Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.
Autor: Axel Silva Fredes.

Teoría de conjuntos

1 Conjuntos.

Definición 1.1. Definimos **conjunto** como una colección de objetos, sin contar orden ni repetición. Estos objetos pueden ser tanto objetos reales como abstractos.
Sea A un conjunto, a los objetos que lo componen los llamaremos **elementos** de A y usaremos la notación:

$$x \in A,$$

para decir que x es un elemento del conjunto A o bien que x pertenece al conjunto A.

Ejemplo 1.1.

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{-2, 1, 5, 8\}$
- $C = \{\text{pato, perro, gato}\}$
- $D = \{\text{inteligencia, sabiduría, maldad}\}$

Observación. El paréntesis $\{\}$ es la notación que usaremos para determinar un conjunto.

Observación. En la definición anterior dice "sin contar orden ni repetición", esto lo podemos explicar con el siguiente ejemplo:

$$A = \{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 2, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 3, 1\} = \{2, 1, 3\}$$

Observación. Sea A un conjunto y x un objeto cualquiera, podemos tener dos casos, que x sea un elemento de A o que no lo sea, por lo tanto $x \in A$ es un predicado. Cuando se tiene bien definido quien es x y el conjunto A tenemos una proposición, por lo tanto podemos negarla, así tenemos la siguiente notación para decir que x no es un elemento de A:

$$\sim (x \in A) = x \notin A.$$

Para definir conjuntos existen dos maneras:

i) **Conjuntos definidos por extensión**:

Se expresa de forma explícita todos los elementos que componen un conjunto:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{a, e, o, u\}$

ii) **Conjuntos definidos por comprensión**:

Se expresa dando algún criterio o condición cuales deben ser los elementos de un conjunto:

- $A = \{x : (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 7)\}$.
- $B = \{x : (x \text{ es par}) \wedge (1 < x < 11)\}$.
- $C = \{x : (x \text{ es una vocal }) \wedge (x \neq i)\}$

Definiendo los conjuntos por comprensión, como se hizo anteriormente, se pueden llegar a ciertas inconsistencias, por ejemplo, definamos el conjunto R como:

$$R = \{x : -5 < x < 3\}.$$

¿Qué es x?.Para solucionar lo anterior, es necesario definir dónde está contenido R, para eso podemos usar, por ejemplo, lo siguiente:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in \mathbb{N} : -5 < x < 3\} \\ R_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : -5 < x < 3\} \\ R_3 &= \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 3\} \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, R_1 es el conjunto de los números naturales que cumplen la condición de ser mayores que -5 y menores que 3. R_2 es el conjunto de números enteros que cumplen la misma condición y R_3 lo mismo pero para números reales.
Cabe destacar que estos 3 conjuntos son distintos:

$$\begin{aligned} &R_1 = \{1, 2\}. \\ &R_2 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}. \\ &R_3 =]-5, 3[\text{ (intervalo abierto)}. \end{aligned}$$

Definición 1.2. Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es subconjunto de B, denotado por $A \subset B$, si y sólo si, todo elemento de A es un elemento de B, es decir:

$$A \subset B \iff \forall x \in A : x \in B$$

Ejemplo 1.2.

i) Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ C &= \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

con lo anterior se tiene que $A \subset B$ y $C \subset B$.

ii) Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 6k\big)\} \\ E &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists r \in \mathbb{Z} : x = 2r\big)\} \end{aligned}$$

Probemos que $D \subset E$. Sea $x \in D$, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 6k$. Para probar que x es también un elemento de E, basta con encontrar un $r \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2r$, pero como $x = 6k = 2 \cdot 3k = 2 \cdot (3k)$, basta con tomar $r = 3k$, el cual es un número entero ya que k es un número entero. Como x es un elemento arbitrario de D, podemos decir que todo elemento de D cumplirá que también lo es de E, por lo tanto $D \subset E$.
Se puede analizar también de la siguiente manera: D es el conjunto de todos los números naturales múltiplos de 6 y E es el conjunto de todos los números naturales que son múltiplos de 2 o en otras palabras, el conjunto de todos los números naturales pares. Ahora, todo múltiplo de 6 es un número múltiplo de 2 (de hecho un múltiplo de 6 son aquellos múltiplos de 2 y 3 al mismo tiempo), por lo tanto todo múltiplo de 6 es un número par, por lo tanto $D \subset E$.

Usando el mismo razonamiento que se usó con la pertenencia, podemos decir que $A \subset B$ es una proposición, por lo tanto podemos negarla, definiendo así:

$$A \not\subset B \iff \sim (\forall x \in A : x \in B) = \exists x \in A : x \notin B.$$

En matemática existe un concepto llamado Axioma, la cual es una afirmación que se considera verdadera sin necesidad de ser demostrada, ya que se toma como un principio o regla fundamental que se acepta sin necesidad de justificación. Algunos ejemplos, relacionados con teoría de conjunto son:

i) **Axioma de extensión** : Dos conjuntos A y B son iguales, si y solo si tienen los mismos elementos.
$$A = B \iff \forall x : \big(x \in A \iff x \in B\big).$$

ii) **Axioma de reflexividad** Todo elemento es igual a si mismo.
$$\forall x : (x = x).$$

iii) **Axioma del infinito** Existe un conjunto infinito.

Y queda aún una gran lista de axiomas que dan la base para la matemática. Pero hay un axioma muy relevante en la teoría de conjuntos que es el siguiente:

Axioma de especificación: Sea A un conjunto y $p(x)$ un predicado. Existe un conjunto B tal que $B \subset A$ el cual se puede definir como :

$$B = \{x \in A : p(x)\}.$$

Este axioma nos da a entender, que sea cual sea el predicado que nos definamos en un conjunto A, siempre podremos generar un subconjunto de A, donde todos los elementos cumplan el predicado $p(x)$.

Ejemplo 1.3. Sea $A = \mathbb{R}$ y los predicados:

- $q(x) : x < 3$
- $r(x) : x^2 > 5$
- $t(x) : \big(\exists k \in \mathbb{N} : x = 5k - 2\big)$

Entonces existen subconjuntos de A tal que:

- $B_1 = \{x \in A : x < 3\}$
- $B_2 = \{x \in A : x^2 > 5\}$
- $B_3 = \{x \in A : \big(\exists k \in \mathbb{N} : x = 5k - 2\big)\}$

Ahora, la definición de un predicado es arbitraria, sin restricciones, por lo tanto podemos definir lo siguiente: Sea A un conjunto y un predicado $p(x)$ definido por

$$p(x) : x \neq x,$$

usando el axioma de especificación podemos definir un conjunto $B \subset A$ tal que:

$$B = \{x \in A : x \neq x\}.$$

El problema aquí es que, gracias al axioma de reflexividad, podemos asegurar que todo elemento es igual a si mismo, entonces el conjunto B definido antes no tiene elementos, pero existe, así podemos definir:

$$B = \{x \in A : x \neq x\} = \emptyset,$$

el cual llamamos **conjunto vacío.**

Observación. No es la única manera de definir el conjunto vacío, ya que solo debemos usar algún predicado inconsistente. Lo que es importante, es entender que el conjunto vacío es aquel conjunto que no tiene elementos.

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$$

Proposición 1.1. *Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $\emptyset \subset A$.*

Demostración: Por contradicción. Supongamos que $\emptyset \not\subset A$. Usando la definición de antes:

$$\emptyset \not\subset A \iff \exists x \in \emptyset : x \notin A,$$

lo cual es una contradicción, ya que estaríamos asumiendo que $\emptyset$ contiene un elemento, lo cual es falso. □

2 Operatoria

Definición 2.1. Sean A y B dos conjuntos. Se define la **intersección de A con B** como el conjunto:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Es decir:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B.$$

Observación. En la definición usamos un conjunto U. Eso lo hacemos, ya que como vimos antes, al definir un conjunto por comprensión, es necesario definir un conjunto "global" el cual contenga todo lo que se va a trabajar. Este conjunto U lo llamamos **conjunto universo** y además $A \subset U$ y $B \subset U$.

La intersección entre A y B es el conjunto que contiene a todos los elementos que están en A y en B simultáneamente.

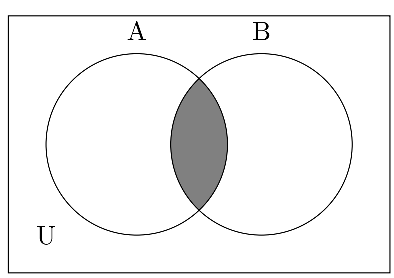
Ejemplo 2.1. Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned}
A &= \{-5, -2, 0, 7, 8, 51, 120\} \\
B &= \{x \in \mathbb{R} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k\big)\} \\
C &= \{x \in \mathbb{Z} : (-3 < x < 5) \wedge (x \text{ es par })\}
\end{aligned}$$

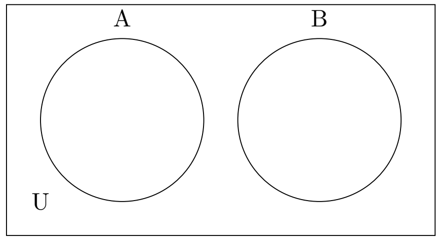
entonces:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{-5, 0, 120\} \\
A \cap C &= \{-2, 0\} \\
B \cap C &= \{0\}
\end{aligned}$$

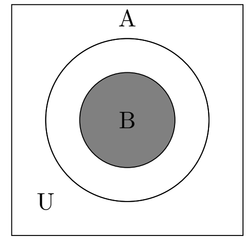
Una forma de representar la intersección entre dos conjuntos, es usando un diagrama de Venn-Euler.



Claramente ésta no es la única representación que se puede hacer:



$A \cap B = \emptyset$



$A \cap B = B$

Propiedades:

i)

$$\begin{aligned} A \cap A &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in A\} \\ &= \{x \in U : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in U : x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} A \cap U &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in U\} \\ &= \{x \in U : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in \emptyset\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

v)

$$A \subset B \implies A \cap B = A.$$

vi)

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x \in U : x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} \\ &= A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

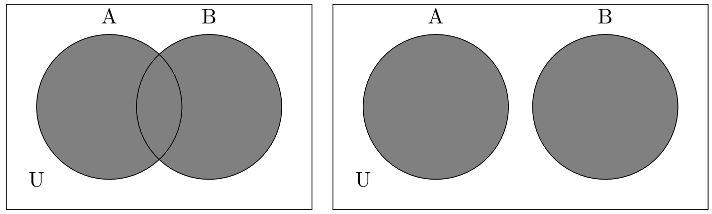
Observación. Todas las propiedades anteriores, y muchas de las que vienen más adelante, son demostradas usando las propiedades de lógica ya vistas.

Definición 2.2. Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión de** A **con** B como el conjunto:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$

Es decir:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B.$$



Caso $A \cap B \neq \emptyset$ Caso $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo 2.2. Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned}
A &= \{-5, -2, 0, 7, 8\} \\
B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k\big) \wedge \big(x \leq 28\big)\} \\
C &= \{x \in \mathbb{Z} : (-3 < x < 5) \wedge (x \text{ es impar })\}
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{-5 - 2, 0, 5, 7, 8, 10, 15, 20, 25\} \\
A \cup C &= \{-5, -2. - 1, 0, 1, 3, 7, 8\} \\
B \cup C &= \{-1, 1, 3, 5, 10, 15, 20, 25\}
\end{aligned}$$

Propiedades:

i)

$$\begin{aligned}
A \cup A &= \{x \in U : x \in A \vee x \in A\} \\
&= \{x \in U : x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in U : x \in A \vee x \in B\} \\
&= \{x \in U : x \in B \vee x \in A\} \\
&= B \cup A
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
A \cup U &= \{x \in U : x \in A \vee x \in U\} \\
&= \{x \in U : x \in U\} \\
&= U
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
A \cup \emptyset &= \{x \in U : x \in A \vee x \in \emptyset\} \\
&= \{x \in U : x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}$$

v)

$$A \subset B \implies A \cup B = B.$$

vi)

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cup C) &= \{x \in U : x \in A \vee x \in (B \cup C)\} \\
&= \{x \in U : x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \in U : x \in A \vee B \vee x \in C\} \\
&= A \cup B \cup C.
\end{aligned}
$$

Otra propiedad importante, la cual involucra tanto unión como intersección es la propiedad distributiva:

i)

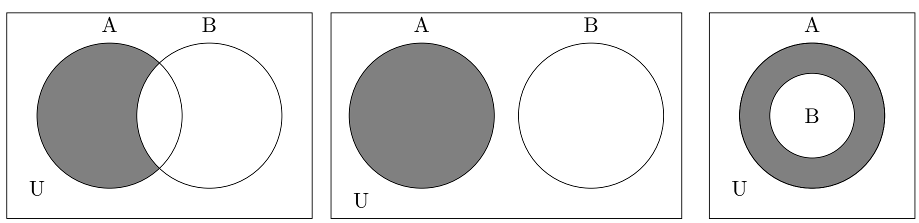
$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in (B \cup C)\} \\
&= \{x \in U : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \in U : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\
&= \{x \in U : x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \in U : x \in A \vee x \in (B \cap C)\} \\
&= \{x \in U : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\} \\
&= \{x \in U : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\} \\
&= \{x \in U : x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Definición 2.3. Sean A y B conjuntos. Se define la **diferencia** entre A y B como el conjunto:

$$A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



$A - B = A$

Ejemplo 2.3. Sean los conjuntos:

$$
\begin{aligned}
A &= \{-5, -2, 0, 7, 8\} \\
B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k\big) \wedge \big(x \leq 28\big)\} \\
C &= \{x \in \mathbb{Z} : (-3 < x < 5) \wedge (x \text{ es par })\}
\end{aligned}
$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
A - B &= \{-5, -2, 0, 7, 8\} \\
A - C &= \{-5, 7, 8\} \\
B - C &= \{5, 10, 15, 20, 25\} \\
B - A &= \{5, 10, 15, 20, 25\} \\
C - A &= \{-1, 2, 3, 4\} \\
C - B &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$

Como se ve en el ejemplo anterior, la diferencia no es un operador conmutativo, es decir, en general se cumple que:

$$A - B \neq B - A.$$

Propiedades:

i)

$$\begin{aligned} A - A &= \{x \in U : x \in A \wedge x \notin A\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} A - \emptyset &= \{x \in U : x \in A \wedge x \notin \emptyset\} \\ &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in U\} \\ &= \{x \in U : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

iii)

$$A - B = A \iff A \cap B = \emptyset$$

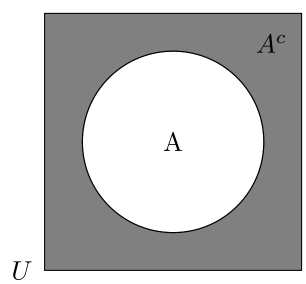
Definición 2.4. Sea A un conjunto. Se define el **complemento de** A **con respecto al universo** U, o solamente el **complemento de** A, como el conjunto:

$$U - A = \{x \in U : x \in U \wedge x \notin A\} = \{x \in U : x \notin A\}$$

Así:

$$x \in A^c \iff x \notin A$$

Observación. Se usará la notación A^c para hablar del complemento del conjunto A, es decir $A^c = U - A$.



Propiedades:

i)

$$\begin{aligned} (A^c)^c &= \{x \in U : x \notin A^c\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A^c)\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \notin A)\} \\ &= \{x \in U : x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x \in U : x \in A \vee x \in A^c\} \\ &= \{x \in U : x \in U\} \\ &= U \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} A \cap A^c &= \{x \in U : x \in A \wedge x \notin A\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} A \cap B^c &= \{x \in U : x \in A \wedge x \in B^c\} \\ &= \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= A - B \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \emptyset^c &= \{x \in U : x \notin \emptyset\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in \emptyset)\} \\ &= \{x \in U : x \in U\} \\ &= U \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} U^c &= \{x \in U : x \notin U\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in U)\} \\ &= \{x \in U : x \in \emptyset\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

vii)

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= \{x \in U : x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A \cap B)\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B)\} \\ &= \{x \in U : x \notin A \vee x \notin B\} \\ &= \{x \in U : x \in A^c \vee x \in B^c\} \\ &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

viii)

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x \in U : x \notin A \cup B\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A \cup B)\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A \vee x \in B)\} \\ &= \{x \in U : \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)\} \\ &= \{x \in U : x \notin A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in U : x \in A^c \wedge x \in B^c\} \\ &= A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Las propiedades vii) y $viii$) son conocidas como **las leyes de De Morgan para conjuntos.**

Definición 2.5. Sean A y B conjuntos. Se define el **producto cartesiano entre A y B** como el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

(a, b) se le llama par ordenado, así podemos decir que $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados donde la primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

Ejemplo 2.4. Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{-2, 0, 7\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} : (-1 < x \leq 2) \wedge (x \text{ es par })\} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(-2, 0), (0, 0), (7, 0), (-2, 2), (0, 2), (7, 2)\} \\ B \times A &= \{(0, -2), (0, 0), (0, 7), (2, -2), (2, 0), (2, 7)\} \end{aligned}$$

Una propiedad importante del producto cartesiano es la siguiente: Sean A, B, C y D cuatro conjuntos, tales que $A \subset C$ y $B \subset D$ entonces se tiene que:

$$A \times B \subset C \times D.$$

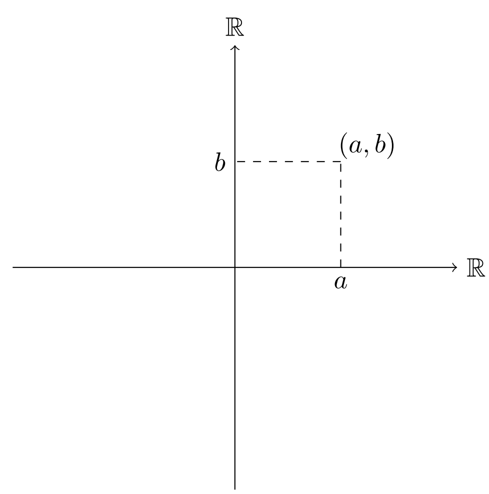
Observación. Sea A un conjunto, entonces $A \times A$ lo denotaremos por A^2. De la misma manera, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, usaremos la notación.

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{veces}} = A^n$$

La notación anterior nos permite definir, por ejemplo, $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Pero, ¿qué es $\mathbb{R}^2$?. $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden generar con números reales. Lo podemos representar de manera gráfica con el **plano cartesiano:**



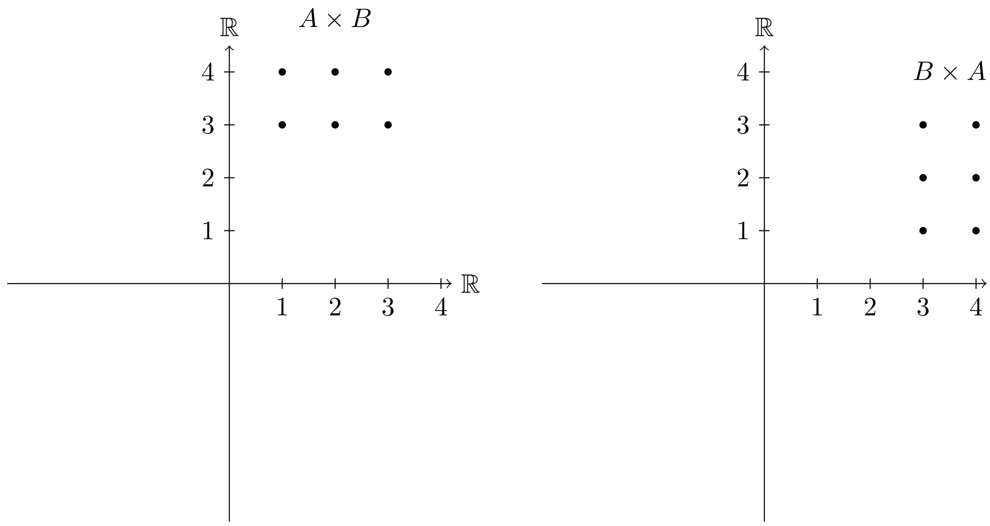
Lo que muchos creerían, es que en este plano no hay "puntos marcados", pero en realidad, el plano cartesiano es la colección de todos los puntos (a, b) (imaginen que todos los puntos están pintados de blanco).

Usando la propiedad mencionada con anterioridad, sean A y B dos conjuntos tales que $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$, se tiene que $A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Por lo tanto podemos usar el plano cartesiano para representar algunos productos cartesianos (pintaremos de negro los puntos que estaban pintados de blanco, para resaltar).

Ejemplo 2.5. Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 4\}$$

Entonces se tiene que:



Con lo anterior, podemos notar que el producto cartesiano tampoco es un operador conmutativo, es decir, en general se tiene que :

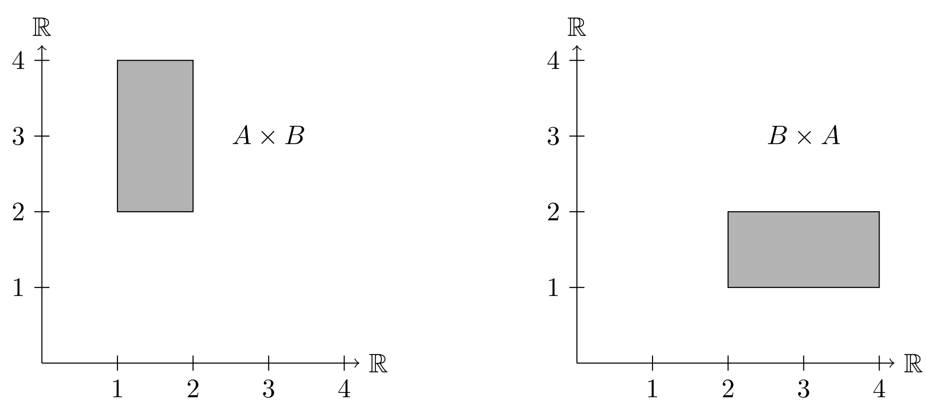
$$A \times B \neq B \times A.$$

Acá presentamos ejemplos de productos cartesianos finitos (cantidad finita de elementos), pero veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6. Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\}$$

Con estos conjuntos tenemos:



Propiedades:

i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

iv) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

v) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

3 Cardinalidad

Definición 3.1. Definimos la **cardinalidad** de un conjunto, como la cantidad o número de distintos elementos en él. Sea A un conjunto, usaremos la notación $n(A)$ para determinar su cardinalidad.

Ejemplo 3.1. Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{-5, -2, 0, 7, 8, 15\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k\big) \wedge \big(x \leq 28\big)\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} : (-3 < x < 5) \wedge (x \text{ es impar })\} \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} n(A) &= 6 \\ n(B) &= 5 \\ n(C) &= 3 \end{aligned}$$

Observación. Como vimos antes, $n(\emptyset) = 0$.

De los axiomas vistos anteriormenete, estaba el axioma del infinito, el cual nos asegura que existe un conjunto W tal que $n(W) = \infty$. De aquí en adelante, trabajaremos con conjuntos finitos, los cuales están dados por:

$$A \text{ es finito} \iff n(A) \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.2. Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A y B son **disjuntos entre sí**, si:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Ejemplo 3.2. Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{-2, 0, 7, 8\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : \big(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k\big) \wedge \big(x \leq 28\big)\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} : (-3 < x < 5) \wedge (x \text{ es par })\} \end{aligned}$$

Con los ejemplos anteriores se tiene que A y B son disjuntos, B y C también lo son, pero A y C no son conjuntos disjuntos.

Proposición 3.1. *Sean A y B dos conjuntos disjuntos, entonces:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Demostración: La demostración escapa a los contenidos del curso. $\square$

Ejemplo 3.3. Sean los conjuntos:

$$A = \{-2, 0, 3, 5, 8\}$$
$$B = \{-5, -3, -1, 1, 7, 10\}$$

se tiene que:

$$A \cup B = \{-5, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 8, 10\}$$

y con eso:

$$n(A \cup B) = 11 = 5 + 6 = n(A) + n(B).$$

Observación. La proposición se cumple solo para conjuntos disjuntos: $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$ nos lleva a $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ de donde $n(A) + n(B) = 4$.

Proposición 3.2. *Sean A y B conjuntos, entonces:*

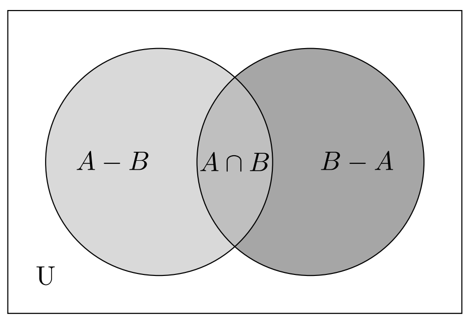
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Demostración: La proposición nos dice que sea cual sean los conjuntos, la cardinalidad de su unión es igual a la suma de sus cardinalidades por separado menos la cardinalidad de su intersección.

- Caso $A \cap B = \emptyset$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) - n(B) - 0 = n(A) + n(B).$$

- Caso $A \cap B \neq \emptyset$.
  Solo conocemos una fórmula para la cardinalidad de la unión de conjuntos disjuntos, por lo tanto, debemos convertir $A \cup B$ en unión de conjuntos disjuntos, para eso veamos el siguiente diagrama:



Podemos notar que

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A),$$

de donde $(A - B)$, $(A \cap B)$ y $(B - A)$ son todos conjuntos disjuntos entre sí, por lo tanto, usando la proposión 3.1:

$$n(A \cup B) = n\Big((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)\Big) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A).$$

De la misma manera que en la unión, podemos "disjuntar" A de la siguiente forma:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

usando la proposición tenemos que:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B),$$

y así:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B).$$

De la misma manera se obtiene que $n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$.
Volviendo a lo que queremos demostrar, se tiene que:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ &= n(A) - \cancel{n(A \cap B)} + \cancel{n(A \cap B)} + n(B) - n(B \cap A) \\ &= n(A) + n(B) - n(B \cap A) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Observación. Sean A, B y C tres conjuntos, podemos extender la fórmula a:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Proposición 3.3. *Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces:*

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

4 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 4.1. Probar las siguientes igualdades, usando propiedades de conjuntos:

i) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$.

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

ii) En una encuesta realizada a 100 alumnos que hablan varios idiomas se obtuvo la siguiente información :

- exactamente 28 personas hablan Español,
- exactamente 30 personas hablan Alemán,
- exactamente 42 personas hablan Francés,
- exactamente 8 personas hablan Español y Alemán,
- exactamente 10 personas hablan Español y Francés,
- exactamente 5 personas hablan Alemán y Francés,
- exactamente 3 personas hablan los tres idiomas.

¿Cuántos no hablan ninguno de esos idiomas, y cuántos hablan exclusivamente Francés (de esos tres idiomas) ?
Definamos los conjuntos:

E={Alumnos que hablan español}

A={Alumnos que hablan alemán}

F= {Alumnos hablan francés}

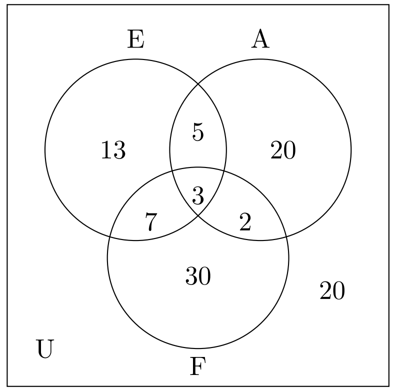
Por la encuesta tenemos

(a) $n(E \cap A \cap F) = 3, \quad n(A \cap F) = 5,$
(b) $n(E \cap F) = 10, \quad n(E \cap A) = 8,$
(c) $n(F) = 42, \quad n(A) = 30, \quad n(E) = 28.$

Sustituyendo eso en la fórmula obtenemos

$$\begin{aligned} n(A \cup E \cup F) =& n(A) + n(E) + n(F) - n(A \cap E) - n(E \cap F) - n(A \cap F) + n(A \cap E \cap F) \\ &= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 \\ &= 80. \end{aligned}$$

(a) Hay exactamente $100 - 80 = 20$ alumnos que no hablan los 3 idiomas.
(b) Hay exactamente $n(F) - n(A \cap F) - n(E \cap F) + n(A \cap E \cap F) = 42 - 5 - 10 + 3 = 30$ alumnos que solamente hablan Frances (de esos tres idiomas).



iii) Sean A y B dos conjuntos definidos por:

$$A = \{x \in [-50, 50] \mid (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 7k)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 100) \wedge (\forall r \in \mathbb{N} : x + r \geq 41) \wedge (\exists r \in \mathbb{N} : x = 12r + 4)\}.$$

Determine A y B de forma explícita y determine $A \cap B$.

A es el conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ con $-50 \leq x \leq 50$ tal que x es un múltiplo de 5 y a la vez un múltiplo de 7. Por lo tanto:

$$A = \{-35, 0, 35\}.$$

Por otro lado, B es el conjunto de todos los números naturales tal que son menores o iguales a 100 ($\{1, 2 \ldots, 100\}$), al sumarle cualquier número natural siempre el resultado es mayor o igual que 41 ($\{40, 41, \ldots 100\}$) y también se pueden escribir de la forma $12r + 4$ para algún número natural r ($\{16, 28, \ldots 100\}$). Así, podemos escribir el conjunto B como:

$$B = \{40, 52, 64, 76, 88, 100\}.$$

Por último, se tiene que:

$$A \cap B = \emptyset.$$

iv) Sean A, B, y C conjuntos tales que $n(A) = 10$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 5$ y $n(B \cap C) = 8.$. Determine el valor de $n((A \cap B^c) \cup (B \cap C^c))$.

Primero determinaremos $n(A \cap B^c)$ y $n(B \cap C^c)$.

- $n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 10 - 5 = 5.$
- $n(B \cap C^c) = n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 15 - 8 = 7.$

Con lo anterior:

$$\begin{aligned}
n((A \cap B^c) \cup (B \cap C^c)) &= n(A \cap B^c) + n(B \cap C^c) - n((A \cap B^c) \cap (B \cap C^c)) \\
&= 5 + 7 - n(A \cap B^c \cap B \cap C^c) \\
&= 12 - n(A \cap \emptyset \cap C) \\
&= 12 - n(\emptyset) \\
&= 12 - 0 \\
&= 12
\end{aligned}$$