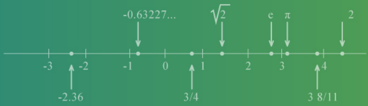
Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

# LOS NÚMEROS REALES:
## *Axiomas de Orden*




**Coordinación de Cálculo I**
Primera versión - Agosto 2020

**Profesor:**
Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

# LOS NÚMEROS REALES:
## *Axiomas de Orden*

**Coordinación de Cálculo I**

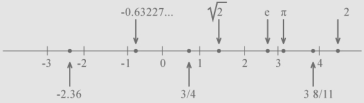
Primera versión - Agosto 2020


**Colaboradores:**

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

**Profesor:**

Patricio Cerda Loyola


FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

# Axiomas de Orden

Los axiomas de orden establecen una relación de tamaño entre los números reales, así se puede decidir si un número real es menor o mayor que otro.
Los axiomas de orden son un conjunto de reglas que utilizan el concepto de positivo para definir los conceptos de "mayor que" y "menor que".

## Axiomas de Orden

Supondremos que existe $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ que satisface los dos axiomas de orden y que llamaremos conjunto de los *números reales positivos.*

**Clausura:**

- Para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $a + b \in \mathbb{R}^+$.
- Para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $ab \in \mathbb{R}^+$.

**Tricotomía:**

- Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple una y solo una de las afirmaciones: $a \in \mathbb{R}^+$, $-a \in \mathbb{R}^+$ ó $a = 0$

## Observación

*Si $a \in \mathbb{R}^+$ diremos que $a$ es positivo.*

## Definiciones:

Ahora podemos definir

a) $a > b$ si y solo si $a - b \in \mathbb{R}^+$.

b) $a < b$ si y solo si $b - a \in \mathbb{R}^+$

## Definiciones:

Ahora podemos definir

c) $a \geq b$ si y solo si $a > b$ ó $a = b$.

d) $a \leq b$ equivale a $b \geq a$.

## Observación

*Por tanto $a > 0$ equivale decir que $a$ es positivo, si $a < 0$ diremos que $a$ es negativo y si $a \geq 0$ entonces diremos que $a$ es no negativo.*

## Propiedades que se despreden de los axiomas de Orden:

1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones $a < b$, $b < a$ ó $a = b$.

## Propiedades que se despreden de los axiomas de Orden:

2) **Transitividad:** Para todo $a, b$ y $c$ reales se tiene que si $a < b$ e $b < c$ entonces $a < c$.

   Geométricamente, si $a$ está a la izquierda de $b$ e $b$ a la izquierda de $c$ entonces $a$ está a la izquierda de $c$.

3) Para todo $a, b$ y $c$ reales se tiene que si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
4) Para todo $a, b$ y $c$ reales se tiene que si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
5) Para todo $a, b$ y $c$ reales se tiene que si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.
6) si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
7) Si $ab > 0$ entonces son ambos positivos o ambos negativos.
8) Para todo $a, b, c$ y $d$ tal que $a < b$ y $c < d$ se tiene $a + c < b + d$.

Demostraremos la propiedad dos y ocho. La demostración del resto quedará como ejercicio.

## Demostración propiedad 2, transitividad

Para la transitividad tenemos que las hipótesis equivalen a que $b - a > 0$ y $c - b > 0$.

Utilizando el axioma de Clausura, conmutatividad y asociatividad se tiene que $(b - a) + (c - b) = c - a > 0$. Así $a < c$.

## Demostración de la propiedad 8

Si $a < b$ y $c < d$, equivalentemente $0 < b - a$ y $0 < d - c$ ahora utilizando la clausura de la adición se tiene que $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c) > 0$, equivalentemente $b + d > a + c$.

Ahora veremos algunos ejemplos en los cuales usaremos las propiedades anteriores para resolver inecuaciones.

## Ejemplo 1

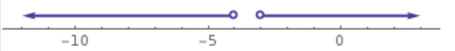
Resolver la inecuación $4x + 7 > 0$.

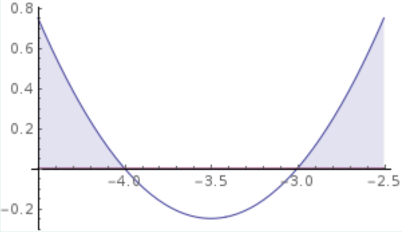
*Solución:* Notar que $4x + 7 > 0$ es equivalentemente a $4x > -7$ y por tanto $x > -7/4$, es decir $x \in (-7/4, \infty)$ y gráficamente

## Ejemplo 2

Resolver la siguiente inecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 > 0$.

*Solución:* La ecuación $x^2 + 7x + 12 > 0$, es equivalente a $(x+3)(x+4) > 0$ y por tanto $x < -4$ ó $x > -3$, así $x \in (-\infty, -4) \cup (-3, \infty)$, y gráficamente



## Ejemplo 3

Resolver la inecuación

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$$

*Solución:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &= \frac{x(x+1) + (x-1)(x+1) + (x-1)x}{(x-1)x(x+1)} \\ &= \frac{3x^2-1}{(x-1)x(x+1)} > 0\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-1}{(x-1)x(x+1)} &= \frac{(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)}{(x-1)x(x+1)} \\ &= 3\frac{(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})}{(x-1)x(x+1)} = R(x)\end{aligned}$$

Se necesita saber para que valor de $x \in \mathbb{R}$ si la expresión dada es positiva, para eso estudiamos los signos de cada paréntesis en el numerador y denominador. Usamos la siguiente tabla que dará esa información.

## Continuación Ejemplo 3

| | $-1$ | $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1/\sqrt{3}$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1/\sqrt{3}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $R(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Así $x \in (-1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (1, \infty)$.

## Ejercicios Propuestos:

Resolver las siguientes inecuaciones.

1. $1/(x-\pi)+1/(x+3)>-2.$
2. $x^2-197<-1.$
3. $\dfrac{2-x}{x^2+3x+2}$
4. $4x^4-12x^2+9<0$
5. $(1+x)+(2+x)+...+(15+x)>121.$
6. $x^3>1.$
7. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2-x}{x-1}\leq 1$
8. $x^2+10x+27<0.$

# LOS NÚMEROS REALES:
## *Axiomas de Orden*

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

**Coordinación de Cálculo I**

Primera versión - Agosto 2020

**Profesor:**

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE