Un *polinomio de Laurent* en una variable x es una función real racional que se puede escribir de la forma $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k$ con $m \leq n$ dos numeros enteros y a_k un numero real para cada $k \in \{m, \ldots, n\}$. Una tal representación es única (se puede mostrar), y por tanto hace sentido hablar de a_k como *el coeficiente del monomio de grado* k. El coeficiente a_0 llamamos *coeficiente constante*.

La adición y multiplicación entre polinomios de Laurent resulta otra vez en una función real racional que es un polinomio de Laurent (muy facil a ver).

Problema 1.

i) Calcule una formula cerrada de

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \left(\frac{1}{\ell+2} - \frac{1}{\ell} \right).$$

ii) Calcule el coeficiente del monomio x^6 del polinomio de Laurent

$$(x+1)\left(3x^2 - \frac{3}{x}\right)^7.$$

Problema 2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y x una variable.

i) Obtenga el coeficiente del monomio de grado n del polinomio $(1+x)^{2n}$.
Justifique su respuesta.

ii) Obtenga los coeficientes de los monomios de grado n y $n-1$ binomial del polinomio $(1+x)^{2n-1}$.
Justifique su respuesta.

iii) Muestre el coeficiente del monomio del grado n de $(1+x)^{2n}$ es igual a la suma de los coeficientes de los dos monomios de grado n y $n-1$ del polinomio $(1+x)^{2n-1}$.

Problema 3. En el polinomio $(px+1)^q$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que el coeficiente del monomio x es -12 y el coeficiente del monomio x^2 es 60. Determine el valor de p y q.

Problema 4.

i) Determine el valor numérico de la siguiente expresión:

$$\sum_{l=0}^{n} (1-(-1)^l) \binom{n}{l},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, fijo.

Problema 5.

1. Determine una fórmula cerrada para la sumatoria

$$\sum_{k=0}^{n}\left[2^{-(k+3)}+\frac{k+3}{k+2}-\frac{k+2}{k+1}+\binom{n}{k}(-1)^k\right]$$

Problema 6.

1. Calcule el valor de las siguientes sumatorias:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+3)(2k+5)}$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}8(3^k+5k)-7k^2$.

Problema 7.

i) Si se sabe que $\displaystyle\sum_{i=1}^{7}x_i^2=196$; $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(2x_i-3)^2=1130$; $x_8=x_9=-3$, $x_{10}=5$. Determime el valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{7}x_i$

Problema 8. Determine una fórmula cerrada simplificada para cada una de las siguientes sumatorias

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}+x^k)\binom{n}{k}, \qquad x\neq 1$

Problema 9.

1. Sea x una variable y $n\in\mathbb{N}$. En el desarrollo de $\left(x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n$, se sabe que

   $$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+44.$$

   Determine el valor de n, y encuentre el coeficiente que acompaña al término x^6 (donde se ve la expresión como un polinomio de Laurent en la “variable” $\sqrt{x}$).

2. Demuestre que coeficiente constante en el polinomio de Laurent es $\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^n$ es $\binom{n+2}{2}$.

Problema 10. Sean $a_i, = 1, \ldots, n$ y $b_j, = 1, \ldots, m$ sucesiones. Muestre que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_j) = m\sum_{i=1}^{n} a_i + n\sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Aplicar lo anterior para encontrar la fórmula cerrada de

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k}(2\ell + k).$$

Problema 11. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre la fórmula de Trinomio de Newton:

$$(a + b + c)^n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{n!}{(n-j)!(j-k)!k!}a^{n-j}b^{j-k}c^k.$$

Hint: Utilice Teorema de Binomio dos veces.