Nombre:______________________________Sección:______________________________

Pep 2 (PAUTA)

Forma A

1. Determine el valor de $p \in \mathbb{N}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=p}^{10} \frac{4}{(2k-3)(2k+1)} = -\frac{40}{399}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{10} \frac{4}{(2k-3)(2k+1)} &= -\frac{40}{399} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+1} \right) &= \frac{-40}{399} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) &= \frac{-40}{399} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} \right) + \sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) &= \frac{-40}{399} \\
\frac{1}{2a-3} - \frac{1}{19} + \frac{1}{2a-1} - \frac{1}{21} &= \frac{-40}{399} \\
\frac{1}{2a-3} + \frac{1}{2a-1} &= 0 \\
2a-1+2a-3 &= 0 \\
4a &= 4 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

2. Sabiendo que los coeficientes que acompañan a x^6 y x^{10} son iguales en el desarrollo de:

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^n,$$

Encuentre el valor de n.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{3}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\sqrt{2}^k}{3^k}x^{2k}\end{aligned}$$

El coeficiente de x^6 es:

$$\binom{n}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}^3}{3^3}$$

El coeficiente de x^{10} es

$$\binom{n}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}^5}{3^5}$$

como los coeficientes son iguales:

$$\begin{aligned}\binom{n}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}^3}{3^3} &= \binom{n}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}^5}{3^5}\\ \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{3^2}{\sqrt{2}^2} &= \frac{n!}{(n-5)!\cdot 5!}\\ 4\cdot 5\cdot\frac{3^2}{2} &= (n-3)\cdot(n-4)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}&90 = n^2-7n+12\\ &n^2-7n-78=0\\ &(n+6)(n-13)=0\\ &n=-6 \vee n=13\end{aligned}$$

Como $n\in\mathbb{N}$, entonces $n=13$.

3. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $3^{3n-2} + 2^{3n+1}$ es divisible por 19.

Solución:
Definamos el predicado:

$$P(n) : \left(\exists k \in \mathbb{Z} : 3^{3n-2} + 2^{3n+1} = 19k\right)$$

Por inducción:

i) $P(1) : (3k \in \mathbb{Z} : 3^1 + 2^4 = 19k)$ lo cual se cumple para $k = 1$

ii) Supongamos $P(n)$ es verdad, es decir

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3^{3n-2} + 2^{3n+1} = 19k$$

por demostrar que:

$$P(n+1) : \exists r \in \mathbb{Z} : 3^{3(n+1)-2} + 2^{3(n+1)+1} = 19r$$

es válido.
Trabajando el lado izquierdo de la igualdad se tiene:

$$\begin{aligned}
3^{3(n+1)-2} + 2^{3(n+1)+1} &= 3^{3n+1} + 2^{3n+4} \\
&= 3^3 \cdot 3^{3n-2} + 2^{3n+4} \\
&= 3^3 \cdot \left(19k - 2^{3n+1}\right) + 2^{3n+4} \\
&= 27 \cdot 19k - 27 \cdot 2^{3n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 27 \cdot 19k - 19 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 19\left(27k - 2^{3n+1}\right)
\end{aligned}$$

como $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(27k - 2^{3n+1}\right) \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$r = \left(27k - 2^{3n+1}\right) \qquad ,$$

así p(n+1) es válido, y por el Principio de inducción.

$$(\forall n \in \mathbb{N} : P(n))$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$:

(a) Pruebe, sin usar inducción, que:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1 \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

(b) Encuentre el valor de $r \in \mathbb{N}$ para que se cumpla la ecuación:

$$\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\right]^2 - \sum_{k=1}^{r+2} \binom{r+1}{k-1} = 48.$$

Solución:
Por el ejercicios anterior, se tiene que

$$\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\right]^2 = 2^{2r},$$

por otro lado:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r+2} \binom{r+1}{k-1} &= \sum_{k=1-1}^{r+2-1} \binom{r+1}{k+1-1} \\ &= \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} \\ &= 2^{r+1} \end{aligned}$$

Reemplazando, se obtiene la ecuación:

$$2^{2r} - 2 \cdot 2^r = 48.$$

Esta ecuación se resuelve como una ecuación cuadrática:

$$(2^r)^2 - 2(2^r) - 48 = 0,$$

que queda factorizada como

$$(2^r - 8)(2^r + 2) = 0,$$

teniendo así que $2^r = 8$ o $2^r = -2$, de donde el lado derecho no puede suceder, por lo tanto basta resolver la ecuación de la izquierda. Como $8 = 2^3$ se tiene que $2^r = 2^3$ y por lo tanto $r = 3$.