \geq 1+x$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $(1+x)^k \geq 1+x^k$. Entonces

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+x^k)(1+x) \\ &= 1+x^{k+1}+x+x^k \\ &\geq 1+x^{k+1}, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq n$.

Cuando $n = 1$ se tiene $1^2 \leq 1$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y $k^2 \leq k$. Entonces

$$(k+1)^2 \leq k+1$$

implica

$$k^2 + 2k + 1 \leq k + 1$$

ó

$$k^2 + 2k \leq k$$

lo cual implica

$$k^2 \leq k,$$

que es nuestra hipótesis original, supuesta verdadera. Esto completa la demostración.

Observe lo sorprendente que resulta la proposición anterior.

Ciertamente el resultado anterior es falso, de manera que debe existir algún error en la demostración.

El ejemplo b) muestra un error común que se comete al empezar a manejar el método de inducción.

Un análisis muestra que en la prueba anterior se *asume* la *conclusión* y entonces se obtuvo la hipótesis, una forma de demostración que nunca es válida.

Si todas las las implicaciones pudiesen ser revertidas, se podría construir una demostración válida invirtiendo el orden de los pasos, pero en este caso el último paso no puede ser invertido ($k^2 \leq k$ no implica $k^2 + 2k \leq k$).

El punto es: Mientras se puede intentar “trabajando a la inversa” desde la conclusión a la hipótesis, buscando un método de demostración; para tener una demostración válida debemos ser capaces de revertir todas las implicaciones.

Veamos ahora otro ejemplo (esta vez correcto).

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_x x^n = nx^{n-1}$ (aquí D_x representa la derivada con respecto a x).

Cuando $n = 1$ se tiene $D_x x^1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y $D_x x^k = kx^{k-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} D_x x^{k+1} &= D_x x \cdot x^k = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \\ &= x^k + kx^k = (k+1)x^k \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

d) Para cada número natural n , $n^3 - n$ es divisible por 3. En símbolos: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3|n^3 - n$.

Recordemos que $a|b$ si y sólo si $\exists c \in \mathbb{Z} \ni b = ac$.

Cuando $n = 1$ se tiene $3|1^3 - 1$ ó $3|0$ lo cual es verdadero ya que $0 = 3 \cdot 0$.

Supongamos ahora que $k \in \mathbb{N}$ y $3|k^3 - k$. Esto significa que existe un entero, digamos m , tal que $k^3 - k = 3m$. Luego,

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= 3m + 3(k^2 + k) \\ &= 3(m + k^2 + k) \end{aligned}$$

así $(k+1)^3 - (k+1)$ es divisible por 3, completando la prueba.

El principio de inducción matemática puede ser generalizado de la siguiente forma: Si $S \subseteq \mathbb{Z}$ tiene las propiedades:

a) $n_0 \in S$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$, $n \in S \longrightarrow n+1 \in S$, entonces $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} \subseteq S$.

Si además, n_0 es el menor elemento de S , entonces

$$\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} = S.$$

Observe que el principio de inducción matemática es un caso especial con $n_0 = 1$.

Como un ejemplo de aplicación, consideremos el siguiente:

e) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 13, n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Aquí nuestro paso base es $n = 13$. Observemos que

$$13^2 = 169 < 194 < \frac{1594323}{8192} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$$

por lo tanto nuestro paso base es verdadero.

ahora, supongamos que $n > 13$ y $n^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Entonces

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 n^2 \\ &< \left(1 + \frac{1}{13}\right)^2 n^2 \\ &< \frac{3}{2} n^2 \\ &< \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba.

3.1 Formas equivalentes de inducción

En esta sección discutiremos dos proposiciones equivalentes al principio de inducción matemática. En algunas situaciones una de estas formas puede ser más fácil de usar que otras. La primera es conocida como el *principio del buen orden*:

Sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{N} . Entonces S tiene un menor elemento; esto es, existe $y \in S$ tal que para cada $x \in S$, $y \leq x$.

El segundo es conocido como el *principio de inducción completa*:

Si S es un subconjunto de \mathbb{N} tal que :

- a) $1 \in S$,
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq S \longrightarrow n + 1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Observe que el principio de inducción completa parece estar cercanamente relacionado con el principio de inducción matemática. Por otra parte, la conexión entre los dos anteriores y el principio del buen orden no parece ser tan clara.

En lo que sigue demostraremos que los tres principios enunciados son, realmente, equivalentes. Así, podríamos elegir cualquiera de ellos como axioma y probar el resto como teorema.

Teorema 43 *Suponga que el principio de inducción matemática es verdadero y sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{N} . Entonces S tiene un menor elemento.*

Demostración. Haremos una prueba indirecta. Supongamos que S es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} que no tiene un menor elemento. Sea S^c el complemento de S ; esto es, $S^c = \mathbb{N} - S$. Se define

$$T = \{x \in \mathbb{N} : \text{para cada } y \leq x, y \in S^c\}.$$

Entonces ya que $1 \in S^c$ (pues si $1 \in S$, entonces 1 debe ser el menor elemento de S ya que $\forall x \in \mathbb{N}, 1 \leq x$), $1 \in T$.

Supongamos ahora que $k \in T$. Debido a la forma en que T está definido, esto significa que $1, 2, \dots, k$ deben ser todos elementos de S^c .

¿Qué podemos decir de $k + 1$?

Si $k + 1 \in S$, entonces debe ser el menor elemento de S (pues $1, 2, \dots, k$ están en S^c) lo que no es posible ya que S no tiene un elemento menor. Por lo tanto, $k + 1 \in S^c$. Esto implica que $k + 1 \in T$.

Luego por el principio de inducción matemática, $T = \mathbb{N}$. Esto significa que $S^c = \mathbb{N}$ (por la definición de T). Pero, como $S^c = \mathbb{N} - S$, entonces $S = \emptyset$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, S debe tener un menor elemento.

■

Teorema 44 *Suponga que el principio del buen orden es verdadero y sea S un subconjunto de \mathbb{N} tal que*

- a) $1 \in S$,*
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq S \longrightarrow n + 1 \in S$.*

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S es como antes y consideremos S^c . Si $S^c = \emptyset$, entonces $S = \mathbb{N}$. Supongamos, por lo tanto, que $S^c \neq \emptyset$.

Por el principio del buen orden, S^c tiene un menor elemento, digamos y . Observemos que $y \neq 1$ ya que $1 \in S$ (por hipótesis a)). ¿Qué podemos decir sobre $1, 2, \dots, y - 1$?

Nótese que todos ellos deben ser elementos de S , pues de otra manera uno de ellos debería ser el menor elemento de S^c en vez de y .

Así, por hipótesis b), $y \in S$. Pero esto es una contradicción pues $y \in S^c$. Luego, $S^c = \emptyset$ lo que significa que $S = \mathbb{N}$. ■

Teorema 45 *Suponga que el principio de inducción completa es verdadero y sea S un subconjunto de \mathbb{N} tal que*

- a) $1 \in S$*
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \longrightarrow n + 1 \in S$.*

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S tienen las propiedades a) y b) anteriores. Usaremos el principio de inducción completa para probar que $S = \mathbb{N}$.

Ya que $\forall n \in \mathbb{N}, \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S$ es una proposición obviamente verdadera, se tiene por b)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S) \wedge (n \in S \longrightarrow n + 1 \in S)$$

lo que implica $\forall n \in \mathbb{N}, \{1, 2, 3, \dots, n\} \subseteq S \longrightarrow n + 1 \in S$.

Luego, S satisface las hipótesis del principio de inducción completa y, en consecuencia, $S = \mathbb{N}$. ■

Veamos ahora como podemos utilizar estas formulaciones alternativas del principio de inducción matemática para probar proposiciones.

Teorema 46 $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración. Procederemos indirectamente.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional; esto es, supongamos que existen números naturales r, s tales que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$. Entonces

$$S = \{k \in \mathbb{N} : k = n\sqrt{2} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

es un conjunto no vacío de números naturales (en particular, $s\sqrt{2} = r$, luego $r \in S$).

Sea $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = y\sqrt{2}$.

Ahora $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ es un número natural menor que y (puesto que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \longrightarrow 0 < y(\sqrt{2} - 1) < y \longleftrightarrow 0 < x - y < y$).

Luego, $z := y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ es menor que x (ya que $y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = (x - y)\sqrt{2} < y\sqrt{2} = x$).

Pero $z = 2y - y\sqrt{2} = 2y - x$. Luego, $z \in \mathbb{N}$ y $z \in S$ (ya que $x - y < y \longrightarrow x < 2y$ y $z = y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ con $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ un número natural menor que y según vimos).

Así, se tiene una contradicción pues $z \in S$ y es menor que x . Luego, S debe ser vacío. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional. ■

Como otro ejemplo del uso del principio del buen orden, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 47 (Algoritmo de división) Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Entonces existen enteros q, r tales que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < b.$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y sea

$$S = \{a - bk : k \in \mathbb{Z}, a - bk \geq 0\}.$$

Observamos que $S \neq \emptyset$ pues $a = a - b \cdot 0 \in S$.

Por el principio del buen orden, S tiene un menor elemento, digamos $r = a - bq$.

Claramente, r es un entero y $a = bq + r$. Por lo tanto, sólo debemos probar que $0 \leq r < b$.

Por la definición de S , $r \geq 0$. Si $r \geq b$, entonces

$$a - b(q + 1) = r - b \geq 0,$$

por lo que $r - b$ debe ser un elemento de S . Pero $r > r - b$ lo que es una contradicción (pues r es menor elemento de S). Así, $r < b$. ■

Como un ejemplo de un resultado usando principio de inducción completa, consideremos el siguiente.

Teorema 48 Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $n = 1$, n es un número primo o n es un producto de números primos (recuerde que un número primo es un número natural cuyos únicos factores son 1 y el mismo número).

Demostración. Si se define $p(n)$ como la proposición “ $n = 1$ ó n es un primo ó n es un producto de primos” entonces deseamos probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$.

Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ es verdadero} \}.$$

Claramente $1 \in S$.

Ahora supongamos que $1, 2, \dots, k$ son todos elementos de S y consideremos $k + 1$.

Si $k + 1$ es un primo, la prueba está concluida.

Supongamos que $k + 1$ no es primo.

Ya que $k + 1$ no es un primo este debe tener factores menores que él mismo (y mayores que 1), digamos r y s ; esto es,

$$k + 1 = r \cdot s.$$

Ahora, r y s son ambos elementos de S (pues son menores que $k + 1$) y así son primos o bien productos de primos.

Pero entonces se ha escrito $k + 1$ como un producto de primos, y luego $k + 1 \in S$. Por el principio de inducción completa, se tiene $S = \mathbb{N}$. ■

3.2 El binomio de Newton

Como una aplicación adicional del principio de inducción matemática, vamos a probar en esta sección el conocido *Teorema del binomio de Newton*.

A fin de enunciar el resultado, requerimos definir el siguiente objeto matemático: Dados $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$ denotamos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $p! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p$ ($p \in \mathbb{N}$) corresponde al llamado *factorial* de un número natural p . Así, por ejemplo,

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

El simbolo $\binom{n}{k}$ se lee “ n sobre k ” y posee las siguientes propiedades, entre otras.

$$(1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$(2) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

La demostración de las identidades anteriores no son difíciles y se dejan como ejercicio para el lector.

Recordemos que el simbolo

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, denota la suma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Con las notaciones precedentes, podemos enunciar y probar el siguiente.

Teorema 49 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración. Cuando $n = 1$, se tiene $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$ lo cual es claramente verdadero ya que la suma del lado derecho es igual a:

$$\binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1.$$

Supongamos ahora que el teorema es verdadero para n . Debemos probar que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Para este fin, escribimos:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\ &= (a+b)^n a + (a+b)^n b \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) a + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) b \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

Desarrollamos el tercer sumando, haciendo $t = k + 1$. Luego

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} a^{n+1-t} b^t.$$

Como t es una variable fija pero arbitraria podemos escribir

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Luego, queda:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &\quad + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} (*). \end{aligned}$$

Usando la propiedad (2) vista previamente, obtenemos que lo anterior es igual a

$$\binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}.$$

Ahora, no es difícil ver, por definición, que

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

Luego, la expresión (*) es lo mismo que

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ■

3.3 Ejercicios

1. Pruebe usando inducción:

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

$$\text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$\text{d) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (3i-1) = \frac{n}{2}(3n+1).$$

$$\text{e) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n 3^{i-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

$$\text{f) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\text{g) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n.$$

$$\text{h) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

$$\text{i) } \forall n \in \mathbb{N}, 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

$$\text{j) } \forall n \in \mathbb{N}, 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

$$\text{k) } \forall n \in \mathbb{N}, 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

$$\text{l) } \forall n \in \mathbb{N}, 1^6 + 2^6 + \dots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}.$$

$$\text{m) } \forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

- n) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}.$
- o) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$
- p) $\forall n \in \mathbb{N}, x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x - y).$
- q) $\forall n \in \mathbb{N}, x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $(x + y).$
- r) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n$ es divisible por 3.
- s) $\forall n \in \mathbb{N}, 2n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3.
- t) $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n + 3 \cdot 4^{n+1} + 5$ es divisible por 9.
- u) $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13.
- v) $\forall n \in \mathbb{N}, 7^{2n} + 16 - 1$ es divisible por 64.
- w) $\forall n \in \mathbb{N}, 2304 | (7^{2n} - 48n - 1).$
- x) $\forall n \in \mathbb{N}, 1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} - 1.$
- y) $\forall n \in \mathbb{N}, 1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq n^{k+1}.$
- z) $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx,$ si $x \geq -1.$
2. Encuentre el menor entero positivo j para el que el enunciado es verdadero; con el principio extendido de inducción matemática pruebe que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j .
- a) $n + 12 \leq n^2.$
- b) $n^2 + 18 \leq n^3.$
- c) $5 + \log_2 n \leq n.$
- d) $n^2 \leq 2^n.$
- e) $2n + 2 \leq 2^n.$
- f) $n \log_2 n + 20 \leq n^2.$

3. Expresé la suma en términos de n .

a) $\sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 5).$

b) $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k + 1).$

c) $\sum_{k=1}^n (2k - 3)^2.$

d) $\sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2 - k + 4).$

4. Evalúe la expresión.

a) $2!6!$

b) $7!0!$

c) $\frac{8!}{5!}$

d) $\binom{5}{5}$

e) $\binom{7}{5}$

f) $\binom{13}{4}$

5. Reescriba las siguientes expresiones sin factoriales.

a) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$

b) $\frac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

6. Utilice el teorema del binomio para expandir y simplificar.

- a) $(4x - y)^3$
- b) $(a + b)^6$
- c) $(a - b)^6$
- d) $(3x - 5y)^4$
- e) $(\frac{1}{3}x + y^2)^5$
- f) $(\frac{1}{x^2} + 3x)^6$
- g) $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^5$

7. Sin expandir por completo, encuentre los términos indicados en la expansión de la expresión.

- a) $(3c^{2/5} + c^{4/5})^{25}$; primeros tres términos.
- b) $(4b^{-1} - 3b)^{15}$; últimos tres términos.
- c) $\left(\frac{3}{c} + \frac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término.
- d) $(\frac{1}{3}u + 4v)^8$; séptimo término.
- e) $(x^{1/2} + y^{1/2})^8$; término del medio.
- f) $(2y + x^2)^8$; término que contiene x^{10} .
- g) $(3b^3 - 2a^2)^4$; término que contiene b^9 .
- h) $(3x - \frac{1}{4x})^6$; término que no contiene x .

8. Demuestre que:

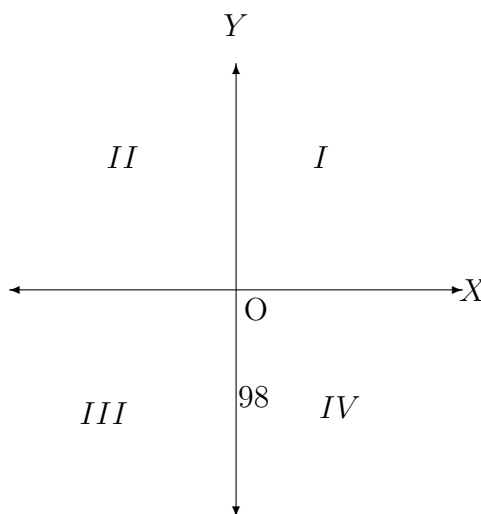
- a) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$; para $n \geq 1$.
- b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$; para $n \geq 0$.

Capítulo 4

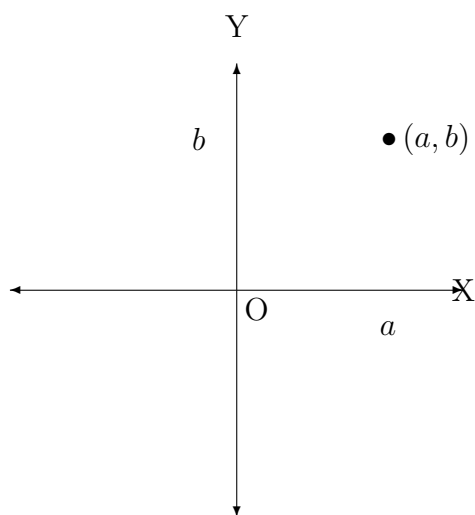
Funciones y gráficas

En este capítulo estudiamos las propiedades de funciones, para lo cual usamos métodos algebraicos y gráficos que incluyen la localización de puntos, determinación de simetrías y desplazamientos horizontales y verticales.

Introducimos un *sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas* en un plano por medio dos rectas coordenadas perpendiculares llamadas *ejes coordenados*, que se cortan en el *origen* O (ver figura). La recta horizontal recibe el nombre de “eje x ” y la vertical el de “eje y ”; se indican con X e Y respectivamente. Con lo anterior, se trata de un *plano coordenado* o *plano xy* . Los ejes coordenados lo dividen en cuatro partes llamadas *primero*, *segundo*, *tercero* y *cuarto cuadrantes* (ver figura; I, II, III, IV). Los puntos de los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.



A cada punto P de un plano xy se le puede asignar un par ordenado (a, b) , según se aprecia en la figura siguiente. El primer elemento del par ordenado es llamado la *coordenada x* (o *abscisa*) de P y el segundo elemento del par ordenado es llamado la *coordenada y* (u *ordenada*) de P . Decimos que P tiene coordenadas (a, b) y nos referimos al *punto (a, b)* o al punto $P(a, b)$. A la inversa, todo par ordenado (a, b) determina al punto P con coordenadas a y b .



Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para definir la distancia entre dos puntos de un plano coordenado.

Definición 50 La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de un plano coordenado es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La fórmula anterior para definir la distancia entre dos puntos del plano no es la única. Otra definición es:

$$d(P_1, P_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Podemos hallar el *punto medio* de un segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ como:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Nótese que la coordenada x del punto medio corresponde al *promedio* de las coordenadas x . Análogamente para la coordenada y .

Ejemplo: El punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$ es

$$M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 + (-2)}{2} \right) = \left(1, \frac{1}{2} \right)$$

observemos, adicionalmente, que la distancia de P_1 a M es igual a la distancia de P_2 a M ya que:

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1 + 2)^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}$$

y

$$d(P_2, M) = \sqrt{(1 - 4)^2 + \left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}}.$$

Así, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

4.1 Gráficas de ecuaciones

En ocasiones, dos cantidades se relacionan por medio de una ecuación o fórmula con dos variables. Por ejemplo $y = x^2$ ó $y^2 = 5x - 1$. En esta sección, analizaremos cómo representar geométricamente tal ecuación con una gráfica en un plano coordenado. La gráfica puede servir para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes en la simple ecuación.

Cada solución (a, b) de una ecuación en x y y tiene un punto $P(a, b)$ en un plano coordenado. El conjunto de todos estos números es la gráfica de la ecuación.

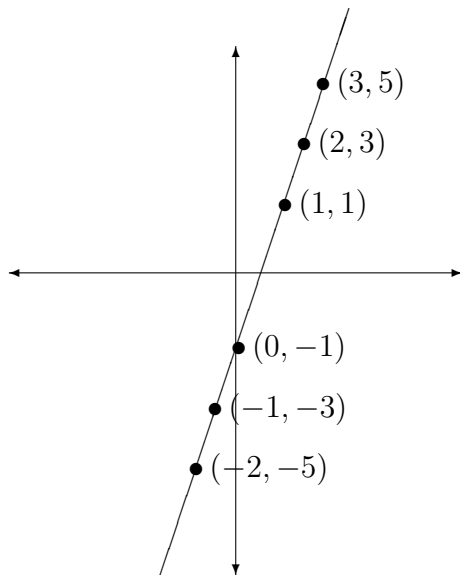
Para *trazar la gráfica de la ecuación*, ilustramos las características relevantes de la gráfica de un plano coordenado. En casos sencillos se traza localizando unos cuantos puntos, si los hay. Con una ecuación complicada, la ubicación de puntos puede dar muy poca información sobre la gráfica. En tales casos, conviene utilizar métodos de cálculo.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

Deseamos encontrar los puntos (x, y) de un plano coordenado que correspondan a las soluciones de la ecuación. Es útil anotar las coordenadas de varios de tales puntos en una tabla, donde para cada x obtenemos el valor de y para $y = 2x - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Es evidente que los puntos con estas coordenadas se encuentran en una recta por lo que trazamos la siguiente gráfica:



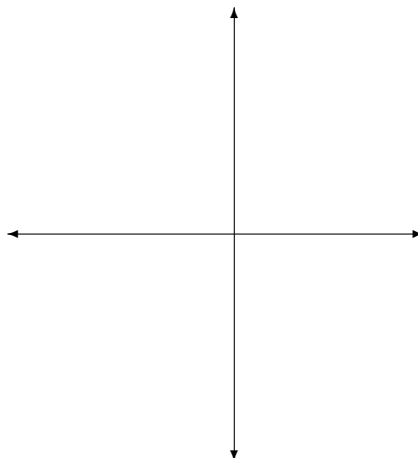
Es imposible trazar toda la gráfica del ejemplo, pues se pueden asignar valores a x tan grandes como se desee. En general, el trazo de una gráfica ha de ilustrar sus características esenciales, de manera que las partes restantes (no dibujadas) sean evidentes.

Ejemplo: Dibujar la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

Al sustituir los valores de x y hallar los valores correspondientes de y con $y = x^2 - 3$, llegamos a una tabla de coordenadas con varios puntos de la gráfica

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Localizar los puntos dados por la tabla y dibujar una curva suave que pase por estos puntos nos da el siguiente trazo:



La gráfica anterior es una *parábola*, y el eje y es el *eje de la parábola*. El punto más bajo $(0, -3)$ es el *vértice* de la parábola y decimos que la parábola *abre hacia arriba*. Si invertimos la gráfica, la parábola *abre hacia abajo* y el vértice es el punto más alto de la gráfica.

En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma

$$y = ax^2 + c, a \neq 0$$

es una parábola con vértice $(0, c)$ que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Cuando $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$ y el vértice está en el origen $(0, 0)$. Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda o en otras direcciones.

La gráfica de una ecuación puede cortar (o no) el eje de las x o al eje de las y .

Una intersección con el eje de las x se conoce también como *cero* de la gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación.

Ejemplo: Encontremos las intersecciones en x y en y de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

a) Intersecciones en x : Hacemos $y = 0$ en la ecuación y despejamos x .

$$0 = x^2 - 3$$

obtenemos $x^2 = 3$ ó $x = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, los puntos en que la gráfica cruza el eje x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

b) Intersecciones en y : Hacemos $x = 0$ en la ecuación y despejamos y .

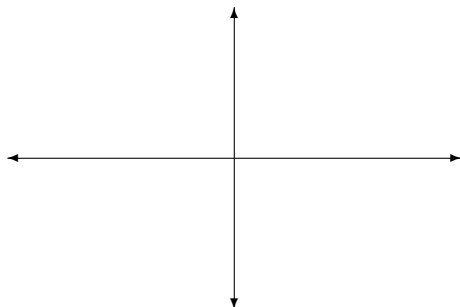
$$y = 0 - 3$$

obtenemos $y = -3$. Así, el punto en que la gráfica cruza el eje y es $(0, -3)$.

Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al eje y* siempre que el punto $(-x, y)$ se encuentre en la gráfica cuando (x, y) también lo esté. La gráfica de $y = x^2 - 3$ del ejemplo anterior tiene esta propiedad, ya que la sustitución de $-x$ por x da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3.$$

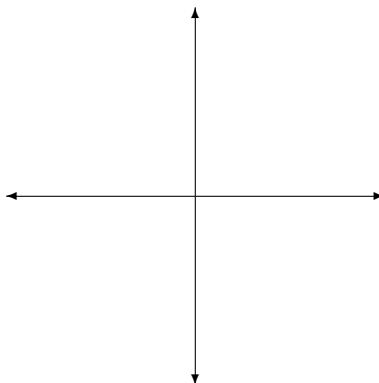
Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al eje x* siempre que la sustitución de y con $-y$ lleve a la misma ecuación. Por ejemplo $x = y^2$ es simétrica con respecto al eje x y su gráfica es como sigue



Análogamente, diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al origen* si la sustitución simultánea de x con $-x$ y y con $-y$ lleva a la misma ecuación. Por ejemplo $4y = x^3$, ya que

$$4(-y) = (-x)^3$$

es equivalente a $4y = x^3$. La gráfica de esta ecuación es como sigue

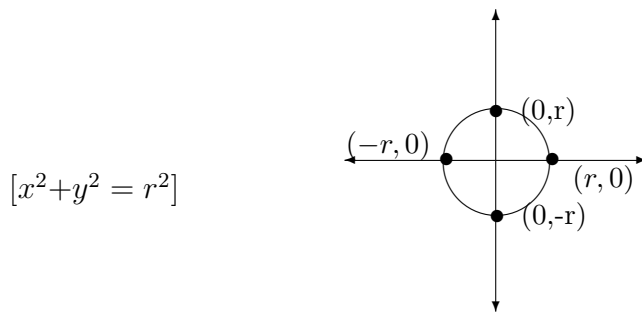


Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado, ya que el resto se puede trazar tomando una *imagen espejo*, o *reflexión*, en el eje apropiado.

Recordemos que si $C(h, k)$ es un punto en un plano coordenado, entonces un *círculo con centro C y radio $r > 0$* está formado por todos los puntos del plano que están a una distancia r de C . Así, la ecuación estándar de un círculo con centro (h, k) y radio r está dada por la fórmula

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen. Si $r = 1$, la gráfica es un *círculo unitario*



Ejemplo: Encontremos la ecuación de un círculo que tiene centro $C(-2, 3)$ y contiene el punto $D(4, 5)$.

Puesto que D está en el círculo, el radio r es $d(C, D)$. Por la fórmula de la distancia,

$$r = \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}.$$

Escribiendo la ecuación estándar de un círculo con $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, obtenemos

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40,$$

equivalentemente,

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$

Obsérvese del ejemplo anterior que al elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y simplificar lleva a una ecuación del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

donde a , b , c son números reales.

A la inversa, si comenzamos con esta ecuación es posible, al *completar los cuadrados*, obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

Ejemplo: Encontremos el centro y radio del círculo cuya ecuación es

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y = 9.$$

En vista de que es más fácil completar el cuadrado si los coeficientes de x^2 y y^2 son 1, comencemos dividiendo la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3.$$

En seguida reescribimos la ecuación como sigue (los espacios subrayados representan números por determinar):

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3 + \underline{\quad} + \underline{\quad}.$$

Luego, completamos los cuadrados para las expresiones dentro de paréntesis, cuidando de sumar los números adecuados a *ambos* lados de la ecuación. A fin de completar el cuadrado para una expresión de la forma $x^2 + ax$, añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (esto es $\left(\frac{a}{2}\right)^2$) a ambos lados de la ecuación. En este ejemplo, $a = -4$, luego $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$ y $a = 6$ lleva a $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (3)^2 = 9$. Estas operaciones llevan a:

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9}$$

equivalentemente

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Al comparar la última ecuación con la ecuación estándar de un círculo, vemos que $h = 2$ y $k = -3$. Concluimos que el círculo tiene centro $(2, -3)$ y radio $\sqrt{16} = 4$.

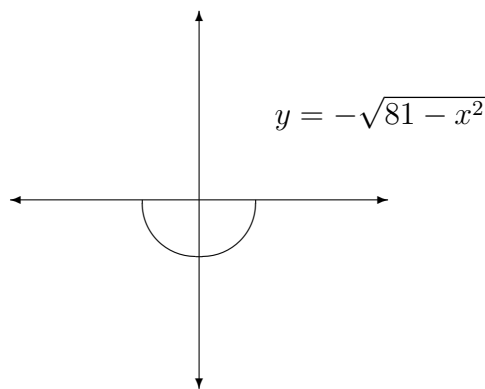
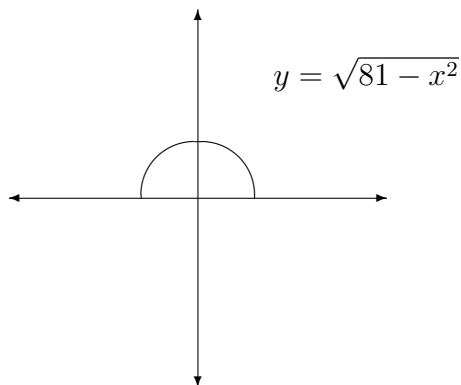
En algunas aplicaciones es necesario trabajar con sólo la mitad de un círculo; es decir, un *semicírculo*. El próximo ejemplo indica como hallar ecuaciones para semicírculos de círculos con centro en el origen.

Ejemplo: Encontremos ecuaciones para las mitades superior, inferior, derecha e izquierda del círculo $x^2 + y^2 = 81$.

Notemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es un círculo de radio 9 con centro en el origen. Despejemos y en términos de x con objeto de hallar ecuaciones para la mitad superior e inferior.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 81 \\ \iff y^2 &= 81 - x^2 \\ \iff y &= \pm\sqrt{81 - x^2}. \end{aligned}$$

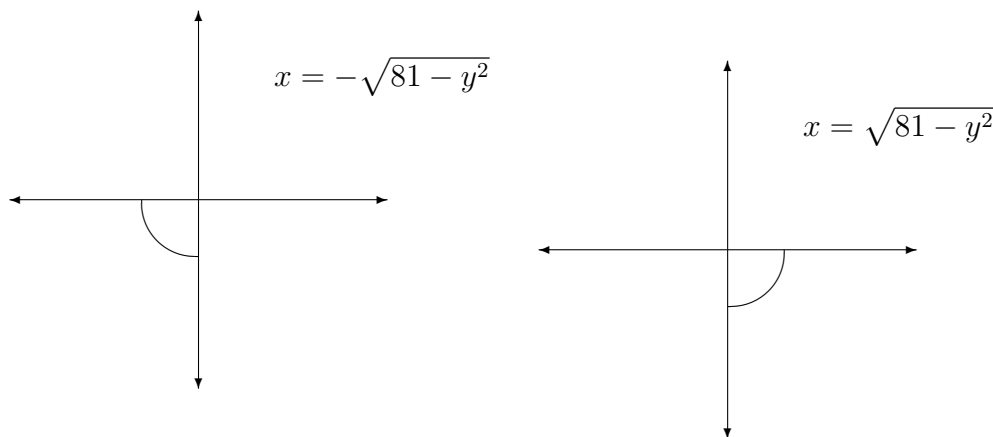
Puesto que $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, se deduce que la mitad superior del círculo tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ (y es positiva) y la mitad inferior está dada por $y = -\sqrt{81 - x^2}$ (y es negativa).



Del mismo modo, a fin de hallar ecuaciones para las mitades derecha e izquierda, se despeja x en términos de y de la ecuación $x^2 + y^2 = 81$ y se obtiene

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Dado que $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, se deduce que la mitad derecha del círculo tiene la ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$ (x es positiva) y la mitad izquierda está dada por $x = -\sqrt{81 - y^2}$ (x es negativa).



4.2 Rectas

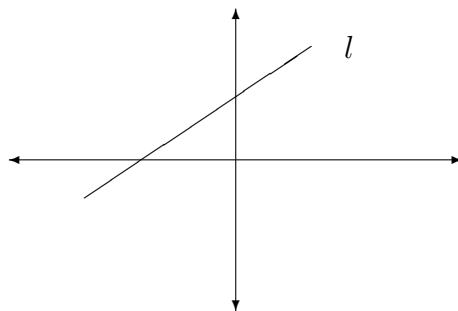
Uno de los conceptos básicos en álgebra es el de *recta*. En esta sección limitaremos nuestro estudio a las rectas de un plano coordenado, lo que nos permitirá el uso de métodos algebraicos para estudiar sus propiedades.

El concepto que sigue es fundamental para el estudio de las rectas.

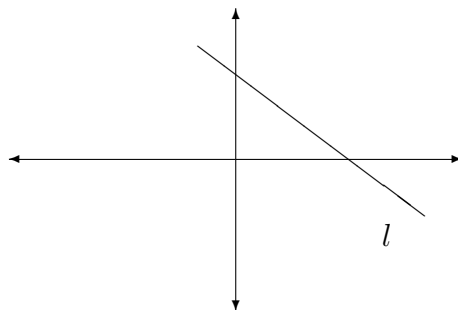
Definición 51 Sea l una recta que no es paralela al eje y y sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes de l . La pendiente m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En la figura siguiente la pendiente es positiva y decimos que la recta se *levanta* o *sube*.



En la figura siguiente la pendiente es negativa y diremos que la recta *baja* o *cae*.



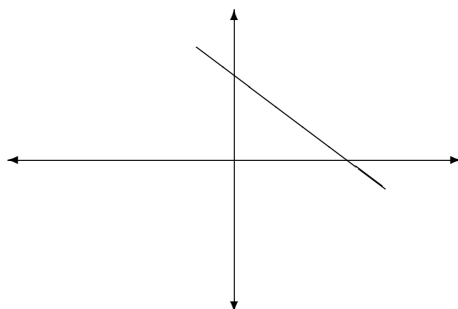
Al hallar la pendiente de una recta no importa que punto marquemos como P_1 y P_2 . Asimismo, la elección de los dos puntos que se escojan en l no afectan la definición de pendiente.

Ejemplo: Trazar la recta que pasa por $P_1(-1, 4)$ y $P_2(3, 2)$ y encontrar su pendiente.

Usamos la definición de pendiente y encontramos

$$m = \frac{2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

un gráfico es:



A continuación encontramos una ecuación de la recta l que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m .

Si $P(x, y)$ es cualquier punto con $x \neq x_1$, entonces P está sobre la recta l si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m ; es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Esta ecuación para l se conoce como *forma de punto-pendiente*.

La forma anterior es sólo una posibilidad para una ecuación de una recta. Hay muchas ecuaciones equivalentes. A veces simplificamos la ecuación obtenida usando la forma de punto-pendiente a

$$ax + by = c \quad \text{ó} \quad ax + by + d = 0$$

donde a , b y c son enteros sin factor común, $a > 0$ y $d = -c$.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(2, 1)$ y tiene pendiente $\frac{5}{3}$.

Usando la forma punto pendiente, encontramos

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2}(x - 2) + 1 \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} + 1 \\ &= \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Encontrar una ecuación de la recta que pasa por $P_1(1, 7)$ y $P_2(-3, 2)$.

La fórmula de la pendiente m nos da

$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Podemos usar las coordenadas de P_1 ó P_2 para (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente. Con $P_1(1, 7)$ tendremos

$$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

equivalentemente $4(y - 7) = 5(x - 1)$ ó $4y - 28 = 5x - 5$, que también podemos escribir como $5x - 4y = -23$.

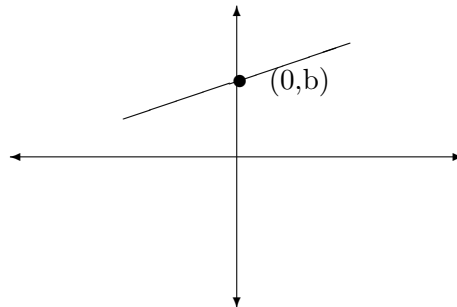
La última ecuación es una de las formas deseadas para la ecuación de una recta. Otra es

$$5x - 4y + 23 = 0.$$

La forma de punto-pendiente para la ecuación de una recta se puede reescribir como: $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

con $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la *intersección en y* (ó *abscisa al origen* ó *ordenada al origen*) de la gráfica como muestra la siguiente figura:



Dado que la ecuación $y = mx + b$ muestra la pendiente m y la intersección igual a b en y de l ; se llama *forma de pendiente intersección* o *pendiente-ordenada al origen* para la ecuación de una recta. A la inversa, si comenzamos con $y = mx + b$, podemos escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Al comparar esta ecuación con la forma de punto-pendiente, vemos que la gráfica es una recta con pendiente m que pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo: Escribamos la ecuación $2x - 5y = 8$ en forma de pendiente-intersección. Nuestro objetivo es despejar y de la ecuación dada para obtener la forma $y = mx + b$. Tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 8 \\ \iff -5y &= -2x + 8 \\ \iff y &= \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \frac{8}{-5} \\ \iff y &= \frac{2}{5}x + \frac{-8}{5} \end{aligned}$$

La última ecuación es de la forma pendiente intersección $y = mx + b$ con pendiente $m = \frac{2}{5}$ y ordenada al origen igual a $b = -\frac{8}{5}$.

De la forma de punto-pendiente, se deduce que toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

donde a , b y c son números reales y a , b no son cero ambos. Esta ecuación se denomina *ecuación lineal* en x e y .

Por lo visto anteriormente, resulta claro que la gráfica de una ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta y , recíprocamente, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

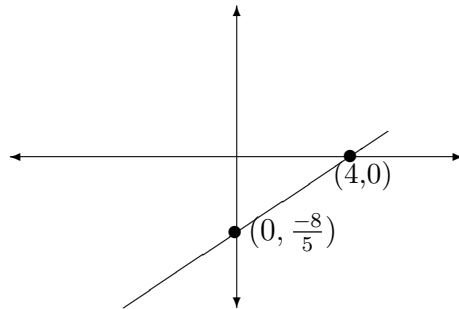
Ejemplo: Trazar la gráfica de $2x - 5y = 8$.

Por nuestro análisis anterior sabemos que la gráfica es una recta, de modo que basta hallar dos puntos de la gráfica. Encontremos las intersecciones en x y y sustituyendo $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, en la ecuación dada, $2x - 5y = 8$.

Intersección x : Si $y = 0$, entonces $2x = 8$, o bien $x = 4$.

Intersección y : Si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o bien $y = \frac{-8}{5}$.

Graficamos las intersecciones $(4, 0)$ y $(0, \frac{-8}{5})$, tendemos una recta que pase por ellos, y llegamos a la gráfica siguiente:



El resultado a continuación especifica la relación entre *rectas paralelas* (rectas en un plano que no se cortan) y pendiente.

Teorema 52 *Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.*

La demostración del teorema anterior es un ejercicio para el lector.

Ejemplo: Encontremos una ecuación de la recta que pasa por $P(5, -7)$ que es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

Primero se expresa la ecuación dada en forma pendiente-intersección:

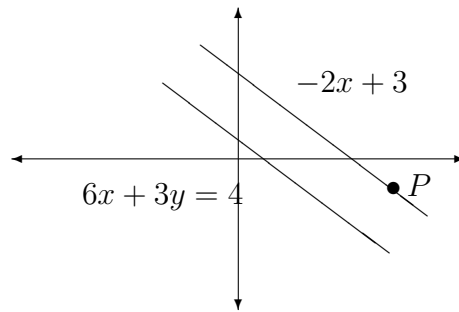
$$y = -2x + \frac{4}{3}.$$

Deducimos que $m = -2$. Puesto que las rectas paralelas poseen la misma pendiente, la recta requerida también tiene pendiente -2 .

Con el punto $P(5, -7)$ usamos la forma punto-pendiente y obtenemos

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -2(x - 5) \\ \iff y + 7 &= -2x + 10 \\ \iff y &= -2x + 3. \end{aligned}$$

Una gráfica es como sigue:

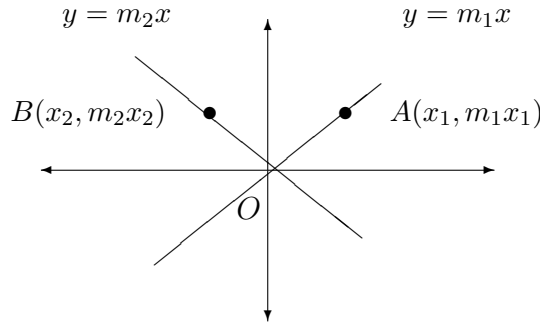


El resultado que sigue nos da información sobre *rectas perpendiculares* (rectas que se cortan en ángulos rectos).

Teorema 53 *Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si*

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Demostración. Por simplicidad, consideremos el caso especial de dos rectas que se cortan en el origen O . Las ecuaciones de estas rectas son $y = m_1 \cdot x$ y $y = m_2 \cdot x$. Escojamos, como en la figura siguiente, puntos $A(x_1, m_1 \cdot x_1)$ y $B(x_2, m_2 \cdot x_2)$.



Entonces las rectas son perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es un ángulo recto. Con el teorema de Pitágoras vemos que el ángulo AOB es recto si y sólo si

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, por la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2 + x_1^2 + (m_1x_1)^2.$$

Al elevar al cuadrado los términos, simplificar y factorizar, obtenemos

$$-2m_1m_2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

$$-2x_1x_2(m_1m_2 + 1) = 0.$$

Dado que x_1 y x_2 no son cero ambas, podemos dividir ambos lados entre $-2x_1x_2$, con lo cual obtenemos $m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$; por lo tanto, las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. ■

Ejemplo: Encontrar la forma pendiente-intersección para la recta que pasa por el punto $P(5, -7)$ perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

Reescribiendo $6x + 3y = 4$, obtenemos $y = -2x + \frac{4}{3}$. Luego, la pendiente es -2 . Por lo tanto, la pendiente de la recta requerida es el recíproco negativo

$-\left(\frac{1}{-2}\right)$, o sea, $\frac{1}{2}$. Con $P(5, -7)$ llegamos a:

$$\begin{aligned} y - (-7) &= \frac{1}{2}(x - 5) \\ \iff y &= \frac{1}{2}x - \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

La última ecuación está en forma pendiente-intersección pedida.

4.3 Gráfica de una función real

Recordemos que una función con dominio D es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada $x \in D$, hay exactamente un par ordenado $(x, y) \in W$ con x en primera posición.

Por ejemplo, los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ establecen la función $f(x) = \sqrt{x-1}$.

En esta sección la frase “ f es una función” significa que dominio y rango son conjuntos de números reales. Si una función se define por medio de una expresión, como en el ejemplo anterior, y el dominio D no se expresa, entonces consideramos que D es la totalidad de números reales x tales que $f(x)$ es real. A veces esto recibe el nombre de *dominio implícito* de f . Para ilustrar lo anterior, si $f(x) = \sqrt{x-1}$, el dominio implícito es el conjunto de números reales x tal que $\sqrt{x-1}$ es real; esto es, $x-1 \geq 0$ ó $x \geq 1$; por lo tanto, el dominio es el intervalo infinito $[1, \infty)$. Si x está en el dominio, decimos que “ f está definida en x ” o que “ f existe”. El concepto “ f no está definida en x ” quiere decir que x no está en el dominio de f .

Ejemplo: Sea $g(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{1-x}$. La expresión anterior es un número real si y sólo si el radicando $4+x$ es no negativo y el denominador $1-x$ no es igual a 0; por lo tanto, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4+x \geq 0 \quad \text{y} \quad 1-x \neq 0$$

o bien, lo que es igual,

$$x \geq -4 \quad \text{y} \quad x \neq 1.$$

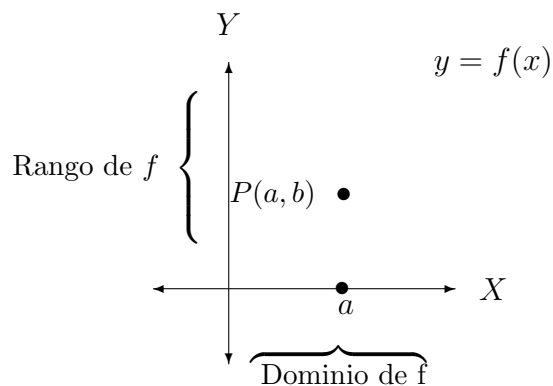
Podemos expresar el dominio en términos de intervalos como

$$[-4, 1) \cup (1, \infty).$$

Si f es una función, podemos emplear una gráfica para indicar el cambio de $f(x)$ a medida que x varía en todo el dominio de f .

Definición 54 *La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ para x en el dominio de f .*

Con frecuencia colocamos la leyenda $y = f(x)$ en un dibujo de la gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, coordenada y igual a b es el valor de la función $f(a)$, según se ilustra en la figura siguiente



La figura muestra el dominio de f (conjunto de valores posibles de x) y el rango de f (valores correspondientes de y). Aún cuando hemos trazado el dominio y el rango como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos u otros conjuntos de números reales.

Puesto que hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f , sólo *un* punto de la gráfica de f tiene una coordenada x igual a a . En consecuencia, la gráfica de un conjunto de puntos de un plano coordenado es

la gráfica de una función si toda recta vertical corta la gráfica a lo más en un punto. Así, la gráfica de una función no puede ser una figura circular, pues una recta vertical podría cortarla en más de un punto.

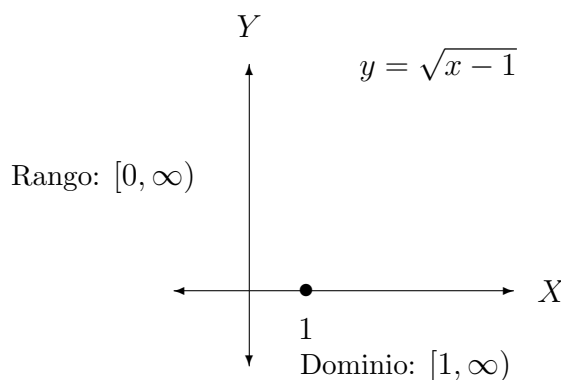
Las intersecciones x de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estos números se llaman *ceros* de la función. La intersección y de la gráfica es $f(0)$, si existe.

Ejemplo: Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$ y tracemos la gráfica de f .

Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La próxima tabla enumera las coordenadas de varios puntos de la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y=f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

Al trazar los puntos se obtiene el dibujo de la figura siguiente:



Al consultar la figura anterior vemos que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ ó, lo que es equivalente, el intervalo $[1, \infty)$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$ ó, lo que es equivalente, $[0, \infty)$.

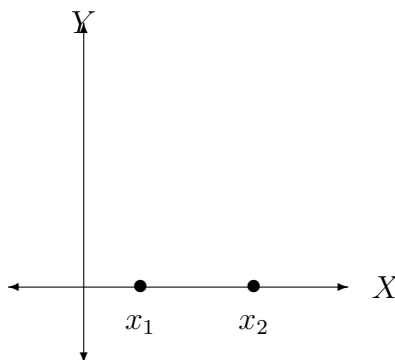
La *función raíz cuadrada*, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, tiene una gráfica similar a la figura anterior pero el punto extremo está en $(0, 0)$. Esta relación gráfica puede ayudarnos a recordar que $\sqrt{9}$ es 3 y que $\sqrt{9}$ *no es* ± 3 .

En el ejemplo anterior, a medida que x aumenta, igual ocurre con la función $f(x)$ y decimos que la gráfica de f “*sube*”. Consideremos que una función de este tipo es *creciente*.

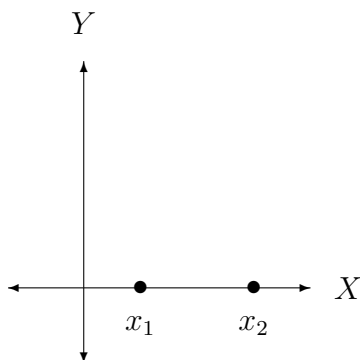
Para ciertas funciones, $f(x)$ disminuye a medida que x aumenta. En este caso la gráfica “*cae*” y f es una función *decreciente*. Las definiciones precisas son las siguientes:

Definición 55 Una función se dice *creciente* en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

Gráficamente se puede interpretar como en la figura siguiente:



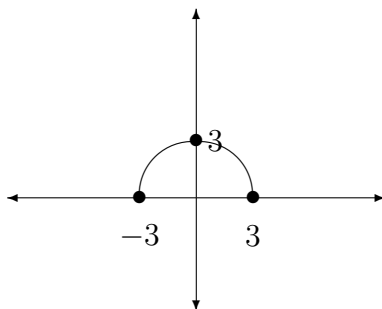
Definición 56 Una función f se dice *decreciente* en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.



Un ejemplo de función creciente es la *función identidad*, cuya ecuación es $f(x) = x$ y cuya gráfica es la recta que pasa por el origen con pendiente 1. Un ejemplo de función decreciente es $f(x) = -x$, ecuación de la recta que pasa por el origen con pendiente -1 . Si $f(x) = c$ para todo número real x , entonces f se llama *función constante*.

Utilizaremos en forma indistinta las frases “ f es creciente” y “ $f(x)$ es creciente”, al igual que los términos “decreciente” y “constante”.

Ejemplo: Sea $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Por definición, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Por nuestro trabajo con círculos en la sección anterior sabemos que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo de radio 3 con centro en el origen. Al despejar y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ obtenemos $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Deducimos que la gráfica de f es la mitad superior del círculo como en la figura siguiente:



Al consultar la figura anterior, vemos que el dominio de f es el intervalo $[-3, 3]$ y el rango de f es el intervalo $[0, 3]$.

La gráfica sube a medida que x aumenta de -3 a 0 , así que f se incrementa en el intervalo cerrado $[-3, 0]$; por lo tanto, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

La gráfica cae conforme x aumente de 0 a 3 , de manera que f decrece en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

El siguiente tipo de función es fundamental en álgebra.

Definición 57 *Una función f es función lineal si*

$$f(x) = ax + b$$

donde x es cualquier número real y a, b son constantes.

La gráfica de f de la definición anterior es la gráfica de $y = ax + b$, que, por la forma pendiente-intersección, es una recta con pendiente a y ordenada al origen igual a b ; por lo tanto, *la gráfica de una función lineal es una recta*. Dado que $f(x)$ existe para toda x , el dominio de f es \mathbb{R} . Es claro que, si $a \neq 0$, el rango de f es también \mathbb{R} .

En lo que sigue estudiaremos otros conceptos que nos ayudarán a trazar las gráficas de ciertos tipos de ecuaciones.

Definición 58 *Una función f se llama par si $f(x) = f(-x)$ para toda x en su dominio.*

En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si x se sustituye por $-x$ y, por lo tanto, por lo estudiado en la sección anterior, la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y .

Definición 59 *Una función se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio.*

Si aplicamos lo estudiado en la sección anterior a la ecuación $y = f(x)$, vemos que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplos:

a) La función $f(x) = 3x^4 - 2x + 5$ es par ya que

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = 3x^4 - 2x^2 + 5 = f(x).$$

b) La función $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$ es impar ya que

$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) = -2x^5 + 7x^3 - 4 = -f(x).$$

c) La función $f(x) = x^3 + x^2$ no es par y no es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2.$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función no es par ni impar.

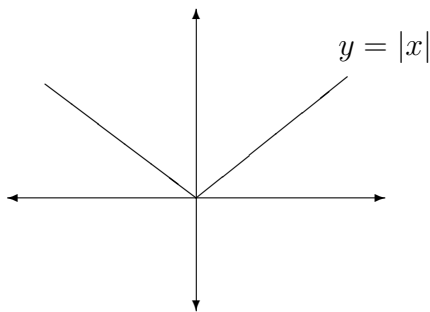
Para el próximo ejemplo, recordemos que el *valor absoluto* de un número real x se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo: Sea $f(x) = |x|$. El dominio de f es \mathbb{R} porque el valor absoluto de x existe para todo número real x . Si x está en \mathbb{R} , entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Por lo tanto, f es una función par. Así, su gráfica es simétrica con respecto al eje y . Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$; así pues, la parte de la gráfica del primer cuadrante coincide con la recta $y = x$. Trazamos esta semirecta, usamos simetría y llegamos a la figura siguiente:



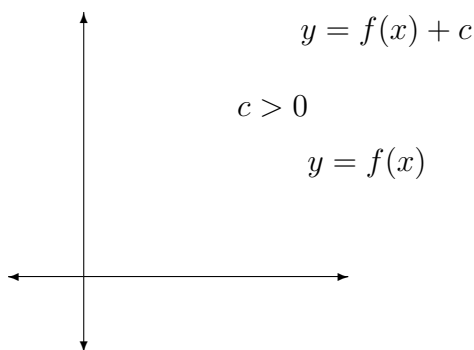
Al consultar la gráfica vemos que f decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$.

Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, es fácil graficar

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c$$

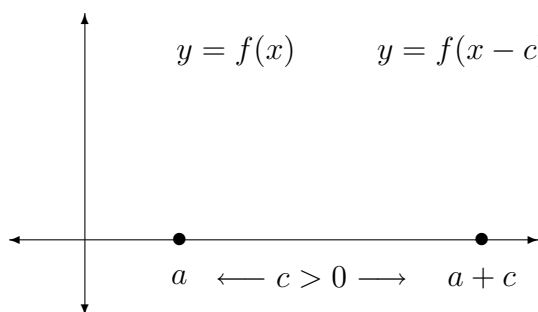
para cualquier número real positivo c .

Para $y = f(x) + c$, se suma c a la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Esto *desplaza* la gráfica “hacia arriba” una distancia c , como muestra la figura siguiente



Para $y = f(x) - c$ con $c > 0$, se resta c de cada coordenada y , lo cual corre la gráfica de f una distancia c “hacia abajo”. Estos cambios se llaman *desplazamientos verticales* de gráficas.

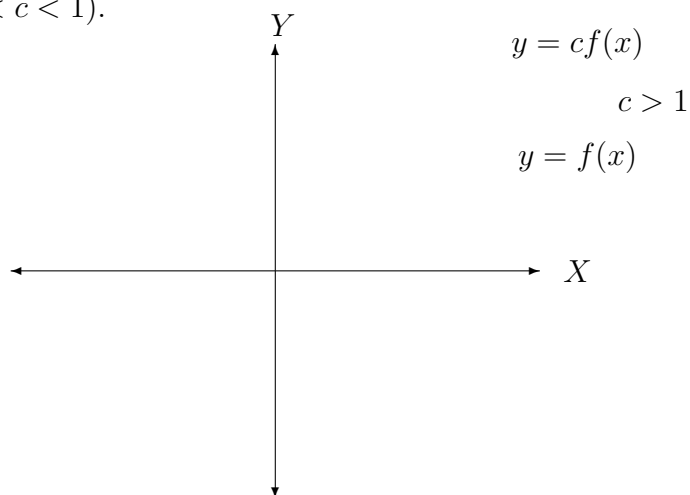
También podemos considerar *desplazamientos horizontales* de gráficas. En particular, si $c > 0$, consideremos las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$ trazadas en el mismo plano coordenado según se ilustra en la figura siguiente



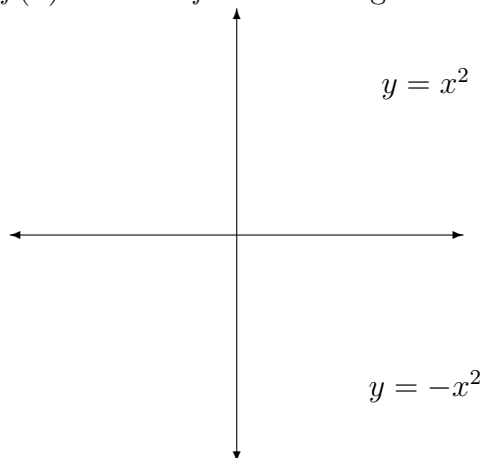
Puesto que $f(a) = f([a + c] - c)$ el punto con coordenada x igual a a en la gráfica de $y = f(x)$ tiene la misma coordenada y que el punto con coordenada x igual a $a + c$ en la gráfica de $y = f(x - c)$. Esto significa que la gráfica de $y = f(x - c)$ se obtiene desplazando la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha una distancia c . En forma análoga, la gráfica de $y = f(x + c)$ se obtiene corriendo la gráfica de f a la izquierda una distancia $c > 0$.

Los desplazamientos horizontales y verticales también se denominan *traslaciones*.

Con el objeto de obtener la gráfica de $y = cf(x)$ para algún número real c , multiplicamos por c las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, duplicamos las coordenadas y ; o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, multiplicamos por $\frac{1}{2}$ cada coordenada y . Este procedimiento se conoce como *alargar verticalmente* la gráfica de f (si $c > 1$), o *comprimir verticalmente* la gráfica (si $0 < c < 1$).



Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la coordenada y de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$; por lo tanto, todo punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentre “arriba” del eje x , determina un punto $(a, -b)$ de la gráfica de $y = -f(x)$ que está “abajo” del eje x . La gráfica de $y = -f(x)$ es una *reflexión* de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x .



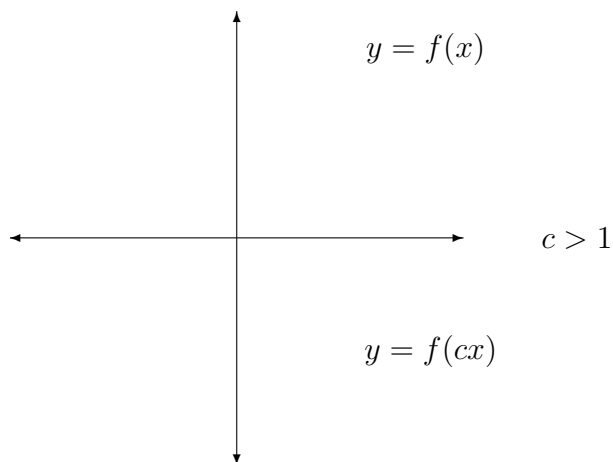
A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$ si $c \neq 0$. En este caso los valores de la función $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

son los mismos que los de la función $f(cx)$ para $a \leq cx \leq b$ o bien

$$\frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto significa que la gráfica de f está *horizontalmente comprimida* (si $c > 1$) u *horizontalmente alargada* (si $0 < c < 1$).



Si $c < 0$, llegamos a la gráfica de $y = f(cx)$ reflejando la gráfica de $y = f(|c|x)$ en el eje y ; por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, reflejamos la gráfica de $y = f(2x)$ en el eje y . Como caso especial, la gráfica de $y = f(-x)$ es una *reflexión* de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y .

En general, el proceso de desplazar, alargar, comprimir y reflejar una gráfica se denomina *transformación* de una gráfica.

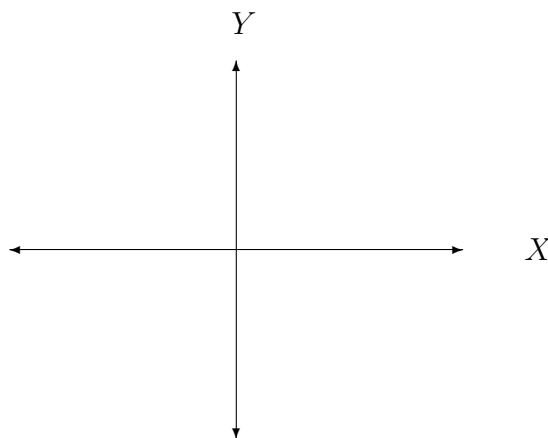
4.4 Funciones cuadráticas

Definición 60 Una función f es una función cuadrática si

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

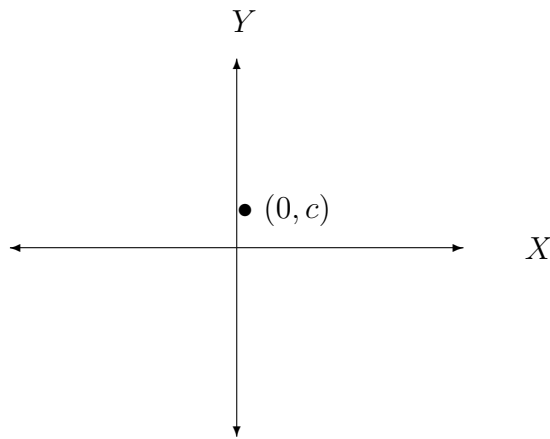
donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$ y la gráfica es una parábola con vértice en el origen, como muestra la figura siguiente:



Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces $f(x) = ax^2 + c$ y, de acuerdo a nuestro análisis de desplazamientos verticales de la sección anterior, la gráfica es una

parábola con vértice en el punto $(0, c)$ en el eje de las y , como ilustra la figura siguiente:



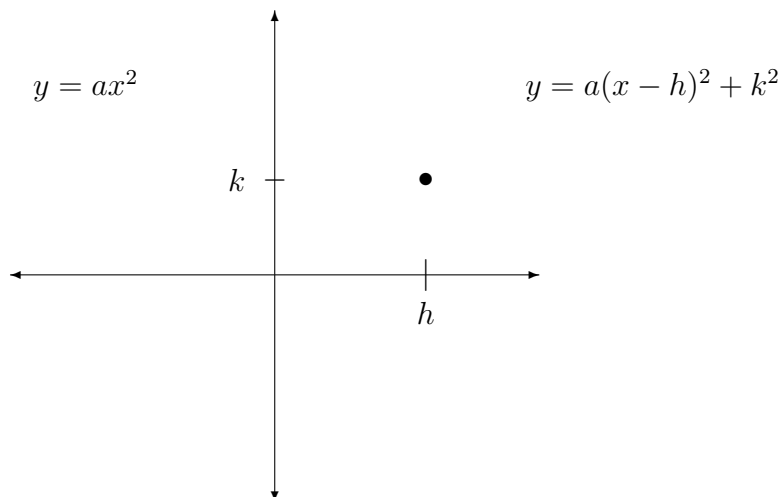
Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $b \neq 0$, entonces, completamos el cuadrado y podemos cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para algunos números reales h y k .

La forma anterior también se conoce como *ecuación estándar*.

Podemos obtener la gráfica de esta ecuación a partir de la gráfica de $y = ax^2$ por medio de un desplazamiento horizontal y uno vertical. se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con un eje vertical*. La situación geométrica se ilustra en la figura siguiente:



Si $a > 0$, el punto (h, k) es el más bajo de la parábola, y la función f tiene un *valor mínimo* $f(h) = k$.

Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y su punto (h, k) es el punto más alto. En este caso, la función f tiene un *valor máximo* $f(h) = k$.

Ejemplo: Expresemos $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$ en forma estándar.

Para ello, antes de completar el cuadrado, *es esencial factorizar el coeficiente de x^2 de los primeros dos términos de $f(x)$* , de esta manera

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + __) + 50 \end{aligned}$$

Ahora completamos el cuadrado para la expresión $x^2 + 8x$ dentro del paréntesis, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x , esto es, $(\frac{8}{2})^2$, o sea 16.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + 16) - 3 \cdot 16 + 50 \\ &= 3(x + 4)^2 - 48 + 50 \\ &= 3(x + 4)^2 + 2. \end{aligned}$$

La última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$ con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

Ejemplo: Encontremos la ecuación de una parábola con vértice $V(2, 3)$ y que pasa por el punto $(5, 1)$.

Con la ecuación estándar

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$ obtenemos

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para hallar a , aprovechamos que $(5, 1)$ está en la parábola. Así pues, es una solución de la última ecuación; por lo tanto,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3$$

ó $a = -\frac{2}{9}$. En consecuencia, una ecuación para la parábola es

$$y = -\frac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$

4.5 Álgebra de funciones

A menudo las funciones se definen en términos de sumas, diferencias, productos o divisiones de varias expresiones; por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

podemos considerar $h(x)$ como una suma de valores de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

Nos referimos a h como la *suma* de f y g y la denotamos $f + g$. Así,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1}.$$

Observe que la posibilidad de definir esta operación depende de que ella esté presente en el rango de la función f (en este caso los números reales). Una definición precisa es como sigue:

Definición 61 Sean f y g funciones. Se define la suma de f y g , denotada $f + g$, como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para cada x en un dominio común de f y g .

Análogamente se define: La *diferencia* de f y g , denotada $f - g$, como

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

y el *producto* de f y g , denotado $f \cdot g$, como

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Finalmente, definimos el *cuociente* de f y g , denotado $\frac{f}{g}$, como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde x pertenece a un dominio común de f y g , y siempre que $g(x) \neq 0$.

Ejemplo: Sean $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x+1$. El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y el dominio de g es \mathbb{R} . La intersección de estos dominios es $[2, 2]$, que es el dominio de $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$. Para el dominio de $\frac{f}{g}$ se excluye todo número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x+1 = 0$ (es decir $x = -\frac{1}{3}$); por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \sqrt{4-x^2} + (3x+1) , & -2 \leq x \leq 2 \\ (f-g)(x) &= \sqrt{4-x^2} - (3x+1) , & -2 \leq x \leq 2 \\ (f \cdot g)(x) &= \sqrt{4-x^2} \cdot (3x+1) , & -2 \leq x \leq 2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} , & -2 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad x \neq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Una función f puede ser:

a) *Polinomial*, esto es si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo $c \cdot x^k$, donde c es número real y

k es un entero no negativo.

b) *Algebraica*, esto es una función que es una combinación de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones polinomiales.

Ejemplo: $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{\sqrt{x^3+\sqrt{x}}}$.

c) *Trascendentales*, esto es aquellas funciones que no son algebraicas.

Ejemplos: $f(x) = e^x$ y $f(x) = \log(x)$.

Las funciones trascendentales serán el objeto de estudio de un capítulo posterior.

4.6 Ejercicios

1. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y) de un plano coordenado tal que $y/x < 0$.
2. Demuestre que el triángulo con vértices $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$ es un triángulo rectángulo y encuentre su área.
3. Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, hallar
 - a) La distancia $d(P, Q)$.
 - b) El punto medio del segmento PQ .
 - c) Un punto R tal que Q sea el punto medio de PR .

4. Encuentre todos los puntos del eje y localizados a una distancia 13 de $P(12, 6)$.
5. ¿ Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $q(-2, a)$ es menor de 3?
6. Encuentre una ecuación del círculo que tenga centro $C(7, -4)$ y pasa por $P(-3, 3)$.
7. Halle una ecuación para la mitad izquierda del círculo dado por $(x + 2)^2 + y^2 = 9$.
8. Determine la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-8, 6)$.
9. Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son los vértices de un trapecio.
10. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ que es
 - a) Paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$.
 - b) Perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$.
11. Expresa $8x + 3 + 3y - 24 = 0$ en forma de punto-pendiente.
12. Encuentre una ecuación de la recta que tiene intersección x en -3 y pase por el centro del círculo con ecuación: $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.
13. Halle la ecuación general de la recta que pasa por $P(4, -3)$ con pendiente 5.
14. Encuentre el centro y radio del círculo con la ecuación dada
 - a) $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$.
 - b) $4x^2 + 4y + 24x - 16y + 39 = 0$.

15. Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$, halle
- a) $f(1)$
 - b) $f(-1)$
 - c) $f(0)$
 - d) $f(-x)$
 - e) $-f(x)$
 - f) $f(x^2)$
 - g) $[f(x)]^2$
16. Hallar $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ si $h \neq 0$ para las siguientes funciones
- a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$
 - b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos
- a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$.
 - b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.
 - c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$.
18. Trace la gráfica de la ecuación y nombre (o etiquete) las intersecciones x y y
- a) $9y + 2x^2 = 0$.
 - b) $y = \sqrt{1-x}$.
 - c) $y^2 = 16 - x^2$.
 - d) $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$.
 - e) $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

f) $y = (x - 3)^2 - 2$.

19. Para las siguientes funciones trace la gráfica, encuentre el dominio y el rango f , y halle los intervalos en que f es creciente, decreciente o constante

a) $f(x) = \frac{1-3x}{2}$.

b) $f(x) = |x + 3|$.

c) $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$.

d) $f(x) = 9 - x^2$.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

f) $f(x) = 1 + 2[x]$.

20. Trace las gráficas de las siguientes ecuaciones, usando desplazamiento, alargamiento o reflexión:

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x + 4}$ c) $y = \sqrt{x} + 4$

d) $y = 4\sqrt{4}$ e) $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ f) $y = -\sqrt{x}$

21. Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x)$:

a) $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$.

b) $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$.

c) $f(x) = -12(x + 1)^2 - 37$.

d) $f(x) = 3(x + 2)(x - 10)$.

22. Expresé la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

23. Halle la ecuación estándar de una parábola con un eje vertical que tenga vértice $V(3, -2)$ y pase por $(5, 4)$.

24. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre el dominio de
a) fg b) f/g
25. Si $f(x) = 8x - 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, halle
a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(2)$
26. Para las siguientes funciones encuentre: $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$:
a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ $g(x) = 3x + 2$.
b) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$ $g(x) = 1/x^2$.
27. Para las siguientes funciones, determine: $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$, y $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$:
a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $g(x) = \sqrt{x - 3}$.
b) $f(x) = \frac{x}{3x+2}$ $g(x) = \frac{2}{x}$.
28. Encuentre una forma de función composición para $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$.
29. ¿ $f(x) = 2x^3 - 5$ es una función biunívoca?
30. Para las siguientes funciones, halle: $f^{-1}(x)$ y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.
a) $f(x) = 10 - 15x$ b) $f(x) = 9 - 2x^2, x \leq 0$.
31. Supongamos que f y g son funciones biunívocas tales que $f(2) = 7$, $f(4) = 2$ y $g(2) = 5$. Encuentre el valor, si es posible
a) $(g \circ f^{-1})(7)$.
b) $(f \circ g^{-1})(5)$.
c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(5)$.
d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$.

Capítulo 5

Secciones Cónicas

5.1 Parábolas

Las *secciones cónicas*, también llamadas *cónicas*, se obtienen cortando un cono circular recto doble con un plano. Al cambiar la posición del plano se tiene un *círculo*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*.

Las *cónicas degeneradas* (o degradadas) se obtienen si el plano corta al cono en un sólo punto o a lo largo de una o dos rectas situadas en el cono.

Con base al trabajo del capítulo anterior, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con eje vertical. A continuación daremos una definición general de una parábola y llegaremos a ecuaciones de parábolas que tienen eje vertical u horizontal.

Definición 62 *Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (foco) y de una recta fija l (directriz) situada en el plano.*

Supondremos que f no está en l , si estuviera, tendríamos una recta en lugar de una parábola.

Si P es un punto del plano y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P y es perpendicular a l (ver figura), por la definición anterior, P está sobre la parábola si y sólo si

$$d(P, F) = d(P, P').$$

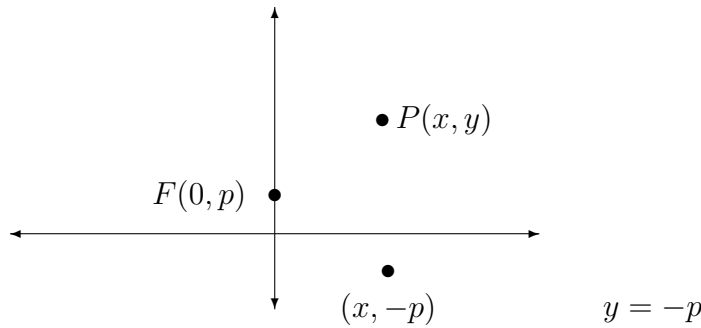
El *eje* de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz.

El *vértice* de la parábola es el punto V sobre el eje que se encuentra a la mitad de F a l .

Ejemplo: A fin de obtener una ecuación sencilla para una parábola, consideremos $F(0, p)$ como foco ($p \neq 0$) y $y = -p$ como directriz.

Por la fórmula de la distancia, un punto $P(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$, esto es, si

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$



Elevamos al cuadrado ambos lados y simplificamos:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 &= 4py. \end{aligned}$$

Una ecuación equivalente es: $y = \frac{1}{4p}x^2$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Si intercambiamos los papeles de x e y , resulta $y^2 = 4px$ o bien, lo que es equivalente $x = \frac{1}{4p}y^2$. Esta es una ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ y abre a la derecha si $p > 0$, o la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Ejemplo: Encontremos el foco de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$. Para ello observemos que tiene la forma $y = ax^2$ con $a = -\frac{1}{6}$. Dado, por el ejemplo anterior, que $a = \frac{1}{4p}$, entonces $p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(-\frac{1}{6})} = \frac{1}{-\frac{4}{6}} = -\frac{3}{2}$.

Así, la parábola abre hacia abajo y tiene foco $F(0, -\frac{3}{2})$. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$.

Si tomamos una ecuación estándar de una parábola, esto es de la forma $x^2 = 4py$, y cambiamos x por $x - h$ y y por $y - k$, entonces $x^2 = 4py$ se convierte en

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Por nuestro análisis sobre traslaciones del capítulo anterior, reconocemos que la gráfica de la segunda ecuación se puede obtener a partir de la gráfica de la primera. De esta manera, el vértice pasa de $(0, 0)$ a (h, k) .

Elevando al cuadrado el lado izquierdo de la ecuación anterior y simplificando, nos lleva a una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Análogamente, si comenzamos con $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, podemos escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$.

Ejemplo: Analicemos la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$. Ya que el término al cuadrado es en y , la gráfica es una parábola con un eje horizontal. Escribimos la ecuación dada como

$$y^2 + 8y + __ = 2x - 22 + __$$

y luego completamos el cuadrado al sumar $[\frac{1}{2}8]^2$ a ambos lados:

$$\begin{aligned}y^2 + 8y + 16 &= 2x - 6 \\(y + 4)^2 &= 2(x - 3).\end{aligned}$$

De esta manera, el vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$.

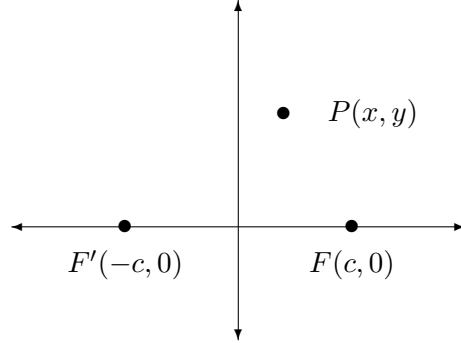
Observemos también que $4p = 2$ ó $p = \frac{1}{2}$. Esto da que el foco es $F(h + p, k) = F(3 + \frac{1}{2}, -4) = F(\frac{7}{2}, -4)$. Finalmente, la directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

5.2 Elipses

Definición 63 *Una elipse es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano (los focos) sea una constante positiva.*

Ejemplo: A fin de obtener una ecuación sencilla para una elipse, escojemos el eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F' , con el centro de la elipse en el origen. Si F tiene coordenadas $(c, 0)$ con $c > 0$, entonces, como en la figura siguiente, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$. La suma de las distancias de un punto $P(x, y)$ desde F y F' se denotará con $2a$. Así, por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$



Por la fórmula de la distancia, lo anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Desarrollando los términos al cuadrado y simplificando queda

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc$$

ó

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

Volviendo a elevar al cuadrado se obtiene

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2.$$

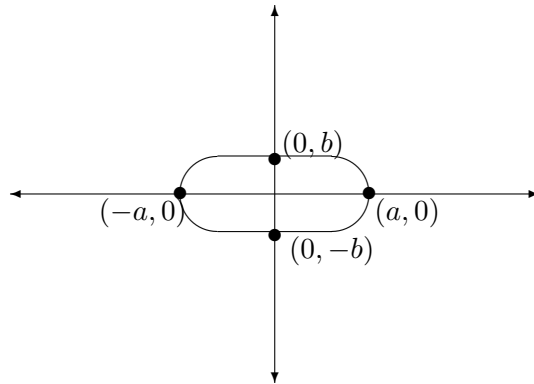
Desarrollando el término al cuadrado y simplificando se tiene

$$\begin{aligned}ax^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

Dividiendo por a^2b^2 donde $b := a^2 - c^2$, se obtiene la *forma estándar* de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gráficamente



Observe que si $x = 0$, entonces $y = \pm b$. El segmento que une los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ de la elipse se llama *eje menor*.

Análogamente si $y = 0$, entonces $x = \pm a$. El segmento que une los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llama *eje mayor* de la elipse.

En particular, los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se denominan *vértices* de la elipse.

Nótese que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = c^2 > 0$ implica $a > b$. Esto justifica los nombres ejes menor y mayor utilizados anteriormente.

Una situación diferente plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplos:

a) Consideremos la elipse con ecuación $2x^2 + 9y^2 = 18$ y obtengamos las coordenadas de los focos. Para ello, escribimos la ecuación en la forma estándar

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Se deduce que $a = 3$ y $b = \sqrt{2}$. Luego calculamos c de la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ obteniendo

$$c^2 = 9 - 2 = 7$$

ó $c = \pm\sqrt{7}$. Por lo tanto, los focos son $(\sqrt{7}, 0)$ y $(-\sqrt{7}, 0)$.

b) Encontremos la ecuación de la elipse con vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$. Para ello usamos nuevamente la forma estándar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $a > b$.

Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, concluimos que $a = 4$. Análogamente, como los focos son $(\pm 2, 0)$, concluimos que $c = 2$. Luego, la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ nos da

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12,$$

de donde $b = \pm\sqrt{12}$. Obtenemos así que la ecuación tiene la forma explícita

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Finalmente, observemos que un círculo es un caso particular de una elipse ($a = b$).

5.3 Hipérbolas

La definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse. El único cambio es que en lugar de usar la *suma* de distancias desde dos puntos fijos, usamos la *diferencia*.

Definición 64 Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano, tal que la diferencia de las distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos del plano (los focos) sea una constante (positiva).

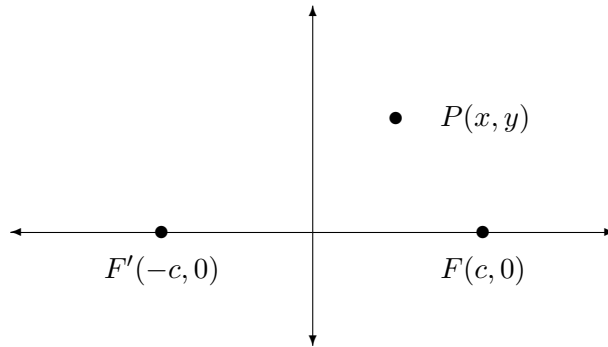
Ejemplo: Escojamos un sistema de coordenadas con focos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ y denotamos la distancia (constante) con $2a$. Así, un punto $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Utilizando la fórmula de la distancia y procediendo como en el caso de la elipse, obtenemos la *ecuación estándar*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

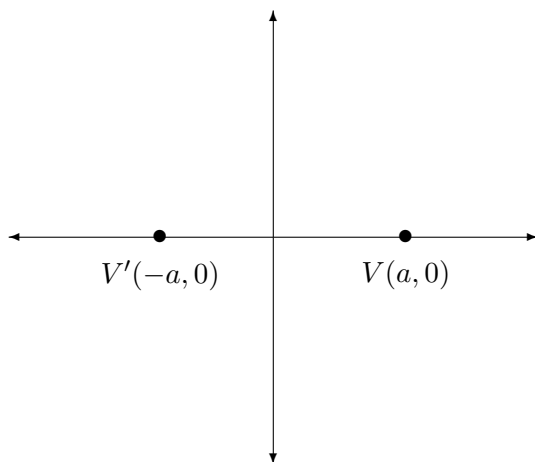
donde $b^2 = c^2 - a^2$. La situación geométrica aparece en la figura siguiente:



Aplicando pruebas de simetría, observamos que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes (x e y) y al origen.

Podemos encontrar las intersecciones en x de la hipérbola con $y = 0$ en la ecuación; de esta manera llegamos a $\frac{x^2}{a^2} = 1$, o sea $x^2 = a^2$ y, en consecuencia, las intersecciones x son a y $-a$. Los puntos correspondientes $V(a, 0)$ y

$V'(-a, 0)$ de la gráfica se llaman *vértices* de la hipérbola. El segmento de recta que une V y V' se llama *eje transverso*.



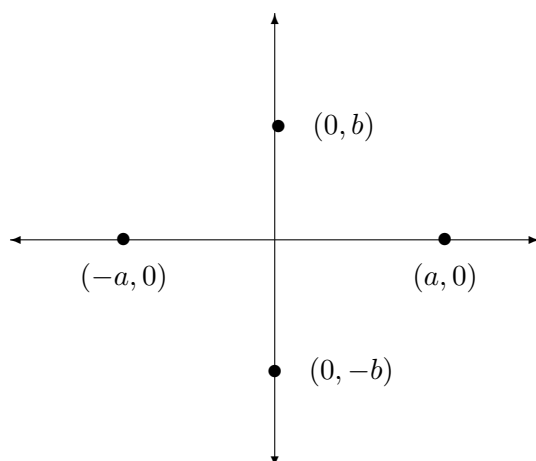
La gráfica carece de intersección con eje y porque la ecuación $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ no tiene soluciones en \mathbb{R} . Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son puntos extremos del *eje conjugado* WW' . Los puntos W y W' no pertenecen a la gráfica pero son útiles para describir la gráfica. En efecto, es posible probar (Ejercicio) que las rectas

$$y = \pm \left(\frac{b}{a} \right) x$$

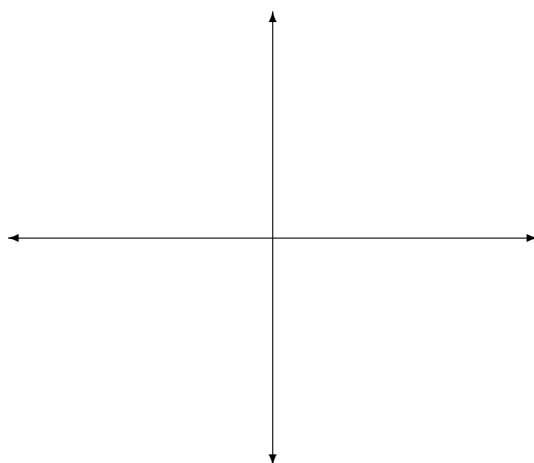
son *asíntotas para la hipérbola*. Estas asíntotas sirven como guías para dibujar la gráfica.

Una forma sencilla de trazar las asíntotas consiste en encontrar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$.

Si se dibujan las líneas verticales y horizontales que pasen por estos puntos extremos de los ejes transverso y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del *rectángulo auxiliar* resultante tienen pendientes b/a y $-b/a$; por lo tanto, al prolongar estas diagonales obtenemos las asíntotas $y = (\pm b/a)x$.



La hipérbola se traza entonces usando las asíntotas como guías. Las dos partes que conforman la hipérbola se llaman *rama derecha* y *rama izquierda* de la hipérbola.



5.4 Ejercicios

1. Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. Trace su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

- a) $8y = x^2$.
- b) $2y^2 = -3x$.
- c) $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$.
- d) $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$.
- e) $y = x^2 - 4x + 2$.
- f) $x^2 + 20y = 10$.

2. Encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

- a) Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$.
- b) Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$.
- c) Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$.
- d) Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$.
- e) Vértice en el origen, simétrico al eje y y que pasa por el punto $(2, -3)$.
- f) Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x y que pasa por el punto $(5, 9)$.
- g) Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x e intersección y de 1.

3. Encuentre los vértices y focos de la elipse. Trace su gráfica y muestre los focos.

- a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- b) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{416} = 1.$
c) $4x^2 + y^2 = 16.$
d) $4x^2 + 25y^2 = 1.$
e) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$
f) $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0.$
g) $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0.$
4. Encuentre una ecuación para la elipse con centro en el origen y que satisfaga las condiciones dadas.
- a) Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$.
b) Vértices $V(0, \pm 5)$, eje menor de longitud 3.
c) Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2.
d) Vértices $V(0, \pm 6)$, que pasa por $(3, 2)$.
e) Intersecciones en $x = \pm 2$, intersecciones en $y = \pm \frac{1}{3}$.
f) Intersecciones en $x = \pm 1/2$, intersecciones en $y = \pm 4$.
g) Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5.
h) Eje mayor vertical de longitud 8, eje menor de longitud 6.
5. Encuentre los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Trace su gráfica y muestre las asíntotas y focos.
- a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$
b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1.$
c) $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1.$
d) $y^2 - 4x^2 = 16.$

- e) $16x^2 - 36y^2 = 1$.
 - f) $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$.
 - g) $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$.
 - h) $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$.
6. Encuentre una ecuación para la hipérbola que tenga su centro en el origen y satisfaga las condiciones dadas.
- a) Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.
 - b) Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.
 - c) Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4.
 - d) Vértices $V(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$.
 - e) Intersecciones $x = \pm 5$, asíntotas $y = \pm 2x$.
 - f) Eje transversal vertical de longitud 10, eje conjugado de longitud 14.
 - g) Eje transversal horizontal de longitud 6, eje conjugado de longitud 2.
7. Encuentre los vértices y focos de la cónica y trace su gráfica.
- a) $y^2 = 64x$.
 - b) $9y^2 = 144 - 16x^2$.
 - c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$.
 - d) $25y = 100 - x^2$.
 - e) $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$.
 - f) $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$.
 - g) $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$.

- h) $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$.
8. a) Determine A de modo que el punto $(2, -3)$ pertenezca a la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.
- b) ¿La cónica es una elipse o una hipérbola?
9. Si un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados está inscrito en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, exprese el área A del cuadrado en términos de a y b .
10. Encuentre la ecuación estándar del círculo con centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y que pasa por el origen.

Capítulo 6

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

6.1 Funciones exponenciales

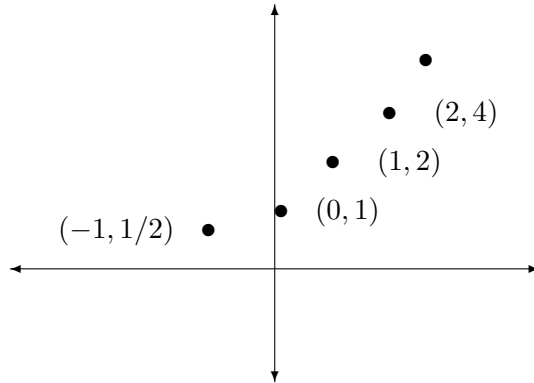
Comencemos por analizar la función f definida por

$$f(x) = 2^x.$$

Enumerando coordenadas de varios puntos racionales, esto es de la forma $\frac{m}{n}$, $n > 0$, con m y n enteros; y usando la propiedad algebraica:

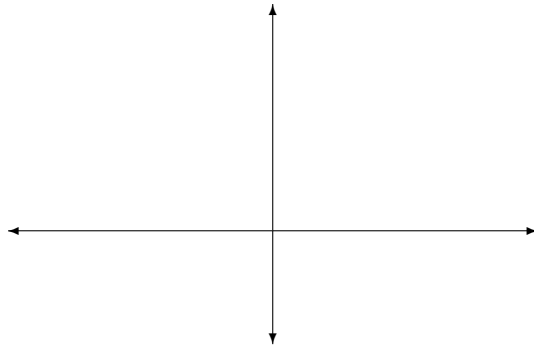
$$2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m,$$

obtenemos un trazo discreto de puntos como muestra la figura a continuación



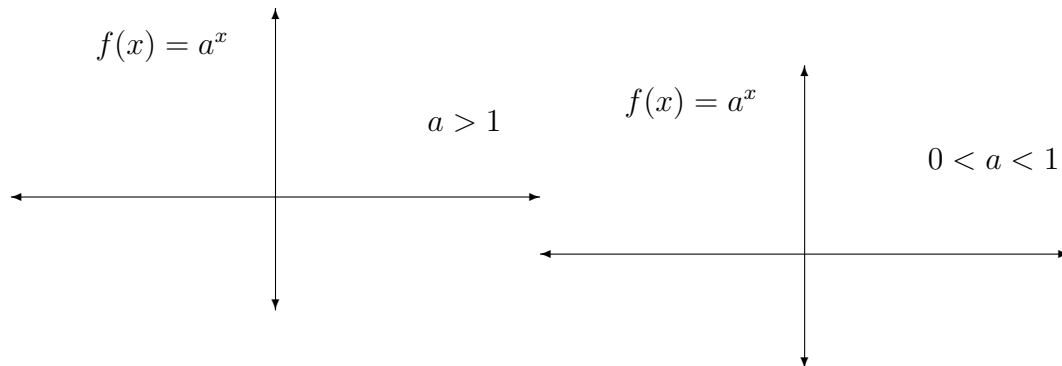
A fin de ampliar el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x irracional.

Hacemos esto por *continuidad*, esto es, requiriendo que la gráfica represente una función continua. De esta forma obtenemos la gráfica siguiente:



Consideremos en seguida cualquier base a , donde a es un número real positivo diferente de 1. Al igual que en el análisis previo, resulta viable definir una función f cuyo dominio es \mathbb{R} y su rango es el conjunto de los

números reales positivos. Su gráfica se indica en las gráficas siguientes:



Las gráficas indican que si $a > 1$, entonces f es creciente en \mathbb{R} , y si $0 < a < 1$, f decrece en \mathbb{R} . Esto es comprobable mediante cálculo.

Las gráficas indican solamente la “apariencia general”; es decir, la forma “exacta” depende del valor de a . Obsérvese que como $a^0 = 1$, la intersección con el eje y es 1 para toda a .

Si $a > 1$, conforme x *decrece* hasta valores negativos, la gráfica de f se aproxima al eje de las x ; por lo tanto, decimos que el eje x es una *asíntota horizontal*. A medida que x aumenta hasta valores positivos, la gráfica sube con rapidez.

Cuando consideramos a^x excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Obsérvese que si $a < 0$ entonces a no es un número real para muchos valores de x como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{3}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, cuando $a = 1$, $a^x = 1$ para toda x y la gráfica de $f(x) = a^x$ es una línea horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente o decreciente en todo su dominio y, en consecuencia, f es biyectiva. En particular es inyectiva, esto significa que para números reales x_1 y x_2 ; si $a^{x_1} = a^{x_2}$ entonces $x_1 = x_2$. Esta propiedad es de mucha utilidad para resolver *ecuaciones exponenciales* en álgebra.

Ejemplo: Resolvamos la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ para x .

Primero expresamos ambos lados con la misma base:

$$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}.$$

Aplicando la ley de los exponentes:

$$3^{5x-8} = 3^{2x+4}.$$

Usando que las funciones exponenciales son biyectivas:

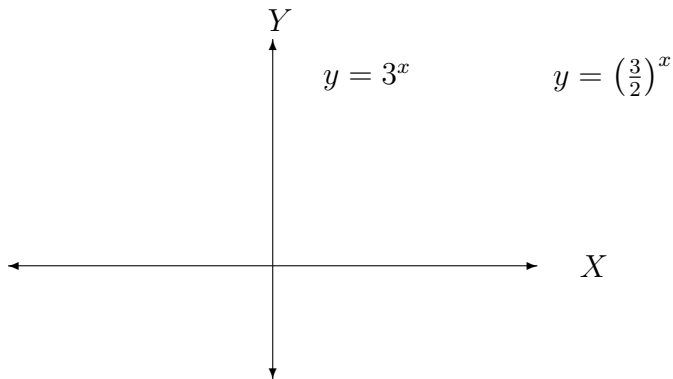
$$5x - 8 = 2x + 4.$$

Resolviendo para x :

$$x = 4.$$

Trazando gráficas de distintas funciones exponenciales en el mismo plano coordenado nos hace ver que:

Si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores *positivos* de x



La gráfica anterior muestra también que:

Si $1 < a < b$, entonces $b^x < a^x$ para valores *negativos* de x .

En particular, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ se encuentra *entre* las gráficas de la figura anterior.

La función exponencial más útil en la práctica es la *función exponencial natural*, definida por:

$$f(x) = e^x.$$

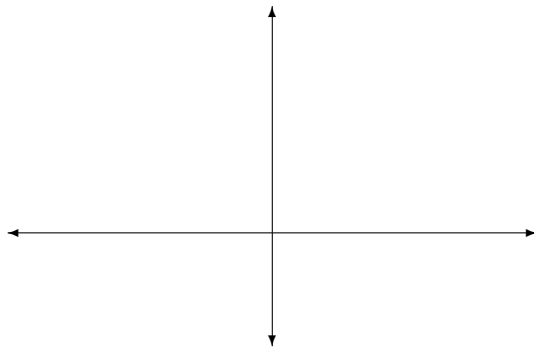
Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

El número e aparece como límite de la sucesión $(1 + \frac{1}{n})^n$. Una variante de la sucesión anterior produce la fórmula de interés compuesto continuo utilizada en economía.

La función exponencial natural permite, también, definir otras funciones importantes en la práctica. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

recibe el nombre de *función coseno hiperbólica* y sirve en ingeniería para describir la forma de una cadena o cable flexible uniforme cuyos extremos estén sostenidos a la misma altura. La gráfica es:



Nótese que “parece” una parábola, pero no es el caso.

Un tipo de problemas que involucra la función exponencial, y que se presenta en cálculo, es el siguiente:

Ejemplo: Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, hallar los ceros de f .

A fin de resolver este problema, factorizamos $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x). \end{aligned}$$

Para encontrar los ceros de f , resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $e^{-2x} > 0$ para toda x , vemos que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $1 - x = 0$; por lo tanto, los ceros de f son 0 y 1.

6.2 Funciones logarítmicas

En la sección anterior analizamos que la función exponencial dada por $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ ó $a > 1$ es biyectiva; en consecuencia, f tiene una función inversa f^{-1} . Esta inversa de la función exponencial con base a se llama *función logarítmica con base a* y se denota \log_a . Sus valores se escriben $\log_a(x)$, que se lee “el logaritmo de x con base a ”. Una definición formal es la siguiente:

Definición 65 *Sea a un número real positivo diferente de 1. El logaritmo de x con base a se define como*

$$y = \log_a(x) \text{ si y sólo si } x = a^y$$

para cada $x > 0$ y todo número real y .

Ejemplos: Las siguientes formas son equivalentes:

$$\log_5 u = 2 \iff 5^2 = u$$

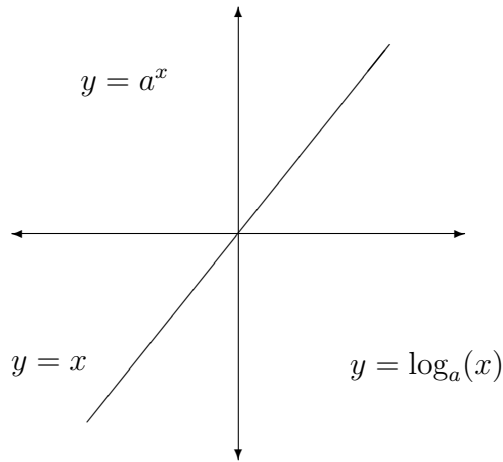
$$\log_b 8 = 3 \iff b^3 = 8$$

$$r = \log_p q \iff p^r = q$$

$$w = \log_4(2t + 3) \iff 4^w = 2t + 3$$

$$\log_3 x = 5 + 2z \iff 3^{5+2z} = x.$$

Ya que la función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a , la gráfica de $y = \log_a(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con la línea $y = x$. La figura siguiente muestra esta gráfica para $a > 1$:



Observemos que la intersección x con la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de los reales positivos, el rango es \mathbb{R} y el eje y es una *asíntota vertical*.

Es claro que, si $a > 1$, $\log_a(x)$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por lo tanto, biyectiva. En particular, esto muestra la siguiente propiedad algebraica para números reales x_1, x_2 :

Si $\log_a(x_1) = \log_a(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

la propiedad anterior se utiliza para resolver *ecuaciones logarítmicas*.

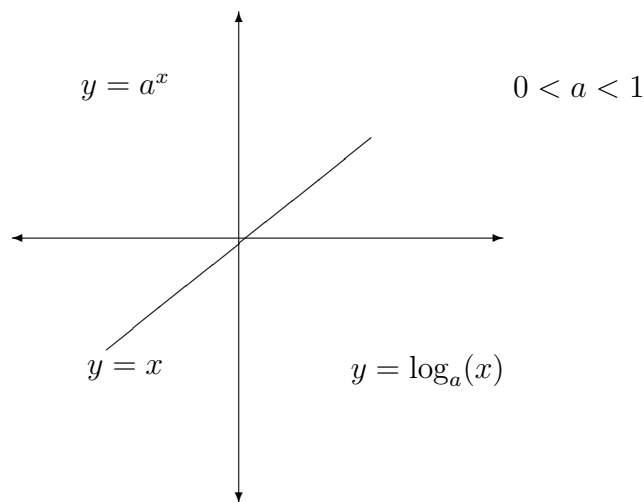
Ejemplo: Resolvamos la ecuación $\log_6(4x - 5) = \log_6(2x + 1)$.

Para esto, usamos directamente la propiedad anterior y se obtiene: $4x - 5 = 2x + 1$ ó $x = 3$.

El ejemplo anterior muestra una ecuación logarítmica *simple*; es decir, que contiene el logaritmo de una expresión que comprende una variable lineal.

Se pueden presentar soluciones “extrañas” cuando se resuelven ecuaciones logarítmicas con variables no lineales (por ejemplo, cuadráticas); por lo tanto, por regla general, debemos comprobar las respuestas para asegurarnos de que estamos tomando logaritmos *únicamente de números reales positivos*; de otra manera no podremos definir la función logarítmica.

No es frecuente utilizar logaritmos con base $a < 1$. Sin embargo, es útil tener en mente al menos su gráfica, como ilustra la figura a continuación:



Los logaritmos con base 10 se llaman *logaritmos comunes*. Denotamos:

$$\log(x) := \log_e(x) \text{ para } x > 0.$$

6.3 Propiedades de los logaritmos

En la sección anterior vimos que $\log_a(x)$ se puede interpretar como un exponente; en consecuencia, las leyes de los exponentes sirven para obtener las correspondientes de los logaritmos. Las propiedades fundamentales se resumen en el resultado siguiente:

Teorema 66 Sean u y w números reales positivos, entonces

- (1) $\log_a(u \cdot w) = \log_a(u) + \log_a(w)$
- (2) $\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a(u) - \log_a(w)$
- (3) $\log_a(w^c) = c \log_a(w)$ para todo número real c .

Demostración. Hagamos: $r := \log_a(u)$ y $s := \log_a(w)$. Entonces $a^r = u$ y $a^s = w$.

- (1) $u \cdot w = a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Luego,

$$\log_a(u \cdot w) = r + s = \log_a(u) + \log_a(w).$$

- (2) $\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, luego:

$$\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = r - s = \log_a(u) - \log_a(w).$$

- (3) $u^c = a^{cr}$, luego:

$$\log_a(u^c) = c \cdot r = c \cdot \log_a(u).$$

■

Observación: No hay leyes generales para expresar $\log_a(u+w)$ ó $\log_a(u-w)$ en términos de logaritmos más sencillos.

Algunos ejemplos que ilustran los usos de las leyes de los logaritmos son los siguientes.

Ejemplos:

a) Expresemos $\log_a \left(\frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2} \right)$ en términos de logaritmos de x , y y z . Para ello, escribimos \sqrt{y} como $y^{1/2}$ y usando las propiedades obtenemos:

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{x^3 \sqrt{y}}{z^2} \right) &= \log_a(x^3 \cdot y^{1/2}) - \log_a(z^2) \\ &= \log_a(x^3) + \log_a(y^{1/2}) - \log_a(z^2) \\ &= 3 \log_a(x) + \frac{1}{2} \log_a(y) - 2 \log_a(z). \end{aligned}$$

b) Expresemos $\frac{1}{3} \log_a(x^2 - 1) - \log_a(y) - 4 \log_a(z)$ como un logaritmo. Para ello, usamos las propiedades, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log_a(x^2 - 1) - \log_a(y) - 4 \log_a(z) &= \log_a(x^2 - 1)^{1/3} - \log_a(y) - \log_a(z^4) \\ &= \log_a(\sqrt[3]{x^2 - 1}) - (\log_a(y) + \log_a(z^4)) \\ &= \log_a(\sqrt[3]{x^2 - 1}) - \log_a(y \cdot z^4) \\ &= \log_a \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{y \cdot z^4} \right). \end{aligned}$$

c) Resolvamos la ecuación $\log_2(x) + \log_2(x + 2) = 3$. Para ello, usamos las propiedades y obtenemos:

$$\log_2(x \cdot (x + 2)) = 3$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned} x \cdot (x + 2) &= 2^3 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x - 2)(x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $x = 2$ ó $x = -4$.

Observemos ahora que $x = 2$ es solución pues pertenece a los dominios de las funciones $\log_2(x)$ y $\log_2(x + 2)$. Sin embargo, $x = -4$ *no* es solución pues $\log_2(-4)$ no existe.

Supongamos ahora que deseamos resolver la ecuación:

$$3^x = 21.$$

Claramente, la solución es:

$$x = \log_3(21).$$

Sin embargo, en general, no estamos en condiciones de obtener el valor de $\log_3(21)$, por ejemplo, mediante el uso de una calculadora. Este problema lo resuelve el siguiente resultado que nos permite hallar $\log_b(u)$ si $u > 0$ y b es *cualquier* base logarítmica. Este resultado se conoce también como *fórmula de cambio de base*.

Teorema 67 Si $x > 0$ y a, b son números reales positivos diferentes de 1, entonces

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Demostración. Escribamos $y := \log_b(x)$, ó, equivalentemente: $b^y = x$. Entonces; ya que \log_a es una función:

$$\log_a(b^y) = \log_a(x),$$

aplicando propiedades de los logaritmos tenemos:

$$y \log_a(b) = \log_a(x)$$

ó

$$y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

lo que prueba el teorema. ■

Corolario 68 $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}.$

Demostración. Tomar $x = a$ en el teorema anterior y usar el hecho que $\log_a(a) = 1$.

Observación: El teorema anterior no debe confundirse con las siguientes identidades que en general son *falsas*:

$$\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \neq \log_a\left(\frac{x}{b}\right) \quad ; \quad \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \neq \log_a(x - b).$$

Los casos especiales más usados de la fórmula de cambio de base son $a = 10$ (logaritmos comunes) y $a = e$ (logaritmos naturales).

Corolario 69 $\log_b(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(b)} = \frac{\log(x)}{\log(b)}.$

Corolario 70 $\log_b(x) = \frac{\log_e(x)}{\log_e(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$

Ejemplos:

a) Resolvamos la ecuación $3^x = 21$. Para ello, reescribimos como:

$$x = \log_3(21) = \frac{\ln(21)}{\ln(3)}.$$

b) Resolvamos la ecuación $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$. Para ello, reescribimos:

$$5^x - 5^{-x} = 6$$

ó

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6$$

ó

$$5^x \cdot 5^x - 1 = 6 \cdot 5^x$$

ó

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x - 1 = 0$$

ó

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x - 1 = 0.$$

Reconocemos que esta forma de la ecuación es cuadrática en 5^x . Luego,

$$5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

ó

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10}.$$

Observe ahora que $5^x > 0$ pero $3 - \sqrt{10} < 0$, luego:

$$5^x = 3 + \sqrt{10}.$$

“Tomando \log ” en ambos lados:

$$x \log(5) = \log(3 + \sqrt{10}),$$

luego:

$$x = \frac{\log(3 + \sqrt{10})}{\log(5)}.$$

6.4 Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}.$

b) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}.$

c) $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}.$

d) $4^{x-3} = 8^{4-x}.$

e) $e^{(x^2)} = e^{7x-12}.$

- f) $e^{3x} = e^{2x-1}$.
- g) $\log_4(x) = \sqrt[3]{\log_4(x)}$.
- h) $e^{x+\ln(4)} = 3e^{-x}$.
- i) $\log_2(x) + \log_2(x+2) = 3$.
- j) $2^x + 3(2^{x+1} - 5) = 10$.
- k) $\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.
- l) $\log_9 x = \frac{3}{2}$.
- m) $\ln x^2 = -2$.
- n) $e^{2\ln x} = 9$.
- o) $2^{5-x} = 6$.
- p) $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$.
- q) $e^{\ln(x+1)} = 3$.
- r) $10^{2\log x} = 5$.
- s) $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$.
- t) i) $\log x^2 = \log(6-x)$ ii) $2\log x = \log(6-x)$.
- v) i) $\ln(e^x)^2 = 16$ ii) $\ln e^{(x^e)} = 16$.

2. Convierta a la forma logarítmica.

- a) $10^5 = 100000$.
- b) $10^x = y + 1$.
- c) $e^{et} = 3 - x$.
- d) $10^{-2} = 0.01$.
- e) $10^x = 38z$.
- f) $e^{0.1t} = x + 2$.

3. Pase a la forma exponencial.

a) $\log x = 50$.

b) $\ln x = 0.1$.

c) $\ln(z - 2) = \frac{1}{6}$.

d) $\log x = -8$.

e) $\ln x = \frac{1}{2}$.

f) $\ln(t - 5) = 1.2$.

4. Expresé en términos de logaritmos de x , y , z o w .

a) i) $\log_4(xz)$ ii) $\log_4(y/z)$ iii) $\log_4 \sqrt[3]{z}$

b) $\log_a \frac{x^3 w}{y^2 z^4}$

c) $\log \frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

d) $\ln \sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5 z}}$

e) $\ln x \sqrt[3]{\frac{y^4}{z^5}}$

f) $x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$

5. Escriba la expresión como un logaritmo.

a) i) $\log_3 x + \log_3(5y)$ ii) $\log_3(2z) - \log_3 x$ iii) $5 \log_3 y$.

b) $\log_a x + \frac{1}{3} \log_a(x - 2) - 5 \log_a(2x + 3)$.

c) $\log(x^3 y^2) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\frac{x}{y} \right)$.

d) $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln(x^3 y^6) - 5 \ln y$.

e) $\ln y - 4 \ln(1/y) - 3 \ln(xy)$.

f) $\log(x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$.

6. Usar logaritmos naturales para resolver x en términos de y en las siguientes ecuaciones:

a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

c) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

7. Usar logaritmos comunes para resolver x en términos de y en las siguientes ecuaciones:

a) $y = \frac{1}{10^x - 10^{-x}}$.

b) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$.

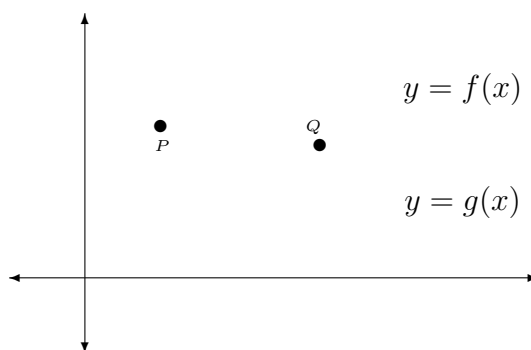
c) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$.

Capítulo 7

Sistemas de Ecuaciones y Matrices

7.1 Sistemas de ecuaciones

Consideremos las gráficas de dos funciones f y g como en la figura siguiente:



En la práctica, en ocasiones hay que encontrar puntos como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$, en donde las gráficas se intersectan. Como $P(a, b)$ está en cada gráfica, el par (a, b) es una *solución* de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$;

esto es:

$$b = f(a) \quad \text{y} \quad b = g(a).$$

Decimos que (a, b) es una solución del *sistema de ecuaciones* (o simplemente *sistema*):

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x), \end{cases}$$

donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse en forma simultánea. Del mismo modo, el par (c, d) es una solución del sistema. *Resolver* un sistema de ecuaciones significa hallar todas las soluciones.

Ejemplo: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

Las gráficas de las ecuaciones son una parábola y una recta.

Realizando una gráfica, es fácil ver que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son soluciones del sistema (Ejercicio para el lector). Sin embargo, deseamos tener una estrategia algebraica que permita encontrar las soluciones. Una de ellas es llamada el *método de sustitución*.

Básicamente, el método de sustitución consiste en los siguientes pasos:

1. Despejar una variable de una de las ecuaciones en términos de otra.
2. Sustituir en la otra ecuación la expresión encontrada en el paso anterior a fin de obtener una ecuación sólo en una variable.
3. Encontrar las soluciones de la ecuación en una variable obtenida en el paso anterior.
4. Reemplazar los valores encontrados en el paso anterior en la ecuación del paso 1, para hallar los valores en la otra variable.
5. Comprobar cada par (x, y) encontrado en el paso 4, en el sistema dado.

Por ejemplo, si consideramos las ecuaciones $y = x^2$ y $y = 2x + 3$ del ejemplo en la introducción, podemos *sustituir* x^2 por y en $y = 2x + 3$ obteniendo:

$$x^2 = 2x + 3$$

ó

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

de donde se obtienen las soluciones $x = -1$ y $x = 3$.

Esto da los valores x de las soluciones (x, y) del sistema. A fin de hallar los valores y correspondientes, podemos usar $y = x^2$ ó $y = 2x + 3$. Con $y = x^2$, resulta

$$\text{Si } x = -1, \text{ entonces } y = (-1)^2 = 1$$

$$\text{Si } x = 3, \text{ entonces } y = 3^2 = 9.$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

Ejemplo: Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Para ello, despejamos x en la segunda ecuación en términos de y :

$$x = 3 - 2y.$$

Sustituimos la expresión de x encontrada, en la primera ecuación del sistema:

$$(3 - 2y) + y^2 = 6$$

ó

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Resolvemos para y la ecuación anterior. Se obtiene:

$$y = 3 \quad , \quad y = -1.$$

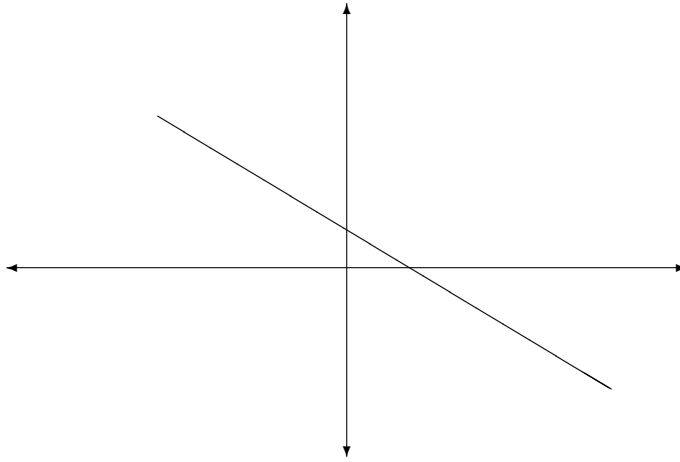
Los anteriores son los únicos valores posibles de y para las soluciones del sistema. Utilizamos ahora la ecuación $x = 3 - 2y$ a fin de hallar los valores de x correspondientes:

$$\text{Si } y = 3 \text{ , entonces } x = 3 - 2 \cdot 3 = -3$$

$$\text{Si } y = -1 \text{ , entonces } x = 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$$

Por lo tanto, las soluciones posibles son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Las gráficas de las ecuaciones (parábola y recta) son las siguientes, donde se muestran los puntos de intersección:



Ejemplo: Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19. \end{cases}$$

Despejamos x^2 de la segunda ecuación:

$$x^2 = 19 - y.$$

Sustituimos en la primera ecuación, obteniendo:

$$(19 - y) + y^2 = 25.$$

Simplificamos y factorizamos, obteniendo:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

ó

$$(y - 3)(y + 2) = 0.$$

Así, los únicos valores posibles de y son: $y = 3$ y $y = -2$. Usamos $x^2 = 19 - y$ con objeto de hallar los correspondientes valores de x :

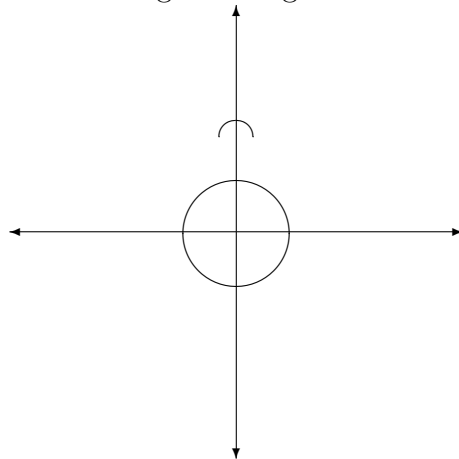
Si $y = 3$, entonces $x^2 = 19 - 3 = 16$. Luego, $x = \pm 4$

Si $y = -2$, entonces $x^2 = 19 - (-2) = 21$. Luego, $x = \pm\sqrt{21}$.

Así, las únicas soluciones posibles del sistema son:

$$(4, 3), \quad (-4, 3), \quad (\sqrt{21}, -2), \quad (-\sqrt{21}, -2).$$

Nótese que la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo con radio 5 y centro en el origen. La gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con un eje vertical. Las gráficas se muestran en la siguiente figura



7.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones en *lineales* y *no lineales*. De un punto de vista algebraico, se estudian preferentemente los sistemas lineales. En esta sección estudiaremos aquellos lineales con sólo dos variables.

Una ecuación $ax + by = c$ (o bien $ax + by - c = 0$), con a y b diferentes de cero, es una ecuación lineal en dos variables x e y . Del mismo modo, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con tres variables x , y y z .

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. Para hallar las soluciones de un sistema lineal podemos usar también el *método de eliminación* que consiste en manipular las ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente de ecuaciones más sencillas, para las cuales podemos hallar sus soluciones con facilidad. Algunas manipulaciones (o *transformaciones*) que llevan a sistemas equivalentes son las siguientes:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar o dividir una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un “múltiplo constante” de una ecuación a otra ecuación.

Se obtiene un “múltiplo constante” de una ecuación al multiplicar *cada* término de la ecuación por la misma constante k distinta de cero.

Ejemplo: Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

A menudo multiplicamos una de las ecuaciones por una constante que nos da el inverso aditivo del coeficiente de una de las variables en la otra expresión. Esto permite sumar ambas ecuaciones y obtener una tercera con una sola variable, como sigue:

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación, obteniendo

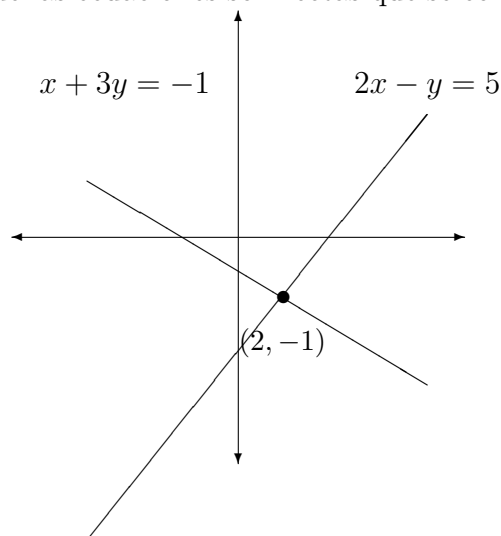
$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15. \end{cases}$$

Sumamos la primera ecuación a la segunda, y obtenemos:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x = 14. \end{cases}$$

Del último sistema vemos que $7x = 14$ ó $x = 2$. Para hallar el correspondiente valor de y , sustituimos x con 2 en $x + 3y = -1$, con lo cual $y = -1$. En consecuencia, $(2, -1)$ es la única solución del sistema.

Las gráficas de las ecuaciones son rectas que se cortan en el punto $(2, -1)$



Observamos que, en general, el método de eliminación suele conducir a soluciones con menos pasos que el método de sustitución analizado en la sección anterior.

Hay tres tipos de situaciones posibles al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables: Hay exactamente una solución, un número infinito de soluciones o no existe solución.

Gráficamente, la primera situación, llamado también *sistema consistente*, corresponde a dos rectas que se intersectan.

La segunda situación, llamado sistema *dependiente y consistente*, corresponde a dos ecuaciones que representan la misma recta; por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

es dependiente y consistente (Ejercicio).

La tercera situación, llamado sistema *inconsistente*, corresponde a dos rectas paralelas. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

no tiene solución o es inconsistente.

Para sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables, podemos usar el método de sustitución o el método de eliminación. El método de eliminación es la técnica más breve y fácil para hallar soluciones. Además lleva a la técnica de matrices que se estudia en la siguiente sección.

7.3 Matrices

Consideremos el problema de resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2, \end{cases}$$

usando el método de eliminación visto en la sección anterior.

Sumando -2 veces la primera ecuación a la segunda, se tiene el mismo

sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 10z &= -5 \\ -3x + 4y - z &= -2. \end{cases}$$

Sumando 3 veces la primera ecuación a la tercera, se tiene

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 10z &= -5 \\ -2y + 8z &= 10. \end{cases}$$

Multiplicamos ahora por $\frac{1}{5}$ la segunda ecuación y por $-\frac{1}{2}$ la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ y - 2z &= -1 \\ y - 4z &= -5. \end{cases}$$

Sumamos -1 vez la segunda ecuación a la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ y - 2z &= -1 \\ -2z &= -4. \end{cases}$$

Las soluciones del último sistema equivalente son fáciles de hallar ahora por sustitución: De la tercera ecuación $z = 2$. Al sustituir z con 2 en la segunda ecuación obtenemos $y = 3$. Finalmente, se obtiene también $x = 4$.

Si analizamos el método de solución del problema anterior, vemos que los símbolos usados para las variables carecen de importancia; debemos tomar en cuenta los *coeficientes* de las variables. Así pues, si utilizamos símbolos distintos en las variables (por ejemplo r, s, t), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t &= 4 \\ 2r + s - 4t &= 3 \\ -3r + 4s - t &= -2. \end{cases}$$

Entonces el método de eliminación puede continuar su curso igual que en el ejemplo. Es posible entonces simplificar el proceso, introduciendo un esquema a fin de seguir los coeficientes en forma tal que no haya necesidad de escribir las variables.

Con referencia al sistema anterior, primero comprobamos que las variables aparezcan en el mismo orden en cada ecuación y que los términos sin variables estén a la derecha de los signos de igualdad. En seguida anotamos los números que intervienen en las ecuaciones como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una ordenación de este tipo se llama *matriz*. Los *reglones* o *filas* de la matriz son los números que aparecen uno a continuación de otro en *sentido horizontal*. Las *columnas* de la matriz son los números que aparecen uno junto a otro en *sentido vertical*.

La matriz obtenida del sistema de ecuaciones lineales del modo anterior es la *matriz del sistema*. Si borramos la última columna, la restante ordenación es la *matriz de coeficientes*. En vista de lo anterior, llamamos también a la matriz del sistema, una *matriz coeficiente aumentada* o *matriz aumentada*.

Ejemplo: Sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y - 4z &= 3 \\ -3x + 4y - z &= -2 \end{cases}$$

Matriz coeficiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -4 & \vdots & 3 \\ -3 & 4 & -1 & \vdots & -2 \end{array} \right)$$

Nótese que en la matriz aumentada introducimos un segmento de línea vertical a fin de indicar donde aparecerían los signos de igualdad en el sistema de ecuaciones correspondiente.

A fin de dar una definición general de matriz, usaremos la siguiente notación para los coeficientes de la matriz:

$$a_{ij}$$

donde i denota el número de fila y j el número de columna.

Definición 71 Sean m, n enteros positivos. Una matriz $m \times n$ es un arreglo de m filas y n columnas de la forma siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right)$$

La expresión $m \times n$ la llamamos *tamaño de la matriz*. Es posible considerar matrices en que los símbolos a_{ij} representen números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos. Cada a_{ij} se llama *elemento de la matriz*. Si $m = n$, hablamos de una *matriz cuadrada de orden n* y los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ son los elementos de la *diagonal principal*.

Ejemplos:

a) Matriz 2×3 : $\left(\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{array} \right)$

$$\text{b) Matriz } 2 \times 2: \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) Matriz } 1 \times 3: \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) Matriz } 3 \times 2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) Matriz } 3 \times 1: \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

El método de eliminación para sistemas de ecuaciones nos da la siguiente definición.

Definición 72 Diremos que dos matrices, del mismo tamaño, son equivalentes si se obtiene una de otra por una o más de las siguientes transformaciones elementales de fila:

- (1) Intercambiar dos filas.
- (2) Multiplicar o dividir una fila por una constante diferente de cero.
- (3) Sumar un múltiplo constante de una fila a otra fila.

Las transformaciones elementales de fila, nos permiten obtener una forma equivalente más sencilla que la original. Estas formas más sencillas son de 3 tipos: *triangular superior*, *triangular inferior* y *diagonal*, como ilustran, respectivamente, los siguientes ejemplos en el caso 3×3 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

7.4 Álgebra de matrices

En esta sección analizamos propiedades de las matrices que son importantes en cursos superiores de matemática. Denotaremos por el símbolo (a_{ij}) una matriz A de orden $m \times n$.

Definición 73 Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ matrices de orden $m \times n$. Entonces

- (1) $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j .
- (2) $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j .

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt[3]{8} & 3^2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Con la notación anterior para matrices, podemos escribir la definición de suma como:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Así, para sumar dos matrices, sumamos los elementos correspondientes de cada matriz. Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen el mismo tamaño.

Ejemplos:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La *matriz nula* $m \times n$, denotada por 0 , es la matriz con m filas y n columnas en que cada elemento es 0 .

El *inverso aditivo* $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $(-a_{ij})$ obtenida al cambiar el signo da cada elemento de A diferente de cero.

El siguiente resultado se deduce de la definición de suma de matrices.

Teorema 74 Sean A , B y C matrices $m \times n$ y sea 0 la matriz nula $m \times n$.

Entonces:

- (1) $A + B = B + A$
- (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (3) $A + 0 = A$
- (4) $A + (-A) = 0$.

La *resta* de dos matrices $m \times n$ está definida por:

$$A - B := A + (-B).$$

Definición 75 El *producto* de un número real c y una matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ es

$$cA = (ca_{ij}).$$

Ejemplo:

$$3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Se puede probar lo siguiente:

Teorema 76 Sean A y B dos matrices $m \times n$ y c , d números reales. Entonces

- (1) $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$
- (2) $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$
- (3) $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$.

La próxima definición del producto AB de dos matrices puede parecer poco común, pero tiene muchos usos en matemática y en aplicaciones prácticas. En la multiplicación A y B pueden ser de tamaños diferentes pero *el número de columnas de A ha de ser el mismo que el número de filas de B* ; por lo tanto, si A es $m \times n$, entonces B debe ser $n \times p$ para algún p . Según veremos, el tamaño de AB es entonces $m \times p$.

Definición 77 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. El producto AB es la matriz $C = (c_{ij})$ de $m \times p$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, p$.

Ejemplo: Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

La matriz A es 2×3 y la matriz B es 3×4 ; por lo tanto, el producto $C = AB$ está definido y es 2×4 .

A fin de obtener el elemento c_{ij} multiplicamos, correspondientemente, los elementos de la i -ésima fila de la matriz A con los elementos de la j -ésima columna de la matriz B . Luego sumamos.

Por ejemplo:

$$c_{23} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2$$

$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8$$

Así, obtenemos:

$$C = \begin{pmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{pmatrix}.$$

Otros ejemplos de productos de matrices son los siguientes. La comprobación queda como ejercicio para el lector.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$$

La operación del producto de matrices *no es conmutativa*; por ejemplo:
 si $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $AB \neq BA$. Observemos también que la última igualdad muestra que *el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser igual a una matriz nula*. Otras propiedades de matrices son las siguientes:

Teorema 78 Si A es $m \times n$, B es $n \times p$ y C es $p \times q$ entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

Teorema 79 Si A_1 y A_2 son $m \times n$ y B_1 y B_2 son $n \times p$ entonces

$$\begin{aligned} A \cdot (B_1 + B_2) &= A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 \\ (A_1 + A_2) \cdot B_1 &= A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_1. \end{aligned}$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n , entonces siempre se cumplen las propiedades asociativa y distributiva.

7.5 Inversa de una matriz

En esta sección y en adelante, restringiremos nuestro estudio a matrices cuadradas. El símbolo I_n denotará la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en cada posición en la diagonal principal y 0 en todas las demás posiciones. La llamamos *matriz identidad de orden n* .

Ejemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n , entonces

$$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A.$$

Cuando trabajamos con un número real b diferente de cero, el número particular b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) se puede multiplicar por b para obtener la identidad multiplicativa (el número 1); es decir

$$b \cdot b^{-1} = 1.$$

Tenemos una situación semejante con matrices.

Definición 80 Sea A una matriz cuadrada de orden n . Si existe una matriz B tal que

$$AB = I = BA$$

entonces B se llama inversa de A y se denota A^{-1} .

Si una matriz cuadrada A tiene una inversa, decimos que A es *invertible*.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; entonces $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Podemos calcular A^{-1} mediante operaciones elementales fila, como sigue:
Comenzamos con la matriz

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A continuación efectuamos transformaciones elementales de reglón hasta que la matriz identidad I_2 aparezca en el lado izquierdo del segmento vertical.

Intercambiamos la primera fila con la segunda ($f_1 \longleftrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Multiplicamos por -3 la primera fila y la sumamos a la segunda fila ($-3f_1 + f_2 \longrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Multiplicamos por $-\frac{1}{7}$ la segunda fila ($-\frac{1}{7}f_2 \longrightarrow f_2$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right)$$

Multiplicamos por -4 la segunda fila y la sumamos a la primera fila ($-4f_2 + f_1 \longrightarrow f_1$)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right)$$

La comprobación que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ queda como ejercicio.

7.6 Ejercicios

1. Use el método de sustitución para resolver el sistema.

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

2. Resuelva el sistema.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+2} = 2 \\ \frac{x-1}{6} - \frac{y+2}{7} = -3 \end{cases}$$

3. Despeje a y b del sistema.

$$\text{a) } \begin{cases} ae^{3x} + be^{-3x} = 0 \\ a(3e^{3x}) + b(-3e^{-3x}) = e^{3x} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ae^{-x} + be^{4x} = 0 \\ -ae^{-x} + b(4e^{4x}) = 2 \end{cases}$$

4. Utilice matrices en la solución del sistema.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases} \quad \text{h) } \begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases} \quad \text{j) } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad \text{l) } \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

5. Encuentre, si es posible, $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Encuentre, si es posible, AB y BA .

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{e) } A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compruebe el enunciado.

$$\text{a) } (A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2, \text{ donde } A^2 = AA \text{ y } B^2 = BB.$$

b) $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$.

c) $A(B + C) = AB + AC$.

d) $A(BC) = (AB)C$.

8. Encuentre la inversa de la matriz, si existe.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Bibliografía

- [1] E. W. Swokowski - J. A. Cole, Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, *International Thomson Editores*, 1997.