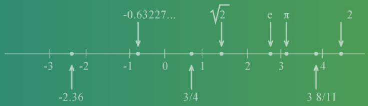
Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Axiomas de Cuerpo



Coordinación de Cálculo I
Primera versión - Agosto 2020

Profesor:
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Axiomas de Cuerpo

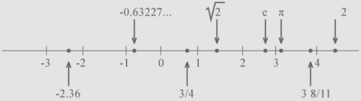
Coordinación de Cálculo I
Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola



FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Definición:

Un axioma es una premisa que, por considerarse evidente, se acepta sin demostración, como punto de partida para demostrar otras afirmaciones. Un Axioma es una verdad intuitiva que tiene suficiente evidencia para ser aceptada como tal.

El conjunto de los números reales denotado por $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto, cumple con los axiomas de cuerpo. Estos axiomas se presentan a continuación:

Axiomas para la Suma:

1. **Asociatividad:** Para cualesquiera $a, b, c, \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. **Conmutatividad:** Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.
3. **Existencia del elemento neutro:** Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. **Existencia del inverso aditivo:** Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = b + a = 0$. Notación usual $b = -a$.

Axiomas para el Producto:

1. **Asociatividad:** Para cualesquiera $a, b, c, \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. **Conmutatividad:** Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
3. **Existencia del elemento neutro:** Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. **Existencia del inverso multiplicativo:** Para todo $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot c = c \cdot a = 1$.
   Observación: Usualmente denotamos $c = a^{-1}$

Solo uno de los axiomas involucra directamente ambas operaciones:

Propiedad Distributiva

1. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Notar que las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ son compatibles con la relación de igualdad "$=$". Es decir que, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ y $a \cdot c = b \cdot c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

La igualdad "$=$" es una relación que satisface:

- Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a = a$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a = b$ implica $b = a$.
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.

Definición:

- **Resta:** Para $a, b \in \mathbb{R}$, definimos $a - b := a + (-b)$.

Observación: Note que la la resta de a y b es la suma de a más el inverso aditivo de b.

A continuación, listamos algunas propiedades que se usaran frecuentemente en este curso:

1. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a + b = b + a = 0$ y $a + c = c + a = 0$, entonces $b = c$.
2. Si $a \neq 0$, y $b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $ab = ba = 1$ y $ac = ca = 1$, entonces $b = c$.
3. $-0 = 0$
4. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$.
5. Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que existe $c \in \mathbb{R}$ que cumple $x + c = c$, entonces $x = 0$.
6. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \cdot 0 = 0$.
7. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$.
8. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $-a = -1 \cdot a$.

Teoremas

1. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $-(a-b) = b-a$.
2. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $-(a+b) = -b-a$.
3. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.
4. $a+b=c$ equivale a $a = c-b$
5. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a-(-b) = a+b$.
6. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
7. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)(-b) = ab$.
8. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a(b-c) = ab-ac$.

1.- Cuadrado de un binomio $(a \pm b)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Note que el desarrollo de este producto corresponde al cuadro del primer término, más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término.

Prueba

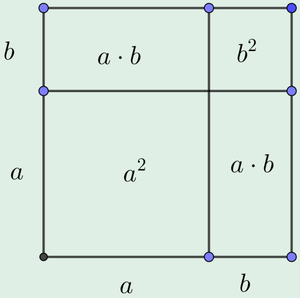
$$\begin{array}{ccl}
(a+b)^2 & = & (a+b)\cdot(a+b) \\
\textit{Distributividad} & = & (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b \\
\textit{Distributividad} & = & a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b \\
\textit{Conmutatividad} & = & a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b \\
\textit{Asociatividad} & = & a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl}
(2x-4y)^2 & = & (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 4y + (4y)^2 \\
 & = & 4x^2 - 16xy + 16y^2
\end{array}$$

Interpretación geométrica

Observemos el cuadrado del binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



2.- Suma por su diferencia $(a+b)\cdot(a-b)$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

El desarrollo de este producto corresponde a la diferencia de los cuadrados de los términos.

3.- Producto de binomios con un término común $(x+a)\cdot(x+b)$

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)\cdot x+a\cdot b$$

Es el cuadrado del término común más el producto del termino común por la suma de los terminos no comunes y más el producto de los términos no comunes.

4.- Cubo de un binomio $(a\pm b)^3$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$$

Corresponde al cubo del primer término, más (o menos) el triple del cuadrado del primer termino multiplicado por el segundo, más el triple del primer término multiplicado por el cuadrado del segundo y más (o menos) el cubo del segundo.

5.- Suma y diferencia de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Prueba

Demostracion, ejercicio para al estudiante.

Ejemplo

$$\begin{aligned} (3x + 2y) \cdot (3x - 2y) &= (3x)^2 - (2y)^2 \\ &= 9x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} (3a + 7) \cdot (3a - 2) &= (3a)^2 + (7 - 2) \cdot 3a + 7 \cdot (-2) \\ &= 9a^2 + 15a - 14 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} (a + 2)^3 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 \end{aligned}$$

Ejercicios

I) Efectuar las operaciones indicadas

a) $(p-q)^2$

b) $\left(\frac{a}{2}+2b\right)^2+\left(2a-\frac{b}{2}\right)^2$

c) $(x^2-2xy)(x^2+2xy)+(x^2+2xy)^2$

d) $(x^2-3)(x^2+4)$

e) $(9a-4)(9a+11)$

f) $\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^3$

II) Demostrar que

- $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2$.
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

Factorizar una expresión algebraica (o suma de términos algebraicos) consiste en escribir dicha expresión, en forma de multiplicación.

1.- Factor común (monomio y polinomio)

Cuando **todos** los términos de la expresión presenta un factor común (que puede ser un monomio o un polinomio), ese término común es uno de los factores de la multiplicación.

Ejemplo

1) *Factorizar la siguiente expresión* $2a + 6a^2$
   Solución:
   Vemos que el término $2a$ *es factor común en el binomio, luego su factorización es:*

$$2a + 6a^2 = 2a(1 + 3a)$$

2) *Factorizar la siguiente expresión* $m(2a + b) - 3n(2a + b)$
   Solución:
   El factor común es $(2a + b)$ *y escribimos*

$$m(2a + b) - 3n(2a + b) = (2a + b)(m - 3n)$$

Ejemplo

3) *Factorizar la siguiente expresión* $6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2$
Solución:
El factor común es $3xy$*, así escribimos*

$$6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2 = 3xy(2y - 5x + 7xy)$$

Observación

- *El proceso está completo si no es posible seguir factorizando la expresión en los paréntesis (o factores).*
- *Por el axioma de la conmutatividad en la multiplicación, no importa el orden de los factores que se entregue en el resultado.*

Factor común compuesto

No siempre todos los términos de una expresión algebraica tiene un factor común, pero se podría usar asociatividad en la suma, para poder determinar factores.

Ejemplo

Factorizar la expresión $ac + ad + bc + bd$

Solución:

Notar que, el primer y el segundo término tienen el factor común a *y el tercer y cuarto término tienen el factor común* b*, asociando se tiene*

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (c + d)(a + b) \end{aligned}$$

Ejemplo

Factorizar $4x^2 - 9y^2$
Solución:
Observemos que esta expresión es una diferencia de cuadrados así

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= (2x + 3y) \cdot (2x - 3y) \end{aligned}$$

Ejemplo

Factorizar $8x^3 + 27y^3$
Solución:
Observemos que esta expresión es una suma de cubos así

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y) \cdot ((2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2) \\ &= (2x + 3y) \cdot (4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones

a) $(1+a)(x-y)-(x-y)^2$

b) $\dfrac{3a}{b}+\dfrac{12a}{b^2}-\dfrac{21a}{b^3}$

c) $ax+bx+cx-ay-by-cy$

d) x^2y^3-y

e) $x^{2a}-y^{2b}$

f) $a^2-b^2-ax-ay$

g) x^2-6x+9

h) x^3+a^3

i) $x^{12}-y^{12}$