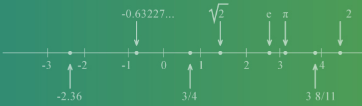
Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Inversos Multiplicativos



Coordinación de Cálculo I
Primera versión - Agosto 2020

Profesor:
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Inversos Multiplicativos

Coordinación de Cálculo I

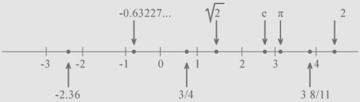
Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola



FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Inversos multiplicativos y división

Definición

Dado un número $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definimos su **inverso multiplicativo**, el cual denotaremos como a^{-1}, como el único número real que al multiplicarlo con a dé como resultado 1. Es decir:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Ejemplo :

1. El inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, dado que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.
2. El inverso multiplicativo de -5 es $-\frac{1}{5}$, ya que

$$(-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 1.$$

Observación

La razón por la cual no se considera el 0 *en nuestra definición de inverso multiplicativo, es que si* 0 *tuviera inverso, el cual denotaremos por* $b \in \mathbb{R}$*, entonces* $0 \cdot b = 1$*. Pero por otro lado sabemos que*

$$0 \cdot b = 0,$$

luego, $0 = 0 \cdot b = 1$*, lo cual es imposible.*

Recordemos también la siguiente definición:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$, definimos el **cociente** entre a y b, el cual denotaremos por $\frac{a}{b}$ (o $a : b$), como el número $a \cdot b^{-1}$. Es decir,

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

Para el cociente entre números reales tenemos las siguientes propiedades:

Sean $a, x, y, z, u \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $\frac{a}{1} = a$.
2) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
3) Si $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{a} = 1$.
4) Si $y, u \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} = \frac{z}{u} \Leftrightarrow xu = zy$.
5) Si $a, y \neq 0$, entonces $\frac{xa}{ya} = \frac{x}{y}$.
6) Si $y, u \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} = \frac{xz}{yu}$.
7) Si $y, u \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} \pm \frac{z}{u} = \frac{xu \pm yu}{yu}$.
8) Si $y, z, u \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} : \frac{z}{u} = \frac{xu}{zy}$.

A modo de ejemplo, demostraremos una de las propiedades anteriores. La demostración del resto quedará como ejercicio.

Demostración propiedad 8

Asumiremos que las propiedades de la 1 hasta el 7 ya están demostradas. Por definición de cociente tenemos que

$$\frac{x}{y} : \frac{z}{u} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{z}{u}\right)^{-1}.$$

Ahora, observe que $\left(\frac{z}{u}\right)^{-1} = \frac{u}{z}$. En efecto,

$$\begin{aligned} &\text{(Propiedad 5)} & \frac{z}{u} \cdot \frac{u}{z} &= \frac{zu}{uz} \\ &\text{(Conmutatividad)} & &= \frac{zu}{zu} \\ &\text{(Propiedad 2).} & &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{z}{u} \cdot \frac{u}{z} = 1$. Así, por la deifinición de **inverso multiplicativo**, tenemos que $\frac{u}{z}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{z}{u}$, es decir, $\left(\frac{z}{u}\right)^{-1} = \frac{u}{z}$.
Finalmente, haciendo nuevamente uso de la propiedad 6 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} : \frac{z}{u} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{z}{u}\right)^{-1} &= \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{z} \\ &= \frac{xu}{yz} \qquad \text{(Propiedad 6).} \end{aligned}$$

Ahora veremos algunos ejemplos en los cuales usaremos las propiedades anteriores para simplificar expresiones con muchos factores.

Ejemplo 1

Simplifique la expresión :

$$\frac{x-4}{x^2-4} : \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}.$$

Solución: Por la propiedad 8 tenemos que

$$\frac{x-4}{x^2-4} : \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{(x-4)(x^2+5x+6)}{(x^2-4)(x^2-3x-4)}.$$

Ahora, factorizando y simplificando (propiedad 5) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(x-4)(x^2+5x+6)}{(x^2-4)(x^2-3x-4)} &= \frac{\cancel{(x-4)}(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)\cancel{(x-4)}(x+1)} \\ &= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x-4}{x^2-4} : \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$.

Ejemplo 2

Simplifique la expresión

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}.$$

Solución: Usando la propiedad 7, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{\cancel{a}-\cancel{a}-h}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h} \\
&= -\frac{\cancel{h}}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{\cancel{h}} \qquad \text{(Propiedad 8)} \\
&= -\frac{1}{a(a+h)}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Demuestre que

$$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{x+y}{x-y}.$$

Solución: Reduciremos cada uno de los factores del producto que aparece a la izquierda de la igualdad y obtendremos la parte derecha de la igualdad.

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y} &= \frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}\\ &= \frac{x^2-\cancel{2xy}+y^2+x^2+\cancel{2xy}+y^2}{x^2-y^2}\\ &= \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}\\ &= 2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right).\end{aligned}$$

Para el segundo factor tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{2xy}+1 &= \frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}\\ &= \frac{(x+y)^2}{2xy}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Luego, juntando los tres factores tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) &= 2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{2xy}\cdot\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\\
&= \frac{\cancel{2xy}\,\cancel{(x^2+y^2)}(x+y)^2}{\cancel{2xy}(x^2-y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}\\
&= \frac{(x+y)^2}{(x^2-y^2)}\\
&= \frac{\cancel{(x+y)}(x+y)}{\cancel{(x+y)}(x-y)}\\
&= \frac{x+y}{x-y}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

1. Demuestre las propiedades 1-7.
2. Simplifique la expresión

$$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+\dfrac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}+\frac{x^2-2}{1-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}}}.$$

Ecuación Lineal:

Una ecuación lineal es una expresión de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y x es la variable.

Ejemplos:

1. Ecuación lineal: $3x + \frac{1}{2} = 7$.
2. Ecuación no lineal: $2\sqrt{x} + 5x = 0$.

Solución de una ecuación lineal:

Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se tiene la siguiente afirmación:

$$ax + b = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{c - b}{a}$$

Usando propiedad de los reales, se tiene:

$$\begin{aligned} ax+b=c &\Leftrightarrow ax+(b+(-b))=c+(-b) \\ &\Leftrightarrow ax+0=c+(-b) \\ &\Leftrightarrow ax=c-b \\ &\Leftrightarrow (a^{-1}a)x=a^{-1}(c-b) \\ &\Leftrightarrow 1\cdot x=\frac{1}{a}(c-b) \\ &\Leftrightarrow x=\frac{c-b}{a} \end{aligned}$$

Por tanto se satisface que $ax+b=c \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{c-b}{a}$.

Ejemplo: Resolver $2=-\dfrac{1}{3}x+7$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2=-\frac{1}{3}x+7 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x&=7-2=5 \\ x&=15 \end{aligned}$$

A continuación algunos ejemplos que se reducen a una ecuación lineal.

Ejemplo 1

Sabiendo que $x \neq -2$ y $x \neq 1$, resolver la ecuación:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-1}.$$

Solución: Usando propiedades de los números reales, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-1} &\Leftrightarrow (x-1)^2 = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación:

$$(x-2)(2x+1) = (x-1)^2 + (3-x)^2$$

Solución: Usando distributividad, productos notables y propiedades de los reales, se tiene:

$$\begin{array}{ccl}
(x-2)(2x+1) & = & (x-1)^2 + (3-x)^2 \\
2x^2 - 3x - 2 & = & x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 \\
2x^2 - 3x - 2 & = & 2x^2 - 8x + 10 \\
5x & = & 12 \\
x & = & \dfrac{12}{5}.
\end{array}$$

Ecuaciones cuadráticas:

Una ecuación cuadrática es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y x la variable.

Solución de una ecuación cuadrática:

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac \geq 0$, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son de la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración:

En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se realiza completación de cuadrados y se obtiene:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

Esta última igualdad, se satisface sólo si $b^2 - 4ac \geq 0$, (Se explicará con mas argumentos ésta afirmación, en la sección de axiomas de orden). Asumiendo esa afirmación, se tiene:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observación

En el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, si se tiene una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, el número real $b^2 - 4ac$, denotado generalmente por $\Delta = b^2 - 4ac$, tiene una de las siguientes posibilidades:

1. $\Delta \in \mathbb{R}^+$
2. $\Delta = 0$
3. $-\Delta \in \mathbb{R}^+$

Según el signo de Δ, se deduce si la ecuación cuadrática tiene o no solución en $\mathbb{R}$. Se tiene que si $\Delta \geq 0$ la ecuación cuadrática tiene solución real, y si $\Delta < 0$, no tiene soluciones reales.
Se explicará, con mas argumentos por que si $\Delta < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales y las propiedades de cuerpo ordenado de los números reales ayudarán para eso.

Ejemplo 1

Determine si la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, tiene solución real.
Solución: En este ejercicio se tiene que $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$. Por lo que la ecuación cuadrática tiene solución real.

Ejemplo 2

Determine si la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$, tiene solución real.
Solución: En este ejercicio se tiene que $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$. Por lo que la ecuación cuadrática no tiene solución real.

Ejercicios que se reducen a ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 3

Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq 1$, $x \neq -2$. Resolver la siguiente ecuación

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$$

. *Solución:* Notar que la igualdad dada se reduce, a la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5x^2 - 3x - 14 = 0$$

Luego $\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot (-14) = 289 > 0$, por tanto la ecuación cuadratica tiene solución real. Sus soluciones son:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10}.$$

Finalmente $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{7}{5}$.

LOS NÚMEROS REALES:
Inversos Multiplicativos

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE