Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:________________________Sección:________________________

Control 1

Forma A (Pauta)

1.- Sea la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow \left(\frac{x+3y}{2}, \frac{5x-y}{3} \right) \end{aligned}$$

i) Pruebe que f es biyectiva.
Sean (x_1, y_1) y $(x_2, y2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, con esto se tiene que:

$$\left(\frac{x_1+3y_1}{2}, \frac{5x_1-y_1}{3} \right) = \left(\frac{x_2+3y_2}{2}, \frac{5x_2-y_2}{3} \right).$$

Igualando las coordenadas, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{x_1+3y_1}{2} = \frac{x_2+3y_2}{2}$$

$$\frac{5x_1-y_1}{3} = \frac{5x_2-y_2}{3}$$

obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 3y_1 = x_2 + 3y_2 \\ 5x_1 - y_1 = 5x_2 - y_2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 y luego sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$16x_1 = 16x_2,$$

obteniendo así que $x_1 = x_2$.
Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 1 se obtiene que:

$$3y_1 = 3y_2,$$

y por lo tanto $y_1 = y_2$, concluyendo así que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ y por lo tanto queda demostrado que f es inyectiva.

Por otro lado, para probar la sobreyectividad, tomemos un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (a,b)$.
Con lo anterior se tiene se puede obtener el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = a \\ \frac{5x-y}{3} = b \end{cases}$$

Despejando y de la segunda ecuación se obtiene $y = 5x-3b$, y luego podemos reemplazarlo en la ecuación 1 obteniendo:

$$x + 3(5x - 3b) = 2a,$$

la cual tiene como resultado para x :

$$x = \frac{2a + 9b}{16}.$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación $y = 5x - 3b$ queda:

$$y = 5 \cdot \frac{2a + 9b}{16} - 3b = \frac{10a - 3b}{16}.$$

Como $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = Rec(f) = Codom(f),$$

por lo tanto, se concluye que f es sobreyectiva.

Como f es sobreyectiva e inyectiva, se tiene que f es biyectiva.

ii) Determine f^{-1}.

Como la función f es biyectiva, existe su función inversa f^{-1}, la cual está descrita según la regla de asignación obtenida anteriormente, así:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \left(\frac{2x + 9y}{16}, \frac{10x - 3y}{16} \right) \end{aligned}$$

2.- Sean las funciones:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x^2+1}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{x^2+3} \end{aligned}$$

i) Determine los conjuntos:

- $g(\{-3,0,3\}) = \{g(-3), g(0), g(3)\} = \{\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\}$.
- $h(\{-3,0,3\}) = \{h(-3), h(0), h(3)\} = \{\sqrt{12}, \sqrt{3}\}$.
- $g^{-1}(\{-2,0,5\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = -2 \vee g(x) = 0 \vee g(x) = 5\} = \{-\sqrt{14}, \sqrt{14}\}$.
- $h^{-1}(\{-2,0,5\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = -2 \vee h(x) = 0 \vee h(x) = 5\} = \{-\sqrt{22}, \sqrt{22}\}$.

ii) Determine $(g \circ h)(x)$ y $(h \circ g)(x)$ y calcule $(g \circ h)(2)$ y $(h \circ g)(1)$.

Primero se debe encontrar una regla de asignación para las composiciones:

- $$\begin{aligned} (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(\sqrt{x^2+3}) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+3})^2+1}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h\left(\frac{x^2+1}{3}\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^2+3} \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(g \circ h)(2) = \frac{(\sqrt{2^2+3})^2+1}{3} = \frac{8}{3},$$

y

$$(h \circ g)(1) = \sqrt{\left(\frac{1^2+1}{3}\right)^2+3} = \frac{\sqrt{31}}{3}$$