



Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Coordinación Cálculo I

Guía de Ejercicios

Trigonometría

1. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas

a) $\tan(\theta) \cot(\theta) - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$

b) $\sin(\theta) \csc(\theta) - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$

c) $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2(\theta)$

d) $\sin(\theta)(\cot(\theta) + \tan(\theta)) = \sec(\theta)$

e) $(\csc(\theta) + \cot(\theta))(\csc(\theta) - \cot(\theta)) = 1$

f) $\cot(2\theta) = \frac{1}{2}(\cot(\theta) - \tan(\theta))$

g) $\sec^4(\theta) - \sec^2(\theta) = \tan^4(\theta) + \tan^2(\theta)$

h) $\csc(\theta) - \cot(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$

i) $1 - \frac{\sin^2(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = -\cos(\theta)$

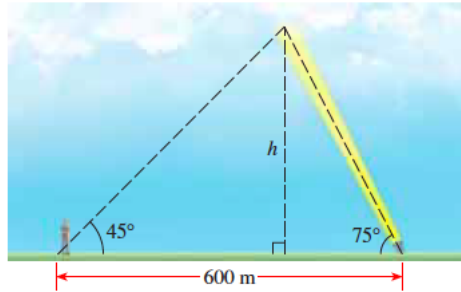
j) $\frac{1 - \sin(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{1 - \sin(\theta)} = 2 \sec(\theta)$

k) $\frac{1 - \sin(\theta)}{1 + \sin(\theta)} = (\sec(\theta) - \tan(\theta))^2$

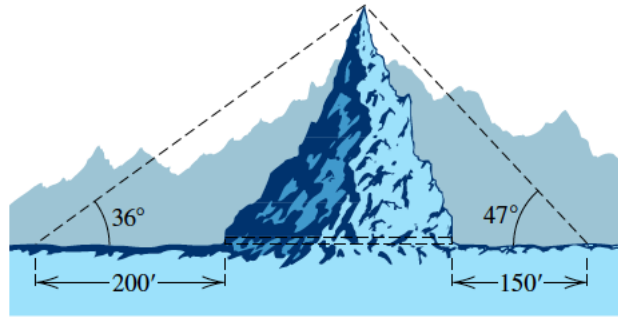
l) $\frac{\sec(\theta)}{1 + \sec(\theta)} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$

m) $\frac{\sin(\theta) + \cos(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{\sin(\theta) - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \sec(\theta) \csc(\theta)$

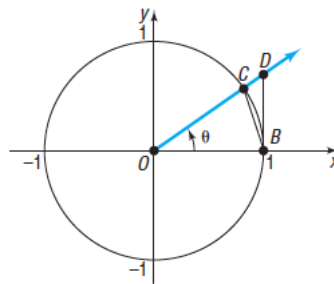
2. Un avión está volando a una altura de 5000 pies, directamente sobre una carretera recta dispuesta en una planicie. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de elevación desde uno de los automóviles es 30° y desde el otro, el ángulo de elevación es de 45° . ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?.
3. Desde lo más alto de una torre de 18 metros de altura, se observa un vehículo en el plano en dirección norte con un ángulo de depresión de 35 grados. Además, se observa otro vehículo, en el mismo plano, en dirección este con un ángulo de depresión de 50 grados. Determine la distancia entre los vehículos.
4. Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° con respecto de la horizontal. Un observador a 600 [m] de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45° . Encuentre la altura h de la capa de nubes.



5. Una escalera de mano, cuyo pie está fijo en la calle, forma un ángulo de 30° con el suelo cuando su extremo superior se apoya en un edificio situado en uno de los lados de la calle, y forma un ángulo de 40° cuando se apoya en un edificio situado al otro lado de la calle. Si la longitud de la escalera es de 50 mts., ¿cuál es el ancho de la calle?
6. Un observador mira la cúspide de una torre con un ángulo de elevación de 30° , enseguida avanza 70 mts en dirección a la torre y observa la cúspide con un ángulo de elevación de 60° . ¿Cuál es la altura de la torre?
7. Un avión está volando a una altura de 5000 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de elevación desde uno de los automóviles es 30° y desde el otro, el ángulo de elevación es de 45° . ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?
8. La cima de una montaña es vista desde dos puntos, A y B , que están en la misma línea vertical. El punto B está en la misma línea horizontal de los pies de la montaña, de B se puede ver la cima con un ángulo de elevación de 30° . El punto A está a 2000 metros sobre el punto B y desde este punto se ve la cima de la montaña con un ángulo de depresión de 45° . Calcule la altura de la montaña.
9. Un globo aerostático se eleva verticalmente. A 300 metros de distancia del punto de lanzamiento, se encuentra un observador que mira el globo con un ángulo de elevación de 30° . Luego de 2 minutos el ángulo de elevación es de 60° . Determine la velocidad (en metros por segundo) con que se eleva el globo.
10. Dos observadores situados sobre una carretera, están separados por 100 mts. Simultáneamente, miden los ángulos de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 45° , el otro 60° . Suponga que el helicóptero está sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?
11. Un observador mira la cúspide de una torre con un ángulo de elevación de 30° , enseguida avanza 70 mts en dirección a la torre y observa la cúspide con un ángulo de elevación de 60° . ¿A qué distancia de la torre se encontraba originalmente el observador?
12. Un túnel para una nueva carretera se ha de cortar a través de una montaña que mide 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es 36° (vea la figura). De una distancia de 150 pies en el otro lado, el ángulo de elevación es 47° . Calcule la longitud del túnel.



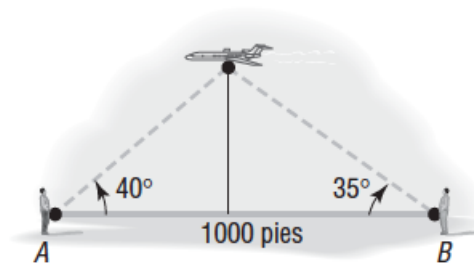
13. En la siguiente figura, la recta DB es tangente al círculo unitario



- Calcule el área del $\triangle OBC$ en términos del ángulo θ
- Calcule el área del $\triangle OBD$ en términos de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$
- Calcule el área del sector circular \widehat{OBC} con θ medido en radianes.
- Con la información obtenida en la preguntas a), b) y c) demuestre que

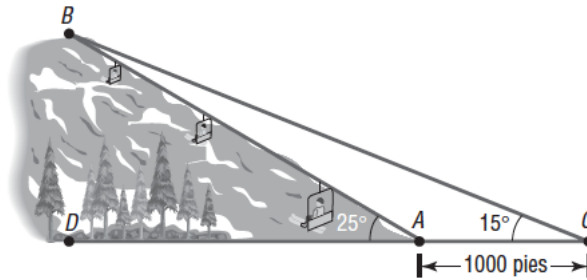
$$1 < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

14. Dos personas quienes se encuentran separadas por una distancia de 1000 pies detectan el vuelo de un avión. Cuando la aeronave pasa por sobre la línea que los une, cada uno hace una observación del ángulo de elevación al avión, como se indica en la figura. ¿A qué distancia se encuentra el avión de cada uno de los observadores?

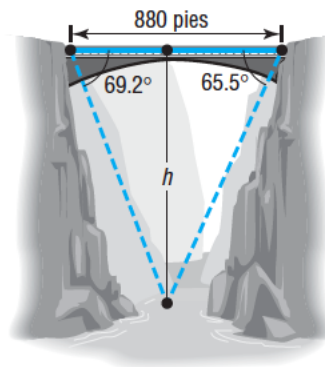


15. Se desea conocer la longitud del cable para un teleférico para esquiadores proyectado desde el punto A al punto B (ver figura), para esto, un topógrafo mide 25° para el ángulo DAB y luego camina una distancia de 1000 pies a C y mide 15° para el ángulo ACB .

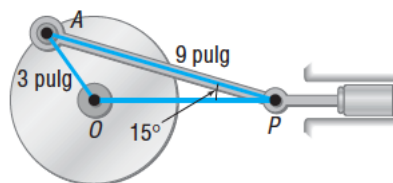
- a) ¿Cuál es la longitud del cable?
 b) ¿Cuál es la altura de la montaña?



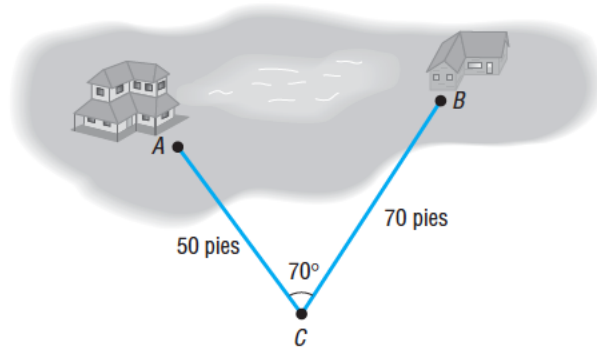
16. Según el libro de Records Guinness, el puente más alto del mundo es el que cruza la barranca Royal Gorge del río Arkansas en el estado de Colorado, USA. Cierta día, se toman observaciones del mismo punto a nivel del agua desde cada lado del puente de 880 pies de largo, como se indica en la figura. ¿Cuál es la altura del puente?



17. El cigüeñal de cierto automóvil tiene 3 pulgadas de largo y el eje que lo conecta tiene 9 pulgadas de largo (ver figura). En el momento en que el ángulo OPA tiene 15° , ¿a qué distancia está el pistón (P) del centro (O) del cigüeñal?

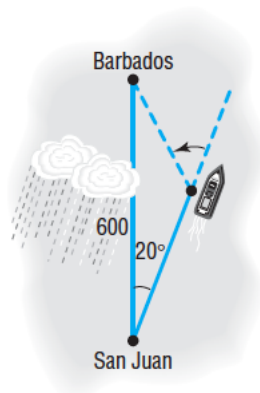


18. Para encontrar la distancia entre la casa A y la casa B, un topógrafo mide el ángulo ACB (ver figura), cuya medida es de 70° , y luego camina la distancia a cada casa, 50 y 70 pies, respectivamente. ¿A qué distancia están las casas?

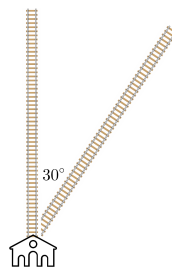


19. Un crucero mantiene una velocidad promedio de 15 nudos por hora al ir desde San Juan, Puerto Rico, a Barbados, Indias Occidentales, una distancia de 600 millas náuticas. Para evitar una tormenta tropical, el capitán sale de San Juan en una dirección 20° fuera del curso directo a Barbados. Conserva la velocidad de 15 nudos durante 10 horas, después de este tiempo la trayectoria a Barbados está libre de tormentas (ver figura).

- ¿Qué ángulo debe virar el capitán para ir directamente a Barbados?
- Una vez que da la vuelta, ¿cuánto tiempo tarda en llegar a Barbados si conserva la misma velocidad de 15 nudos?



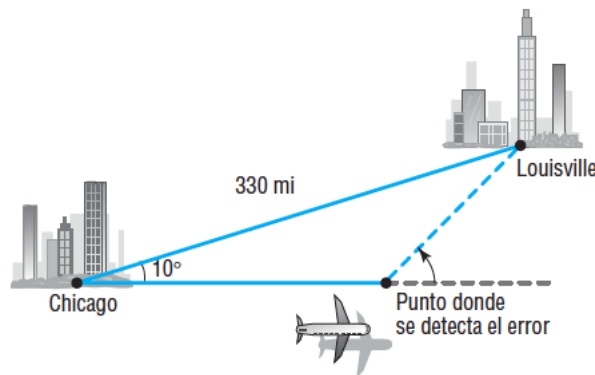
20. A las 12:00 hrs. sale de la estación, un tren en dirección Norte a una velocidad de $30[Km/h]$. A las 13:00 hrs. sale otro tren a $25[Km/h]$ por una ruta que forma un ángulo de 30° con respecto a la ruta hacia el norte (ver figura).



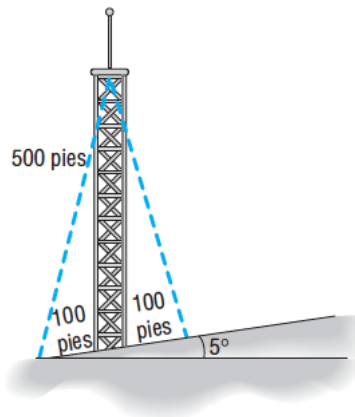
¿A qué distancia se encontrarán, entre sí, los trenes a las 16:00 hrs?

21. Al intentar volar de Chicago a Louisville, una distancia de 330 millas, un piloto sin darse cuenta toma un curso equivocado con 10° de error, como se indica en la figura.

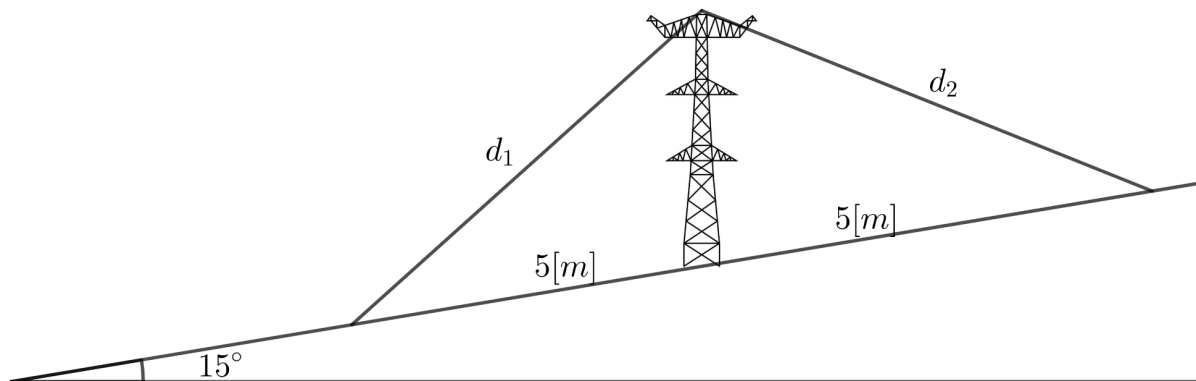
- Si el avión mantiene una velocidad promedio de 220 millas por hora y si el error en dirección se descubre 15 minutos después, ¿cuál es el ángulo que debe girar para dirigirse a Louisville.
- ¿Qué nueva velocidad debe mantener el piloto para que el tiempo total de viaje sea de 90 minutos?



22. Una torre de radio de 500 pies de alto se localiza en una colina con una inclinación de 5° con la horizontal (vea la figura). ¿Cuáles deben ser las longitudes de dos cables tensores si tiene que fijarse a la punta de la torre y asegurarse en dos puntos a 100 pies directamente colina arriba y colina abajo de la base de la torre?



23. Una torre de alta tensión de $10[m]$ de altura se instala en una colina que tiene una inclinación de 15° . Desde la parte superior de la torre salen dos cables tensores d_1 y d_2 que se deben fijar, en el piso, a $5[m]$ de la base de la torre cada uno (ver figura).



Determine la longitud del cable tensor d_1

24. Desde la ventana de un edificio se observa, al otro lado de la calle, un gran árbol de navidad de una multitienda. La ventana se encuentra a $5[m]$ de altura del piso. Al ángulo de elevación con el que se observa la parte superior del árbol es de 15° , mientras que el ángulo de depresión con el que se observa la base del árbol es de 30° . Determine la altura del árbol