Límites y límites laterales

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to c} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x) \implies \lim_{x\to c} f(x) \text{ no existe}$$

Límites de funciones simples

$$\lim_{x\to c} a = a$$

$$\lim_{x\to c} x = c$$

$$\lim_{x\to c} ax + b = ac + b$$

$$\lim_{x\to c} x^r = c^r \qquad \text{si } r \text{ es entero positivo}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty, & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

Hechos sobre $\pm\infty$

Si $a \neq 0$ y $a < \infty$:

$$0 + \infty = \infty$$

$$a + \infty = \infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

Hecho sobre funciones

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$$

$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to a} \log_a(x) = \log_a(a) = 1$$

Si $a > 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \log_{10} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \log_a x = \lim_{x\to \infty} \ln x = \lim_{x\to \infty} \log_{10} x = \infty$$

Si $a < 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \log_a x = -\infty$$

Formas Indeterminadas

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \times \infty,\ 1^\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0 \text{ y } \infty^0$$

Formas no Indeterminadas

Si $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\left[\frac{1}{0}\right]$ entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -\infty, \\ +\infty, \\ \text{no existe} \end{cases}$$

Si $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ tiene la forma $[0^\infty]$ entonces

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = 0$$

Límites cerca de Infinito

$$\lim_{x\to \infty} a/x = 0, \qquad \text{para todo real } a$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt[a]{x} = \infty \qquad \text{para todo } a > 0$$

$$\lim_{x\to \infty} x/a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ \text{no existe }, & a = 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \infty} a^{-x} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Límites de Polinomios

$$\lim_{x\to\infty}[a_n x^n + ... + a_1] = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \qquad \text{máxima potencia}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{mx^a}{nx^b} = \begin{cases} 0, & a<b \\ \frac{m}{n}, & a=b \\ \infty, & a>b \end{cases}$$

Límites de funciones generales

Si $\lim_{x\to c} f(x) = F$ y $\lim_{x\to c} g(x) = G$ entonces

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = F \pm G$$

$$\lim_{x\to c}[a \cdot f(x)] = a \cdot F$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = F \cdot G$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \qquad \text{si } G \neq 0$$

$$\lim_{x\to c} f(x)^n = F^n \qquad \text{si } n \text{ es entero positivo}$$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{F} \qquad \text{si } n \text{ es entero positivo,}$$

y si n es par, entonces $F > 0$

Aplicaciones de L'Hopital

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c}\exp[g(x)\cdot\ln(f(x))] =$$

$$\lim_{x\to c}\exp\left(\frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to c}\frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}\right)$$

luego aplicar L'Hopital

Transformaciones de otras formas indeterminadas a $[\frac{0}{0}]$, para aplicar L'Hopital

∞/∞	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{1/g(x)}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c}\frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$
0^0	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{1/\ln f(x)}\right)$
1^∞	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to c}\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}\right)$
∞^0	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{1/\ln f(x)}\right)$

Teorema de Sandwich

Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a, excepto posiblmemente en a, y

$$\lim_{x\to c} f(X) = \lim_{x\to c} h(x) = L, \qquad \text{entonces}$$

$$\lim_{x\to c} g(X) = L$$

Composición de funciones

Si $f(x)$ es continua $\lim_{x\to c} g(x) = G$ entonces

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(G)$$

Límites y Derivadas

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\sqrt[h]{\frac{f(x+h)}{f(x)}} = \exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\sqrt[h]{\frac{f(x+h\cdot x))}{f(x)}} = \exp\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)$$

Regla de L'Hopital

si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ o

si $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ entonces

Infinitésimos Equivalente

Estas funciones de la forma $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to c$. Si $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $[\frac{0}{0}]$ entonces son intercambiables:

$$x \sim \sin(x)$$

$$x \sim \arcsin(x)$$

$$x \sim \sinh(x)$$

$$x \sim \tan(x)$$

$$x \sim \arctan(x)$$

$$x \sim \ln(1+x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\cosh(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

$$a^x - 1 \sim x\ln(a)$$

$$e^x - 1 \sim x$$

Funciones Trigonométricas

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1 \qquad \text{para } a \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to n^{\pm}} \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \mp\infty \qquad \text{para todo entero } n$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b} \qquad \text{para } b \neq 0$$

Límites Especiales Notables

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{mk}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = \frac{1}{e^k}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a = log_e(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{c^{ax}-1}{bx} = \frac{a}{b}\ln c$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x} = n$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n-a^n}{x-a} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1+a\left(e^{-x}-1\right)\right)^{-1/x} = e^a$$

Logaritmos y exponentes

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_c(1+ax)}{bx} = \frac{a}{b\ln c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln\left(1+a\cdot\left(e^{-x}-1\right)\right)}{x} = a$$

Ejemplos de Técnicas

Factorar y Cancelar

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+6}{x} = \frac{8}{2} = 4$$

Racionalizar numerador/denominador

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} = \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}\cdot\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 9} \frac{9-x}{\left(x^2-81\right)\left(3+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})} = \frac{-1}{(18)(6)} = -\frac{1}{108}$$

Combinar expresiones racionales

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Polinomios al Infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4}{5x-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{5}{x}-2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}-2} = -\frac{3}{2}$$