Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:____________________ Sección:____________________

Pep 1

Forma A

1.- Sean p y q dos proposiciones, definamos el conector lógico $\star$ como:

$$p \star q \equiv \sim [(\sim p \wedge q) \implies \sim q]$$

i) Pruebe $p \star q \equiv \sim q \star \sim p$.

ii) Pruebe que $(p \star q) \star q \equiv \sim p \star q$.

iii) Sean t y w dos proposiciones y la proposición compuesta:

$$t \star (w \star (q \star (p \star q))),$$

determine si es tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

i) Primero se debe hacer una simplificación:

$$\begin{aligned} p \star q &\equiv \sim [(\sim p \wedge q) \implies \sim q] \\ &\equiv \sim [\sim (\sim p \wedge q) \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [(p \vee \sim q) \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [p \vee \sim q \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [p \vee \sim q] \\ &\equiv \sim p \wedge q \quad (0,4pt) \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} p \star q &\equiv \sim p \wedge q \\ &\equiv q \wedge \sim p \\ &\equiv \sim (\sim q) \wedge \sim p \\ &\equiv \sim q \star \sim p. \quad (0,3pt) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(p \star q) \star q &\equiv \sim (\sim p \wedge q) \wedge q \quad \text{(0,3pt por correcto reemplazo)}\\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge q\\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)\\ &\equiv (p \wedge q) \vee F\\ &\equiv p \wedge q\\ &\equiv \sim (\sim p) \wedge q\\ &\equiv \sim p \star q \quad (0,4pt)\end{aligned}$$

iii) Usando la simplificación dada en $i)$ podemos notar que:

$$\begin{aligned}q \star (p \star q) &\equiv \sim q \wedge (\sim p \wedge q)\\ &\equiv \sim q \wedge \sim p \wedge q\\ &\equiv F \quad (0,2pt)\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $q \star (p \star q)$ es una contradicción. Además, para cualquier proposición h:

$$h \star F \equiv \sim h \wedge F \equiv F,$$

por ende , $h \star F$ es una contradicción, sea cual sea la proposición h (0,2pt), así:

$$\begin{aligned}t \star (w \star (q \star (p \star q))) &\equiv t \star (w \star (F))\\ &\equiv t \star (w \star F)\\ &\equiv t \star F\\ &\equiv F\end{aligned}$$

por ende es una contradicción.(0,2pt)
De la misma manera se puede resolver directamente usando la definición de $\star$.
(Cada uno de los ejercicios se puede realizar usando tablas de verdad, lo cual da el mismo puntaje en cada pregunta)

2.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$ y el polinomio $P(x)$ definido por:

$$P(x) = ax^4 + 13bx^3 - bx^2 - 13x + 6.$$

i) Encuentre los valores de a y b para que $x = 1$ y $x = -1$ sean raíces del polinomio $P(x)$.

ii) Encuentre las raíces del polinomio:

$$Q(x) = -15x^4 + 39x^3 - 3x^2 - 39x + 18.$$

Solución:

i) Como $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de $P(x)$, se tiene que $P(1) = P(-1) = 0$ (0,2pt), por lo tanto se puede generar el sistema de ecuaciones:

$$a(1)^4 + 13b(1)^3 - b(1)^2 - 13(1) + 6 = 0$$
$$a(-1)^4 + 13b(-1)^3 - b(-1)^2 - 13(-1) + 6 = 0$$

quedando entonces:

$$a + 13b - b - 13 + 6 = 0 \quad (0,2pt) \tag{1}$$
$$a - 13b - b + 13 + 6 = 0 \quad (0,2pt) \tag{2}$$

Restando (1) con (2) se obtiene la ecuación $26b - 26 = 0$ lo que tiene como resultado $b = 1$ (0,2pt). Usando ese resultado en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene $a = -5$(0,2pt).

ii) Para encontrar las raíces del polinomio $Q(x)$ primero hay que considerar que, resolver la ecuación:

$$-15x^4 + 39x^3 - 3x^2 - 39x + 18 = 0,$$

es lo mismo que resolver la ecuación (0,1pt):

$$-5x^4 + 13x^3 - x^2 - 13x + 6 = 0,$$

la cual es el polinomio $P(x)$ con los valores de a y b obtenidos en i), por lo tanto, podemos concluir que $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de $Q(x)$(0,2pt). Por el teorema del factor tenemos entonces que $(x-1)$ y $(x+1)$ dividen a $Q(x)$ (0,2pt) y por ende también lo hace $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, así haciendo división sintética entre $Q(x)$ y $x^2 - 1$ obtenemos:

$$Q(x) = (x^2 - 1)(-15x^2 + 39x - 18), \quad (0, 2pt)$$

es decir, para resolver la ecuación $Q(x) = 0$, basta con resolver la ecuación:

$$-15x^2 + 39x - 18 = 0, \quad (0, 1pt)$$

soluciones que están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 - 1080}}{-30},$$

lo cual entrega los valores $x = \frac{-39+21}{-30} = \frac{3}{5}(0, 1pt)$ y $x = \frac{-39-21}{-30} = 2(0, 1pt)$.
Las raíces de $Q(x)$ son $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = \frac{3}{5}$.

3.- Sean A, B, C tres conjuntos definidos por:

$$A = \{x \in [-170, 170] \mid (\exists k \in \mathbb{Z} : x = k^2) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1)\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 100 \ \wedge [\forall r \in \mathbb{N} : \left(\frac{x}{r} \in \mathbb{N} \implies (x = r \vee r = 1)\right)]\}.$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \nexists p \in \mathbb{Z} : x = 4p - 2\}.$$

i) Determine el valor de $n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$.

ii) Pruebe que $A \subset C$ y $B \subset C$.

Solución:

Primero se deben analizar los conjuntos A, B y C.
Sea $x \in A$, entonces x debe cumplir tres condiciones

- $(\exists k \in \mathbb{Z} : x = k^2)$.
- $(\exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1)$
- $x \in [-170, 170]$

La primera significa que $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ (0,1pt) y la segunda que x es un número impar (0,1pt), por lo tanto podemos concluir que :

$$A = \{1, 9, 25, 49, 81, 121, 169\}. \quad (0, 2pt)$$

Por otro lado sea $x \in B$, entonces x debe cumplir tres condiciones:

- $2 < x \leq 100$.
- $\forall r \in \mathbb{N} : \left(\frac{x}{r} \in \mathbb{N} \implies (x = r \vee r = 1)\right)$.
- $x \in \mathbb{N}$.

La segunda condición nos dice que todo elemento natural que divida en $\mathbb{Z}$ a x o debe ser 1 o el mismo x, es decir que x debe ser un número primo (0,2pt), por lo tanto podemos concluir que:

$$B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}. \quad (0, 2pt)$$

i) Con lo anterior, es fácil notar que :

   - $n(A) = 7$ (0,1pt)
   - $n(B) = 24$(0,1pt)
   - $n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$(0,1pt)
   - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 24 - 0 = 31.$(0,1pt)

ii) El conjunto C es solo el conjunto de todos los x que no se pueden escribir de la forma $4p - 2 = 2(2p - 1)$ para $p \in \mathbb{Z}$, es decir, es el conjunto de todos los números reales que no son los números pares de la forma antes dicha (en particular, todos los números impares están contenidos en C). (0,4pt).
Sea $x \in A$, supongamos que x se puede escribir de la forma $x = 4p - 2$ para cierto $p \in \mathbb{Z}$, esto sería una contradicción ya que x es un número impar, por lo tanto $A \subset C$.(0,2pt).
También es válido probar que cada elemento de A no se puede escribir de dicha manera.

Por otro lado, para B, basta notar que todo número primo es impar, ya que de no serlo, sería par y por ende sería divisible por 2, por lo tanto B es un conjunto compuesto de solo números impares y ninguno de ellos se podría escribir de la forma $4p-2$, por lo tanto $B \subset C$.(0,2pt).
También es válido probar que cada elemento de B no se puede escribir de dicha manera.