GUÍA DE EJERCICIOS 11

Dinámica y Energía Rotacional. Momento de Inercia

Ideas clave

- La **energía cinética rotacional** $\boldsymbol{K_R}$ de un cuerpo rígido que rota con rapidez angular ω en torno a un eje fijo, se puede determinar considerándolo como un conjunto de partículas de masa m_i posicionadas a una distancia r_i del eje de rotación. La energía cinética total del cuerpo en rotación se expresa en términos de su **momento de inercia $\boldsymbol{I}$** como:

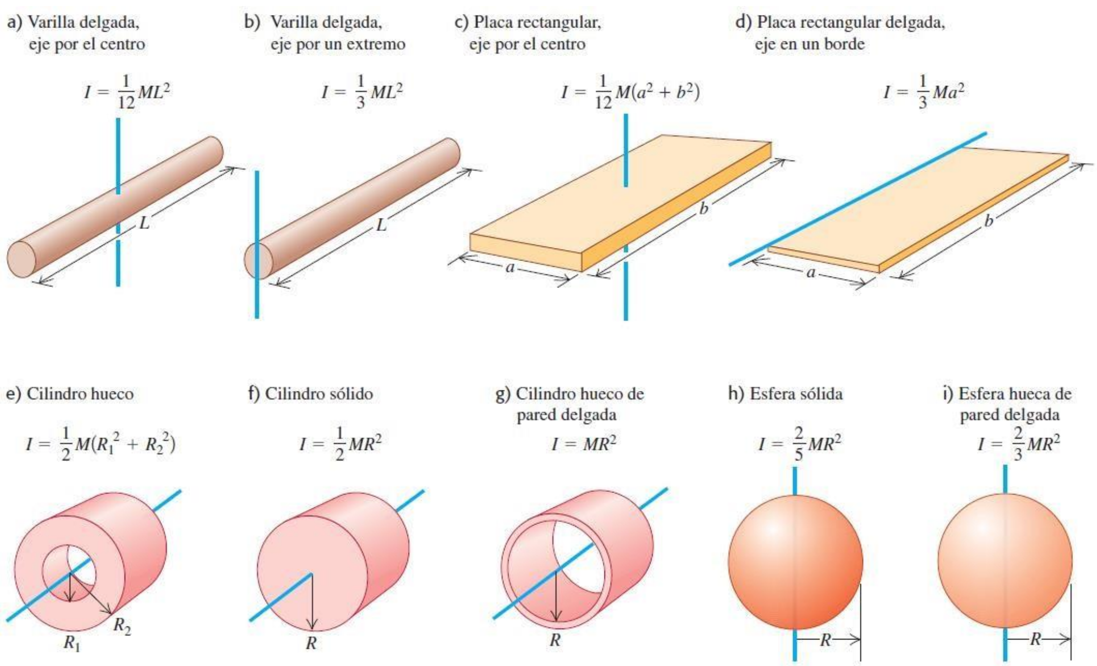
$$K_R = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum (m_i r_i^2) \omega_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

- El **momento de inercia $\boldsymbol{I}$** de cuerpo rígido homogéneo se puede determinar si se conoce su densidad ρ y su geometría:

$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV$$

- Momentos de inercia de objetos de geometría simple:



- El **teorema de ejes paralelos** permite determinar el momento de inercia I de un cuerpo rígido homogéneo de masa M que rota en torno a un eje paralelo ubicado a una distancia D respecto a su centro de masa, de la forma:

$$I = I_{CM} + MD^2$$

- La magnitud del **momento de fuerza o torsión** τ asociado a una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre a un cuerpo rígido a una distancia $\vec{r}$ de su eje de rotación es:

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi = Fd$$

  Donde ϕ es el ángulo entre el vector posición y el de la fuerza aplicada y d es conocido como el brazo de momento de fuerza.

  De forma análoga a la segunda ley de Newton, si sobre un cuerpo rígido actúa un momento de torsión de magnitud neta $\tau_{neto} = \sum \tau_i$ tendrá una aceleración angular α de acuerdo con:

$$\tau_{neto} = I\alpha$$

Recuerda:

- Todos los resultados deben ser reportados en Sistema internacional
- Evalúa el orden de magnitud de tu resultado y justifica tu respuesta.
- En todos los ejercicios de cinemática incluye el gráfico que corresponda.

Preguntas conceptuales

1. Una hoja de un par de tijeras da vueltas contra las manecillas del reloj en el plano *XY*. ¿Cuál es la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}$? ¿Cuál es la dirección de la aceleración angular $\vec{\alpha}$ si la magnitud de $\vec{\omega}$ disminuye con el tiempo?

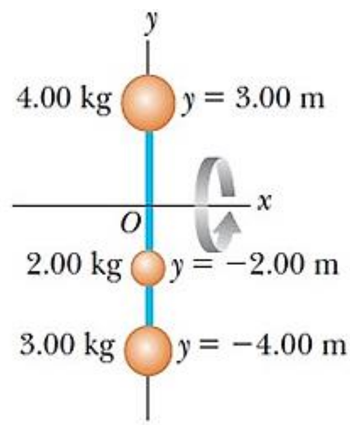
2. Explique porqué al cambiar el eje de rotación de un objeto cambia su momento de inercia.

3. Suponga que sólo dos fuerzas externas actúan sobre un objeto rígido estable y las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. ¿En qué condiciones el objeto comienza a dar vuelta?

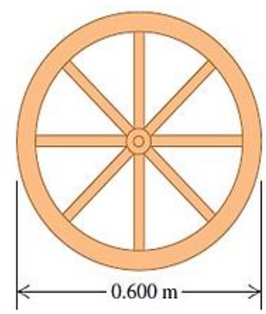
4. Si ve un objeto girando, ¿necesariamente existe un momento de torsión neto actuando sobre él?

Problemas

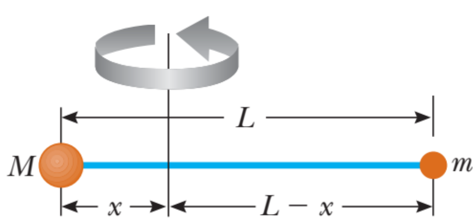
5. Tres objetos puntuales (considerados partículas) se encuentran conectados mediante barras rígidas de masa despreciable que yacen a lo largo del eje *y*. El sistema da vueltas en torno al eje *x* con una rapidez angular de 2 rad/s. Determina a) el momento de inercia en torno al eje *x* y la energía cinética rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\omega^2$ y b) la rapidez tangencial de cada partícula y la energía cinética total evaluada a partir $\sum\frac{1}{2}m_i v_i^2$. c) Compara las respuestas para energía cinética en los incisos a) y b). (Respuestas: a) 92 kgm² y 184 J, b) $v_{3kg} = 6$ m/s, $v_{2kg} = 4$ m/s, $v_{4kg} = 8$ m/s y 184 J, c) son iguales)



6. Una rueda de carreta tiene un radio de 0,3 m y la masa de su borde es de 1,4 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tiene 0,3 m de longitud, tiene una masa de 0,28 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Respuesta: 0,193 kgm²)

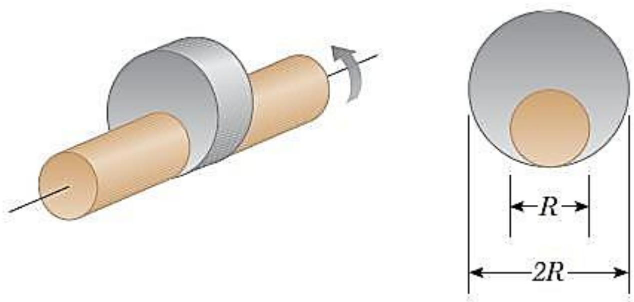


7. Dos bolas con masas M y m se conectan mediante una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la siguiente figura. Para un eje perpendicular a la barra, a) demuestra que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa a través del centro de masa. B) Demuestra que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = {}^{mM}/_{(m+M)}$.



8. Calcula el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa *M* y radio *R*, alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por el borde. (Respuesta: $2MR^2$)

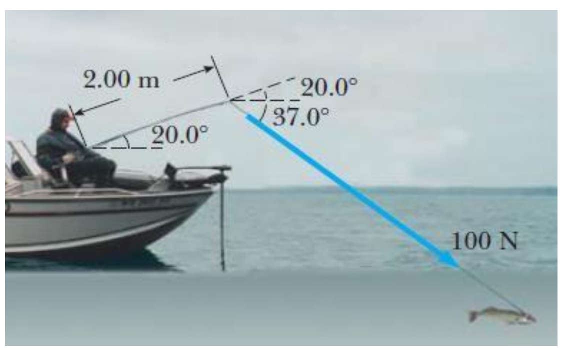
9. Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos, como lo es abrir y cerrar válvulas. En la figura abajo, la leva es un disco circular giratorio sobre un eje que no pasa a través del centro del disco. En la fabricación de la leva, primero se elabora un cilindro sólido uniforme de radio R. Luego se taladra un agujero fuera del centro, de radio $R/2$, paralelo al eje del cilindro y con centro en un punto a una distancia $R/2$ desde el centro del cilindro. Después, la leva de masa M se desliza sobre la flecha circular y se suelda en su lugar. Al respecto, ¿cuál es la energía cinética de la leva cuando gira con rapidez angular ω en torno al eje del árbol? (Respuesta: $\frac{23\mathrm{MR}^2}{48} \cdot \omega^2$, pista: aplicar teorema de ejes paralelos)



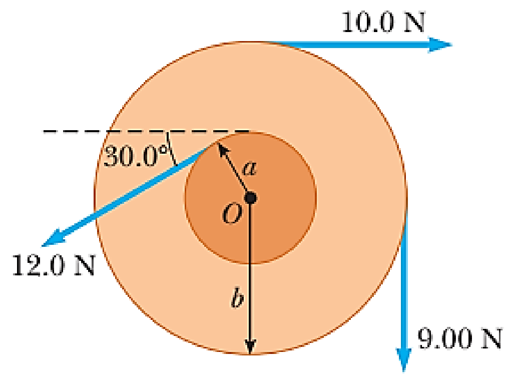
10. Una puerta delgada sólida uniforme tiene 2,2 m de altura, 0,87 m de ancho y 23 kg de masa. Determina el momento de inercia para rotación en sus bisagras. ¿Alguna parte de la información es innecesaria? (Respuestas: 5,8 kgm^2 y es innecesaria la altura de la puerta al ser delgada)

11. Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L se dobla por su centro de manera que los dos segmentos que se forman son ahora perpendiculares entre sí. Determina el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por a) el punto donde se cruzan los dos segmentos y b) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos. (Repuestas: a) $\frac{ML^2}{12}$, b) $\frac{5ML^2}{24}$, pista: aplicar teorema de ejes paralelos)

12. La caña de pescar en la figura abajo forma un ángulo de 20° con la horizontal. Al respecto, ¿cuál es el momento de torsión que ejerce el pez en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de las manos del pescador? (Respuesta: 167,73 Nm)

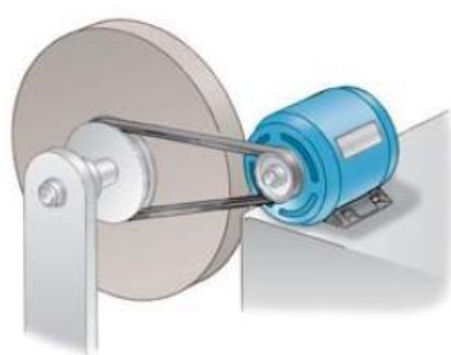


13. Determina el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura en torno al eje a través de O, considerando $a = 10\ cm$ y $b = 25\ cm$.
(Respuestas: $-3{,}55\ Nm$)



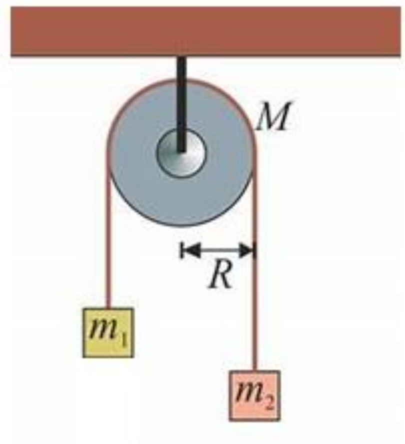
14. Un avión a escala con 0,75 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en una circunferencia de 30 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0,8 N perpendicular al alambre de unión. a) Determina el momento de torsión o de fuerza que produce el empuje neto en torno al centro de la circunferencia. b) Obtiene la magnitud de la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel. c) Determina la aceleración traslacional del avión, tangente a su trayectoria de vuelo. (Respuestas: a) 24 Nm, b) 0,036 rad/s^2 y c) 1,067 m/s^2)

15. Un motor eléctrico hace girar un volante mediante una banda transportadora que acopla una polea en el motor y una polea que está rígidamente unida al volante. El volante es un disco sólido de 80 kg y un diámetro de 1,25 m que da vueltas sobre un eje sin fricción. Su polea tiene una masa mucho más pequeña y un radio de 0,23 m. La tensión en el segmento superior (tenso) de la banda es 135 N y el volante tiene una aceleración angular en sentido de las manecillas del reloj de magnitud 1,67 rad/s^2. Determina la tensión en el segmento inferior (flojo) de la banda. (Respuesta: 21,65 N)



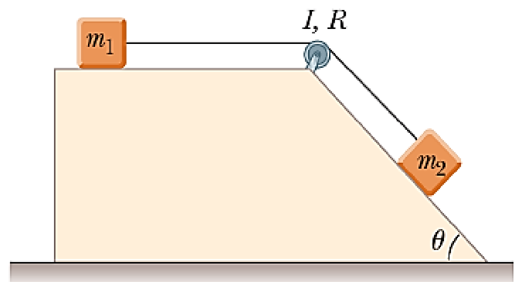
16. Un disco uniforme con masa de 40 kg y radio de 0,2 m pivota en su centro alrededor de un eje horizontal, sin fricción que está en reposo. El disco está inicialmente en reposo, y luego se aplica una fuerza constante $\vec{F} = 30\ N$ tangente al borde del disco. *a*) ¿Cuál es la magnitud v de la velocidad tangencial de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0,2 revoluciones? *b*) ¿Cuál es la magnitud a de la aceleración resultante de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0,2 revoluciones? (Respuestas: a) 0,868 m/s y b) 4,06 m/s^2)

17. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están suspendidos de una polea que tiene un radio R y una masa M como representa en la figura del costado. La cuerda tiene una masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizar y sin fricción. Los bloques empiezan a moverse desde el reposo cuando están separados por una distancia vertical d. Considerando la polea como un disco uniforme, determine la velocidad de los dos bloques cuando pasan uno frente al otro. Obtiene explícitamente dicho valor considerando: m_1= 15 kg, m_2= 10 kg, R = 10 cm, M = 3 kg y d = 3 m.

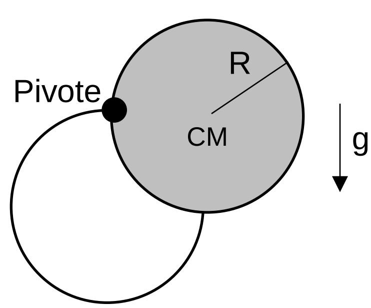


(Respuesta: $v = \sqrt{\left[\frac{2 \cdot m_1 . g \cdot d}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\right]} = 5{,}77\ \frac{m}{s}$)

18. Un bloque de masa $m_1 = 2\ kg$ y un bloque de masa $m_2 = 6\ kg$ están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en la forma de un disco sólido que tiene radio $R = 0{,}25\ m$ y masa $M = 10\ kg$. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo $\theta = 30°$, como se muestra en la figura del costado. El coeficiente de fricción cinética es 0,36 para ambos bloques. Dibuja diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determina a) la aceleración de los dos bloques y b) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea. (Respuestas: a) 0,309 m/s^2, b) 7,67 N y 9,22 N)

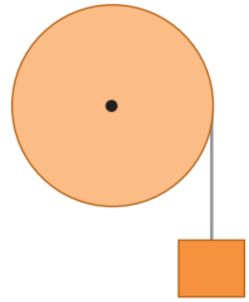


19. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde, como muestra la figura del costado. Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo gris, a) determina la velocidad de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada por el círculo blanco. b) Obtiene la velocidad del punto más bajo sobre el disco en la posición del círculo blanco. c) Repite el inciso a) para un aro uniforme.



(Respuestas: a) $v_{CM} = 2\sqrt{\left(\frac{gR}{3}\right)}$, b) $v = 4\sqrt{\left(\frac{gR}{3}\right)}$ y c) $v_{CM} = \sqrt{\left(\frac{2gR}{3}\right)}$)

20. Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura. La rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda es un disco uniforme de radio *R* = 0,28 m. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un objeto de *m* = 4,2 kg. El sistema se libera del reposo y el objeto desciende con aceleración constante una distancia de 3 m en 2 s. ¿Cuál es la masa de la rueda? (Respuesta: 46,5 kg)



21. La densidad de la Tierra, a cualquier distancia *r* desde su centro, es aproximadamente $\rho_{Tierra} = \left(14{,}2 - 11{,}6\frac{r}{R}\right) \cdot 10^3$ kg/m³ donde *R* es el radio de la Tierra. Demuestre que esta densidad conduce a un momento de inercia $I = 0{,}330MR^2$ en torno de un eje que pasa por el centro, donde *M* es la masa de la Tierra. (Pista para solución: a partir de la definición $\rho = \frac{M}{V}$, donde M es la masa y V el volumen, determinar variables que pueden ser usados en la definición del momento de inercia)

Referencias

Algunos ejercicios de esta guía se basan en los siguientes libros:

- *Sears* F.W., *Zemansky* M.W., Young H.D., Freedman R.A. (2004). *Física Universitaria*, (11a *ed. vol. I)*. Addison Wesley Longman, México, 2004.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Física: Para ciencias e ingeniería con Física Moderna* (7a. ed. vol. I). México D.F.: Cengage.