2 Lógica, Conjuntos, Inducción

Ejercicios resueltos

1. Sin hacer uso de tablas de verdad, encontrar el valor de verdad de la proposición:
$$[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \Rightarrow [q \vee (\bar{p} \Rightarrow r)]$$
sabiendo que: $p \Rightarrow (q \vee r)$ es falsa.

   Respuesta: Se sabe que $p \Rightarrow (q \vee r)$ es equivalente a $\bar{p} \vee (q \vee r)$, luego q, r son falsas y p es verdadera. En consecuencia $p \wedge q$ y $p \wedge r$ son falsas y por lo tanto $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ es falsa. En consecuencia la proposición propuesta es verdadera.

2. ¿ Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, la proposición $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$ es verdadera ?

   Respuesta: Como $x \in \mathbb{R}$ entonces existen tres posibilidades.

   a) $x > 0$. Luego $x < 0$ es falsa y la proposición propuesta es verdadera.
   b) $x = 0$. Luego $x < 0$ es falsa y la proposición propuesta es verdadera.
   c) $x < 0$. Luego $x < 0$ es verdadera y como $x^2 < 0$ es falsa, entonces la proposición propuesta resulta falsa

   En consecuencia la proposición resulta verdadera para todo $x \geq 0$.

3. Considere la condición $p(x) : x^2 - 1 = 0$ y el conjunto
$$A = \{x \in U / p(x)\}.$$
Calcule A cuando a) $U = \mathbb{N}$ b) $U = \mathbb{Z}$.

   Respuesta: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

   a) Luego $A = \{x \in \mathbb{N} / p(x)\} = \{1\}$
   b) Luego $A = \{x \in \mathbb{Z} / p(x)\} = \{-1, 1\}$

   En consecuencia este simple ejercicio muestra la necesidad de tener siempre presente el universo del discurso U.

4. Demostrar que las proposiciones siguientes son equivalente: $p \Rightarrow q$, $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, $p \wedge \bar{q} \Rightarrow F$.

   Respuesta: Sabemos que: $p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$. Pero

   $$\bar{p} \vee q \equiv q \vee \bar{p} \equiv (\bar{\bar{q}}) \vee \bar{p} \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}.$$

   Por otro lado:

   $$p \wedge \bar{q} \Rightarrow F \equiv \overline{p \wedge \bar{q}} \vee F \equiv \bar{p} \vee q \vee F \equiv \bar{p} \vee q.$$

   Nota: la mayoría de los teoremas de Matemática son de la forma $p \Rightarrow q$; en consecuencia es posible demostrar un teorema en la forma $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ (**método indirecto**) ó en la forma $p \wedge \bar{q} \Rightarrow F$ (**reducción al absurdo**).

5. Demuestre que: $B \subset A \Rightarrow A \cup (B \cap C) = A$.

   Demostración: Método 1.

   $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

   Como $B \subset A$ entonces $A \cup B = A$ y como $A \subset A \cup C$ entonces $A \cap (A \cup C) = A$ lo que demuestra esta proposición.

   Método 2.

   Como $A \subset A \cup (B \cap C)$ basta demostrar que si $B \subset A$ entonces $A \cup (B \cap C) \subset A$. Sea $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$ $\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

   Pero si $x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$, pues $B \subset A$. Lo que demuestra esta proposición.

6. Sean $A, B \subset U$. Simplifique usando álgebra de conjuntos:

   $$[A \cap (B - A)]' \ \cap \ [B - (A \cup B)]$$

   Respuesta: El conjunto dado es igual a:

   $$\begin{aligned} &[A \cap (B \cap A')]' \ \cap \ [B \cap (A \cup B)'] \\ &= U \cap [B \cap (A' \cap B')] = U \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Observación: Este ejercicio es **esencialmente** distinto del anterior. En el ejercicio 5 se pide demostrar una proposición de la forma $p \Rightarrow q$; en cambio en el ejercicio 6 lo que aparece es un conjunto (lo cual no constituye una proposición).

7. Considere los conjuntos $A \cup (B - C)$ y $(A \cup B) - (A \cup C)$ ¿ son iguales estos conjuntos?

   Respuesta: Si uno piensa que la respuesta es afirmativa debería intentar demostrar la igualdad. Al revés, si sospecha que los conjuntos son diferentes entonces bastaría encontrar conjuntos específicos para los cuales la igualdad es falsa.

   Por ejemplo, si $C = \emptyset$ entonces $A \cup (B - C) = A \cup B$ pero $(A \cup B) - (A \cup C) = (A \cup B) - A = B - A$.

   Por lo tanto estos conjuntos son distintos.

8. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$(\forall x)(x \in \mathbb{R}) \left(\sqrt{(x+2)^2} = x + 2 \right),$$
$$(\forall x)(x \in \mathbb{R})\ (\forall y)\ (y \in \mathbb{R})\ (\sqrt{x}\ \sqrt{y} = \sqrt{xy})$$

   Respuesta: En primer lugar es importante entender que las igualdades que aquí aparecen no constituyen proposiciones, pues no es posible asignarles ningún valor de verdad mientras no se especifiquen los universos de las variables. En consecuencia las fórmulas cuantificadas son proposiciones.

   En el primer caso si $x = -3$ entonces $\sqrt{(x+2)^2} = 1$ mientras que $x + 2 = -1$.

   En el segundo caso si $x < 0,\ y < 0$ entonces ni $\sqrt{x}$ ni $\sqrt{y}$ están definidas en $\mathbb{R}$ mientras que $\sqrt{xy}$ si está definida en $\mathbb{R}$.

   En consecuencia ninguna de estas proposiciones es verdadera.

9. Determine si el producto de tres impares consecutivos cualesquiera es divisible por 6.

   Respuesta: Sean $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$ los números y sea $p(n) : (2n-1)(2n+1)(2n+3) = 6k$, algún $k \in \mathbb{N}$. Se desea saber si $p(n)$ es o no válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

$p(1) : 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ que **no** es divisible por 6.

Conclusión: $p(n)$ **no** es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Consecuencia: este ejercicio muestra que la primera etapa del Principio de Inducción es necesaria.

10. Determine si la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es divisible por 6.

    Respuesta: $p(n) : n + (n+1) + (n+2) = 6k$, algún $k \in \mathbb{N}$.

    $p(1) : 1 + 2 + 3 = 6 = 6 \cdot 1$, luego $p(1)$ es verdadera.

    Ahora debemos probar que si $n + (n+1) + (n+2) = 6k$, algún $k \in \mathbb{N}$ entonces $(n+1) + (n+2) + (n+3) = 6k^*$, algún $k^* \in \mathbb{N}$.

    Pero

    $$\begin{aligned} (n+1) + (n+2) + (n+3) &= n + (n+1) + (n+2) + 3 = 6k + 3 \\ &= 6\left(k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

    Como $k + \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ entonces $p(n)$ **no** implica $p(n+1)$ y en consecuencia $p(n)$ **no** es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

    Consecuencia: este ejercicio muestra que la segunda etapa del método de inducción es necesaria.

11. Determine todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n$.

    Respuesta: Vale para $n = 4$ (es falsa para los tres primeros naturales).

    Supongamos que para algún $n \geq 4 : 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n > 2^n$. Debemos demostrar que: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1) > 2^{n+1}$. Pero $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(n+1) > 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, pues $n \geq 4$. En consecuencia la fórmula es válida $\forall n, n \geq 4$.

12. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

    Demostración: Para $n = 1 : \sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{2}$ valor que coincide con el segundo miembro.

Supongamos que para algún n : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ entonces debemos probar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

En consecuencia la fórmula propuesta es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.