Tutoría 10 - 2/2021:

Cachorr@404

Cálculo 2 - Preparación PEP 2 y POR

CACHORR@ 404

Tutores para esta sesión

Constanza Palomo

constanza.palomo@usach.cl

Bastián Onetto

bastian.onetto@usach.cl

Bastián Loyola

bastian.loyola@usach.cl

Temario

Series

1

Series de potencias

2

Ejercicios

3

CACHORR@ 404

Series

01

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
S_n &={}_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n
\end{aligned}
$$

Sucesiones

Es una lista de números en un orden dado, este orden o patrón es llamado comportamiento de la sucesión y puede ser descrito

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

Son una especie de función cuyo dominio está en los enteros positivos, donde se puede obtener el valor de an, reemplazando el valor de n en la función dada, existen las sucesiones infinitas que contemplan a todos los valores de los enteros positivos.

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{n-1}{n}, \quad d_n = (-1)^{n+1},$$

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}.$$

Convergencia y divergencia

Se habla de convergencia si a medida que se aumenta el valor de n, la sucesión tiende a cierto valor, como por ejemplo la sucesión

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

Por lo tanto podríamos encontrar el valor si sigue hasta el infinito, de igual forma, como cuando se utilizaba el límite de una función

Por el otro lado existirán aquellas sucesiones que divergen que son lo contrario, estas no se acercan a un punto como tal.

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

Recursivas

Son aquellas sucesiones que cierto valor n depende de uno anterior dígase n-1 o n-2, se debe definir como menos el primer valor de la sucesión.
ejemplo:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{72}{1 + a_n}$$

Series

Las series son básicamente la sumatoria de los valores de una sucesión, estas pueden ser representadas de igual forma como una sucesión, que contendrá en sus valores la n-ésima suma, para esto se debería encontrar nuevamente el patrón
Por ejemplo la sucesión
an = 1/n
Si determinamos su serie seria
1+½+⅓+¼+...+1/n, desde la cual se tiene que la n-ésima suma será:

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Al igual que las sucesiones pueden ser finitas o infinitas, tener cierta convergencia en un punto.

Los principales problemas de Series

Cuando se esté hablando de series, principalmente se verificarán dos cosas

1- Es convergente o divergente.

2-Si es convergente a que numero converge

Ambos problemas se pueden verificar mediante la aplicación de límites y de ciertos criterios

Series Geométricas

Existen distintos tipos de series según las caracteristicas de cada uno de sus sumandos, una de ellas son las series geométricas que tienen la siguiente forma:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Donde r es una razón, como ½ , ⅓ , −⅖ , entre otras.

Criterios para convergencias/divergencia

Estos son:

- Criterio de la integral
- Criterio de divergencia
- Criterio de comparación
- Criterio de comparación al limite
- Criterio de la razón (D’ Alembert)
- Criterio de la raíz
- Criterio de la serie alternada

Criterio de la integral

- Para una función f continua, positiva y decreciente, ocurrirá lo siguiente: Si la integral de la serie an converge, la serie an converge.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \ \text{E} \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx \ \text{SON AMBAS CONV. O DIVERG.}$$

Criterio de divergencia

- SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES CONVERGENTE SE TIENE QUE $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- SI $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, ENTONCES LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES DIVERGENTE.

Serie P

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^{p}}$$

ES CONTÍNUA, DECRECIENTE Y POSITIVA

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{p}} \begin{cases} \text{CONVERGE SI } P > 1 \\ \text{DIVERGE SI } P \leq 1 \end{cases}$$

Criterio de comparación

SEAN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, DOS SERIES DE TÉRMINO
POSITIVOS, TAL QUE $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N$, $N \in \mathbb{R}$
SE TIENE QUE:

- SI $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ES CONVERGENTE, ENTONCES

  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES CONVERGENTE.

- SI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES DIVERGENTE, ENTONCES

  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ES DIVERGENTE.

Criterio de comparación al límite

SEAN $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, DOS SERIES POSITIVAS,

SE OBTIENE EL LÍMITE

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- SI $K \neq 0$, LAS SERIES $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ POSEEN IGUAL CONVERGENCIA
- SI $K = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE, ENTONCES $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES CONVERGENTE

Criterio de la razón

DADA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DE TÉRMINOS POSITIVOS,

SE OBTIENE EL LÍMITE

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

SE TIENE QUE:

- SI $L < 1$, LA SERIE ES CONVERGENTE
- SI $L > 1$, LA SERIE ES DIVERGENTE
- SI $L = 1$, EL CRITERIO NO ENTREGA INFORMACIÓN.

Criterio de la raíz

DADA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DE TÉRMINOS POSITIVOS,

SE OBTIENE EL LÍMITE :

$$L = \lim_{n \to \infty} (a_n)^{1/n}$$

- SI $L < 1$, LA SERIE ES CONVERGENTE
- SI $L > 1$, LA SERIE ES DIVERGENTE
- SI $L = 1$, EL CRITERIO NO ENTREGA INFORMACIÓN.

Criterio de la serie alternada

SEA LA SERIE ALTERNADA

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, CON $a_n \geq 0$. SI a_n ES DECRECIENTE Y CONVERGENTE A CERO, LA SERIE ALTERNADA ES CONVERGENTE.

SI LA SERIE ALTERNADA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ CONVERGE Y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE, LA SERIE ALTERNADA ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

SI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE, LA SERIE ALTERNADA ES CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

Series de potencia

02

Series de Potencia

Una serie de potencia es aquella que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Vistas como funciones, tienen un comportamiento bueno, en el sentido de que son funciones continuas y derivables de cualquier orden. En ocasiones, estas pueden verse de la siguiente manera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} fn(x), \quad n \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}$$

Todas estas deben cumplir el que sean convergentes en un intervalo [a,b], ya sea uniformemente o en puntos

Propiedades de Series de Potencia

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} fn(x)$ que converge uniformemente, cumple las siguientes propiedades:

- si F es continua en x_0 en [a,b], entonces f es continua en x_0
- $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b fn(x)$ CONVERGE A $\int_a^b fn(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} fn'(x) = f'(x)$ con una derivada continua en [a,b]

Teorema (Determinar el radio de convergencia)

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ y suponga que el siguiente límite existe

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

Entonces $F(x)$ tiene radio de convergencia $R = r^{-1}$ ($R = \infty$ si $r = 0$ y $R = 0$ si $r = \infty$).

Series De Taylor / Maclaurin

Para series del tipo: $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Debemos saber que su intervalo y "Radio" de convergencia se determina de la siguiente forma

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|$$

$$= |x-c| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{, DONDE:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$$, R ES RADIO DE CONVERGENCIA.

=>

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|x-c|}{R} < 1$$

$$|x-c| < R$$

$$-R < |x-c| < R$$

$$c-R < x < c+R$$

Series de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(c)(x-c)^{n}}{n!}$$

$$f(x) = \frac{f'(c)(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)(x-c)^{2}}{2!} + \dots$$

Esta tiene un error de aproximación dado por:

$$\frac{f^{(n+1)}(c)(x_0-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Series de Maclaurin

Las series de maclaurin son simplemente un caso específico de series de Taylor, donde el centro se encuentra en 0, por lo que C = 0.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

ES DECIR:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ejercicios

CACHORR@ 404

Ejercicio 1

Verificar si la siguiente serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

Verificar si la siguiente serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

$$a_n = \frac{n^3}{2^n}$$

$$n \leq n^2 / (\ )^3$$

$$\boxed{\frac{n^3}{2^n} \leq \frac{n^5}{2^n}} \quad \frac{1}{2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{(n+1)}}$$

...

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{(n+1)}}}{\frac{n^3}{2^n}} \right| = ¿L?$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^n (n+1)^3}{2^{(n+1)} \cdot n^3} \right| \qquad 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{2^n} (n+1)^3}{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot n^3} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^3}{2 \cdot n^3} \right| = \frac{1}{2} \left(\left| \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3} \right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} \left| \underset{1}{\frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}} + \underset{\frac{3}{n}}{\frac{3n^2}{n^3}} + \underset{\frac{3}{n^2}}{\frac{3n}{n^3}} + \underset{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} \right|\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \cancel{\frac{3}{n}} + \cancel{\frac{3}{n^2}} + \cancel{\frac{1}{n^3}} \right|\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + 0 + 0 + 0\right) = \frac{1}{2} = L$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 2

Pregunta 2: Considere la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1}$$

- Encuentre el radio e intervalo de convergencia

Pregunta 2: Considere la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1}$$

icha:

$-1 \cdot$ algo

$1 \cdot$ algo.

- Encuentre el radio e intervalo de convergencia

$$a_n = \left| (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1} \right|$$

$$a_{n+1} = \left| (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n+2}\right) \cdot x^{n+2} \right|$$

Por crit. de la razón necesitamos que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^{n+2}} \right| = |x|$$

Por crit. de la razón ...

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n!}+\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^{n+2}}\right| = |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)+(n+1)!}{(n+1)(n+2)+n!(n+2)}\cdot|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(n+2)}{(n+1)!}+1\right)\cancel{(n+1)!}}{\frac{n}{n}\left(\frac{n+2}{n!}+\frac{n+2}{n+1}\right)\cancel{(n+1)!}}\cdot|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+1)!}}+1}^{2}}{\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n!}}+\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}}}\cdot|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}\cdot|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot|x|}{}$$

$$(n+1)! \to (n!)\cdot(n+1)$$

$$\to (n-1)!\,(n)\,(n+1)$$

$$= |x| < 1$$

$$= \boxed{-1 < x < 1}$$

$$= R = 1$$

¿?

$$]-1, 1[$$

Si $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1) \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1}\right) = ???? ¿¿¿¿ ???? ¿¿¿ ??$$

$= $ por criterios de serie armónica, en $x=-1$ diverge.

$$\frac{1}{\infty}$$

Si $x=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{\boxed{n!}} + \frac{1}{n+1}\right)$$

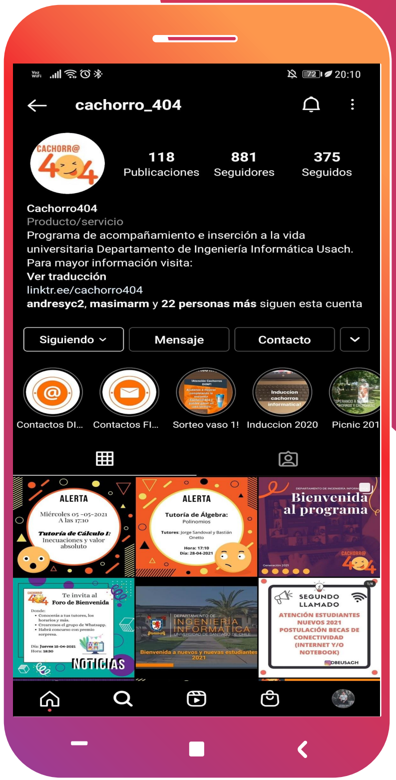
$$\underbrace{(-1)^n \underbrace{\left(\quad\right)}_{a_n}}$$

$$(-1)^n \to \cancel{(-1)}^{n+1} = 1$$

a_n converge

Síguenos en instagram!

@cachorro404



¡Gracias por asistir!

Agradecimientos a Ricardo Carvajal Barrios