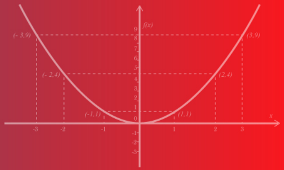
Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN



FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Coordinación de Cálculo I

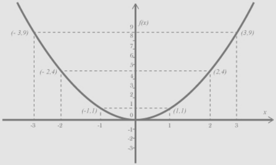
Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola



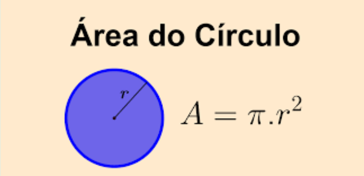
FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Funciones

Nociones previas

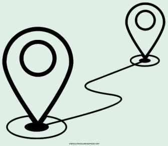
Una función es una relación entre dos conjuntos, una especie de regla que permite transformar una cierta magnitud en otra. Esta regla permite generar una dependencia entre estas magnitudes, las que se pueden establecer como ecuaciones o fórmulas.

Ejemplo



La expresión $A = \pi r^2$ relaciona el área A de una circunferencia con su radio r

Ejemplo



La expresión $d = 100t$ puede simbolizar la distancia recorrida en un tiempo t (en horas) por un vehículo a velocidad constante de 100 km/h.

En los ejemplos anteriores se logra identificar una variable independiente (como r y t) que es transformada para obtener otra variable dependiente de estas (A y d resp.). En estos casos, se cumplen dos puntos importantes:

- Hay variables independientes que poseen ciertas restricciones para nuestra relación, así que estas deben pertenecer a un conjunto específico.
- Para cada valor de esta variable independiente existe un único valor de la dependiente (por ejemplo, para $r = 2$ el área de la circunferencia es $A = 4\pi$ y no otro valor).

Con estas observaciones nos encontramos en condiciones para entregar la definición formal de una función.

Definición: Función de una variable real

Sean A y B dos conjuntos no vacíos de naturaleza arbitraria. Una función de A en B es una correspondencia entre los elementos de A y los elementos de B de tal modo que a cada $x \in A$ se le hace corresponder un y sólo un elemento $y \in B$.

Notación: $f : A \longrightarrow B$

Observación: En el caso en que $A, B \subseteq \mathbb{R}$ diremos que la función es real de variable real.

1. El dominio de $f : A \longrightarrow B$ es el conjunto A (Notación: $Dom(f) = A$).
   Cuando el dominio no esté explícitamente dado, entenderemos que el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función esta bien definida, es decir:
   $$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(x) \in \mathbb{R}\}$$
2. El recorrido de f es el conjunto de todos los valores que adopta $f(x)$ cuando $x \in Dom(f)$. Denotaremos lo anterior por
   $$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{existe } x \in Dom(f) \text{ tal que } y = f(x)\}$$

Observaciones:

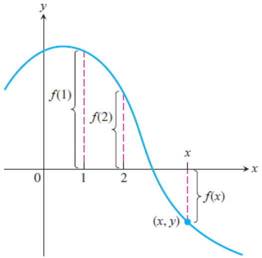
1. De la definición de función se desprende que $A = Dom(f)$ y que $Rec(f) \subseteq \mathbb{R}$.
2. El recorrido de f también es conocido como imagen o rango de la función.

Definición: Gráfico

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El gráfico de f corresponde a todos los puntos del plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuyo par de coordenadas está dado por la entrada y evaluación de la función. Esto quiere decir que el gráfico f corresponde al conjunto

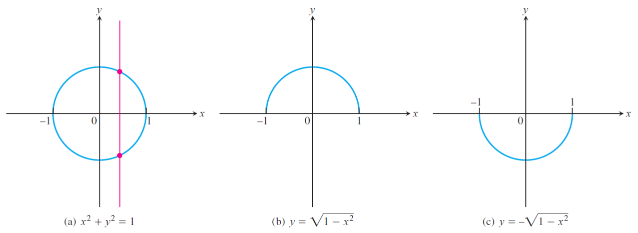
$$Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x), \text{ con } x \in Dom(f)\} = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$$

Cabe destacar que en los puntos (x, y) del gráfico de f, la coordenada x se sitúa en el eje OX y la coordenada $y = f(x)$ contempla la "altura" de cada uno de estos puntos (positiva o negativa) como en el esquema siguiente:

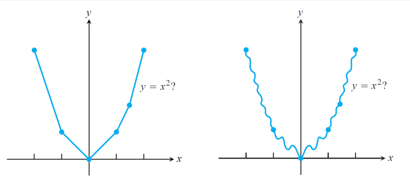


Observaciones importantes:

1. No necesariamente toda curva en el plano corresponde al gráfico de una función, pero puede que alguna restricción de su dominio o recorrido lo sea, como el caso siguiente:



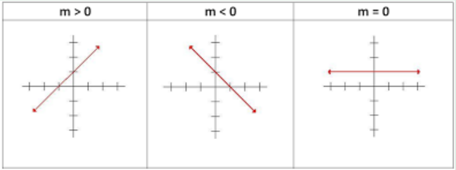
2. Tampoco es práctico darse una tabla de valores para concluir el gráfico de una función pues nadie nos garantiza la forma que esta debe tener, ni cuántos puntos sean necesarios para tener una aproximación "decente" de esta



A continuación se presentan algunos casos de funciones conocidas:

Función Lineal

Corresponde a una función de la forma $f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$, donde m es conocida como la pendiente de la recta y b el intercepto con el eje OY. A continuación se muestran algunos gráficos para los distintos valores de m:



Si bien en los tres casos se deduce que $Dom(f) = \mathbb{R}$, el recorrido en el caso de $m = 0$ es $Rec(f) = \{b\}$ mientras que para $m \neq 0$ se tiene $Rec(f) = \mathbb{R}$

Propiedades Función Lineal

Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

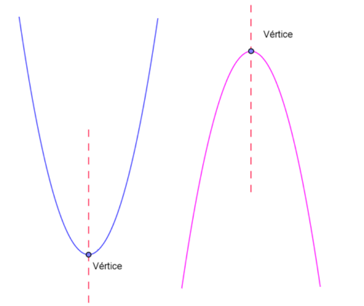
- En el caso que se conozcan dos puntos distintos de la recta $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente se puede calcular como $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Si se conoce la pendiente y un punto $P_0(x_0, y_0)$ de ella, se puede determinar la función mediante la ecuación
$$f(x) - y_0 = m(x - x_0)$$
- Si $f_1(x) = m_1 x + b_1$ y $f_2(x) = m_2 x + b_2$ son dos funciones lineales, con L_1 y L_2 sus gráficos respectivos, entonces
$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2 \quad \text{y} \quad L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$$

Ejemplo

Si $y = f(x)$ satisface la ecuación $2y + 5x - 3 = 0$ entonces $f(x) = \dfrac{-5x + 3}{2} = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$ y así la pendiente de la recta es $m = -\dfrac{5}{2}$ y el intercepto con el eje OY es $b = \dfrac{3}{2}$

Función Cuadrática

Corresponde a una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, cuyo gráfico es una parábola como se muestra a continuación.



La parábola se dice cóncava hacia arriba cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo en el caso $a < 0$.

Además se desprende de ambos gráficos que, para cualquier $a \neq 0$, se tiene $Dom(f) = \mathbb{R}$

Propiedades importantes

- El valor mínimo de la función cuando $a > 0$ (o máximo cuando $a < 0$) se produce en el vértice $V(x_p, y_p)$ donde $x_p = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_p = f(x_p)$.
- En base a lo anterior tenemos que el recorrido de f es

$$Rec(f) = \begin{cases} [y_p, +\infty) & ;\text{ si } a > 0 \\ (-\infty, y_p] & ;\text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Para la función $f(x) = -2x^2 + x + 6$ se tiene que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y es una parábola cóncava hacia abajo pues $a = -2 < 0$.

Con esto en cuenta, el vértice $V(x_p, y_p)$ se ubica en las coordenadas

$$x_p = -\frac{1}{2(-2)} = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y_p = f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 6 = \frac{49}{8}$$

Por lo que el recorrido de esta función es $Rec(f) = (-\infty, \frac{49}{8}]$

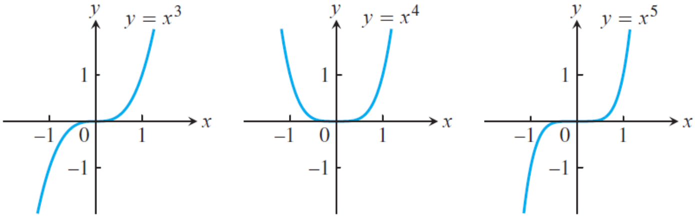
Función Polinomial

Se define la función polinomial de grado $n \in \mathbb{N}$ como una que tenga la forma $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$.

Por ejemplo, $f(x) = 1 - x + x^3$ es una función polinomial de grado 3 y $g(x) = 2 - x^5 - 3x$ es una de grado 5.

En todos los casos, el dominio de la función es $Dom(f) = \mathbb{R}$

Algunos ejemplos de gráficos de funciones polinomiales son los siguientes



Función Racional

Es una función de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

El dominio de esta función es $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$

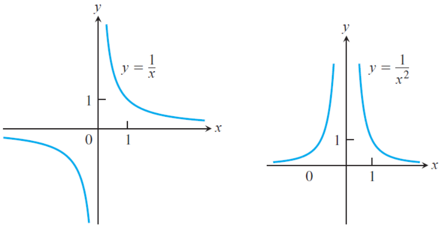
Ejemplo

Si tomamos $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{x^2 - 3x}$ entonces f es una función racional. Además, como

$$x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

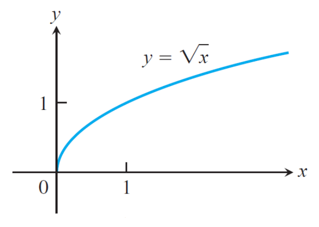
se concluye que el dominio de f es el conjunto $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

Algunos ejemplos de gráficos funciones racionales son los siguientes



Función Raíz

Para $f(x) = \sqrt{x}$, de las propiedades estudiadas con anterioridad, se deduce que $Dom(f) = [0, +\infty)$ y $Rec(f) = [0, +\infty)$. Su gráfico es el siguiente.



Ejemplo

Consideremos la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x}$. Entonces, para que $x \in Dom(f)$, se debe cumplir que

$$1 - x \geq 0 \iff x \leq 1 \iff x \in (-\infty, 1]$$

Por tanto concluimos que $Dom(f) = (-\infty, 1]$.

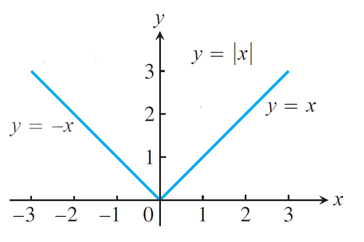
Además, sabemos que el resultado de una raíz es siempre no negativo, por lo que si $x \in Dom(f)$ entonces $\sqrt{1-x} \geq 0$. Así, para $y = f(x)$, se tiene $y \geq 0$ y con esto $Rec(f) = [0, +\infty)$.

Función Valor Absoluto

Si definimos $f(x) = |x|$ entonces sabemos que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = [0, +\infty)$. Reescribiendo esta función como

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \text{si } x \geq 0 \\ -x & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces su gráfico se compone de las dos rectas $y = x$ e $y = -x$ con los dominios restringidos para cada caso, es decir su gráfico es como el siguiente



Ejercicio

Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{-1}{|x+4|}$. Determine el dominio y recorrido de f.

Solución: Notamos que el único posible problema es que el denominador se anule y como $|x+4| = 0 \iff x = -4$ se deduce que $Dom(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

Por otro lado, como $|x+4| > 0$ para todo $x \in Dom(f)$, entonces si $y = \dfrac{-1}{|x+4|}$ necesariamente $y = f(x) < 0$, por lo que $Rec(f) \subset (-\infty, 0)$

Ejercicio

Para la función $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{4x + 2}$ determine el dominio, recorrido y gráfico, indicando sus elementos importantes.

Solución: En primer lugar notamos que $Dom(f) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ pues el único problema se produce cuando $4x + 2 = 0$ que equivale a $x = -\dfrac{1}{2}$.

Por otra parte, si $x \neq -\dfrac{1}{2}$ entonces podemos reescribir f de la forma

$$f(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{2(2x+1)} = 2x - 1$$

la cual representa una función lineal con pendiente $m = 2$ e intercepto $b = -1$, cuya gráfica sería el de la recta $y = 2x - 1$ pero sin el punto $(-\frac{1}{2}, -2)$.
Así, el recorrido de f será $Rec(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Definición:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función e $I \subseteq A$ un intervalo. Diremos que:

1. $x_0 \in A$ es un cero de f si $f(x_0) = 0$
2. f es positiva en I si $f(x) > 0$ para todo $x \in I$
3. f es negativa en I si $f(x) < 0$ para todo $x \in I$
4. f es estrictamente creciente en I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ se satisface
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
5. f es estrictamente decreciente en I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ se satisface
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
6. f es monótona si f es creciente o decreciente en A.

Ejemplo 1

Consideremos $f(x) = 6 + 4x - 2x^2$. Entonces reescribiendo esta función como $f(x) = -2(x-3)(x+1)$ se desprende que los ceros de esta son $x = 3$ y $x = -1$

Para analizar la monotonía de esta función podemos analizar su gráfico, dado que corresponde a una parábola cóncava hacia abajo, la función será creciente en todo el intervalo justo antes del vértice. Es decir, como el vértice tiene coordenadas $x_p = \dfrac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$ e $y_p = f(1) = 8$, la función es creciente para $x \in (-\infty, 1)$ y decreciente para $x \in (1, +\infty)$.

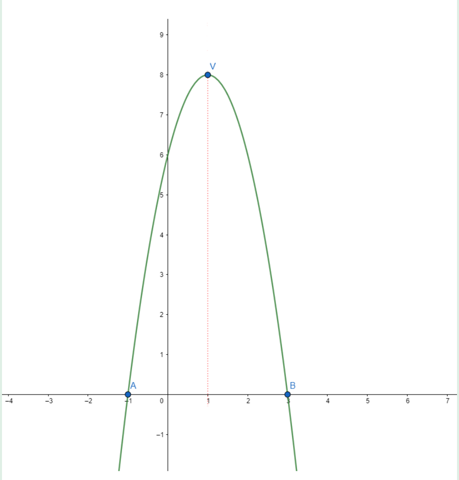
Por otro lado

$$f(x) > 0 \iff -2(x-3)(x+1) > 0 \iff (x-3)(x+1) < 0 \iff x \in (-1, 3)$$

por lo que f es positiva cuando $x \in (-1, 3)$ y negativa cuando $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Gráfico Ejemplo 1

Todo el análisis anterior lo podemos comprobar directamente con su gráfico



Propiedades:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Su gráfico original $y = f(x)$ se puede ver modificado de las siguientes formas:

1. Traslación vertical: La expresión $y = f(x) + k$ desplaza el gráfico original en k unidades
   - hacia arriba, si $k > 0$
   - hacia abajo, si $k < 0$
2. Traslación horizontal: La expresión $y = f(x - k)$ desplaza el gráfico original en k unidades
   - hacia la derecha, si $k > 0$
   - hacia la izquierda, si $k < 0$
3. Reflexión: con respecto al eje
   - OX, si $y = -f(x)$
   - OY, si $y = f(-x)$

Continuación Propiedades:

1. Compresión o Dilatación vertical: $y = k \cdot f(x)$ modifica verticalmente el gráfico en una
   - Dilatación, si $k > 1$
   - Compresión, si $0 < k < 1$
2. Compresión o Dilatación horizontal: $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ modifica verticalmente el gráfico en una
   - Dilatación, si $k > 1$
   - Compresión, si $0 < k < 1$

Ejemplo 2

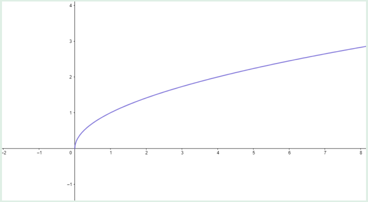
Consideremos $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$, en la cual notamos en primer lugar que $Dom(f) = [3, +\infty)$. Esta función es una modificación gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$, la cual podemos modificar como sigue:

- $y = \sqrt{x-3}$ es una traslación hacia la derecha en 3 unidades
- $y = -\sqrt{x-3}$ es una reflexión respecto del eje OX de la anterior
- $y = -\sqrt{x-3} + 1 = f(x)$ es una traslación hacia arriba en 1 unidad, respecto al anterior

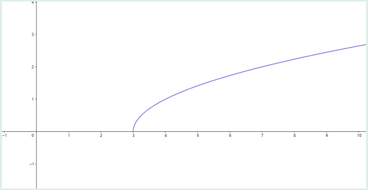
Continuación Ejemplo 2

Por comodidad, si graficamos todos estos cambios en ese orden, podemos concluir el gráfico de la función original

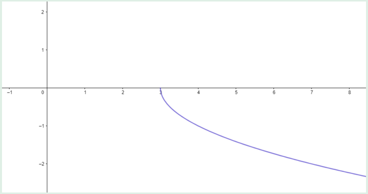
1.- $y = \sqrt{x}$



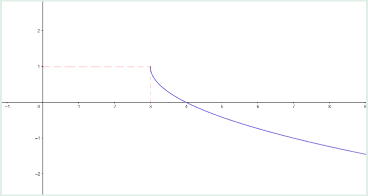
2.- $y = \sqrt{x-3}$



3.- $y = -\sqrt{x-3}$



4.- $y = 1 - \sqrt{x-3}$



Paridad

Una herramienta útil para simplificar la construcción de un gráfico corresponde a los siguientes conceptos

Definición:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es una función:

1. **Par**, si $f(-x) = f(x)$ para cualquier $x \in A$
2. **Impar**, si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in A$

Observaciones:

- Si f es una función par, su gráfico es simétrico respecto del eje OY.
- Si f es una función impar, su gráfico es simétrico respecto del origen.
- Una función puede no ser par ni impar.

Ejemplo 3

Analicemos la paridad de las siguientes funciones:

- $f_1(x) = \sqrt[3]{3x^4 - 2x^2 + 1}$ es una función par pues

$$f_1(-x) = \sqrt[3]{3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1} = \sqrt[3]{3x^4 - 2x^2 + 1} = f_1(x)$$

- $f_2(x) = (x^5 - x)(|x| - 1)$ es una función impar pues

$$f_2(-x) = ((-x)^5 - (-x))(|-x| - 1) = -(x^5 - x)(|x| - 1) = -f_2(x)$$

- $f_3(x) = (x^5 - x)(x - 1)$ no es una función par ni impar pues

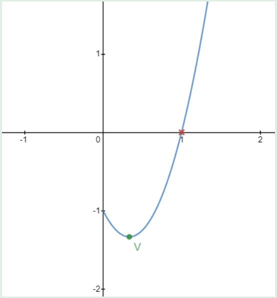
$$f_3(-x) = ((-x)^5 - (-x))(-x - 1) = (x^5 - x)(x + 1) \neq -f_3(x) \quad (\neq f_3(x))$$

Ejercicio

Analizar la paridad de la función $f(x) = 3x^2 - 2|x| - 1$ y esbozar su gráfico, indicando intervalos de monotonía y signos

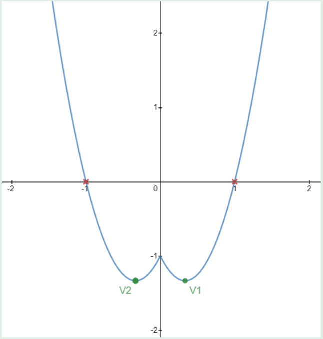
Solución: Notemos que $f(-x) = 3(-x)^2 - 2|-x| - 1 = 3x^2 - 2|x| - 1 = f(x)$ por lo que la función es par . Al ser su gráfico simétrico al eje OY, entonces basta analizar el gráfico para el lado positivo de las absisas.

Ubicándonos en el caso que $x > 0$, nuestra función se transforma en $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, la que representa una parábola cóncava hacia arriba con vértice en $V\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, cuyo gráfico es como el siguiente



Continuación Ejercicio

Ahora para el lado en que $x < 0$ basta simplemente reflejar el gráfico anterior, resultando



De aquí, notando que el vértice se refleja en el punto $V_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, ya es posible desprender que f es creciente cuando $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ y decreciente cuando $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, \frac{1}{3})$.

De manera similar, al notar que f tiene ceros en $x = \pm 1$, se tiene que f es positiva para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa para $x \in (-1, 1)$

Ejercicios propuestos

Esbozar el gráfico de las siguientes funciones, indicando dominio, recorrido, ceros, intervalos de monotonía y signos.

1. $f(x) = |x^2 + 4x + 2|$
2. $f(x) = \dfrac{x-7}{x-3}$
3. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & ;\ \text{si } -3 \leq x \leq -2 \\ |1 - x| & ;\ \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 2\sqrt{x+1} & ;\ \text{si } x > 0 \end{cases}$

Operación con funciones

Definición:

Sean las funciones $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con igual dominio D y sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Se definen las siguientes operaciones para todo $x \in D$:

1. *Regla del escalar:*
$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$
2. *Regla de la suma-resta:*
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
3. *Regla de la multiplicación:*
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
4. *Regla del cociente:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\text{donde } \ g(x) \neq 0)$$

Observación:

Si $Dom(f) \neq Dom(g)$, las operaciones se definen en la intersección de ambos dominios, excepto en el caso del cociente, donde a la intersección se le debe restar el conjunto de puntos en los que el denominador se anula.

Ejemplo 1

Considere las funciones $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$ en sus dominios respectivos y determine en cada caso $(f + g), (f - g), (f \cdot g)$. Cúal es el dominio de $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$?

Solución: El dominio de las funciones es $Dom(f) = [-3, 3]$ y $Dom(g) = [1, +\infty[$. Por lo tanto, $Dom(f \pm g) = Dom(f \cdot g) = [1, 3]$, donde:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{9 - x^2} \pm \sqrt{x - 1}, \qquad (f \cdot g)(x) = \sqrt{(9 - x^2)(x - 1)}$$

Para determinar el dominio del cociente, nótese que $\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, luego, $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =]1, 3]$ (excluido $x = 1$), donde:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x - 1}}$$

Ejercicio propuesto

Para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas por partes, determine las operaciones $(f + g)$, $(f \cdot g)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ y su respectivo dominio.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Composición de funciones

Definición:

Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ y sean $g : A \to B$, $f : B \to C$ funciones reales. Se define la composición de f con g como la función $f \circ g : A \to C$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y que se lee f compuesta con g.

Observación:

De manera más general, es posible definir la composición de f con g, $f \circ g$ para $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con la condición que $Rec(g) \subseteq Dom(f)$. A veces, esta condición impone restricciones sobre el dominio posible de la función g.

Ejemplo 2

Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x^2 + 2$. Calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Concluya que, en general $f \circ g \neq g \circ f$.

Solución: Veamos en primer lugar, la factibilidad de $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$. Notemos que $Dom(f) = [1, +\infty[$ y que $Dom(g) = \mathbb{R}$. Por otro lado, el recorrido $Rec(f) = [0, +\infty[$ y $Rec(g) = [2, +\infty[$. Enseguida, claramente se tiene que:

(a) $Rec(g) \subseteq Dom(f)$, por lo que $(f \circ g)$ está definida. De hecho:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ejemplo 2

(b) $Rec(f) \subseteq Dom(g)$, por lo que $(g \circ f)$ está definida. En este caso:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = x + 1$$

Luego, se observa en general, aunque sea posible realizar ambas composiciones, se tiene:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Ejercicio propuesto

Para las siguientes funciones, determine en cada caso, $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$, y sus respectivos dominios y recorridos.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \qquad g(x) = 1 - x$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = x + 1$

Definición:

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y considere la función $f : A \to B$, entonces se dice que:

1. f es *inyectiva* o simplemente 1-1 (uno a uno) $\Leftrightarrow$ cada elemento imagen tiene una única pre-imagen en A por f, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

2. f es *sobreyectiva* o simplemente *epiyectiva* $\Leftrightarrow$ $Rec(f) = B$, es decir:

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : y = f(x)$$

3. f es *biyectiva* $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva e inyectiva.

Observación:

Una función es uno a uno si y sólo si no existe una recta horizontal que intersecte su gráfica más de una vez.

Ejemplo 3

Estudie las siguientes funciones, definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, respecto a las propiedades anteriores:

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = [x]$

Solución:

(a) Si $f(x) = x$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}$ de donde f (la función identidad) es biyectiva.

(b) Si $f(x) = x^2$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$ de donde f no es sobreyectiva (pues $Rec(f) \neq \mathbb{R}$) ni inyectiva (pues, por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 1$ pero $1 \neq -1$).

(c) Si $f(x) = [x]$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{Z}$ de donde f no es sobreyectiva (pues $Rec(f) \neq \mathbb{R}$) ni inyectiva (pues, por ejemplo, $f(1/2) = f(1/3) = 0$ pero $1/2 \neq 1/3$).

Ejemplo 4

Demostrar que la función $f : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$, definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+3}$, es biyectiva.

Solución.- Para demostrar que f es biyectiva, mostramos que la función es inyectiva y sobreyectiva.

• f inyectiva: Sea $f(x_1) = f(x_2)$, esto es $\dfrac{3x_1-1}{x_1+3} = \dfrac{3x_2-1}{x_2+3}$, de donde se tiene que $x_1 = x_2$. Por tanto f es una función inyectiva.

• f sobreyectiva: Para todo $y \in \mathbb{R} - \{3\}$, existe $x = \dfrac{3y+1}{3-y} \in \mathbb{R} - \{-3\}$ tal que $f(x) = y$, en efecto

$$f(x) = f\left(\frac{3y+1}{3-y}\right) = \frac{3\left(\frac{3y+1}{y-3}\right) - 1}{\left(\frac{3y+1}{y-3}\right) + 3} = \frac{10y}{10} = y.$$

Por tanto la función es sobreyectiva. Finalmente, concluimos que la función f es biyectiva.

Ejemplo 5

Determine el dominio, recorrido y la gráfica de f, de acuerdo al parámetro $a \in \mathbb{R}$. Determine, además si la función es inyectiva y/o sobreyectiva sobre $\mathbb{R}$, donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x + a & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Solución: Se distinguen tres situaciones, dependiendo del valor de $a \in \mathbb{R}$:

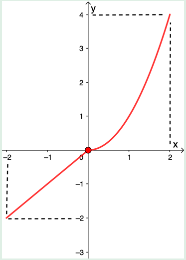


Figure: caso 1, si $a = 0$

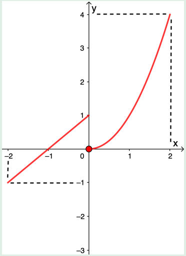


Figure: caso 2, si $a > 0$ (ejemplo $a = 1$)

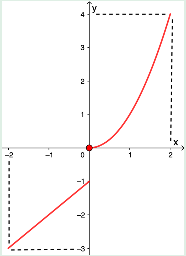


Figure: caso 3, si $a < 0$ (ejemplo $a = -1$)

Ejemplo 5

(a) Caso 1: $Dom(f) = Rec(f) = \mathbb{R}$. f es inyectiva y sobreyectiva.

(b) Caso 2: $Dom(f) = Rec(f) = \mathbb{R}$. f no es inyectiva y es sobreyectiva.

(c) Caso 3: $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) =]-\infty, -1[U[0, +\infty[$. f es inyectiva y no es sobreyectiva.

Definición:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *invertible* si y sólo si:

$$\exists f^{-1} : B \to A \ \text{ tal que } \ f \circ f^{-1} = I_B \quad \wedge \quad f^{-1} \circ f = I_A$$

En otras palabras,

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B : f(a) = b \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

donde, I_A, I_B son las funciones identidad en A y B

Teorema:

Una función f es invertible si f es biyectiva.

Ejemplo 5

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 2x$. Demuestre que f no es invertible y determine los conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \to B$ sea biyectiva. En este caso, determine f^{-1}.

Solución: Completando el cuadrado, la función se puede escribir como $f(x) = (x-1)^2 - 1$.

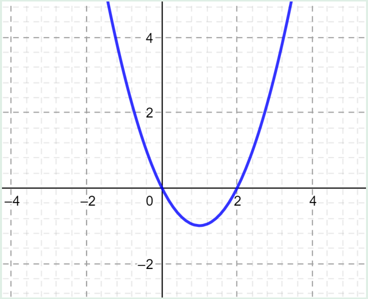


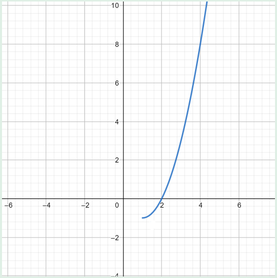
Figure: Gráfica de la función $f(x)$.

Con base en la gráfica de la función $f(x)$ se deduce que $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = [-1, +\infty[$. Así, la función original no es inyectiva pues por ejemplo $f(0) = f(2) = 0$, no obstante $0 \neq 2$. Asimismo, la función no es sobreyectiva pues $Rec(f) \neq \mathbb{R}$. Es decir, f no es invertible.

Ejemplo 5

Se observa que si se restringe el conjunto de llegada B al $Rec(f)$ para que f sea sobreyectiva y, si se restringe el dominio de f al intervalo $[1, +\infty[$, se obtiene una nueva función construida a partir de f la cual es biyectiva.

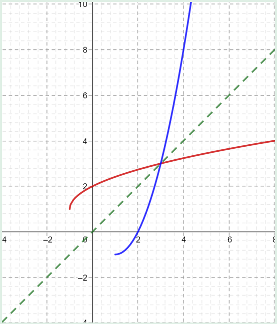
Es decir si definimos $f_1 : [1, +\infty[\to [-1, +\infty[$, tal que $f_1(x) = (x-1)^2 - 1$. Cuya gráfica es:



Es una función invertible, y su inversa es la función $f_1^{-1} : [-1, +\infty[\to [1, +\infty[$ definida por $f_1^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.

Ejemplo 5

Si graficamos en el mismo plano las funciones f y f^{-1}, se tiene:



Notar además que si se comprueba el resultado, se observa si las dos composiciones producen la función identidad, como esperamos:

$$\left(f_1^{-1} \circ f_1\right) = f_1^{-1}(f_1(x)) = f_1^{-1}(x^2 - 2x) = (1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = x$$

$$\left(f_1 \circ f_1^{-1}\right) = f_1(f_1^{-1}(x)) = f_1(1 + \sqrt{x + 1}) = (1 + \sqrt{x + 1})^2 - 2(1 + \sqrt{x + 1}) = x$$

Ejercicio propuesto

Determine, si existe, una fórmula para la inversa de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 1$ (b) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|)$

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE