Principio de Inducción

1. Demuestre, usando el principio de inducción, las siguientes igualdades:

   i) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

   ii) $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$.

   iii) $1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$.

2. Demuestre, usando el principio de inducción, las siguientes desigualdades:

   i) $3^n>2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

   ii) $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 1$.

   iii) $n!>3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 7$.

3. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones:

   i) $6n-1$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ii) $n(n^2+5)$ es divisible por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$. (***Hint:*** $n(n+1)$ ***es un número par)***

   iii) 7^n-2^n es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   iv) $7^{2n}+16n-1$ es un múltiplo de 64, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   v) $2^n+(-1)^{n+1}$ es divisible por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea la sucesión recursiva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = \frac{1}{3-a_{n-1}}.$$

   i) Demuestre que $(a_n)^2-3a\cdot n+1 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   ii) Demuestre que $0<a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea la sucesión recursiva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= \frac{12}{1+a_n}. \end{aligned}$$

i) Demuestre que $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Demuestre que $a_{2n} > 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.