Tutoría 8:

Cachorr@404

Cálculo 1 - Límites

Tutores para esta sesión

Constanza Palomo

constanza.palomo@usach.cl

Bastián Onetto

bastian.onetto@usach.cl

Jorge Sandoval

jorge.sandoval.m@usach.cl

Temario

Sucesiones

1

Límites

2

Ejercicios

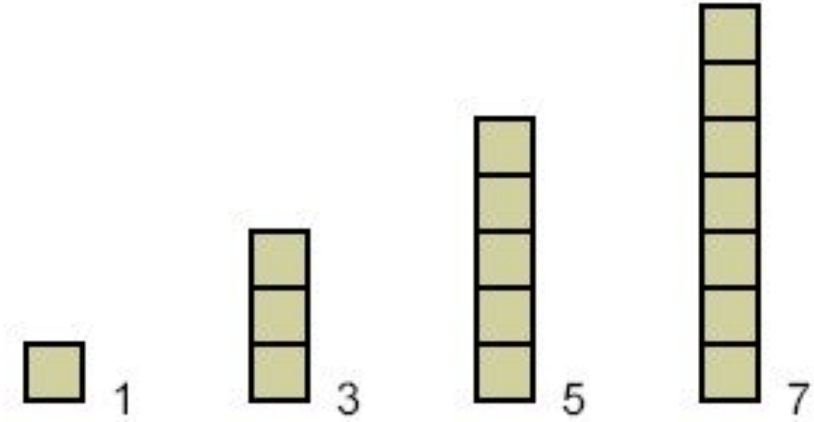
3

Sucesiones

01

Sucesiones

Definición: Una sucesión es una función que une números en N con números reales (en R), es decir, $f : N \to R$.
Otra forma de verlo es como $f(n) = a_n$, o también $\{a_n\}$ donde a_n es llamado término general de la sucesión.



a_1 a_2 a_3 a_4

Teoremas

Inducción

- P(1) es V
- si P(n) es V, eso implica que P(n+1) es V

Buen Orden

N es un conjunto bien ordenado, todo subconjunto A en N tiene primer elemento (a_1)

Recurrencia

- F es fn. sobre N
- F(1) = x
- Para cada n, F(n+1) = G(F(n))

Ejemplo recurrencia

El teorema de recurrencia puede ser explicado de mejor forma viendo los siguientes casos:

Progresión Aritmética

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d \end{aligned}$$

Progresión Geométrica

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n \cdot r \end{aligned}$$

Pregunta!

Cual es la siguiente sucesión:

F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2)

Convergencia de sucesiones

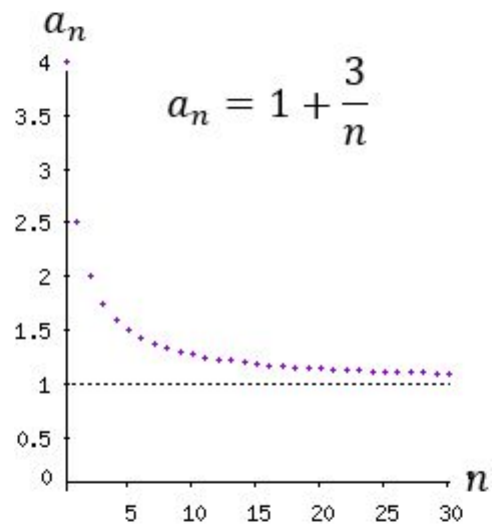
Para entender la convergencia de sucesiones, se deben tomar en cuenta los siguientes conceptos:

- Sucesiones Acotadas
- Monotonía de sucesión
- Límites de una sucesión

Sucesiones Acotadas

Definición:

Diremos que una sucesión es acotada si existe un número positivo M tal que $|a_n| < M$, para todo $n \in N$.



Monotonía de sucesiones

Se dice de una sucesión:

- **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para todo n.
- **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.
- **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$, para todo n.
- **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

- **monótona** si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

Límites

02

Límites para una sucesión cuando tiende a infinito

Caso 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{Q(n)}$$

Donde F(n) es un polinomio de grado mayor que Q(x)

Infinito

Caso 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{Q(n)}$$

Donde Q(n) es un polinomio de grado mayor que F(x)

Cero

Caso 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{Q(n)}$$

Donde F(n) es un polinomio de grado igual que Q(x)

Valor real != 0

Ejercicios!

1º	2º	3º	4º
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4}{n^2-n+3}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-n}{6n^2+n}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^2+10n}{n^5+2n^3+6n^2+10}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(1-2n)}{(1-3n)(2-n)}$

No olvides levantar la mano para participar

¿Dudas?

Fin de las sucesiones

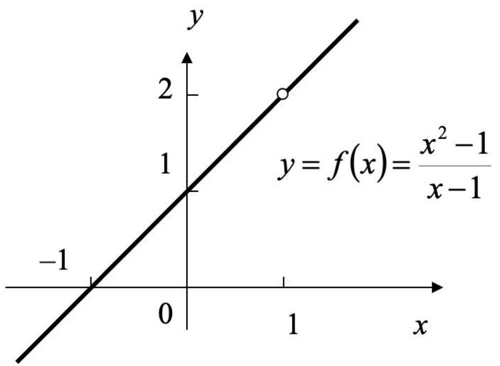
Límites de funciones

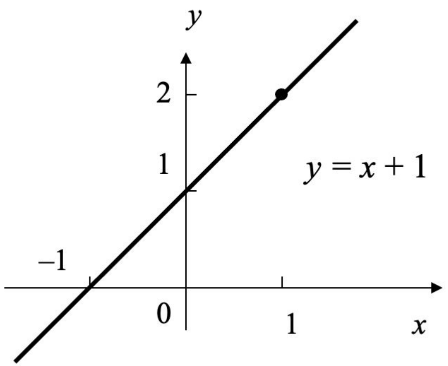
Analicemos la función: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

La función está definida para toda x diferente de 1.

Podemos simplificar la función de la siguiente manera:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1 \qquad x\neq 1$$





Analizando el comportamiento

Valores de x que se aproximan a 1:	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \quad x\neq 1$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

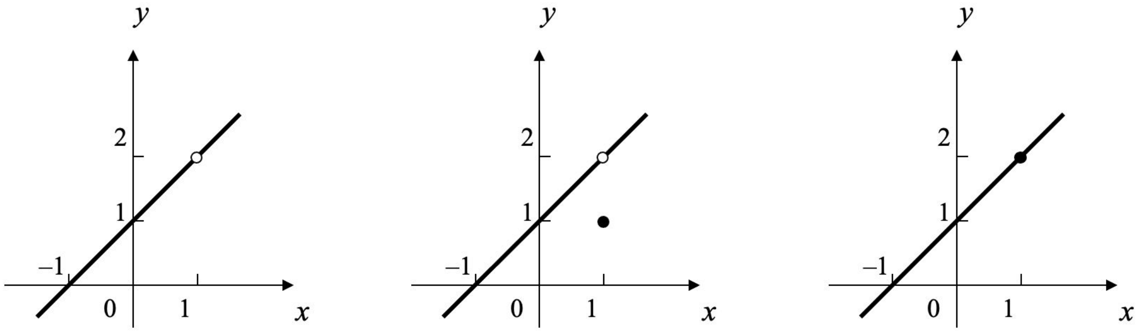
Decimos que f(x) está muy cercano a 2 conforme x se aproxima a 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2 \ o \ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

Límite de un caso particular

Sea $f(x)$ definida en un intervalo alrededor de x_0, posiblemente excepto en x_0. Si $f(x)$ se acerca de manera arbitraria a L para toda x suficientemente cerca de x_0, se dice que f se aproxima al límite L conforme x se aproxima a x_0, y se escribe

$$\lim_{x_0 \to 1} f(x) = L$$



$a)\ f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

$b)\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$c)\ h(x) = x + 1$

Definición formal

DEFINICIÓN Límite de una función

Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente el mismo x_0. Decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 es el número L,** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que, para toda x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Propiedades de los límites

Las reglas siguientes son válidas si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$ (L y M son números reales)

1. *Regla de la suma*: $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. *Regla de la resta*: $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. *Regla del producto*: $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$
4. *Regla del producto por una constante*: $\lim_{x \to c} k\, f(x) = kL$
5. *Regla del cociente*: $\lim_{x \to c} f(x) / g(x) = L / M,\ M \neq 0$
6. *Regla de la potencia*: $\lim_{x \to c} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

Límites de polinomios

Los límites de polinomios pueden ser calculados por sustitución

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, entonces

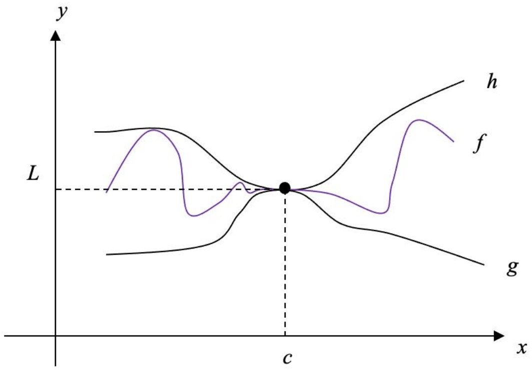
$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$$

Teorema del Sandwich

Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$. Supóngase tambien que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$



CACHORR@ 404

Ejercicio 1

m) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+9+\cdots+3n}{5+10+15+\cdots+5n}$$

sucesión

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{a_1}{3}+\overset{a_2}{6}+\overset{a_3}{9}\cdots\boxed{3n}}{5+10+15\cdots 5n} \qquad \boxed{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n} \Big/ \frac{n}{n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{5\cancel{n}}{\cancel{n}}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 2

h) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^3+3}}$$

$$n^{0} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5}{\sqrt{n^4 + 3n} - \sqrt{n^3 + 3}} = \frac{5}{\infty} = 0$$

$$n^{\text{algo}} = \text{algo}$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 3

g) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(3n^2+1)^2}{(4n+7)(1-2n^2)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(3n^2+1)^2}{(4n+7)(1-2n^2)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(9n^4+6n^2+1)}{(4n+7)(1-4n^2+4n^4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{18n^5+12n^3+2n+36n^4+24n^2+4}{4n-16n^3+16n^5+7-28n^2+28n^4} \Big/ \cdot \frac{n^5}{n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{18\cancel{n^5}}{\cancel{n^5}} + \cancel{\frac{12n^3}{n^5}}\to 0 + \cancel{\frac{2n}{n^5}}\to 0 + \cancel{\frac{36n^4}{n^5}}\to 0 + \cancel{\frac{24n^2}{n^5}}\to 0 + \cancel{\frac{4}{n^5}}\to 0}{\cancel{\frac{4n}{n^5}}\to 0 - \cancel{\frac{16n^3}{n^5}}\to 0 + \frac{16\cancel{n^5}}{\cancel{n^5}} + \cancel{\frac{7}{n^5}}\to 0 - \cancel{\frac{28n^2}{n^5}}\to 0 + \cancel{\frac{28n^4}{n^5}}\to 0}$$

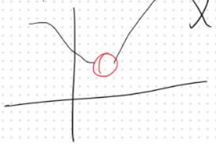
$$\lim_{n\to\infty} \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \quad //$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \quad g(x) \\ -x & \text{si } x < 0 \quad h(x) \end{cases} \longrightarrow 0 \quad i(x)$$

dem que el $\lim f(x)$ cuando $x \to 0 = 0$ existe

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \; / \; \lim g(x) = \lim h(x) = 0$$

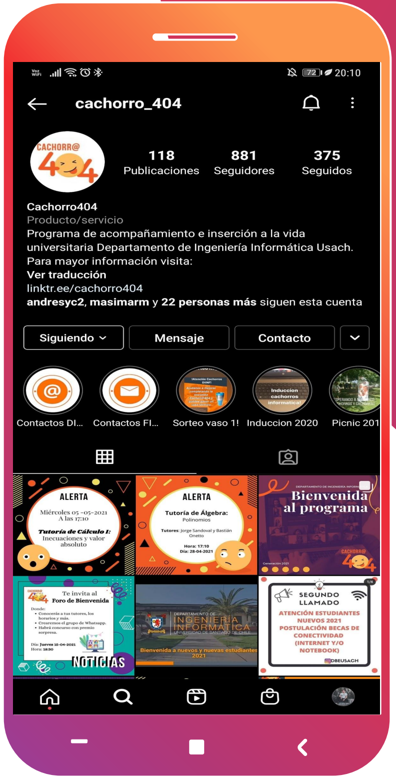
$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} -x = -0 = 0$$



$$\lim i(x) = 0$$

q.e.d

por teorema del sanguchito.



Síguenos en instagram!

@cachorro404

CACHORR@ 404

¡Gracias por asistir!