SOLUCIONES EJERCICIOS FISICA I
versión 4, 2008

Autor : Luis Rodríguez Valencia[1]
DEPARTAMENTO DE FISICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Colaboradores: Alicia Lira, Rosemarie Pohl,
Verónica Peters,Yolanda Vargas,
Manuel Arrieta, Dagoberto Castro,
Juán Barrera, Jorge Lay.

3 de marzo de 2008

[1]email: lhrodrig@lauca.usach.cl

CAPÍTULO 1

Soluciones ejercicios

Nadie es perfecto, luego si encuentra errores, tenga la gentileza de informarnos

EJERCICIO 1.1 *Un cuerpo describe una órbita circular de radio $R = 100$ m en torno a un punto fijo con rapidez constante dando una vuelta completa por segundo. Determine la magnitud de la aceleración del cuerpo.*

Solución. La aceleración en órbita circular es de magnitud

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} \\ &= \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 100}{1} = 3947.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.2 *Si el cuerpo del ejercicio anterior, repentinamente siguiera en línea recta, determine la rapidez de crecimiento de la distancia al punto fijo en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solución. Este problema, es más apropiado hacerlo cuando se tenga claro el concepto de derivada. De todos modos se soluciona por medios geométricos a la manera de Newton. Si v es la rapidez en la órbita circular y sigue en línea recta, el cuerpo recorre una distancia

$$d = vt.$$

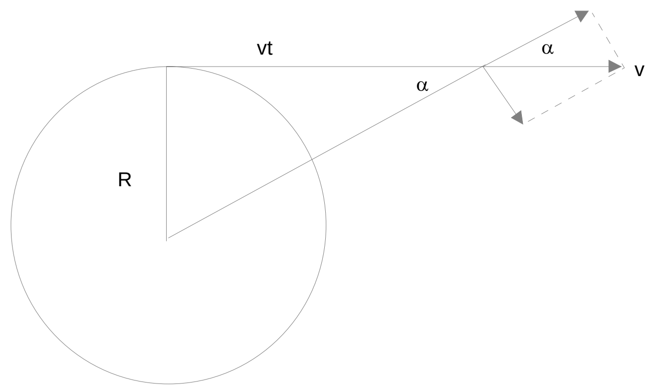


Figura 1.1:

Por el teorema de Pitágoras, la distancia D al centro de la circunferencia original crece de la forma

$$D = \sqrt{R^2 + v^2t^2}$$

ver figura. La velocidad del cuerpo podemos imaginarnos se puede descomponer en una parte paralela a esa distancia, la que la hace crecer y otra parte perpendicular que no la afecta. De modo que la rapidez de crecimiento de esa distancia D será

$$v \cos \alpha$$

pero de la figura

$$\cos \alpha = \frac{vt}{\sqrt{R^2 + v^2t^2}}$$

obteniendo para la rapidez de crecimiento

$$\frac{v^2t}{\sqrt{R^2 + v^2t^2}} \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

con $R = 100\,\mathrm{m}$ y $v = \frac{2\pi R}{1} = 628.319\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ se tiene una función conocida del tiempo.

EJERCICIO 1.3 *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente* $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg *y* $M_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg *siendo la distancia promedio entre ellos* $3{,}84 \times 10^8$ m. *Determine la fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna y la ejercida por la Luna sobre la Tierra.*

Solución. Ambas son de igual magnitud dada por

$$\begin{aligned} F &= G\frac{M_T M_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times 7{,}36 \times 10^{22}}{(3{,}84 \times 10^8)^2} \\ &= 1.\,99 \times 10^{20}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 1.4 *De los datos del ejercicio anterior, determine el tiempo empleado por la Luna en dar una vuelta completa en torno a la Tierra, en días.*

Solución. Considerando a la Tierra en reposo, la segunda ley de Newton da

$$G\frac{M_T M_L}{d^2} = M_L \frac{4\pi^2 d}{T^2}$$

o sea

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G M_T}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (3{,}84 \times 10^8)^3}{6{,}67259 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}} \\ &= 2.\,366\,894\,458 \times 10^6\,\mathrm{s} \\ &= 27.\,39 \text{ días} \end{aligned}$$

Sin embargo ambos cuerpos describen órbitas casi circulares en torno al centro de masa de modo que si llamamos R_L y R_T a los radios de las órbitas, con $R_L + R_T = d$ se tiene que

$$\begin{aligned} G\frac{M_T M_L}{d^2} &= M_L \frac{4\pi^2 R_L}{T^2}, \\ G\frac{M_T M_L}{d^2} &= M_T \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} G\frac{M_T}{d^2} &= \frac{4\pi^2 R_L}{T^2}, \\ G\frac{M_L}{d^2} &= \frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

y si las sumamos

$$G\frac{M_L + M_T}{d^2} = \frac{4\pi^2 d}{T^2},$$

expresión dada en clase en la forma

$$R^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}T^2$$

El efecto del movimiento de la Tierra da el valor

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{G(M_T + M_L)}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2(3{,}84 \times 10^8)^3}{6{,}67259 \times 10^{-11} \times (5{,}98 \times 10^{24} + 7{,}36 \times 10^{22})}} \\ &= 2.\,352\,462\,04 \times 10^6\,\mathrm{s} \\ &= 27.\,23 \text{ días} \end{aligned}$$

Ni uno de los dos cálculos puede ser considerado exacto porque el movimiento de la Luna es mucho mas complejo que una órbita circular.

▲

Ejercicio 1.5 *Determine aproximadamente la fuerza que hace la Luna sobre una persona que está sobre la superficie terrestre y de masa* 80 kg.

Solución. La distancia entre los centros es $d = 3{,}84 \times 10^8$ m. el radio terrestre es aproximadamente $6{,}38 \times 10^6$ m de manera que si la Luna esta sobre la persona la distancia sera $3{,}84 \times 10^8 - 6{,}38 \times 10^6 = 3.\,776\,2 \times 10^8$ m resultando para la fuerza

$$\begin{aligned} F &= G\frac{mM_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259 \times 10^{-11}\frac{80 \times 7{,}36 \times 10^{22}}{(3.\,776\,2 \times 10^8)^2} \\ &= 2.\,755 \times 10^{-3}\,\mathrm{N} \\ &= 2.\,8 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}f \end{aligned}$$

bastante pequeña.

EJERCICIO 1.6 *Si el radio de la Luna es* $1{,}74\times10^6$ m *determine cuanto pesa un* kg *de oro en la Luna.*

Solución. El cálculo de la fuerza gravitacional da

$$\begin{aligned} F &= G\frac{mM_L}{d^2} \\ &= 6{,}67259\times10^{-11}\frac{1\times7{,}36\times10^{22}}{(1{,}74\times10^6)^2} \\ &= 1.622\,\mathrm{N} \\ &= 0.166\,\mathrm{kg}f \end{aligned}$$

alrededor de 1/6 de lo que pesa en la superficie terrestre.

EJERCICIO 1.7 *De acuerdo a los radios orbitales, evalúe los periodos orbitales usando la tercera ley de Kepler, comparando con los datos tabulados.*

Solución. Los datos tabulados son

	R km	T años	T calculado
Mercurio	57, 909, 175	0,24084445	0,241
Venus	108, 208, 930	0,61518257	0,615
Tierra	149, 597, 890	0,99997862	1,000
Marte	227, 936, 640	1,88071105	1. 881
Júpiter	778, 412, 020	11,85652502	11. 871
Saturno	1, 426, 725, 400	29,42351935	29. 458
Urano	2, 870, 972, 200	83,74740682	84. 088
Neptuno	4, 498, 252, 900	163,7232045	164. 914
Plutón	5, 906, 376, 200	248,0208	248. 126

los periodos calculados lo son de acuerdo a

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_S}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_S}} \end{aligned}$$

la masa del Sol es aproximadamente $M_S = 1{,}991\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ de modo que resulta

Mercurio$T = 0{,}241$ años
Venus $T = 0{,}615$ años
Tierra $T = 1.\,000$ años
Marte $T = 1.\,881$ años
Júpiter $T = 11.\,871$ años
Saturno $T = 29.\,458$ años
Urano $T = 84.\,088$ años
Neptuno $T = 164.\,914$ años
Plutón $T = 248.\,126$ años

Las pequeñas diferencias podrían ser adjudicadas al hecho que las órbitas no son circulares.

EJERCICIO 1.8 *Determine a qué distancia entre la Tierra y la Luna, un cuerpo no es atraído hacia ninguno de los dos cuerpos.*

Solución. Sea x la distancia al centro de la Tierra y d la distancia entre la Tierra y la luna. Debe tenerse

$$G\frac{mM_T}{x^2} - G\frac{mM_L}{(d-x)^2} = 0$$

o sea

$$\frac{(d-x)}{x} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{1+\sqrt{\left(\frac{M_L}{M_T}\right)}} \\ &= \frac{3{,}84\times 10^8}{1+\sqrt{\left(\frac{7{,}36\times 10^{22}}{5{,}98\times 10^{24}}\right)}} \\ &= 3.\,456\,\times 10^8\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.9 *Un péndulo de longitud $L = 2$ m efectúa oscilaciones en la superficie terrestre. Determine el número de oscilaciones que efectúa en cada segundo.*

Solución. De acuerdo a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

resulta

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} \\ &= 2.\,84\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

y entonces la frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = 0.\,352\ \mathrm{osc/s}$$

▲

EJERCICIO 1.10 *Utilizando las leyes de Kepler, discuta la existencia del planeta X, hipotético planeta igual a la Tierra, en su misma órbita elíptica en torno al Sol, pero que permanece siempre oculto detrás del Sol y por eso no ha sido observado.*

Solución. No es posible porque si en algún instante ellos están en línea recta con el Sol, más tarde, el que tiene mayor rapidez, se adelantará.

▲

EJERCICIO 1.11 *Si la distancia promedio de la Tierra al Sol es aproximadamente* $1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ *determine aproximadamente la masa del Sol.*

Solución. Suponemos que además se conocen otros datos tal como que el periodo de la órbita terrestre $T = 365 \times 24 \times 3600\,\mathrm{s} = 3.\,153\,6 \times 10^7\,\mathrm{s}$ de manera que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{sol}}R^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} M_{sol} &= \frac{4\pi^2}{GT^2}R^3 \\ &= \frac{4\pi^2}{6{,}67259 \times 10^{-11}(3.\,153\,6 \times 10^7)^2}(1.496 \times 10^{11})^3 \\ &= 1.\,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

EJERCICIO 1.12 *Verifique con los datos de la tabla, el cumplimiento de la tercera Ley de Kepler.*

EJERCICIO 1.13 *De acuerdo a las masas de los planetas, evalúe las velocidades de escape desde sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

Solución. De acuerdo a los datos (dos primeras columnas)

	Masa kg	R km	v_e km s^{-1}	v_e km s^{-1} calculada
Mercurio	$0{,}33022 \times 10^{24}$	2439,7	4,25	$4.250\,1$
Venus	$4{,}8690 \times 10^{24}$	6051,8	10,36	$10.361\,9$
Tierra	$5{,}9742 \times 10^{24}$	6378,14	11,18	$11.180\,3$
Marte	$0{,}64191 \times 10^{24}$	3397	5,02	$5.021\,7$
Júpiter	$1898{,}7 \times 10^{24}$	71492	59,54	$59.533\,5$
Saturno	$568{,}51 \times 10^{24}$	60268	35,49	$35.480\,3$
Urano	$86{,}849 \times 10^{24}$	25559	21,29	$21.294\,8$
Neptuno	$102{,}44 \times 10^{24}$	24764	23,71	$23.495\,6$
Plutón	$0{,}013 \times 10^{24}$	1195	1,27	$1.204\,9$

y

$$v_e(M,R) = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

podemos calcular

Mercurio $v_e = 4.250\,1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Venus $v_e = 10.361\,9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Tierra $v_e = 11.180\,3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Marte $v_e = 5.021\,7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Júpiter $v_e = 59.533\,5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Saturno $v_e = 35.480\,3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Urano $v_e = 21.294\,8\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Neptuno $v_e = 23.495\,6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
Plutón $v_e = 1.204\,9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

EJERCICIO 1.14 *De acuerdo a las masas de los planetas y sus radios, evalúe la aceleración de gravedad en sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

Solución. La aceleración de gravedad es la fuerza gravitacional dividida por la masa es decir

$$g = \frac{GM_P}{R_P^2}$$

donde R_P y M_P son el radio y la masa del planeta.

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte
Masa$\times 10^{-27}$ g	0.33022	4.8690	5.9742	0.64191
Gravedad en la superficie $\mathrm{cm\,s^{-2}}$	370	887	980	371
Radio medio ecuatorial (Km)	2,439.7	6,051.8	6,378.14	3,397

Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
1,898.7	568.51	86.849	102.44	0.013
2312	896	869	1100	81
71,492	60,268	25,559	24,764	1,195

Calculando para el primero y el ultimo

$$\begin{aligned} g_{Mercurio} &= \frac{6{,}67259 \times 10^{-11}(0{,}33022 \times 10^{24})}{(2{,}4397 \times 10^{6})^2} \\ &= 3.702\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ &= 370{,}2\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{Pluton} &= \frac{6{,}67259 \times 10^{-11}(0{,}013 \times 10^{24})}{(1{,}195 \times 10^{6})^2} \\ &= 0.607\ \mathrm{m\,s^{-2}} \\ &= 60{,}7\ \mathrm{cm\,s^{-2}} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 1.15 *Estudie si existe alguna ley que de cuenta de las distancias de los planetas al Sol. (Por razones históricas, considere unidades donde la distancia Tierra Sol sea* 10*). Si existe alguna discontinuidad en su ley, aventure alguna hipótesis.*

Solución. Los datos, la primera columna de la tabla, cuando son expresados tomando arbitrariamente $R_T = 10$, dan los valores de la segunda columna. Esos números, con imaginación y paciencia se parecen a la secuencia de números enteros de la tercera columna, números llamados de Titius-Bode.

	R km	$10 \times R/R_T$	Titius-Bode
Mercurio	57909175	3,87	4
Venus	108208930	7,23	7
Tierra	149597890	10	10
Marte	227936640	15,22	16
Júpiter	778412020	5 2,03	52
Saturno	1426725400	9 5,37	100
Urano	2870972200	19 1,91	196
Neptuno	4498252900	30 0,69	388

Con esfuerzo y algo más, se puede ver que esos números corresponden a la secuencia $4 + 3 \times 2^{n-1}$ con $n = 1, 2, 3, \cdots$. Si se observa la tabla de esos valores, se descubre que correspondería la existencia de un planeta con $n = 4$

n	$4 + \frac{3}{2}2^n$
1	7
2	10
3	16
4	28
5	52
6	100
7	196
8	388

esto es, la secuencia predice un planeta con $10 \times R/R_T = 28$, entre Marte y Júpiter, precisamente donde está el cinturón de Asteroides. Nadie ha podido justificar esta "ley" de modo que al parecer se trataría de una coincidencia.

EJERCICIO 1.16 *Considere un satélite artificial en órbita ecuatorial geoestacionaria, es decir que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Determine entonces la altura del satélite sobre la superficie terrestre y la rapidez de él en su órbita.*

Solución. Si Ω denota la velocidad angular terrestre esto es

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s}$$

o bien que el periodo de la rotación T =día= $24 \times 3600 = 86400{,}0\,\mathrm{s}$, entonces la condición para que el satélite esté geo estacionario será

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

pero la rapidez en órbita circular es

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

de modo que tenemos

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

elevando al cuadrado

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r}$$

de donde podemos despejar r

$$\begin{aligned} r^3 &= \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} \end{aligned}$$

cálculos numéricos para
$T = 86400{,}0$
$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$
$G = 6{,}67259 \times 10^{-11}$
$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4.\,226 \times 10^7\,\mathrm{m}$
entonces la altura sobre la superficie terrestre será

$$\begin{aligned} h &= r - \underset{=}{R_T} \\ &= 4.\,226 \times 10^7 - 6{,}38 \times 10^6 \\ &= 3.\,588 \times 10^7\,\mathrm{m} \\ &= 3.\,588 \times 10^4\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

y

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 3072.\,791\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 11062.\,05\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

Ejercicio 1.17 *Respecto a la situación del problema anterior, si la altura del satélite es reducida a la mitad pasando a otra órbita circular, determine el número de vueltas que da el satélite por día en torno a la Tierra.*

Solución. Ahora la altura es la mitad, es decir

$$h = \frac{3.588 \times 10^7}{2} = 1.794 \times 10^7 \, \mathrm{m}$$

de donde

$$\begin{aligned} r &= 6{,}38 \times 10^6 + 1.794 \times 10^7 \\ &= 2.432 \times 10^7 \, \mathrm{m} \end{aligned}$$

$r = 2.432 \times 10^7$
entonces

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = 4050.569 \, \mathrm{m \, s^{-1}}$$

Suponiendo que la velocidad es en el mismo sentido de la rotación terrestre, esto corresponde a un periodo

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 37724.8398 \, \mathrm{s}$$

esto es en un día el satélite da

$$\frac{86400{,}0}{37724.8398} = 2{,}29$$

vueltas y la Tierra da una, luego relativo a la Tierra el satélite da

$$1{,}29$$

vueltas.

Ejercicio 1.18 *Considere a una persona en el Ecuador terrestre. Producto de la rotación terrestre esa persona está acelerada hacia el centro de la Tierra. Determine la magnitud de esa aceleración. Si la persona se para sobre una balanza y ella tiene una masa de* $80 \, \mathrm{kg}$ *determine la lectura de la balanza en* $\mathrm{kg}f$*. (*$1 \, \mathrm{kg}f = 9{,}8 \, \mathrm{N}$*)*

Solución. Si N es la fuerza que hace la balanza sobre la persona hacia arriba, la segunda ley de Newton da

$$mg - N = m\frac{v^2}{R_T}$$

donde v es la rapidez Ecuatorial de la Tierra que puede calcularse de acuerdo a

$$v = \frac{2\pi R_T}{T}$$

donde T es el periodo de rotación terrestre (un día). Así resulta

$$\begin{aligned} N &= mg - m\frac{v^2}{R_T} \\ &= mg - m\frac{4\pi^2 R_T}{T^2} \end{aligned}$$

y numéricamente
$m = 80\,\mathrm{kg}$
$R_T = 6{,}38 \times 10^6\,\mathrm{m}$
$g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$\begin{aligned} N &= 781.\,301\,\mathrm{N} \\ &= \frac{781.\,301}{9{,}8} \\ &= 79.\,72\,\mathrm{kg}f. \end{aligned}$$

O sea la rotación terrestre disminuye algo el peso de la persona.

Ejercicio 1.19 *Determine el radio que debería tener un planeta con la misma masa terrestre, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

Solución. La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

e igualando a $c = 2{,}99792458 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$$c = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}},$$
podemos despejar
$$\begin{aligned} R &= \frac{2GM_T}{c^2} = 0{,}008\,9\,\mathrm{m} \\ &= 0{,}89\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

(Si el radio Terrestre fuera reducido a un valor menor que ese, tendríamos un agujero negro con la masa de la Tierra)

▲

Ejercicio 1.20 *Determine el radio que debería tener una estrella con la misma masa que el Sol, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

Solución. Es igual, pero ahora $M_S = 1{,}991 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ obteniendo
$$R = \frac{2GM_S}{c^2} = 2956.\,339\ \mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 1.21 *Determine la velocidad de rotación que debería tener un planeta como la Tierra, en vueltas por día, para que despegáramos de la superficie en el Ecuador.*

Solución. Como sabemos que la rapidez para órbita circular a nivel del suelo sería
$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$
ello da $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7908.\,378\,974\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ de modo el periodo de la rotación debe ser
$$T = \frac{2\pi R_T}{v} = 5068.\,892\,\mathrm{s}$$
lo que corresponde a
$$\frac{86400{,}0}{5068.\,892} = 17.\,05$$
vueltas por día.

Capítulo 2

Soluciones ejercicios

Ejercicio 2.1 *Demuestre las identidades*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

Solución. Deben haber muchas demostraciones. La tercera es fácil pues si ϕ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 &= a^2b^2\sin^2\phi = \\ &= a^2b^2(1-\cos^2\phi) \\ &= a^2b^2-a^2b^2\cos^2\phi \\ &= a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.\end{aligned}$$

La segunda, intercambiar la cruz con el punto, se demuestra así:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} &= (a_yb_z-a_zb_y)c_x+(a_zb_x-a_xb_z)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z \\ &= c_xa_yb_z-c_xa_zb_y+c_ya_zb_x-c_ya_xb_z+c_za_xb_y-c_za_yb_x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= (b_yc_z-b_zc_y)a_x+(b_zc_x-b_xc_z)a_y+(b_xc_y-b_yc_x)a_z \\ &= c_xa_yb_z-c_xa_zb_y+c_ya_zb_x-c_ya_xb_z+c_za_xb_y-c_za_yb_x\end{aligned}$$

resultan iguales. La primera es larga. Veamos la componente x de $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, esta es:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b})_y c_z - (\vec{a} \times \vec{b})_z c_y &= (a_z b_x - a_x b_z)c_z - (a_x b_y - a_y b_x)c_y = \\
c_z a_z b_x - c_z a_x b_z - c_y a_x b_y + c_y a_y b_x &= (c_y a_y + c_z a_z)b_x - (c_z b_z + c_y b_y)a_x = \\
(\vec{c} \cdot \vec{a} - c_x a_x)b_x - (\vec{c} \cdot \vec{b} - c_x b_x)a_x &= (\vec{c} \cdot \vec{a})b_x - (\vec{c} \cdot \vec{b})a_x,
\end{aligned}$$

de modo que es claro que algo similar ocurre con las otras dos componentes y luego

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}.$$

▲

EJERCICIO 2.2 *Si los lados de un triángulo son a, b, c determine los ángulos del triángulo.*

Solución. Podemos obtenerlos de varias maneras, por ejemplo del teorema del coseno

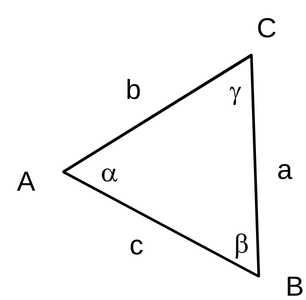
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

o bien

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

y otras dos similares

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\
\cos\beta &= \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},
\end{aligned}$$



Ejercicio 2.3 *Considere los puntos cuyas coordenadas son* $A = (1,1,1)$, $B = (1,2,1)$, $C = (-1,2,0)$ *determine*

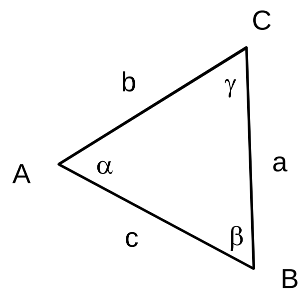
a) El área del triángulo ABC.

b) Los ángulos del triángulo ABC.

c) Las magnitudes de los lados del triángulo ABC.

d) Las alturas del triángulo ABC.

Solución. Los vectores con magnitud y dirección los lados del triángulo pueden escribirse



$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \overrightarrow{AB} = (1,2,1) - (1,1,1) = (0,1,0) \\
\vec{a} &= \overrightarrow{BC} = (-1,2,0) - (1,2,1) = (-2,0,-1) \\
\vec{b} &= \overrightarrow{CA} = (1,1,1) - (-1,2,0) = (2,-1,1)
\end{aligned}$$

de manera que

$\vec{c} \times \vec{a} = (0,1,0) \times (-2,0,-1) = (-1,0,2)$

$\vec{b} \times \vec{c} = (2,-1,1) \times (0,1,0) = (-1,0,2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (-2,0,-1) \times (2,-1,1) = (-1,0,2)$

entonces el área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}\left|(-1,0,2)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

las magnitudes de los lados son

$|\vec{c}| = |(0,1,0)| = 1$

$\left|\vec{b}\right| = |(2,-1,1)| = \sqrt{6}$
$|\vec{a}| = |(-2,0,-1)| = \sqrt{5}$
los ángulos están dados por
$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}{\left|\vec{b}\right||\vec{c}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
$\sin\beta = \frac{|\vec{c}\times\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$
$\sin\gamma = \frac{\left|\vec{b}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$
las alturas del triángulo se calculan de acuerdo a

$$\begin{aligned} h_C &= \left|\vec{b}\right|\sin\alpha = \sqrt{5}, \\ h_B &= |\vec{a}|\sin\gamma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \\ h_A &= |\vec{c}|\sin\beta = 1. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.4 *Considere un paralelógramo donde se dan tres vértices* $A = (0,1,1)$, $B = (1,0,1)$, $C = (1,1,0)$.

a) Determine el cuarto vértice.

b) Determine el área del paralelógramo.

c) Determine las longitudes de las diagonales.

Solución. Construyamos los vectores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (1,0,-1)\,, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,-1,0)\,, \end{aligned}$$

de manera que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2,-1,-1)\,,$$

entonces el cuarto vértice está en la posición (esta es una solución de otras posibles)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = (2,0,0)$$

El área del paralelógramo será

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = |(1,1,1)| = \sqrt{3},$$

donde las longitudes de las diagonales serán

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| &= |(2,-1,-1)| = \sqrt{6}, \\
\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| &= |(0,-1,1)| = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.5 *Escriba la ecuación de un plano que es perpendicular a la dirección* $\hat{n} = (1,-1,1)/\sqrt{3}$ *y que pasa a distancia* 3 *del origen.*

Solución. La ecuación resulta

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = 3,$$

o sea

$$x - y + z = 3\sqrt{3}.$$

▲

EJERCICIO 2.6 *Sea una recta*

$$\begin{aligned}
x &= 2t+1, \\
y &= -t+2, \\
z &= 3t-1,
\end{aligned}$$

siendo t *un parámetro. Determine su distancia al origen.*

Solución. La distancia de un punto arbitrario de la recta al origen es

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

esto es

$$d = \sqrt{(2t+1)^2 + (-t+2)^2 + (3t-1)^2} = \sqrt{14t^2 - 6t + 6}.$$

La cantidad subradical, polinomio de segundo grado, tiene un mínimo justo en el punto medio entre sus dos raíces que son

$t_1 = \frac{3}{14} + \frac{5}{14}i\sqrt{3}, t_2 = \frac{3}{14} - \frac{5}{14}i\sqrt{3}$ y el punto medio es

$$t = \frac{1}{2}(\frac{6}{14}) = \frac{3}{14},$$

y para ese valor d es la distancia de la recta al origen, cuyo valor resulta

$$d = \frac{5}{14}\sqrt{42} = 2.315,$$

▲

Ejercicio 2.7 *Sean $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ dos vectores. Determine la ecuación de un plano que pase por el origen y que contenga los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.*

Solución. Si los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están sobre el plano, entonces un vector normal al plano es $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$. Calculando resulta

$$\vec{N} = (1, 1, 0) \times (-1, 1, 1) = (1, -1, 2) .$$

La ecuación del plano es, en general

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = \text{constante},$$

y si pasa por el origen

$$\vec{r} \cdot \vec{N} = 0.$$

Calculando $(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z$ de modo que la ecuación del plano es

$$x - y + 2z = 0.$$

▲

Ejercicio 2.8 *Determine el área de un triángulo en función solamente de sus lados a, b y c.*

Solución. En principio el área del triángulo puede ser escrita de muchas maneras, por ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \\ &= \frac{1}{2}\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \\ &= \frac{1}{2}\left|\vec{c} \times \vec{a}\right| = \frac{1}{2}ca\sin\beta, \end{aligned}$$

pero la tarea es eliminar los ángulos. Para ello considere

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Expresando los "cosenos" en términos de los "senos" se obtiene

$$c = a\sqrt{1 - (\frac{2A}{ca})^2} + b\sqrt{1 - (\frac{2A}{bc})^2},$$

o bien

$$c^2 = \sqrt{c^2a^2 - (2A)^2} + \sqrt{b^2c^2 - (2A)^2},$$

y el resto es álgebra. Para despejar A

$(c^2 - \sqrt{c^2a^2 - (2A)^2})^2 = c^4 - 2\sqrt{(c^2a^2 - 4A^2)}c^2 + c^2a^2 - 4A^2 = b^2c^2 - 4A^2$

de donde

$c^2 + a^2 - b^2 = 2\sqrt{(c^2a^2 - 4A^2)}$

$(c^2 + a^2 - b^2)^2 = 4\,(c^2a^2 - 4A^2)$

$16A^2 = 4c^2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 = (a + b - c)\,(a + b + c)\,(c - a + b)\,(c + a - b)$

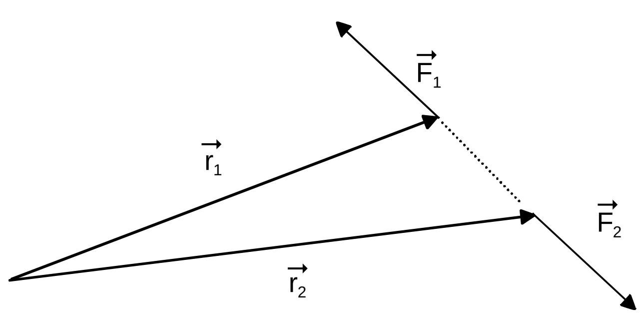
y finalmente

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b - c)\,(a + b + c)\,(c - a + b)\,(c + a - b)}.$$

Intente otro camino.

EJERCICIO 2.9 *Con relación a la figura, demuestre que si $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ entonces:*

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

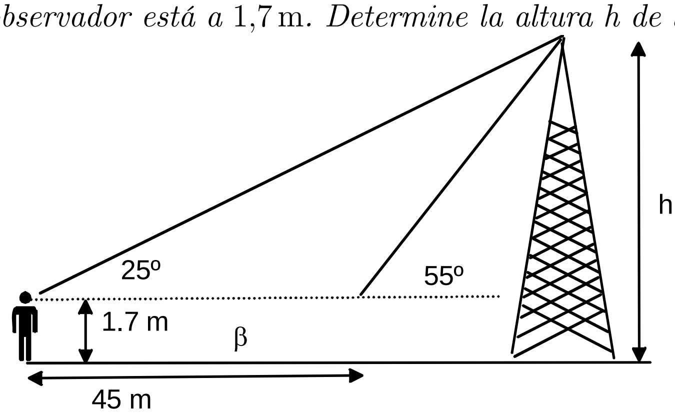


Solución. Podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= \\ \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 &= \\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 &= 0, \end{aligned}$$

porque $\vec{F}_1$ es paralela a $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

EJERCICIO 2.10 *Desde una determinada posición en un camino, una persona observa la parte más alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de* 25^o*. Si avanza* $45\,\text{m}$ *en línea recta hacia la base de la torre, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de* 55^o*. Considerando que la vista del observador está a* $1{,}7\,\text{m}$*. Determine la altura* h *de la torre.*



Solución. Sea d la distancia del punto más cercano a la torre, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{h} &= \cot 55, \\ \frac{d+45}{h} &= \cot 25, \end{aligned}$$

restando

$$\frac{45}{h} = \cot 25 - \cot 55$$

de donde

$$h = \frac{45}{\cot 25 - \cot 55}$$

y numéricamente resulta

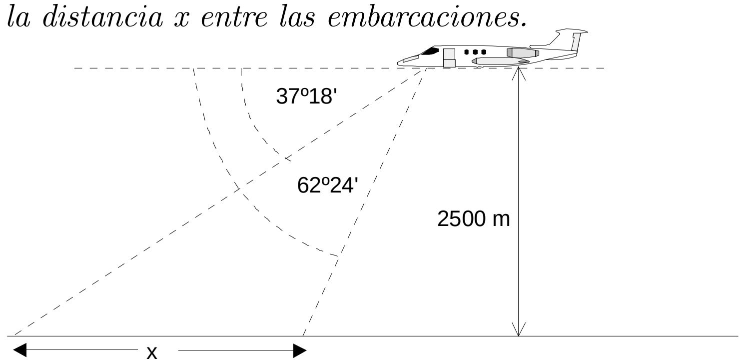
$$h = 31.\,157\,\mathrm{m}$$

respecto al observador y

$$\begin{aligned} h &= (31.\,157 + 1{,}70) \\ &= 32.\,857\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

respecto al suelo.

EJERCICIO 2.11 *Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura de* $2500\,\mathrm{m}$*, el piloto observa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical con ángulos de depresión de* $62^o24'$ *y* $37^o18'$ *respectivamente. Encuentre la distancia* x *entre las embarcaciones.*



Solución. Expresando los ángulos son con decimales

$$62{,}4^o \text{ y } 37{,}3^o$$

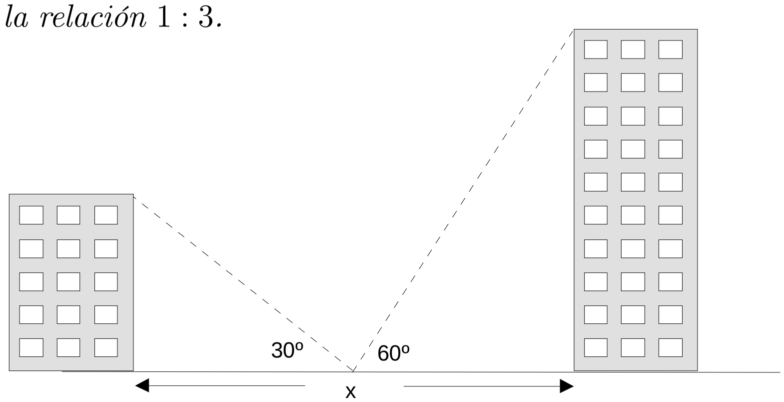
Similarmente al problema anterior si d es la distancia horizontal entre el avión y la embarcación más cercana se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x+d}{2500} &= \tan(90 - 37{,}3), \\ \frac{d}{2500} &= \tan(90 - 62{,}4), \end{aligned}$$

y restando se obtiene

$$d = 2500(\cot 37{,}3 - \cot 62{,}4) = 1974.\,751\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 2.12 *Una persona se encuentra en la mitad de la distancia que separa dos edificios y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación de* 30^o *y* 60^o *respectivamente. Demuestre la que las alturas de los edificios están en la relación* $1 : 3$.



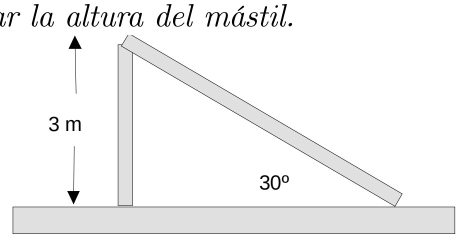
Solución. Si las alturas son llamadas h_1 y h_2 tenemos que

$$\begin{aligned} \tan 30 &= \frac{h_1}{x/2}, \\ \tan 60 &= \frac{h_2}{x/2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\tan 30}{\tan 60} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 2.13 *Un mástil por efecto del viento se ha quebrado en dos partes, la parte que quedó vertical en el piso mide* $3\,\mathrm{m}$ *y la parte derribada quedó atada al extremo superior de la parte vertical, formando un ángulo de* 30^o *con el piso. Encontrar la altura del mástil.*



Solución. La hipotenusa c será dada por

$$\frac{3}{c} = \sin 30 = \frac{1}{2},$$

de donde

$$c = 6\,\mathrm{m},$$

por lo tanto la altura del mástil era

$$9\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 2.14 *Una persona en su trote diario, desde su casa, corre* 7 km *al Norte,* 2 km *al Oeste,* 7 km *al Norte y* 11 km *al Este. Encuentre la distancia a su casa a que se encuentra la persona .*

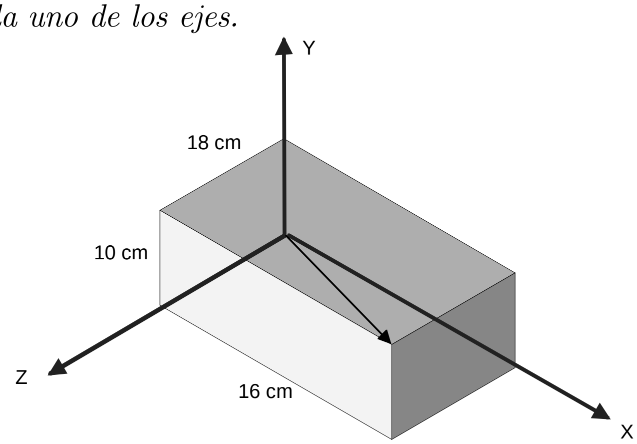
Solución. Sean los ejes cartesianos OX hacia el este y OY hacia el norte, entonces el desplazamiento resultante es

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 7\hat{\jmath} + 2(-\hat{\imath}) + 7\hat{\jmath} + 11\hat{\imath} \\ &= 9\hat{\imath} + 14\hat{\jmath}, \end{aligned}$$

y su magnitud, la distancia a la casa, es

$$r = \sqrt{9^2 + 14^2} = 16.\,64\,\mathrm{km}.$$

EJERCICIO 2.15 *Una caja tiene* 16 cm *de largo,* 18 cm *de ancho y* 10 cm *de alto. Encuentre la longitud de la diagonal de la caja y el ángulo que ésta forma con cada uno de los ejes.*



Solución. El vector que representa la diagonal es

$$\vec{r} = 16\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} + 10\hat{k},$$

y entonces su longitud es

$$r = \sqrt{16^2 + 18^2 + 10^2} = 26.\,077\,\mathrm{cm}.$$

Los ángulos están dados por

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{r}\cdot\hat{\imath}}{(26.\,077)} \\
&= \frac{16}{26.\,077} \\
\cos\beta &= \frac{\vec{r}\cdot\hat{\jmath}}{26.\,077} \\
&= \frac{18}{26.\,077} \\
\cos\gamma &= \frac{\vec{r}\cdot\hat{k}}{26.\,077} \\
&= \frac{10}{26{,}077}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= 52.\,152\,^o, \\
\beta &= 46.\,349\,^o, \\
\gamma &= 67.\,4501^o.
\end{aligned}$$

Note que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

▲

EJERCICIO 2.16 *Dados los vectores* $\vec{r}_1 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{r}_2 = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{r}_3 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, *hallar los módulos de:*

a) $\vec{r}_3$

b) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$

c) $2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3$

Respuestas: (a) 3; (b) 5,66; (c) 5,48

EJERCICIO 2.17 *Hallar un vector unitario con la dirección y sentido de la resultante de* $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$, *con* $\vec{r}_1 = 2\hat{\imath} + 42\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$,

Respuesta: $\frac{3}{7}\hat{\imath} + \frac{6}{7}\hat{\jmath} - \frac{2}{7}\hat{k}$.

EJERCICIO 2.18 *Demostrar que los vectores* $\vec{A} = 3\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+4\hat{k}$, $\vec{C} = 4\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-6\hat{k}$, *pueden ser los lados de un triángulo, y hallar las longitudes de las medianas de dicho triángulo.*

Solución. Si tres $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ forman un triángulo entonces debe ser

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0},$$

lo cual es satisfecho por los vectores

$$-\vec{A},\ \vec{B} \text{ y } \vec{C}$$

Las medianas unen los puntos medios de los lados por lo tanto vectores a lo largo de las medianas son

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\vec{C} + \dfrac{1}{2}(-\vec{A}), \\ \dfrac{1}{2}(-\vec{A}) + \dfrac{1}{2}\vec{B} \\ \dfrac{1}{2}\vec{B} + \dfrac{1}{2}\vec{C} \end{array}$$

donde $-\vec{A} = (-3, -1, 2)$, $\vec{B} = (-1, 3, 4)$, $\vec{C} = (4, -2, -6)$, luego

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right), (-2, 1, 3), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

y sus longitudes son

$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4} = 2.5495$
$\sqrt{4 + 1 + 9} = 3.7417$
$\sqrt{\frac{3^2}{2^2} + \frac{1}{2^2} + 1} = 1.8708$

▲

Ejercicio 2.19 *Hallar el ángulo formado por los vectores* $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} \\ &= \frac{12-6-2}{\sqrt{9}\sqrt{49}} = \frac{4}{21} \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha = 79.\,017^{o}$$

▲

Ejercicio 2.20 *Demostrar que los vectores* $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$, $\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$, *forman un triángulo rectángulo.*

Solución. Usted puede constatar que

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C},$$

o sea

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{A},$$

de manera que forma un triángulo. Además calcule

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = (3,-2,1)\cdot(2,1,-4)) = 0$$

luego

$$\vec{A} \perp \vec{C}$$

es decir se trata de un triángulo rectángulo.

▲

Ejercicio 2.21 *Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por* $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$.

Solución. Calcule

$$\vec{A} \times \vec{B} = 15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k},$$

luego un vector normal al plano es

$$\vec{N} = 15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k},$$

y uno unitario

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k}}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2}}, \\ &= \frac{15\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 30\hat{k}}{35}, \\ &= \frac{3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}}{7}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 2.22 *Dados , $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ determinar*

a) $\vec{A} \times \vec{B}$

b) $\vec{B} \times \vec{A}$

c) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

Solución. $(2, -3, -1) \times (1, 4, -2) = (10, 3, 11)$
$(1, 4, -2) \times (2, -3, -1) = (-10, -3, -11)$
$(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) = -\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A} = 2\vec{B} \times \vec{A} = (-20, -6, -22)$.

▲

EJERCICIO 2.23 *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P(1, 3, 2)$, $Q(2, -1, 1)$, $R(1, 2, 3)$.*

Solución. Dos lados del triángulo pueden ser representados por los vectores

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, -1, 1) - (1, 3, 2) = (1, -4, -1) \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (1, 2, 3) - (1, 3, 2) = (0, -1, 1), \end{aligned}$$

luego

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} == (-5, -1, -1)$$

y el área será

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+1} = \frac{\sqrt{27}}{2}.$$

▲

Ejercicio 2.24 *Hallar los ángulos agudos formados por la recta que une los puntos* $(1, -3, 2)$ *y* $(3, -5, 1)$ *con los ejes coordenados.*

Solución. Un vector a lo largo de la recta es

$$\vec{A} = (1, -3, 2) - (3, -5, 1) = (-2, 2, 1)$$

luego los ángulos que ese vector forma con los eje están dados por

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\hat{\imath}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{-2}{3} \\
\cos\beta &= \frac{\hat{\jmath}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{-2}{3} \\
\cos\gamma &= \frac{\hat{k}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

de donde los ángulos agudos son: (tome los valores absolutos del coseno) 48. 190^o, 48. 190^o y 70. 531^o.

▲

Ejercicio 2.25 *Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos* $(3, 2, -4)$ *y* $(1, -1, 2)$*.*

Solución. Similarmente al problema anterior

$$\vec{A} = (3, 2, -4) - (1, -1, 2) = (2, 3, -6)$$

de donde

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\hat{\imath}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{2}{7} \\ \cos\beta &= \frac{\hat{\jmath}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{3}{7} \\ \cos\gamma &= \frac{\hat{k}\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{-6}{7}\end{aligned}$$

o si tomamos $-\vec{A}$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\frac{2}{7} \\ \cos\beta &= -\frac{3}{7} \\ \cos\gamma &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 2.26 *Dos lados de un triángulo son los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Hallar los ángulos del triángulo.*

Solución. El otro lado puede escribirse

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = -\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 5\hat{k},$$

y calculamos

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{B}\cdot\vec{C} &= -26 \\ \vec{A}\cdot\vec{C} &= 49 \\ \left|\vec{A}\right| &= 7 \\ \left|\vec{B}\right| &= \sqrt{26} \\ \left|\vec{C}\right| &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

luego los ángulos son 90^o, $53.\,929^o$ y $36.\,071^o$

EJERCICIO 2.27 *Las diagonales de un paralelogramo son* $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$ *y* $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ *. Demostrar que dicho paralelogramo es un rombo y hallar sus ángulos y la longitud de sus lados.*

Solución. En términos de los lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se tiene

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{A},\\ \vec{a} - \vec{b} &= \vec{B},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}(5\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 7\hat{k}),\\ \vec{b} &= \frac{1}{2}(\vec{A} - \vec{B}) = \frac{1}{2}(\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}),\end{aligned}$$

entonces

$$|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = \frac{5}{2}\sqrt{3},$$

por lo tanto es un rombo y

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{5 + 7 - 35}{74} = -\frac{23}{74},$$

de donde los ángulos son 108.11^o y 71.894^o.

EJERCICIO 2.28 *Hallar la proyección del vector* $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ *sobre el vector* $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ *.*

Solución.

$$\begin{aligned}&\frac{(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \cdot (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k})}{\left|\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right|}\\ &= \frac{2 - 6 + 12}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 2.29 *Hallar la proyección del vector* $4\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+\hat{k}$ *sobre la recta que pasa por los puntos* $(2,3,-1)$ *y* $(-2,-4,3)$.

Solución. Un vector sobre la recta es

$$(2,3,-1)-(-2,-4,3)=(4,7,-4)$$

luego la proyección es

$$\begin{aligned} & \frac{(4,7,-4)\cdot(4,-3,1)}{|(4,7,-4)|} \\ = \quad & -\frac{9}{9}=-1, \end{aligned}$$

de manera que la magnitud de la proyección es 1.

▲

EJERCICIO 2.30 *Si* $\vec{A}=4\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$ *y* $\vec{B}=-2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}$ *, hallar un vector unitario perpendicular al plano de* $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$.

Solución.

$$\hat{n}=\pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|},$$

donde $(4,-1,3)\times(-2,1,-2)=(-1,2,2)$ por lo tanto

$$\hat{n}=\pm\frac{(-1,2,2)}{3},$$

▲

EJERCICIO 2.31 *Demostrar que* $\vec{A}=\frac{2\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}}{3}$, $\vec{B}=\frac{\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+2\hat{k}}{3}$, *y* $\frac{\vec{C}=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}}{3}$ *son vectores unitarios mutuamente perpendiculares.*

Solución. Calculando

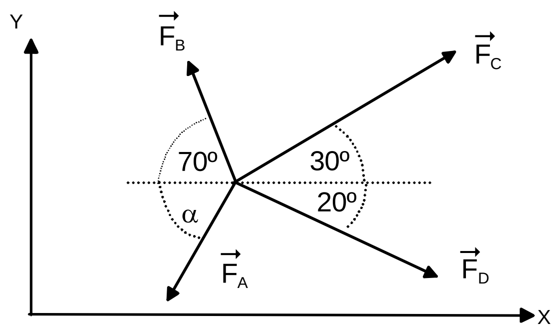
$$\begin{aligned} \left|\vec{A}\right| &= \left|\vec{B}\right|=\left|\vec{C}\right|=1, \\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}=0. \end{aligned}$$

▲

Capítulo 3

Soluciones ejercicios

Ejercicio 3.1 *Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas en la figura tienen una resultante igual a cero. Si* $\left|\vec{F}_B\right| = 800\,\mathrm{N}$, $\left|\vec{F}_C\right| = 1000\,\mathrm{N}$ *y* $\left|\vec{F}_D\right| = 800\,\mathrm{N}$ *determine la magnitud de* $\vec{F}_A$ *y el ángulo* α.



Solución. Las componentes de la fuerza son

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_C\cos 30 + F_D\cos 20 - F_B\cos 70 - F_A\cos\alpha = 0,\\ \sum F_y &= F_C\sin 30 - F_D\sin 20 + F_B\sin 70 - F_A\sin\alpha = 0,\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}F_A\cos\alpha &= 1000\cos 30 + 800\cos 20 - 800\cos 70 = 1344.\,163,\\ F_A\sin\alpha &= 1000\sin 30 - 800\sin 20 + 800\sin 70 = 978.\,138,\end{aligned}$$

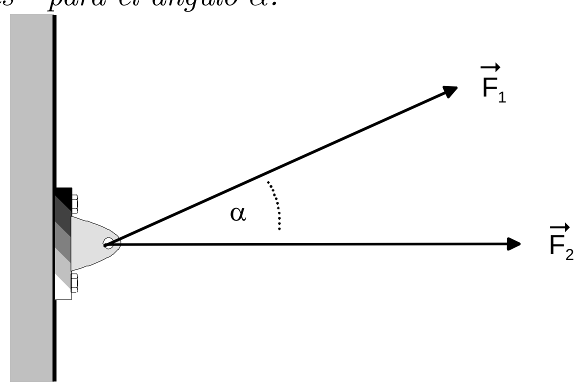
entonces

$$F_A = \sqrt{1344.163^2 + 978.138^2} = 1662.386 \text{ N}$$

y

$$\tan\alpha = \frac{978.138}{1344.163} = 0{,}727$$
$$\alpha = 36{,}04^o$$

EJERCICIO 3.2 *Las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el soporte son, figura,* $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = 100\,\text{N}$. *El soporte fallará si la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre él excede* $150\,\text{N}$. *Determine el intervalo de valores aceptables para el ángulo* α.



Solución. La magnitud de la fuerza resultante puede escribirse

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(F_2 + F_1\cos\alpha)^2 + (F_1\sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(F_2^2 + 2F_2F_1\cos\alpha + F_1^2)} \end{aligned}$$

pero $F_1 = F_2$ entonces

$$F = F_1\sqrt{2 + 2\cos\alpha}$$

o bien

$$\begin{aligned} F &= 2F_1\cos\alpha/2 \\ &= 200\cos\alpha/2 < 150, \end{aligned}$$

o sea

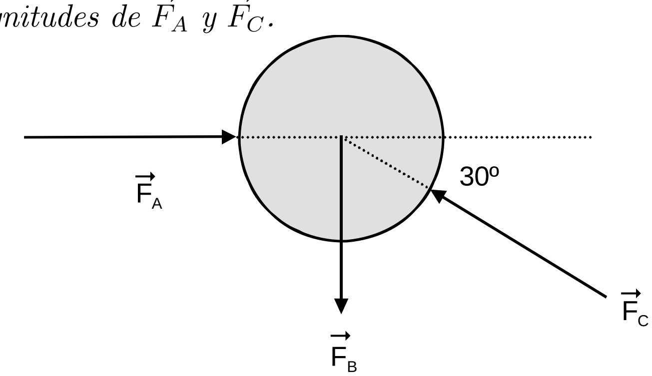
$$\cos\alpha/2 < \frac{3}{4},$$

de modo que (limitando el problema hasta 90^o)

$$90^o \geqslant \alpha > 82.819^o$$

y simétricamente hacia abajo.

EJERCICIO 3.3 *Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada en la figura. La magnitud de $\vec{F}_B$ es de $60\,\mathrm{N}$ y la resultante de las tres es igual a cero Determine las magnitudes de $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_C$.*



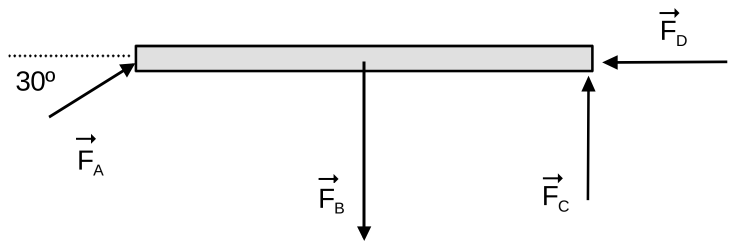
Solución. Aquí

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -F_C\cos 30 + F_A = 0,\\ \sum F_y &= F_C\sin 30 - F_B = 0\\ &= F_C\sin 30 - 60 = 0,\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}F_C &= 120\,\mathrm{N}\\ F_A &= 120\cos 30\\ &= 60\sqrt{3}\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Ejercicio 3.4 *Cuatro fuerzas actúan sobre una viga como se indica en la figura. La resultante de las cuatro fuerzas es cero y además* $\left|\vec{F}_B\right| = 10000\,\mathrm{N}$, $\left|\vec{F}_C\right| = 5000\,\mathrm{N}$. *Determine las magnitudes de* $\vec{F}_A$ *y* $\vec{F}_D$.



Solución. Para los ejes OX horizontal y OY vertical se tiene

$$\begin{aligned} F_A \cos 30 - F_D &= 0, \\ F_A \sin 30 - F_B + F_C &= 0, \end{aligned}$$

o sea

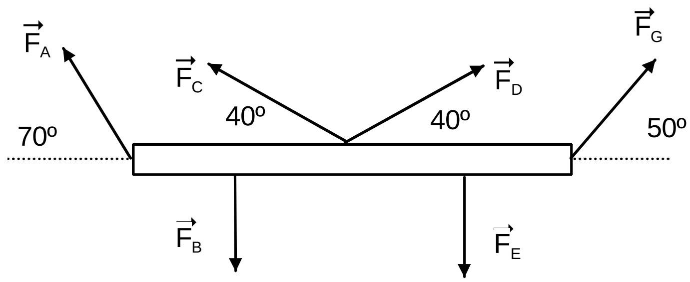
$$\begin{aligned} F_A \cos 30 - F_D &= 0, \\ F_A \sin 30 - 10000 + 5000 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{5000}{\sin 30} = 10000\,\mathrm{N}, \\ F_D &= F_A \cos 30 = 5000\sqrt{3}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 3.5 *Seis fuerzas actúan sobre una viga que forma parte de la estructura de un edificio, como se indica en la figura, en los extremos, punto medio y a un cuarto de la longitud de la viga. Se sabe que la resultante de todas ellas es cero y que* $\left|\vec{F}_B\right| = \left|\vec{F}_E\right| = 5\,\mathrm{kN}$, $\left|\vec{F}_C\right| = 4\,\mathrm{kN}$, $\left|\vec{F}_D\right| = 2\,\mathrm{kN}$. *Determine las magnitudes de* $\vec{F}_A$ *y* $\vec{F}_G$.



Solución. Similarmente

$$\begin{aligned}
-F_A \cos 70 - F_C \cos 40 + F_D \cos 40 + F_G \cos 50 &= 0, \\
F_A \sin 70 + F_C \sin 40 - F_B + F_D \sin 40 - F_E + F_G \sin 50 &= 0,
\end{aligned}$$

y numéricamente

$$\begin{aligned}
-F_A \cos 70 + F_G \cos 50 &= 2 \cos 40, \\
F_A \sin 70 + F_G \sin 50 &= 10 - 6 \sin 40,
\end{aligned}$$

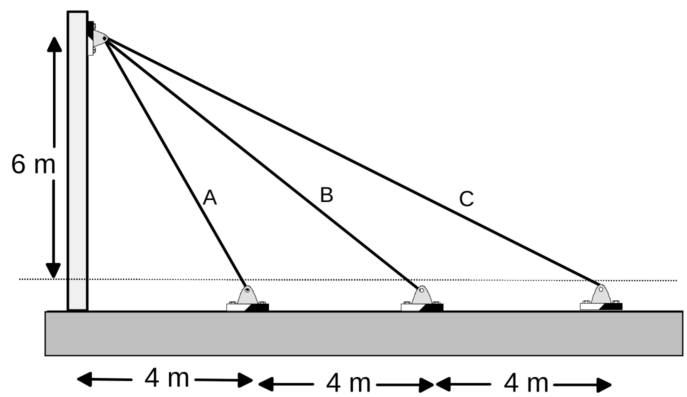
de donde se resuelve

$$F_G = \frac{10 \cos 70 - 6 \cos 70 \sin 40 + 2 \cos 40 \sin 70}{\cos 30} = 4.\,088\,6 \text{ kN}$$

$$F_A = \frac{10 \cos 50 - 6 \sin 40 \cos 50 - 2 \cos 40 \sin 50}{\cos 30} = 3.\,204 \text{ kN}$$

▲

EJERCICIO 3.6 *Los cables A, B y C, figura, ayudan a soportar una columna de una estructura. Las magnitudes de las tensiones en los cables son iguales* $\left|\vec{F}_A\right| = \left|\vec{F}_B\right| = \left|\vec{F}_C\right|$ *y se sabe además que la magnitud de la resultantes es* $200\,\mathrm{kN}$*. Determine la magnitud de* $\vec{F}_A$*.*



Solución. Llamando α, β, γ los ángulos que forman los cable con la horizontal, y T a la tensión, se tiene que

$$\begin{aligned} F_x &= T(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), \\ F_y &= T(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma), \end{aligned}$$

siendo la resultante

$$T\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2} = 200,$$

y los ángulos están dados por

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{4}{\sqrt{4^2+6^2}},\ \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{4^2+6^2}} \\ \cos\beta &= \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}},\ \sin\beta = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{12}{\sqrt{12^2+6^2}},\ \sin\gamma = \frac{6}{\sqrt{12^2+6^2}}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$T = 68.238\,\mathrm{kN}$$

EJERCICIO 3.7 *Se tiene una fuerza* $\vec{F} = 600\hat{\imath} - 700\hat{\jmath} + 600\hat{k}\,\mathrm{N}$. *Determine los ángulos entre el vector* $\vec{F}$ *y los ejes coordenados positivos.*

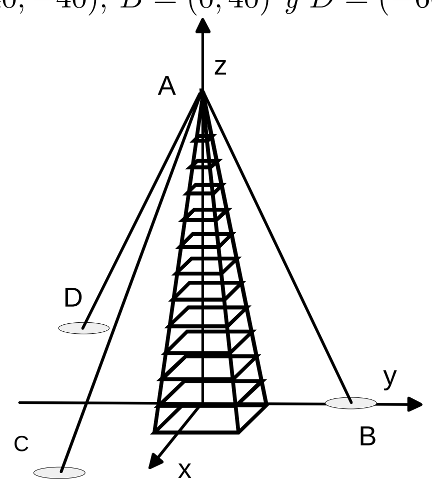
Solución. Llamando α, β, γ los ángulos se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{F}\cdot\hat{\imath}}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{600}{\sqrt{600^2+700^2+600^2}} = \frac{6}{11}, \\
\cos\beta &= \frac{\vec{F}\cdot\hat{\jmath}}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{-700}{\sqrt{600^2+700^2+600^2}} = -\frac{7}{11}, \\
\cos\gamma &= \frac{\vec{F}\cdot\hat{k}}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{600}{\sqrt{600^2+700^2+600^2}} = \frac{6}{11}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= \gamma = 56.944^{o}, \\
\beta &= 129.521^{o}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.8 *La torre de* $70\,\mathrm{m}$ *de altura que se muestra en la figura está soportada por tres cables que ejercen sobre ella las fuerzas* $\vec{F}_{AB}$, $\vec{F}_{AC}$ *y* $\vec{F}_{AD}$ *. La magnitud de cada una de esas fuerzas es de* $2\,\mathrm{kN}$. *Exprese vectorialmente la fuerza resultante ejercida por los cables sobre la torre. Las coordenadas de los apoyos son* $C = (40, -40)$, $B = (0, 40)$ *y* $D = (-60, -60)$.



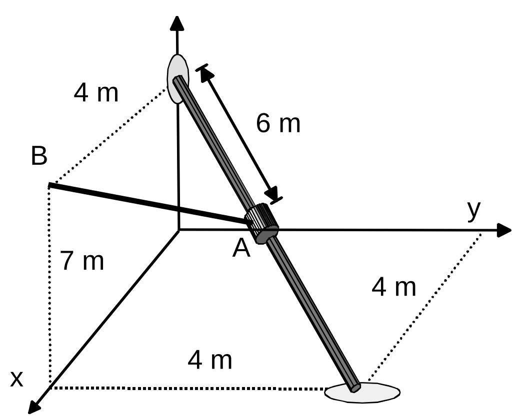
Solución. Los vectores a lo largo de los cables son

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (40, -40, 0) - (0, 0, 70) = (40, -40, -70)\,, \\
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 40, 0) - (0, 0, 70) = (0, 40, -70) \\
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (-60, -60, 0) - (0, 0, 70) = (-60, -60, -70)\,,
\end{aligned}$$

entonces la fuerza resultante es

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= 2\left(\frac{(40, -40, -70)}{|(40, -40, -70)|} + \frac{(0, 40, -70)}{|(0, 40, -70)|} + \frac{(-60, -60, -70)}{|(-60, -60, -70)|}\right) \\
&= 2\left(\frac{(40, -40, -70)}{90} + \frac{(0, 40, -70)}{10\sqrt{65}} + \frac{(-60, -60, -70)}{110}\right) \\
&= \left(-\frac{20}{99}, -\frac{196}{99} + \frac{8}{65}\sqrt{65}, -\frac{280}{99} - \frac{14}{65}\sqrt{65}\right) \\
&= (-0{,}202\,02, -0{,}987\,52, -4.\,564\,8)\ \text{kN}.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.9 *El cable AB mostrado en la figura ejerce una tensión de magnitud* 32 N *sobre el collarín en A. Exprese vectorialmente la fuerza de tensión* $\vec{T}$.



Solución. Necesitamos un vector a lo largo del cable. Ese vector es

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

donde el vector $\overrightarrow{OB} = (4, 0, 7)$ y $\overrightarrow{OA}$ se puede construir así

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (0,0,7) + 6\frac{(4,4,0)-(0,0,7)}{|(4,4,0)-(0,0,7)|}\\ &= (0,0,7) + 6\frac{(4,4,-7)}{9} = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right),\end{aligned}$$

por lo tanto

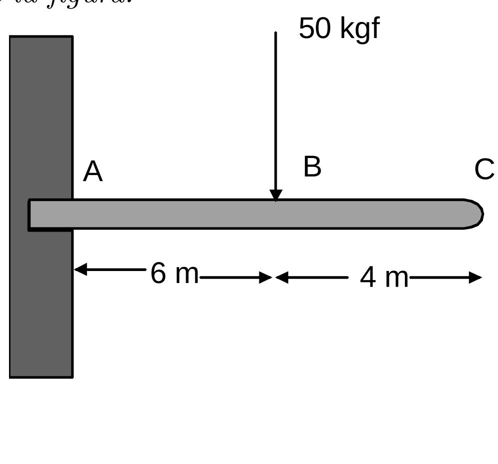
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (4,0,7) - \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)\\ &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right),\end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\vec{T} &= 32\frac{\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)}{\left|\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)\right|}\\ &= 32\frac{(2,-4,7)}{\sqrt{69}}\\ &= (7.7047, -15.409, 26.966)\,.\end{aligned}$$

▲

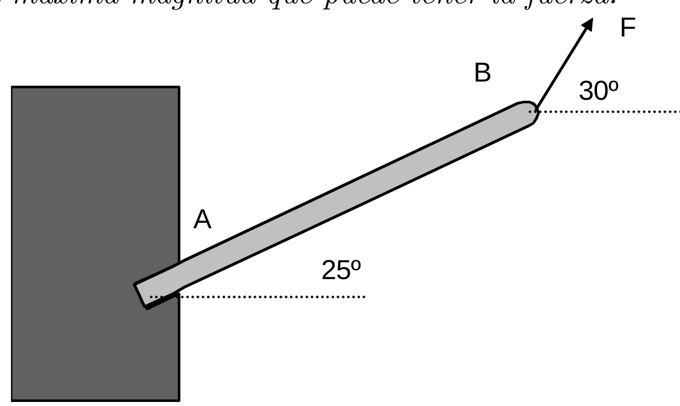
Ejercicio 3.10 *Determine el torque de la fuerza de* $50\,\mathrm{kg}f$ *respecto a los puntos* A, B *y* C *de la figura.*



Solución. Si el eje X está a lo largo de la barra, Y hacia arriba y Z sale de la figura, entonces

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_A &= 6\hat{\imath} \times (-50\hat{\jmath}) = -300\hat{k}\ \text{kg}f\,\text{m},\\ \vec{\Gamma}_B &= \vec{0},\\ \vec{\Gamma}_C &= (-4\hat{\imath}) \times (-50\hat{\jmath}) = 200\hat{k}\ \text{kg}f\,\text{m}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.11 *En la figura, la viga AB de* 5 m *de longitud fallará si el torque de la fuerza respecto al punto A excede de* 10 N m*. Con esa condición determine la máxima magnitud que puede tener la fuerza.*



Solución. El torque respecto al punto A es

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F},$$

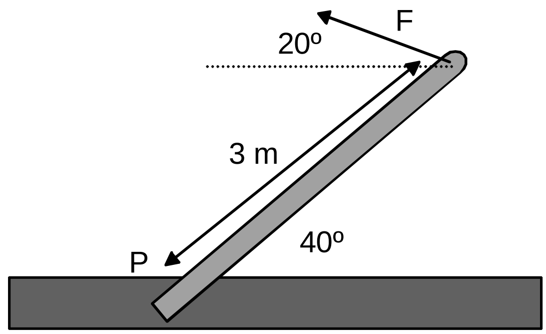
y su magnitud es

$$\tau = (AB)F\sin(30 - 25) = 5F\sin 5,$$

de este modo para no exceder 10 N m debe ser

$$F \leqslant \frac{10}{5\sin 5} = 22.947\,\text{N}.$$

Ejercicio 3.12 *De acuerdo a la figura, determine el torque de la fuerza de* 80 N *respecto al punto* P.

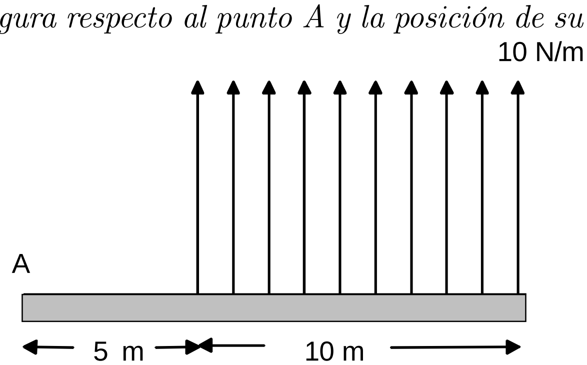


Solución. Su magnitud es

$$\tau = 3(80)\sin(40+20) = 120\sqrt{3}\,\text{N},$$

y su dirección y sentido es perpendicular a la figura y saliendo.

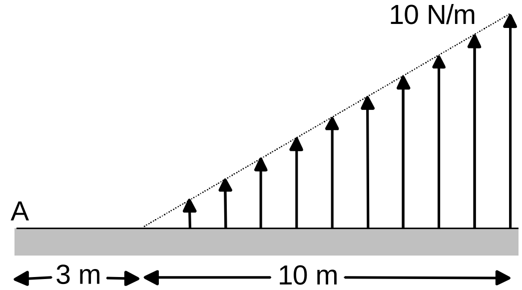
Ejercicio 3.13 *Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto* A *y la posición de su centro de fuerza.*



Solución. Como se explicó, el centro de la fuerza distribuida coincide con el centroide del rectángulo, esto es está ubicado a $5+5=10\,\text{m}$ del punto A y la magnitud del torque será

$$\tau_A = 10(100) = 1000\,\text{N m}$$

Ejercicio 3.14 *Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto A y la posición de su centro de fuerza.*



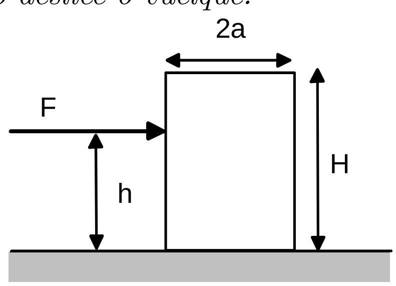
Solución. El "área"del triángulo es $A = \frac{1}{2}(10 \times 10) = 50\,\mathrm{N}$, su centroide está a $\frac{2}{3}10\,\mathrm{m}$ del vértice izquierdo y luego el torque respecto al punto A tiene magnitud

$$\tau_A = (3 + \frac{2}{3}10)50 = \frac{1450}{3}\,\mathrm{N\,m}.$$

Capítulo 4

Soluciones ejercicios

Ejercicio 4.1 *Un cuerpo homogéneo de masa M altura H y base de largo $2a$, es empujado por una fuerza horizontal F aplicada en un costado a la altura h del suelo. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y el cuerpo es μ_S, determine la condición para que al romperse el equilibrio debido al aumento de F el cuerpo deslice o vuelque.*



Solución. Sin fuerza aplicada, la reacción normal puede considerarse una fuerza distribuida homogéneamente en la base de modo que su resultante N tiene como punto de aplicación, el centro de la base. Sin embargo al aplicar la fuerza $\vec{F}$ la distribución se "carga" más a la derecha. Sea entonces x el centro de esa fuerza, medido desde el centro de la base, tomado como origen

O. De ese modo las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= F - f_S = 0, \\
\sum F_y &= N - Mg = 0, \\
\sum \vec{\tau}_O &= (Nx - Fh)\hat{k} = \vec{0},
\end{aligned}$$

siendo el eje OZ hacia afuera. De allí podemos despejar

$$\begin{aligned}
f_S &= F, \\
N &= Mg, \\
x &= \frac{Fh}{Mg},
\end{aligned}$$

pero hay dos límites

$$\begin{aligned}
f_S &= F \leqslant \mu_S N = \mu_S Mg, \\
x &= \frac{Fh}{Mg} \leqslant a,
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
F &\leqslant \mu_S Mg, \\
F &\leqslant \frac{a}{h} Mg.
\end{aligned}$$

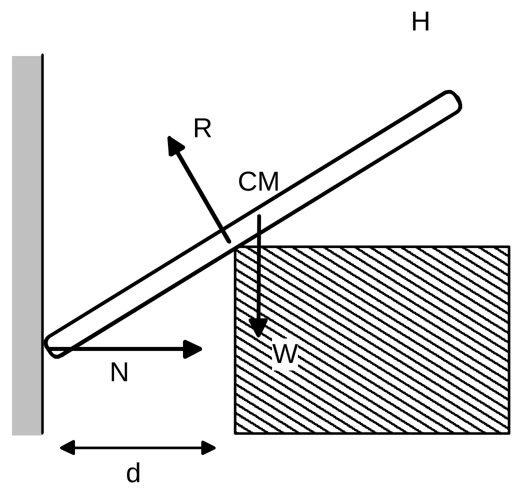
Si la fuerza excede primero la primera cota, el cuerpo desliza caso contrario vuelca en otras palabras, si

$$\mu_S < \frac{a}{h},$$

el cuerpo deslizará al aumentar F, caso contrario volcará.

▲

Ejercicio 4.2 *Una barra de masa M y de largo L se equilibra como se indica en la figura. No hay roce. Determine el ángulo que hace la barra con la horizontal cuando hay equilibrio.*



Solución. Las condiciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= N - R\sin\theta = 0, \\
\sum F_y &= R\cos\theta - Mg = 0, \\
\sum \vec{\tau}_O &= (Rd' - Mg\frac{L}{2}\cos\theta)\hat{k} = \vec{0},
\end{aligned}$$

siendo O el punto de contacto de la barra con la pared y d' la distancia desde ese punto hasta la reacción R.Pero $d'/d = \sec\theta$, de manera que resulta

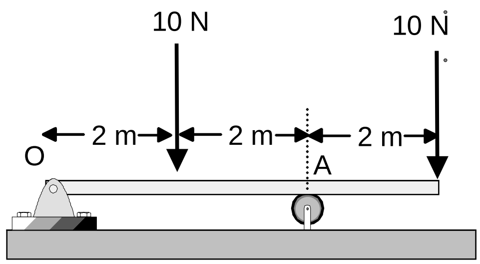
$$\frac{Mg}{\cos\theta}d\ \sec\theta - Mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0,$$

y finalmente

$$\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{2d}{L}},$$

y ese ángulo existe si $2d \leqslant L$

EJERCICIO 4.3 *Una barra de largo* $L = 6\,\mathrm{m}$ *y de peso* $W = 20\,\mathrm{N}$ *está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo* O*, apoyada en un soporte liso en* A *y cargada por dos fuerzas como se indica en la figura*



a) Determine la reacción vertical en la articulación.

b) Determine la reacción vertical en el soporte.

Solución. Si N y R indican las reacciones en la articulación y el soporte (obviamente su componente vertical), entonces

$$\begin{aligned}\sum F_y &= N + R - 10 - 10 - 20 = 0, \\ \sum \vec{\tau}_O &= (R \times 4 - 10 \times 2 - 10 \times 6 - 20 \times 3)\hat{k} = \vec{0},\end{aligned}$$

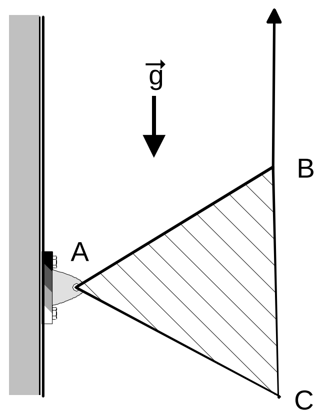
de la segunda

$$R = 35\,\mathrm{N},$$

y de la primera

$$N = 40 - 35 = 5\,\mathrm{N}$$

EJERCICIO 4.4 *Una lámina de peso W en forma de triángulo equilátero de lado a, puede moverse en un plano vertical estando el vértice A articulado a un punto fijo. Si al vértice C se le aplica una fuerza vertical hacia arriba de magnitud F, determine el ángulo θ que hace la arista AC con la vertical en la situación de equilibrio.*



Solución. *La distancia de un vértice al centro de masa es*

$$d = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

Calculando el torque respecto al punto A, positivos en el sentido de las agujas del reloj, tenemos

$$\tau_A = Fa\sin\theta - W\frac{a}{\sqrt{3}}\sin(\theta + 30) = 0,$$

de manera que el ángulo queda determinado por

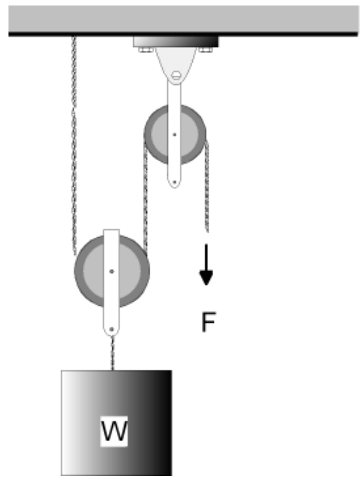
$$F\sin\theta = \frac{W}{\sqrt{3}}\sin(\theta + 30),$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{1}{3}W\frac{\sqrt{3}}{2F - W}.$$

▲

Ejercicio 4.5 *Considere el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



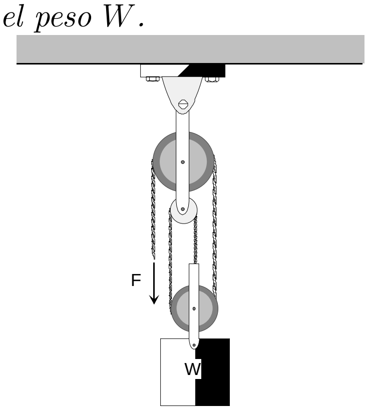
Solución. La tensión en la cuerda es T y el peso W está equilibrado por $2T$, es decir

$$2T - W = 0,$$

de donde

$$F = T = \frac{W}{2}.$$

EJERCICIO 4.6 *Para el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



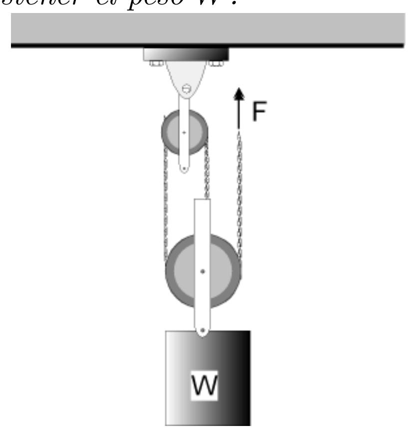
Solución. Análogamente

$$3T - W = 0.$$

de donde

$$F = T = \frac{W}{3}.$$

Ejercicio 4.7 *Para el sistema de la figura, no hay roce. Determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



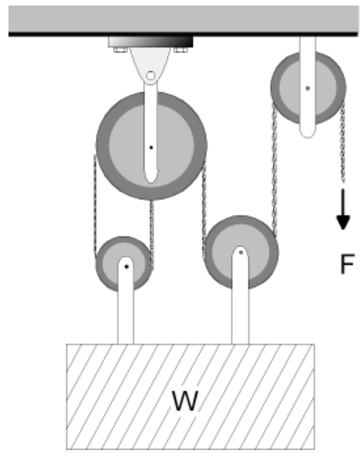
Solución. Similarmente

$$3T - W = 0.$$

de donde

$$F = T = \frac{W}{3}.$$

Ejercicio 4.8 *En el sistema indicado en la figura, no hay roce y las poleas son livianas. Determine la magnitud de la fuerza F necesaria para sostener el peso W.*



Solución. Ahora

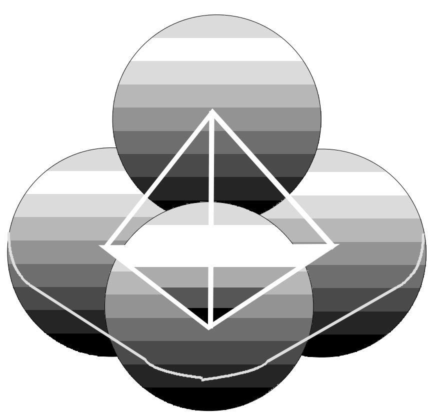
$$4T - W = 0,$$

de donde

$$F = T = \frac{W}{4}.$$

Ejercicio 4.9 *Tres esferas iguales de radio R están sobre un plano horizontal suave, en contacto entre ellas de modo que sus centros forman un triángulo equilátero de arista $2R$. A la altura de un radio, el conjunto se abraza por una cuerda inextensible que las sostiene. Una cuarta esfera se coloca sobre el centro del conjunto. Determine la tensión que se desarrolla en la cuerda.*

Solución. Las los centros de las cuatro esferas forman una pirámide equilátera de arista $2R$.



La altura de una pirámide equilátera de arista a es

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

luego el ángulo que forma una arista lateral con la vertical está dado por

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Si N es la reacción normal de contacto con la esfera superior tenemos que

$$3N\cos\phi = W,$$

de donde

$$N = \frac{W}{3\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

La componente horizontal de esta fuerza es

$$H = N\sin\phi = \frac{W}{3\sqrt{\frac{2}{3}}}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}W\sqrt{2}.$$

La situación para una esfera en el suelo es como se indica en la

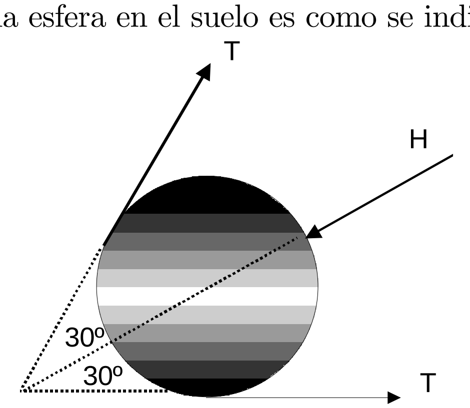


figura de manera que

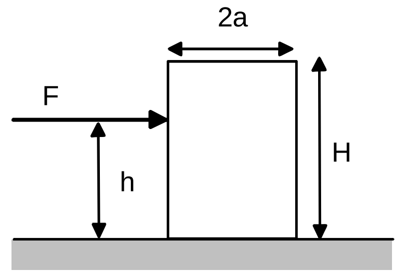
$$2T\cos 30 = H = \frac{1}{6}W\sqrt{2},$$

de donde

$$T = \frac{1}{6}W\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

▲

Ejercicio 4.10 *El bloque de la figura tiene masa M y el coeficiente de roce estático con el suelo es $\mu_S = 0{,}5$, las longitudes indicadas son $2a = 1\,\mathrm{m}$, $H = 2\,\mathrm{m}$, $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Determine qué sucede al aumentar la fuerza aplicada F.*



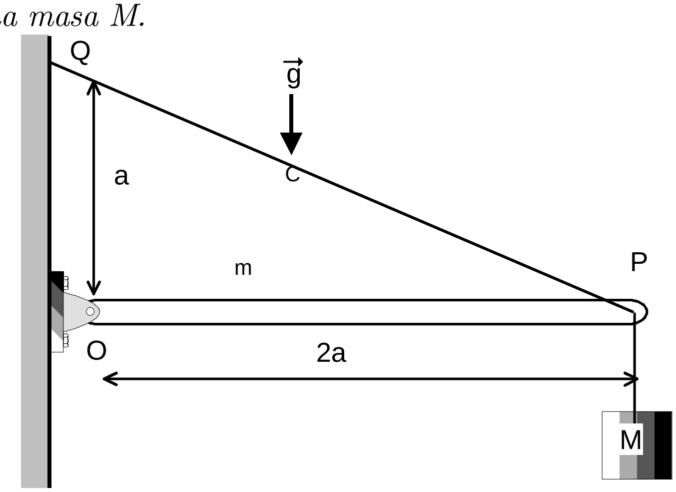
Solución. De acuerdo al problema (4.1) si

$$\mu_S < \frac{a}{h},$$

el cuerpo deslizará al aumentar F, caso contrario volcará. En este caso $\mu_S = 0{,}5$ y $a/h = 0{,}5/1{,}5 = 0{,}333$ de modo que el cuerpo volcará.

▲

Ejercicio 4.11 *La barra OP de masa m y largo $2a$ esta articulada en un punto fijo O, sostenida por una cuerda amarrada al punto fijo Q a distancia a de O, y al extremo P de la barra, como se indica en la figura. En el extremo P, cuelga una masa M.*



Determine la tensión en la cuerda QP y la reacción en O.

Solución. Sea T la tensión de la cuerda V, H las componentes vertical y horizontal de la reacción en O. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= H - T\cos\theta = 0, \\
\sum F_y &= V + T\sin\theta - Mg - mg = 0, \\
\sum \vec{\tau}_O &= (2aT\sin\theta - mga - Mg2a)\hat{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Siendo

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \;\; \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De la tercera

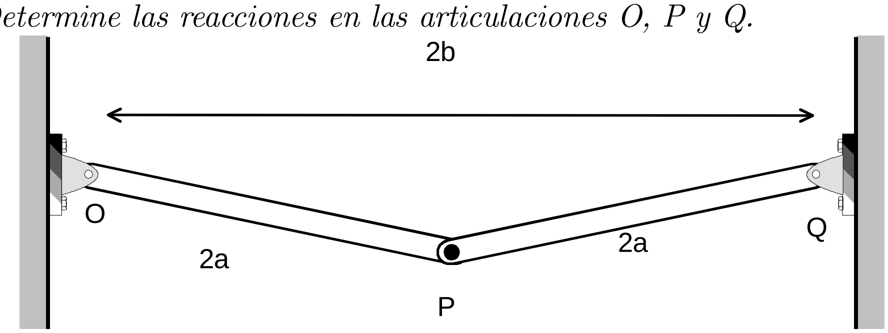
$$T = \frac{m+2M}{2}\sqrt{5}g \;,$$

y

$$\begin{aligned}
H &= T\cos\theta = (m+2M)g \;, \\
V &= Mg + mg - T\sin\theta \\
&= Mg + mg - \frac{m+2M}{2}g = \frac{1}{2}mg
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 4.12 *Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q separados una distancia $2b$ a la vez que están articuladas en P. Determine las reacciones en las articulaciones O, P y Q.*



Solución. Por razones de simetría, la fuerza de interacción entre las dos barras en P sólo puede tener componente horizontal. (Nada distingue la barra derecha de la izquierda). Sea H_P esa reacción hacia la derecha sobre la barra OP y H_O, V_O las componentes de la reacción en O.

Entonces

$$\begin{aligned} V_0 - Mg &= 0, \\ H_O + H_P &= 0, \\ \sum \vec{\tau}_O &= (-Mga\cos\theta + H_P 2a\sin\theta)\hat{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

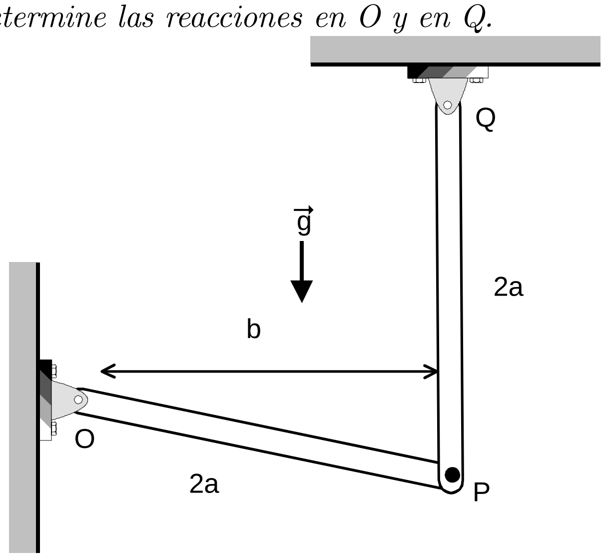
De la tercera

$$H_P = \frac{Mg}{2}\cot\theta,$$

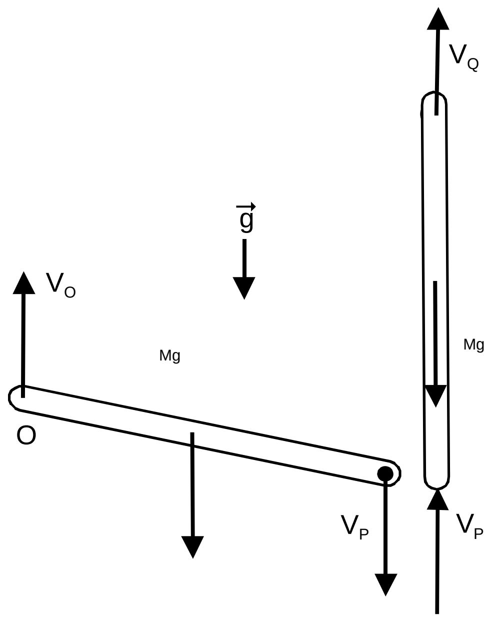
donde $\cos\theta = b/2a$ entonces

$$\begin{aligned} H_P &= \frac{Mg}{2}\frac{b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \\ V_O &= Mg, \\ H_O &= -\frac{Mg}{2}\frac{b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.13 *Dos barras de masa M y largo 2a están articuladas en puntos fijos O y Q a la vez que están articuladas entre sí en P, como se indica en la figura. Determine las reacciones en O y en Q.*



Solución.



La barra OP está sometida solamente a fuerzas verticales, luego

$$V_Q + V_P - Mg = 0.$$

Para la barra OP, tenemos

$$V_O - Mg - V_P = 0,$$

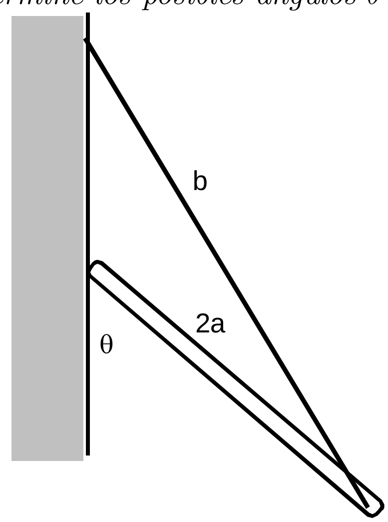
y torque respecto al punto O

$$-Mg\frac{b}{2} - V_P b = 0,$$

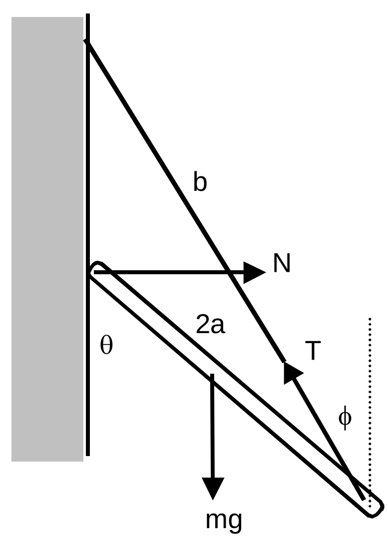
de donde despejamos

$$\begin{aligned} V_P &= -\frac{Mg}{2}, \\ V_O &= Mg - \frac{Mg}{2} = \frac{Mg}{2}, \\ V_Q &= Mg + \frac{Mg}{2} = \frac{3Mg}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.14 *La barra de la figura de masa M y largo 2a está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b. Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.*



Solución.



Tenemos

$$\begin{aligned} N - T\sin\phi &= 0, \\ T\cos\phi - Mg &= 0, \\ Mga\sin\theta - T2a\sin(\theta-\phi) &= 0, \end{aligned}$$

además de una relación geométrica

$$\sin\phi = \frac{2a}{b}\sin\theta.$$

De la segunda y la tercera

$$\sin\theta - 2\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos\phi} = 0,$$

$$\begin{aligned} -\sin\theta\cos\phi + 2\cos\theta\sin\phi &= 0, \\ \sin\theta\cos\phi &= 2\cos\theta\frac{2a}{b}\sin\theta \end{aligned}$$

de donde una solución es $\sin\theta = 0 \to \theta = 0$, $\theta = \pi$. La otra sigue de

$$\cos\phi = \frac{4a}{b}\cos\theta,$$

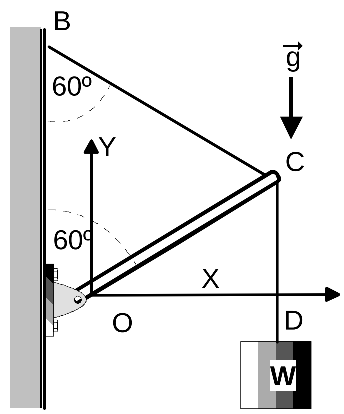
eliminando ϕ

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4a^2}{b^2}\sin^2\theta + \frac{16a^2}{b^2}\cos^2\theta, \\ 1 - \frac{4a^2}{b^2} &= \frac{12a^2}{b^2}\cos^2\theta, \\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{b^2-4a^2}{12a^2}}, \end{aligned}$$

esta solución existe si $b > 2a$ y

$$\begin{aligned} b^2 - 4a^2 &< 12a^2, \\ b &< 4a. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.15 *La figura muestra una barra homogénea OC de largo* $L = 1\,\mathrm{m}$ *y masa* $M = 12\,\mathrm{kg}$*, pivoteada en O y en el otro extremo ligada a una cuerda BC. En el extremo C de la barra cuelga un peso* $W = 60\,\mathrm{N}$ *por medio de una cuerda CD. Determinar (a) La tensión en la cuerda CD. (b) La tensión en la cuerda BC. (c) La reacción* $\vec{R}$ *en el extremo O de la barra. (R: (a)* $60\,\mathrm{N}$*, (b)* $120\,\mathrm{N}$*, (c)* $(103{,}9;120)\,\mathrm{N}$*)*



Solución.

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= R_{O_x} - T\cos 30 = 0, \\
\sum F_y &= R_{O_y} + T\sin 30 - Mg - W = 0, \\
\sum \vec{\tau}_O &= (TL\sin 60 - Mg\frac{L}{2}\cos 30 - WL\cos 30)\hat{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

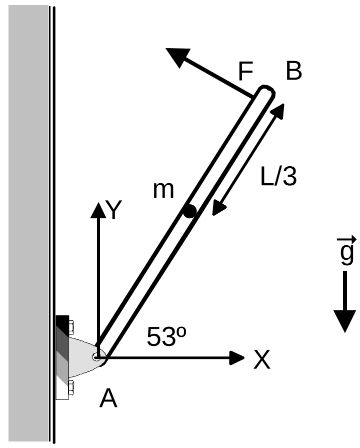
De aquí despejamos

$$\begin{aligned}
T &= Mg\frac{1}{2} + W \\
&= 120\,\mathrm{N},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{O_y} &= -T\sin 30 + Mg + W \\
&= 120\,\mathrm{N} \\
R_{O_x} &= T\cos 30 = 103.\,9\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 4.16 *La figura nuestra una barra delgada y homogénea AB de largo* $L = 2\,\mathrm{m}$ *y de masa* $M = 12\,\mathrm{kg}$*, la cual se encuentra pivoteada (articulada) en el extremo A. Sobre la barra en el punto C, se encuentra adherida una partícula de masa* $m = 1\,\mathrm{kg}$*. La barra se encuentra en equilibrio estático cuando se le aplica una fuerza de magnitud F en el extremo B perpendicular a la barra. Determine (a) La magnitud de la fuerza aplicada. (b)La reacción* *que ejerce la articulación sobre la barra. (c) La reacción que ejerce la barra sobre la articulación.*



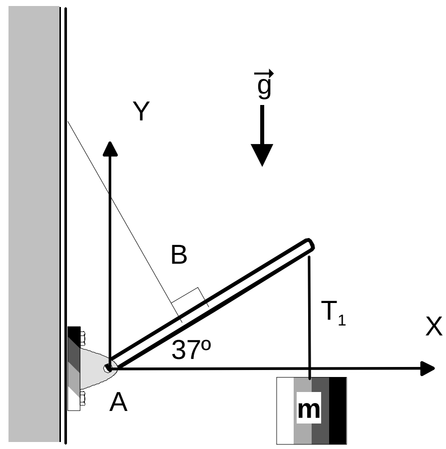
Solución.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= R_{A_x} - F\cos 37 = 0,\\ \sum F_y &= R_{A_Y} - Mg - mg + F\sin 37 = 0,\\ \sum \vec{\tau}_A &= (FL - Mg\frac{L}{2}\cos 53 - mg\frac{2L}{3}\cos 53)\hat{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

De aquí despejamos (usando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)

$$\begin{aligned}F &= Mg\frac{1}{2}\cos 53 + mg\frac{2}{3}\cos 53 = 40.\,12\,\mathrm{N},\\ R_{A_x} &= F\cos 37 = 32.\,04\,\mathrm{N},\\ R_{A_y} &= Mg + mg - F\sin 37 = 105.\,85\,\mathrm{N}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 4.17 *El sistema de la figura está en equilibrio. Si la barra es de longitud L, de masa $M = 8\,\mathrm{kg}$ y la masa m es $m = 10\,\mathrm{kg}$ y $AB = L/3$ determine (a) La tensión T. (b) La tensión T_1. (c) La reacción en el pivote A.*



Solución. Sea T la tensión del hilo que la sostiene. Tenemos que

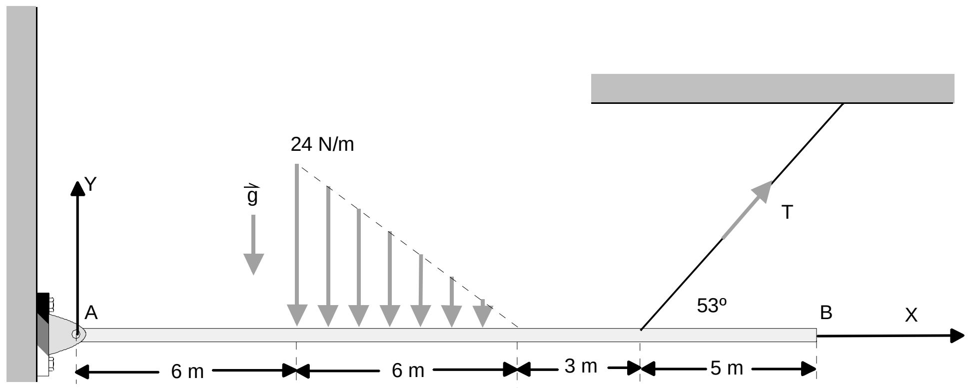
$$\begin{aligned}
\sum F_x &= R_{A_x} - T\sin 37 = 0,\\
\sum F_y &= R_{A_Y} - Mg - mg + T\cos 37 = 0,\\
\sum \vec{\tau}_A &= (T\frac{L}{3} - Mg\frac{L}{2}\cos 37 - mgL\cos 37)\hat{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned}
T &= Mg\frac{3}{2}\cos 37 + 3mg\cos 37 = 335.\,43\,\mathrm{N},\\
R_{A_x} &= T\sin 37 = 201.\,86\,\mathrm{N},\\
R_{A_y} &= Mg + mg - T\cos 37 = -87.\,88\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 4.18 *Una viga de masa* $m = 6\,\mathrm{kg}$ *y largo* $L = 20\,\mathrm{m}$ *está sometida a una carga distribuida y a una tensión como se indica en la figura. La distribución de carga es lineal con un máximo de* $24\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. *Determine (a) La reacción en A. (b) La tensión en la cuerda. (R: (a)* $(-58{,}8; 53{,}6)\,\mathrm{N}$. *(b)* $98\,\mathrm{N}$.*)*



Solución. La fuerza distribuida tiene magnitud total $\frac{1}{2}24 \times 6 = 72\,\text{N}$ y está aplicada a distancia $x = 6 + 2 = 8\,\text{m}$ del punto A. Luego

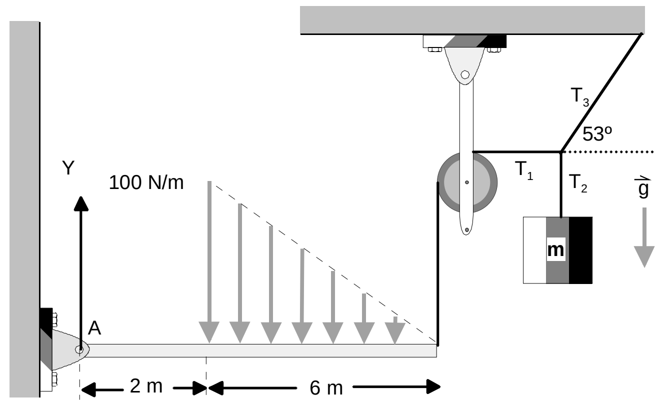
$$\begin{aligned}
\sum F_x &= R_{A_x} + T\cos 53 = 0, \\
\sum F_y &= R_{A_Y} - mg - 72 + T\sin 53 = 0, \\
\sum \vec{\tau}_A &= (15T\sin 53 - 10mg - 72 \times 8)\hat{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned}
T &= \frac{10 \times 6 \times 10 + 72 \times 8}{15\sin 53} = 98.167\,\text{N} \\
R_{A_x} &= -T\cos 53 = -59.079\,\text{N} \\
R_{A_y} &= mg + 72 - T\sin 53 = 53.6\,\text{N}
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 4.19 *La figura muestra un sistema en equilibrio, donde la barra tiene masa despreciable, la distribución de carga aplicada es lineal con un máximo de* $100\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$. *Determine la masa del cuerpo colgante. (R:* $20\,\text{kg}$*)*



Solución. La tensión T_1 se relaciona con la masa colgante de acuerdo a

$$\begin{aligned} T_3 \sin 53 - mg &= 0, \\ T_3 \cos 53 - T_1 &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$T_1 = \frac{mg \cos 53}{\sin 53}.$$

La fuerza distribuida equivale a una resultante de magnitud $100 \times 6/2 = 300\,\mathrm{N}$ ubicada a distancia $2 + \frac{6}{3} = 4\,\mathrm{m}$ del extremo A. Luego, momentando respecto a ese punto

$$\sum \vec{\tau}_A = (-300 \times 4 + T_1 \times 8)\hat{k} = \vec{0},$$

luego

$$T_1 = \frac{1200}{8} = 150\,\mathrm{N}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \frac{mg \cos 53}{\sin 53} &= 150, \\ m &= 15 \tan 53 = 19.9\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.20 *La placa de la figura pesa* $90\,\mathrm{N}$ *y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales. (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determine* *a) La tensión en el cable que pasa por la polea A.*

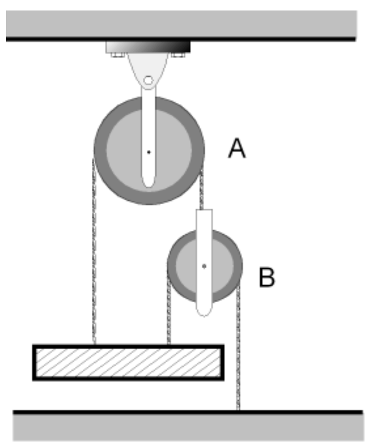
b) La tensión en el cable que pasa por la polea B.

Solución. Si llamamos T_A y T_B las tensiones en las cuerdas A y B, tenemos para el equilibrio de la placa

$$T_A + T_B = 90$$

y para el equilibrio de la polea inferior (supuesta liviana)

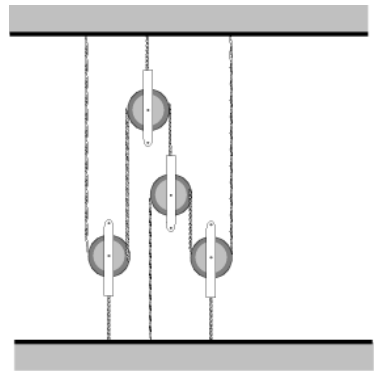
$$T_A = 2T_B$$



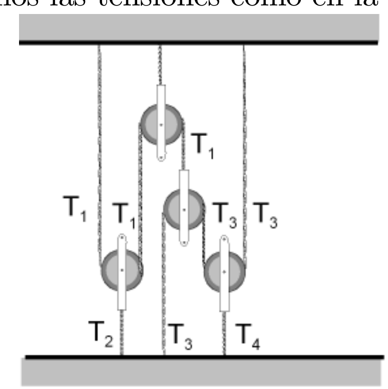
de aquí se despejan

$$\begin{aligned} T_B &= 30\,\mathrm{N} \\ T_A &= 60\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.21 *Las cinco cuerdas del sistema de la figura pueden soportar una tensión máxima de* $1500\,\mathrm{N}$ *sin cortarse. Determine el peso máximo de la placa que puede ser soportada. (respuesta* $W = 2625\,\mathrm{N}$*)*



Solución. Indiquemos las tensiones como en la siguiente figura.



Para los equilibrios de las poleas, desde la izquierda hacia la derecha tenemos

$$\begin{aligned} 2T_1 - T_2 &= 0 \\ T_1 - 2T_3 &= 0 \\ 2T_3 - T_4 &= 0 \end{aligned}$$

y para la placa

$$T_2 + T_3 + T_4 - W = 0.$$

Tenemos cuatro ecuaciones para las cuatro tensiones que resolvemos

$$\begin{aligned} T_2 &= 2T_1 \\ T_3 &= \frac{1}{2}T_1 \\ T_4 &= T_1 \end{aligned}$$

que reemplazamos en la cuarta

$$2T_1 + \frac{1}{2}T_1 + T_1 = W$$

de donde

$$T_1 = \frac{2}{7}W$$

y luego

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{4}{7}W \\ T_3 &= \frac{1}{7}W \\ T_4 &= \frac{2}{7}W \end{aligned}$$

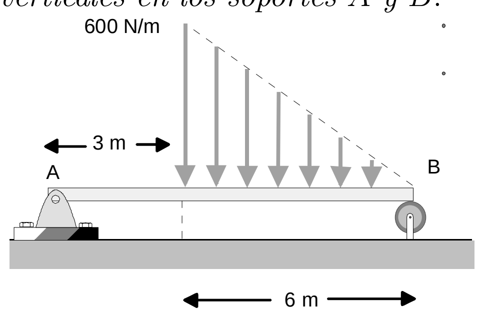
la mayor es T_2 que no puede exceder 1500 N por lo tanto

$$\frac{4}{7}W = 1500$$

con solución

$$W = 2625{,}0\,\mathrm{N}$$

Ejercicio 4.22 *La placa liviana de la figura de longitud* 9 m *está soportando una fuerza distribuida en forma lineal con un máximo de* $600\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. *Determine las reacciones verticales en los soportes* A *y* B.



Solución. La fuerza distribuida equivale (el área) a una fuerza de magnitud

$$F = \frac{1}{2}600 \times 6 = 1800\,\mathrm{N}$$

ubicada a distancia desde el punto A

$$x = 3 + \frac{6}{3} = 5\,\mathrm{m}.$$

Si llamamos R_A y R_B las fuerzas de reacción verticales, la condición de equilibrio será

$$\begin{aligned}\sum F_y &= R_A + R_B - 1800 = 0\\ \sum \Gamma_A &= R_B \times 9 - 1800 \times 5 = 0\end{aligned}$$

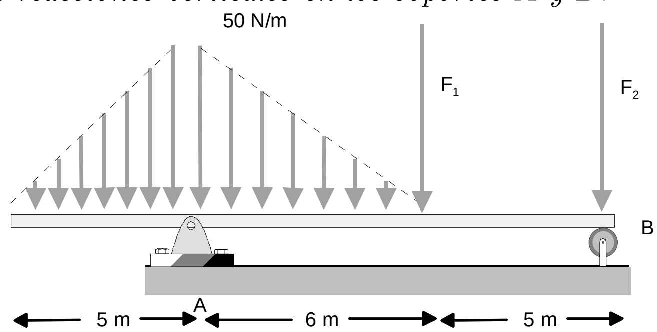
de donde

$$R_B = \frac{1800 \times 5}{9} = 1000\,\mathrm{N}$$

y

$$R_A = 800\,\mathrm{N}.$$

Ejercicio 4.23 *La placa de la figura de longitud* $16\,\mathrm{m}$ *y de masa* $2\,\mathrm{kg}$ *está soportando dos fuerzas distribuidas en forma lineal con máximos de* $50\,\mathrm{N\,m}^{-1}$ *además de dos fuerzas hacia abajo de magnitudes* $F_1 = 600\,\mathrm{N}$ *y* $F_2 = 400\,\mathrm{N}$*. Determine las reacciones verticales en los soportes* A *y* B*.*



Solución. Podemos considerar separadamente dos triángulos que corresponden a dos fuerzas

$$\begin{aligned}F_{izquierda} &= \frac{1}{2}5 \times 50 = 125\,\mathrm{N}, \quad x_1 = -\frac{5}{3}\,\mathrm{m},\\ F_{derecha} &= \frac{1}{2}6 \times 50 = 150\,\mathrm{N}, \quad x_2 = \frac{6}{3}\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

donde medimos las coordenadas X con origen en A. Si llamamos R_A y R_B las fuerzas de reacción verticales, la condición de equilibrio será

$$\begin{aligned}\sum F_y &= R_A + R_B - 600 - 400 - 125 - 150 - 20 = 0,\\ \sum \Gamma_A &= R_B \times 11 - 400 \times 11 - 600 \times 6 - 150 \times \frac{6}{3} + 125 \times \frac{5}{3} - 20 \times 3 = 0,\end{aligned}$$

de donde

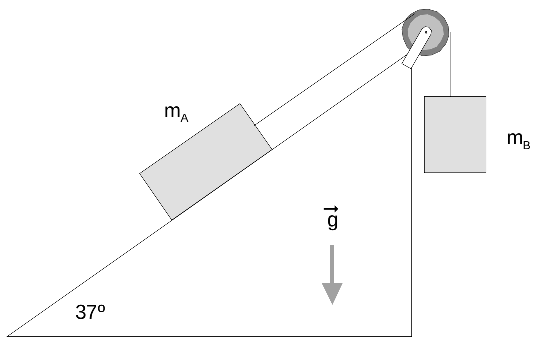
$$\begin{aligned} R_B &= 741.06\,\mathrm{N}, \\ R_A &= 553.94\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

▲

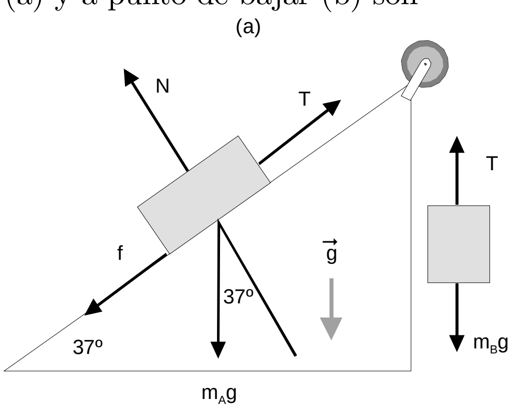
EJERCICIO 4.24 *La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de* 37^o *con la horizontal y dos bloques* A *y* B *en reposo, unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable. Si la masa del cuerpo* A *es* $m_A = 3\,\mathrm{kg}$ *y el coeficiente de roce estático es* $\mu_S = 0{,}2$*, determine*

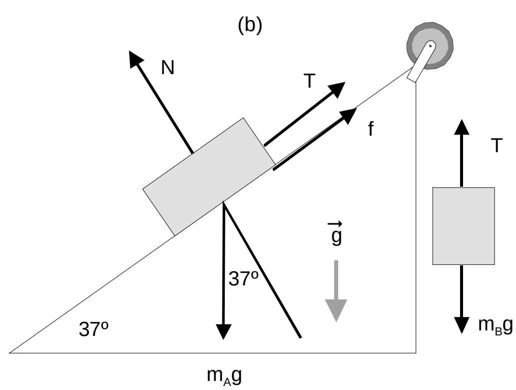
i) Los valores máximos y mínimos de m_B *compatibles con el equilibrio.*

ii) El valor de la tensión de la cuerda en los dos casos anteriores.



Solución. Los diagramas de cuerpo libre para bloque a punto de subir (a) y a punto de bajar (b) son





Para el caso (a), sumamos fuerzas a lo largo del plano y perpendiculares a el resultando

$$\begin{aligned} T - m_A g \sin 37 - f &= 0, \\ N - m_A g \cos 37 &= 0, \end{aligned}$$

y para el bloque que cuelga

$$T - m_B g = 0,$$

donde en la situación de a punto de deslizar tenemos

$$f = \mu_S N$$

y eliminando T y f se obtiene

$$m_B g - m_A g \sin 37 - \mu_S m_A g \cos 37 = 0, \qquad \text{((a))}$$

y para el segundo caso se tendrá un cambio de signo en el sentido de la fuerza de roce, es decir

$$m_B g - m_A g \sin 37 + \mu_S m_A g \cos 37 = 0, \qquad \text{((b))}$$

y de aquí despejamos la máxima

$$m_B = m_A(\sin 37 + \mu_S \cos 37) = 2.284\,6\,\mathrm{N}, \qquad \text{((a))}$$

y la mínima

$$m_B = m_A(\sin 37 - \mu_S \cos 37) = 1.326\,3\,\mathrm{N}, \qquad \text{((b))}$$

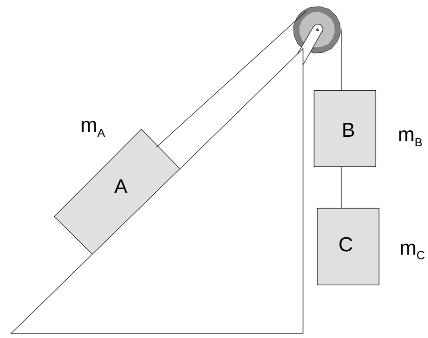
siendo las tensiones

$$T = m_B g,$$

que usted puede calcular en cada caso.

▲

EJERCICIO 4.25 *Tres cuerpos de masa* $m_A = 3\,\mathrm{kg}$, $m_B = 2\,\mathrm{kg}$ *y* $m_C = 1\,\mathrm{kg}$ *se encuentran en reposo como muestra la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. Se pide*

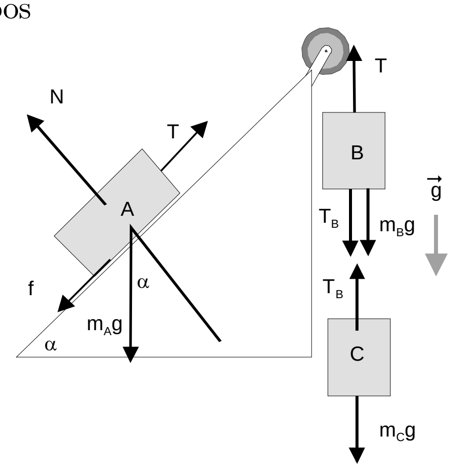


a) El diagrama de fuerzas que actúan sobre m_A.

b) El coeficiente de roce estático entre m_A y la superficie.

c) Las tensiones en las cuerdas.

Solución. La siguiente figura ilustra el diagrama de fuerzas que actúan sobre todos los cuerpos



y las condiciones de equilibrio para cada cuerpo son

$$\begin{aligned} T - m_A g \sin\alpha - \mu_S N &= 0, \\ N - m_A g \cos\alpha &= 0, \\ m_B g + T_B - T &= 0, \\ m_C g - T_B &= 0, \end{aligned}$$

si reemplazamos N y sumamos las primera, tercera y cuarta se obtiene

$$m_B g + m_C g - m_A g \sin\alpha - \mu_S m_A g \cos\alpha = 0,$$

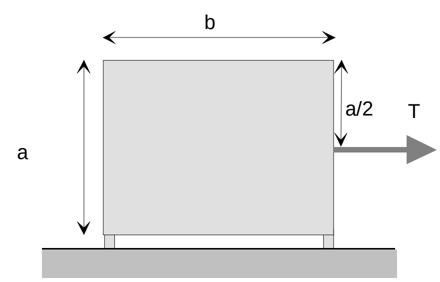
de donde despejamos

$$\mu_S = \frac{m_B + m_C - m_A \sin\alpha}{m_A \cos\alpha} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

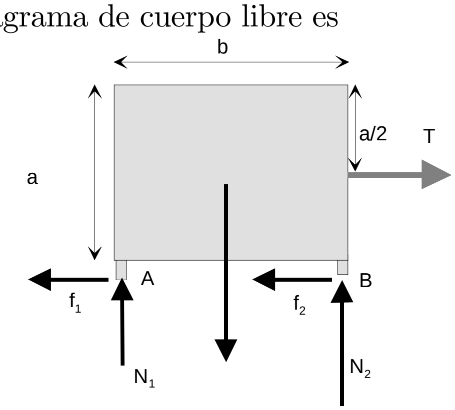
También podemos despejar las tensiones, usando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$\begin{aligned} T_B &= m_C g = 10\,\mathrm{N}, \\ T &= (m_B + m_C) g = 30\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.26 *Un objeto homogéneo en forma de paralelepípedo de altura a y de ancho b está en reposo soportado por dos patitas de masa despreciable en uno y otro extremo como se indica en la figura. Si se aplica una fuerza horizontal T a altura $a/2$ determine el valor máximo de μ_S tal que al romperse el equilibrio aumentando T, el cuerpo deslice sin volcar. (respuesta: $\mu_S = b/a$)*



Solución. El diagrama de cuerpo libre es



donde las condiciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}\sum F_X &= T - f_1 - f_2 = 0,\\ \sum F_Y &= N_1 + N_2 - Mg = 0,\\ \sum \Gamma_B &= T\frac{a}{2} + N_1 b - Mg\frac{b}{2} = 0.\end{aligned}$$

Para que el cuerpo esté a punto de deslizar sin volcar, debe ser

$$\begin{aligned}f_1 &= \mu_S N_1,\\ f_2 &= \mu_S N_2,\\ N_1 &> 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$T = f_1 + f_2 = \mu_S(N_1 + N_2) = \mu_S Mg,$$

que reemplazamos en la tercera resultando

$$\mu_S Mg\frac{a}{2} + N_1 b - Mg\frac{b}{2} = 0,$$

o bien

$$N_1 b = Mg\frac{b}{2} - \mu_S Mg\frac{a}{2} > 0,$$

o sea

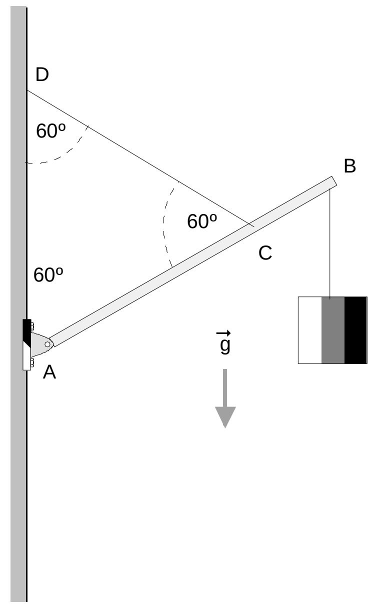
$$\mu_S < \frac{b}{a},$$

de modo que el máximo será

$$\mu_S = \frac{b}{a}.$$

▲

EJERCICIO 4.27 *Se tiene un sistema formado por una barra uniforme de* 6 m *de longitud, de masa* 100 kg *articulada en el punto* A *a un mástil vertical. En el extremo* B *de la barra cuelga un cuerpo de masa* 400 kg. *La barra está sostenida por un cable inextensible atado a los puntos* C *sobre la barra a distancia* 1,5 m *del extremo* B *y* D *sobre el mástil, de tal modo que el triángulo* ACD *es equilátero. Determine*

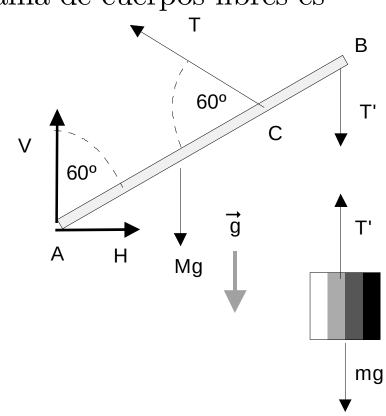


a) *La magnitud de la tensión del cable CD.*

b) *Las componentes de la fuerza que hace el pivote en A sobre la barra.*

c) *El torque ejercido por la tensión del cable sobre el mástil, respecto al punto A.*

Solución. El diagrama de cuerpos libres es



y las condiciones de equilibrio serán

$$\begin{aligned} T' - mg &= 0, \\ H - T\cos 30 &= 0, \\ V + T\sin 30 - Mg &= 0, \\ Mg\frac{AB}{2}\cos 30 + T' \times AB\cos 30 - T \times AC\sin 60 &= 0. \end{aligned}$$

De acuerdo a los datos

$$\begin{aligned} AB &= 6\,\mathrm{m} \\ AC &= 4{,}5\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

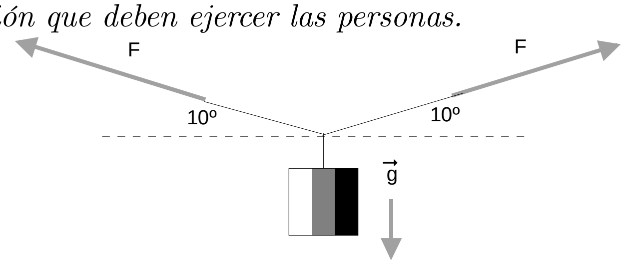
Del sistema podemos despejar

$$\begin{aligned} T &= Mg\frac{AB}{2AC} + mg\frac{AB}{AC} = 6000\,\mathrm{N}, && \text{((a))} \\ V &= Mg - T\sin 30 = -2000\,\mathrm{N}, && \text{((b))} \\ H &= T\cos 30 = 5196.2\,\mathrm{N}, \end{aligned}$$

y el torque es

$$\vec{\Gamma}_A = T \times AC\sin 60\hat{k} = 22863\hat{k}\,\mathrm{N\,m}. \qquad \text{((c))}$$

Ejercicio 4.28 *Se ata un cuerpo de 200 N de peso al punto medio de una cuerda y dos personas tiran de la misma manera de sus extremos de tal modo que el cuerpo queda suspendido como se indica en la figura. Determine la fuerza de tensión que deben ejercer las personas.*



Solución. Es muy directo

$$2F\sin 10 = W,$$

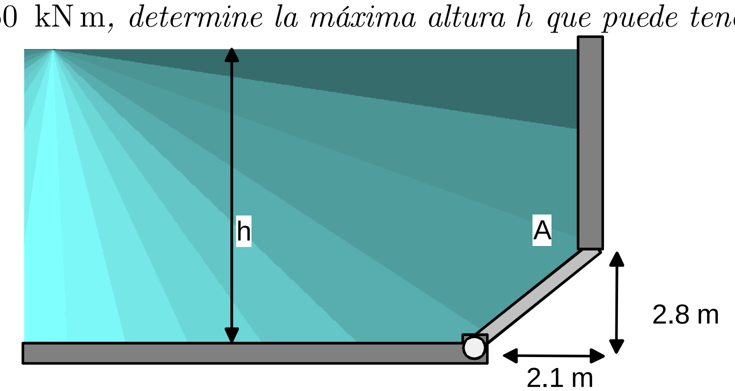
de donde

$$F = \frac{W}{2\sin 10} = 5758.8\,\mathrm{N}$$

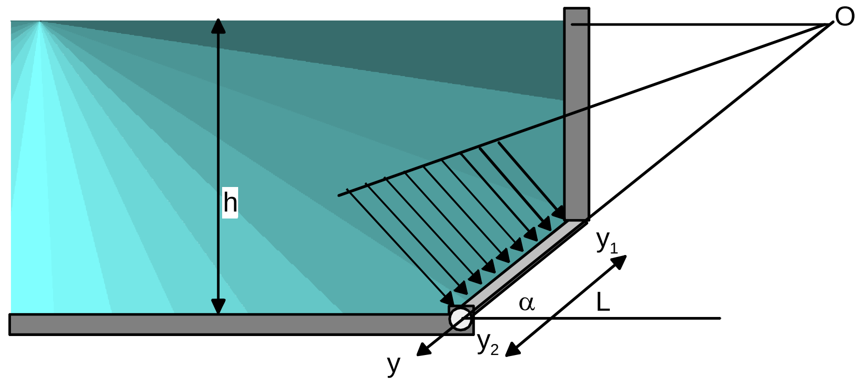
Capítulo 5

Soluciones ejercicios

Ejercicio 5.1 *La compuerta de la figura tiene* 2 m *de ancho y contiene agua. Si el eje que soporta la compuerta que pasa por* A *soporta un par máximo de* 150 kN m, *determine la máxima altura* h *que puede tener el agua.*



Solución. El perfil de presión que actúa sobre la compuerta se ilustra en la figura que sigue



Usaremos fórmulas

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2}, \quad F_P = \frac{1}{2}\rho w g \left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos(90-\alpha),$$

siendo

$$y_2 = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad y_1 = \frac{h}{\sin\alpha} - L.$$

De manera que la fuerza resultante es

$$\begin{aligned} F_P &= \frac{1}{2}\rho w g\left((\frac{h}{\sin\alpha})^2 - (\frac{h}{\sin\alpha} - L)^2 \right)\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\rho w g L\left(2h - L\sin\alpha\right), \end{aligned}$$

y su punto de aplicación resultará

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2} = \frac{2}{3}\frac{3h^2 - 3hL\sin\alpha + L^2\sin^2\alpha}{2h\sin\alpha - L\sin^2\alpha}.$$

El torque será de magnitud

$$\begin{aligned} \tau_A &= F_P(y_2 - y_P) \\ &= \frac{1}{2}\rho w g L\left(2h - L\sin\alpha\right)\left(\frac{h}{\sin\alpha} - \frac{2}{3}\frac{3h^2 - 3hL\sin\alpha + L^2\sin^2\alpha}{2h\sin\alpha - L\sin^2\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(3h - 2L\sin\alpha\right)\rho w g L^2 \end{aligned}$$

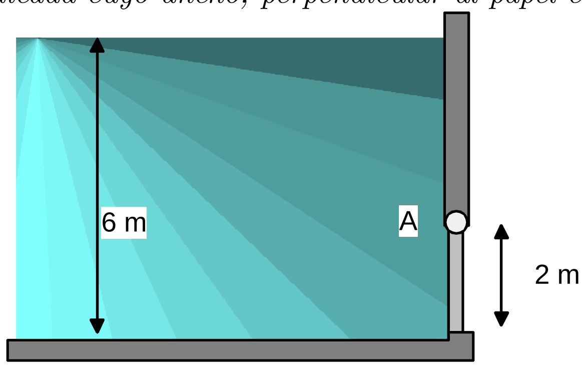
Numéricamente $w = 2\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $L = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}8^2} = 3.\,5\,\mathrm{m}$, $L\sin\alpha = 2{,}8$, calculamos

$$\tau_A = \frac{1}{6}\left(3h - 2L\sin\alpha\right)\rho w g L^2 = 1.\,225\times 10^5 h - 2.\,286\,667\times 10^5 = 150\times 10^3,$$

de donde se obtiene

$$h = 3.091\,\text{m}.$$

EJERCICIO 5.2 *Determínese el par que se requiere hacer en A para sostener la compuerta indicada cuyo ancho, perpendicular al papel es $w = 2\,\text{m}$.*



Solución. Si z indica la posición en la compuerta medida desde A hacia abajo, entonces numéricamente ($\rho = 1000\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$, $g = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, $w = 2\,\text{m}$)

$$p = 10000(4 + z)\ \ \text{N}\,\text{m}^{-2}$$

y la fuerza por unidad de longitud será

$$20000(4 + z)\,\text{N}\,\text{m}^{-1}.$$

Su resultante y punto de aplicación será calculada igual que en el problema anterior con

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(2)(20000 \times 4 + 20000 \times 6) \\ &= 200000\,\text{N} \end{aligned}$$

y su punto de aplicación es

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{3}2\frac{(20000 \times 4) + 2(20000 \times 6)}{20000 \times 4 + (20000 \times 6)} \\ &= 1.067\,\text{m}. \end{aligned}$$

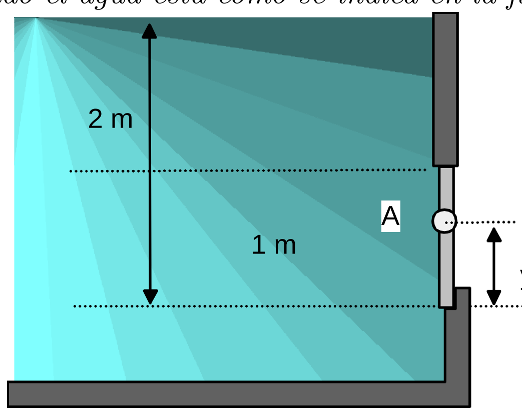
de modo que el torque es

$$\tau_A = 200000 \times 1.067 = 2.134 \times 10^5 \,\mathrm{N\,m}$$

Note de nuevo que integrando es mucho más directo

$$\int_0^2 20000(4+z)zdz = 2.13 \times 10^5$$

EJERCICIO 5.3 *Determine la ubicación "y "del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.*



Solución. Si h indica una coordenada de posición medida desde la superficie del agua hacia abajo, entonces la presión en un punto ubicado a esa profundidad es

$$p = \rho g h,$$

(la presión atmosférica actúa por ambos lados y se cancela). Para que la compuerta justo se abra, el punto de aplicación de la resultante debe estar en el punto A. La coordenada del punto de aplicación medida desde el punto más alto de la compuerta puede escribirse

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{1}{3}L\frac{(\rho w g h_1) + 2(\rho w g h_2)}{\rho w g h_1 + (\rho w g h_2)} \\ &= \frac{1}{3}L\frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2}, \end{aligned}$$

entonces

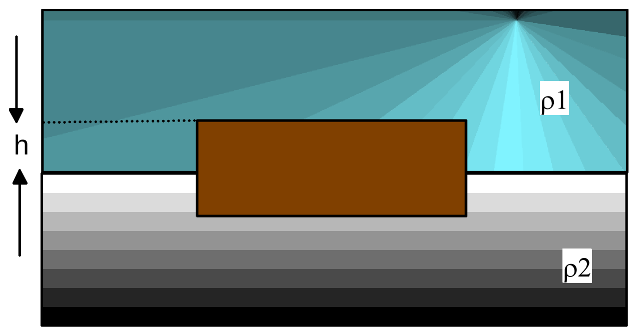
$$\frac{1}{3}\frac{1+2(2)}{1+2} = 0{,}56\,\mathrm{m}$$

por lo tanto

$$y = 1 - 0{,}56 = 0{,}44\,\mathrm{m}$$

▲

EJERCICIO 5.4 *Un bloque con una sección transversal de área A, altura H y densidad ρ , está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1 , ρ_2 , H y h.*



Solución. El empuje es igual al peso de la región de fluido ocupada por el cuerpo, es decir

$$\begin{aligned} E &= \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 \\ &= \rho_1 g A h + \rho_2 g A(H-h). \end{aligned}$$

Para obtener la densidad tenemos que

$$\rho g A H = \rho_1 g A h + \rho_2 g A(H-h),$$

o sea

$$\rho = \frac{\rho_1 h + \rho_2(H-h)}{H}.$$

▲

EJERCICIO 5.5 *Un cuerpo de material desconocido pesa $4\,\mathrm{N}$ en el aire y $2{,}52\,\mathrm{N}$ sumergido en agua. Encuentre la densidad específica del material.*

Solución. En aire el peso es

$$P = \rho_C g V_C,$$

completamente sumergido

$$P' = \rho_C g V_C - \rho_L g V_C,$$

de manera que

$$\frac{P}{P'} = \frac{\rho_C g V_C}{\rho_C g V_C - \rho_L g V_C} = \frac{\rho_C}{\rho_C - \rho_L},$$

entonces

$$\rho_C = 2.702\,7\rho_L$$

o sea

$$\rho_C = 2.702\,7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

▲

Ejercicio 5.6 *Una balsa de área A, espesor h y masa* 400 kg *flota en aguas tranquilas con una inmersión de* 5 cm*. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de* 7,2 cm*. Encuentre la masa de la carga.*

Solución. Si la masa del cuerpo es M y la de la carga es m podemos escribir

$$\begin{aligned} Mg &= (\rho_L g A)5, \\ (M+m)g &= (\rho_L g A)7{,}2, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{M+m}{M} = \frac{7{,}2}{5},$$

y

$$m = 0{,}44M = 176{,}0\,\mathrm{kg}.$$

▲

Ejercicio 5.7 *Un cuerpo homogéneo prismático de* 20 cm *de espesor* 20 cm *de ancho y* 40 cm *de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a* 50 cm *de profundidad al aplicar sobre él una tensión de* 50 N *. ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?*

Solución. La tensión es el peso sumergido, es decir

$$P' = \rho_C g V_C - \rho_L g V_C = 50,$$

pero $gV_C = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}4 \times 10 = 0{,}16$ de manera que

$$\rho_C - \rho_L = \frac{50}{0{,}16} = 312.\,5$$

de manera que

$$\rho_C = 1312.\,5\,\mathrm{kg\,m^{-3}},$$

la densidad relativa es

$$\rho_{Cr} = 1{,}3125,$$

y el peso en aire será

$$\begin{aligned} P &= \rho_C g V_C \\ &= 0{,}16 \times 1312.\,5 = 210{,}0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 5.8 *¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua* 7,25 *flotará sobre un mercurio de densidad relativa* 13,57*?*

Solución. Sea m la masa de la pieza (C). Su peso será

$$W = mg.$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_C},$$

de modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$W = \rho_C V g$$

Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergido, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_g} g V_S.$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

$$\rho_C V g = \rho_{H_g} g V_S,$$

de donde

$$\frac{V_S}{V} = \frac{\rho_C}{\rho_{Hg}} = \frac{7{,}25}{13{,}57} = 0{,}534$$

o sea hay un 53,4 % sumergido y por lo tanto 46. 6 % sobre el nivel del Mercurio.

▲

EJERCICIO 5.9 *Un tarro cilíndrico de* 20 cm *de diámetro flota en agua con* 10 cm *de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de* 100 N *de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro* 7,8 g cm^{-3}.

Solución. Sea H en metros, la altura del cilindro, R el radio y h la altura por encima del nivel del agua. El volumen sumergido de cilindro será

$$V = \pi R^2(H - h).$$

Sean V', W', ρ' el volumen, peso y densidad del hierro

$$V' = \frac{M'}{\rho'} = \frac{W'}{g\rho'},$$

entonces la condición de equilibrio será

$$M_C g + W' = \rho_{H_2O} g\pi R^2(H - h) + \rho_{H_2O} g\frac{W'}{g\rho'}.$$

Cuando el bloque se coloca adentro, no está presente el empuje sobre el bloque de hierro de modo que

$$M_C g + W' = \rho_{H_2O} g\pi R^2(H - h'),$$

donde h' es la nueva altura sobre el nivel del agua. Al igualar las dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi R^2(H - h) + \frac{W'}{g\rho'} &= \pi R^2(H - h'), \\
-h + \frac{W'}{\pi R^2 g\rho'} &= -h'
\end{aligned}$$

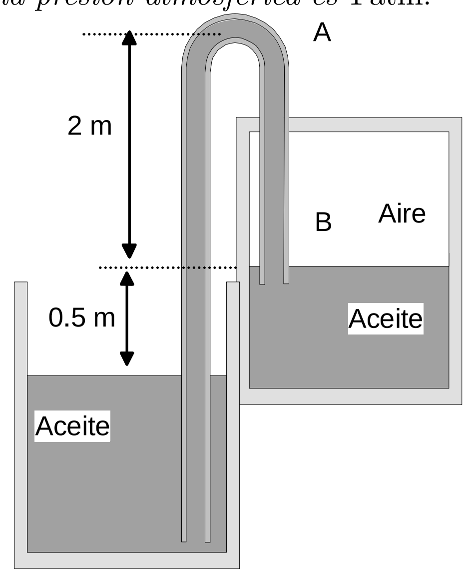
$$h' = h - \frac{1}{\pi R^2}\frac{W'}{g\rho'}.$$

Los datos son $h = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\rho' = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ y $W' = 100\,\mathrm{N}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ obteniendo

$$0{,}1 - \frac{1}{\pi(0{,}1)^2}\frac{100}{10 \times 7800}$$

$$h' = 0{,}059\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{cm}$$

EJERCICIO 5.10 *Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad* $\rho = 0{,}85\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. *Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B si la presión atmosférica es* 1 atm.



Solución. l nivel del aceite de la izquierda tenemos actuando la presión atmosférica $p_a = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ y se tiene

$1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

$$\begin{aligned} p_a &= p_A + \rho g h_1, \\ p_B &= p_A + \rho g h_2, \end{aligned}$$

con $h_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ y $h_2 = 2\,\mathrm{m}$. Así calculamos

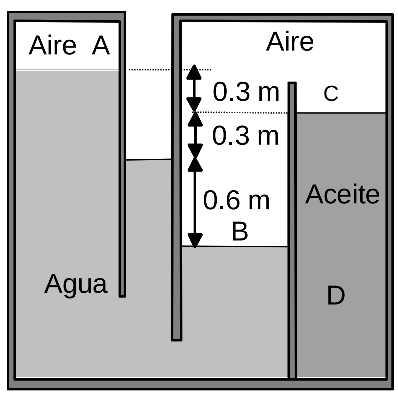
$$
\begin{aligned}
p_A &= 101\,325 - 850 \times 9{,}8 \times 2{,}5 \\
&= 80500{,}0\,\mathrm{Pa} \\
&= 0{,}794\,47\,\mathrm{atm},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
p_B &= 80500{,}0 + 850 \times 9{,}8 \times 2 \\
&= 97160{,}0\,\mathrm{Pa} \\
&= 0{,}958\,89\,\mathrm{atm}.
\end{aligned}
$$

▲

EJERCICIO 5.11 *Con respecto a la figura, determine la presión en los puntos A, B, y C de la figura donde el aceite tiene densidad $0{,}90\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ y el agua $1{,}00\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.*



Solución. Supondremos que la presión atmosférica que actúa sobre la segunda columna de agua es $p_a = 1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
p_a &= p_A + \rho_{agua} \times g \times 0{,}6, \\
p_B &= p_a + \rho_{agua} \times g \times 0{,}6, \\
p_B &= p_C + \rho_{aire} \times g \times 0{,}9.
\end{aligned}
$$

Si se desprecia la densidad del aire tenemos que

$$\begin{aligned}p_A &= 101325 - 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}6 \\ &= 95445\,\mathrm{Pa} \\ p_B &= p_C = 101325 + 1000 \times 9{,}8 \times 0{,}6 \\ &= 1\,072\,10\,\mathrm{Pa}.\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 5.12 *En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de* 0,3 *y cuyas dimensiones son* 120 cm *de largo,* 100 cm *de ancho y* 25 cm *de alto. Determine*

a) La fuerza de empuje.

b) La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.

c) El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6 cm *más.*

Solución. Si la balsa flota, entonces la fuerza de empuje debe ser igual al peso, esto es

$$E = \rho g V = 300 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times 0{,}25 = 882{,}0\,\mathrm{N}.$$

Sea h la altura sumergida. El empuje debe además ser igual al peso del líquido desplazado, es decir

$$E = \rho_{agua} g V_{desp},$$

entonces podemos igualar

$$300 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times 0{,}25 = 1000 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times h$$

de donde

$$h = \frac{300 \times 0{,}25}{1000} = 0{,}075\,\mathrm{m} = 7{,}5\,\mathrm{cm}.$$

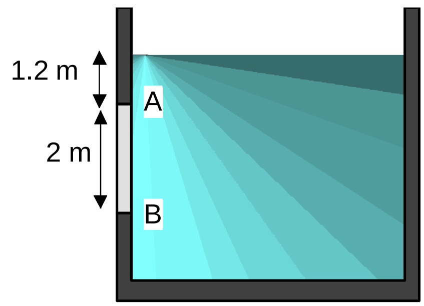
Para que se hunda 6 cm más tenemos que agregar un peso W, donde el peso total debe igualar al nuevo empuje, esto es

$$882 + W = 1000 \times 9{,}8 \times 1{,}2 \times 1 \times (0{,}075 + 0{,}06) = 15\,87{,}6$$

de donde

$$W = 15\,87{,}6 - 882 = 7\,05{,}6\,\mathrm{N}.$$

EJERCICIO 5.13 *Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura* $AB = 2\,\mathrm{m}$ *y de ancho* $1\,\mathrm{m}$ *(hacia adentro del papel), donde el punto* A *está a profundidad de* $1{,}2\,\mathrm{m}$.



Solución. Como se explica en el texto

$$F = \frac{1}{2}\rho w g \left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2}.$$

siendo $y_1 = 1{,}2\,\mathrm{m}$, $y_2 = 3{,}2\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $w = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ así calcule

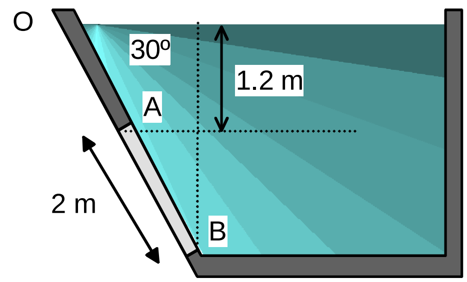
$$F = \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8(3{,}2^2 - 1{,}2^2) = 43120{,}0\,\mathrm{N},$$

y

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{1{,}2^2 + 1{,}2 \times 3{,}2 + 3{,}2^2}{1{,}2 + 3{,}2} = 2.351\,5\,\mathrm{m},$$

medido desde la superficie del agua.

EJERCICIO 5.14 *Repita el problema anterior si la línea* OAB *forma un ángulo de* 30^o *respecto a la vertical.*



Solución. Como se explica en el texto

$$F = \frac{1}{2}\rho w g \left(y_2^2 - y_1^2\right)\cos\theta,$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{y_1 + y_2},$$

donde los y se miden desde la superficie pero a lo largo de la compuerta. Entonces tenemos

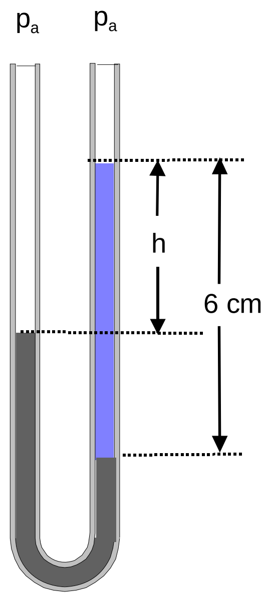
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1{,}2}{\cos 30} = 1.\,385\,6\,\mathrm{m}, \\ y_2 &= y_1 + 2 = 3.\,385\,6\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

calculando obtenemos

$$F = \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8(3.\,385\,6^2 - 1.\,385\,6^2)\cos\frac{\pi}{6} = 40493\,\mathrm{N},$$

$$y_P = \frac{2}{3}\frac{1.\,385\,6^2 + 1.\,385\,6 \times 3.\,385\,6 + 3.\,385\,6^2}{1.\,385\,6 + 3.\,385\,6} = 2.\,525\,3\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 5.15 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte keroseno de densidad* $0{,}82\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ *en uno de los lados que forma una columna de* $6\,\mathrm{cm}$ *de altura. Determine la diferencia de altura* h *entre las superficies de los dos líquidos.*



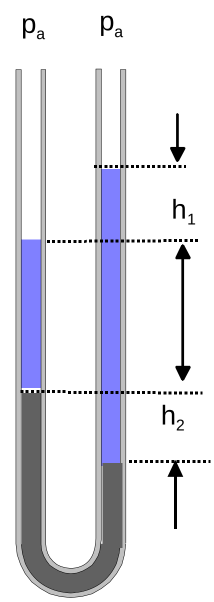
Solución. Al nivel de la columna de agua en el lado derecho, la presión es la misma en las dos ramas, por lo tanto

$$\rho_a(6-h)=\rho_k 6,$$

de donde

$$h=1.08\,\text{cm}.$$

EJERCICIO 5.16 *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniendo una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde $h_2 = 1\,\text{cm}$. Determine la diferencia de altura h_1 entre las superficies de los dos niveles de agua.*



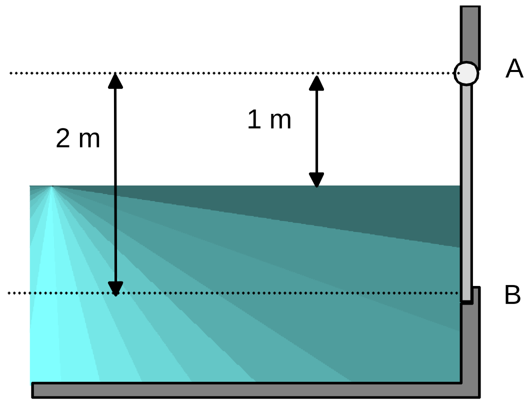
Solución. Sea ρ_a la densidad del agua y ρ_m la densidad del mercurio. La presión al nivel inferior del mercurio puede es la misma y puede calcularse por las dos ramas obteniendo

$$\rho_m g h_2 = \rho_a g h_2 + \rho_a g h_1,$$

de donde

$$h_1 = (\frac{\rho_m}{\rho_a} - 1)h_2.$$

Ejercicio 5.17 *La compuerta de la figura tiene una altura de* 2 m *un ancho de* 2 m*, está articulada en A y apoyada en B como se indica en la figura. Si el fluido es agua de densidad $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ y su nivel llega hasta la mitad de la compuerta, determine las reacciones horizontales en los puntos A y B.*



Solución. El centro de presión está a distancia

$$y_P = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,\text{m}$$

del punto A y la fuerza de presión es

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\rho g w h^2 = \\ &= \frac{1}{2}1000 \times 9{,}8 \times 2 \times 1^2 \\ &= 9800{,}0\,\text{N}. \end{aligned}$$

Si llamamos H_A y H_B las reacciones horizontales en A y en B, tenemos que

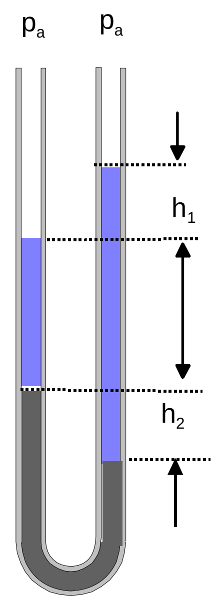
$$\begin{aligned} H_A + H_B + F &= 0, \\ H_B \times 2 + F \times \frac{5}{3} &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} H_B &= -F \times \frac{5}{6} = -8166.\,7\,\text{N}, \\ H_A &= 8166.\,7 - 9800{,}0 = -1633.\,3\,\text{N}, \end{aligned}$$

ambas hacia la izquierda.

Ejercicio 5.18 *El tubo en U de la figura está abierto a la presión atmosférica en ambos extremos y contiene dos líquidos* (1) *y* (2) *que no se mezclan como se indica en la figura. Determine la razón de las densidades* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.



Solución. Igual que en un problema anterior, igualamos la presión calculada por las dos ramas (2 el líquido inferior)

$$\rho_2 g h_2 = \rho_1 g(h_1 + h_2),$$

de donde

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Capítulo 6

Soluciones ejercicios

Ejercicio 6.1 *La posición de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas está dada*

$$x(t) = 1 + 8t - 2t^2,$$

donde la posición está en metros y el tiempo en segundos. Determine

a) La velocidad en $t = 5\,\mathrm{s}$.

b) La aceleración en $t = 2\,\mathrm{s}$.

c) El instante en que la partícula cambia su sentido de movimiento.

d) El desplazamiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 4\,\mathrm{s}$.

e) El espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 4\,\mathrm{s}$.

f) El espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 5\,\mathrm{s}$.

Solución. Calculamos directamente

a) $v(t) = \frac{dx}{dt} = 8 - 4t$ que evaluada en $t = 5$ da $v(5) = -12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

b) $a(t) = \frac{dv}{dt} = -4$ constante por lo tanto $a(2) = -4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

c) Cuando $v(t) = 8 - 4t = 0$ esto es cuando $t = 2\,\mathrm{s}$

d) $\Delta x = x(4) - x(0) = (1 + 8 \times 4 - 2 \times 4^2) - 1 = 0\,\mathrm{m}$

e) Notemos que partícula cambia sentido del movimiento cuando $v(t) = 8 - 4t = 0$ es decir en $t = 2\,\mathrm{s}$, por lo tanto

$$s = x(2) - x(0) + x(2) - x(4) = 16\,\mathrm{m}$$

f) Similarmente

$$s = x(2) - x(0) + x(2) - x(5) = 26\,\mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 6.2 *Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas con aceleración constante. En el instante inicial pasa por la posición* $x(0) = -10\,\mathrm{m}$ *con una velocidad* $v(0) = -20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y en* $t = 3\,\mathrm{s}$ *su posición es* $x(3) = -52\,\mathrm{m}$*. Determine*

a) La posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$*. (o ecuación itinerario)*

b) El espacio recorrido por la partícula entre $t = 3\,\mathrm{s}$ *y* $t = 6\,\mathrm{s}$*.*

c) La velocidad media entre $t = 4\,\mathrm{s}$ *y* $t = 7\,\mathrm{s}$*.*

d) Los intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen.

Solución. Si a indica la aceleración entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= -10 - 20t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

pero se sabe que $x(3) = -52$ por lo tanto

$$-52 = -10 - 20 \times 3 + \frac{1}{2}a \times 3^2$$

de donde $a = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Ahora podemos calcular las respuestas

a)

$$x(t) = -10 - 20t + 2t^2$$

b) Para saber el espacio recorrido debemos saber cuando cambia el sentido del movimiento

$$v(t) = -20 + 4t = 0 \rightarrow t = 5\,\mathrm{s}$$

que está dentro del intervalo $(3, 6)$. Como inicialmente va hacia la izquierda

$$s = x(3) - x(5) + x(6) - x(5) = 10\,\mathrm{m}$$

c) Tenemos que calcular

$$v_m(4, 7) = \frac{x(7) - x(4)}{7 - 4},$$

pero podemos evaluar $x(7) = -52\,\mathrm{m}$ y $x(4) = -58\,\mathrm{m}$ luego

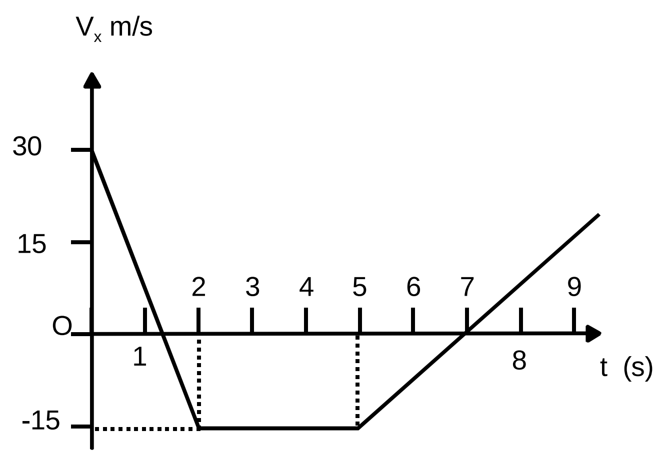
$$v_m(4, 7) = \frac{-52 + 58}{7 - 4} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

d) La partícula comienza a moverse hacia la izquierda hasta alcanzar su mínimo que ocurre en $t = 5\,\mathrm{s}$. Posteriormente cruza el origen nuevamente cuando

$$-10 - 20t + 2t^2 = 0 \rightarrow t = 10.477\,\mathrm{s}$$

Por lo tanto la partícula se aleja del origen en los intervalos de tiempo $0 < t < 5$ y $t > 10{,}477\,\mathrm{s}$

Ejercicio 6.3 *El gráfico siguiente ilustra la variación de la velocidad $v(t)$ de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas con el tiempo. Si en $t = 0$ la partícula está en el origen del sistema, determine*



a) *La aceleración de la partícula en* $t = 1\,\mathrm{s}$.

b) *El desplazamiento de la partícula entre* $t = 0\,\mathrm{s}$ *y* $t = 3\,\mathrm{s}$.

c) *La velocidad media de la partícula entre* $t = 4\,\mathrm{s}$ *y* $t = 9\,\mathrm{s}$.

d) *La posición de la partícula en función del tiempo* $x(t)$ *(ecuación itinerario) en el intervalo de* $t = 0\,\mathrm{s}$ *a* $t = 2\,\mathrm{s}$.

e) *Los intervalos de tiempo en que la partícula se dirige hacia el origen.*

Solución. Es conveniente primero evaluar las aceleraciones (pendientes del gráfico dado) en los tres tramos. Así resulta

$$a_1 = -\frac{45}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a_2 = 0\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a_3 = \frac{15}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

luego al utilizar la ecuación

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2,$$

resulta $x(t)$ para todo el recorrido

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 30t - \frac{45}{4}t^2 \text{ para } t \leqslant 2\\
x(2) &= 15\,\mathrm{m}\\
x(t) &= x(2) + v(2)(t-2) + \frac{1}{2}a_2(t-2)^2 = 15 - 15(t-2) \text{ para } 2 \leqslant t \leqslant 5\\
x(5) &= -30\,\mathrm{m}\\
x(t) &= x(5) + v(5)(t-5) + \frac{1}{2}a_3(t-5)^2\\
&= -30 - 15(t-5) + \frac{15}{4}(t-5)^2 \text{ para } 5 \leqslant t
\end{aligned}$$

luego las respuestas serán:

a) $a(1) = -\frac{45}{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

b) $\Delta x = x(3) - x(0) = 15 - 15(3-2) = 0$

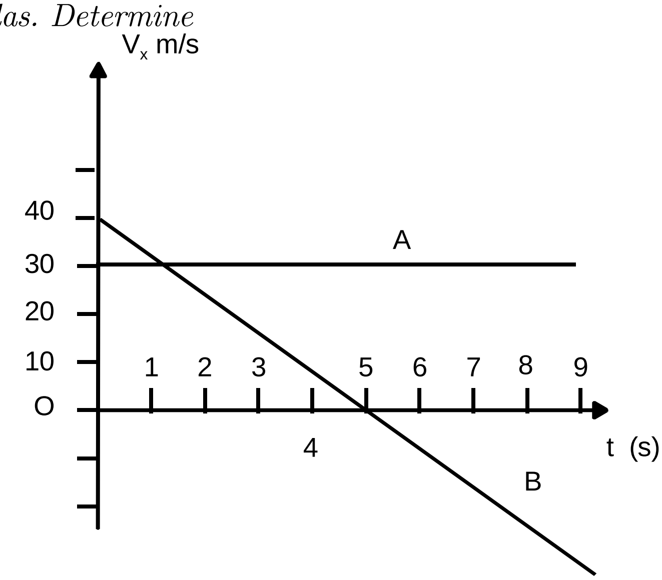
c)

$$v_m = \frac{x(9)-x(4)}{9-4} = \frac{-30-15(9-5)+\frac{15}{4}(9-5)^2-(15-15(4-2))}{9-4} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

d) $x(t) = 30t - \frac{45}{4}t^2$

e) la partícula parte alejándose del origen hacia la derecha hasta que $v(t) = 30 - \frac{45}{2}t = 0$ o sea $t = \frac{4}{3}\,\mathrm{s}$. Luego se mueve hacia la izquierda acercándose al origen hasta que $x(t) = 15 - 15(t-2) = 0$ o sea hasta $t = 3\,\mathrm{s}$. Luego se alejará del origen nuevamente hasta que $v = 0$ y esto ocurre si $t = 7\,\mathrm{s}$. De ahí se acercará hasta cuando lo cruce de nuevo esto es cuando $-30 - 15(t-5) + \frac{15}{4}(t-5)^2 = 0$, con solución $t = 7 + 2\sqrt{3} = 10.464\,1\,\mathrm{s}$. En consecuencia se acerca al origen si $\frac{4}{3}\,\mathrm{s} < t < 3\,\mathrm{s}$ y $7\,\mathrm{s} < t < 10.461\,\mathrm{s}$

Ejercicio 6.4 *En el gráfico de la figura están representadas las velocidades de dos partículas A y B que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas. Determine*



a) La aceleración de B.

b) *Espacio recorrido por A desde $t = 0$ hasta cuando B alcanza la velocidad $v_B = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

c) *El desplazamiento de B en el intervalo de $t = 0\,\mathrm{s}$ a $t = 10\,\mathrm{s}$.*

d) *La posición de la partícula A en función del tiempo t, si su posición inicial es $x(0) = 8\,\mathrm{m}$.*

Solución. La aceleración de B es la pendiente de la curva v_x vs t. Dado que la curva es una recta ella resulta constante

$$a_{x_B} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{40}{8} = -8\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \text{ (a)}$$

La ecuación de la recta es

$$v_{x_B}(t) = 40 - 8t.$$

De aquí se determina el instante en que el móvil B ´alcanza la velocidad $v_B = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}} \rightarrow 40 - 8t = 30$ y de aquí $t = \frac{10}{8}\,\mathrm{s} = 1.25\,\mathrm{s}$. El espacio recorrido por A en ese tiempo será

$$x_A = 30t == 37.5\,\mathrm{m}. \quad \text{(b)}$$

El desplazamiento de B es el área bajo la curva (la integral de v_x)

$$\Delta x_B = \int_0^{10} v_{x_B}(t)dt = \int_0^{10} (40 - 8t)dt = 0. \text{ (c)}$$

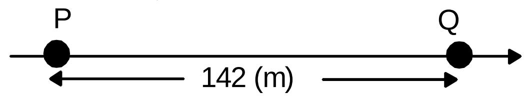
Si usted aún no sabe integrar, el área bajo la curva puede calcularla como la suma de las áreas de dos triángulos, una positiva y la otra negativa

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}40 \times 5 - \frac{1}{2}40 \times 5 = 0\,\mathrm{m}.$$

La posición de la partícula A es simplemente

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_A(0) + v_{x_A} t \\ &= 8 + 30t. \quad \text{(d)} \end{aligned}$$

Ejercicio 6.5 *Dos partículas A y B se mueven con velocidad constante sobre un mismo eje OX en sentido contrario de manera que en $t = 0$ cuando B pasa por Q su velocidad es $v_B(0) = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, A pasa por P con velocidad $v_A(0) = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La distancia entre los puntos P y Q es $142\,\mathrm{m}$. Determine las desaceleraciones constantes que deben aplicar ambas partículas para que se detengan simultáneamente justo antes de chocar.*



Solución. De acuerdo a los datos (colocando el origen en P)

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 142 - 5t + \frac{1}{2}a_A t^2, \\ v_A(t) &= -5 + a_A t, \\ x_B(t) &= 6t - \frac{1}{2}a_B t^2, \\ v_B(t) &= 6 - a_B t \end{aligned}$$

Note que los signos de las aceleraciones corresponden ambas a desaceleraciones de magnitud a. Ellas se detienen simultáneamente si

$$\begin{aligned} -5 + a_A t &= 0, \\ 6 - a_B t &= 0, \end{aligned}$$

y ellas deben justo estar en la misma posición

$$\begin{aligned} x_A &= x_B, \\ 142 - 5t + \frac{1}{2}a_A t^2 &= 6t - \frac{1}{2}a_B t^2 \end{aligned}$$

podemos reemplazar $a_A t = 5$ y $a_B t = 6$ obteniendo

$$142 - 5t + \frac{1}{2}5t = 6t - \frac{1}{2}6t$$

de donde

$$t = \frac{284}{11} = 25.818\,\mathrm{s},$$

y luego

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{5}{25.818} = 0{,}193 \ \mathrm{m\,s^{-2}}, \\ a_B &= \frac{6}{25.818} = 0{,}232 \ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.6 *Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje OX con una rapidez constante de $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ durante $10\,\mathrm{s}$. A partir de este último instante acelera constantemente durante $5\,\mathrm{s}$ hasta que su rapidez es $80\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Determine:*

a) La aceleración de la partícula en los primeros $10\,\mathrm{s}$.

b) La aceleración de la partícula entre $t = 10\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

c) El desplazamiento de la partícula entre $t = 0\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

d) La velocidad media de la partícula entre $t = 10\,\mathrm{s}$ y $t = 15\,\mathrm{s}$.

Solución. Para el primer tramo

a) $a = 0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) Aquí a es constante

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{80 - 50}{5} = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

c) El desplazamiento es el área bajo la curva (hágala) $v(t)$. El resulta

$$\Delta x = 50 \times 15 + \frac{1}{2} 5 \times 30 = 825\,\mathrm{m}.$$

d) Esta es (área entre $t = 10$ hasta $t = 15$)

$$v_m = \frac{x(15) - x(10)}{5} = \frac{50 \times 5 + \frac{1}{2} 30 \times 5}{5} = 65\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

EJERCICIO 6.7 *Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, recorre en los dos primeros segundo un espacio de* $16{,}72\,\mathrm{m}$ *y durante los dos segundos siguientes un espacio de* $23{,}46\,\mathrm{m}$. *Determine*

a) El espacio que recorre en los siguientes cuatro segundos.

b) La velocidad inicial.

c) La aceleración del cuerpo.

Solución. Por ser movimiento uniformemente acelerado colocando el origen en la posición iniicial

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Del enunciado

$$\begin{aligned} x(2) &= 16{,}72 = 2v_0 + 2a, \\ x(4) - x(2) &= 23{,}47 = 4v_0 + 8a - (2v_0 + 2a) = 2v_0 + 6a, \end{aligned}$$

de donde se obtienen (b) y (c)

$$v_0 = 6.673\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad a = 1.688\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

finalmente para calcular (a)

$$x(8) - x(4) = 67.204\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 6.8 *Dos partículas* A *y* B *salen al mismo tiempo desde el origen de un sistema de coordenadas moviéndose en el sentido positivo del eje* OX. *La partícula* A *tiene una velocidad inicial de* $v_A(0) = 18\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y una aceleración constante* $a_A = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, *mientras que la partícula* B *tiene una velocidad inicial de* $v_B(0) = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y una aceleración constante* $a_B = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. *Determine el instante en que las partículas se encuentran nuevamente.*

Solución. Podemos escribir

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 18t + \frac{1}{2}4t^2, \\ x_B(t) &= 10t + \frac{1}{2}8t^2. \end{aligned}$$

Las partículas se encuentran cuando $x_A = x_B$ y de aquí

$$18t + \frac{1}{2}4t^2 = 10t + \frac{1}{2}8t^2$$

con soluciones $t = 0$, y $t = 4\,\mathrm{s}$, la segunda sirve.

▲

EJERCICIO 6.9 *En una carrera de* $100\,\mathrm{m}$ *dos jóvenes* A *y* B *cruzan la meta empatados, marcando ambos* $10{,}2\,\mathrm{s}$. *Si, acelerando uniformemente,* A *alcanza su rapidez máxima a los* $2\,\mathrm{s}$ *y* B *a los* $3\,\mathrm{s}$ *y ambos mantienen la rapidez máxima durante la carrera, determine:*

a) Las aceleraciones de A *y* B.

b) Las rapideces máximas de A *y* B.

c) El que va adelante a los $10\,\mathrm{s}$ *y la distancia que los separa en ese instante.*

Solución. En general si t' es el tiempo que dura la aceleración y V es la velocidad constante final, tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2, \text{ si } t < t' \text{ y} \\ V &= at', \end{aligned}$$

luego si X indica la distancia total a recorrer, el tiempo T que se emplea es

$$\begin{aligned} T &= t' + \frac{X - \frac{1}{2}at'^2}{V} \\ T &= t' + \frac{X - \frac{1}{2}at'^2}{at'} \end{aligned}$$

para nuestro caso, como llegan empatados tenemos

$$\begin{aligned} T &= (2) + \frac{100 - \frac{1}{2}a_A(2)^2}{a_A(2)} = 10{,}2, \\ T &= (3) + \frac{100 - \frac{1}{2}a_B(3)^2}{a_B(3)} = 10{,}2 \end{aligned}$$

de donde despejamos

$$a_A = 5.\,434\,8\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

$$a_B = 3.\,831\,4\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

así resulta además

$$\begin{aligned} V_A &= a_A t'_A = 5.\,434\,8 \times 2 = 10.\,870\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ V_B &= a_B t'_B = 3.\,831\,4 \times 3 = 11.\,494\,\mathrm{m\,s^{1}}, \end{aligned}$$

Para la etapa de velocidad constante tenemos que

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{1}{2}a_A(t'_A)^2 + V_A(t - t'_A), \\ x_B(t) &= \frac{1}{2}a_B(t'_B)^2 + V_B(t - t'_B), \end{aligned}$$

y reemplazando valores numéricos son

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{1}{2}5.\,434\,8(2)^2 + 10.\,870(t-2) = -10.\,87 + 10.\,87t, \\ x_B(t) &= \frac{1}{2}3.\,831\,4(3)^2 + 11.\,494(t-3) = -17.\,241 + 11.\,494t, \end{aligned}$$

y para $t = 10\,\mathrm{s}$ resultan

$$\begin{aligned} x_A &= -10.\,87 + 10.\,87t = 97.\,83\,\mathrm{m}, \\ x_B &= -17.\,241 + 11.\,494t = 97.\,699\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

luego va adelante A y la distancia que los separa es

$$\Delta x = 97.\,83 - 97.\,699 = 0{,}131\ \mathrm{m}.$$

EJERCICIO 6.10 *Una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con una velocidad inicial $v(0) = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y desacelera constantemente con una aceleración $a = -10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determine la posición máxima que alcanza sobre el eje de movimiento y la velocidad cuando pasa nuevamente por el origen.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= 5t - 5t^2, \\ v(t) &= 5 - 10t, \end{aligned}$$

ella cambia su sentido de movimiento (está en un máximo) cuando $5-10t = 0$ y de aquí $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Para ese instante calculamos

$$x_{máximo} = 5(0{,}5) - 5(0{,}5)^2 = 1.\,25\,\mathrm{m}.$$

Cuando pasa nuevamente por el origen $x = 0$ y de aquí $5t - 5t^2 = 0$, con solución $t = 1\,\mathrm{s}$. Para ese instante $v(1) = 5 - 10 = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

EJERCICIO 6.11 *Si una partícula en que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad nula y aceleración constante a, demuestre que las distancias recorridas en cada segundo aumentan en la proporción*

$$1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$$

Solución. Basta considerar que

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2,$$

Así la distancia recorrida entre $t = n$ y $t = n + 1$ será

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(n+1)^2 - \frac{1}{2}an^2 = \frac{1}{2}a(2n+1)$$

o sea están en la proporción $1 : 3 : 5 : 7 : \cdots$

EJERCICIO 6.12 *Si una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad V_0 y desacelera con aceleración constante $-a$, demuestre que la partícula regresará al origen en un tiempo*

$$t = \frac{2V_0}{a}.$$

Solución. Tenemos que

$$x = V_0 t - \frac{1}{2}at^2,$$

luego haciendo $x = 0$ resulta $V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 0$, y de aquí

$$t = 2\frac{V_0}{a}.$$

▲

EJERCICIO 6.13 *Dos partículas A y B que se mueven en movimiento unidimensional sobre el eje OX parten del origen. La partícula A parte en $t = 0$ con velocidad $V_A(0) = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La partícula B parte en $t = 1\,\mathrm{s}$ con velocidad $V_B(1) = -10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ambas desaceleran con aceleración de magnitud $a = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determine la máxima distancia entre ellas antes que se crucen.*

Solución. Para $t > 1$ tendremos

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 10t - 3t^2, \\ x_B(t) &= -10(t-1) + 3(t-1)^2. \end{aligned}$$

Note que desaceleraciones significan aceleraciones contrarias a la velocidad inicial. La distancia que las separa es $x_A - x_B$ es decir

$$\Delta x = 10t - 3t^2 - (-10(t-1) + 3(t-1)^2) = 26t - 6t^2 - 13.$$

Su máximo se logra derivando e igualando a cero

$$26 - 12t = 0,$$

de donde $t = 2.1667\,\mathrm{s}$ y para ese tiempo

$$\Delta x = 26t - 6t^2 - 13 = 15.167\,\mathrm{m}.$$

EJERCICIO 6.14 *Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza una partícula con rapidez* v_0 *formando un ángulo de* 37^o *con la horizontal y choca al cabo de* $3\,\mathrm{s}$ *con una pared en el punto* (x, y)*. Si se cambia el ángulo de lanzamiento a* 53^o *con la horizontal, manteniendo la misma rapidez de lanzamiento* v_0*, la partícula impacta la pared en el punto* $(x, y+7)$*. a) Determinar el tiempo que demora el proyectil lanzado a* 53^o *sobre la horizontal en llegar a la pared. b)Determine la rapidez de lanzamiento de la partícula.*

Solución. Recordando que

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

la condición del problema puede escribirse

$$\begin{aligned} x &= 3v_0 \cos 37 \\ y &= 3v_0 \sin 37 - \frac{1}{2} 10(3)^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos 53 \\ y+7 &= v_0 t \sin 53 - \frac{1}{2} 10 t^2, \end{aligned}$$

Eliminando x e y se obtiene

$$\begin{aligned} v_0 t \cos 53 &= 3v_0 \cos 37, \\ 3v_0 \sin 37 - 38 &= v_0 t \sin 53 - 5t^2. \end{aligned}$$

De la primera

$$t = \frac{3\cos 37}{\cos 53} = 3.98 \approx 4\,\mathrm{s},$$

y de la otra

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{38 - 5t^2}{3\sin 37 - t \sin 53} \\ &= 30.0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.15 *Por un tubo de diámetro despreciable ubicado en el suelo, sale un chorro de agua en un ángulo de* 45^o *con la horizontal (dentro del tubo las partículas de agua tienen distintas velocidades). El grueso del agua forma en el suelo un charco aproximadamente circular de radio* $2{,}2\,\mathrm{m}$ *cuyo centro se encuentra ubicado a* $12{,}2\,\mathrm{m}$ *del origen. Determine entre que valores varía la rapidez con que sale el grueso del agua por el tubo despreciando las fuerzas viscosas.*

Solución. De

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \end{aligned}$$

cuando $y = 0$ (punto de caída) se obtiene

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

Si $\alpha = 45^o$ ello se simplifica a

$$x = \frac{v_0^2}{g},$$

o bien

$$v_0 = \sqrt{gx}.$$

Pero de los datos se sabe que $12{,}2 - 2{,}2 < x < 12{,}2 + 2{,}2$ y para los extremos

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{10\times 10} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ v_0 &= \sqrt{10\times 14{,}4} = 12{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 6.16 *Una partícula en* $t = 0$ *pasa por el origen de un sistema de coordenadas fijo en el espacio con velocidad* $\vec{v}_0 = 2\hat{\imath} - \hat{k}\ \ \mathrm{m\,s^{-1}}$ *moviéndose en el espacio con una aceleración que en cualquier instante está dada por la expresión* $\vec{a}(t) = t\hat{\imath} - \hat{\jmath}\ \ \mathrm{m\,s^{-2}}$. *Determine en* $t = 2\,\mathrm{s}$: *a) Los vectores posición y velocidad de la partícula. b)Las componentes tangencial y normal de la aceleración.*

Solución. De
$$\vec{a}(t) = t\hat{\imath} - \hat{\jmath},$$
integrando dos veces se deduce que
$$\vec{v}(t) = 2\hat{\imath} - \hat{k} + (\frac{t^2}{2}\hat{\imath} - t\hat{\jmath}),$$
$$\vec{r}(t) = (2\hat{\imath} - \hat{k})t + (\frac{t^3}{6}\hat{\imath} - \frac{t^2}{2}\hat{\jmath}),$$
si $t = 2$
$$\begin{aligned} \vec{r}(2) &= (2\hat{\imath} - \hat{k})2 + (\frac{4}{3}\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = (\frac{16}{3}, -2, -2), \\ \vec{v}(2) &= 2\hat{\imath} - \hat{k} + (2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}) = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k} = (4, -2, -1) \end{aligned}$$

Para evaluar las componentes tangencial y normal, determinemos
$$\hat{T}(2) = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(4, -2, -1)}{\sqrt{21}}$$
por lo tanto
$$a_T = \vec{a}(2) \cdot \hat{T}(2),$$
pero $\vec{a}(2) = (2, -1, 0)$, calculando resulta
$$a_T = \frac{10}{\sqrt{21}} = 2.18\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$
y
$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{5 - 2{,}18^2} = 0{,}49\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

EJERCICIO 6.17 *Un tanque se desplaza con velocidad constante de* $10\hat{\imath}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ *por una llanura horizontal. Cuando* $t = 0$*, lanza un proyectil que da en el blanco a* $9\,\mathrm{km}$*. Si la inclinación del cañón respecto de la horizontal es* 37^o*, determine la rapidez con que sale el proyectil respecto del cañón.*

Solución. Podemos escribir ($g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)

$$\begin{aligned} x &= 9000 = (v_0 \cos 37 + 10)t, \\ y &= v_0 t \sin 37 - 5t^2 = 0, \end{aligned}$$

de la segunda

$$t = \frac{v_0 \sin 37}{5},$$

reemplace en la primera

$$9000 = (v_0 \cos 37 + 10)\frac{v_0 \sin 37}{5}$$

tomando $\sin 37 = 0{,}6$, y $\cos 37 = 0{,}8$

$$9000 = 0{,}096\, v_0^2 + 1.\, 2v_0$$

cuya solución positiva es $v_0 = 300{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Ejercicio 6.18 *Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza un proyectil en dirección de un objeto situado en la posición* $(2h; h)$. *Al momento de lanzar el proyectil, se suelta el objeto que cae por efecto de la gravedad. Determine en función de h la separación entre el proyectil y el objeto cuando el proyectil haya recorrido horizontalmente una distancia h.*

Solución. Para el proyectil

$$\begin{aligned} x_P &= v_0 t \cos \alpha \\ y_P &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \end{aligned}$$

donde $\tan \alpha = 1/2$. Para el objeto

$$\begin{aligned} x_O &= 2h, \\ y_O &= h - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Cuando $x_P = v_0 t \cos\alpha = h$, entonces

$$\begin{aligned} x_P &= h, \\ y_P &= h\tan\alpha - \frac{1}{2}g(\frac{h^2}{v_0^2\cos^2\alpha}), \\ x_O &= 2h, \\ y_O &= h - \frac{1}{2}g(\frac{h^2}{v_0^2\cos^2\alpha}) \end{aligned}$$

la distancia será $d = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} = \sqrt{h^2 + (\frac{h}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}h$

▲

Ejercicio 6.19 *Desde un barco que se mueve a* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *se ve a otro barco que está a* $20\,\mathrm{km}$ *cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de* $15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *¿ Después de cuánto tiempo la distancia que separa los barcos es mínima?*

Solución. Respecto a un sistema cartesiano, las coordenadas de los dos barcos pueden escribirse

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ y_1 &= 20t, \\ x_2 &= 15t, \\ y_2 &= 20, \end{aligned}$$

de modo que la distancia en función del tiempo será

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(15t)^2 + (20t - 20)^2} \\ &= 5\sqrt{(25t^2 - 32t + 16)} \end{aligned}$$

Un polinomio de segundo grado tiene un mínimo en el punto medio entre sus raíces que son

$$t_1 = \frac{16}{25} + \frac{12}{25}i,\ t_2 = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}i,$$

o sea el tiempo es

$$t = \frac{16}{25} = 0{,}64\,\mathrm{h}$$

EJERCICIO 6.20 *Una partícula A es lanzada sobre una línea recta horizontal con cierta velocidad. Su aceleración es constante. Un segundo más tarde y desde el mismo lugar otra partícula B es lanzada tras la primera con una velocidad igual a la mitad de la de A y una aceleración el doble de A. Cuando B alcanza a A, las rapideces son* $22\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y* $31\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *respectivamente. Calcule la distancia que las partículas han viajado.*

Solución. Suponiendo el movimiento sobre el eje OX tenemos

$$\begin{aligned} x_A &= vt + \frac{1}{2}at^2, \\ x_B &= (\frac{1}{2}v)(t-1) + \frac{1}{2}(2a)(t-1)^2, \\ v_A &= v + at, \\ v_B &= (\frac{1}{2}v) + (2a)(t-1). \end{aligned}$$

Al igualar las distancias y simplificar

$$\frac{1}{2}vt = -\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}at^2 - 2at + a$$

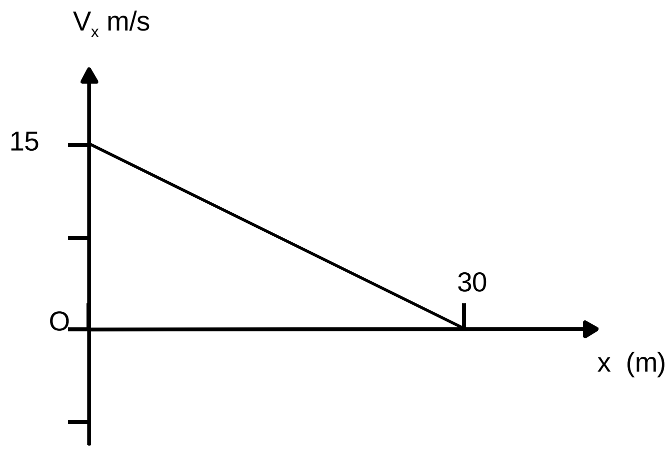
además

$$\begin{aligned} v_A &= v + at = 22 \\ v_B &= (\frac{1}{2}v) + (2a)(t-1) = 31 \end{aligned}$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyas soluciones son $a = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t = 4{,}0\,\mathrm{s}$, $v = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y la distancia resulta

$$d = vt + \frac{1}{2}at^2 = 48{,}0\,\mathrm{m}$$

EJERCICIO 6.21 *La velocidad de una partícula en el movimiento rectilíneo decrece desde* $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *a una velocidad que tiende a cero, cuando* $x = 30\,\mathrm{m}$ *tal como lo muestra la figura. Demuestre que la partícula nunca alcanzará los* $30\,\mathrm{m}$ *y calcule la aceleración cuando* $x = 18\,\mathrm{m}$.



Solución. La función lineal del gráfico corresponde a

$$\frac{v_x}{15} + \frac{x}{30} = 1,$$

de donde tenemos

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x = 15,$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{15 - \frac{1}{2}x} = 2\ln 30 - 2\ln(30 - x),$$

que tiende a infinito si $x \to 30$. Cuando $x = 18$

$$t = 2\ln 30 - 2\ln(30 - 18) = 1.83\,\mathrm{s},$$

la rapidez resulta

$$v_x = 15 - \frac{1}{2}18 = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}},$$

y la aceleración será (derivando)

$$a_x = -\frac{1}{2}v_x = -3\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Ejercicio 6.22 *Una partícula se mueve a lo largo de la curva $r = 3\theta$ tal que $\theta = 2t^3$ donde t se mide en segundos, r en metros y θ en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en coordenadas polares para $\theta = 0{,}2$ rad.*

Solución. Sabemos que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta},\\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta},\end{aligned}$$

siendo $r = 6t^3$, $\dot{r} = 18t^2$, $\ddot{r} = 36t$, $\dot{\theta} = 6t^2$, $\ddot{\theta} = 12t$ y el tiempo dado de

$$\begin{aligned}2t^3 &= 0{,}2,\\ t &= 0{,}464\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

$t = 0{,}464$
$\dot{r} = 18t^2 = 3.\,87$
$r\dot{\theta} = (6t^3)(6t^2) = 0{,}77$

$$\vec{v} = 3{,}875\hat{r} + 0{,}774\hat{\theta}$$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 36t - (6t^3)(6t^2)^2 = 15.\,704$
$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 2(18t^2)(6t^2) + 6t^3(12t) = 13.\,349$

$$\vec{a} = 15.\,704\hat{r} + 13.\,349\,\hat{\theta}$$

▲

EJERCICIO 6.23 *Desde una altura de* $20\,\mathrm{m}$*, con respecto al eje* X *de un sistema de coordenadas ubicado en Tierra, se lanza una partícula* A *con una rapidez de* $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y formando un ángulo de* 30^o *con la horizontal. Simultáneamente y desde la posición* $X = 200\,\mathrm{m}$ *se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil* B *de modo que cuando la partícula* A *llega a Tierra, el proyectil* B *está en su altura máxima. Calcular: a)el tiempo transcurrido para que la distancia que separa* A *de* B *sea mínima; b)la velocidad relativa de* A *respecto a* B *en* $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solución. Usando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ de

$$\begin{aligned}x_A &= 50t\cos 30 = 25\sqrt{3}t\\ y_A &= 20 + 50t\sin 30 - 5t^2 = 20 + 25t - 5t^2,\\ x_B &= 200,\\ y_B &= v_B(0)t - 5t^2.\end{aligned}$$

El tiempo para que la partícula A llegue a la Tierra ($y_A = 0$) se obtiene de

$$20 + 50t \sin 30 - 5t^2 = 0$$

y resulta $t = 5.\,70\,\mathrm{s}$. Para ese tiempo debe ser $v_B(t) = 0$, entonces

$$v_B(0) - 10t = v_B(0) - 10 \times 5{,}70 = 0$$

de donde

$$v_B(0) = 57{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Luego

$$y_B(t) = 57t - 5t^2.$$

La distancia entre los dos objetos será

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

y reemplazando las coordenadas

$$\begin{aligned} x_A - x_B &= 25\sqrt{3}t - 200, \\ y_A - y_B &= 20 + 25t - 5t^2 - (57t - 5t^2) \\ &= 20 - 32t \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(25\sqrt{3}t - 200)^2 + (20 - 32t)^2} \\ &= \sqrt{2899t^2 - 10\,000\sqrt{3}t + 40\,400 - 1280t}. \end{aligned}$$

El mínimo ocurre en el punto medio entre las raíces de $2899t^2 - 10\,000\sqrt{3}t + 40\,400 - 1280t = 0$, que son: $t = 3.\,208 + 1.\,909i$ y

$t = 3.\,208 - 1.\,909i$, de modo que el tiempo es $t = 3{,}21\,\mathrm{s}$. En este instante las velocidades son

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= (25\sqrt{3}, 25 - 10t) \\ &= (25\sqrt{3}, 25 - 32{,}1) \\ \vec{v}_B &= (0, 57 - 32{,}1) \end{aligned}$$

y la velocidad relativa resulta

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = \left(25\sqrt{3}, -32{,}0\right) = (43.\,30, -32{,}0)$$

EJERCICIO 6.24 *Un cañón está montado sobre un promontorio de altura h. Se dispara un proyectil con una rapidez v_0 y ángulo de elevación α. Demuestre que el alcance horizontal d, distancia a lo largo del plano horizontal que pasa por la base del promontorio, es:*

$$d = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left[v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right].$$

Solución. La ecuación de la trayectoria es

$$y = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

y cuando $y = 0$ debemos despejar x de una ecuación de segundo grado, resultando

$$\begin{aligned} x &= d = \frac{\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{4gh}{2v_0^2\cos^2\alpha}}}{\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}} \\ &= \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha \pm \sqrt{\tan^2\alpha + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\alpha}}) \\ &= \frac{v_0(\cos\alpha)}{g}(v_0\sin\alpha \pm \sqrt{\left(v_0^2\sin^2\alpha + 2gh\right)}) \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.25 *Un cañón es montado sobre un promontorio de altura h. Se dispara un proyectil con una rapidez de salida v_0. Demuestre que el alcance horizontal d es máximo cuando el ángulo de elevación es:*

$$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2gh}}.$$

Solución. La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Luego, el alcance máximo x al nivel del suelo se despeja haciendo $y = 0$ de modo que

$$\begin{aligned} 0 &= h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \\ x &= \sqrt{(v_0^2 + 2gh)}\frac{v_0}{g}, \end{aligned}$$

resultando

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0^2}{g\sqrt{(v_0^2+2gh)}\frac{v_0}{g}} = \frac{v_0}{\sqrt{(v_0^2+2gh)}},$$

y

$$\sin\alpha = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{(v_0^2+2gh)}}}{\sqrt{1+\frac{v_0^2}{v_0^2+2gh}}} = \frac{v_0}{\sqrt{(2v_0^2+2gh)}},$$

que prueba el resultado.

Ejercicio 6.26 *Una partícula es lanzada al espacio de modo que su alcance sobre el plano horizontal es R y su máxima altura h. Demuestre que el, alcance horizontal máximo, con la misma rapidez de salida v_0, es:*

$$2h + \frac{R^2}{8h}.$$

Solución. Sabemos que el alcance horizontal y altura máxima son

$$\begin{aligned} R &= \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}, \\ h &= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \end{aligned}$$

y que el máximo alcance horizontal es

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Debemos eliminar α entre las dos primeras, así

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}},$$

reemplazamos en la primera

$$\begin{aligned} R &= \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \\ &= \frac{2v_0^2}{g}\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1-(\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}})^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{h}\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}-2h\right)}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{R^2}{8h} = \frac{v_0^2}{g} - 2h,$$

y finalmente

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g} = 2h + \frac{R^2}{8h}.$$

▲

EJERCICIO 6.27 *Se monta un cañón sobre la base de un plano inclinado que forma un ángulo β con la horizontal. Este cañón dispara un proyectil hacia la parte superior del plano, siendo el α ángulo que forma la velocidad de salida del proyectil con el plano. Calcule el ángulo de elevación del plano para que el proyectil impacte sobre el plano inclinado paralelamente a la horizontal.*

Solución. La ecuación de la trayectoria es con α' ángulo de disparo respecto a la horizontal

$$y = x\tan\alpha' - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha'},$$

y cuando

$$y = x \tan \beta,$$

impacta al plano inclinado. En esa coordenada debe ser

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha' - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha'} = 0.$$

De las dos primeras resulta

$$\tan \alpha' - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha'} = \tan \beta.$$

De la tercera despejamos x y reemplazamos en la última

$$x = \frac{v_0^2 \cos \alpha' \sin \alpha'}{g},$$

luego

$$\begin{aligned}
\tan \alpha' - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha'} \frac{v_0^2 \cos \alpha' \sin \alpha'}{g} &= \tan \beta, \\
\frac{1}{2} \tan \alpha' &= \tan \beta.
\end{aligned}$$

Pero $\alpha' = \alpha + \beta$ de manera

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha + \beta) &= 2 \tan \beta, \\
\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= 2 \tan \beta
\end{aligned}$$

de donde

$$\tan \beta = \frac{1}{4 \tan \alpha} \left(1 - \sqrt{(1 - 8 \tan^2 \alpha)} \right).$$

Hay solución sólo si $8 \tan^2 \alpha < 1$, por ejemplo para $\tan \alpha = 1/\sqrt{8}$, resulta $\alpha = 0{,}339\,8$, $\tan \beta = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$,
$\beta = 0{,}615$, $\alpha' = 0{,}339\,8 + 0{,}615 = 0{,}9548$.

▲

Ejercicio 6.28 *Un proyectil se dispara con rapidez inicial v_0, y ángulo de inclinación variable. ¿Para qué ángulo el alcance del proyectil será máximo a lo largo de la recta $y = x \tan \theta$?.*

Solución. Tenemos la ecuación de la parábola de seguridad

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Además debe ser

$$y = x\tan\theta.$$

De la primera y la tercera

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = x\tan\theta,$$

de donde

$$x = \left(-\tan\theta + \sqrt{(\tan^2\theta + 1)}\right)\frac{v_0^2}{g},$$

y luego

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{1}{-\tan\theta + \sqrt{(\tan^2\theta + 1)}} = \tan\theta + \sec\theta,$$

que prueba el resultado. Sin embargo hay un resultado más simple. En efecto de la identidad

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

resulta

$$\tan\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta,$$

luego

$$\tan\alpha = \tan\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2},$$

de donde

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

Por ejemplo si $\theta = 0 \to \alpha = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2} \to \alpha = \frac{\pi}{2}$.

▲

Ejercicio 6.29 *Un aeroplano que vuela horizontalmente a* $1\,\mathrm{km}$ *de altura y con una rapidez de* $200\ \mathrm{km\ h^{-1}}$*, deja caer una bomba contra un barco que viaja en la misma dirección y sentido con una rapidez de* $20\ \mathrm{km\ h^{-1}}$*. Pruebe que la bomba debe soltarse cuando la distancia horizontal entre el avión y el barco es de* $705\,\mathrm{m}$ *(considere* $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$*).*

Solución. Colocando el origen al nivel del mar, bajo el avión en el instante de soltar la bomba, tenemos ($1\ \mathrm{km\ h} = 1000/3600 = \frac{5}{18} = 0{,}278\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

$$\begin{aligned} x_P &= 200 \times \frac{1000}{3600}t, \\ y_P &= 1000 - 5t^2, \\ x_B &= d + 20 \times \frac{1000}{3600}t, \\ y_B &= 0. \end{aligned}$$

Para dar en el blanco, igualamos

$$\begin{aligned} 200 \times \frac{1000}{3600}t &= d + 20 \times \frac{1000}{3600}t, \\ 1000 - 5t^2 &= 0, \end{aligned}$$

de la última

$$t = \sqrt{200}\,\mathrm{s}$$

y de la anterior

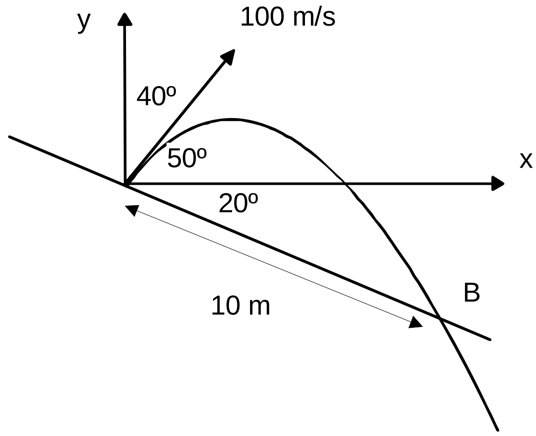
$$d = (200 \times \frac{1000}{3600} - 20 \times \frac{1000}{3600})\sqrt{200} = 707{,}1\,\mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 6.30 *Se deja caer una pelota verticalmente sobre un punto* A *de un plano inclinado que forma un ángulo de* 20^o *con un plano horizontal. La pelota rebota formando un ángulo de* 40^o *con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote tiene lugar en* B *a distancia* $10\,\mathrm{m}$ *de* A *más abajo del plano, calcule:*

a) el módulo de la velocidad con la cual rebota la pelota en A*,* *b) el tiempo transcurrido desde que la pelota rebota en A hasta que la pelota rebota en B.*

Solución. De acuerdo a la figura tenemos



$$y = x \tan 50 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 50},$$

poniendo la condición que pase por B con coordenadas $x_B = 10 \cos 20$, $y_B = -10 \sin 20$, debemos despejar v_0

$$-10 \sin 20 = 10 \cos 20 \tan 50 - \frac{g(10 \cos 20)^2}{2v_0^2 \cos^2 50},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{5g(\cos 20) \sec^2 50}{(\tan 50 + \tan 20)}}.$$

El tiempo lo obtenemos de $x_B = v_0(\cos 50)t_B$ resultando

$$t_B = \frac{10 \cos 20}{v_0(\cos 50)} = \frac{10 \cos 20}{(\cos 50)} \sqrt{\frac{(\tan 50 + \tan 20)}{5g(\cos 20) \sec^2 50}} = 10\sqrt{\cos 20 \frac{(\tan 50 + \tan 20)}{5g}}$$

▲

Ejercicio 6.31 *Si el alcance máximo horizontal de un proyectil es R, calcular el ángulo α que debe usarse, con la misma rapidez de lanzamiento, para que el proyectil impacte en un blanco situado al mismo nivel de lanzamiento y a una distancia $R/2$.*

Solución. Sabemos que

$$R = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}, \; R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g},$$

Si $R_{\text{máx}} = R/2$ entonces

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \; 2\alpha = 30^o, \; \alpha = 15^o.$$

▲

EJERCICIO 6.32 *Una partícula se mueve a lo largo de una parábola $y = x^2$ de tal manera que para todo instante se cumple que $v_x = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcule la velocidad y aceleración de la partícula cuando $x = 2/3\,\mathrm{m}$.*

Solución. Este problema requiere de conocimientos de cálculo. En efecto sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = 3, \; y = x^2,$$

derivando la segunda

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 6x,$$

derivando de nuevo,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \; \frac{d^2y}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt} = 18,$$

la aceleración ha resultado constante

$$\vec{a} = (0, 18)\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Para $x = 2/3$ resulta $y = 4/9$ y la velocidad

$$\vec{v} = (3, 12/3) = (3, 4)\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

▲

EJERCICIO 6.33 *Una partícula se mueve en el plano XY de acuerdo a la ley: $a_x = -4\sin t$; $a_y = 3\cos t$. Se sabe que cuandot $= 0$, $x = 0$; $y = 3$; $v_x = 4$; $v_y = 0$. Encuentre la expresión cartesiana de la trayectoria y además calcule la velocidad cuando $t = \pi/4$. Exprese sus magnitudes en unidades SI.*

Solución. Tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = 3\cos t,$$

integrando dos veces con las condiciones iniciales dadas resulta

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4 + 4(\cos t - 1) = 4\cos t,\\ \frac{dy}{dt} &= 3\sin t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 4\sin t,\\ y &= 3 - 3(\cos t - 1) = 6 - 3\cos t,\end{aligned}$$

Eliminando el tiempo resulta la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x^2}{16} + (\frac{y-6}{3})^2 = 1.$$

La velocidad es

$$\vec{v} = (4\cos t, 3\sin t)$$

y en $t = \pi/4$

$$\vec{v} = (2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}) = (2.83, 2.12)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

▲

EJERCICIO 6.34 *Una partícula se mueve sobre el plano XY de manera que sus coordenadas están dadas por $x = t$; $y = t^3/6$, siendo t la variable independiente tiempo. Determine para $t = 2\,\mathrm{s}$ la magnitud de la aceleración, las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en dicho instante.*

Solución. Tenemos

$$x = t,\ y = \frac{t^3}{6},$$

derivando dos veces

$$v_x = 1,\ v_y = \frac{t^2}{2},$$

$$a_x = 0,\ a_y = t,$$

El vector unitario tangente es

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(1, \frac{t^2}{2})}{\sqrt{1 + \frac{t^4}{4}}}.$$

En $t = 2\,\mathrm{s}$ calculamos

$$\begin{aligned} v_x &= 1,\ v_y = 2, \\ a_x &= 0,\ a_y = 2, \\ \hat{T} &= \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} a &= 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ v &= \sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ a_T &= \vec{a} \cdot \hat{T} = a_y T_y = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 1.79\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0{,}89\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \\ \rho &= \frac{v^2}{a_N} = \frac{5}{2}\sqrt{5} = 5.59\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 6.35 *Una partícula se mueve describiendo una circunferencia de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en metros y t en segundos. Si la magnitud de la aceleración de la partícula es $16\sqrt{2}$ $\mathrm{m\,s^{-2}}$ cuando $t = 2\,\mathrm{s}$, calcule el radio de la circunferencia.*

Solución. De los datos

$$s = R\theta = t^3 + 2t^2,$$

de donde

$$\dot{\theta} = \frac{3t^2 + 4t}{R},\ \ddot{\theta} = \frac{6t + 4}{R}$$

La aceleración en polares tiene las dos componentes

$$\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2, R\ddot{\theta}) = (-\frac{(3t^2+4t)^2}{R}, 6t+4),$$

si $t = 2\,\mathrm{s}$

$$\vec{a} = \left(-\frac{400}{R}, 16\right),$$

y se sabe que la magnitud es

$$\sqrt{\frac{400^2}{R^2} + 16^2} = 16\sqrt{2},$$

de donde

$$R = 25\,\mathrm{m}.$$

▲

Ejercicio 6.36 (1) *Una partícula describe una trayectoria dada por las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = t$; $y = t^2/2$. Determinar la curva y el radio de curvatura.*

Solución. Elimine el tiempo y se obtiene la curva

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

El radio de curvatura es

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = (1+x^2)^{3/2} = (1+t^2)^{3/2}.$$

▲

Ejercicio 6.37 *Dada la curva: $x = t$; $y = t^2$; calcular:a) la curvatura K, b) el radio de curvatura en el punto $(\sqrt{a}; a))$.*

Solución. Similarmente resulta

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ \rho &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}, \\ K &= \frac{1}{\rho} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

y en $x = \sqrt{a}$

$$\rho = \frac{(1 + 4a)^{3/2}}{2}.$$

EJERCICIO 6.38 *Demuestre que la curvatura de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es:*

$$K = \frac{a^4 b}{\left[a^2\left(a^2 - x^2\right) + b^2 x^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Solución. Es conveniente derivar en forma implícita

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} &= 0, \\
y' &= -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \\
y'' &= -\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2} y' = -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{b^2 x}{a^2 y^2}\frac{b^2 x}{a^2 y} \\
&= -\frac{b^2}{a^2 y} - \frac{b^4 x^2}{a^4 y^3}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
K &= \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^3}}{(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2})^{3/2}} = \frac{a^2 b^2\left(a^2 y^2 + b^2 x^2\right)}{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

pero

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \Longrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

luego

$$K = \frac{a^4 b^4}{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^4 b}{\left(a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

EJERCICIO 6.39 (1) *La aceleración de una partícula es: $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath}$. En el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $P(1;3)$ siendo su velocidad $\vec{v} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$. Encuentre su posición y velocidad para cualquier instante $t > 0$.*

Solución. Tenemos que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 2e^{-t}\hat{\imath} + 5\cos t\,\hat{\jmath},$$

integrando con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2(1-e^{-t})\hat{\imath} + 5\sin t\,\hat{\jmath} \\ &= \left(6 - 2e^{-t}\right)\hat{\imath} + (5\sin t - 3)\,\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Integrando de nuevo

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \left(6t - 2(1-e^{-t})\right)\hat{\imath} + (5(1-\cos t) - 3t)\,\hat{\jmath} \\ &= (2e^{-t} + 6t - 1)\hat{\imath} + (8 - 5\cos t - 3t)\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 6.40 *Una partícula se mueve sobre una trayectoria tal que su vector de posición en cualquier instante es:* $\vec{r} = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + t\hat{k}$ *. Determine: a)la velocidad, b)la rapidez c)la aceleración, d)la magnitud de la aceleración tangencial y e)la magnitud de la aceleración normal.*

Solución. De

$$\vec{r} = t\hat{\imath} + \frac{t^2}{2}\hat{\jmath} + t\hat{k},$$

derivando dos veces

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \hat{\imath} + t\hat{\jmath} + \hat{k} = (1, t, 1), \\ v &= \sqrt{2 + t^2}, \\ \vec{a} &= \hat{\jmath}.\end{aligned}$$

El vector unitario tangente es

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(1, t, 1)}{\sqrt{2 + t^2}},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}a_T &= \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{t}{\sqrt{2 + t^2}}, \\ a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{2 + t^2}} = \sqrt{\frac{2}{2 + t^2}}.\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.41 *Una partícula se mueve en el plano XY de tal manera que: $a_x = 4pe^{4t}$ y $v_y = 2\pi q \cos 2\pi t$ donde p y q son constantes positivas. Cuando $t = 0$; $x = p/4$; $y = 0$; $v_x = p$. Determinar: a)el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula en función del tiempo; b)la trayectoria de la partícula.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 4pe^{4t}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 2\pi q \cos 2\pi t. \end{aligned}$$

Para la aceleración derivamos la segunda

$$a_y = -4\pi^2 q \sin 2\pi t,$$

luego

$$\vec{a} = (4pe^{4t}, -4\pi^2 q \sin 2\pi t).$$

Para la velocidad debemos integrar la primera

$$v_x = p + \int_0^t 4pe^{4t} dt = pe^{4t},$$

por lo tanto la velocidad es

$$\vec{v} = (pe^{4t}, 2\pi q \cos 2\pi t).$$

Integramos de nuevo

$$\vec{r} = \frac{p}{4}\hat{\imath} + (\frac{1}{4}pe^{4t} - \frac{1}{4}p, q \sin 2\pi t) = (\frac{1}{4}pe^{4t}, q \sin 2\pi t).$$

Para obtener la trayectoria debemos eliminar t entre

$$x = \frac{1}{4}pe^{4t},$$

y

$$y = q \sin 2\pi t,$$

obteniendo

$$y = q \sin(\frac{\pi}{2} \ln \frac{4x}{p})$$

Ejercicio 6.42 *Una partícula se mueve en el plano XY describiendo la curva $y = \ln x$; calcule: a) la rapidez en función de x y $\dot{x}$, b) la magnitud de la aceleración en función de x , $\dot{x}$ y $\ddot{x}$, c)si $\dot{x} = c$, calcule en $x = a$, las magnitudes de la aceleración tangencial y normal.*

Solución. De

$$y = \ln x,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{1}{x}\dot{x}, \\
\ddot{y} &= \frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2,
\end{aligned}$$

de modo que

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + (\frac{1}{x}\dot{x})^2} = \dot{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2)^2}.$$

Si $\dot{x} = c$ entonces $\ddot{x} = 0$ y sabemos que $x = a$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
v &= c\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, \\
a_T &= \frac{dv}{dt} = c\frac{-\frac{2}{x^2}\dot{x}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\
&= c^2\frac{-\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{c^2}{a\sqrt{(a^2 + 1)}}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + (\frac{1}{x}\ddot{x} - \frac{1}{x^2}\dot{x}^2)^2} = \frac{\dot{x}^2}{x^2} = \frac{c^2}{a^2}, \\
a_N &= \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\frac{c^4}{a^4} - \frac{c^4}{a^2\,(a^2 + 1)}} = \frac{c^2}{a^2\sqrt{(a^2 + 1)}}.
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 6.43 *Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo por*

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2 \end{aligned}$$

Determine a)Las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración. b) Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración. c)Las componente normal y tangencial de la velocidad y aceleración. d)La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas. e)La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

Solución.

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 2t - 5t^2 \end{aligned}$$

a) $v_x = 3$, $v_y = 2 - 10t$, $a_x = 0$, $a_y = -10$,

b) $\hat{r} = \frac{3t\hat{\imath}+(2t-5t^2)\hat{\jmath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}, \hat{\theta} = \hat{k} \times \hat{r} = \frac{3t\hat{\jmath}-(2t-5t^2)\hat{\imath}}{\sqrt{9t^2+(2t-5t^2)^2}}$

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v} \cdot \hat{r} = \frac{9t + (2t - 5t^2)(2 - 10t)}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} \\ v_\theta &= \vec{v} \cdot \hat{\theta} = \frac{3t(2 - 10t) - (2t - 5t^2)3}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} \\ a_r &= \vec{a} \cdot \vec{r} = \frac{(-10)(2t - 5t^2)}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} \\ a_\theta &= \vec{a} \cdot \hat{\theta} = \frac{(-10)3t}{\sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2}} \end{aligned}$$

c) $\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{3\hat{\imath}+(2-10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$, $\hat{N} = \hat{T} \times \hat{k} = \frac{-3\hat{\jmath}+(2-10t)\hat{\imath}}{\sqrt{9+(2-10t)^2}}$ entonces

$$\begin{aligned} v_T &= \vec{v} \cdot \hat{T} = v = \sqrt{9 + (2 - 10t)^2} \\ v_N &= 0 \\ a_T &= \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{-10(2 - 10t)\hat{\jmath}}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}} \\ a_N &= \vec{a} \cdot \hat{N} = \frac{30}{\sqrt{9 + (2 - 10t)^2}} \end{aligned}$$

d)

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}x^2$$

e) Sería necesario expresar $r = r(\theta)$ donde

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{9t^2 + (2t - 5t^2)^2} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} = \frac{2-5t}{3} \end{aligned}$$

de donde

$$t = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\tan\theta$$

y luego con algo de álgebra resulta

$$r = \frac{3}{5}\left(2 - 3\tan\theta\right)\sqrt{(1+\tan^2\theta)}$$

▲

Ejercicio 6.44 *Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes a y b centrada en el origen de un sistema de coordenadas con rapidez constante v_0, siendo la ecuación de la elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro. b) El tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse. c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero explique el método a seguir.

Solución. De la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

deseamos obtener el radio de curvatura. Derivando implícitamente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{yy'}{b^2} &= -\frac{x}{a^2} \\ y' &= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \; y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{y} + \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y^2}y' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \end{aligned}$$

entonces

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2})^{3/2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

Si $a > b$ el punto más alejado es $x = a$, $y = 0$, $\rho = \frac{b^2}{a}$. El punto más cercano es $x = 0$, $y = b$, $\rho = \frac{a^2}{b}$

a)

$$a = \frac{v_0^2}{\rho} = \begin{cases} \frac{v_0^2 a}{b^2} \\ \frac{v_0^2 b}{a^2} \end{cases}$$

b) La rapidez constante significa que

$$\frac{ds}{dt} = v_0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{1+(y')^2}\frac{dx}{dt} &= v_0 \\ dt &= \frac{1}{v_0}\sqrt{1+(y')^2}dx \end{aligned}$$

junto a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\frac{b}{a}x \\ dt &= \frac{1}{v_0}\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2x^2+a^4-a^2x^2}{a^2-x^2}\right)}dx \end{aligned}$$

si la última expresión pudiera integrarse se tendría $t = t(x)$ y problema resuelto.

▲

Ejercicio 6.45 *La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como*

$$r = \frac{c}{1-e\cos\theta}$$

siendo c y e constantes. Si el ángulo varía proporcionalmente al tiempo t con constante de proporcionalidad λ, determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.

Solución. Aquí

$$r = \frac{c}{1 - e\cos\theta},\ \theta = \lambda t$$

las componentes polares están dadas por

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} = -\frac{e\lambda c\sin\lambda t}{(1 - e\cos\lambda t)^2} \\
v_\theta &= r\dot{\theta} = \frac{\lambda c}{1 - e\cos\lambda t} \\
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\lambda^2 \\
&= \left(-\frac{e\cos\lambda t}{(1 - e\cos\lambda t)} + \frac{2e^2\sin^2\lambda t}{(1 - e\cos\lambda t)^2} - 1\right)\frac{\lambda^2 c}{1 - e\cos\lambda t} \\
a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\dot{r}\lambda = -\frac{2e\lambda^2 c\sin\lambda t}{(1 - e\cos\lambda t)^2}
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 6.46 *Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza n vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.*

Solución. Aquí

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

entonces

$$2\pi n = \frac{1}{2}\alpha,\ \alpha = 4\pi n$$

y durante el siguiente segundo realiza

$$\frac{\theta(2) - \theta(1)}{2\pi} = n(2^2 - 1^2) = 3n$$

vueltas.

▲

EJERCICIO 6.47 *Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de* $12{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. La pelota llega a tierra* $4{,}25\,\mathrm{s}$*, después. Determine: a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio. b)La rapidez de la pelota al llegar al suelo.*

Solución. La altura en función del tiempo será

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

luego, tomando $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$$y = h + 12{,}5t - 5t^2$$

siendo

a) $h + 12{,}5(4{,}25) - 5(4{,}25)^2 = 0$, $h = 37.\,19\,\mathrm{m}$

b) $v_y = 12{,}5 - 10t = 12{,}5 - 10(4{,}25) = -30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

▲

EJERCICIO 6.48 *Se deja caer un cuerpo desde una altura inicial de* $33\,\mathrm{m}$*, y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de* $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de* $18\,\mathrm{m}$*.*

Solución.

$$\begin{aligned} y_1 &= 33 - 5t^2 \\ y_2 &= 33 - t - 5t^2 \end{aligned}$$

$$y_1 - y_2 = t$$

entonces la distancia entre ellos es $18\,\mathrm{m}$ a los $18\,\mathrm{s}$.

▲

EJERCICIO 6.49 *Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo* $68{,}3\,\mathrm{m}$*. Encontrar la altura desde donde cae.*

Solución. Suponiendo que se soltó del reposo

$$y = h - 5t^2$$

el tiempo en que llega al suelo es $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$la distancia recorrida en el último segundo será

$$\begin{aligned} & y(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1) - y(\sqrt{\frac{h}{5}}) \\ = \; & 5(\sqrt{\frac{h}{5}})^2 - 5(\sqrt{\frac{h}{5}} - 1)^2 = 68{,}3 \end{aligned}$$

y resolviendo

$$h = 268.\,6\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 6.50 *Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra. Desde la misma altura se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra,* $2\,\mathrm{s}$ *más tarde, con una rapidez de* $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Si ambas golpean el piso simultáneamente, encuentre la altura del acantilado.*

Solución.

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 \end{aligned}$$

siendo al mismo tiempo

$$\begin{aligned} y_1 &= h - 5t^2 = 0 \\ y_2 &= h - 30(t-2) - 5(t-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

de aquí $t = 4\,\mathrm{s}$,

$$h = 80\,\mathrm{m}$$

Ejercicio 6.51 *Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de* $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Calcule el tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de* $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y la distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.*

Solución.

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y &= v_0 - g t \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 - g t_1 = 2{,}5 \\ v_y &= v_0 - g t_2 = -2{,}5 \end{aligned}$$

de donde

$$t_2 - t_1 = \frac{5}{g} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

Además de

$$40 - g t_1 = 2{,}5$$

despejamos

$$t_1 = \frac{37{,}5}{10} = 3{,}75\,\mathrm{s}$$

y por lo tanto

$$y_1 = 40(3{,}75) - 5(3{,}75)^2 = 79.\,69\,\mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 6.52 *Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en* $3\,\mathrm{s}$. *Encuentre la altura desde la cual se soltó y el tiempo total de caída.*

Solución.

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

el tiempo en que alcanza $h/2$ es $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ y el tiempo en que $h = 0$ es $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

a) por lo tanto el tiempo empleado en la segunda parte de recorrido es

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}} = 3 \Longrightarrow h = 524.\,6\,\mathrm{m}$$

b)

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{524.\,6}{5}}=10{,}2\,\mathrm{s}$$

EJERCICIO 6.53 *Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de* $150\,\mathrm{m}$ *de altura con una rapidez de* $180\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y formando un ángulo de* 30^o *con la horizontal. Calcule: a) La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil. b) La altura máxima del proyectil con respecto al suelo. c) La componente normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.*

Solución.

$$\begin{aligned} x &= 180(\cos\pi/6)t \\ y &= 150+180(\sin\pi/6)t-5t^2 \end{aligned}$$

a) Punto de caída $150+180(\sin\pi/6)t-5t^2=0$, $t=19.\,5\,\mathrm{s}$

$$x=180(\cos\pi/6)(19{,}5)=3039.\,8\,\mathrm{m}$$

b) Tiempo para la altura máxima $180(\sin\pi/6)-10t=0$, $t=9{,}0\,\mathrm{s}$ entonces $y_{\text{máx}}=150+180(\sin\pi/6)(9)-5(9)^2=555{,}0$

$$y_{\text{máx}}=555{,}0\,\mathrm{m}$$

c) El vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{\vec{v}}{v}=\hat{\imath}\cos\pi/6+\hat{\jmath}\sin\pi/6, \\ \vec{a} &= -10\hat{\jmath} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} a_T &= \vec{a}\cdot\hat{T}=-10\sin\pi/6=-5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ a_N &= \sqrt{a^2-a_T^2}=\sqrt{100-25}=8{,}66\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 6.54 *Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de* $300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a* $8640\,\mathrm{m}$ *detrás de un cerro cuya altura es de* $1000\,\mathrm{m}$ *ubicado a* $1200\,\mathrm{m}$ *del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.*

Solución. Supondremos que damos en el blanco entonces

$$\begin{aligned} y &= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \\ 0 &= 8649\tan\alpha - \frac{5(8649)^2}{(300)^2\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

que tiene dos raíces reales

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 53.03^o \\ \alpha_2 &= 36.97^o \end{aligned}$$

debemos verificar que el disparo pasa sobre el cerro, para ello evaluamos en ambos ángulos $y(1200)$

$$\begin{aligned} y_1(1200) &= 1373{,}0\,\mathrm{m} \\ y_2(1200) &= 777{,}95\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

siendo la altura del cerro excedida en el primer caso.

▲

Ejercicio 6.55 *Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.*

Solución. Sabemos que

$$\begin{aligned} x_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \\ y_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = 3\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

entonces $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3}, \quad \Longrightarrow \alpha = 33{,}69^o$$

▲

EJERCICIO 6.56 *Un lanza granadas tiene un alcance máximo de* 300 m*. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de* 400 m *del lanza granada, determine: a) La altura mínima que debe subirse el lanza granada. b) La rapidez de lanzamiento. c) El ángulo de lanzamiento.*

Solución. La ecuación de la parábola de seguridad es

$$y = h + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Sabemos también que para $h = 0$ la distancia máxima alcanzable es

$$x(0) = \frac{v_0^2}{g} = 300$$

y para una altura h la distancia horizontal máxima será

$$x(h) = \sqrt{(v_0^2 + 2hg)}\frac{v_0}{g} = 400\,\mathrm{m}$$

de la primera

a)

$$v_0 = \sqrt{3000} = 54.\,77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

y de $\sqrt{((54.\,77)^2 + 2h10)}\frac{54.\,77}{10} = 400$

b)

$$h = 116.\,701\,\mathrm{m}$$

c) El ángulo de lanzamiento cuando el blanco está sobre el límite de la parábola de seguridad está dado por $\tan\alpha = v_0^2/gx$ entonces

$$\alpha = 36{,}87^o$$

▲

Ejercicio 6.57 *Se dispara a un objeto que se encuentra sobre un plano inclinado en ángulo α. El disparo se hace desde un punto del plano inclinado con rapidez inicial v_0. Determine la máxima distancia sobre el plano inclinado alcanzable por el disparo y el ángulo de lanzamiento para lograrlo.*

Solución. Este problema es parecido a otro anterior. Denotaremos por α' el ángulo del disparo respecto a la horizontal. Tenemos la ecuación de la parábola de seguridad

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2},$$

y para llegar a puntos sobre la parábola de seguridad

$$\tan\alpha' = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Además debe ser

$$y = x\tan\alpha.$$

De la primera y la tercera

$$\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = x\tan\alpha,$$

de donde

$$x = \left(-\tan\alpha + \sqrt{(\tan^2\alpha + 1)}\right)\frac{v_0^2}{g},$$

luego la distancia sobre el plano será

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\tan^2\alpha} = x\sec\alpha \\ &= \sec\alpha\left(-\tan\alpha + \sqrt{(\tan^2\alpha+1)}\right)\frac{v_0^2}{g}. \end{aligned}$$

El cálculo del ángulo:

$$\begin{aligned} \tan\alpha' &= \frac{v_0^2}{gx} = \frac{1}{-\tan\alpha + \sqrt{(\tan^2\alpha+1)}} \\ &= \tan\alpha + \sec\alpha. \end{aligned}$$

que prueba el resultado. Sin embargo hay un resultado más simple. En efecto de la identidad

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

resulta

$$\tan\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha+\sec\alpha,$$

luego

$$\tan\alpha'=\tan\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}}{2},$$

de donde

$$\alpha'=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}.$$

▲

EJERCICIO 6.58 *Un atleta lanza la bala desde una altura h con rapidez inicial v_0. Determine el máximo alcance horizontal a nivel del suelo y el ángulo de disparo necesario para ese alcance.*

Solución. En la ecuación de la parábola de seguridad

$$y=h+\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

hacemos $y=0$ obteniendo

$$x_{\text{máx}}=\frac{v_0}{g}\sqrt{(v_0^2+2gh)},$$

y de

$$\tan\alpha=\frac{v_0^2}{gx},$$

se obtiene

$$\tan\alpha=\frac{v_0}{\sqrt{(v_0^2+2gh)}},$$

menor de 45^o.

▲

EJERCICIO 6.59 *Un cazador que no sabe que los proyectiles caen, dispara directamente a un mono que está sobre un árbol. El mono que tampoco sabe física, se deja caer justo cuando el cazador dispara. Pruebe que el disparo llega justo al mono.*

Solución. Sea h la altura inicial del mono, d su distancia horizontal al cazador. Entonces el ángulo de disparo está dado por

$$\tan\alpha = \frac{h}{d}.$$

Las ecuaciones de movimiento del proyectil (P) y mono (M) son

$$\begin{aligned} x_P &= v_0 t\cos\alpha,\ x_M = d, \\ y_P &= v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,\ y_M = h - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

de modo que cuando $x_P = x_M$ resulta

$$v_0 t\cos\alpha = d \Longrightarrow t = \frac{d}{v_0\cos\alpha},$$

para ese tiempo comparemos las alturas

$$\begin{aligned} y_P &= v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = d\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \\ y_M &= h - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

que son iguales porque $d\tan\alpha = h$.

▲

Ejercicio 6.60 *En una feria de diversiones, se dispara al blanco sobre una hilera de blancos que pasan frente al que dispara, a una distancia d con una rapidez u_0. Los disparos salen con una rapidez v_0. Determine el ángulo en adelanto en que hay que apuntar para dar en el blanco al objeto que pasa justo frente al que dispara.*

Solución. Sea β ese ángulo. Debe cumplirse que

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{u_0 t}{d}, \\ v_0 t &= \sqrt{d^2 + u_0^2 t^2}, \end{aligned}$$

despeje el tiempo de la segunda y obtenga

$$\tan\alpha = \frac{u_0}{\sqrt{v_0^2 - u_0^2}}.$$

EJERCICIO 6.61 *Una piedra se deja caer a un pozo de profundidad desconocida. El ruido del impacto en el fondo se escucha un tiempo T después de soltada la piedra. Si la rapidez del sonido es u_S determine en términos de T, u_s y g, la profundidad del pozo.*

Solución. Sea t_1 el tiempo de caída de la piedra y t_2 el tiempo que demora el sonido en llegar. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt_1^2 &= h, \\ u_S t_2 &= h, \end{aligned}$$

luego

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u_S},$$

y despeje h

$$h = \frac{u_S^2}{2g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gT}{u_S}} - 1\right)^2.$$

EJERCICIO 6.62 *Una pelota se deja caer desde una altura h y en cada rebote contra el suelo, la rapidez del rebote es un factor "e" de la rapidez que tenía justo antes de chocar contra el suelo ($e < 1$). Determine el tiempo que demora la pelota en quedar en reposo y la distancia total recorrida por la pelota.*

Solución. Sea h una de las alturas. El tiempo en llegar al suelo es

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

llega con velocidad

$$v = -gt = -\sqrt{2gh},$$

luego rebota con velocidad

$$v' = e\sqrt{2gh},$$

y sube hasta una nueva altura dada por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv'^2 &= mgh' \\
h' &= \frac{v'^2}{2g} = e^2h.
\end{aligned}$$

Luego la secuencia de alturas alcanzadas es h, e^2h, $e^4h, \cdots$ y los tiempos viajados (una vez la primera altura, dos veces las siguientes) dan un total de

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\left(\sqrt{\frac{2e^2h}{g}} + \sqrt{\frac{2e^4h}{g}} + \cdots\right) \\
&= \sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + 2e + 2e^2 + e^3 + \cdots) = \sqrt{\frac{2h}{g}}(\frac{1+e}{1-e}),
\end{aligned}$$

y la distancia total recorrida es

$$s = h + 2(e^2h + e^4h + e^6h + \cdots) = h\frac{1+e^2}{1-e^2}$$

▲

EJERCICIO 6.63 *Una persona lanza un objeto con rapidez inicial v_0 formando un ángulo α respecto a la horizontal. Determine la aceleración constante con que debe correr la persona, partiendo del reposo, para justo alcanzar el objeto al mismo nivel de lanzamiento.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned}
x &= v_0 t\cos\alpha \\
y &= v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,
\end{aligned}$$

en $y = 0$, $t = 2v_0\sin\alpha/g$, y debe tenerse

$$v_0 t\cos\alpha = \frac{1}{2}at^2,$$

o bien

$$a = g\cot\alpha.$$

▲

Ejercicio 6.64 *Un automóvil viaja hacia el norte con una rapidez de* $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *en una carretera recta. Un camión viaja en dirección opuesta con una rapidez de* $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *(a)¿ Cuál es la velocidad del automóvil respecto al camión? (b)¿ Cuál es la velocidad del camión respecto al automóvil?*

Solución. Si el norte corresponde al sentido positivo, entonces
a) $60 - (-50) = 110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ b)$-50 - 60 = -110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

▲

Ejercicio 6.65 *Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Inter estatal a* $80\ \mathrm{km\,h^{-1}}$*y es seguido por un auto patrulla que viaja a* $95\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *(a)¿ Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla? (b)¿ Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?*

Solución. Similarmente si el Oeste indica el sentido positivo entonces
a)$80 - 95 = -15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ b) $95 - 80 = 15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

▲

Ejercicio 6.66 *Un río tiene una rapidez uniforme de* $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. *Un estudiante nada corriente arriba una distancia de* $1\,\mathrm{km}$ *y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de* $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *en aguas tranquilas, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.*

Solución. La rapidez absoluta (respecto a la ribera) cuando nada corriente arriba es $1{,}2 - 0{,}5 = 0.\,7$ y cuando nada corriente abajo es $1{,}2 + 0{,}5 = 1.\,7$ entonces el tiempo de ida y vuelta será

$$t = \frac{1000}{0{,}7} + \frac{1000}{1{,}7} = 2016.\,81\,\mathrm{s} = 0{,}56\,\mathrm{h}$$

▲

Ejercicio 6.67 *Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador, en reposo sobre la orilla del río, determina sus rapideces que resultan ser de* V_1 *y* V_2 *respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.*

Solución. Sea W la rapidez del río y u la rapidez de los botes respecto al agua, (igual en ambos), entonces

$$V_1 = u - W,\ V_2 = u + W$$

de modo que

$$W = \frac{V_2 - V_1}{2}.$$

EJERCICIO 6.68 *Un bote cruza un río que mide de ancho D y cuya corriente fluye con una rapidez uniforme de u. El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de v $\mathrm{m\,s^{-1}}$ con respecto al agua. De acuerdo a los datos ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla? ¿ Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?*

Solución. Sea x paralelo al río e y perpendicular al río de ancho w. Entonces sea v la velocidad del bote respecto al río, u la velocidad del río, V la velocidad absoluta del bote (respecto a tierra). Luego

a)

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath}$$

b) La componente de la velocidad absoluta perpendicular al río determine el tiempo de cruce de acuerdo a

$$t = \frac{w}{v}$$

por lo tanto el bote avanza paralelamente al río una distancia

$$d = ut = \frac{u}{v}w$$

EJERCICIO 6.69 *Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al* *siguiente piso en* $20\,\mathrm{s}$*. ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está parada.*

Solución. Sea L el largo de la escalera. Entonces la velocidad de la persona respecto a la escalera es

$$v' = \frac{L}{30}.$$

Sea v_e la velocidad de la escalera. Ella corresponde a la de la persona cuando no camina, es decir

$$v_e = \frac{L}{20}$$

Si la escalera funciona y la persona camina, entonces

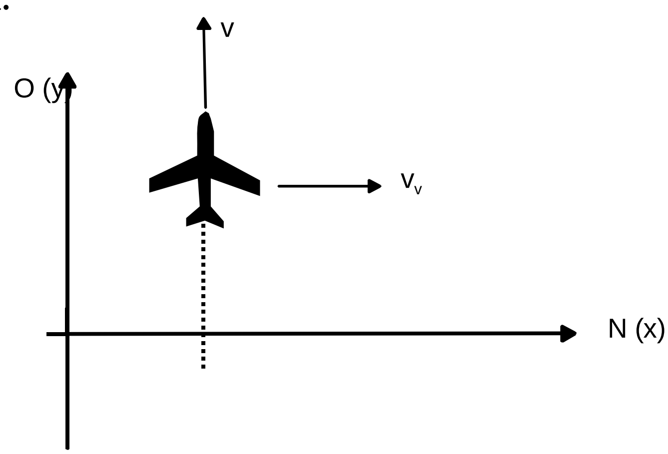
$$v = v_e + v' = \frac{L}{20} + \frac{L}{30} = \frac{L}{t}$$

de donde el tiempo será

$$t = 12\,\mathrm{s}$$

EJERCICIO 6.70 *Un avión va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de* $150\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*. Si existe un viento de* $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.*

Solución.



La velocidad del viento es $v_v = 30$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 150$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = 30\hat{\imath} + \vec{v}'$$

de donde

$$\vec{v}' = v\hat{\jmath} - 30\hat{\imath}$$

y si tomamos magnitudes

$$150 = \sqrt{v^2 + 30^2}$$

de donde

$$v = 146.969\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

EJERCICIO 6.71 *El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a) ¿ en qué dirección debe dirigirse el avión? b) ¿ cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?*

Solución. Usaremos la figura anterior pero ahora la velocidad del viento está hacia el Sur. Ahora la velocidad del viento es $v_v = 50$ y la rapidez del avión respecto al aire es $v' = 200$, en magnitudes. Pero

$$\vec{v} = v\hat{\jmath} = -50\hat{\imath} + \vec{v}'$$

y similarmente resulta

$$v' = 200 = \sqrt{v^2 + 50^2}$$

de donde

b)

$$v = 193.65\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

a)

$$\vec{v}' = 50\hat{\imath} + 193.65\hat{\jmath}$$

da la dirección en que debe dirigirse el avión.

Ejercicio 6.72 *Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de* $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de* 60^o *con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto al automóvil y con respecto a la Tierra.*

Solución. La velocidad relativa $\vec{v}'$ de la lluvia forma un ángulo de 60^o con la vertical y la velocidad $\vec{v}$ de la lluvia con respecto a la Tierra es vertical. Entonces de

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}',$$

tenemos que

$$\begin{aligned} v_A - v' \sin 60 &= 0, \\ v' \cos 60 &= v, \end{aligned}$$

de donde la velocidad de la lluvia respecto al auto tiene magnitud

$$v' = \frac{v_A}{\sin 60} = \frac{50}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

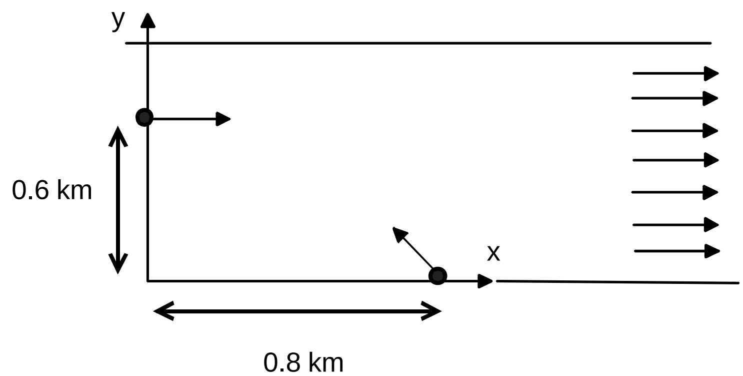
y la velocidad de la lluvia respecto a la tierra tiene magnitud

$$v = v' \cos 60 = \frac{50}{\sqrt{3}}\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

▲

Ejercicio 6.73 *Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de* $2{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *El niño está a* $0{,}6\,\mathrm{km}$ *de la orilla y a* $0{,}8\,\mathrm{km}$ *corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino. a)Si el bote procede a su rapidez máxima de* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote? b)¿ Cuál es el ángulo que hace la velocidad* v *del bote con respecto a la orilla? c)¿ Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?*

Solución.



Para el niño

$$\begin{aligned} x &= 2{,}5t \\ y &= 0{,}6 \end{aligned}$$

para el bote

$$\begin{aligned} x &= 0{,}8 + v_x t \\ y &= v_y t \end{aligned}$$

el bote encuentra al niño cuando

$$\begin{aligned} 2{,}5t &= 0{,}8 + v_x t \\ 0{,}6 &= v_y t \end{aligned}$$

pero la velocidad absoluta está dada por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2{,}5\hat{\imath} + \vec{v}' \\ (v_x - 2{,}5)\hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} &= \vec{v}' \end{aligned}$$

siendo $v' = 20$ de modo que si tomamos módulo de $\vec{v}'$ resultará

$$(v_x - 2{,}5)^2 + v_y^2 = 400$$

si reemplazamos aquí $v_x - 2{,}5 = -\frac{0{,}8}{t}$ y $v_y = \frac{0{,}6}{t}$ resultará

$$(\frac{0{,}8}{t})^2 + (\frac{0{,}6}{t})^2 = 400$$

de donde

c)

$$t = 0{,}05\,\mathrm{h}$$

b) Ahora podemos calcular v_x, v_y

$$\begin{aligned} v_x &= 2{,}5 - \frac{0{,}8}{t} = 2{,}5 - \frac{0{,}8}{0{,}05} = -13{,}5, \\ v_y &= \frac{0{,}6}{0{,}05} = 12. \end{aligned}$$

O sea, como se supuso en la figura, el bote va corriente arriba formando un ángulo con la orilla determinado de

$$\tan\theta = \frac{12}{13{,}5}, \Longrightarrow \theta = 41{,}63^o.$$

a) El conductor del bote debe dirigirlo según

$$\vec{v}' = (v_x - 2{,}5)\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = -16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath},$$

o sea formando un ángulo θ' respecto a la orilla aguas arriba dado por

$$\tan\theta' = \frac{12}{16} \Longrightarrow \theta' = 36{,}87^o.$$

▲

EJERCICIO 6.74 *Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de* $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ *se suelta y cae un perno. ¿ Cuál es la aceleración del perno con respecto a: (a) el carro del tren? (b) la estación de tren estacionaria?*

Solución. Si y es la vertical hacia arriba y x es la dirección de la aceleración del tren, hacia el norte, entonces

a)

$$\vec{a}' = -2{,}5\hat{\imath} - 9{,}8\hat{\jmath}.$$

b)

$$\vec{a} = -9{,}8\hat{\jmath}.$$

▲

EJERCICIO 6.75 *Un estudiante de la Facultad de Ingeniería está parado sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de V m s^{-1}. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?*

Solución. Si V' es la rapidez relativa al tren inicial de lanzamiento, entonces en la dirección del movimiento x tenemos

$$V_x = V'\cos\alpha - V = 0$$

porque el Profesor observa que sale verticalmente. Entonces

$$V' = \frac{V}{\cos\alpha}$$

entonces

$$V_y = V'_y = V'\sin\alpha = V\tan\alpha$$

y como sabemos subirá una altura h dada por

$$h = \frac{V^2\tan^2\alpha}{2g}$$

Capítulo 7

Soluciones ejercicios

7.0.1. Dinámica unidimensional

Ejercicio 7.1 *Un cuerpo de masa* $16\,\mathrm{kg}$*, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético* $\mu_s = 0{,}3$ *y* $\mu_k = 0{,}25$*, respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal* $\vec{F}$*, determine: a) La fuerza resultante sobre el bloque si* $F = 45\,\mathrm{N}$*. b)La magnitud mínima de* F *para poner en movimiento al cuerpo. c) La distancia horizontal que recorre el cuerpo, hasta llegar a detenerse, si* $F = 80\,\mathrm{N}$ *y actúa sólo durante* $4\,\mathrm{s}$*.*

Solución. Calculemos $f_S^{\text{máx}} = \mu_S N = \mu_S mg = 0{,}3 \times 16 \times 10 = 48{,}0\,\mathrm{N}$. Luego la fuerza de $45\,\mathrm{N}$ es insuficiente para colocar en movimiento el cuerpo, entonces

a) $\sum \vec{F} = 0$. Además

b) $F_{\text{mín}} = 48{,}0\,\mathrm{N}$.

Para $F = 80\,\mathrm{N}$, la segunda ley da

$$\begin{aligned} F - \mu_K mg &= ma_1, \; t < 4\,\mathrm{s}, \\ -\mu_K mg &= ma_2, \; t > 4\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{80 - 0{,}25 \times 16 \times 10}{16} = 2.5\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ a_2 &= \frac{-0{,}25 \times 16 \times 10}{16} = -2.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \end{aligned}$$

En $4\,\mathrm{s}$ la posición y velocidad alcanzadas son

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}2{,}5(4)^2 = 20\,\mathrm{m}, \\ v &= a_1t = 10{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \end{aligned}$$

y se detendrá en un tiempo adicional tal que

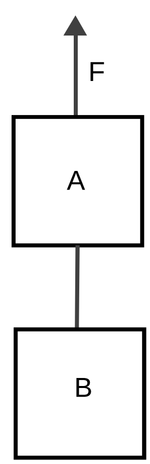
$$0 = 10 + a_2t \Longrightarrow t = \frac{10}{2{,}5} = 4\,\mathrm{s},$$

recorriendo una distancia adicional

$$\begin{aligned} x &= vt + \frac{1}{2}a_2t^2 \\ &= 10 \times 4 - \frac{1}{2}2{,}5(4)^2 = 20{,}0\,\mathrm{m}, \end{aligned}$$

luego en total recorre $40\,\mathrm{m}$.

EJERCICIO 7.2 *Dos bloques A y B de masa $m_A = 14\,\mathrm{kg}$ y $m_B = 10\,\mathrm{kg}$, están unidos por una* ***cuerda cuya masa total*** *es $m = 8\,\mathrm{kg}$ como se indica en la figura. Si se aplica al bloque superior A una fuerza vertical $\vec{F}$ de módulo $480\,\mathrm{N}$, se pide calcular:*



a) La aceleración del sistema. b)La tensión en los extremos superior e inferior de la cuerda.

Solución. Si T_1 y T_2 indican las magnitudes de la tensión en los extremos superior e inferior respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} F - T_1 - m_A g &= m_A a, \\ T_1 - T_2 - mg &= ma, \\ T_2 - m_B g &= m_B a, \end{aligned}$$

sumando las tres

$$F - (m_A + m + m_B)g = (m_A + m + m_B)a,$$

de donde

$$a = \frac{480 - 320}{32} = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} T_2 &= m_B(g + a) = 150\,\mathrm{N}, \\ T_1 &= T_2 + mg + ma = 270\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7.3 *Un disco de hockey abandona el palo de un jugador con una rapidez de* $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y desliza* $36\,\mathrm{m}$ *antes de detenerse. Demuestre que el coeficiente de roce entre el disco y el hielo es* $0{,}035$.

Solución. De

$$ma = -\mu_K mg,$$

resulta

$$a = -\mu_K g,$$

y se detiene en tiempo t dado por

$$v_0 - \mu_K g t = 0 \Longrightarrow t = \frac{v_0}{\mu_K g},$$

y la distancia recorrida es

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_K g},$$

entonces

$$\mu_K = \frac{v_0^2}{2xg} = \frac{25}{2 \times 36 \times 10} = 0{,}035.$$

Ejercicio 7.4 *Una partícula de masa m se mueve sobre el eje X de un sistema de coordenadas, sometido a una fuerza de atracción hacia el origen de magnitud k/x^2, donde k es una constante positiva. Si la partícula parte del reposo en $x = a$, demuestre que ella llegará al origen en un tiempo t , dado por*

$$t = \frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Solución. La segunda ley de Newton da

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{x^2},$$

con condiciones iniciales $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Como

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\dot{x}^2,$$

podemos integrar

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}),$$

de donde

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})},$$

separe variables e integre

$$t = -\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})}} = \frac{1}{2}\pi a\sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

Ejercicio 7.5 *Sobre una partícula de masa m, inicialmente en reposo, actúa una fuerza $\vec{F}$ de magnitud: $F = F_o\left[1 - (t - T)^2/T^2\right]$ durante un intervalo de tiempo$0 < t < 2T$. Pruebe que la rapidez de la partícula al final del intervalo es: $v = 4F_oT/3m$*

Solución. De la segunda ley de Newton

$$m\frac{dv}{dt} = F_o\left[1 - (t - T)^2/T^2\right],$$

integramos

$$v = \frac{F_o}{m}\int_0^{2T} \left[1-(t-T)^2/T^2\right] dt = \frac{4}{3}\frac{F_o}{m}T.$$

▲

Ejercicio 7.6 *Una partícula de masa* $1\,\mathrm{kg}$*, se mueve a lo largo del eje* X *bajo la acción de una fuerza cuya magnitud es:* $F = 4\pi^2 \sin 8\pi t$ *, donde* F *está medido en* N *y* t *en* s*. Cuando* $t = 0\,\mathrm{s}$*, la rapidez de la partícula es* $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. Calcule: a) La rapidez de la partícula cuando* $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$*. b) Si en* $t = 0\,\mathrm{s}$*,* $x = 0\,\mathrm{m}$*, determine la posición de la partícula en* $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$*.*

Solución.

$$\frac{dv_x}{dt} = 4\pi^2 \sin 8\pi t,\ v_x(0) = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ x(0) = 0\,\mathrm{m}.$$

Integramos dos veces

$$v_x(t) = 40 + \int_0^t 4\pi^2 \sin 8\pi t dt = 40 + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\left(\cos 8\pi t\right)\pi,$$

integre de nuevo

$$x(t) = (40 + \frac{1}{2}\pi)t - \frac{1}{16}\sin 8\pi t,$$

si evaluamos para $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$

$$v_x = 41.085\ \mathrm{m\,s^{-1}},\ x = 8.37\,\mathrm{m}$$

▲

Ejercicio 7.7 *Una partícula de masa m, que está inicialmente en reposo en el origen, queda sujeta a la acción de una fuerza resultante, cuya magnitud está dada por* $F = kt^2$*. Demuestre que:*

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

Solución. Tenemos

$$m\frac{dv_x}{dt} = kt^2,$$

si integramos

$$mv_x = \frac{1}{3}kt^3,$$

integrando de nuevo

$$mx = \frac{1}{12}kt^4,$$

de manera que

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

▲

Ejercicio 7.8 *Un globo cuyo peso total es W, incluyendo el lastre, está sujeto a la acción de una fuerza ascendente vertical constante $\vec{P}$. En un determinado instante, el globo comienza a descender con una aceleración constante de magnitud " a" . ¿Qué cantidad de lastre debe arrojarse fuera del globo para que éste se eleve con aceleración constante de magnitud a? No considere la resistencia del aire.*

Solución. Bajando

$$P - W = -\frac{W}{g}a,$$

Para que suba debemos disminuir el peso de manera que

$$P - W' = \frac{W'}{g}a,$$

Eliminemos a

$$\frac{P-W}{P-W'} = -\frac{W}{W'} \Longrightarrow W' = W\frac{P}{2W-P}$$

o sea debe botar

$$W - W' = W - W\frac{P}{2W-P} = 2W\frac{P-W}{P-2W}.$$

La solución en realidad depende de cuales sean los datos. Si se desconoce la fuerza ascendente P, la solución en términos de a se logra eliminando P, es decir restando las dos primeras ecuaciones

$$W - W' = \frac{W'}{g}a + \frac{W}{g}a,$$

de donde

$$W' = W\frac{g-a}{g+a},$$

y finalmente se debe botar

$$W - W' = 2W\frac{a}{g+a}.$$

▲

EJERCICIO 7.9 *Sobre una partícula que se mueve sobre el eje X, actúa una fuerza dada por:* $\vec{F} = -\frac{k}{v_x}\hat{\imath}$*. Se sabe que en* $t = 0$*,* $x_0 = a$ *,* $\dot{x}_0 = v_0$*. Calcule: a)* $\dot{x}$ *en función de* t *y b)* $\dot{x}$ *en función de* x*.*

Solución. De nuevo, la segunda ley de Newton

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{v_x},\ v_x(0) = v_0,\ x(0) = a.$$

Esta puede integrarse de la forma

$$v_x dv_x = -kmdt \Longrightarrow \frac{1}{2}(v_x^2 - v_0^2) = -kmt,$$

de aquí se despeja

$$v_x(t) = \sqrt{v_0^2 - 2kmt}.$$

Para obtener $\dot{x}$ en función de x, la segunda ley puede escribirse

$$m\frac{dv_x}{dt}dx = -\frac{k}{v_x}dx,$$

esto es

$$mdv_x v_x^2 = -kdx \Longrightarrow \frac{1}{3}(v_x^3 - v_0^3) = -\frac{k}{m}(x-a),$$

de donde despejamos

$$v_x(x) = \sqrt[3]{v_0^3 - \frac{3k}{m}(x-a)}.$$

▲

EJERCICIO 7.10 *La fuerza neta que actúa sobre una partícula de masa* 26 kg*, tiene la dirección sobre el eje de las X de un sistema de coordenadas y está dada por la expresión:*

$$F = At^3 + Be^{-ct}$$

en que $A = 216\,\mathrm{N\,s^{-3}}$*,* $B = 1\,\mathrm{N}$*,* $c = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ *y* t *está expresado en segundos. Si en el instante* $t = 0$*, la partícula está pasando por el origen moviéndose a* $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *en el sentido positivo del eje X, determine: a) La velocidad de la partícula en el instante* $t = 3\,\mathrm{s}$*. b) Su distancia al origen en ese instante.*

Solución. La segunda ley será, reemplazando números

$$26a_x = 216t^3 + e^{-t},\ x(0) = 0,\ v_x(0) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

De aquí, integrando dos veces

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= 3 + \int_0^t \frac{216t^3 + e^{-t}}{26} dt, \\
&= 3.038\,5 + 2.077t^4 - 0{,}038\,6e^{-1{,}0t}, \\
x &= \int_0^t (3.038\,5 + 2.077t^4 - 0{,}038\,6e^{-1{,}0t}) dt \\
&= 3.038\,5t + 0{,}415\,4t^5 + 0{,}038\,6e^{-1{,}0t} - 0{,}038\,6
\end{aligned}$$

que si se evalúan en $t = 3\,\mathrm{s}$ dan

$$\begin{aligned}
v_x &= 171.274\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\
x &= 110.02\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 7.11 *Una partícula de masa m , parte del reposo desde el origen de un sistema de coordenadas bajo la acción de una fuerza neta cuya magnitud es $F = f_0 - kt^2$, en que f_0 y k son constantes positivas. a) Encuentre las expresiones para la velocidad y para el itinerario de la partícula $(x(t))$ en función del tiempo. b) Si $m = 800\,\mathrm{kg}$, $f_0 = 1500\,\mathrm{N}$, $k = 15\,\mathrm{N\,s^{-2}}$ y el tiempo está dado en segundos, determine en qué instante se detiene la partícula y a qué distancia del origen.*

Solución. Tenemos que

$$800\frac{dv}{dt} = 1500 - 15t^2;\ x(0) = v(0) = 0.$$

Integrando dos veces

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t \frac{1500 - 15t^2}{800} dt \\
&= \frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (\frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3)dt \\ &= \frac{15}{16}t^2 - \frac{1}{640}t^4, \end{aligned}$$

luego la partícula se detiene cuando

$$\frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3 = 0 \Longrightarrow t = 10\sqrt{3}\text{ s.}$$

y su posición es

$$x = \frac{1125}{8} = 140.625\,\text{s.}$$

▲

Ejercicio 7.12 *Una partícula de masa m se mueve en una línea recta (en el eje X) sometida a una fuerza elástica $-Kx$ y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\dot{x}$. Si inicialmente la velocidad es V y la posición es $x = 0$, determine las expresiones para la posición de la partícula en función del tiempo, en los tres casos: sub amortiguado, amortiguado crítico y sobre amortiguado.*

Solución. La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + kx + 2\beta\dot{x} = 0$$

siendo la ecuación característica

$$mp^2 + 2\beta p + k = 0$$

con soluciones

$$p = -\frac{\beta}{m} + \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}, p = -\frac{\beta}{m} - \sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}$$

a)Sub amortiguado $\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = \omega^2 > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

b) amortiguado crítico $\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{m})^2 = 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(A + Bt)$$

c) sobre amortiguado $(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m} > 0$

$$x = e^{-\frac{\beta}{m}t}(Ae^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{k}{m}}t}),$$

donde al considerar las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V$ permite obtener

a)

$$x = \frac{V}{\omega}e^{-\frac{\beta}{m}t}\sin\omega t)$$

b)

$$x = Ve^{-\frac{\beta}{m}t}t$$

c)

$$x = \frac{V}{2\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2 - \frac{k}{m}}}e^{-\frac{\beta}{m}t}(e^{\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{k}{m}}t} - e^{-\sqrt{(\frac{\beta}{m})^2-\frac{k}{m}}t})$$

▲

Ejercicio 7.13 *Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es:*

$$y = A\sin\omega t$$

siendo A y ω constantes y t el tiempo. Determine la condición que deben cumplir esas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.

Solución. Mientras la partícula permanezca apoyada sobre la plataforma, la reacción normal actuando sobre ella, hacia arriba N, está dada por

$$m\ddot{y} = N - mg$$

con

$$y = A\sin\omega t$$

derivando dos veces

$$\ddot{y} = -A\omega^2\sin\omega t$$

de la primera sale que

$$N = m(g - A\omega^2\sin\omega t).$$

Entonces la partícula no despegará si $N > 0$ para todo t lo cual requiere que

$$A\omega^2 < g$$

o bien la partícula despegará si

$$A\omega^2 > g.$$

▲

Ejercicio 7.14 *Un cuerpo se ata a un extremo de un hilo inextensible y el otro extremo del hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud a, realizando n oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo permanecerá tenso siempre que*

$$n^2 \leq \frac{g}{4\pi^2 a}.$$

Solución. Si T indica la tensión e y la altura de la partícula tenemos

$$m\ddot{y} = T - mg.$$

Como y corresponde a un movimiento armónico simple con $\omega = 2\pi n$ y amplitud a

$$y = a\sin(2\pi nt)$$

entonces

$$\begin{aligned} T &= mg - m\ddot{y} \\ &= mg + m4\pi n^2 a \sin 2\pi nt, \end{aligned}$$

Para que el hilo permanezca tenso debe ser

$$T = mg + m4\pi n^2 a \sin 2\pi nt > 0$$

y entonces

$$mg > m4\pi n^2 a,$$

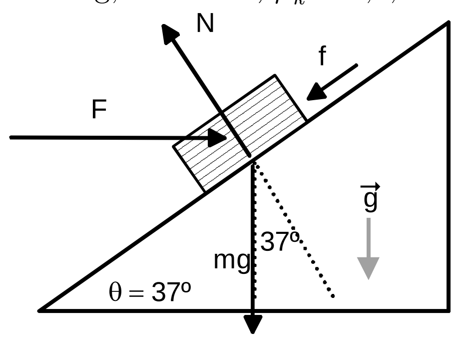
o

$$n^2 < \frac{g}{4\pi a}.$$

▲

Ejercicio 7.15 *Un cuerpo de masa* $m = 1\,\text{kg}$ *es empujado por una fuerza horizontal* F *de módulo* $15\,\text{N}$*, desde el pie de un plano inclinado en* 37^o *respecto a la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético es* $0{,}2$*. Si la fuerza* F *actúa durante tres segundos solamente, determine: la distancia que alcanza a subir por el plano y el tiempo que demora en volver al punto de Partida.*

Solución. Aquí $m = 1\,\text{kg}$, $F = 15\,\text{N}$, $\mu_k = 0{,}2$, $\theta = 37^o$



Tomando el eje x paralelo al plano inclinado e y normal, tenemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F\cos\theta - f - mg\sin\theta = ma \\ \sum F_y &= N - F\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \\ f &= \mu_k N \end{aligned}$$

entonces

$$f = \mu_k(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$

$$a = \frac{F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}$$

$$a \begin{cases} \frac{F(\cos\theta - \mu_k\sin\theta) - mg(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)}{m} & \text{si} \quad t < 3 \\ -g(\mu_k\cos\theta + \sin\theta) & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$$

calculemos numéricamente

$$a \begin{cases} 2.\,56 & \text{si} \quad t < 3 \\ -7.\,62 & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$$

así resulta para $t = 3$, $s = \frac{1}{2}(2.\,56) \times 3^2 = 11.\,52\,\text{m}$ y $v = 2{,}56 \times (3) = 7.\,68\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Pasado este tiempo el cuerpo empieza a frenar y

$$\begin{aligned} v &= 7.\,68 - 7{,}62t, \\ s &= 11{,}52 + 7{,}68t - \frac{1}{2}7{,}62t^2, \end{aligned}$$

a) El cuerpo sube hasta que $v = 0$, o sea $7.68 - 7{,}62t = 0$, con solución $t = 1.01\,\mathrm{s}$ y por lo tanto la distancia que ha subido es

$$s = 11{,}52 + 7{,}68(1.01) - \frac{1}{2}7{,}62(1.01)^2 = 15.39\,\mathrm{m}.$$

En la bajada la fuerza de roce cambia de sentido luego la aceleración de bajada hay que calcularla

$$\begin{aligned} a &= \frac{+\mu_k mg\cos\theta - mg\sin\theta}{m}, \\ &= +\mu_k g\cos\theta - g\sin\theta \\ &= -3.622\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

$0{,}3 \times 10\cos\frac{37}{180}\pi - 10\sin\frac{37}{180}\pi =$

b) La bajada desde el punto más alto se inicia a $t = 4{,}01\,\mathrm{s}$ con velocidad inicial cero, luego hacemos

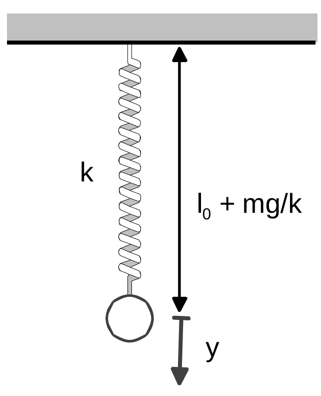
$$0 = 15.39 - \frac{1}{2}3.622\,(t - 4{,}01)^2,$$

de modo que el tiempo es

$$t = 6.93\,\mathrm{s}.$$

7.0.2. Movimiento armónico simple

Ejercicio 7.16 *Si un cuerpo se suspende de un resorte de longitud natural l_0 y constante elástica k, en la posición de equilibrio estático el resorte queda estirado con un largo*



$$l_0 + \frac{mg}{k}$$

Si se perturba, determine la ecuación de movimiento para el desplazamiento y.

Solución. Coloquemos el eje y hacia abajo. En esa dirección y sentido la segunda ley de Newton da

$$m\ddot{y} = mg - k\left(l_0 + \frac{mg}{k} + y - l_0\right),$$

se cancelan dos términos y se obtiene

$$m\ddot{y} + ky = 0.$$

O sea el peso no influye más que en bajar el origen del centro de la oscilación y el cuerpo efectuará un movimiento armónico simple.

EJERCICIO 7.17 *Un cuerpo cuya masa es $m = 2\,\mathrm{kg}$ está suspendido de un resorte cuya constante elástica es $K = 5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Inicialmente el cuerpo está en la posición de equilibrio estático colgando con el resorte vertical, y se la imprime una velocidad hacia debajo de magnitud $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Determine la posición del cuerpo respecto a su posición de equilibrio estático, en función del tiempo.*

Solución. De acuerdo al problema anterior tenemos

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0,$$

o sea $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ y la solución será

$$y(t) = A\cos(\omega t - \phi),$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= A\cos(-\phi) = 0, \\ \dot{y}(0) &= -\omega A\sin(-\phi) = 0{,}5, \end{aligned}$$

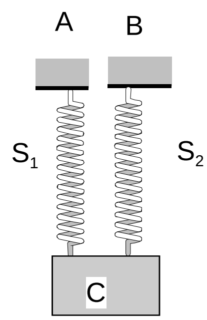
luego

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}A = \frac{1}{2}$$

finalmente

$$y(t) = \frac{1}{10}\sqrt{10}\sin\sqrt{\frac{5}{2}}t$$

EJERCICIO 7.18 *Dos resortes S_1 y S_2 de longitudes iguales a* $0{,}5\,\mathrm{m}$*, pero con diferentes constantes elásticas* $K_1 = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ *y* $K_2 = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$*, están unidos a dos soportes A y B, que se encuentran a la misma altura. Un cuerpo C de masa* $2{,}5\,\mathrm{kg}$*, está entre los dos resortes y es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿ Cuál es la aceleración que adquiere el cuerpo C cuando se deja libre?*



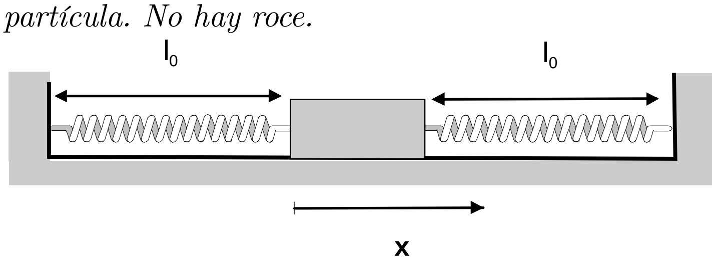
Solución. Tendremos

$$F = k_1 \times (1 - 0{,}5) + k_2 \times (1 - 0{,}5) - mg = ma,$$

de donde

$$a = \frac{25 + 50 - 25}{2{,}5} = 20{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

EJERCICIO 7.19 *Se tiene el sistema de la figura donde un bloque de masa M se mueve unida a dos resortes iguales de largo natural l_0 y constante elástica K. Si el sistema se coloca en movimiento, x indica el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio. Determine la frecuencia y periodo del movimiento del bloquea partícula. No hay roce.*



Solución. Note que si el cuerpo se desplaza en x, ambas fuerzas elásticas están hacia la izquierda y son de igual magnitud kx, luego la segunda ley de Newton es simplemente

$$m\ddot{x} = -kx - kx,$$

de donde

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{2k}{m}, \\ f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ T &= \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}. \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 7.20 *Una partícula de masa $m = 2\,\mathrm{kg}$ tiene un movimiento armónico simple de modo que su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio está dado por*

$$x(t) = 3\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}) \quad \mathrm{m}$$

Determine: a) La frecuencia del movimiento en oscilaciones por segundo. b) La amplitud del movimiento en (m). c) La energía mecánica E en (J). d) La máxima magnitud de la aceleración de la partícula en $\mathrm{m\,s^{-2}}$. e) La máxima magnitud de la velocidad de la partícula en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Solución. De la ecuación dada identificamos (a) y (b)

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}\,\mathrm{Hz}, \\ A &= 3\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

La velocidad y aceleración se obtienen derivando

$$\begin{aligned} v &= -\pi\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}) \quad \mathrm{m\,s^{-1}}, \\ a &= -\frac{\pi^2}{3}\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}) \quad \mathrm{m\,s^{-2}}, \end{aligned}$$

luego los máximos son (d) y (e)

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= \pi \quad \mathrm{m\,s^{-1}}, \\ a_{\text{máx}} &= \frac{\pi^2}{3} \quad \mathrm{m\,s^{-2}}. \end{aligned}$$

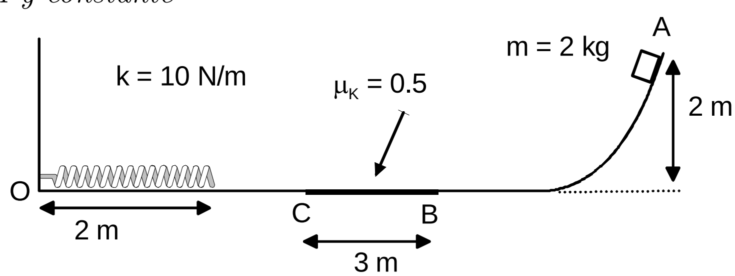
Resta calcular la energía. Tenemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \ E = \frac{1}{2}kA^2,$$

luego

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{\pi^2}{3^2}3^2 = \pi^2 \text{ J}.$$

Ejercicio 7.21 *Un bloque de masa $m = 2\,\text{kg}$ parte del reposo en A ubicado a $2\,\text{m}$ de altura y baja deslizando sobre una curva que a nivel del suelo continúa en línea recta. Hay roce solamente en el tramo CB donde $\mu_K = 0{,}5$. Pasado el tramo con roce el bloque comienza a comprimir un resorte de longitud natural $2\,\text{m}$ y constante*



elástica $k = 10\,\text{N}\,\text{m}^{-1}$ hasta detenerse e invertir su sentido de movimiento. Determine: a) La rapidez de la partícula en el punto B. b) La rapidez de la partícula en el punto C. c) La longitud mínima que alcanza el resorte. d) La ubicación del punto entre C y B donde finalmente se detiene el bloque.

Solución. Tomamos cero la energía potencial gravitacional al nivel del suelo. En A la energía es puramente gravitacional $E = mgh_A = 2 \times 10 \times 2 = 40\,\text{J}$. Esa energía en B es puramente cinética luego

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = 40 \Rightarrow (a)\ v_B = \sqrt{\frac{80}{2}} = 6.325\,\text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

En cada pasada por el tramo con roce, la partícula pierde energía igual al trabajo realizado contra el roce esto es

$$\Delta E = -\mu_K mgd = -0{,}5 \times 2 \times 10 \times 3 = -30\,\text{J}.$$

Luego a la salida del tramo con roce tiene energía

$$E_C = 40 - 30 = 10\,\text{J},$$

que es puramente cinética, luego

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = 10 \Rightarrow (b)\ v_C = \sqrt{\frac{20}{2}} = 3.\,162\,\text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

El resorte transforma toda esa energía en elástica luego

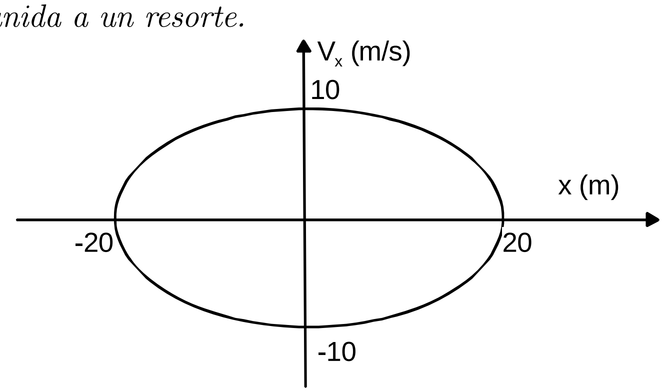
$$\frac{1}{2}k(l_0 - l_{\text{mín}})^2 = 10,$$

de donde ω

$$\text{(c)}\quad l_{\text{mín}} = (2 - \sqrt{2}) = 0{,}586\,\text{m}.$$

La energía es todavía $E = 10\,\text{J}$. Suficiente para recorrer un tercio del tramo con roce luego se detiene a $1\,\text{m}$ a la derecha de C.

Ejercicio 7.22 *Una partícula de masa* $8\,\text{kg}$ *oscila con movimiento armónico simple unida a un resorte.*



La figura muestra la variación de la componente v_x de la velocidad con respecto al alargamiento x. Si en $t = 0\,\text{s}$, la partícula pasa por la posición de equilibrio, $x(0) = 0$, moviéndose hacia la izquierda con cierta rapidez, determine a) La ecuación itinerario $x(t)$. b) La energía mecánica del sistema E.

Solución. Como es movimiento armónico simple entonces en general

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

De la figura identificamos

$$\begin{aligned} A &= x_{\text{máx}} = 20\,\text{m}, \\ v_{\text{máx}} &= 10 = A\omega \Longrightarrow \omega = \frac{10}{20} = 0{,}5\,\text{m}. \end{aligned}$$

Falta identificar la fase inicial ϕ. Para ello se sabe que en $t = 0$

$$\begin{aligned} x(0) &= 20\cos(\phi) = 0, \\ \dot{x}(0) &= -10\sin(\phi) < 0, \end{aligned}$$

que tiene única solución $\phi = +\frac{\pi}{2}$, luego

$$x(t) = 20\cos(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}) = -20\sin(\frac{1}{2}t).$$

▲

7.0.3. Dinámica en dos o tres dimensiones

EJERCICIO 7.23 *Un cuerpo de masa* $8\,\text{kg}$*, describe una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son:* $x = 2 + 5t - 2t^2\,\text{m}$ *e* $y = t^2\,\text{m}$*. Determine la fuerza aplicada sobre el cuerpo en* $t = 2\,\text{s}$*.*

Solución. Calculemos $\vec{a}$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(2 + 5t - 2t^2, t^2) = (5 - 4t, 2t), \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} = (-4, 2), \end{aligned}$$

luego

$$\vec{F} = m\vec{a} = 8(-4, 2) = (-32, 16)\,\text{N}.$$

▲

EJERCICIO 7.24 *Una partícula de masa* $25\,\text{g}$ *se hace girar, de modo que describa una trayectoria circular en un plano vertical, mediante una cuerda de largo* $40\,\text{cm}$*. Si la rapidez angular es constante y de magnitud* 30 *rad* s^{-1}*, calcule: a) La aceleración centrípeta en el punto más alto de la trayectoria. b)La tensión en el punto más bajo de la trayectoria.*

Solución. La aceleración centrípeta es en este caso de magnitud constante

$$a_C = \frac{v^2}{L} = L\omega^2 = 0{,}40 \times (30)^2 = 360{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

y en el punto más bajo

$$T - mg = ma_C,$$

de donde

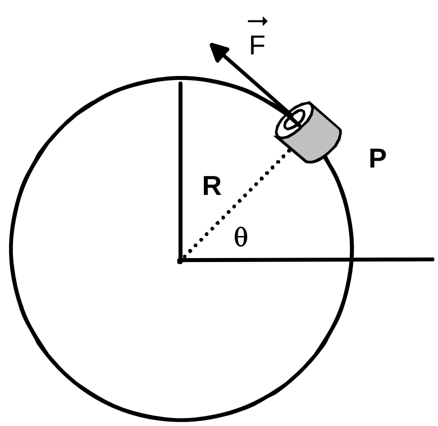
$$T = m(g + a_C) = 0{,}025 \times 370 = 9.\,25\,\mathrm{N}$$

▲

EJERCICIO 7.25 *Un anillo P de masa m, está engarzado en un alambre liso, que forma una circunferencia fija de plano vertical y radio R como se indica en la figura. Bajo la acción de una fuerza tangencial $\vec{F}$ de magnitud desconocida, el anillo describe la circunferencia con rapidez angular igual a:*

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\left(1 - \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

determine:



a) La magnitud de la fuerza $\vec{F}$ en función de θ. b)La reacción normal del alambre sobre el anillo.

Solución. La segunda ley de Newton en polares da

$$\begin{aligned} F - mg\cos\theta &= mR\ddot{\theta}, \\ N + mg\sin\theta &= mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

$\dot{\theta}$ es dado y $\ddot{\theta}$ puede calcularse de acuerdo a

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}(1 - \frac{1}{2}\sin\theta)\cos\theta,$$

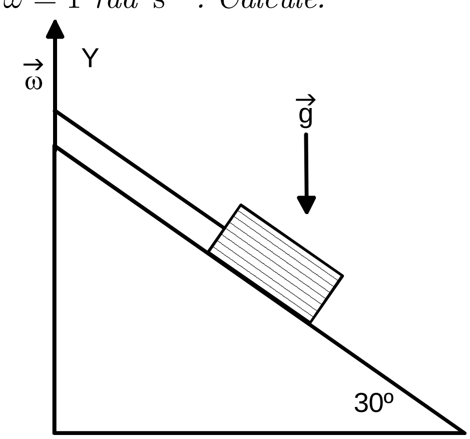
luego

$$\begin{aligned} F &= mg\cos\theta + mR\frac{g}{R}\left(-\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}mg\cos\theta\sin\theta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N &= -mg\sin\theta + mR\frac{2g}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\sin\,\theta\right)^2 \\ &= mg(2 - 3\sin\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta). \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.26 *Un bloque de masa* 5 kg*, descansa sobre un plano inclinado* 30^o *con la horizontal, unida a un eje vertical eje mediante una cuerda de longitud* $10/\sqrt{3}$ m*. El plano gira junto con el bloque en torno a un eje vertical con rapidez angular* $\omega = 1$ *rad* s^{-1}*. Calcule:*



a) La tensión en la cuerda; b) La velocidad angular para la cual el bloque pierde contacto con el plano.

Solución. En el sentido del eje OY no hay aceleración por lo cual

$$T\sin 30 - mg + N\cos 30 = 0,$$

y

$$T\cos 30 - N\sin 30 = ma_C = mL(\omega)^2\cos 30,$$

de donde podemos despejar T y N

$$\begin{aligned} T &= m\left(g\sin 30 + L\omega^2\cos^2 30\right), \\ N &= m\left(g - L\omega^2\sin 30\right)\cos 30. \end{aligned}$$

Calculando

$$T = 46.65\,\mathrm{N}$$

y para que despegue, $N = 0$ da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\sin 30}} = 1.86\ \mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

EJERCICIO 7.27 *Una pelota de peso W está unida a una cuerda de longitud L y está moviéndose como péndulo cónico. Es decir, está girando en un círculo horizontal con rapidez constante v_0. Sea θ el ángulo formado por la cuerda y la vertical. Despreciando el peso de la cuerda, determinar: a) La tensión de la cuerda. b) La rapidez v_0 en función de g, L y θ.*

Solución. La componente vertical de la segunda ley es

$$T\cos\theta - mg = 0,$$

y la componente hacia el centro de giro es

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2}{L\sin\theta},$$

de la primera

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{W}{\cos\theta},$$

y de la segunda

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{TL\sin^2\theta}{m} = gL\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = gL\sin\theta\tan\theta, \\ v_0 &= \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.28 *Demuestre que la ecuación de movimiento de un péndulo simple, formado por una partícula de masa m suspendida de un hilo liviano de largo L, es :*

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Solución. Hay varios caminos. Si usamos conservación de energía, con energía potencial definida como cero en el punto más bajo, tenemos que

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta)$$

que si se deriva respecto al tiempo da

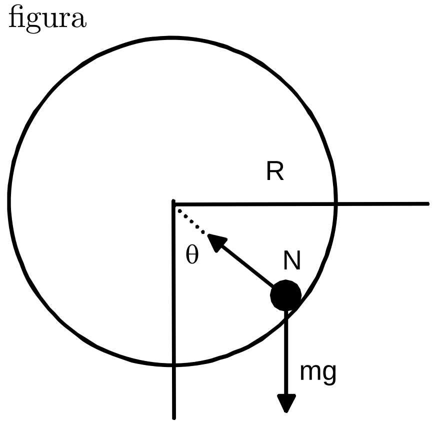
$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Ejercicio 7.29 *Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso vertical de radio R que tiene su plano vertical, sometida a su peso y a la reacción normal. Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que la partícula realice vueltas completas sin perder contacto con el aro.*

Solución. Para la figura



la segunda Ley de Newton, radial y tangencial da

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{R} &= N - mg\cos\theta, \\ m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin\theta \end{aligned}$$

o bien la segunda se puede escribir como

$$mR\ddot{\theta} = \frac{mR}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -mg\sin\theta$$

Si llamamos $v_0 = R\dot{\theta}_0$ la rapidez en el punto más bajo, donde $\theta = 0$, podemos integrar la última ecuación obteniendo

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$$

o bien

$$v_0^2 - v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

y de allí podemos calcular N que resulta ser

$$\begin{aligned} N &= m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}(v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)) + mg\cos\theta \\ &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

Para que la partícula realice vueltas completas debe ser

$$N = \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2) > 0$$

entonces, en el caso más desfavorable $\theta = \pi$

$$\frac{m}{R}v_0^2 + mg(-3 - 2) > 0$$

entonces

$$v_0 > \sqrt{5gR}$$

EJERCICIO 7.30 *Respecto a la situación del problema anterior, si la velocidad en el punto más bajo es la 3/4 de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.*

Solución. Si en el problema anterior colocamos

$$v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gR}$$

entonces

$$\begin{aligned} N &= \frac{m}{R}v_0^2 + mg(3\cos\theta - 2), \\ &= \frac{m}{R}\frac{9}{16}5gR + mg(3\cos\theta - 2), \\ &= mg(\frac{13}{16} + 3\cos\theta), \end{aligned}$$

que se anula donde $\frac{13}{16} + 3\cos\theta = 0$, o sea en: $\theta = 105{,}7^o$ y allí se pierde el contacto.

▲

EJERCICIO 7.31 *Respecto a la situación del problema anterior, si la rapidez en el punto más bajo es v_0 determine la reacción normal N en función de θ.*

Solución. Sigue siendo válido que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgR\cos\theta,$$

de donde

$$v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta) = v^2(\theta).$$

En un punto arbitrario, la ecuación radial es

$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R},$$

despejamos N

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta + m\frac{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R}, \\ &= mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} - m2g(1-\cos\theta), \\ &= mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{v_0^2}{R}. \end{aligned}$$

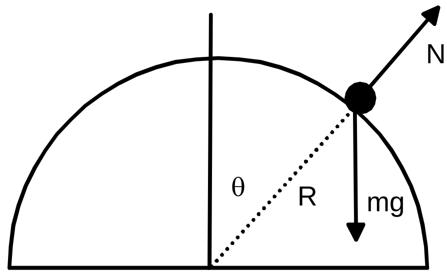


Figura 7.1:

Ejercicio 7.32 *Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.*

Solución. Considere la figurala componente radial de la segunda Ley de Newton es

$$m\frac{v^2}{R} = -N + mg\cos\theta,$$

y conservación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR,$$

o sea

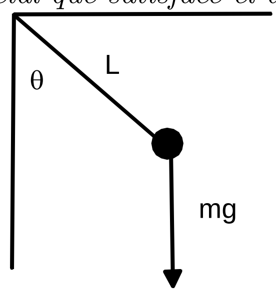
$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta),$$

que sustituida en la primera da

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta), \\ &= (3\cos\theta - 2)mg, \end{aligned}$$

que se anula donde $\cos\theta = \frac{2}{3}$ o sea el punto de despegue es $\theta = 48{,}19^o$.

Ejercicio 7.33 *Se tiene un péndulo constituido por una partícula de masa m unida por un hilo de largo L a un punto fijo. Si la rapidez de la partícula* *en el punto más bajo es v_0 determine la energía mecánica de la partícula considerando que en el punto más bajo la energía potencial es cero. Determine además la ecuación diferencial que satisface el ángulo θ.*



Solución. Si tomamos como nivel de referencia de la energía potencial el punto más bajo, entonces

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos\theta).$$

Si además derivamos respecto al tiempo se obtiene

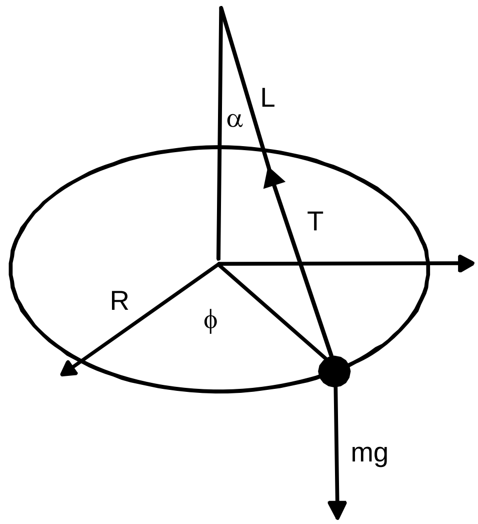
$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL(\sin\theta)\dot{\theta} = 0,$$

o sea

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}(\sin\theta) = 0.$$

▲

Ejercicio 7.34 *Un péndulo cónico que se ilustra en la figura, se mueve manteniendo el ángulo α constante siendo m la masa de la partícula, L el largo del hilo.*



Determine a) La rapidez angular $\dot{\phi}$. b) La tensión del hilo.

Solución. No hay movimiento vertical de manera que

$$T\cos\alpha = mg.$$

En la dirección hacia el centro de giro

$$T\sin\alpha = mR\dot{\phi}^2 = m(L\sin\alpha)\dot{\phi}^2.$$

Eliminando T se obtiene

$$\frac{L\sin\alpha\dot{\phi}^2}{g} = \tan\alpha,$$

y finalmente

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}.$$

7.0.4. Trabajo y energía

EJERCICIO 7.35 *Un proyectil de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$, se lanza desde el origen de un sistema de coordenadas, con rapidez $v_0 = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, formando un ángulo $\alpha = 37^o$ con la horizontal. Si se desprecia la resistencia del aire, calcule: a) La energía mecánica del proyectil después del lanzamiento. b) El trabajo* *realizado por la fuerza neta que actúa sobre el proyectil, desde que se lanza hasta que adquiere la altura máxima. c) La energía cinética del proyectil en el punto de impacto contra el suelo.*

Solución. Si el nivel de referencia para la energía potencial corresponde al punto de lanzamiento, entonces la energía mecánica (que es constante) es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}1(100)^2 = 5000\,\mathrm{J}.$$

La altura máxima se calcula de

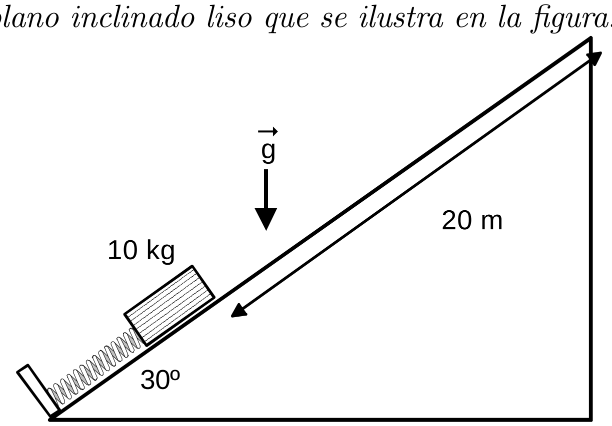
$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = 164.62\,8\,\mathrm{m}.$$

El trabajo realizado por la fuerza neta, el peso, es igual a menos la variación de la energía potencial, es decir

$$W = -mg(y_{\text{máx}} - 0) = -1646{,}28\,\mathrm{J},$$

y la energía en el punto de llegada es la misma que al salir.

EJERCICIO 7.36 *Un bloque de masa* $m = 10\,\mathrm{kg}$ *se encuentra en reposo comprimiendo a un resorte de constante elástica* $k = 2000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ *en* $1\,\mathrm{m}$ *respecto a su largo natural como se indica en la figura. Si el cuerpo se suelta comienza a subir por el plano inclinado liso que se ilustra en la figura.*



Determine la máxima altura que sube el bloque respecto a su altura inicial. No hay roce.

Solución. La energía inicial es puramente elástica y es

$$E = \frac{1}{2}k(\Lambda l)^2 = \frac{1}{2}2000(1)^2 = 1000\,\mathrm{J}.$$

Hagamos la hipótesis de que se detiene sobre el plano inclinado

$$E = 1000 = mgh = 100h,$$

de donde $h = 10\,\mathrm{m}$.Pero $20\sin 30 = 10$, de modo que el bloque subió justo $10\,\mathrm{m}$ justo hasta el punto más alto del plano inclinado.

EJERCICIO 7.37 *Una partícula de masa m se mueve en el plano XY tal que:*

$$\vec{r} = a\hat{\imath}\cos\omega t + b\hat{\jmath}\sin\omega t,$$

donde a y b son constantes positivas. a) Encuentre la trayectoria de la partícula. b) Calcule la fuerza que actúa sobre la partículas. c) Demuestre que la fuerza es conservativa. d) ¿Cuál es la energía potencial en $x = a$ e $y = b$? e) Calcule el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de A hacia B. f) La energía total de la partícula.

Solución. Del vector posición,

$$x = a\cos\omega t,\ y = b\sin\omega t,$$

de donde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a),$$

(es una elipse). Además

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \qquad (b),$$

se trata de una fuerza conservativa porque es evidente que

$$\vec{F} = -\nabla\frac{1}{2}m\omega^2r^2,$$

y luego la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Las coordenada de los puntos son $A(a,0)$ y $B(0,b)$ de manera que

$$U_A = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2,\ U_B = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 \qquad (d),$$

de modo que el trabajo es

$$W = -(U_B - U_A) = -\frac{1}{2}m\omega^2(b^2 - a^2) \qquad (f).$$

La energía total de la partícula será

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + U \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.38 *Una partícula de masa m, se mueve por la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial es $U(x)$. Si en t_1 la partícula está en x_1 y en t_2 está en x_2, demuestre que: a)*

$$t_2 - t_1 = \sqrt{m/2}\int_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

donde E es la energía total. b) Si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y en $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$. Demuestre que:

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Solución. Tenemos que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \\
\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} \\
dt &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}},
\end{aligned}$$

integrando

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

Si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}},$$

pero $E = K + U = \frac{1}{2}ka^2$ de manera que

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}}(\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

y finalmente

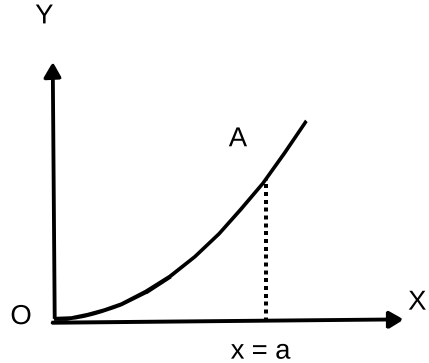
$$x(t) = a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}) = a\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

▲

EJERCICIO 7.39 *En la parábola $y = x^2/a$ que está colocada verticalmente según la figura, además del peso, de la fuerza de reacción normal, actúa sobre la argolla una fuerza dada por:*

$$\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}.$$

Inicialmente, la argolla está en A y su rapidez es nula.



a) Determinar el trabajo que hace la fuerza F cuando la argolla se mueve desde A hasta O. b) Calcule la rapidez de la argolla cuando pasa por O.

Solución. Calculemos su trabajo directamente

$$\begin{aligned}
W_{\vec{F}} &= \int_A^O \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^O (ydx - xdy) \\
&= \int_a^0 \frac{x^2}{a}dx - \int_a^0 x\frac{2xdx}{a} \\
&= -\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3}a^2 = \frac{a^2}{3}.
\end{aligned}$$

Usamos ahora el teorema energía trabajo

$$\begin{aligned}
E_O - E_A &= \frac{a^2}{3}, \\
\frac{1}{2}mv_O^2 - (mgy_A) &= \frac{a^2}{3}, \\
\frac{1}{2}mv_O^2 - (mga) &= \frac{a^2}{3},
\end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$v_O = \frac{1}{3m}\sqrt{6}\sqrt{(ma\,(a+3mg))} = \sqrt{2ag + \frac{2a^2}{3m}}.$$

▲

Ejercicio 7.40 *Una partícula de masa m, se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza* *resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad k. Calcule: a) La distancia total que recorre la partícula. b) La energía cinética de la partícula en la mitad del recorrido. c) El trabajo total que realiza la fuerza resistente.*

Solución. Tenemos
$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$
separando variables e integrando
$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{kt}{m},$$
de donde
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}},$$
integrando nuevamente
$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{kt}{m}} dt = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}).$$
como la partícula se detiene cuando $t \to \infty$, resulta que la distancia recorrida es
$$x = \frac{mv_0}{k} \qquad (a).$$
En la mitad del recorrido el tiempo será dado por
$$\frac{1}{2}\frac{mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \Longrightarrow t = \frac{m}{k}\left(\ln 2\right),$$
y la energía cinética será
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2\frac{kt}{m}} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\frac{1}{4} = \frac{1}{8}mv_0^2. \quad (b) \end{aligned}$$

Por último según el teorema energía trabajo, el trabajo total que realiza la fuerza resistente es
$$W_{\vec{f}} = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2. \quad (c)$$

Ejercicio 7.41 *Sobre una partícula de masa $m = 2$ kg, actúa una fuerza F desconocida. La partícula se mueve sobre un plano horizontal áspero, de acuerdo a la ecuación itinerario $x = 3 + t^2$ donde x está en metros y t en segundos. El coeficiente de roce cinético entre el plano y la partícula es $\mu_k = 0{,}3$. Calcule: a) La energía cinética de la partícula en el instante $t = 3\,\mathrm{s}$. b) El trabajo realizado por la fuerza F en el intervalo $0 - 3\,\mathrm{s}$.*

Solución. Tenemos que la rapidez es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t.$$

La energía cinética en $t = 3\,\mathrm{s}$ será

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2(36) = 36\,\mathrm{J}.$$

La fuerza de roce realiza un trabajo

$$\begin{aligned} W &= -\mu_k Mg(x_2 - x_1) \\ &= -0{,}3 \times 2 \times 10(12 - 3) = -54{,}0\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

El trabajo total es la variación de la energía cinética, es decir

$$W_F - 54{,}0 = 36,$$

de donde

$$W_F = 90\,\mathrm{J}.$$

Ejercicio 7.42 *Un bloque de masa $m = 4\,\mathrm{kg}$, inicialmente en reposo, asciende a lo largo de un plano inclinado áspero de largo $1\,\mathrm{m}$ e inclinación respecto de la horizontal $\alpha = 53^o$, debido a la acción de una fuerza horizontal constante de magnitud $60\,\mathrm{N}$. Si al término del recorrido el bloque tiene una rapidez de $1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, calcule: a) El trabajo realizado por la fuerza de roce. b) El trabajo neto resultante. c) El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano.*

Solución. La normal es $N = mg\cos 53 = 24.\,073\,\mathrm{N}$, la altura que sube es $h = 1 \times \sin 53 = 0{,}798\,6\,\mathrm{m}$, el desplazamiento horizontal del bloque es

$x = 1 \times \cos 53 = 0{,}601\,8\,\mathrm{m}$. Podemos entonces calcular los siguientes trabajos y el cambio de la energía cinética

$$\begin{aligned} W_N &= 0, \\ W_{mg} &= -4 \times 10 \times 0{,}798\,6 = -31.\,944\,\mathrm{J}, \\ W_F &= 60 \times 0{,}601\,8 = 36.\,108\,\mathrm{J}, \\ K_2 - K_1 &= \frac{1}{2}4(1{,}2)^2 = 2.\,88\,\mathrm{J}\ \text{(trabajo neto resultante)} \end{aligned}$$

El trabajo W_f realizado por la fuerza de roce satisface

$$W_f + W_F + W_{mg} = K_2 - K_1,$$

de manera que el trabajo realizado por el roce será

$$W_f = 2.\,88 - 36{,}108 + 31{,}944 = -1.\,284\,\mathrm{J},$$

y finalmente el coeficiente de roce lo despejamos de

$$W_f = -\mu_K N L,$$

o sea

$$\mu_K = \frac{1.\,284}{24.\,073} = 0{,}053\,.$$

7.0.5. Problemas que requieren más matemáticas

Problemas de este tipo no se colocarán en pruebas. Sin embargo el hacerlos, contribuye fuertemente a su formación.

EJERCICIO 7.43 *Una partícula de masa m moviéndose en una línea recta está sometida a una resistencia que produce una fuerza de retardo kv^3, donde v es la velocidad y k es una constante. Muestre que la velocidad v y el tiempo t están dados en términos de la distancia s mediante las ecuaciones*

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{1 + kmsu}, \\ t &= \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2. \end{aligned}$$

donde u es la velocidad inicial.

Solución. La ecuación de movimiento será

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^3$$

siendo

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

La primera puede escribirse como

$$\begin{aligned} m\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} &= -kv^3, \\ mv\frac{dv}{ds} &= -kv^3, \\ m\frac{dv}{ds} &= -kv^2, \end{aligned}$$

que puede integrarse, siendo u la velocidad inicial, como sigue

$$\begin{aligned} \int_u^v \frac{dv}{v^2} &= -km\int_0^s ds, \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} &= -kms, \end{aligned}$$

entonces

a)

$$v = \frac{u}{1 + kmsu},$$

Además

b)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{u}{1 + kmsu},$$

que puede integrarse

$$\begin{aligned} \int (1 + kmsu)ds &= \int udt, \\ s + \frac{1}{2}kmus^2 &= ut, \end{aligned}$$

o bien

$$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2.$$

EJERCICIO 7.44 *Una partícula se mueve en una línea recta bajo la acción de una fuerza de roce de la forma kv^{n+1} donde v es la velocidad a tiempo t. Muestre que, si u es la velocidad en $t = 0$*

$$kt = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n}\right),$$

y obtenga una fórmula correspondiente para el espacio en términos de v.

Solución. La segunda ley da

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^{n+1},$$

o

$$v\frac{dv}{ds} = -kv^{n+1},$$

Si integramos la primera

$$m\int_u^v \frac{dv}{v^{n+1}} = -kt,$$

de donde

$$\frac{m}{n}\left(\frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n}\right) = kt.$$

Similarmente si integramos la segunda forma

$$\begin{aligned} m\int_u^v \frac{dv}{v^n} &= -ks, \\ ks &= \frac{m}{n-1}\left(\frac{1}{v^{n-1}} - \frac{1}{u^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.45 *Una bala disparada con una velocidad horizontal de $800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ viaja con una velocidad de $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ al final de un segundo. Suponiendo válido el modelo del problema anterior con $m = 1/2$, calcule k y el espacio recorrido en el primer segundo, despreciando el efecto de la gravedad.*

Solución. Para el problema anterior, se tiene ahora $m = \frac{1}{2}$ y $u = 800$, y para $t = 1$, $v = 500$. Entonces

$$k = \frac{1}{(1/2)}\left(\frac{1}{500^{1/2}} - \frac{1}{800^{1/2}}\right) = 0{,}0\,187\,32.$$

Entonces

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{k(m-1)}\left(\frac{1}{v^{m-1}} - \frac{1}{u^{m-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(0{,}0\,187\,32)(-1/2)}\left(\frac{1}{500^{-1/2}} - \frac{1}{800^{-1/2}}\right) = 632.\,457\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7.46 *Se dispara verticalmente hacia arriba una piedra en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa proporcional a la velocidad (kv) cuando la rapidez es v. Si v_0 es la rapidez del disparo, pruebe que la piedra vuelve al punto inicial después de un tiempo t_1, donde*

$$(g + kv_0)\left(1 + e^{-kt_1}\right) = gkt_1.$$

Solución. Aquí

$$\frac{dv}{dt} = -kv - g,$$

de donde

$$v(t) = \frac{-g + e^{-kt}C_1 k}{k},$$

pero

$$v_0 = \frac{-g + C_1 k}{k},$$

de modo que

$$C_1 = \frac{v_0 k + g}{k},$$

y

$$v(t) = \frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt},$$

entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \left(\frac{-g}{k} + \frac{v_0 k + g}{k} e^{-kt}\right) dt \\ &= -\frac{gt}{k} + \frac{v_0 k + g}{k^2}(1 - e^{-kt}) \end{aligned}$$

De aquí, haciendo $y = 0$ en $t = t_1$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{gt_1}{k} + \frac{v_0k + g}{k^2}(1 - e^{-kt_1}), \\ gkt_1 &= (v_0k + g)(1 - e^{-kt_1}). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7.47 *Una partícula se lanza hacia arriba con velocidad inicial u y se mueve en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa kv^2. Pruebe que la partícula vuelve al punto de partida después de un tiempo*

$$\frac{1}{\sqrt{kg}}\left(\alpha + \ln\left(\sec\alpha + \tan\alpha\right)\right),$$

donde

$$\tan\alpha = u\sqrt{\frac{k}{g}}.$$

Solución. Aquí, para la subida

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 - g, \tag{7.1}$$

y debemos calcular la altura máxima y el tiempo empleado en subir. Podemos integrar

$$\begin{aligned} t &= -\int_u^v \frac{dv}{kv^2 + g}, \\ &= \frac{-\arctan v\frac{k}{\sqrt{(gk)}} + \arctan u\frac{k}{\sqrt{(gk)}}}{\sqrt{(gk)}} \end{aligned}$$

en el punto más alto $v = 0$, por lo tanto el tiempo de subida es

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{(gk)}}\arctan u\frac{k}{\sqrt{(gk)}}.$$

Para saber la altura máxima, modificamos la ecuación (**??**) de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv^2 - g, \\ vdv &= (-kv^2 - g)dy, \end{aligned}$$

entonces

$$y = -\int_u^v \frac{vdv}{kv^2 + g}.$$

Como nos interesa solamente $y_{\text{máx}}$ hacemos $v = 0$, entonces

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{g + ku^2}{g}.$$

Para la bajada, con $v(0) = 0$ y $y(0) = y_{\text{máx}}$

$$\frac{dv}{dt} = kv^2 - g, \tag{7.2}$$

entonces

$$\begin{aligned} t &= -\int_0^v \frac{dv}{g - kv^2}, \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(gk)}} \operatorname{arctanh} v \frac{k}{\sqrt{(gk)}}, \end{aligned}$$

además modificando la ecuación (**??**)

$$vdv = (kv^2 - g)dy,$$

entonces

$$y - y_{\text{máx}} = \int_0^v \frac{vdv}{kv^2 - g} = \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv^2}{g},$$

luego la velocidad de llegada v_f al suelo $(y = 0)$ estará dada por

$$\begin{aligned} -y_{\text{máx}} &= \frac{1}{2k} \ln \frac{g - kv_f^2}{g}, \\ &= -\frac{1}{2k} \ln \frac{g + ku^2}{g}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{g - kv_f^2}{g} = \frac{g}{g + ku^2},$$

o bien

$$v_f = -\sqrt{\frac{g}{g + u^2 k}} u,$$

finalmente, el tiempo de bajada estará dado por

$$\begin{aligned} t_b &= -\frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} v\frac{k}{\sqrt{gk}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g+u^2k}} u\frac{k}{\sqrt{gk}}, \end{aligned}$$

y el tiempo total será

$$t = \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan u\frac{k}{\sqrt{gk}} + \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{g}{g+u^2k}} u\frac{k}{\sqrt{gk}},$$

si llamamos $\tan\alpha = u\sqrt{\frac{k}{g}}$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{gk}} \arctan(\tan\alpha) + \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} \tan\alpha, \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}} (\alpha + \operatorname{arctanh}\sin\alpha), \end{aligned}$$

pero existe la identidad

$$\operatorname{arctanh}\phi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\phi}{1-\phi},$$

de modo que el tiempo será

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}), \\ &= \frac{1}{\sqrt{gk}}(\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha)). \end{aligned}$$

(¡¡Este problema no será colocado en pruebas!!)

Ejercicio 7.48 *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (en el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\dot{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. Aquí, la ecuación de movimiento será

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + 2\frac{\beta}{m}\dot{y} = -g$$

con soluciones particular y homogéneas las siguientes

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{mg}{2\beta}t \\ y_h &= A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t} \end{aligned}$$

de modo que la solución general es

$$y(t) = -\frac{mg}{2\beta}t + A + Be^{-2\frac{\beta}{m}t}$$

siendo $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = V$ de modo que

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -\frac{mg}{2\beta} - 2\frac{\beta}{m}B &= V \end{aligned}$$

o sea

$$B = -\frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}m$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{mg}{2\beta}t + \frac{1}{4}\frac{mg + 2V\beta}{\beta^2}(1 - e^{-2\frac{\beta}{m}t}) \\ v(t) &= -\frac{mg}{2\beta} + \frac{1}{2}\frac{mg + 2V\beta}{\beta m}e^{-2\frac{\beta}{m}t}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7.49 *Una partícula de masa m se suelta desde una altura h sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-\beta\dot{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. Mientras la partícula baja

$$m\ddot{y} = -mg - \beta\dot{y},\ y(0) = h,\ \dot{y}(0) = 0.$$

Reordenemos

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = -g$$

que tiene solución particular

$$y_P = -\frac{mg}{\beta}t,$$

y la ecuación homogénea es

$$y_h = A + Be^{-\frac{\beta t}{m}},$$

la solución general es

$$y(t) = -\frac{mg}{\beta}t + A + Be^{-\frac{\beta t}{m}},$$

debiendo ser

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = h, \\ \dot{y}(0) &= -\frac{mg}{\beta} - \frac{\beta}{m}B = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$B = -m^2\frac{g}{\beta^2},\ A = h + m^2\frac{g}{\beta^2},$$

luego

$$\begin{aligned} y(t) &= h - \frac{mg}{\beta}t + m^2\frac{g}{\beta^2}(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}), \\ \dot{y}(t) &= -\frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}). \end{aligned}$$

Ejercicio 7.50 *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa proporcional al cuadrado de la rapidez, de la forma* $\pm 2\beta\dot{y}^2$*. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo. Considere que debe elegirse el signo adecuadamente para la subida y la bajada de la partícula.*

Solución. Mientras la partícula sube

$$m\ddot{y} = -mg - 2\beta\dot{y}^2$$

y mientras baja

$$m\ddot{y} = -mg + 2\beta\dot{y}^2$$

puesto que la fuerza resistente es contraria a la velocidad. Si llamamos a $v = \dot{y}$ tenemos

a) para la subida

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{2\beta}{m}v^2 \\ dt &= -\frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2} \\ t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \frac{2\beta}{m}v^2} \end{aligned}$$

b) para la bajada

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g + \frac{2\beta}{m}v^2 \\ dt &= -\frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2}, \\ t &= -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{2\beta}{m}v^2} \end{aligned}$$

Las integrales podrían hacerse de tablas, pero no vale la pena porque son expresiones complicadas.

Ejercicio 7.51 *Sea*

$$\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{\imath} + 2xyz^3\hat{\jmath} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}.$$

Encuentre la función potencial escalar asociada a F.

Solución. Debemos verificar primero que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Calcule entonces

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{F} &= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{bmatrix} \\
&= \hat{\imath}(6xyz^2 - 6xyz^2) + \cdots \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Sea entonces $V(0,0,0) = 0$. Además sabemos que

$$V(x,y,z) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

y como camino tomamos tres segmentos a lo largo de los ejes. $C_1 : y = 0$, $z = 0$, $x : 0 \to x$; $C_2 : z = 0$, $x =$ constante, $y : 0 \to y$; $C_3 : x, y =$ constantes, $z : 0 \to z$. Entonces

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -\int (y^2z^3 - 6xz^2)dx + 2xyz^3dy + (3xy^2z^2 - 6x^2z)dz \\
&= -\int_{C_1}(0) - \int_{C_2}(0) - \int_{C_3}(3xy^2z^2 - 6x^2z)dz \\
&= -xy^2z^2 + 3x^2z^2.
\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7.52 *Se deja caer una bolita de masa m desde una altura h. Sobre la bolita, además del peso, actúa una fuerza resistiva proporcional a la velocidad de la forma* $\vec{F} = -k\dot{y}\hat{\jmath}$ *, calcule la rapidez de la bolita cuando ha transcurrido un tiempo* $t = m/k$.

Solución. Si el eje OY es hacia arriba entonces

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y,$$

para integrar con $y(0)=k$, $v_y(0)=0$, separe variables

$$\frac{dv_y}{g+\frac{k}{m}v_y}=-dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} t &= -\int_0^{v_y}\frac{dv_y}{g+\frac{k}{m}v_y} \\ &= -\frac{m}{k}\ln\frac{mg+kv_y}{mg}, \end{aligned}$$

y despejando

$$v_y=-mg\frac{1-e^{-\frac{kt}{m}}}{k},$$

para $t=m/k$ resulta

$$v_y=-\frac{mg}{k}(1-e^{-1}).$$

▲

Ejercicio 7.53 *Un cuerpo de masa* $4\,\mathrm{kg}$*, es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de* $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*. La fuerza resistente del aire es:* $\vec{F}=-\frac{3}{100}\vec{v}$ *(unidades en el Sistema Internacional). Calcule el tiempo que demora el cuerpo en alcanzar la altura máxima y el valor de la altura máxima.*

Solución. Similarmente al problema anterior

$$4\frac{dv_y}{dt}=-40-\frac{3}{100}v_y,$$

para integrar con $y(0)=0$, $v_y(0)=60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, separe variables e integre

$$\begin{aligned} \int_{60}^{v_y}\frac{dv_y}{10+\frac{3}{400}v_y} &= -t, \\ t &= -\frac{400}{3}\ln\left(\frac{4000+3v_y}{4180}\right), \end{aligned}$$

despejando

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t}-\frac{4000}{3}.$$

De aquí el tiempo para llegar a la altura máxima satisface

$$\frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t}-\frac{4000}{3}=0\Longrightarrow t=5.869\,\mathrm{s}.$$

La altura máxima será

$$y_{\text{máx}}=\int_0^{5.869}\left(\frac{4180}{3}e^{-\frac{3}{400}t}-\frac{4000}{3}\right)dt=174.8\,\mathrm{m}.$$

Capítulo 8

Soluciones ejercicios

8.1. Sistemas de Partículas

8.1.1. Resumen de fórmulas

Movimiento en un campo central de fuerza

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}.$$

El álgebra de esta materia puede resultar tediosa y muy repetida en diversos problemas, por lo cual se dan aquí las principales fórmulas para hacer referencias a ellas en las soluciones. En lo que sigue $K = GMm$ es la constante de la ley de Fuerza, no la confunda con la energía cinética

$$r = \frac{l_0^2}{\mu k}\frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)},$$

$$b = \frac{l_0^2}{\mu K}\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu F(\frac{1}{u})}{l_0^2 u^2},$$

$$l_0 = |\mu\vec{r} \times \vec{v}| = \mu r^2\dot{\theta},$$

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{\mu K^2},$$

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r},$$

Lanzamiento desde la superficie terrestre

Aquí preferimos usar M masa tierra, m masa proyectil o satélite

$$\begin{aligned} K &= GMm, \\ \mu &\simeq m. \end{aligned}$$

Si un proyectil se lanza de la superficie terrestre, formando un ángulo β con la horizontal, como se indica en la figura, que es materia de varios problemas, preferimos deducir aquí todas las relaciones.

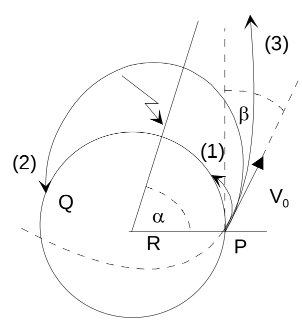


Figura 8.1:

Energía

$$E = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m(V_0^2 - V_e^2).$$

Momentum angular

$$l_0 = mRV_0 \cos\beta.$$

Velocidad de escape

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Excentricidad

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{m\mu(GMm)^2} \\ &= 1 + \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2 \cos^2\beta}{V_e^4}. \end{aligned}$$

Ecuación de la órbita

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{m(GMm)} \frac{1}{1 - e\cos(\theta - \alpha)} \\ r &= \frac{2V_0^2}{V_e^2} \frac{R\cos^2\beta}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Orientación α del semieje mayor (figura, caso (2))

Si $r = R$ en $\theta = 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2V_0^2}{V_e^2} \frac{\cos^2\beta}{1 - e\cos\alpha} \Longrightarrow \\ \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2}{V_e^2}\cos^2\beta}{\sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\frac{V_0^2}{V_e^2}\cos^2\beta}} \\ \sin\alpha &= \frac{2\frac{V_0^2}{V_e^2}\cos\beta\sin\beta}{\sqrt{1 - 4\frac{V_0^2}{V_e^2}(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\cos^2\beta}} \end{aligned}$$

Casos elípticos

Si $V_0 < V_e$ y $\beta > 0$ casos (1) y (2) de la figura, el proyectil cae de nuevo a la Tierra, y el alcance angular de P a Q está dado por

$$2\alpha$$

Alcance máximo

Deseamos obtener una expresión para el ángulo β de lanzamiento que da un alcance máximo para una rapidez inicial dada $V_0 < V_e$. L inclinación del semi eje mayor está dada por

$$\cos\alpha = \frac{1 - \frac{2V_0^2}{V_e^2}\cos^2\beta}{\sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\frac{V_0^2}{V_e^2}\cos^2\beta}}.$$

Sean, para simplificar la notación

$$\frac{V_0}{V_e} = \sin\varsigma, \quad \cos^2\beta = u$$

de modo que

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2u\sin^2\varsigma}{\sqrt{1 - 4u\cos^2\varsigma\sin^2\varsigma}}.$$

Es una buena tarea probar que hay un extremo de $\cos\alpha$ cuando

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\cos^2\varsigma} = \cos^2\beta \Longrightarrow \\ \cos\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varsigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{V_e^2}}} \end{aligned}$$

(Note que si V_0 es muy pequeño, el ángulo de disparo óptimo será $\beta = \pi/4$) Podemos entonces calcular para ese ángulo de disparo

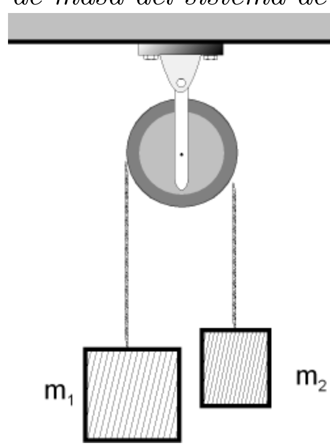
$$\begin{aligned} \cos\alpha_{\text{máx}} &= \frac{1 - 2u\sin^2\varsigma}{\sqrt{1 - 4u\cos^2\varsigma\sin^2\varsigma}} \\ &= \frac{\sqrt{(-1 + 2\cos^2\varsigma)}}{\cos^2\varsigma} \text{ si } \cos\varsigma > \sin\varsigma \end{aligned}$$

Esta última condición puede escribirse $V_0 < V_e\sqrt{2}$ y para este caso (más álgebra)

$$\sin\alpha_{\text{máx}} = \frac{\frac{V_0^2}{V_e^2}}{1-\frac{V_0^2}{V_e^2}} = \frac{V_0^2}{V_e^2 - V_0^2} \text{ si } V_0 < V_e\sqrt{2}$$

8.1.2. Problema resueltos sistema de partículas

Ejercicio 8.1 *La figura muestra una polea fija de masa despreciable y sin roce de la cual penden 2 partículas de masas m_1 y m_2 $(m_2 > m_1)$, unidas por una cuerda liviana e inextensible. Calcule la aceleración de cada partícula y la aceleración del centro de masa del sistema de partículas.*



Solución. Suponiendo que $m_2 > m_1$ el sistema se moverá en el sentido de los punteros del reloj y si T indica la tensión tendremos

$$\begin{aligned} m_2 g - T &= m_2 a_2, \\ T - m_1 g &= m_1 a_{1,} \end{aligned}$$

como $a_1 = a_2$ se tiene sumando

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a_2,$$

de donde sigue

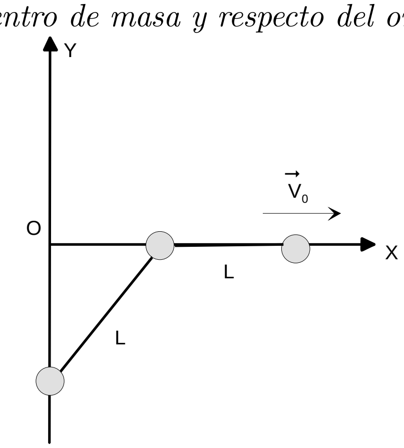
$$\vec{a}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\hat{\jmath},\ \ \vec{a}_2 = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g\hat{\jmath}.$$

La aceleración del centro de masa será

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{cm} &= \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} g\hat{\jmath} - \frac{m_2(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} g\hat{\jmath} \\
&= -\frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} g\hat{\jmath} \\
&= \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{g}.
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.2 *Tres partículas de igual masa m, unidas por barras rígidas de largo L y masa despreciable, están obligadas a moverse sobre los ejes tal como lo muestra la figura. Si la partícula de la derecha tiene la velocidad $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$, determine la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema respecto del centro de masa y respecto del origen O.*



Solución. Si θ indica el ángulo que la barra forma con la vertical, tenemos que

$$\begin{aligned}
x &= L\sin\theta, \\
y &= -L\cos\theta,
\end{aligned}$$

de donde derivando

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= L\dot{\theta}\cos\theta = v_0, \\
\dot{y} &= L\dot{\theta}\sin\theta = L\sin\theta\frac{v_0}{L\cos\theta} = v_0\tan\theta.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\vec{v}_{cm} &= \frac{2mv_0\hat{\imath} + mv_0 \tan\theta\hat{\jmath}}{3m}, \\ &= \frac{1}{3}(2v_0, v_0 \tan\theta).\end{aligned}$$

Las velocidades de las partículas son paralelas a los vectores posición, luego evidentemente

$$\vec{L}_0 = \vec{0}.$$

El vector posición del centro de masa es

$$\vec{r}_{cm} = \frac{mL\sin\theta\hat{\imath} + m(L + L\sin\theta)\hat{\imath} - mL\cos\theta\hat{\jmath}}{3m},$$

podemos finalmente calcular

$$\begin{aligned}M\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} &= \\ &= \frac{mLv_0}{3}(1 + 2\sin\theta, -\cos\theta) \times (2, \tan\theta) \\ &= \frac{1}{3}mLv_0\frac{\sin\theta + 2}{\cos\theta}\hat{k}.\end{aligned}$$

El momentum angular relativo al centro de masa se obtiene del teorema de Koenig

$$\vec{L}_0 = M\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm} = \vec{0},$$

de donde

$$\vec{L}_{cm} = -\frac{1}{3}mLv_0\frac{\sin\theta + 2}{\cos\theta}\hat{k}.$$

Nota : $\tan\theta + 2\sin\theta\tan\theta + 2\cos\theta = \frac{\sin\theta+2}{\cos\theta}$

EJERCICIO 8.3 *Las posiciones de dos partículas A y B de masa $m_a = 1\,\mathrm{kg}$ y $m_b = 2\,\mathrm{kg}$ son respectivamente $\vec{r}_a = (4 - t; 3t^2)$ y $\vec{r}_b = (5 - 2t - t^2; 10)$. Determine en $t = 4\,\mathrm{s}$ la fuerza neta exterior sobre el sistema de partículas, el momentum angular y torque respecto del origen del sistema de coordenadas.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(4-t;3t^2\right) &= \vec{F}_a, \\ 2\frac{d^2}{dt^2}(5-2t-t^2;10) &= \vec{F}_b, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= (0;6)\,, \\ \vec{F}_b &= (-4;0), \end{aligned}$$

la fuera neta será

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b = (-4;6)\,\mathrm{N}.$$

El momentum angular será

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \left(4-t;3t^2\right)\times(-1;6t) + 2(5-2t-t^2;10)\times(-2-2t;0) \\ &= (64t-3t^2+40)\hat{k} \end{aligned}$$

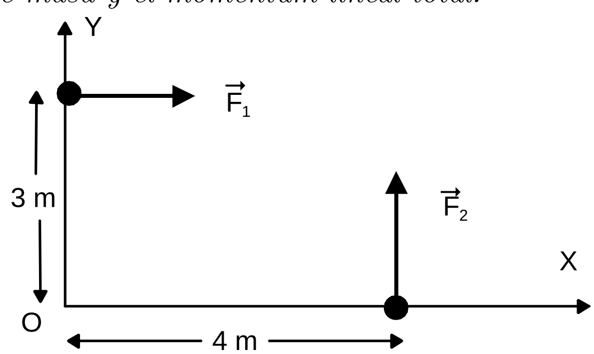
evaluando en $t = 4\,\mathrm{s}$

$$\vec{L}_0 = 248\hat{k}\,\mathrm{J\,s}.$$

El torque es la derivada del momentum angular, es decir

$$\vec{\tau}_0 = (64-6t)\hat{k} = 40\hat{k}\,\mathrm{J}$$

EJERCICIO 8.4 *La figura muestra un sistema formado por dos partículas cuyas masas son* $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$. *Las fuerzas netas que actúan sobre cada una de ellas respectivamente* $\vec{F}_1 = 8\hat{\imath}\,\mathrm{N}$ *y* $\vec{F}_2 = 6\hat{\jmath}\,\mathrm{N}$. *Inicialmente el sistema se encuentra en reposo. Calcule en función del tiempo las coordenadas del centro de masa y el momentum lineal total.*



Solución. Tenemos

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\vec{a}_{cm} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \\
\frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (8, 6), \\
16\vec{a}_{cm} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (8, 6).
\end{aligned}
$$

Integrando la segunda

$$\vec{P} = (8t, 6t).$$

Integrando la tercera dos veces

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{8}(4t, 3t),$$

$$\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{cm}(0) + \frac{1}{16}(4t^2, 3t^2),$$

donde la posición inicial del centro de masa es

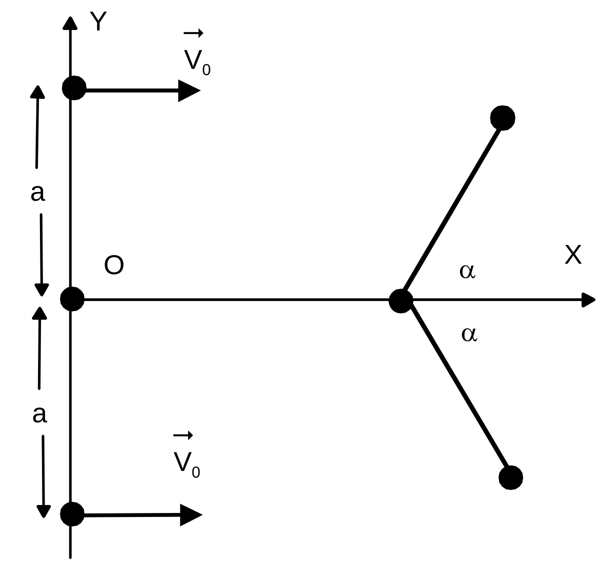
$$\vec{r}_{cm}(0) = \frac{10(0,3) + 6(4,0)}{16} = \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right),$$

finalmente

$$\vec{r}_{cm} = (\frac{3}{2} + \frac{1}{4}t^2, \frac{15}{8} + \frac{3}{16}t^2).$$

▲

Ejercicio 8.5 *Tres partículas de igual masa m descansan sobre una superficie horizontal lisa, unidas mediante cuerdas de largo a sin masa, ubicadas en la línea recta que la une tal como se muestra en la figura. Inicialmente, a las partículas de los extremos se les da una velocidad inicial perpendicular a la cuerda de magnitud V_0 mientras la partícula del centro continúa en reposo. Determine:*



a) La velocidad del centro de masa en cualquier instante,

b) La velocidad de las partículas en el instante que chocan las partículas extremas,

c) El momentum angular del sistema de partícula respecto al origen del sistema.

Solución. El momentum lineal en la dirección OX se conserva así como la energía cinética. Si $x_1 = x$ es la coordenada de la partícula central, tenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 = x + a\cos\alpha, \\ y_2 &= -y_3 = a\sin\alpha, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_3 = \dot{x} - a\dot{\alpha}\sin\alpha, \\ \dot{y}_2 &= -\dot{y}_3 = a\dot{\alpha}\cos\alpha, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} P_x &= m\dot{x} + 2m(\dot{x} - a\dot{\alpha}\sin\alpha) = 2mV_0, \\ K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2\times\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2a\dot{x}\dot{\alpha}\sin\alpha + a^2\dot{\alpha}^2) = mV_0^2. \end{aligned}$$

La velocidad del centro de masas en cualquier instante será,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{2mV_0}{3m}\hat{\imath} = \frac{2V_0}{3}\hat{\imath}.$$

Cuando chocan las partículas extremas, $\alpha = 0$ y entonces

$$\begin{aligned} 3\dot{x} &= 2V_0, \\ \frac{3}{2}\dot{x}^2 + a^2\dot{\alpha}^2 &= V_0^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{3}V_0, \\ a\dot{\alpha} &= -\sqrt{V_0^2 - \frac{3}{2}(\frac{2}{3}V_0)^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}V_0, \end{aligned}$$

de aquí sale que la velocidad de la partícula central es

$$\vec{v} = (\frac{2}{3}V_0, 0),$$

y las otras

$$\vec{v} = (\frac{2}{3}V_0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}V_0).$$

Por razones de simetría, $\vec{L}_0$ es evidentemente cero.

EJERCICIO 8.6 *Tres partículas de masa* $m_1 = 2\,\text{kg}$*,* $m_2 = 3\,\text{kg}$ *y* $m_3 = 5\,\text{kg}$*, se mueven bajo la influencia de un campo de fuerza de modo que sus posiciones relativas a un sistema de coordenadas son:*

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= 2t\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + t^2\hat{k}\,\text{m} \\ \vec{r}_2 &= (t+1)\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4\hat{k}\,\text{m} \\ \vec{r}_3 &= t^2\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + (2t-1)\hat{k}\,\text{m} \end{aligned}$$

Calcule:

a) El momentum angular total del sistema, *b) El torque total externo aplicado al sistema respecto del origen,*

c) El momento angular total y el torque respecto al centro de masa.

Solución. Similarmente

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= 2\hat{\imath} + 2t\hat{k},\\ \vec{v}_2 &= \hat{\imath} + 3\hat{\jmath},\\ \vec{v}_3 &= 2t\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 + m_3\vec{r}_3 \times \vec{v}_3\\ &= 2(2t\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + t^2\hat{k}) \times (2\hat{\imath} + 2t\hat{k}) +\\ &\quad 3((t+1)\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4\hat{k}) \times (\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) +\\ &\quad 5(t^2\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + (2t-1)\hat{k}) \times (2t\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k})\\ &= \left(31 - 12t, -12 - 10t + 6t^2, 21 + 5t^2\right).\end{aligned}$$

El segundo resultado sigue de

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = (-12, -10 + 12t, 10t)\,.$$

Necesitamos calcular

$$\begin{aligned}\vec{r}_{cm} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\\ &= \frac{2\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3}{10}\\ &= \frac{2(2t\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + t^2\hat{k}) + 3((t+1)\hat{\imath} + 3t\hat{\jmath} - 4\hat{k}) + 5(t^2\hat{\imath} - t\hat{\jmath} + (2t-1)\hat{k})}{10}\\ &= (\frac{7}{10}t + \frac{3}{10} + \frac{1}{2}t^2)\hat{\imath} + (-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}t)\hat{\jmath} + (\frac{1}{5}t^2 - \frac{17}{10} + t)\hat{k},\end{aligned}$$

entonces

$$\vec{v}_{cm} = (\frac{7}{10} + t)\hat{\imath} + (\frac{2}{5})\hat{\jmath} + (\frac{2}{5}t + 1)\hat{k},$$

entonces

$$\begin{aligned}\vec{L}_{cm} &= \vec{L}_0 - M\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm},\\ \vec{\tau}_{cm} &= \frac{d}{dt}\vec{L}_{cm}.\end{aligned}$$

(Trabajo para usted)

▲

Ejercicio 8.7 *Una granada inicialmente en reposo, estalla en 3 pedazos de masas m_1, m_2 y m_3 cuyas velocidades son respectivamente:*

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}, \\ \vec{v}_2 &= -5\hat{\imath} - 7\jmath - 8\hat{k}, \\ \vec{v}_3 &= -8\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k} \end{aligned}$$

Determine la relación entre sus masas.

Solución. Aquí $\vec{P}$ se conserva, luego

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0,$$

podemos igualar a cero las componentes obteniendo

$$\begin{aligned} 6m_1 - 5m_2 - 8m_3 &= 0, \\ 4m_1 - 7m_2 + 2m_3 &= 0, \\ 5m_1 - 8m_2 + m_3 &= 0, \end{aligned}$$

si eliminamos m_3 entre la primera y la segunda

$$22m_1 - 33m_2 = 0 \Longrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2},$$

si eliminamos m_1 entre la segunda y la tercera

$$-3m_2 + 6m_3 = 0 \Longrightarrow \frac{m_2}{m_3} = 2,$$

luego

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 2 : 1.$$

▲

Ejercicio 8.8 *Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo 0 con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto 0, demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.*

Solución. Para cada partícula

$$m_i\vec{a}_i = -Km_i\vec{r}_i$$

es decir que cada partícula se mueve de acuerdo a

$$\vec{a}_i = -K\vec{r}_i.$$

Pero

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{M}$$

de modo que si sumamos todas las ecuaciones, obtenemos

$$M\vec{a}_{CM} = -KM\vec{r}_{CM}$$

o sea

$$\vec{a}_{CM} = -K\vec{r}_{CM}$$

misma ecuación de movimiento que la de cada partícula.

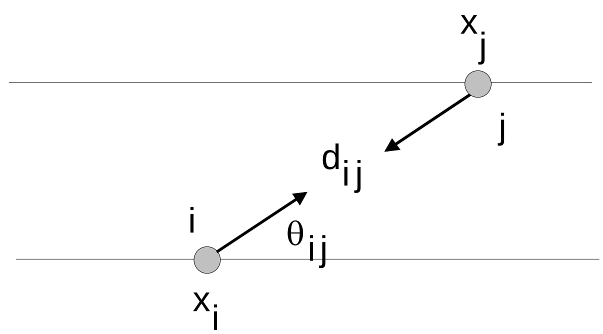
▲

EJERCICIO 8.9 *Un conjunto de partículas de masas m, puede deslizar libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.*

Solución. Supongamos que las correderas están en dirección OX y considere dos de ellas de índices i, j. La ecuación de movimiento de la m_i en la dirección OX será

$$m_i\ddot{x}_i = \sum_{j\neq i} Km_im_jd_{ij}\cos\theta_{ij}$$

donde d_{ij} indica la distancia entre las de índice i, j, y θ_{ij} es el ángulo que forma la línea de la fuerza con el eje OX.



Entonces podemos escribir

$$\ddot{x}_i = Km\sum_{j\neq i}(x_j - x_i).$$

Por otro lado la posición X del centro de masas es

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{\sum x_i}{N},$$

entonces incluyendo $i = j$ se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= Km\sum_{j}(x_j - x_i) \\ &= KmNx_{CM} - KmNx_i, \end{aligned}$$

es decir

$$\ddot{x}_i + KmN(x_i - x_{CM}) = 0,$$

prueba lo pedido, porque

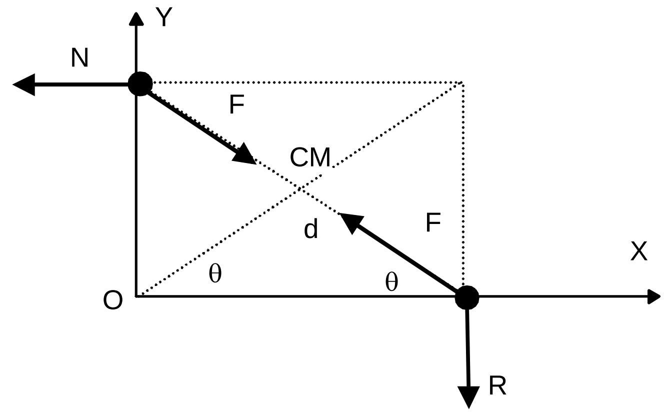
$$\omega^2 = KmN$$

es independiente de i.

▲

Ejercicio 8.10 *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

Solución. Considere la figura. Sea $x = d\cos\theta$, $y = d\sin\theta$ entonces tenemos por aplicación de la segunda Ley de Newton que



$$m\ddot{x} = -F\cos\theta = -\frac{k}{d^2}\cos\theta = -\frac{k}{d^3}x$$
$$m\ddot{y} = -F\sin\theta = -\frac{k}{d^2}\sin\theta = -\frac{k}{d^3}y$$

por otro lado $x_{CM} = \frac{x}{2}$ y $y_{CM} = \frac{y}{2}$, $r_{CM} = \frac{d}{2}$ entonces podemos escribir

$$\ddot{x}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}x_{CM},$$
$$\ddot{y}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}y_{CM},$$

que equivale a

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}\vec{r}_{CM}.$$

O sea el centro de masas es atraído hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen. Problema que se estudia en campo central de fuerzas y se demuestra allí que la trayectoria es necesariamente una sección cónica.

Ejercicio 8.11 *Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0. Demuestre que si las partículas se* *atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

Solución. Con una figura análoga a la del problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -F\cos\theta = -F\frac{x}{d} \\ m_2\ddot{y} &= -F\sin\theta = -F\frac{y}{d} \end{aligned}$$

de donde

$$m_1\ddot{x}y - m_2\ddot{y}x = 0.$$

Como las masas son iguales entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \ddot{y}x &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\dot{x}y - \dot{y}x$ es constante e igual a cero porque las partículas partieron del reposo, o sea

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 0,$$

o bien

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}$$

que puede integrarse dando

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln c + \ln x, \\ y &= cx \end{aligned}$$

o sea si $x = 0$ entonces simultáneamente $y = 0$.

▲

EJERCICIO 8.12 *Dos partículas de masa m cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo K la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:*

$$\begin{aligned} &x(0) = a, \quad y(0) = a, \\ &\dot{x}(0) = -V_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{aligned}$$

a) Determine $x(t)$, $y(t)$ y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.

Solución. Similarmente tendremos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -Kd\cos\theta = -Kx \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -Fd\sin\theta = -Ky \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ y(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t, \\ \dot{x}(t) &= \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t), \\ \dot{y}(t) &= \omega(-C\sin\omega t + D\cos\omega t) \end{aligned}$$

y colocando las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} a &= A, \\ a &= C, \\ -V_0 &= \omega B, \\ 0 &= \omega D \end{aligned}$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t - \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t, \\ y(t) &= a\cos\omega t. \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t - \frac{V_0}{2\omega}\sin\omega t, \\ y_{CM} &= \frac{y}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t, \end{aligned}$$

de donde debemos eliminar t, obteniendo

$$x_{CM} = y_{CM} - \frac{V_0}{2\omega}\sqrt{1 - \left(\frac{2y_{CM}}{a}\right)^2},$$

que se puede escribir así

$$y^2(1 + (\frac{V_0}{a\omega})^2) - 2yx + x^2 = (\frac{V_0}{2\omega})^2.$$

Esto es se trata de una elipse.

▲

Ejercicio 8.13 *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante k y largo natural a. Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad V_0 perpendicular a la línea que une las partículas. Determine V_0 si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es 2a.*

Solución. Mirado desde el centro de masas, que por viajar a velocidad constante $v_G = \frac{1}{2}V_0$ es un sistema inercial, tenemos que las partículas al comienzo y al final (una vez que las oscilaciones terminan) giran en circunferencias alrededor de el. Así al comienzo

$$\begin{aligned} L_G &= m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} + m\frac{1}{2}V_0\frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{2}mV_0 a. \end{aligned}$$

Al final, si V son las rapideces respecto a G, entonces

$$L_G = mVa + mVa = 2mVa.$$

Como el momentum angular es constante

$$V = \frac{1}{4}V_0.$$

Además, para el movimiento circular de cada partícula

$$m\frac{V^2}{a} = K(2a - a),$$

luego

$$V = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$$

y finalmente

$$V_0 = 4V = 4a\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

▲

Ejercicio 8.14 *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta, igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos "a". La partícula del medio está inicialmente está en reposo, y a las partículas externas se les da una velocidad V_0 perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

Solución. Al partir si x es la dirección perpendicular a la línea que une las partículas entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 2mV_0 \\ K &= \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 \\ &= mV_0^2. \end{aligned}$$

Justo antes del choque, Las tres partículas tienen la misma componente de velocidad en x, llamémosla u, y dos partículas tienen la misma rapidez v en el eje y entonces

$$\begin{aligned} P_x &= 3mu \\ K &= 3\frac{1}{2}mu^2 + 2\frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

Conservación de P_x y K implica

$$u = \frac{2}{3}V_0$$

y

$$\frac{3}{2}(\frac{2}{3}V_0)^2 + v^2 = V_0^2$$

entonces

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{3}V_0.$$

▲

8.1.3. Choques

Ejercicio 8.15 *Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo e el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} Mv'_M + mv'_m &= mV, \\ v'_M - v'_m &= eV \end{aligned}$$

de donde se despeja

$$v'_m = -V\frac{Me - m}{M + m}, \quad v'_M = Vm\frac{1 + e}{M + m}.$$

▲

EJERCICIO 8.16 *Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo $e = 0$ el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

Solución. Es igual pero con $e = 0$ de manera que

$$v'_m = V\frac{m}{M + m}, \quad v'_M = V\frac{m}{M + m}.$$

▲

EJERCICIO 8.17 *Una partícula de masa m se suelta desde una altura h y los choques que ocurren contra el suelo son con coeficiente de restitución e. Determine el tiempo total que demoran en ocurrir todos los choques.*

Solución. Si la partícula se suelta desde una altura h_1

$$\begin{aligned} y &= h_1 - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y &= -gt \end{aligned}$$

llega al suelo en un tiempo $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ con rapidez $-g\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = -\sqrt{2gh_1}$ y rebota con velocidad $e\sqrt{2gh_1}$. Ahora con esa velocidad inicial de subida llegará hasta una altura $gh_2 = \frac{1}{2}e^2 2gh_1$ o sea

$$h_2 = e^2 h_1.$$

O sea la secuencia de alturas que ocurren es h_1, e^2h_1, $e^4h_1 \cdots$ y los tiempos empleados son $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, $t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$, $t_3 = 2\sqrt{\frac{2h_3}{g}} \cdots$ y el tiempo total será

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 2\sqrt{h_3} + \cdots\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h_1} + 2e\sqrt{h_1} + 2e^2\sqrt{h_1} + \cdots\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(1 + 2e + 2e^2 + \cdots\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(1 + \frac{2e}{1-e}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.18 *Respecto a la situación del problema anterior, determine la distancia total recorrida por la partícula.*

Solución. La distancia total recorrida d será

$$d = h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \cdots$$

esto es

$$\begin{aligned} d &= h_1 + 2e^2h_1 + 2e^4h_1 \cdots \\ d &= h_1(1 + \frac{2}{1-e^2}). \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.19 *Una partícula de masa $m = 1\,\text{kg}$ está en reposo mientras que otra de masa $m = 3\,\text{kg}$ se acerca con rapidez $5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ por la izquierda y la choca con coeficiente de restitución $e = 0{,}5$. La partícula que estaba en reposo se coloca en movimiento y choca frontalmente contra una pared fija con coeficiente de restitución $e = 1$, devolviéndose. Determine las velocidades finales una vez que todos los choques terminen.*

Solución. $m_1 = 3$, $v_1 = 5$, $m_2 = 1$, $v_2 = 0$, $e = 0{,}5$. De las fórmulas resultará

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = 5.625 \\ v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = 3{,}125 \end{aligned}$$

la partícula (2) choca con la pared y se devuelve con rapidez $v_2'' = -5{,}625$. Tenemos un nuevo choque donde ahora las velocidades antes del segundo choque entre las partículas son $v_1 = 3{,}125$, $v_2 = -5{,}625$, $e = 0{,}5$. Así resultarán

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = 4.21875 \\ v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = -0.15625 \end{aligned}$$

habrá un tercer choque entre ellas donde inicialmente $v_1 = -0{,}15625$, $v_2 = -4{,}21875$, resultando finalmente

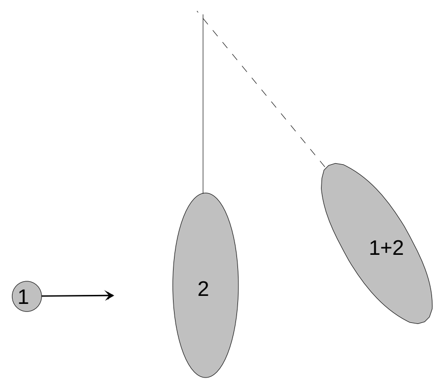
$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = 0.35 \\ v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 e(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = -1.68 \end{aligned}$$

La partícula (2) chocará nuevamente con la pared pero no pilla más a la partícula (1), de modo que las velocidades finales son

$$\begin{aligned} v_2' &= -0.35\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ v_1' &= -1.68\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.20 *Una partícula de masa m (una bala) se acerca horizontalmente con rapidez V y se incrusta en un saco de arena de masa M que cuelga de un cordel de longitud L. Por efecto del choque el sistema "saco + bala", sube una altura h, respecto a su altura inicial. Determine en términos de m, M, L, h la velocidad de la bala.*



Solución. El saco más bala adquiere una velocidad V' determinada por

$$\begin{aligned} mV &= (m+M)V' \\ V' &= \frac{m}{m+M}V. \end{aligned}$$

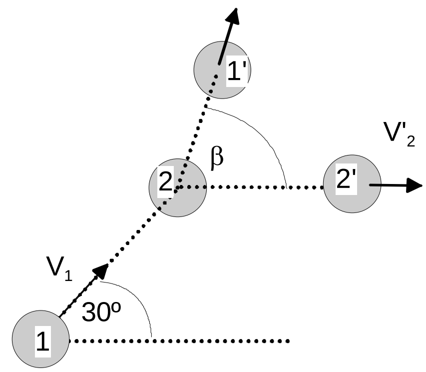
Por conservación de energía del movimiento siguiente se tiene

$$\frac{1}{2}V'^2 = gh$$

o sea

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+M}V &= \sqrt{2gh} \\ V &= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 8.21 *La figura muestra el choque de dos bolas de billar. La bola 2 se encuentra inicialmente en reposo y la bola 1, antes del choque, tiene una velocidad de V_1 en la dirección que se indica. Después del choque la bola 2 sale en la dirección indicada con una rapidez de V_2'. Determine la mínima rapidez posible V_2'.*



Solución. La dirección normal al choque es la dirección de $\vec{V}_2'$, luego conservación de la cantidad de movimiento en las direcciones $\vec{N}$ y $\vec{T}$ dan $(m_1 = m_2)$

$$\begin{aligned} V_1 \cos 30 &= V_2' + V_1' \cos \beta, \\ V_1 \sin 30 &= V_1' \sin \beta, \end{aligned}$$

y para el coeficiente de restitución

$$V_2' - V_1' \cos \beta = e(V_1 \cos 30)$$

si las reordenamos

$$\begin{aligned} V_2' + V_1' \cos \beta &= \frac{1}{2} V_1 \sqrt{3}, \\ V_1' \sin \beta &= \frac{1}{2} V_1 \\ V_2' - V_1' \cos \beta &= \frac{1}{2} e V_1 \sqrt{3}. \end{aligned}$$

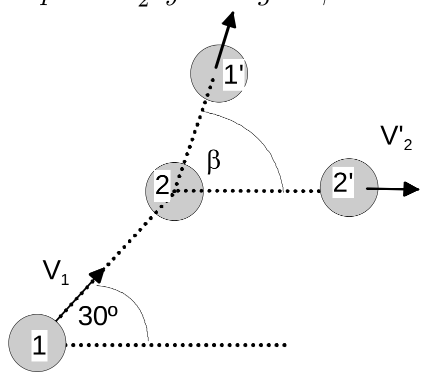
Sumamos la primera y la tercera y se obtiene

$$V_2' = \frac{1}{4} V_1 \sqrt{3}\,(1 + e)$$

de donde el mínimo que corresponde a $e = 0$ es

$$(V_2')_{\text{mín}} = \frac{1}{4} V_1 \sqrt{3}$$

Ejercicio 8.22 *Respecto a la situación del problema anterior si* $V_1 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *y* $e = 0{,}5$ *determine la rapidez* V_2' *y el ángulo* β *.*



Solución. Las ecuaciones son las mismas.

$$\begin{aligned} V_2' + V_1' \cos\beta &= \frac{1}{2} V_1 \sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \\ V_1' \sin\beta &= \frac{1}{2} V_1 = 2, \\ V_2' - V_1' \cos\beta &= \frac{1}{2} e V_1 \sqrt{3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$V_2' = \frac{1}{4} V_1 \sqrt{3}\,(1+e) = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Restamos la primera menos la tercera y se obtiene

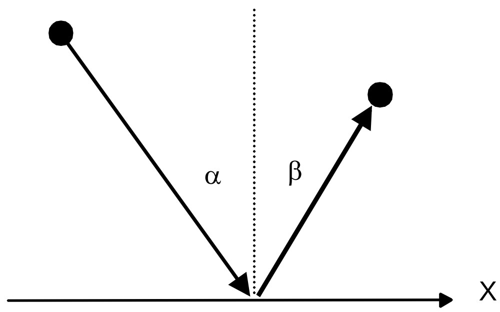
$$V_1' \cos\beta = \frac{1}{4}(1-e) V_1 \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

dividimos por la segunda

$$\begin{aligned} \cot\beta &= \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \beta &= 66.59^o. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 8.23 *Una pelota de* $0{,}5\,\mathrm{kg}$ *incide sobre una superficie horizontal rígida con una rapidez de* $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *en un ángulo de* $\alpha = 60^o$ *con la vertical, ver figura. Si el coeficiente de restitución de la pelota con el suelo es* $e = 0{,}6$, *determine el valor absoluto del cambio de momentum lineal experimentado por la tierra en el intervalo de tiempo que dura el choque y el ángulo β con que rebota la pelota.*



Solución. El coeficiente de restitución es

$$e = \frac{V' \cos\beta}{V \cos\alpha} \Longrightarrow 0{,}6 = \frac{V' \cos\beta}{50 \cos 60},$$

y supondremos que la componente tangencial es conservada es decir

$$V' \sin\beta = 50 \sin 60,$$

de aquí resulta

$$\tan\beta = \frac{50 \sin 60}{0{,}6 \times 50 \cos 60} \Longrightarrow \beta = 70.\,891^o.$$

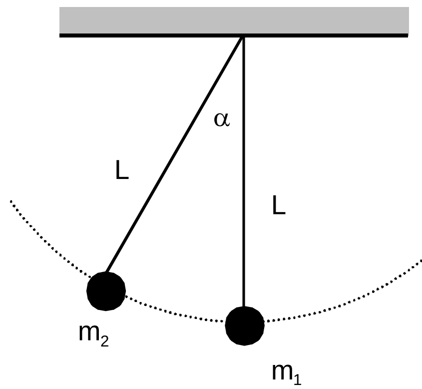
El cambio de la cantidad de movimiento de la pelota será de magnitud

$$\Delta P = m(V \cos\alpha + V' \cos\beta) = 20{,}0\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}},$$

igual al cambio del momentum de la Tierra.

▲

EJERCICIO 8.24 *Una esfera de masa m_1, en reposo, cuelga de una cuerda inextensible de largo L. Otra esfera masa m_2, unida a una cuerda de igual longitud, se suelta del reposo como se muestra en la figura. Determine en términos de m_1, m_2, l y la altura a que vuelve a subir m_2 respecto a la posición inicial de m_1 si el choque es: (a) elástico (b) plástico y (c) inelástico con coeficiente de restitución e.*



Solución. Sea α el ángulo inicial que forma la cuerda con la vertical, conservación de energía da la rapidez de m_2 justo antes de chocar

$$v_2 = \sqrt{2g(L - L\cos\alpha)}.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} m_2 v_2 &= m_2 v_2' + m_1 v_1', \\ v_1' - v_2' &= e(v_2), \end{aligned}$$

de donde

$$v_2' = -v_2 \frac{m_1 e - m_2}{m_2 + m_1}$$

luego subirá una altura dada por

$$\begin{aligned} h &= \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{1}{2g} v_2^2 (\frac{m_1 e - m_2}{m_2 + m_1})^2 \\ &= (L - L\cos\alpha)(\frac{m_1 e - m_2}{m_2 + m_1})^2. \end{aligned}$$

Usted puede escribir lo que ocurre si $e = 0$, $e = 1$.

▲

Ejercicio 8.25 *Una partícula de masa m_1 y velocidad $\vec{v}_1$ choca con otra partícula de masa m_2 en reposo. El choque no es elástico de modo que $0 < e < 1$. Después del choque la masa m_1 se mueve perpendicularmente a la dirección de incidencia. Si Q es la energía disipada durante el choque y K_1*

la energía cinética de m_1 antes del choque, demostrar que la energía cinética K_1' de m_1 después del choque es:

$$K_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left[K_1\frac{(m_2 - m_1)}{m_2} - Q\right]$$

Determine además, el calor disipado Q en función del coeficiente de restitución e.

Solución. Sean $\vec{v}_1 = v_1\hat{\imath}$, $\vec{v}_1' = v_1'\hat{\jmath}$, $\vec{v}_2' = v_2'\hat{N}$, entonces

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2 v_2'\hat{N},$$

La energía cinética disipada durante el choque será

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - (\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2) \\ &= K_1 - (K_1' + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2) \end{aligned}$$

pero

$$v_2'^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_1^1)^2,$$

como los vectores están a 90^o, entonces

$$\begin{aligned} v_2'^2 &= \frac{m_1^2}{m_2^2}(v_1^2 + v_1'^2) \\ &= \frac{m_1^2}{m_2^2}(\frac{2K_1}{m_1} + \frac{2K_1'}{m_1}), \end{aligned}$$

entonces Q se reduce a

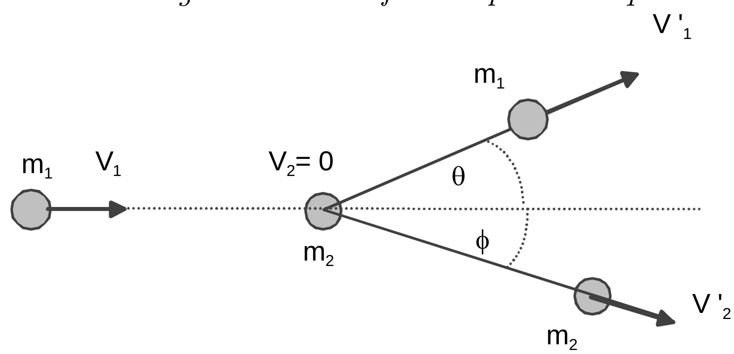
$$\begin{aligned} Q &= K_1 - K_1' - \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}(\frac{2K_1 + 2K_1'}{m_1}), \\ Q &= K_1 - K_1' - \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}(2K_1 + 2K_1'), \end{aligned}$$

de donde

$$K_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left[K_1\frac{(m_2 - m_1)}{m_2} - Q\right]$$

▲

EJERCICIO 8.26 *Una partícula (2) de masa m está en reposo y otra de la misma masa (1) se acerca con rapidez V y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en $\theta = 30^o$ respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución $e < 1$ determine el ángulo ϕ de desviación de la partícula incidente. Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.*



Solución. Sean $\theta = 30^o$ y ϕ por determinar, los ángulos en que se desvían las partículas respecto a la dirección de incidencia. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
v'_{1n} + v'_{2n} &= v_{1n} + v_{2n} \\
v'_{1t} + v'_{2t} &= v_{1t} + v_{2t} \\
v'_{2n} - v'_{1n} &= e(v_{1n} - v_{2n}) \\
v'_{2t} - v'_{1t} &= v_{2t} - v_{1t}
\end{aligned}$$

pero aquí $\vec{v}_2$ es normal, luego $v'_{2t} = 0$ y $v_{2n} = v_{2t} = 0$, luego

$$\begin{aligned}
v'_{1n} + v'_{2n} &= v_{1n} \\
v'_{1t} &= v_{1t} \\
v'_{2n} - v'_{1n} &= e(v_{1n}) \\
-v'_{1t} &= -v_{1t}
\end{aligned}$$

pero $v'_{1n} = v'_1 \cos(30 + \phi)$, $v'_{1t} = v'_1 \sin(30 + \phi)$, $v_{1n} = V \cos 30$, $v_{1t} = V \cos \phi$ de modo que

$$\begin{aligned}
v'_1 \cos(30 + \phi) + v'_{2n} &= V \cos 30 \\
v'_{2n} - v'_1 \cos(30 + \phi) &= eV \cos 30 \\
v'_1 \sin(30 + \phi) &= V \cos \phi
\end{aligned}$$

restando las dos primeras

$$\begin{aligned} 2v_1' \cos(30+\phi) &= (1-e)V\cos 30 \\ v_1' \sin(30+\phi) &= V\cos\phi \end{aligned}$$

y dividiendo

$$\cot(30+\phi) = \frac{(1-e)}{2}\frac{\cos 30}{\cos\phi}$$

ecuación que determina ϕ.

▲

EJERCICIO 8.27 *Demuestre que en el choque lateral y elástico de dos partículas de la misma masa una de las cuales estaba en reposo, los ángulos en que se desvían las partículas respecto a la dirección de incidencia de la móvil, suman 90 grados, es decir que $\theta+\phi=\pi/2$.*

Solución. De un problema anterior tenemos

$$\begin{aligned} v_{1n}' + v_{2n}' &= v_{1n} \\ v_{1t}' &= v_{1t} \\ v_{2n}' - v_{1n}' &= e(v_{1n}) \end{aligned}$$

pero si $e = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} v_{1n}' + v_{2n}' &= v_{1n} \\ v_{2n}' - v_{1n}' &= v_{1n} \end{aligned}$$

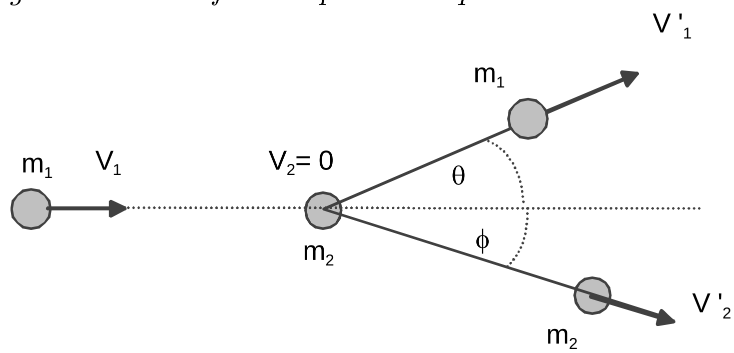
de donde

$$v_{1n}' = 0$$

es decir $\vec{v}_1'$ es tangente, y por lo tanto está a 90^o de $\vec{v}_2'$ que es normal.

▲

EJERCICIO 8.28 *Una partícula (2) de masa m_2 está en reposo y otra de masa m_1 (1) se acerca con rapidez V_1 y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en un ángulo θ respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución es $e<1$ determine la suma $\theta+\phi$ en términos de m_1, m_2, e y θ. Suponga que la velocidad* *relativa tangencial no es afectada por el choque.*



Solución. La dirección normal es la dirección de v_2' de manera que las ecuaciones serán

$$\begin{aligned} m_1V_1\cos\theta &= m_2V_2' + m_1V_1'\cos(\theta+\phi), \\ m_1V_1\sin\theta &= m_1V_1'\sin(\theta+\phi), \\ eV_1\cos\theta &= V_2' - V_1'\cos(\theta+\phi). \end{aligned}$$

Multiplicamos la tercera por m_2 y restamos con la primera

$$(m_1 - m_2e)V_1\cos\theta = (m_1+m_2)V_1'\cos(\theta+\phi),$$

dividimos por la tercera

$$(m_1 - m_2e)\cot\theta = (m_1+m_2)\cot(\theta+\phi),$$

de donde

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{(m_1-m_2e)}{(m_1+m_2)}\tan\theta.$$

▲

8.1.4. Masa variable

Ejercicio 8.29 *Una gota de agua de masa* $0{,}1\,\mathrm{g}$ *se deja caer desde cierta altura en un ambiente de vapor de agua. El vapor de agua se condensa en ella a razón constante de* $0{,}001\,\mathrm{g\,s^{-1}}$*. Considerando en reposo el vapor, determine la rapidez de la gota al cabo de* $10\,\mathrm{s}$*.*

Solución. La masa de la gota en función del tiempo y en gramos será

$$m(t) = 0{,}1 + 0{,}001t.$$

Si el agua que se condensa tiene velocidad nula ($u = 0$), entonces

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt} \Longrightarrow \\ mg &= \frac{d}{dt}mv, \end{aligned}$$

que puede ser integrada

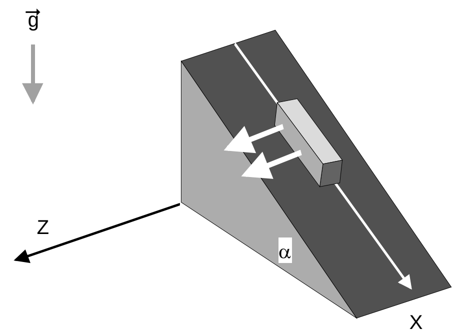
$$\begin{aligned} mv &= g\int_0^t mdt, \\ v(t) &= \frac{g}{m}\int_0^t mdt \\ &= \frac{g}{0{,}1 + 0{,}001t}\int_0^t (0{,}1 + 0{,}001t)dt \\ &= \frac{10\,(0{,}1t + 0{,}000\,5t^2)}{0{,}1 + 0{,}001\,t} \end{aligned}$$

y cuando $t = 10\,\mathrm{s}$

$$v = 95.\,455\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

▲

EJERCICIO 8.30 *Un carro con arena de masa* $100\,\mathrm{kg}$ *parte del reposo rodando sobre rieles inclinados en* $\alpha = 30^o$ *respecto de la horizontal. Debido a cierto dispositivo, del carro sale un chorro de arena a una tasa constante de* $2\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ *con una velocidad relativa al carro de* $1\ \hat{k}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *como se muestra en la figura. Despreciando efectos disipativos, determine en* $t = 10\,\mathrm{s}$ *la fuerza neta que actúa sobre el sistema.*



Solución. En la dirección del movimiento, eje X

$$F_x = mg\sin\alpha = (m(0) - \lambda t)g\sin\alpha$$

además

$$N_z = -u_z\frac{dm}{dt} = u_z\lambda = 2\,\mathrm{N}.$$

En $t = 10\,\mathrm{s}$

$$F_x = (100 - 2\times 10)10\sin 30 = 400\,\mathrm{N},$$

de manera que la fuerza neta será

$$\vec{F} = 400\hat{\imath} + 2\hat{k}.$$

Ejercicio 8.31 *Un cohete de lanzamiento vertical, sube con una aceleración de $g/7\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Si la velocidad relativa de los gases respecto del cohete es constante y de valor absoluto $800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, determine la masa del cohete en función del tiempo si su masa inicial, incluido el combustible es de $4000\,\mathrm{kg}$.*

Solución. La ecuación de movimiento OZ vertical hacia arriba es

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt},$$

donde $u - v = -800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $dv/dt = g/7$ de manera que

$$-10m = m\frac{10}{7} + 800\frac{dm}{dt},$$

o sea

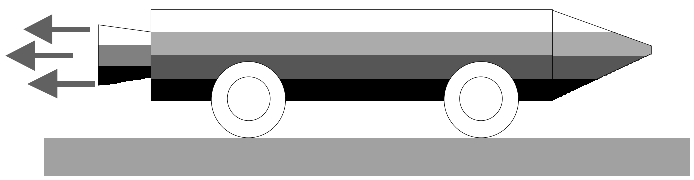
$$\frac{dm}{m} = -\frac{10 + \frac{10}{7}}{800} dt = -\frac{1}{70} dt,$$

que si se integra da

$$m(t) = m(0) e^{-\frac{t}{70}}.$$

▲

Ejercicio 8.32 *La figura muestra un móvil de masa* $1000\,\mathrm{kg}$*, inicialmente en reposo, que contiene además* $200\,\mathrm{kg}$ *de combustible. Su motor quema el combustible a razón constante* $10\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$*. El móvil puede desplazarse sobre una superficie horizontal lisa. Si la velocidad relativa del móvil respecto de los gases quemados es de* $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*, determine la velocidad del móvil transcurridos* $15\,\mathrm{s}$*.*



Solución. De los datos

$$m(t) = 1200 - 10t,$$

la ecuación para el eje del movimiento será

$$\begin{aligned} 0 &= m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt} \\ &= m\frac{dv}{dt} + 20\frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

o sea

$$dv = -20\frac{dm}{m},$$

integrando

$$v(t) = 20 \ln \frac{1200}{1200 - 10t},$$

y a los $15\,\mathrm{s}$

$$v = 2.67\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

▲

Ejercicio 8.33 *Un cohete de prueba de masa M_0, incluido el combustible, desliza por una rampla horizontal sin roce con una rapidez v_0. Con el fin de frenarlo, expulsa gases en sentido opuesto al movimiento a razón constante de $\sigma\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Si la rapidez del cohete en función del tiempo es:*

$$v = \frac{M_0 v_0 - K\sigma t}{(M_0 - \sigma t)}$$

calcule:

a) La magnitud de la velocidad absoluta con que se expelen los gases,

b) La distancia que recorre (horizontalmente) el cohete hasta detenerse.

Solución. Aquí

$$m = M_0 - \sigma t,$$

la ecuación de movimiento en el sentido del movimiento es

$$0 = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt},$$

pero

$$\begin{aligned} v &= \frac{M_0 v_0 - K\sigma t}{(M_0 - \sigma t)}, \\ mv &= M_0 v_0 - K\sigma t \end{aligned}$$

debemos despejar u

$$u = \frac{\frac{d}{dt}mv}{\frac{dm}{dt}} = \frac{-K\sigma}{-\sigma} = K.$$

Como sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M_0 v_0 - K\sigma t}{(M_0 - \sigma t)},$$

se detiene cuando

$$M_0 v_0 - K\sigma t = 0 \Longrightarrow t = \frac{M_0 v_0}{K\sigma},$$

y el espacio recorrido será

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{\frac{M_0 v_0}{K\sigma}} \frac{M_0 v_0 - K\sigma t}{(M_0 - \sigma t)} dt = \\ &= M_0 v_0 \frac{1 + (\frac{K}{v_0} - 1)\ln(1 - \frac{v_0}{K})}{\sigma} \end{aligned}$$

EJERCICIO 8.34 *Un balde de masa m está siendo tirado hacia arriba por una cuerda la cual ejerce una fuerza de magnitud constante F. Inicialmente el balde contiene una masa m_0 de agua, pero pierde agua a razón constante de $\sigma\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ de modo que después de cierto tiempo, el balde queda vacío.*

a) ¿Cuál es la velocidad del balde justo cuando queda vacío?

b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento y la energía mecánica del sistema?

Solución. Haremos la suposición que la velocidad relativa de salida del agua es cero, de manera que para la dirección vertical hacia arriba

$$\begin{aligned} F - mg &= m\frac{dv}{dt} - (u-v)\frac{dm}{dt} \\ F - mg &= m\frac{dv}{dt} = (m_0 + m_b - \sigma t)\frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

el balde queda vacío cuando $t = m_0/\sigma$ y la rapidez en ese instante será

$$v = \int_0^{m_0/\sigma} \left(\frac{Fdt}{(m_0 + m_b - \sigma t)} - gdt\right) = \frac{F}{\sigma}\ln\left(\frac{m_0 + m_b}{m_b}\right) - \frac{m_0 g}{\sigma}.$$

EJERCICIO 8.35 *Una cadena de densidad de masa $\sigma\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$, posee en un extremo un cuerpo de masa M, El sistema se encuentra apilado en el suelo. En el instante $t = 0$ se aplica una fuerza F vertical sobre el cuerpo de masa M para levantar el conjunto con velocidad constante $\vec{v}$. Calcule la magnitud de la fuerza cuando haya transcurrido un tiempo igual a $\frac{v}{2g}$.*

Solución. La masa del sistema será

$$m = M + \sigma y = M + \sigma v t,$$

donde y es la longitud de cadena levantada. Si v es constante

$$F - mg = -(u-v)\frac{dm}{dt},$$

pero u es la rapidez de los eslabones en el suelo, $u = 0$, de manera que

$$\begin{aligned} F &= mg + v\frac{dm}{dt}, \\ F &= (M + \sigma vt)g + v\sigma v, \end{aligned}$$

entonces cuando el tiempo sea

$$t = \frac{v}{2g},$$

resulta

$$\begin{aligned} F &= (M + \sigma v\frac{v}{2g})g + \sigma v^2 \\ &= \frac{3}{2}\sigma v^2 + Mg. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.36 *Una cadena de longitud L y masa total M se suspende verticalmente de modo que su extremo inferior está justo a nivel del suelo. Si la cadena se suelta, determine la reacción del suelo, mientras la cadena se deposita cayendo por su propio peso.*

Solución. Tenemos para el eje Y vertical

$$F_y = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt}.$$

Si tomamos el montón depositado como sistema, entonces los eslabones que se incorporan tienen una velocidad

$$u = -gt,$$

la masa $m(t)$ después de transcurrido un tiempo t será

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{L}\frac{1}{2}gt^2, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{M}{L}gt, \end{aligned}$$

y entonces, dado que $v = 0$ (trozo amontonado está en reposo)

$$N - mg = -u\frac{dm}{dt}$$

luego

$$\begin{aligned} N &= \frac{M}{L}\frac{1}{2}g^2t^2 + \frac{M}{L}g^2t^2 \\ &= \frac{3}{2}\frac{M}{L}g^2t^2. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 8.37 *Una cadena de longitud L y masa total M está amontonada sobre el suelo. Si la cadena se levanta de un extremo aplicando una fuerza constante F hacia arriba, determine la altura que sube la cadena en función del tiempo. Discuta sobre la altura máxima que alcanza la cadena, supuestamente muy larga de tal modo que siempre queda cadena depositada.*

Solución. La densidad lineal de masa de la cadena es

$$\lambda = \frac{M}{L}.$$

Sea y el trozo levantado en tiempo t. Tenemos

$$F - mg = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt},$$

siendo $u = 0$, $m = \lambda y$, de manera que

$$\begin{aligned} F - mg &= \frac{dmv}{dt} \\ F - \lambda yg &= \frac{d}{dt}(\lambda y\dot{y}). \end{aligned}$$

Para integrar, multiplique por ydy, resultando

$$Fydy - \lambda y^2gdy = \lambda y\dot{y}d(y\dot{y}) = \lambda d(\frac{1}{2}y^2\dot{y}^2),$$

que al ser integrada da

$$F\frac{y^2}{2} - \frac{\lambda gy^3}{3} = \frac{1}{2}\lambda y^2\dot{y}^2,$$

simplificando

$$F - \frac{2\lambda gy}{3} = \lambda\dot{y}^2,$$

o bien

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gy}{3}}$$

y finalmente

$$t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2gy}{3}}} = \frac{3\sqrt{\left(\frac{F}{\lambda}\right)} - \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{3F-2gy\lambda}{\lambda}\right)}}{g}$$

de donde se despeja

$$\begin{aligned} y &= \frac{6\sqrt{(\lambda F)} - \lambda g t}{6\lambda} t \\ &= \left(\sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \frac{gt}{6}\right) t. \end{aligned}$$

La altura máxima corresponde a $\dot{y} = 0$ lo que da

$$y_{\text{máx}} = \frac{3F}{2g\lambda}.$$

▲

NOTA 8.1 Usted puede extrañarse que el peso máximo levantado es mayor que la fuerza aplicada y además que $\dot{y}(0) = \sqrt{F/\lambda}$ a pesar que la cadena partió del reposo. Hay una singularidad pues en el instante inicial, una fuerza finita F es aplicada a un elemento infinitésimo de masa y ello provoca un cambio repentino de velocidad. Además por la inercia, la cadena sobrepasa la posición de equilibrio.

EJERCICIO 8.38 *Una gota esférica de agua atraviesa una capa de nube en reposo. Suponiendo que se condensa agua por unidad de tiempo sobre la gota, proporcionalmente a su superficie con constante de proporcionalidad K conocida, determine como crece el radio de la gota con el tiempo y como varía la altura de ella a medida que transcurre el tiempo.*

Solución. Sea R el radio de la gota, S su superficie, m su masa. Tenemos

$$\frac{dm}{dt} = KS.$$

Si ρ es la densidad tenemos

$$\begin{aligned} m &= \frac{4}{3}\pi R^3\rho, \\ \frac{dm}{dt} &= 4\pi R^2\frac{dR}{dt}\rho = K4\pi R^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dR}{dt} = \frac{K}{\rho},$$

si el radio inicial R_0 es despreciable, entonces

$$R(t) = \frac{Kt}{\rho}.$$

La ecuación de movimiento de la gota que cae, con $u = 0$, será

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mv),$$

donde la masa es conocida pues

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi(\frac{Kt}{\rho})^3\rho = \frac{4}{3}\pi\frac{K^3t^3}{\rho^2},$$

de manera que se puede integrar

$$mv = -\int_0^t \frac{4}{3}\pi\frac{K^3t^3}{\rho^2}gdt = -\frac{1}{3}\pi\frac{K^3}{\rho^2}gt^4,$$

de donde se obtiene

$$v = -\frac{1}{4}gt.$$

Así resulta finalmente

$$y = y(0) - \frac{1}{8}gt^2.$$

▲

EJERCICIO 8.39 *Un carrito, inicialmente de masa M y en reposo sobre un plano horizontal liso, comienza a moverse debido a que es impulsado por un chorro continuo de masa que se le va incorporando. Dichas masas salen desde el punto de partida (como de una ametralladora) con rapidez U_0 y a razón de λ unidades de masa por unidad de tiempo y se incrustan en el carrito cuando lo impactan. Determine la forma en que varían la aceleración, la velocidad y la posición del móvil con el tiempo.*

Solución. Supongamos que el carrito partió del origen con rapidez nula y sea x lo que recorre. La masa del carrito está dada por

$$\begin{aligned} m &= M + \frac{\lambda t}{U_0 t}(U_0 t - x) \\ &= M + \frac{\lambda}{U_0}(U_0 t - x). \end{aligned}$$

(El chorro de masa tiene una masa total λt y tendría una longitud $U_0 t$, pero todo lo que exceda x se ha incrustado).

La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} 0 &= m\frac{dv}{dt} - (U_0 - v)\frac{dm}{dt} \\ &= (M + \frac{\lambda}{U_0}(U_0 t - x))\frac{dv}{dt} - (U_0 - v)\frac{\lambda}{U_0}(U_0 - v). \end{aligned}$$

Preferible dejar una ecuación para la masa porque

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{\lambda}{U_0}(U_0 - v) \\ \ddot{m} &= -\frac{\lambda}{U_0}\frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &= -m\frac{U_0}{\lambda}\ddot{m} - \frac{U_0}{\lambda}\dot{m}^2, \\ m\ddot{m} + \dot{m}^2 &= 0, \end{aligned}$$

ecuación que es fácil integrar

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dm}\frac{1}{2}\dot{m}^2 &= -\dot{m}^2 \Longrightarrow \\ \frac{d\dot{m}^2}{\dot{m}^2} &= -2\frac{dm}{m}, \end{aligned}$$

de donde

$$\ln\frac{\dot{m}^2}{\lambda^2} = -2\ln\frac{m}{M}$$

o sea

$$\begin{aligned}\frac{\dot{m}}{\lambda} &= \frac{M}{m}, \\ mdm &= \lambda dt, \\ m^2 - M^2 &= 2\lambda t\end{aligned}$$

y luego

$$m = M + \frac{\lambda}{U_0}(U_0 t - x) = \sqrt{M^2 + 2\lambda t},$$

y así

$$\begin{aligned}x &= U_0 \frac{M + \lambda t - \sqrt{(M^2 + 2\lambda t)}}{\lambda}, \\ v &= \frac{dx}{dt} = U_0 \frac{\sqrt{(M^2 + 2\lambda t)} - 1}{\sqrt{(M^2 + 2\lambda t)}}.\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.40 *Un cohete de masa total M, de la cual fM, con f menor que uno, es de combustible, descansa verticalmente antes de encender los motores. Si se encienden los motores, que arrojan masa a razón constante σ ($\sigma = -dm/dt$) con rapidez relativa al cohete de magnitud U_0, establezca la condición que debe cumplirse para que el cohete comience a despegar de inmediato. Para este caso, determine la máxima altura que alcanza, suponiendo aceleración de gravedad constante y despreciando el roce con el aire.*

Solución. Tenemos

$$m(t) = M - \sigma t.$$

Si el cohete no ha despegado, existe una reacción normal en el suelo y además la velocidad es nula. Entonces

$$\begin{aligned}N - mg &= -(u - v)\frac{dm}{dt} \\ &= -(-U_0)(-\sigma)\end{aligned}$$

o sea

$$N = mg - U_0 \sigma.$$

Si queremos que el cohete despegue en $t = 0$, debe ser $N = 0$ en ese instante lo que lleva a

$$U_0\sigma = Mg.$$

Si se cumple, entonces el cohete acelera siendo ahora

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - (-U_0)(-\sigma),$$

o sea

$$m\frac{dv}{dt} = Mg - mg,$$

con $m = M - \sigma t$ de lo cual

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Mg}{M - \sigma t} - g,$$

que puede integrarse

$$v(t) = \int_0^t \frac{Mg}{M - \sigma t} dt - gt = \frac{Mg}{\sigma} \ln \frac{M}{M - \sigma t} - gt,$$

siendo esto válido hasta

$$t = \frac{fM}{\sigma},$$

para ese tiempo

$$v = gM\frac{f - \ln(1 - f)}{\sigma}.$$

Después sigue con la aceleración de gravedad y se deja para el lector su continuación.

▲

EJERCICIO 8.41 *Una cadena de largo total M y longitud L, flexible, es sostenida colgando de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo. Si el extremo superior de la cadena se suelta, determine la reacción del suelo contra la parte depositada, en función del tiempo.*

Solución. Sea y la distancia recorrida por el extremo superior y el sistema de mas variable es el montón depositado. Como eslabones van en caída libre

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2, \\ u &= -gt, \\ m &= \frac{1}{2}gt^2\frac{M}{L}, \\ \frac{dm}{dt} &= gt\frac{M}{L} \end{aligned}$$

luego, si R es la reacción

$$R - mg = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dm}{dt}, \quad v = 0, \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} R &= mg - u\frac{dm}{dt} \\ &= \frac{1}{2}g^2t^2\frac{M}{L} + g^2t^2\frac{M}{L} = \frac{3}{2}\frac{M}{L}g^2t^2. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 8.42 *Una cadena flexible tiene masa total M y longitud L. La cadena está inicialmente amontonada en el suelo. Una cuerda se hace pasar sobre una polea lisa, uno de los extremos unido a un extremo de la cadena y el otro extremo de la cuerda a un partícula de masa M. Si la partícula se suelta partiendo del reposo*

a) escriba la ecuación de movimiento para el extremo de la cadena.

b) determine la rapidez del extremo de la cadena en función de su posición.

Solución. Sea y la longitud levantada por la tensión T producida por la partícula. Tenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{L}y, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{M}{L}\dot{y}, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} T - mg &= m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}, \\ Mg - T &= M\frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

sumando las dos

$$\begin{aligned} Mg - mg &= (M+m)\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}, \\ Mg - \frac{M}{L}yg &= (M + \frac{M}{L}y)\frac{dv}{dt} + \frac{M}{L}\dot{y}^2, \end{aligned}$$

o sea la ecuación de movimiento es

$$gL - gy = (L+y)\ddot{y} + \dot{y}^2.$$

Para integrarla hay que hacer algún truco. Como usted sabe

$$\ddot{y} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\dot{y}^2,$$

entonces multiplique por $L + y$

$$g(L^2 - y^2) = (L+y)^2\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\dot{y}^2 + (L+y)\dot{y}^2,$$

que es la derivada de un producto

$$g(L^2 - y^2) = \frac{d}{dy}(L+y)^2\frac{1}{2}\dot{y}^2,$$

como inicialmente $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ integramos

$$(L+y)^2\frac{1}{2}\dot{y}^2 = g(L^2 y - \frac{y^3}{3})$$

y finalmente

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2g(L^2 y - \frac{y^3}{3})}{(L+y)^2}}.$$

▲

8.1.5. Campo central. Orbitas.

Note que en problemas donde una masa m es mucho menor que la del otro cuerpo M se ha tomado la masa reducida $\mu \simeq m$.

EJERCICIO 8.43 *Un satélite de masa m describe órbitas circulares alrededor de la tierra, a una distancia $r = 2R$ del centro de fuerza. Determine en función de G, M y R: a) la rapidez del satélite, b) su período de revolución, c) la aceleración de gravedad que actúa sobre el satélite y compárela con el valor g en la superficie terrestre.*

Solución. Para órbitas circulares

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{2R}}.$$

Su periodo de revolución será

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}.$$

La aceleración de gravedad a esa altura será

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{4R^2},$$

mientras que a nivel del suelo

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}.$$

▲

EJERCICIO 8.44 *Calcule la rapidez mínima con que debe lanzarse verticalmente una partícula de masa m, para que abandone la superficie terrestre sin retornar a ella (velocidad de escape). Además, calcule el tiempo requerido para que esta partícula llegue a una altura igual al radio terrestre sobre la superficie de la Tierra.*

Solución. Para que la partícula escape, según una órbita parabólica, con excentricidad $e = 1$, la energía debe ser cero, es decir

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Después de ser lanzada con esa velocidad, la energía es (mismo valor)

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = 0,$$

de modo que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2GM}{r}},$$

Al nivel $r = R$ esta es

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para integrar podemos separar variables

$$\sqrt{r}dr = \sqrt{2GM}dt,$$

e integrar

$$\frac{2}{3}r^{3/2} - \frac{2}{3}R^{3/2} = \sqrt{2GM}t,$$

y el tiempo para que sea $r = 2R$, será

$$t = \frac{1}{\sqrt{2GM}}(\frac{2}{3}(2R)^{3/2} - \frac{2}{3}R^{3/2}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}(2^{3/2} - 1).$$

▲

EJERCICIO 8.45 *Demuestre que la ecuación de la energía se puede escribir de la forma:*

$$\left[\frac{du}{d\theta}\right]^2 + u^2 = \frac{2(E-U)}{mh^2},$$

siendo $u = \frac{1}{r}$, $h = \frac{l_0}{m}$.

Solución. En coordenadas polares la energía es

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r),$$

y el momentum angular es de magnitud

$$l_0 = |m\vec{r} \times \vec{v}| = mr^2\dot{\theta},$$

si eliminamos

$$\dot{\theta} = \frac{l_0}{mr^2} = \frac{h}{r^2},$$

podemos escribir

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + U(r),$$

pero

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = h\frac{du}{d\theta},$$

de manera que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(h\frac{du}{d\theta})^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} + U(r), \\ &= \frac{1}{2}mh^2(\frac{du}{d\theta})^2 + \frac{1}{2}mh^2u^2 + U(r), \end{aligned}$$

$$\frac{2}{mh^2}(E - U) = (\frac{du}{d\theta})^2 + u^2,$$

que prueba el resultado.

▲

Ejercicio 8.46 *Se lanza un proyectil de masa m desde la superficie de la Tierra hacia el espacio, con rapidez inicial v_0. Despréciese la resistencia del aire y determine: a) la rapidez a una altura h sobre la superficie terrestre y b) la menor rapidez con que debe ser lanzado el proyectil para que no retorne a Tierra.*

Solución. La segunda pregunta ya ha sido contestada en problemas anteriores. Para la primera sigue de la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h},$$

de donde despejando v sigue el resultado

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{R+h} - \frac{2GM}{R}}.$$

▲

Ejercicio 8.47 *Una partícula que se mueve en un campo central de fuerzas definido por* $\vec{F} = -kr^2\hat{r}$ *. Si parte del reposo de un punto de una circunferencia de radio a, demuestre que cuando llega al punto de una circunferencia de radio b su rapidez será*

$$v = \sqrt{\frac{2k(a^3 - b^3)}{3m}}.$$

Solución. La energía potencial asociada a la fuerza dada es

$$U = \frac{1}{3}kr^3,$$

de modo que la energía es

$$E = \frac{1}{3}ka^3 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{3}kb^3,$$

de donde sigue el resultado

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}(a^3 - b^3)}.$$

▲

Ejercicio 8.48 *Una partícula de masa* m*, se mueve sobre un plano horizontal sometida a una fuerza que la atrae hacia un punto O fijo del plano, siendo la magnitud de la fuerza proporcional a la distancia de la partícula al punto 0 (*$k > 0$*, constante de proporcionalidad). Cuando la partícula se encuentra en P con* $OP = 2a$*, la velocidad de la partícula es perpendicular a* OP *y su magnitud es* $v = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{k}{m}}$*, determine la distancia mínima al punto O, que puede alcanzar la partícula.*

Solución. Aquí

$$\vec{F} = -k\vec{r} \Longrightarrow U(r) = \frac{1}{2}kr^2.$$

La energía y el momentum angular son conservados, es decir

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2, \\ l_0 &= mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Sus valores iniciales son

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{k}{m}})^2 + \frac{1}{2}k(2a)^2 = \frac{17}{8}Ka^2, \\ l_0 &= m2a\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{k}{m}} = a^2\sqrt{mk}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{\theta} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La energía cinética en polares es

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{a^4}{r^2}\frac{k}{m}).$$

En un máximo o mínimo de r, $\dot{r} = 0$ por lo tanto

$$\frac{1}{2}m(\frac{a^4}{r^2}\frac{k}{m}) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{17}{8}ka^2,$$

de donde podemos despejar r

$$r = \frac{1}{2}a.$$

EJERCICIO 8.49 *Una partícula está en órbita circular de radio a en torno a la tierra, supuesta esférica, en reposo, de masa total M, de radio R, y sin considerar roce con el aire. Demuestre que si la velocidad de la partícula es repentinamente cambiada por un factor f, la excentricidad de la órbita resultante es*

$$e = \left|f^2 - 1\right|.$$

Solución. En una órbita circular

$$v = \sqrt{\frac{k}{ma}}.$$

Si la cambiamos en un factor f la nueva energía y momentum angular son

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}f^2\frac{k}{a} - \frac{k}{a}, \\ l_0 &= maf\sqrt{\frac{k}{ma}}, \end{aligned}$$

si reemplazamos en

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{mk^2},$$

se obtiene

$$e^2 = 1 + \frac{2(\frac{1}{2}f^2\frac{k}{a} - \frac{k}{a})ma^2 f^2 \frac{k}{a}}{mk^2} = 1 + f^4 - 2f^2,$$

de donde

$$e = \left|f^2 - 1\right|.$$

Ejercicio 8.50 *Respecto a la situación del problema anterior, determine el factor f para que la partícula pase tangente a la superficie terrestre.*

Solución. Falta encontrar la órbita en el problema anterior. Para ello calculamos

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{m^2 a^2 f^2 \frac{k}{ma}}{mk} = af^2,$$

por lo tanto

$$r = \frac{af^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\theta - \alpha)}.$$

Sin duda debe ser $f < 1$, por lo tanto

$$r = \frac{af^2}{1 - (1 - f^2)\cos(\theta - \alpha)}.$$

Si el cambio de la rapidez se hizo en $\theta = 0$, debe ser

$$a = \frac{af^2}{1 - (1 - f^2)\cos\alpha} \Longrightarrow \alpha = 0,$$

y

$$r = \frac{af^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta}.$$

Sea $R < a$ el radio terrestre. Busquemos la solución para $r = R$, resulta

$$\cos\theta = \frac{R - af^2}{R\,(1 - f^2)}.$$

Deseamos que en ese punto la trayectoria sea tangente a la superficie terrestre. Esto significa que para ese valor de θ debe ser $\dot{r} = 0$. Debemos derivar

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

lo que requiere

$$\frac{dr}{d\theta} = 0.$$

Pero, paciencia, resulta

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{af^2\left(-1+f^2\right)\sin\theta}{1-2\cos\theta+2\left(\cos\theta\right)f^2+\cos^2\theta-2\left(\cos^2\theta\right)f^2+\left(\cos^2\theta\right)f^4} = 0,$$

por lo cual $\theta = \pi$ y

$$\cos\theta = \frac{R-af^2}{R\left(1-f^2\right)} = -1 \Longrightarrow f = \sqrt{\frac{2R}{a+R}}.$$

▲

Ejercicio 8.51 *Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Demostrar que si k disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

Solución. Sea k_0 el valor inicial de la constante. Para una órbita circular

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{k_0}{r^2}, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k_0}{r} = -\frac{k_0}{2r} < 0. \end{aligned}$$

Si k disminuye a la mitad, la energía cinética queda igual

$$K = \frac{k_0}{2r},$$

y la energía potencial sera

$$V = -\frac{k_0}{2r},$$

luego la energía es cero, por lo tanto la órbita es parabólica.

EJERCICIO 8.52 *Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semi-eje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética.*

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-e\cos\theta}, \\ l_0 &= mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} V &= -\frac{k}{r}, \\ K &= \frac{1}{2}(mv^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m} \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\frac{l_0^2 e\sin\theta}{mk\left(1-e\cos\theta\right)^2} \\ &= -\frac{mk}{l_0^2}e\sin\theta r^2 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2k^2}{l_0^4}e^2\sin^2\theta + \frac{1}{r^2}\right)\frac{l_0^2}{m}$$

entonces

$$\begin{aligned}< V >&= \frac{1}{T}\int_0^T V dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{V}{\dot{\theta}} d\theta \\ &= -\frac{mk}{Tl_0}\int_0^{2\pi} r d\theta \\ &= -\frac{l_0}{T}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-e\cos\theta} d\theta = -\frac{l_0}{T}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}.\end{aligned}$$

Similarmente para la energía cinética resulta

$$< K >= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{K}{\dot{\theta}} d\theta = \frac{1}{2}\frac{l_0}{T}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

▲

Ejercicio 8.53 *Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno de la otra con un período τ. Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo*

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

Solución. Si k representa la constante de la ley de fuerza, y $2a$ la distancia inicial, entonces inicialmente

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{a} &= \frac{k}{4a^2}, \\ v &= \sqrt{\frac{k}{4ma}},\end{aligned}$$

de modo que el periodo es

$$\tau = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi a\sqrt{\frac{4ma}{k}}.$$

Si se detienen, caen una hacia la otra de manera que

$$m\ddot{r} = -\frac{k}{4r^2},\ \dot{r}(0) = 0,\ r(0) = a.$$

Podemos integrar porque
$$\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\dot{r}^2,$$
luego
$$\begin{aligned} m\frac{1}{2}\dot{r}^2 &= \frac{k}{4}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right), \\ \dot{r} &= -\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}, \end{aligned}$$
separamos variables
$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}} = -dt,$$
entonces
$$t = \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{2m}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}},$$
sea $r = az$
$$\begin{aligned} t &= a\sqrt{\frac{2ma}{k}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z}-1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z}-1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\tau}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 8.54 *Dos masas que se atraen, m_1 y m_2 ($m_1 + m_2 = M$), están separadas una distancia r_0 y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea r menor que r_0, las velocidades serán*
$$\begin{aligned} v_1 &= m_2\sqrt{\frac{2G}{M}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})}, \\ v_2 &= m_1\sqrt{\frac{2G}{M}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0})}. \end{aligned}$$

Solución. Tenemos, para un origen en el centro de masa

$$\begin{aligned} m_1\ddot{r}_1 &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \\ m_2\ddot{r}_2 &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \end{aligned}$$

donde $r = r_1 + r_2$ y

$$r_1 = \frac{m_2}{M}r, \; r_2 = \frac{m_1}{M}r,$$

de manera que las dos ecuaciones se reducen a una sola

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2},$$

como

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\dot{r}^2,$$

integramos la ultima obteniendo

$$\dot{r} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)},$$

y de aquí se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \frac{m_2}{M}\dot{r} = -\frac{m_2}{M}\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = -m_2\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}, \\ \dot{r}_2 &= \frac{m_1}{M}\dot{r} = -\frac{m_1}{M}\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = -m_1\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}, \end{aligned}$$

que prueban el resultado.

▲

Ejercicio 8.55 *Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley $F(r) = kr$. Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.*

Solución. Aquí conviene usar coordenada cartesianas

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= kr\cos\theta = kx, \\ m\ddot{y} &= kr\sin\theta = ky. \end{aligned}$$

Ambas pueden integrarse siendo $k/m = p$ en la forma

$$\begin{aligned} x &= Ae^{pt} + Be^{-pt}, \\ y &= Ce^{pt} + De^{-pt}. \end{aligned}$$

Para determinar la trayectoria, debemos eliminar t entre esas dos ecuaciones. Para ello las escribimos

$$\begin{aligned} Ae^{2pt} - xe^{pt} + B &= 0, \\ Ce^{2pt} - ye^{pt} + D &= 0, \end{aligned}$$

y resolviendo ecuaciones de segundo grado tenemos

$$e^{pt} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4AB}}{2A} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4CD}}{2C},$$

y haciendo algo de álgebra

$$\begin{aligned} \frac{x}{2A} - \frac{y}{2C} &= \frac{\sqrt{y^2 - 4CD}}{2C} - \frac{\sqrt{x^2 - 4AB}}{2A}, \\ -\frac{1}{2}\frac{xy}{AC} &= -\frac{D}{C} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(y^2 - 4CD)}}{C}\frac{\sqrt{(x^2 - 4AB)}}{A} - \frac{B}{A}, \end{aligned}$$

reordenando

$$2BC + 2AD - xy = -\sqrt{(y^2 - 4CD)}\sqrt{(x^2 - 4AB)}$$

elevando al cuadrado y reordenando

$$4ABy^2 + 4CDx^2 - 4(BC + AD)xy = -4\left(AD - BC\right)^2,$$

que es la ecuación de una hipérbola porque el lado derecho es negativo.

▲

EJERCICIO 8.56 *Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

Demuestre que si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces $n = 5$*.*

Solución. La ecuación de Binet para $u = 1/r$ es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}.$$

Si la partícula describe una circunferencia de radio R donde está el centro de fuerza, la ecuación puede escribirse

$$r = 2R\cos\theta,$$

o sea

$$u = \frac{1}{2R\cos\theta},$$

derivando

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{2R\cos^2\theta}\sin\theta, \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta}\sin^2\theta \\
&= \frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{R\cos^3\theta} \\
&= -\frac{1}{2R\cos\theta} + \frac{1}{R\cos^3\theta} \\
&= -u + 8R^2u^3,
\end{aligned}$$

de aquí sigue

$$8R^2u^3 = -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2},$$

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{u}) &= -\frac{8R^2l_0^2}{m}u^5, \\
F(r) &= -\frac{8R^2l_0^2}{mr^5}.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 8.57 *Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es "γR_T" donde R_T es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y $\gamma < 1$, demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por*

$$\sqrt{2(1-\gamma)}(1+2\gamma)/3\pi \text{ años}$$

Solución. La ecuación de la órbita del cometa será de la forma (una parábola)

$$r = \frac{c}{1-\cos\theta},$$

pero debe ser

$$r_{\text{mín}} = \frac{c}{2} = \gamma R_T,$$

o sea

$$r = \frac{2\gamma R_T}{1-\cos\theta}.$$

Los puntos (θ_1 y $2\pi-\theta_1$) donde la órbita del cometa cruza la órbita terrestre están dados por

$$R_T = \frac{2\gamma R_T}{1-\cos\theta_1},$$

de donde

$$\cos\theta_1 = 1-2\gamma.$$

Por otro lado, el elemento de área barrida por el cometa es

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| dt = \frac{l_0}{2m}dt,$$

donde

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T,$$

y

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta,$$

de modo que

$$\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{l_0}{2m}dt,$$

de aquí sigue

$$dt = \frac{m}{l_0} r^2 dt = \frac{l_0^3}{mk^2} (\frac{1}{1 - \cos\theta})^2 d\theta,$$

luego el tiempo será

$$t = \frac{l_0^3}{mk^2} \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} (\frac{1}{1 - \cos\theta})^2 d\theta = \frac{l_0^3}{mk^2} \frac{1}{3} \frac{1 + 3\tan^2 \frac{1}{2}\theta_1}{\tan^3 \frac{1}{2}\theta_1}$$

El factor que multiplica lo anterior está relacionado con el período terrestre. En efecto

$$\frac{l_0^2}{mk} = 2\gamma R_T \Longrightarrow l_0 = \sqrt{mk2\gamma R_T},$$

entonces

$$\frac{l_0^3}{mk^2} = \sqrt{\frac{m2\gamma R_T}{k}} 2\gamma R_T = \sqrt{\frac{2\gamma R_T}{GM_S}} 2\gamma R_T,$$

y el periodo terrestre está dado por

$$T_T = \frac{2\pi R_T}{\sqrt{GM_S}} \sqrt{R_T},$$

luego

$$t = \gamma \sqrt{2\gamma} \frac{T_T}{\pi} \frac{1}{3} \frac{1 + 3\tan^2 \frac{1}{2}\theta_1}{\tan^3 \frac{1}{2}\theta_1}$$

pero

$$\cos\theta_1 = 1 - 2\gamma, \ \ \tan\frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta_1}{1 + \cos\theta_1}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{2 - 2\gamma}}$$

y reemplazando $\tan\frac{\theta_1}{2}$ resulta finalmente

$$t = T_T \left(1 + 2\gamma\right) \frac{\sqrt{2(1 - \gamma)}}{3\pi}.$$

▲

EJERCICIO 8.58 *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

con $k > 0$.Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa.

Solución. La ecuación de Binet para la órbita será

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2}+u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}=\frac{m}{l_0^2u^2}(ku^2+\lambda u^3)\\ &= \frac{mk}{l_0^2}+\frac{\lambda m}{l_0^2}u.\end{aligned}$$

De aquí sigue

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+(1-\frac{\lambda m}{l_0^2})u=\frac{mk}{l_0^2}$$

cuya solución es

$$u=\frac{1}{r}=\frac{mk}{(l_0^2-\lambda m)}+A\cos\sqrt{(1-\frac{\lambda m}{l_0^2})}\theta,$$

y si $\frac{\lambda m}{l_0^2}\ll 1$ corresponde a una curva parecida a una elipse pero que no se cierra en una vuelta completa.

Ejercicio 8.59 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por $r=k\theta$, siendo k una constante.*

Solución. De nuevo, la ecuación de Binet es la clave

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2},$$

siendo

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{r}=\frac{1}{k\theta},\\ \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{k\theta^2},\\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{2}{k\theta^3}=2k^2u^3,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}=2k^2u^3+u,$$

despejando

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{u}) &= -\frac{l_0^2}{m}(2k^2u^5 + u^3), \\
F(r) &= --\frac{l_0^2}{m}(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}).
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.60 *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por $r = Ke^{a\theta}$ siendo k y a constantes.*

Solución. Es análogo, donde ahora

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{K}e^{-a\theta}, \\
\frac{du}{d\theta} &= -\frac{a}{K}e^{-a\theta} \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{a^2}{K}e^{-a\theta} = a^2u,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2} = a^2u + u,$$

despejando

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{u}) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2+1)u^3, \\
F(r) &= -\frac{l_0^2}{m}(a^2+1)\frac{1}{r^3}.
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.61 *Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia $b\sqrt{2}$ de un punto P. Si la partícula es atraída hacia P con una fuerza proporcional a $\frac{k}{r^5}$ y el momento angular respecto de P es $\sqrt{k}/b$, demuestre que la trayectoria está dada por*

$$r = b\coth(\theta/\sqrt{2}).$$

Solución. La ecuación de Binet será

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2}+u &= -\frac{mF(\frac{1}{u})}{l_0^2u^2}\\ &= \frac{ku^5}{\frac{k}{b^2}u^2}=b^2u^3,\end{aligned}$$

o sea

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-b^2u^3=0.$$

O la resolvemos, problema dificil, o comprobamos que

$$u=\frac{1}{b}\tanh(\theta/\sqrt{2}),$$

es solución. Comprobaremos:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{b\sqrt{2}}(1-\tanh^2(\theta/\sqrt{2}))=\frac{1}{b\sqrt{2}}(1-b^2u^2),\\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-2bu)\frac{1}{b\sqrt{2}}(1-b^2u^2)=u\left(-1+b^2u^2\right),\end{aligned}$$

que prueba que se trata de una solución. Faltaría probar que la asíntota de la trayectoria pasa a distancia $b\sqrt{2}$ del origen. Notemos que $r=\infty \Longrightarrow u=0$ o sea la asíntota es una recta paralela al eje OX (el eje polar). La distancia al origen de esa recta se obtiene haciendo $\theta=\pi/2$, donde

$$r=b\coth(\pi/2\sqrt{2})=1.023\,803\,943b$$

(Este valor no es $b\sqrt{2}$; se aceptan comentarios o correcciones)

▲

EJERCICIO 8.62 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula al centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}x &= A\cos(nt+\alpha),\\ y &= B\sin(nt+\beta)\end{aligned}$$

La constante n está relacionada con la masa de la partícula y la constante de proporcionalidad de la fuerza.

Solución. Las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas serán

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky, \end{aligned}$$

que tienen soluciones de la forma dada si $k/m = n^2$.

▲

Ejercicio 8.63 *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza 0 por una fuerza de forma k/r^2. La partícula es lanzada desde un punto P con una velocidad. de magnitud V_0 en un ángulo α respecto de OP. Demuestre que la órbita es una elipse si $OP \leq 2k/(mV_0^2)$. Determine además, en términos de m, k, V_0 ,α , y $OP = r_0$ la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de OP.*

Solución. Evaluamos según las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}, \\ l_0 &= mr_0V_0\sin\alpha. \end{aligned}$$

La excentricidad es

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2El_0^2}{mk^2} \\ &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})l_0^2}{mk^2}. \end{aligned}$$

La órbita será una elipse si $E < 0$, es decir si

$$(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0}) < 0 \Longrightarrow r_0 < \frac{2k}{mV_0^2}.$$

Si además reemplazamos l_0 se obtiene

$$e = \sqrt{1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})mr_0^2V_0^2\sin^2\alpha}{k^2}}.$$

La ecuación de la órbita es

$$\begin{aligned}
r &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-e\cos(\theta-\alpha)} \\
&= \frac{mr_0^2V_0^2\sin^2\alpha}{k}\frac{1}{1-e\cos(\theta-\beta)},
\end{aligned}$$

y el ángulo β queda determinado de

$$r_0 = \frac{mr_0^2V_0^2\sin^2\alpha}{k}\frac{1}{1-e\cos(\beta)},$$

que es una ecuación que dejamos planteada por si alguien quiere resolverla.

▲

Ejercicio 8.64 *Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio R y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo ξ_0 con la vertical del lugar. Si*

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa terrestre y $V_0 < V_e$, demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil son:

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{1-\sin^2(2\beta)\sin^2(\xi_0)}, \\
R/r &= \frac{(1-e\cos(\theta-\alpha))}{2\sin^2(\beta)\sin^2(\xi_0)}
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= V_0/V_e, \\
\sin\alpha &= \sin^2\beta\sin(2\xi_0)/e
\end{aligned}$$

Solución. Podemos usar los resultados del problema anterior pero colocando $k = GMm$, $\alpha = \xi_0$ y $r_0 = R$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
e &= \sqrt{1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0})mr_0^2V_0^2\sin^2\alpha}{k^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R})mR^2V_0^2\sin^2\xi_0}{G^2M^2m^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2\sin^2\xi_0}{4G^2M^2}} \\
&= \sqrt{1 + \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2\sin^2\xi_0}{V_e^4}} \\
&= \sqrt{1 - 4(1 - \frac{V_0^2}{V_e^2})\frac{V_0^2}{V_e^2}\sin^2\xi_0} \\
&= \sqrt{1 - 4(1 - \sin^2\beta)\sin^2\beta\sin^2\xi_0} \\
&= \sqrt{1 - \sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}.
\end{aligned}$$

..........Pura álgebra. Además

$$\begin{aligned}
\frac{l_0^2}{mk} &= \frac{2R^2V_0^2\sin^2\xi_0}{2GM} \\
&= \frac{2RV_0^2\sin^2\xi_0}{V_*^2} \\
&= 2R\sin^2\beta\sin^2\xi_0,
\end{aligned}$$

por lo cual la ecuación de la trayectoria será

$$r = \frac{2R\sin^2\beta\sin^2\xi_0}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}$$

Aquí α representa la inclinación del semi eje mayor de la cónica.

Para $\theta = 0$, $r = R$

$$1 = \frac{2\sin^2\beta\sin^2\xi_0}{1 - e\cos\alpha} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0 &= e\cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0}{\sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0}} \\
\sin^2\alpha &= 1-\frac{(1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0)^2}{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0} \\
&= \frac{1-\sin^2 2\beta\sin^2\xi_0-(1-2\sin^2\beta\sin^2\xi_0)^2}{e^2} \\
\text{bastante álgebra}\cdots &\Longrightarrow \\
&= \frac{4\sin^4\beta\sin^2\xi_0\cos^2\xi_0}{e^2}, \\
\sin\alpha &= \frac{\sin^2\beta\sin^2 2\xi_0}{e}
\end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.65 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporciona al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de R_0 y V_0: la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.*

Solución. Para la órbita circular

$$m\frac{v_0^2}{R_0}=\frac{k}{R_0^2},$$

entonces

$$v_0=\sqrt{\frac{k}{mR_0}}$$

que reducida a la mitad implica

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{k}{mR_0}-\frac{k}{R_0} \\
&= -\frac{7}{8}\frac{k}{R_0} \\
l_0 &= mR_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mR_0}}=\frac{1}{2}\sqrt{mR_0k},
\end{aligned}$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{k}{R_0})\frac{1}{4}mR_0k}{mk^2} = \frac{9}{16} \Longrightarrow e = \frac{3}{4},$$

y

$$\frac{l_0^2}{mK} = \frac{\frac{1}{4}mR_0k}{mk} = \frac{1}{4}R_0,$$

luego la nueva órbita es (tomando $\alpha = 0$)

$$r = \frac{1}{4}R_0\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos\theta} = \frac{R_0}{4-3\cos\theta}.$$

▲

Ejercicio 8.66 *Una partícula de masa $m = 1$ es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo 0 y se mueve describiendo la elipse:*

$$r = \frac{100}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}.$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es $V = 1$, determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

Solución. Aquí como $m = 1$

$$\frac{l_0^2}{k} = 100,$$

el punto más alejado es

$$r_{\text{máx}} = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = 200,$$

luego

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r}\times\vec{v}| = 200 \Longrightarrow \\ k &= \frac{(l_0)^2}{100} = \frac{200^2}{100} = 400. \end{aligned}$$

Si en el punto más alejado la rapidez se hace $V = 2$,calculamos

$$\begin{aligned} l_0 &= |m\vec{r} \times \vec{v}| = 200 \times 2 = 400, \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}4 - \frac{400}{200} = 0 \rightarrow \\ e &= 1, \\ \frac{l_0^2}{mk} &= \frac{(400)^2}{400} = 400, \end{aligned}$$

de modo que la nueva órbita es

$$r = \frac{400}{1 - \cos(\theta - \alpha)},$$

una parábola. Para determinar el ángulo α consideramos que en $\theta = 0$, $r = 200$ de modo que

$$200 = \frac{400}{1 - \cos(\alpha)}$$

de donde $\alpha = \pi$ y finalmente

$$r = \frac{400}{1 + \cos(\theta)}.$$

▲

EJERCICIO 8.67 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_0 con rapidez V_0 atraída hacía el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a $V = \sqrt{\alpha}V_0$ siendo $\alpha > 1$, demuestre que si $\alpha \geq 2$ la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si $\alpha < 2$, determine la ecuación de la nueva órbita en términos de R_0, V_0 y α.*

Solución. Tenemos para la órbita circular

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

la nueva rapidez

$$V = \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\alpha\frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0}, \\
l_0 &= mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}}.
\end{aligned}
$$

La excentricidad es

$$
e^2 = 1 + \frac{2(\frac{1}{2}\alpha\frac{k}{R_0} - \frac{k}{R_0})(mR_0\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{k}{mR_0}})^2}{mk^2} = (\alpha-1)^2 .
$$

Entonces

$$
e = \alpha - 1,
$$

que es una parábola o hipérbola si $\alpha \geq 2$. Si $\alpha < 2$ resultará

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-(\alpha-1)\cos\theta} \\
&= \frac{R_0\alpha}{1-(\alpha-1)\cos\theta}.
\end{aligned}
$$

▲

Ejercicio 8.68 *Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.*

Solución. Si el origen está sobre un diámetro a distancia d del centro, la ecuación de la circunferencia será (teorema del coseno)

$$
R^2 = r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta,
$$

de

$$
\begin{aligned}
0 &= r\frac{dr}{d\theta} + dr\sin\theta - d\cos\theta\frac{dr}{d\theta}, \\
\frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr\sin\theta}{d\cos\theta - r},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\frac{dr\sin\theta}{d\cos\theta - r}
$$

$$
r = d\cos\theta + \sqrt{(d^2\cos^2\theta + R^2 - d^2)},
$$

de aquí

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{d\cos\theta + \sqrt{(d^2\cos^2\theta + R^2 - d^2)}}$$

Lo dejaremos hasta aquí, por ser demasiada el álgebra necesaria. Calcule

$$\frac{du}{d\theta}, \ \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

exprésela s en términos de u y reemplace en la ecuación de Binet.

EJERCICIO 8.69 *Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo k/r^2 con $k < 0$. Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:*

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2}.$$

Solución. La energía es

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r},$$

reemplazando del momentum angular

$$\dot{\theta} = \frac{l_0}{mr^2},$$

resulta

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r} \geqq \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r},$$

pero

$$\frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r},$$

tiene un mínimo que se encuentra derivando

$$-\frac{l_0^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{l_0^2}{mk},$$

para el mínimo, luego

$$E \geqq \frac{1}{2}\frac{l_0^2}{mr^2} - \frac{k}{r} \geqq -\frac{1}{2}\frac{mk^2}{l_0^2}.$$

Ejercicio 8.70 *Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_0 con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en términos de R_0 y V_0 la ecuación de la nueva órbita.*

Solución. Sabemos que

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{mR_0}},$$

luego

$$k = mR_0V_0^2,$$

la nueva energía será

$$E = \frac{1}{2}m\frac{1}{4}V_0^2 - \frac{mR_0V_0^2}{R_0} = -\frac{7}{8}mV_0^2,$$

el nuevo momentum angular

$$l_0 = mR_0\frac{V_0}{2},$$

luego

$$e^2 = 1 + \frac{-\frac{7}{4}mV_0^2m^2R_0^2\frac{V_0^2}{4}}{m(m^2R_0^2V_0^4)} = \frac{9}{16},$$

luego

$$\begin{aligned} r &= \frac{(mR_0\frac{V_0}{2})^2}{m^2R_0V_0^2}\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{4}R_0}{1-\frac{3}{4}\cos\theta}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.71 *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M, la constante de gravitación G, Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.*

Solución. Si Ω denota la velocidad angular terrestre entonces órbita geo estacionaria significa

$$v_0 = \Omega r_0$$

además de (problema anterior)

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

con estas se puede obtener:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)}, \\ v_0 &= \sqrt[3]{(GM\Omega)}. \end{aligned}$$

Sea por un momento $v_0 = 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ la velocidad inicial. Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m4\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= G\frac{Mm}{r_0} \\ l_0 &= mr_0 2\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2G\frac{Mm}{r_0}4m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = 9$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{4m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mGMm}\frac{1}{1-3\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{4r_0}{1-3\cos(\theta-\alpha)} \end{aligned}$$

Si el ángulo polar se mide desde donde cambió la velocidad entonces debe ser $\alpha = \pi$ y finalmente

$$\begin{aligned} r &= \frac{4r_0}{1+3\cos\theta} \\ &= \frac{4}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)}\frac{1}{1+3\cos\theta} \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 8.72 *Un satélite de masa m está en órbita circular de radio $2R$ en torno a la tierra supuesta esférica, de masa M y radio R, en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor f, determine: a) la ecuación de la nueva órbita. b) el rango de valores de f para los cuales el satélite chocará con la tierra. c) el rango de valores de f para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.*

Solución. Para la órbita circular

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva rapidez es

$$v = f\sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la nueva energía es

$$E = \frac{1}{2}mf^2\frac{GM}{2R} - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{4}GMm\frac{f^2-2}{R},$$

el nuevo momentum angular es

$$l_0 = m(2R)f\sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

la excentricidad será dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{m(GMm)^2} = \left(f^2-1\right)^2,$$

de donde

$$e = \left|f^2 - 1\right|.$$

además

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{(m(2R)f\sqrt{\frac{GM}{2R}})^2}{mGMm} = 2Rf^2,$$

de manera que la nueva órbita es

$$r = \frac{2Rf^2}{1-|f^2-1|\cos(\theta-\alpha)}.$$

Si el cambio de la rapidez ocurre en $\theta = 0$ debe ser

$$2R = \frac{2Rf^2}{1 - |f^2 - 1| \cos(\alpha)},$$

de donde

$$\begin{aligned} 1 - \left|f^2 - 1\right| \cos(\alpha) &= f^2, \\ \cos\alpha &= \frac{1 - f^2}{|1 - f^2|}. \end{aligned}$$

Si $f < 1 \Longrightarrow \cos\alpha = 1$ entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta}.$$

Si $f > 1 \Longrightarrow \cos\alpha = -1$ entonces

$$r = \frac{2Rf^2}{1 + (f^2 - 1)\cos\theta}.$$

El satélite puede chocar con la Tierra sólo si $f < 1$ y para saberlo hay que ver si la ecuación

$$r = \frac{2Rf^2}{1 - (1 - f^2)\cos\theta} = R,$$

tiene o no solución. Esta es

$$2f^2 = 1 - (1 - f^2)\cos\theta,$$

despejando

$$\cos\theta = \frac{1 - 2f^2}{1 - f^2} > -1,$$

debe ser

$$1 - 2f^2 > f^2 - 1$$

de donde

$$f < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para este caso, el satélite chocará con la Tierra. Por último, el satélite no regresa si $e = |f^2 - 1| > 1$ o sea si $f > \sqrt{2}$.

▲

EJERCICIO 8.73 *Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M, la constante de gravitación G, Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.*

Solución. Es casi igual al problema 7,91 pero ahora

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= -\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0} \\ l_0 &= mr_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} \end{aligned}$$

entonces

$$e^2 = 1 + \frac{2(-\frac{7}{8}\frac{GMm}{r_0})\frac{1}{4}m^2r_0^2\frac{GM}{r_0}}{mG^2M^2m^2} = \frac{9}{16}$$

entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{m^2r_0^2\frac{1}{4}\frac{GM}{r_0}}{mGMm}\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{1}{4}r_0\frac{1}{1-\frac{3}{4}\cos(\theta-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\Omega}\sqrt[3]{(GM\Omega)}\frac{1}{4-3\cos\theta} \end{aligned}$$

▲

EJERCICIO 8.74 *Considere la tierra como esférica, en reposo de masa M y radio R, sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo β respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es G.*

Solución. La energía es

$$E = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

el momentum angular es

$$l_0 = mRV_0 \cos\beta,$$

la excentricidad será

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2(\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R})m^2R^2V_0^2\cos^2\beta}{m(GMm)^2} \\ &= 1 + \frac{(V_0^2 - \frac{2GM}{R})R^2V_0^2\cos^2\beta}{(GM)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{m^2R^2V_0^2\cos^2\beta}{mGMm} = \frac{R^2V_0^2\cos^2\beta}{GM},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{R^2V_0^2\cos^2\beta}{GM}\frac{1}{1 - e\cos(\theta-\alpha)}.$$

Para la notación, introducimos la velocidad de escape

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

de manera que

$$e^2 = 1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2\cos^2\beta}{V_e^4},$$

$$\frac{l_0^2}{mk} = \frac{2RV_0^2\cos^2\beta}{V_e^2},$$

de modo que la trayectoria es

$$r = \frac{2RV_0^2\cos^2\beta}{V_e^2}\frac{1}{1 - e\cos(\theta-\alpha)}.$$

Si $r(0) = R$ hay necesariamente dos puntos donde la trayectoria intersecta a la superficie de la Tierra. Esos ángulos son $\theta = 0$ y $\theta = 2\alpha$, además de $e < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} R &= \frac{2RV_0^2\cos^2\beta}{V_e^2}\frac{1}{1 - e\cos\alpha}, \\ R &= \frac{2RV_0^2\cos^2\beta}{V_e^2}\frac{1}{1 - e\cos(\theta_1-\alpha)}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\theta_1 - \alpha = \alpha \Longrightarrow \theta_1 = 2\alpha,$$

y de cualquiera de las anteriores

$$1 - e\cos\alpha = \frac{2V_0^2\cos^2\beta}{V_e^2},$$

o sea

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2\cos^2\beta}{V_e^2}}{e} \\ \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{2V_0^2\cos^2\beta}{V_e^2}}{\sqrt{1 - \frac{4(V_0^2 - V_e^2)V_0^2\cos^2\beta}{V_e^4}}}.\end{aligned}$$

Esta expresión la hemos visto de diversas forma en otros problemas. Si

$$z = V_0^2/V_e^2$$

entonces

$$\cos\alpha = \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{\sqrt{1 - 4(1-z)z\cos^2\beta}},$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{\sqrt{(1 - 2z\cos^2\beta)^2 + z^2\sin^2 2\beta}} \\ &= \frac{1 - 2z\cos^2\beta}{|1 - 2z\cos^2\beta|}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.\end{aligned}$$

Hay dos casos

a) Si $1 - 2z\cos^2\beta > 0$, o sea

$$z < \frac{1}{2\cos^2\beta},$$

ángulos de disparo grandes, entonces

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.$$

b) Si $1 - 2z\cos^2\beta < 0$, o sea

$$1 > z > \frac{1}{2\cos^2\beta}$$

ángulos de disparo pequeños, entonces

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2\sin^2 2\beta}{(1-2z\cos^2\beta)^2}}}.$$

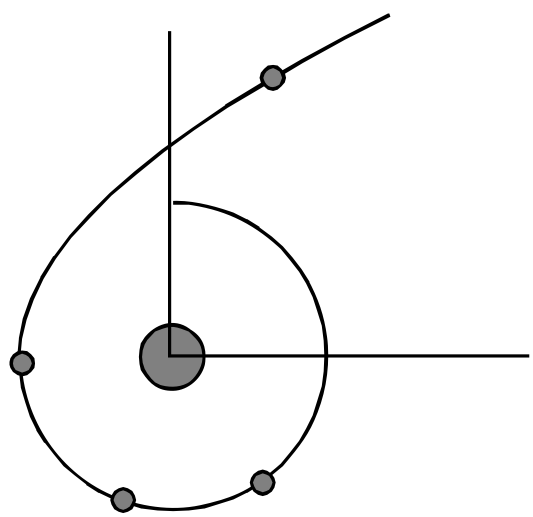
Note que si $1 - 2z\cos^2\beta = 0$

$$\cos\alpha = 0,$$

esto es el semi-eje mayor está a 90^o del punto de lanzamiento, y el proyectil cae diametralmente opuesto por la Tierra al punto de lanzamiento.

▲

EJERCICIO 8.75 *Un cuerpo de masa pequeña se acerca a la Tierra en una órbita parabólica. En el punto mas cercano a la Tierra se debe cambiar la velocidad en un cierto factor para que la órbita continue circular. Determine ese factor.*



Solución. Para la órbita parabólica tomando la masa reducida como la masa del cuerpo m

$$r = \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-\cos\theta}.$$

En el punto más cercano $\theta = \pi$, $r = r_1$, $v = v_1$, $l_0 = mr_1v_1$ de manera que

$$r_1 = \frac{m^2r_1^2v_1^2}{m(GMm)}\frac{1}{2},$$

de donde la rapidez que traía el cuerpo es

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}.$$

Para órbita circular $e = 0$, $r = r_1$, $v = v_1'$, $l_0 = mr_1v_1'$ de manera que

$$r_1 = \frac{m^2r_1^2v_1'^2}{m(GMm)},$$

de donde la rapidez necesaria será

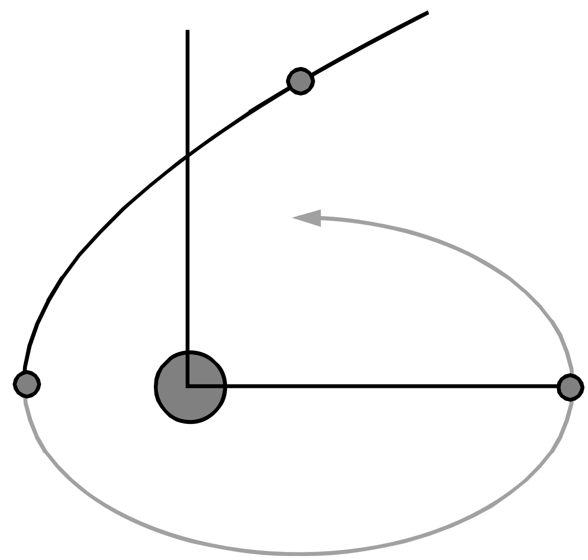
$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{r_1}},$$

por lo cual el factor es $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es decir

$$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$$

▲

Ejercicio 8.76 *Un cuerpo de masa pequeña se acerca a la Tierra en una órbita parabólica. En el punto mas cercano a la Tierra se debe cambiar la velocidad en un cierto factor para que la órbita continue elíptica de excentricidad conocida e con ese punto el más cercano de la elipse a la Tierra. Determine ese factor.*



Solución. La diferencia con el problema anterior está en la segunda parte. Para la órbita parabólica tomando la masa reducida como la masa del cuerpo m

$$r = \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-\cos\theta}.$$

En el punto más cercano $\theta = \pi$, $r = r_1$, $v = v_1$, $l_0 = mr_1v_1$ de manera que

$$r_1 = \frac{m^2 r_1^2 v_1^2}{m(GMm)}\frac{1}{2},$$

de donde la rapidez que traía el cuerpo es

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}.$$

Para la órbita elíptica $e < 1$, $r = r_1$, $v = v_1'$, $l_0 = mr_1v_1'$ de manera que

$$r_1 = \frac{m^2 r_1^2 v_1'^2}{m(GMm)}\frac{1}{1+e},$$

de donde la rapidez necesaria será

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{r_1}},$$

por lo cual el factor es $\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{2}}$ es decir

$$v_1' = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{2}} v_1$$

EJERCICIO 8.77 *Una nave orbita alrededor de la tierra en una trayectoria circunferencial de radio 2R. En cierto instante se le aplica una fuerza impulsora que cambia la rapidez de manera tal que queda orbitando en una órbita elíptica cuyo distancia máxima al centro de la Tierra 6R. Determine la excentricidad de la órbita y la razón entre los momentum angular antes y después del impulso.*

Solución. Para la órbita circunferencial

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{2R}},$$

para la órbita eliptica en $\theta = \pi$

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{2R}},$$

de donde

$$l_0' = m(2R)\sqrt{\frac{GM(1+e)}{2R}},$$

y la ecuación de la elipse es

$$r = \frac{l_0'^2}{mk}\frac{1}{1-e\cos\theta} = 2R(1+e)\frac{1}{1-e\cos\theta},$$

para $\theta = 0$ se obtiene

$$6R = 2R(1+e)\frac{1}{1-e},$$

de donde $e = \frac{1}{2}$. La razón entre el momentum angular antes y después del impulso será

$$\frac{l_0}{l_0'} = \frac{m2R\sqrt{\frac{GM}{2R}}}{m2R\sqrt{\frac{GM(1+e)}{2R}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e}}.$$

Ejercicio 8.78 *Un satélite de masa m gira alrededor de la tierra de masa M con una energía mecánica de $E = -\frac{1}{16}mv_0^2$. Con el eje polar coincidiendo con el eje mayor. Cuando $\theta = 90^o$ su distancia al centro de la tierra es $3R$. Determine en función de M, R y v_0 el momentum angular y los valores de las distancias máximas y mínimas del satélite al centro de la tierra.*

Solución. Como la energía es negativa, la óbita es una elipse. La ecuación de la órbita es

$$r = \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1 - e\cos\theta}.$$

Para $\theta = 90^o$

$$3R = \frac{l_0^2}{mk} = \frac{l_0^2}{GMm^2},$$

de donde la magnitud del momentum angular resulta

$$l_0 = \sqrt{3RGMm^2}.$$

La excentricidad puede calcularse

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{m(GMm)^2} = 1 - \frac{3}{8}\frac{v_0^2R}{GM}.$$

Las distancias máxima y mínima serán

$$\begin{aligned} r_{\text{mín}} &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1+e} = \frac{3R}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{8}\frac{v_0^2R}{GM}}}, \\ r_{\text{máx}} &= \frac{l_0^2}{mk}\frac{1}{1-e} = \frac{3R}{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{8}\frac{v_0^2R}{GM}}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.79 *Desde una altura R sobre la superficie terrestre se lanza horizontalmente un proyectil de tal forma que cae justo en el lado opuesto de la tierra. Determine la rapidez de lanzamiento en función de la velocidad de escape $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ a nivel del suelo. Considere despreciable la resistencia con el aire. (Utilice las cantidades conservadas)*

Solución. En el lanzamiento v_0. En el lado opuesto v. Conservación de momentum angular

$$m(2R)v_0 = mRv \Rightarrow v = 2v_0.$$

Conservación de energía

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R},$$

reemplazando v y despejando v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \frac{1}{\sqrt{6}}v_e.$$

Aumque no se pide, se puede calcular la órbita. Las cantidades constantes son

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{GM}{3R} - \frac{GMm}{2R} = -\frac{1}{3}mG\frac{M}{R}, \\ l_0 &= m2R\sqrt{\frac{GM}{3R}}, \end{aligned}$$

de donde

$$e^2 = 1 + \frac{-\frac{2}{3}mG\frac{M}{R}(m2R\sqrt{\frac{GM}{3R}})^2}{m(GMm)^2} = \frac{1}{9},$$

$$r = \frac{(m2R\sqrt{\frac{GM}{3R}})^2}{mGMm}\frac{1}{1-\frac{1}{3}\cos\theta} = \frac{4R}{3-\cos\theta}.$$

NOTA 8.2 La verdad es que el proyectil no çae"en el lado opuesto. Simplemente pasa tangente a la superficie Terrestre.

EJERCICIO 8.80 *Un satélite es lanzado paralelamente a la superficie terrestre desde una posición $r_0 > R$ siendo R el radio Terrestre con una rapidez dada por $\sqrt{\frac{3GM}{2r_0}}$. Determine la separación máxima del satélite respecto del centro de la tierra en función de r_0.*

Solución. *Las cantidades conservadas son*

$$\begin{aligned} l_0 &= mr_0\sqrt{\frac{3GM}{2r_0}}, \\ E &= \frac{1}{2}m\frac{3GM}{2r_0} - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{1}{4}\frac{GMm}{r_0}. \end{aligned}$$

La excentricidad será

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{m(GMm)^2} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_0}(mr_0\sqrt{\frac{3GM}{2r_0}})^2}{m(GMm)^2} = \frac{1}{4}.$$

De la ecuación de la órbita

$$r_{\text{máx}} = \frac{l_0^2}{m(GMm)}\frac{1}{1-e} = \frac{(mr_0\sqrt{\frac{3GM}{2r_0}})^2}{m(GMm)}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 2r_0.$$

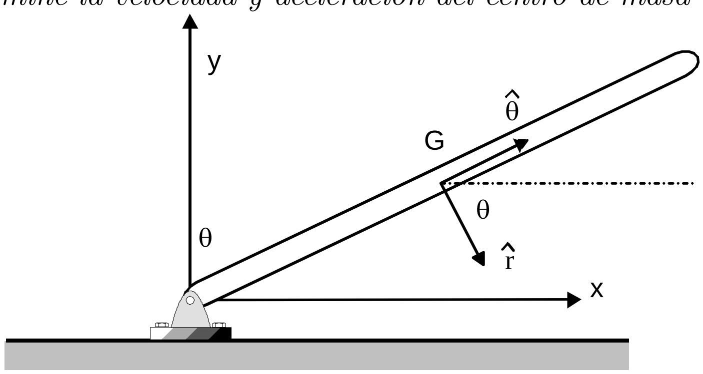
▲

Capítulo 9

Soluciones ejercicios

9.1. Ejercicios de cinemática plana

Ejercicio 9.1 *Una barra de longitud L tiene un extremo fijo y ella rota en un plano fijo respecto a ese extremo de manera que el ángulo que ella forma con un eje fijo en el plano del movimiento es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



Solución. Como es fácil comprender, G tiene movimiento circunferencial con radio $L/2$ de modo que simplemente podemos usar las expresiones para coordenadas polares

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\dot{\theta}\hat{\theta},\\ \vec{a} &= (R\ddot{\theta})\hat{\theta} - (R\dot{\theta}^2)\hat{r},\end{aligned}$$

pero ahora $\dot{\theta} = \omega_0$ y $\ddot{\theta} = 0$ de manera que resultará

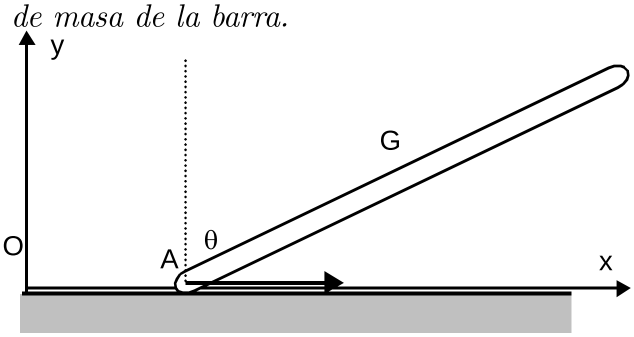
$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{1}{2} L\omega_0 \hat{\theta}, \\ \vec{a}_G &= -(\frac{L}{2}\omega_0^2)\hat{r}, \end{aligned}$$

y en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{1}{2} L\omega(\hat{\imath}\cos\omega_0 t - \hat{\jmath}\sin\omega_0 t), \\ \vec{a}_G &= -(\frac{L}{2}\omega^2)(\hat{\imath}\sin\omega_0 t + \hat{\jmath}\cos\omega_0 t). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 9.2 *Una barra de longitud L tiene se mueve en un plano vertical de manera que su extremo inferior A desliza sobre un eje OX horizontal con velocidad de magnitud v_A constante y el ángulo que ella forma con la vertical OY es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



Solución. Aquí

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k} = -\omega_0 \hat{k},$$

de manera que

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AG} = v_A\hat{\imath} + (-\omega_0\hat{k}) \times \frac{L}{2}(\hat{\imath}\sin\omega_0 t + \hat{\jmath}\cos\omega_0 t) \\ &= v_A\hat{\imath} + \frac{\omega_0 L}{2}(-\hat{\jmath}\sin\omega_0 t + \hat{\imath}\cos\omega_0 t). \end{aligned}$$

Para la aceleración simplemente derivamos respecto al tiempo y resulta

$$\vec{a}_G = \frac{\omega_0^2 L}{2}(-\hat{\jmath}\cos\omega_0 t - \hat{\imath}\sin\omega_0 t).$$

EJERCICIO 9.3 *Para la situación del problema anterior, determine la posición del centro instantáneo en función del desplazamiento x_A del extremo A, de ω_0 y de v_A.*

Solución. Podemos usar

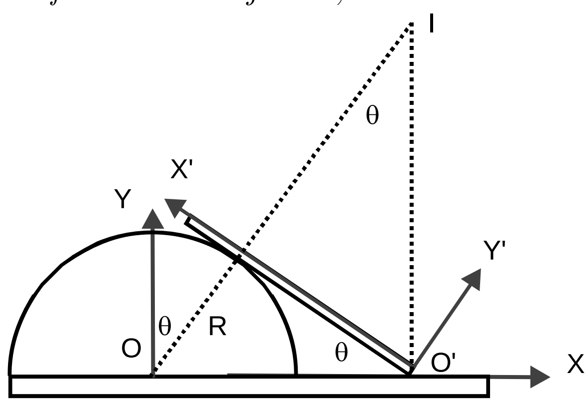
$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}. \tag{9.1}$$

con $\vec{\omega} = -\omega_0 \hat{k}$ y $\vec{v}_A = v_A \hat{\imath}$ de manera que

$$\overrightarrow{AI} = -\frac{\hat{k} \times v_A \hat{\imath}}{\omega_0} = -\frac{v_A}{\omega_0} \hat{\jmath},$$

o sea está debajo del punto A a distancia $\frac{v_A}{\omega_0}$ de él.

EJERCICIO 9.4 *Una barra de longitud L se mueve apoyada sobre un semicírculo de radio R y centro en O y su extremo derecho A desliza sobre un eje OX que coincide con la base del semicírculo con rapidez v_A. Si θ indica el ángulo que la barra forma con el eje OX, determine:*



a) La posición del centro instantáneo en función del ángulo θ.

b) La rapidez del centro de masa de la barra en función del ángulo θ.

Solución. Por las razones explicadas el centro instantáneo está en I y se indica en la figura. Su posición podemos especificarla en términos de sus coordenadas que pueden calcularse por geometría

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{R}{\sin\theta}, \\ y_I &= x_I \cot\theta = \frac{R}{\sin\theta}\cot\theta. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 9.5 *Para la situación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.*

Solución. La mitad está resuelta, porque del problema anterior lo que se obtuvo son las ecuaciones paramétricas de la posición de I. Para obtener la ecuación cartesiana debemos eliminar θ. Para ello use

$$y_I = x_A \cot\theta = x_A \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = x_A \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta},$$

con

$$\sin\theta = \frac{R}{x_I},$$

de modo que resulta

$$y_I = x_I \cot\theta = x_I \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x_I}{R}\sqrt{x_I^2 - R^2},$$

la ecuación de la curva riel.

Para la curva rueda debemos encontrar las coordenadas relativas a la barra $x_I' = AB$, $y_I' = BI$ por geometría. Así se obtiene

$$\begin{aligned} x_I' &= R\cot\theta, \\ y_I' &= \frac{x_I'}{\tan\theta} = R\cot^2\theta, \end{aligned}$$

y la ecuación cartesiana será (eliminando $\cot\theta$)

$$y_I' = \frac{(x_I')^2}{R}.$$

▲

Ejercicio 9.6 *Una lámina rígida se mueve en el plano OXY de manera de dos puntos de ella $A = (1, 2, 0)$ y $B = (2, 1, 0)$ tienen velocidades $\vec{v}_A = (2, 3, 0)$ y $\vec{v}_B = (0, 1, 0)$.*

*a) Compruebe que esos puntos tienen velocidades compatible con la condición de rigidez (**??**).*

b) Determine la velocidad angular del cuerpo en ese instante.

Solución. Construimos $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 2, 0) = (1, -1, 0)$, y calculamos

$$\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB} = (2, 3, 0) \cdot (1, -1, 0) = -1,$$

$$\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) \cdot (1, -1, 0) = -1,$$

que resultan iguales. Ahora debe ser

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB},$$

que la multiplicamos $\times\overrightarrow{AB}$ resultando

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times \overrightarrow{AB} = (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{AB} = (AB^2)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}$$

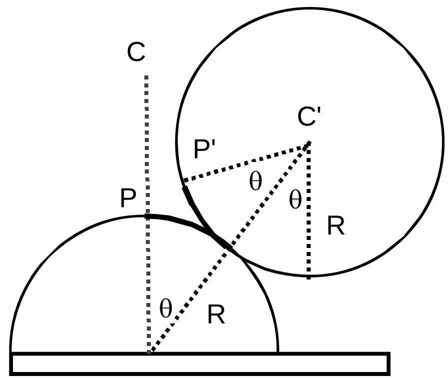
pero por ser el movimiento plano $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ de manera que

$$\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \times \overrightarrow{AB}}{(AB)^2} = \frac{(-2, -2, 0) \times (1, -1, 0)}{2} = (0, 0, 2)\,.$$

▲

Ejercicio 9.7 *Un disco de radio R rueda sin deslizar apoyado sobre un semicilindro de radio igual R. Si θ es el ángulo que forma la línea que une los centros con una línea fija, demuestre que la velocidad angular del disco tiene magnitud*

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$

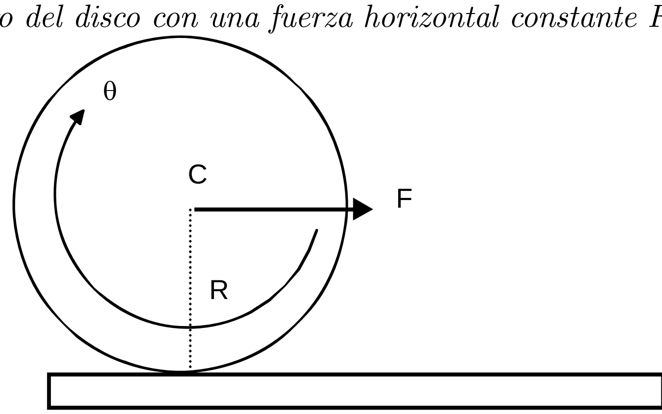


Solución. Como el disco no ha resbalado, los arcos destacados son iguales, las recta $C'P'$ estaba vertical en CP y luego el ángulo que ha girado esa línea que pertenece al disco es 2θ, luego la velocidad angular tiene magnitud

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$

9.2. Ejercicios de dinámica

Ejercicio 9.8 *Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F, determine:*



a) *La aceleración del centro de masa del disco.*

b) *La aceleración angular del disco.*

c) *La fuerza de roce.*

Solución. Sea f la fuerza de roce, de sentido contrario a F. Así tenemos con $\hat{k}$ hacia adentro del papel

$$\begin{aligned} F - f &= Ma_{CM}, \\ \vec{L}_{CM} &= I_{CM}\vec{\omega}, \\ \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} &= I_{CM}\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I_{CM}\frac{d}{dt}\omega(-\hat{k}), \\ \vec{\tau}_{CM} &= Rf(-\hat{k}), \end{aligned}$$

como $I_{CM} = MR^2/2$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR^2\frac{d}{dt}\omega &= Rf, \\ f &= \frac{1}{2}MR\frac{d}{dt}\omega, \end{aligned}$$

pero el disco rueda sin resbalar de manera que

$$a_{CM} = R\frac{d}{dt}\omega,$$

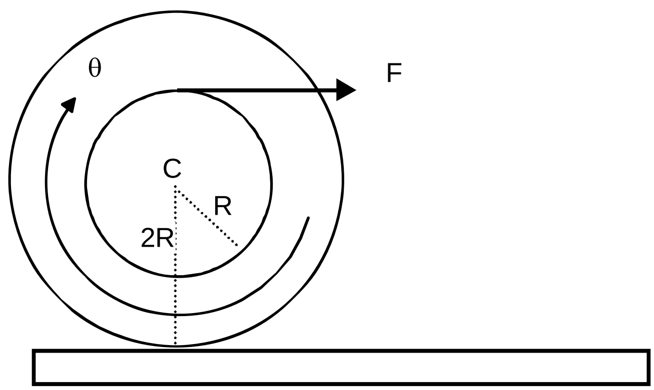
y las dos ecuaciones que tenemos se reducen a

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}Ma_{CM}, \\ F - f &= Ma_{CM}, \end{aligned}$$

de donde salen los resultados

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{2}{3}\frac{F}{M}, \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3}\frac{F}{MR}, \\ f &= \frac{1}{3}F. \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.9 *Un disco de masa M y radio 2R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un reborde de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F, determine:*



a) La aceleración del centro de masa del disco.

b) La aceleración angular del disco.

c) La fuerza de roce.

Solución. Similarmente sea f la fuerza de roce, de sentido contrario a F. Así tenemos con $\hat{k}$ hacia adentro del papel

$$\begin{aligned} F - f &= Ma_{CM}, \\ \vec{L}_{CM} &= I_{CM}\vec{\omega}, \\ \frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} &= I_{CM}\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I_{CM}\frac{d}{dt}\omega(-\hat{k}), \\ \vec{\tau}_{CM} &= (2Rf + RF)(-\hat{k}), \end{aligned}$$

como $I_{CM} = Mr^2/2 = 2MR^2$ tenemos

$$\begin{aligned} 2MR^2\frac{d}{dt}\omega &= (2Rf + RF), \\ f &= MR\frac{d}{dt}\omega - \frac{F}{2}, \end{aligned}$$

pero el disco rueda sin resbalar de manera que

$$a_{CM} = 2R\frac{d}{dt}\omega,$$

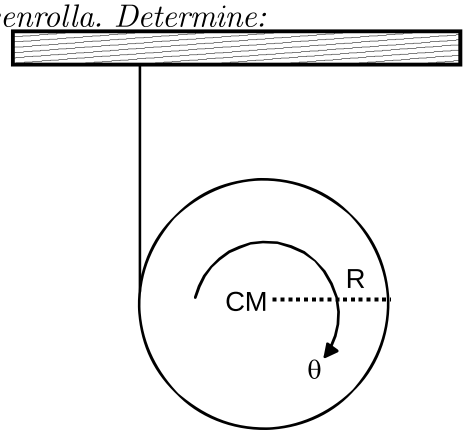
y las dos ecuaciones que tenemos se reducen a

$$\begin{aligned} f + \frac{F}{2} &= \frac{1}{2}Ma_{CM}, \\ F - f &= Ma_{CM}, \end{aligned}$$

de donde salen los resultados

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{F}{M}, \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_{CM}}{2R} = \frac{F}{2MR}, \\ f &= F - Ma_{CM} = 0. \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.10 *Un disco de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:*



a) La aceleración de bajada del disco.

b) La tensión de la cuerda.

Solución. Si T es la tensión en la cuerda tenemos

$$\begin{aligned} Mg - T &= Ma_{CM}, \\ \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} &= RT \Longrightarrow \frac{1}{2}MR\frac{d\omega}{dt} = T \\ a_{CM} &= R\frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

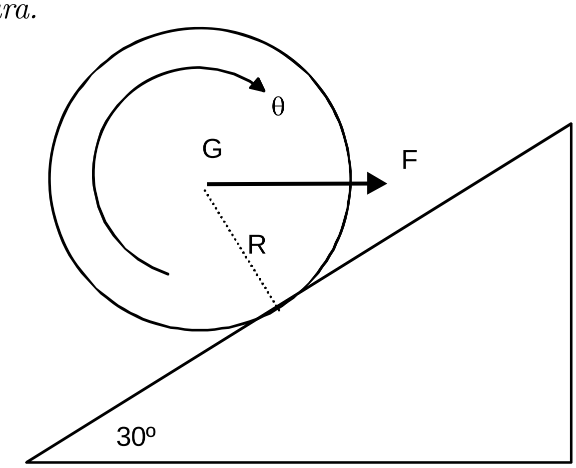
$$Mg - \frac{1}{2}Ma_{CM} = Ma_{CM},$$

de donde

$$\begin{aligned} a_{CM} &= \frac{2}{3}g, \\ T &= \frac{1}{3}Mg. \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 9.11 *Un disco de masa* 10 kg *y de radio* 2 m *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30^o *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* 100 N *aplicada en su centro, como se indica en la figura.*

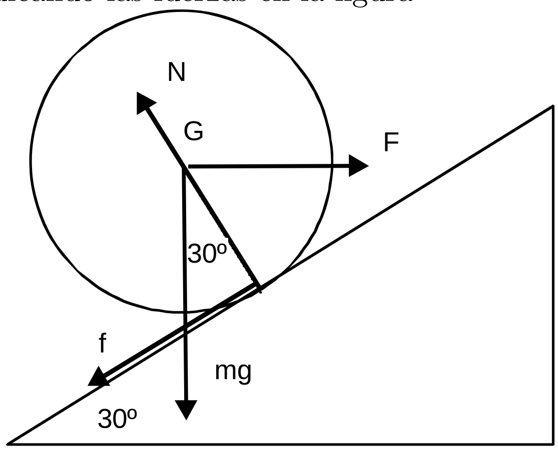


Determine:

a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

Solución. Indicando las fuerzas en la figura



tenemos que

$$
\begin{aligned}
F\cos 30 - mg\sin 30 - f &= ma, \\
N - mg\cos 30 - F\sin 30 &= 0, \\
\Gamma_G &= fR = I_G\alpha,
\end{aligned}
$$

donde además

$$
\alpha = \frac{a}{R}, \qquad I_G = \frac{1}{2}mR^2.
$$

Reemplazando α y colocando valores numéricos

$$
\begin{aligned}
50\sqrt{3} - 50 - f &= 10a, \\
N - 50\sqrt{3} - 50 &= 0, \\
f &= 5a,
\end{aligned}
$$

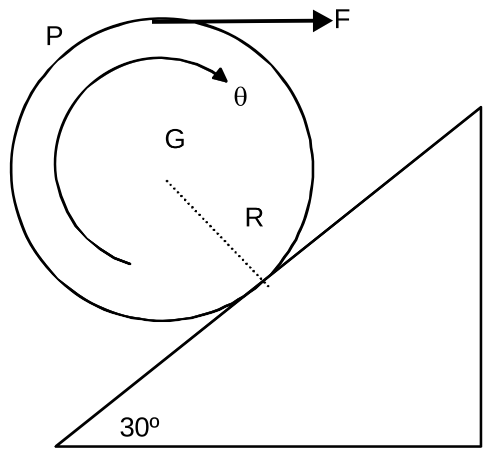
de donde

$$
a = \frac{50\sqrt{3} - 50}{15} = \frac{10}{3}\sqrt{3} - \frac{10}{3} = 2.440\,17\,\mathrm{m\,s^{-2}},
$$

$$
f = \frac{50}{3}\sqrt{3} - \frac{50}{3} = 12.201\,\mathrm{N}.
$$

▲

Ejercicio 9.12 *Un disco de masa* $10\,\mathrm{kg}$ *y de radio* $2\,\mathrm{m}$ *puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en* 30^o *respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud* $100\,\mathrm{N}$ *aplicada en el punto* P*, como* *se indica en la figura.*



Determine:

a) La aceleración del centro del disco.

b) La fuerza de roce.

Solución. La única diferencia respecto al problema anterior es que ahora F también hace torque respecto a G, de manera que

$$\begin{aligned} F\cos 30 - mg\sin 30 - f &= ma, \\ N - mg\cos 30 - F\sin 30 &= 0, \\ \Gamma_G &= fR + FR = I_G\alpha, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} 50\sqrt{3} - 50 - f &= 10a, \\ N - 50\sqrt{3} - 50 &= 0, \\ f + 100 &= 5a, \end{aligned}$$

luego

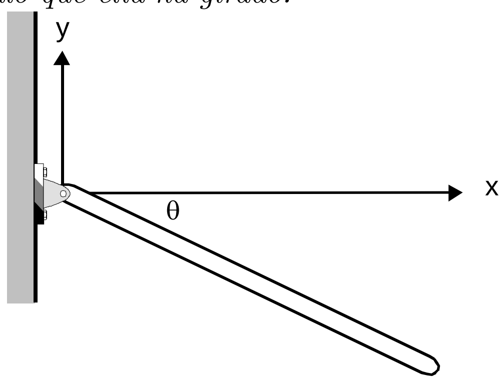
$$a = \frac{50\sqrt{3} - 50 + 100}{15} = \frac{10}{3}\sqrt{3} + \frac{10}{3} = 9.107\,\mathrm{m\,s^{-2}},$$

y

$$f = 5a - 100 = \frac{50}{3}\sqrt{3} - \frac{250}{3} = -54.466\,\mathrm{N},$$

el signo significa que la fuerza de roce actúa hacia arriba.

EJERCICIO 9.13 *Una barra de largo 2L y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O, inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.*



Solución. Sea N la reacción vertical en la articulación. Conviene usar conservación de energía, esto es

$$E = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta = 0, \ \ I_0 = \frac{4}{3} ML^2,$$

de donde

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2L}\sin\theta},$$

es la magnitud de la velocidad angular de la barra. La reacción vertical sale de

$$N - Mg = M\frac{d^2}{dt^2}(-L\sin\theta),$$

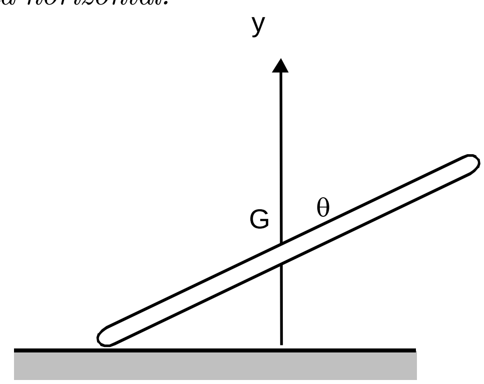
la derivada se puede hacer porque se conoce $\dot{\theta}$ y resulta

$$N = Mg - ML\frac{d^2}{dt^2}\sin\theta,$$

donde damos sólo el resultado

$$N = \frac{5}{2}Mg - \frac{9}{4}Mg\cos^2\theta.$$

EJERCICIO 9.14 *Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.*



Solución. Como no hay fuerzas horizontales, el movimiento del centro de masa ocurre sólo en la dirección vertical, por lo tanto podemos tomar

$$\begin{aligned} x_{CM} &= 0, \\ y_{CM} &= L\cos\theta, \end{aligned}$$

conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\dot{\theta}^2 + MgL\cos\theta = MgL,$$

donde

$$v_{CM} = \dot{y}_{CM} = -\dot{\theta}L\sin\theta,$$

entonces

$$\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}(1-\cos\theta),$$

y

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}\frac{(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta + \frac{1}{3}},$$

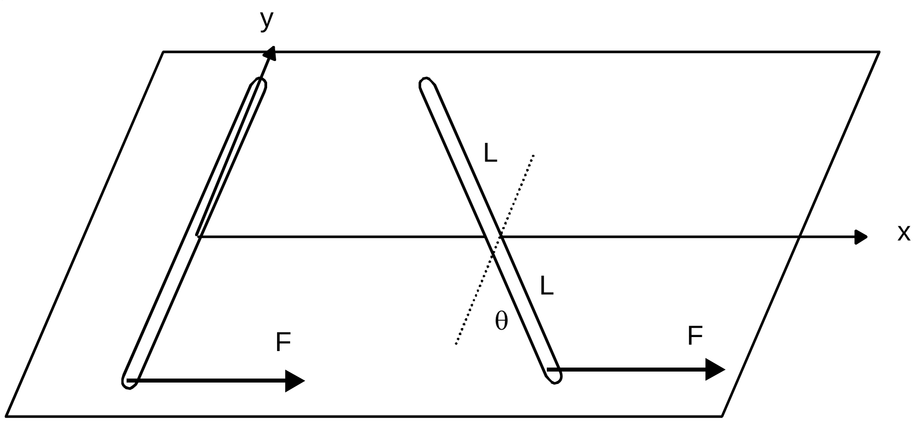
cuando la barra se pone horizontal $\theta = \pi/2$ y luego

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2L}},$$

y la velocidad del centro de masas en este instante es

$$v_{CM} = -\dot{\theta}L = -\sqrt{\frac{3gL}{2}}.$$

EJERCICIO 9.15 *Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F, inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.*



Solución. Sea x_{CM} e y_{CM} las coordenadas del centro de masas sobre el plano horizontal. Si la fuerza está aplicada en la dirección OX la coordenada y_{CM} no varía y puede tomarse cero. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} F &= M\ddot{x}_{CM}, \\ \tau_{CM} &= FL\cos\theta = I_{CM}\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

la última es la que interesa y si reemplazamos $I_{CM} = ML^2/3$ se obtiene

$$FL\cos\theta = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta},$$

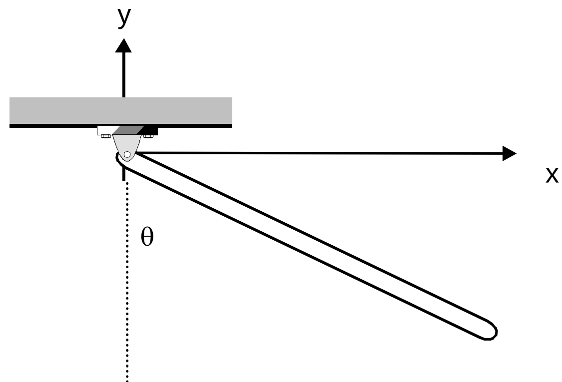
o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{3F}{ML}\cos\theta,$$

es la ecuación diferencial que determina el ángulo θ.

▲

Ejercicio 9.16 *Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.*



Solución. Conservación de energía da

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta,$$

es constante. Luego si derivamos

$$I\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0,$$

de donde

$$I\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0,$$

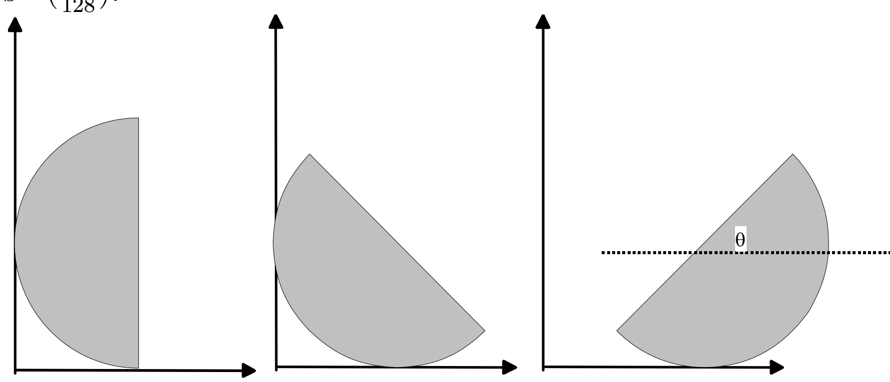
y si reemplazamos $I = ML^2/3$ resulta

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0,$$

es la ecuación diferencial solicitada.

▲

Ejercicio 9.17 *Una semiesfera homogénea de radio "a" está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa,* *sobre la cual la superficie semi esférica se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre, además que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son* $\omega = \sqrt{\frac{15}{8} g/a}$, $v = \frac{3}{8} a\omega$ *respectivamente. Demuestre además, durante el movimiento siguiente, que el ángulo entre la base y la horizontal no excede de* $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.



Solución. El centro de masa del cuerpo está a distancia $3a/8$ del centro. Mientras no despega, el cuerpo mantiene su centro fijo, y la única fuerza que realiza torque respecto a ese punto es el peso. Si en la segunda figura θ es el ángulo que ha girado la línea que contiene el centro de masa, entonces

$$I_C \ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

donde el momento de inercia es $I = 2Ma^2/5$, luego

$$\frac{2Ma^2}{5}\ddot{\theta} = Mg\frac{3}{8}a\cos\theta,$$

o sea

$$\ddot{\theta} = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\cos\theta,$$

que podemos integrar porque

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\dot{\theta}^2,$$

obteniendo

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{15}{16}\frac{g}{a}\sin\theta,$$

y cuando la base se coloca horizontal $\theta = \pi/2$ resultando

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}},$$

y

$$v_{CM} = \frac{3}{8}a\omega.$$

Puede probarse que en esta posición el cuerpo despega y tiene una energía inicial (respecto a la posición inicial del centro)

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3}{8}a = 0,$$

y su momentum en la dirección horizontal es

$$P_x = M\frac{3}{8}a\omega = M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}.$$

Esas dos cantidades son conservadas, pero ahora todo el cuerpo se traslada y rota, de manera que la coordenada x del centro de masa varía. Así la energía se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0,$$

además

$$\begin{aligned} M\dot{x} &= M\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}}, \\ y_{CM} &= \frac{3a}{8}\cos\theta, \\ \dot{y}_{CM} &= -\frac{3a}{8}\dot{\theta}\sin\theta. \end{aligned}$$

Cuando θ sea un extremo, $\dot{\theta} = 0$, y en ese caso, $\dot{y}_{CM} = 0$ y la ecuación de energía da

$$\frac{1}{2}M(\frac{3}{8}a\sqrt{\frac{15}{8}\frac{g}{a}})^2 - Mg\frac{3a}{8}\cos\theta = 0$$

que se reduce a

$$\cos\theta = \frac{45}{128},$$

o sea $\theta = 69.417^o$.

Ejercicio 9.18 *Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial Ω alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es μ. Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.*

Solución. Supondremos que la normal que es el peso se distribuye uniformemente de manera que su densidad superficial es

$$\sigma = \frac{Mg}{\pi a^2}.$$

Considere un anillo entre r y $r + dr$. La fuerza de roce en ese anillo produce un torque retardador dado por

$$\begin{aligned} d\tau &= -\mu(\sigma 2\pi r dr)r \\ &= -\mu\frac{Mg}{\pi a^2}2\pi r^2 dr \\ &= -\mu\frac{2Mg}{a^2}r^2 dr, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \tau &= -\mu\int_0^a \frac{2Mg}{a^2}r^2 dr \\ &= -\frac{2\mu Mga}{3}. \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} I\alpha &= -\frac{2\mu Mga}{3}, \\ \frac{1}{2}Ma^2\alpha &= -\frac{2\mu Mga}{3}, \\ \alpha &= -\frac{4\mu g}{3a}, \end{aligned}$$

y como la condición de frenado es

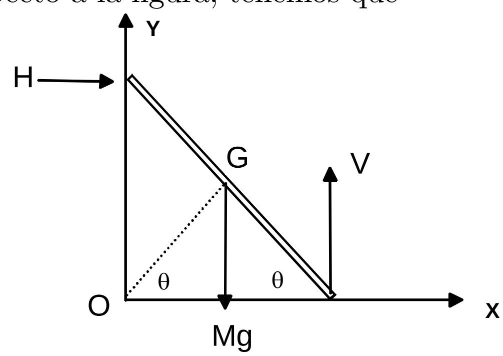
$$0 = \Omega + \alpha t,$$

resulta

$$t = \frac{3a\Omega}{4\mu g}.$$

EJERCICIO 9.19 *Una barra de masa M y largo $2a$ se mueve apoyada en superficies lisas OY vertical y OX horizontal. Inicialmente la barra estaba vertical con $\theta = \pi/2$ y se perturbó levemente. Determine $\dot{\theta}$ y las reacciones en función de θ.*

Solución. Respecto a la figura, tenemos que



$$x_G = a\cos\theta, \qquad y_G = a\sin\theta, \qquad v_G = a\dot{\theta},$$

y la energía es constante

$$E = Mga = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + Mga\sin\theta = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ma^2)\dot{\theta}^2 + Mga\sin\theta,$$

de donde

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}(1-\sin\theta)},$$

donde el signo se debe a que θ está disminuyendo. Para determinar las reacciones utilizamos $\vec{F} = M\vec{a}_G$ que en componentes es

$$\begin{aligned} H &= M\frac{d^2}{dt^2}a\cos\theta, \\ V - Mg &= M\frac{d^2}{dt^2}a\sin\theta, \end{aligned}$$

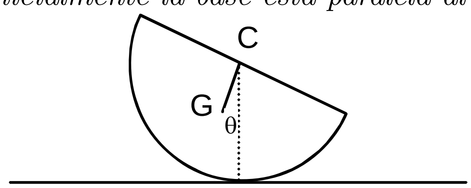
en el apéndice se explica como hacer estas segundas derivadas con facilidad y resulta

$$\begin{aligned} H &= Ma\frac{1}{-2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \frac{3}{4}Mg\,(3\sin\theta - 2)\cos\theta, \\ V &= Mg + Ma\frac{1}{2\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}Mg\left(10 - 9\cos^2\theta - 6\sin\theta\right). \end{aligned}$$

Note que la barra pierde el contacto con la pared cuando $\sin\theta = 2/3$ es decir cuando $\theta = 41{,}81^o$.

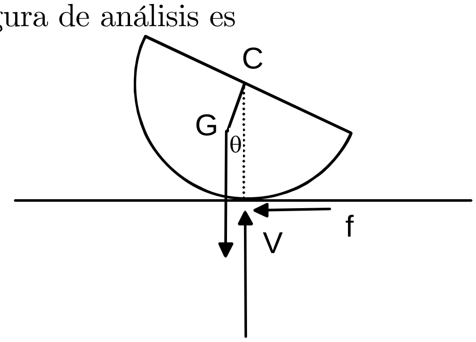
▲

Ejercicio 9.20 *Una semiesfera de masa M y radio R se coloca apoyada sobre una superficie horizontal con roce de modo que la semiesfera sólo puede rodar sin resbalar. Inicialmente la base está paralela al plano horizontal.*



Si se le da a la esfera una velocidad angular inicial $\dot\theta(0) = \Omega$ sin que el cuerpo resbale, determine $\dot\theta$ en función de θ.

Solución. La figura de análisis es



Pueden calcularse $CG = \frac{3}{8}R$ y $I_C = \frac{2}{5}MR^2$. A pesar que hay roce como el punto de contacto no desliza, se conserva la energía

$$E = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot\theta^2 + Mg(R - CG\cos\theta).$$

Las coordenada de G serán (el centro C avanza $R\theta$ por no haber deslizamiento)

$$\begin{aligned} x_G &= R\theta - CG\sin\theta, \\ y_G &= R - CG\cos\theta, \end{aligned}$$

de donde evaluamos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_G &= R\dot{\theta} - CG\dot{\theta}\cos\theta, \\
\dot{y}_G &= CG\dot{\theta}\sin\theta, \\
v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}^2 CG\cos\theta + CG^2\dot{\theta}^2, \\
&= \frac{1}{64}R^2\left(73 - 48\cos\theta\right)\dot{\theta}^2,
\end{aligned}$$

reemplazando en E

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}M\frac{1}{64}R^2\left(73 - 48\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg(R - \frac{3}{8}R\cos\theta) \\
&= \frac{1}{640}MR^2\left(493 - 240\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + MgR(1 - \frac{3}{8}\cos\theta) \\
&= \frac{1}{640}MR^2\left(493 - 240\cos\theta\right)\Omega^2 + MgR(1 - \frac{3}{8})
\end{aligned}$$

de allí despejamos $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g}{R}\frac{1 - \cos\theta}{\left(\frac{493}{240} - \cos\theta\right)}}.$$

▲