GUÍA 2
Magnitudes Físicas Vectoriales

Objetivos de aprendizaje

Esta guía sirve de soporte a la primera unidad del curso: Magnitudes físicas

Las capacidades que tienes que comprobar o desarrollar a través de esta guía son:

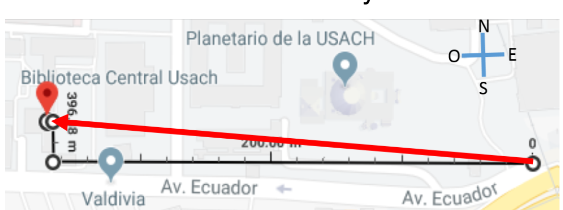
- Expresar correctamente una magnitud física vectorial
- Medir la magnitud, dirección y sentido de un vector
- Sumar vectores
- Descomponer vectores en un sistema de referencia

A. Motivación

Supongan que un amigo le indica cómo llegar a un lugar de la manera siguiente: “Está a dos kilómetros”. Por supuesto es imposible llegar al lugar con esta sola indicación. En término de física se indicó solamente la magnitud del desplazamiento necesario. Falta agregar información: -¿por dónde? (dirección y sentido). “Está a dos kilómetros, al Sur” entrega la información correcta.

El concepto matemático de **vector** permite describir este tipo de magnitudes: junta la información de **magnitud, dirección y sentido**. Se dice que el desplazamiento es una magnitud vectorial. Existen muchos conceptos físicos que necesitan precisar magnitud, dirección y sentido. Por ejemplo: la velocidad, la aceleración, las fuerzas, las torques, etc. Al contrario el tiempo, la presión, la masa, la temperatura, no necesitan indicar dirección y sentido: esas magnitudes se llaman magnitudes escalares.

En varios casos, es también útil contestar “¿desde dónde?”. De esta pregunta nace la necesidad de definir un **sistema de referencia** que indique un punto de origen, direcciones y magnitudes de referencia (representadas por **vectores unitarios**).Por ejemplo, ocupando como magnitud de referencia el metro y direcciones de referencia Oeste-Este y Sur-Norte, desde la entrada de la USACH (origen), el departamento de física está a 367 m al oeste y 29 m al norte.



Vector desplazamiento desde la entrada de la USACH al departamento de Física

En la asignatura de Física I, un buen manejo del concepto de vector es obligatorio para entender las nociones de fuerza, torque y equilibrio mecánico.

B. Ideas clave

Magnitudes vectoriales

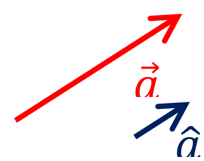
1. Existen magnitudes físicas que además de tener un valor numérico, necesitan definir además una dirección y un sentido. Por ejemplo el desplazamiento entre 2 lugares, la velocidad, la aceleración, las fuerzas y otras. Estas magnitudes se llaman **magnitudes vectoriales**.

2. Se representan a partir del concepto matemático de **vector** representado, por ejemplo, por una flecha.

3. El largo de la flecha representa la **magnitud** del vector. Su **dirección** está dada por las rectas paralelas al vector. La posición de la extremidad con flecha da el **sentido** del vector.

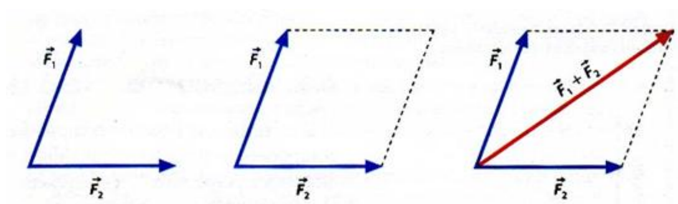
Vector unitario

4. Se puede representar el vector $\vec{\boldsymbol{a}}$ a través de un **vector unitario,** el cual tiene igual dirección y sentido pero con magnitud de una unidad. Se escribe $\hat{\boldsymbol{a}}$ y está definido por $\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}$ donde $|\vec{a}|$ representa la magnitud del vector.
Ejemplo: en la figura se representa $\vec{a} = 3\,\hat{a}$

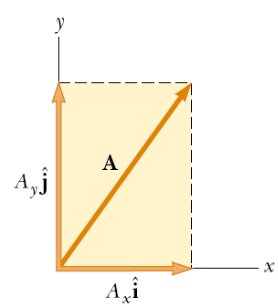


Suma de vectores

5. Para realizar geométricamente la **suma de dos vectores** se puede ocupar la ***regla del paralelogramo***



Componentes de vectores



6. Si $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ son dos vectores unitarios perpendiculares, un vector se puede **descomponer** de una única manera como la suma de un vector paralelo a $\hat{\imath}$ y de un vector paralelo a $\hat{\jmath}$:
7. Las **componentes** $\boldsymbol{A_x}$ y $\boldsymbol{A_y}$de un vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ en la base **(**$\hat{\boldsymbol{\imath}}$,$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$**)** son definidos por la relación siguiente:

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{A_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

8. Para determinar la **suma** de dos vectores a partir de su componentes:

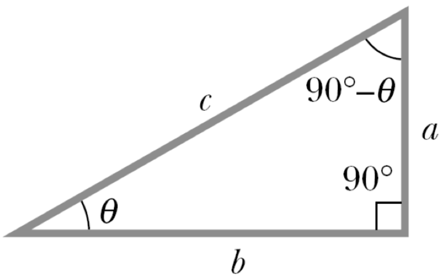
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}) = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$$

9. Se **multiplica** un vector con un escalar a partir de su componentes:

$$\lambda\vec{A} = \lambda A_x\hat{\imath} + \lambda A_y\hat{\jmath}$$

C. Trigonometría básica:

Trigonometría básica en el triángulo rectángulo:



Funciones trigonométricas:

$$sen\ \theta = \frac{a}{c}\ ;\ cos\ \theta = \frac{b}{c}\ \ y\ \ tan\ \theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{a}{b}$$

$$cos^2\theta\ + sen^2\theta = 1$$

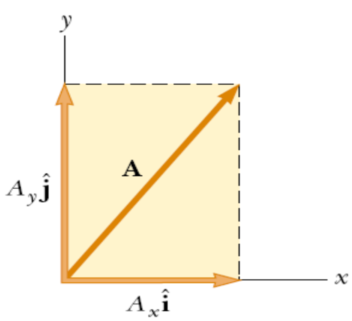
Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

D. Métodos

A. *Conozco las componentes y necesito calcular su magnitud y dirección*



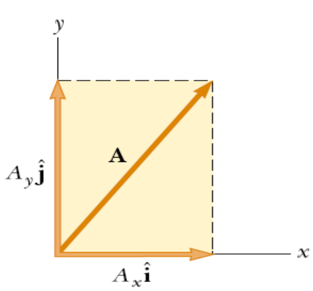
- Magnitud:

$$A = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}}$$

- Dirección (con las convenciones de la figura a la izquierda):

$$\tan\phi = \frac{|A_x|}{|A_y|} \qquad \tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|}$$

B. *Conozco la magnitud y dirección y necesito determinar las componentes*

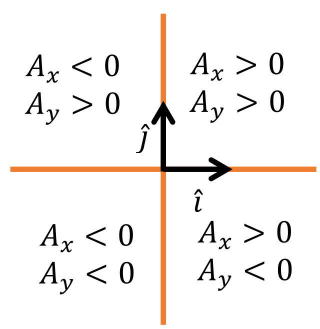


I. Determino las magnitudes de las componentes a partir de las relaciones de trigonometría en el triángulo rectángulo

$$|A_x| = A\cos\theta \qquad |A_y| = A\sin\theta$$

II. Determino el signo de las componentes identificando en que cuadro se dirige el vector. *(en el ejemplo a la izquierda $A_x > 0$ y $A_y > 0$)*

III. Escribo las componentes



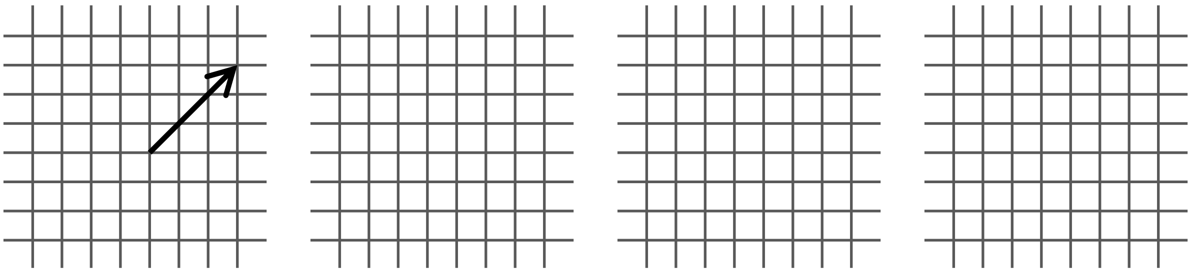
Ejercicios Propuestos

Magnitud y ponderación de vectores

Las estrellas indican la dificultad del ejercicio, estimada por los ayudantes del curso.

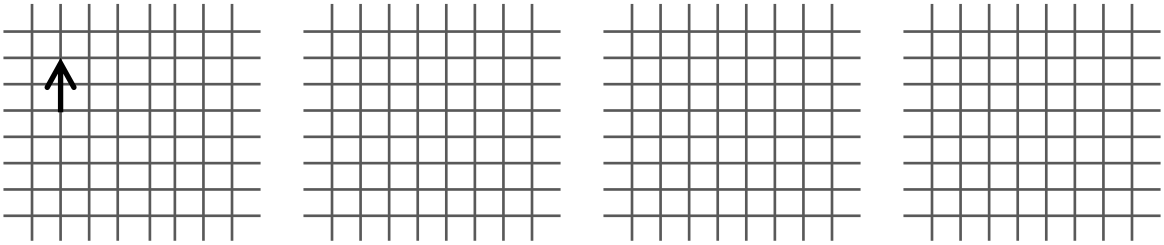
Ejercicio 1 ★★

Sea el vector $\vec{t}$ representado en la figura a la izquierda. Representa, ocupando los otros cuadros, los vectores siguientes: $\frac{1}{3}\vec{t}$, $2\vec{t}$ y $-\vec{t}$.



Ejercicio 2 ★★

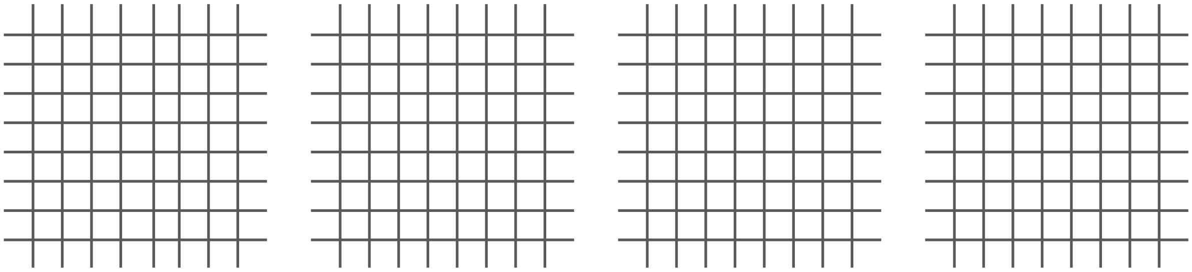
Sea el vector unitario $\hat{u}$ representado en la figura a la izquierda. Representa los 3 casos siguientes: $\vec{a} = 2\hat{u}$, $\vec{a} = -3\hat{u}$, $\hat{a}$ es un vector unitario perpendicular a $\hat{u}$ (hay 2 posibilidades).



Ejercicio 3 ★

Representa un vector:

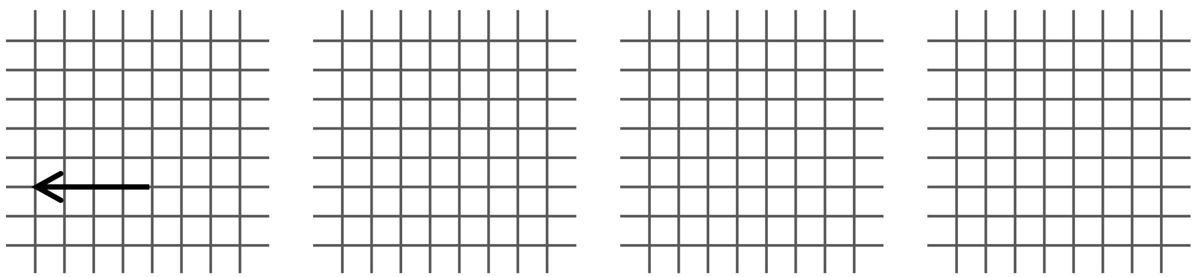
a. Vertical, apuntando hacia arriba
b. Horizontal, apuntando hacia la izquierda
c. Apuntando hacia la derecha y arriba, haciendo un ángulo de 30° con la horizontal.
d. Apuntando hacia la derecha y abajo, haciendo un ángulo de 45° con la vertical.



Ejercicio 4 ★

Si el vector $\vec{V}$ representado en la figura siguiente y a la izquierda es una velocidad de magnitud 10 m/s, representa:

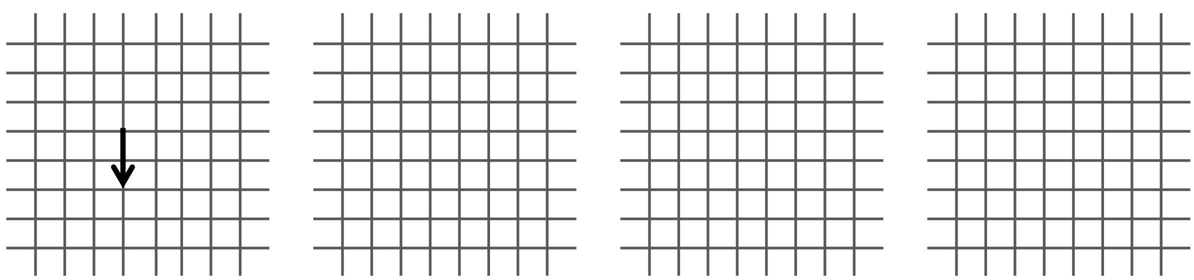
a. una velocidad de igual dirección y sentido, pero de magnitud 5 m/s.
b. un vector que represente una velocidad de igual dirección y magnitud, pero sentido opuesto.
c. el vector unitario de igual dirección y sentido que $\vec{V}$



Ejercicio 5 ★★

Si el vector $\vec{D}$ representa un desplazamiento de magnitud 1 pulgada (1 pulgada equivale 0,0254m); representa:

a. Un desplazamiento de igual dirección y sentido pero de magnitud 2 pulgadas.
b. Un desplazamiento de igual dirección y sentido pero de magnitud 2,54 cm.
c. Un desplazamiento de igual dirección sentido opuesto, pero de magnitud 3 pulgadas.



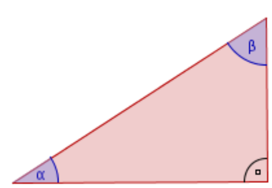
Trigonometría Básica

Ejercicio 6 ★★

Sabiendo que $0 \leq \alpha \leq 90°$ y que $\boldsymbol{sen\ \alpha = 3/5}$, calcula $\boldsymbol{cos\ \alpha}$ y $\boldsymbol{tan\ \alpha}$.

Ejercicio 7★★

Calcula el valor del ángulo $\boldsymbol{\beta}$ definido en la figura al lado sabiendo que ***α = 31.73 °***.



Ejercicio 8★★★

Cuáles son las longitudes de cada lado de un triángulo rectángulo sabiendo que tiene un ángulo de 25° y que uno de sus catetos mide 4,3 metros.

Ejercicio 9★★★
Un triángulo ABC tiene un ángulo recto en C y dos ángulos agudos en A y B. Los lados del triángulo AC y BC de ambos lados del ángulo recto C están dados por:
(a) AC = 3 BC = 4 (b) AC = 5 BC = 12 (c) AC = 8 BC = 15

En cada caso, usa el teorema de Pitágoras para encontrar el tercer lado y luego encuentra el seno y el coseno de los ángulos en A y B.

Ejercicios avanzados sobre magnitudes vectoriales

Ejercicio 10★★★
Observamos el punto más alto de una torre con un ángulo de 72° respecto a la horizontal. Si nos alejamos 350 metros, lo vemos con un ángulo de 31° respecto a la horizontal. ¿Cuál es la altura de la torre?

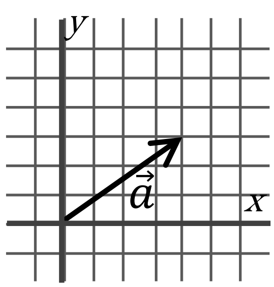
Ejercicio 11★★★
Estás ascendiendo por un camino y ves un signo que te indica que tiene una pendiente del 5 %, o sea que sube 5 m verticales por cada 100 m de avance horizontal. ¿Cuál es el ángulo entre el camino y la dirección horizontal?

Ejercicio 12★★★
Una topógrafa calcula el ancho de un río mediante el siguiente método: se para directamente frente a un árbol en el lado opuesto y camina 100 m a lo largo de la ribera del río y después mira el árbol. El valor del ángulo que forma el segmento entre ella y el árbol, con el ancho del río es de 35°.
Calcula el ancho del río.

Ejercicios básicos sobre suma y componentes vectoriales

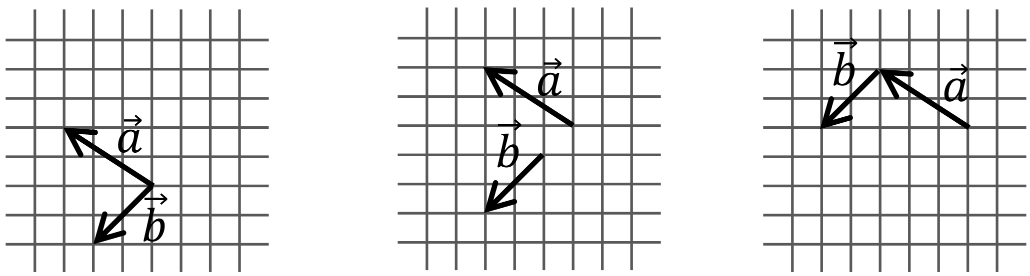
Ejercicio 13★★
La figura abajo muestra el vector $\vec{a}$ y los ejes x e y. El lado de un cuadro mide una unidad.

a. Descomponga el vector $\vec{a}$ en la suma de un vector en la dirección del eje x y un vector en la dirección del eje y.
b. ¿Cuánto vale la magnitud de las componentes de $\vec{a}$ en x y en y ?



Ejercicio 14★

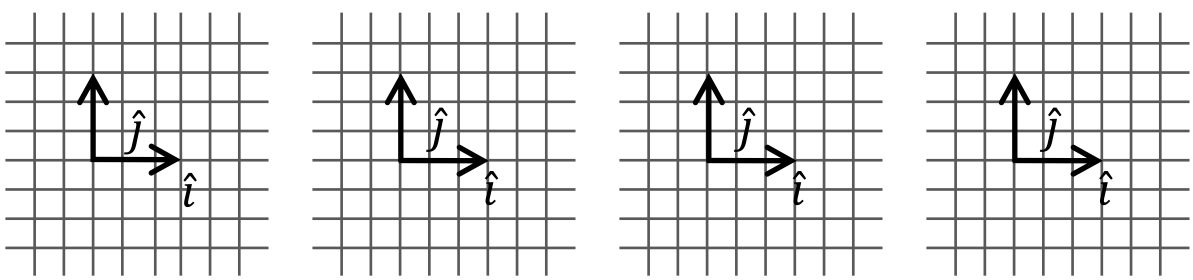
Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son representados en la figura abajo. Dibuja el vector $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ en cada caso.



Ejercicio 15★★

Sean $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ dos vectores unitarios. Representa en la figura abajo los vectores siguientes. Además, en cada caso, calcula la magnitud del vector y las magnitudes de las componentes del vector en las direcciones definidas por $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

i. $\vec{t} = \hat{\jmath}$
ii. $\vec{f} = \hat{\imath}$-$\hat{\jmath}$
iii. $\vec{a}$ =**2**$\hat{\imath}$
iv. $\vec{b} = \hat{\imath}$**+** $\hat{\jmath}$

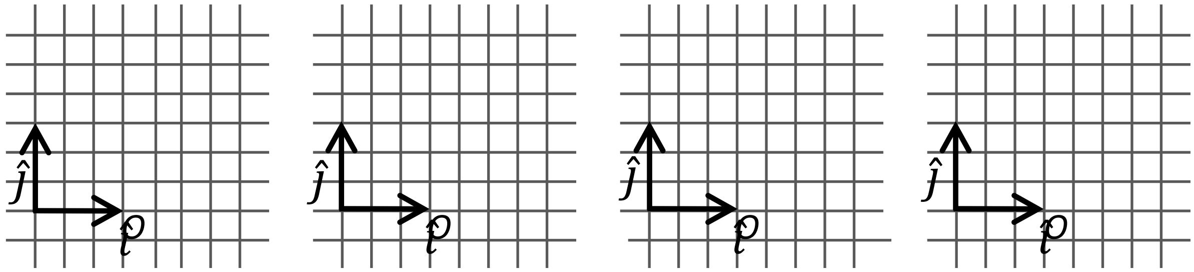


Ejercicio 16★★

Sean $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ dos vectores unitarios y **O** el origen de un sistema de coordenadas ***(O,*** $\vec{\imath}$**,**$\vec{\jmath}$**).**

a. Representa en la figura de la izquierda los puntos **A** (1,2) y **B** (0,1).
b. Representa en la figura de la derecha, el vector $\vec{v}$ de desplazamiento de **A** a **B**.
c. Cuáles son las componentes de $\vec{v}$ en el sistema de coordenadas considerado.
d. Calcula la magnitud de $\vec{v}$.

e. Calcula el ángulo de $\vec{v}$ relativamente al eje vertical, de sentido definido por $\hat{\jmath}$.



Ejercicio 17★★

Sean los vectores: $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ y $\vec{b} = -4\hat{\imath} + \hat{\jmath}$. Calcula:

a. El vector suma y su magnitud.
b. El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje OX (definido por $\hat{\imath}$).
c. El vector $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ y además el vector unitario que define la dirección y sentido de $\vec{c}$.

Ejercicio 18★★

Expresa un vector $\vec{a}$ que parte en el origen del sistema de coordenadas y cuyas componentes son: $a_x = 3$ unidades y $a_y = 4$ unidades. Determine su módulo y el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Ejercicio 19★

Determina el vector unitario con dirección y sentido iguales a los del vector:
$\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath}$.

Ejercicio 20★★

Dados dos vectores $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})$ m y $\vec{B} = (5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$ m encuentre

a) la magnitud (o módulo) de $\vec{A}$
b) la magnitud $|\vec{B}|$

Ejercicios avanzados sobre suma y componentes vectoriales

Ejercicio 21★★

Un dron se mueve 17 km hacia el norte, 22 km hacia el NW (a 45° del norte hacia el oeste) y 10 km hacia el sur.

a) Calcula el desplazamiento resultante
b) ¿Es mayor o menor (o igual) la magnitud del desplazamiento resultante comparada con la longitud del camino recorrido?

Ejercicio 22★

Un aeroplano viaja 320 km en línea recta en la dirección NE, formando un ángulo de 28° con el norte. Encuentre

a) ¿Qué distancia hacia el norte del punto de partida recorrió el avión?
b) ¿Qué distancia hacia el este del punto de partida recorrió el avión?

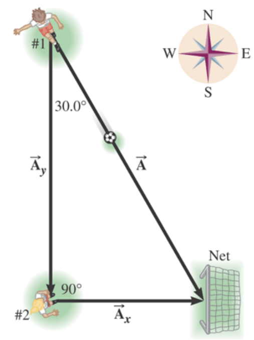
Ejercicio 23★★
Un vector $\vec{A}$ tiene una longitud de 3 m. Otro vector $\vec{B}$ tiene una longitud de 4 m. ¿Es posible colocar estos vectores de modo tal que la suma $\vec{A}+\vec{B}$ tenga una longitud de :

a. ¿7 m?
b. ¿1 m?
c. ¿5 m?

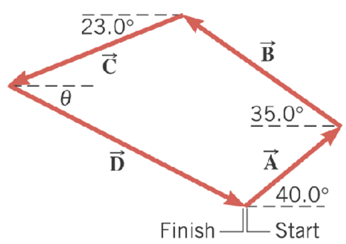
Ejercicio 24★★
Un insecto empieza a moverse desde un punto ***A***, y camina 8 cm al Este, 5 cm al Sur, 3 cm al Oeste y 4 cm al Norte hasta un punto ***B***.

a) ¿Qué tan retirado se encuentra el punto B del punto A en la dirección Norte? Y ¿en la dirección Este?
b) Calcula el desplazamiento desde A hasta B gráficamente y algebraicamente.

Ejercicio 25★★
La jugadora de fútbol #1 está 8,6 m del arco. Si ella patea la pelota directamente a la red, la pelota tiene un desplazamiento $\vec{A}$. Por otra parte, si ella le da el pase a la jugadora #2, quién luego hace el gol, el balón realiza dos desplazamientos sucesivos $\vec{A_y}$ y $\vec{A_x}$. Calcula las magnitudes de $\vec{A_x}$ y $\vec{A_y}$



Ejercicio 26★★★
Una carrera de veleros consiste en 4 mangas, definidas por los desplazamientos $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ como indica la figura. Las magnitudes de los tres primeros vectores son: A=3,2 km, B=5,1 km y C=4,8 km. La meta coincide con el punto de partida. Usando los datos de la figura, encuentra la distancia de la cuarta manga y el ángulo $\boldsymbol{\theta}$



Ejercicio 27★
La rapidez de un objeto y la dirección en la que se mueve constituye una magnitud vectorial denominada *velocidad*. Un guanaco (*Lama guanicoe*) está corriendo a una rapidez de 17 m/s en la dirección 68° al norte del oeste. Calcula los módulos de las componentes de la velocidad del guanaco respecto al

a. norte

b. oeste.

Si deseas profundizar en los temas de esta guía te sugerimos:
Capítulo 3. Vectores, pg. 53-70.
Repaso matemático de trigonometría, apéndice B.4.
R. A. Serway, J. W. Jewett Jr., Física para Ciencias e Ingenierías, Thomson, 6a ed, 2005.

BIBLIOGRAFIA.
Algunos ejercicios de esta guía fueron inspirados de los libros siguientes.

1. J. D. Cutnell, K. W Johnson, *Physics*, Wiley, 7th ed. 2007.
2. R. A. Serway, J. W. Jewett Jr., *Física para Ciencias e Ingenierías*, Thomson, 6th ed. 2005.