



Nombre: _____ Sección: _____

Pauta Pep 1
Forma B

1.- Sean p y q dos proposiciones, definamos el conector lógico \oplus como:

$$p \oplus q \equiv \sim [(\sim p \wedge q) \implies \sim q]$$

- i) Pruebe $p \oplus q \equiv \sim q \oplus \sim p$.
- ii) Pruebe que $(p \oplus q) \oplus q \equiv \sim p \oplus q$.
- iii) Sean t y w dos proposiciones y la proposición compuesta:

$$t \oplus (w \oplus (q \oplus (p \oplus q))),$$

determine si es tautología, contradicción o contingencia.

Solución:

- i) Primero se debe hacer una simplificación:

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv \sim [(\sim p \wedge q) \implies \sim q] \\ &\equiv \sim [\sim (\sim p \wedge q) \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [(p \vee \sim q) \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [p \vee \sim q \vee \sim q] \\ &\equiv \sim [p \vee \sim q] \\ &\equiv \sim p \wedge q \quad (0, 4pt) \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv \sim p \wedge q \\ &\equiv q \wedge \sim p \\ &\equiv \sim (\sim q) \wedge \sim p \\ &\equiv \sim q \oplus \sim p. \quad (0, 3pt) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(p \oplus q) \oplus q &\equiv \sim (\sim p \wedge q) \wedge q && (0, 3pt \text{ por correcto reemplazo}) \\ &\equiv (p \vee \sim q) \wedge q \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee F \\ &\equiv p \wedge q \\ &\equiv \sim (\sim p) \wedge q \\ &\equiv \sim p \oplus q && (0, 4pt)\end{aligned}$$

iii) Usando la simplificación dada en i) podemos notar que:

$$\begin{aligned}q \oplus (p \oplus q) &\equiv \sim q \wedge (\sim p \wedge q) \\ &\equiv \sim q \wedge \sim p \wedge q \\ &\equiv F && (0, 2pt)\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $q \oplus (p \oplus q)$ es una contradicción. Además, para cualquier proposición h :

$$h \oplus F \equiv \sim h \wedge F \equiv F,$$

por ende , $h \oplus F$ es una contradicción, sea cual sea la proposición h (0,2pt), así:

$$\begin{aligned}t \oplus (w \oplus (q \oplus (p \oplus q))) &\equiv t \oplus (w \oplus (F)) \\ &\equiv t \oplus (w \oplus F) \\ &\equiv t \oplus F \\ &\equiv F\end{aligned}$$

por ende es una contradicción.(0,2pt)

De la misma manera se puede resolver directamente usando la definición de \oplus .

(Cada uno de los ejercicios se puede realizar usando tablas de verdad, lo cual da el mismo puntaje en cada pregunta)

2.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$ y el polinomio $P(x)$ definido por:

$$P(x) = ax^4 + 12bx^3 - bx^2 - 12x + 5.$$

i) Encuentre los valores de a y b para que $x = 1$ y $x = -1$ sean raíces del polinomio $P(x)$.

ii) Encuentre las raíces del polinomio:

$$Q(x) = -12x^4 + 36x^3 - 3x^2 - 36x + 15.$$

Solución:

- i) Como $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de $P(x)$, se tiene que $P(1) = P(-1) = 0$ (0,2pt), por lo tanto se puede generar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a(1)^4 + 12b(1)^3 - b(1)^2 - 12(1) + 5 &= 0 \\a(-1)^4 + 12b(-1)^3 - b(-1)^2 - 12(-1) + 5 &= 0\end{aligned}$$

quedando entonces:

$$a + 12b - b - 12 + 5 = 0 \quad (0, 2pt) \quad (1)$$

$$a - 12b - b + 12 + 5 = 0 \quad (0, 2pt) \quad (2)$$

Restando (1) con (2) se obtiene la ecuación $24b - 24 = 0$ lo que tiene como resultado $b = 1$ (0,2pt). Usando ese resultado en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene $a = -4$. (0,2pt)

- ii) Para encontrar las raíces del polinomio $Q(x)$ primero hay que considerar que, resolver la ecuación:

$$-12x^4 + 36x^3 - 3x^2 - 36x + 15 = 0,$$

es lo mismo que resolver la ecuación (0,1pt):

$$-4x^4 + 12x^3 - x^2 - 12x + 5 = 0,$$

la cual es el polinomio $P(x)$ con los valores de a y b obtenidos en i), por lo tanto, podemos concluir que $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de $Q(x)$ (0,2pt). Por el teorema del factor tenemos entonces que $(x - 1)$ y $(x + 1)$ dividen a $Q(x)$ (0,2pt) y por ende también lo hace $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$, así haciendo división sintética entre $Q(x)$ y $x^2 - 1$ obtenemos:

$$Q(x) = (x^2 - 1)(-12x^2 + 36x - 15), \quad (0, 2pt)$$

es decir, para resolver la ecuación $Q(x) = 0$, basta con resolver la ecuación:

$$-12x^2 + 36x - 15 = 0, \quad (0, 1pt)$$

soluciones que están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 720}}{-24},$$

lo cual entrega los valores $x = \frac{-36+24}{-24} = \frac{1}{2}$ (0,1pt) y $x = \frac{-36-24}{-30} = \frac{5}{2}$ (0,1pt). Las raíces de $Q(x)$ son $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$.

3.- Sean A, B, C tres conjuntos definidos por:

$$A = \{x \in [-200, 200] \mid (\exists r \in \mathbb{Z} : x = 2r - 1) \wedge (\exists r \in \mathbb{Z} : x = r^2)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 100 \wedge [\forall r \in \mathbb{N} : \left(\frac{x}{r} \in \mathbb{N} \implies (x = r \vee r = 1)\right)]\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid \nexists k \in \mathbb{Z} : x = 4k + 2\}.$$

i) Determine el valor de $n(A), n(B), n(A \cap B)$ y $n(A \cup B)$.

ii) Pruebe que $A \subset C$ y $B \subset C$.

Solución:

Primero se deben analizar los conjuntos A, B y C .

Sea $x \in A$, entonces x debe cumplir tres condiciones

- $(\exists r \in \mathbb{Z} : x = r^2)$.
- $(\exists r \in \mathbb{Z} : x = 2r - 1)$
- $x \in [-200, 200]$

La primera significa que $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ (0,1pt) y la segunda que x es un número impar (0,1pt), por lo tanto podemos concluir que :

$$A = \{1, 9, 25, 49, 81, 121, 169\}. \quad (0, 2pt)$$

Por otro lado sea $x \in B$, entonces x debe cumplir tres condiciones:

- $2 < x \leq 100$.
- $\forall r \in \mathbb{N} : \left(\frac{x}{r} \in \mathbb{N} \implies (x = r \vee r = 1)\right)$.
- $x \in \mathbb{N}$.

La segunda condición nos dice que todo elemento natural que divida en \mathbb{Z} a x o debe ser 1 o el mismo x , es decir que x debe ser un número primo (0,2pt), por lo tanto podemos concluir que:

$$B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}. \quad (0, 2pt)$$

El conjunto C es solo el conjunto de los números impares en \mathbb{N} .

i) Con lo anterior, es fácil notar que :

- $n(A) = 7$ (0,1pt).
- $n(B) = 24$ (0,1pt).
- $n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$ (0,1pt).
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 24 - 0 = 31$ (0,1pt).

- ii) El conjunto C es solo el conjunto de todos los x que no se pueden escribir de la forma $4k + 2 = 2(2k + 1)$ para $k \in \mathbb{Z}$, es decir, es el conjunto de todos los números reales que no son los números pares de la forma antes dicha (en particular, todos los números impares están contenidos en C). (0,4pt).

Sea $x \in A$, supongamos que x se puede escribir de la forma $x = 4k + 2$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, esto sería una contradicción ya que x es un número impar, por lo tanto $A \subset C$.(0,2pt).

También es válido probar que cada elemento de A no se puede escribir de dicha manera.

Por otro lado, para B , basta notar que todo número primo es impar, ya que de no serlo, sería par y por ende sería divisible por 2, por lo tanto B es un conjunto compuesto de solo números impares y ninguno de ellos se podría escribir de la forma $4k + 2$, por lo tanto $B \subset C$.(0,2pt).

También es válido probar que cada elemento de B no se puede escribir de dicha manera.