Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Guía preparación Pep 1

1. Determine si las siguientes expresiones son contradicciones, tautologías o contingencias.

   (a) $(p \wedge q) \vee [(\sim p) \vee (\sim q)]$

   (b) $[(\sim p) \wedge q] \vee [p \wedge (\sim q)]$

   (c) $[(\sim p) \wedge q] \wedge [p \wedge (\sim q)]$

   (d) $[(\sim p) \wedge p]$

   (e) $[(\sim p) \wedge q] \wedge [p \wedge (\sim q)]$

   (f) $(p \vee q) \wedge ((\sim p) \wedge (\sim q))$

   (g) $\sim [(p \iff q)] \vee (q \implies (\sim p))$

   (h) $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies [p \implies r]$

   (i) $p \implies [(\sim q) \implies (p \vee q)]$

   (j) $(p \implies q) \vee (q \implies p)$

   (k) $[p \wedge (r \wedge (\sim p))] \implies (p \vee (\sim r))$

   (l) $\sim ((\sim p) \implies q) \iff (p \vee q)$

   (m) $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$

   (n) $p \implies (q \implies (p \wedge q))$

   (o) $((p \wedge q) \implies r) \longrightarrow (p \implies (q \implies r))$

   (p) $((p \implies q) \wedge p) \implies q$

   (q) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \implies q$

   (r) $[(p \wedge q) \wedge (r \wedge s) \wedge (p \vee r)] \implies (q \vee s)$

   (s) $[[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \wedge (p \vee r)] \implies (q \vee s)$

   (t) $[(p \implies q) \vee (q \implies s)] \iff (p \implies s)$

2. Si la proposición $\sim p \Rightarrow \sim (\sim p \wedge q)$ es falsa, determine el valor de verdad de:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)] \Rightarrow [(q \vee p) \Rightarrow p]$$

3. Si la proposición $\{\sim [(p \wedge r) \Rightarrow (p \wedge q)]\} \vee \{(q \wedge \sim r) \wedge (p \iff q)\}$ es verdadera, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$p \wedge (q \vee r)$$

4. Si $p \Rightarrow \sim (p \wedge q)$ es una proposición falsa, determine el valor de verdad de la proposición:

$$\sim (p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow \sim q \wedge r$$

5. Se define el conectivo $\rhd$ por $p \rhd q \equiv \sim (p \Rightarrow q)$. Demostrar que $p \rhd (p \rhd q) \iff (p \wedge q)$.

6. Sean A, B dos conjuntos definidos por:

$$A = \{x \in [0, 100] \mid (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 5k) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k)\}$$
$$B = \{x \in [0, 100] \mid (\forall r \in \mathbb{N} : x + r \geq 100) \vee (\exists r \in \mathbb{N} : x = 11r + 12)\}.$$

   i) Determine explícitamente los conjuntos A y B.
   ii) Determine $n(A \cap B)$.
   iii) Determine $n(A \cup B)$.

7. Considere los conjuntos

$$A := \{n \in \mathbb{Z} \mid (\exists k \in \mathbb{Z} : n = 3 \cdot k) \iff (\forall k \in \mathbb{Z} : n \neq 2 \cdot k)\}$$

$$B := \{n \in \mathbb{Z} \mid (\forall k \in \mathbb{Z} : n \neq 3 \cdot k) \vee (\forall k \in \mathbb{Z} : n \neq 2 \cdot k)\}.$$

   (a) Demuestre que $A \subset B$.
   (b) Determine la cardinalidad de $A \cap [0, 100]$.

8. Sea la proposición :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} - \{0\} : ((\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : x \cdot y = 2 \cdot k + 1) \Rightarrow *)$$

.

9. Elija una de las opciones para reemplazar en $*$, para que la proposición anterior sea verdadera.

   (a) $\exists r \in \mathbb{Z} : y = 2 \cdot r + 1$
   (b) $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$
   (c) $\forall r \in \mathbb{Z} : r = 2 \cdot y$
   (d) $\exists r \in \mathbb{Z} : y = 2 \cdot r$

10. Para qué valores de n, m se cumple:

$$\forall \ell \in \mathbb{N} : \Big(\Big(\exists k \in \mathbb{N} : \ell \cdot k = n\Big) \Rightarrow \Big(\exists k \in \mathbb{N} : \ell^2 \cdot k = m\Big)\Big)$$

   (a) $n = 6$ y $m = 108$
   (b) $n = 25$ y $m = 5$
   (c) $n = 10$ y $m = 50$
   (d) $n = 7$ y $m = 129$

11. Determine los valores de p y q para que el polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + px + q,$$

tenga como divisores a los polinomios $(x-2)$ y $(2x+1)$.

12. Determine los valores posibles de k para que el polinomio:

$$Q(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20,$$

al ser dividido por $(x-k)$ se obtenga un resto -4.

13. Determine el valor de k en el polinomio:

$$T(x) = x^3 + (2 - \frac{1}{5}k)x^2 - (2k+1)x + 20 = 0,$$

sabiendo que $x = 1$ es una raíz de $T(x)$.