Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________Sección:______________________________

Control 1
Forma C (Pauta)

1.- Sea la función:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{y - 5x}{2}, \frac{2y + x}{3}\right)$$

i) Pruebe que g es biyectiva.
Sean (x_1, y_1) y $(x_2, y2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$, con esto se tiene que:

$$\left(\frac{y_1 - 5x_1}{2}, \frac{2y_1 + x_1}{3}\right) = \left(\frac{y_2 - 5x_2}{2}, \frac{2y_2 + x_2}{3}\right).$$

Igualando las coordenadas, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{y_1 - 5x_1}{2} = \frac{y_2 - 5x_1}{2}$$
$$\frac{2y_1 + x_1}{3} = \frac{2y_2 + x_2}{3}$$

obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1 - 5x_1 = y_2 - 5x_2 \\ 2y_1 + x_1 = 2y_2 + x_2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 5 y luego sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$11y_1 = 11y_2,$$

obteniendo así que $y_1 = y_2$.
Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 2 se obtiene directamente que:

$$x_1 = x_2,$$

concluyendo así que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ y por lo tanto queda demostrado que g es inyectiva.

Por otro lado, para probar la sobreyectividad, tomemos un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y) = (a,b)$.
Con lo anterior se tiene se puede obtener el sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-5x}{2} = a \\ \frac{2y+x}{3} = b \end{cases}$$

Despejando y de la primera ecuación se obtiene $y = 5x+2a$, y luego podemos reemplazarlo en la ecuación 2 obteniendo:

$$2(5x+2a) + x = 3b,$$

la cual tiene como resultado para x :

$$x = \frac{3b-4a}{11}.$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación $y = 5x + 2a$ queda:

$$y = 5 \cdot \frac{3b-4a}{11} + 2a = \frac{2a+15b}{11}.$$

Como $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = Rec(g) = Codom(g),$$

por lo tanto, se concluye que g es sobreyectiva.

Como f es sobreyectiva e inyectiva, se tiene que f es biyectiva.

ii) Determine g^{-1}.

Como la función g es biyectiva, existe su función inversa g^{-1}, la cual está descrita según la regla de asignación obtenida anteriormente, así:

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \left(\frac{3y-4x}{11}, \frac{2x+15y}{11} \right) \end{aligned}$$

2.- Sean las funciones:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{5+x^2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{2+x^2}{4} \end{aligned}$$

i) Determine los conjuntos:
- $f(\{-2,0,2\}) = \{f(-2), f(0), f(2)\} = \{3, \sqrt{5}\}$.
- $g(\{-2,0,2\}) = \{g(-2), g(0), g(2)\} = \{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$.
- $f^{-1}(\{-3,0,4\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -3 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 4\} = \{-\sqrt{11}, \sqrt{11}\}$.
- $g^{-1}(\{-3,0,4\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = -3 \vee g(x) = 0 \vee g(x) = 4\} = \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$.

ii) Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y calcule $(f \circ g)(2)$ y $(g \circ f)(1)$.

Primero se debe encontrar una regla de asignación para las composiciones:

- $$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{2+x^2}{4}\right) \\ &= \sqrt{5+\left(\frac{2+x^2}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\sqrt{5+x^2}\right) \\ &= \frac{2+\left(\sqrt{5+x^2}\right)^2}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(f \circ g)(2) = \sqrt{5+\left(\frac{2+2^2}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{116}}{4},$$

y

$$(g \circ f)(1) = \frac{2+\left(\sqrt{5+1^2}\right)^2}{4} = 2$$