



Guía de Ejercicios: Lógica y Teoría de Conjuntos

Área de Matemática

Objetivo de aprendizaje

Usar conectivos lógicos y relaciones conjuntistas. Negar una proposición.

Contenidos

1. Elementos de lógica proposicional. Conectivos lógicos.
2. Definición, igualdad de conjuntos.
3. Pertenencia, inclusión.
4. Álgebra de conjuntos, propiedades.

Debo saber

Antes de empezar a realizar estos ejercicios es importante que recordemos lo siguiente:

Tablas de verdad

Negación	
p	$\sim p$
V	F
V	F
F	V
F	V

Conjunción		
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción		
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional		
p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propiedades entre conjuntos

PROPIEDAD:	UNIÓN	INTERSECCIÓN
ASOCIATIVIDAD	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
CONMUTATIVIDAD	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
ABSORVENCIA	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
DISTRIBUTIVIDAD	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
NEUTRALIDAD	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$
COMPLEMENTO	$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \emptyset$
LEY DE MORGAN	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Equivalencias lógicas

EQUIVALENCIA	NOMBRE
$p \wedge \bar{p} \equiv F$	Ley del tercio excluido
$p \vee \bar{p} \equiv V$	Ley de contradicción
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	Ley del bicondicional en función de la implicancia
$p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$	Ley de implicancia en función de la disyunción
$p \Rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \bar{q}}$	Ley de implicancia en función de la conjunción
$p \vee F \equiv p$ $p \wedge V \equiv p$	Ley de identidad
$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$	Ley de dominación
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Ley de idempotencia
$\bar{\bar{p}} \equiv p$	Ley de doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Ley de conmutatividad
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Ley de asociatividad
$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$	Ley de distributividad
$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$ $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$	Ley de Morgan



Ejercicio 1

Demuestre usando equivalencias lógicas y mediante tablas de verdad que la siguiente expresión es verdadera.

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$$

Demostración mediante equivalencias lógicas:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$$

Solución

$[(\bar{p} \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$ Reemplazamos $(p \Rightarrow q)$ por $(\bar{p} \vee q)$ (Ley de implicancia en función de la disyunción)

$[(\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee q) \Rightarrow (p \vee q)]$ Reemplazamos $(\bar{p} \vee q) \Rightarrow q$ por $\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee q$ (Ley de implicancia en función de la disyunción)

$[(\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee q) \vee (p \vee q)]$ Reemplazamos $[(\bar{p} \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$ por $[(\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee q) \vee (p \vee q)]$ (Ley de implicancia en función de la disyunción)

$[(\overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})} \vee q) \vee (p \vee q)]$ Reemplazamos $\overline{(\bar{p} \vee q)}$ por $(\bar{p} \wedge \bar{q})$ (Ley de dualidad de Morgan)

$[(p \wedge \bar{q}) \vee q] \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $\overline{\bar{p}}$ por p (Ley de doble negación)

$[(p \wedge \bar{q}) \wedge \bar{q}] \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $\overline{(p \wedge \bar{q}) \vee q}$ por $(p \wedge \bar{q}) \wedge \bar{q}$ (Ley de dualidad de Morgan)

$[(p \vee \bar{q}) \wedge \bar{q}] \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $\overline{\bar{q}}$ por q (Ley de doble negación)

$[(p \vee q) \wedge \bar{q}] \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $(p \vee q) \wedge \bar{q}$ por $(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q})$ (Ley de distribución)

$[(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{q})] \vee (p \vee q)$ reemplazamos $(q \wedge \bar{q})$ por F (Ley del tercio excluido)

$[(p \wedge \bar{q}) \vee F] \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $(p \wedge \bar{q}) \vee F$ por $(p \wedge \bar{q})$ (Ley de identidad)

$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee q)$ Reemplazamos $\bar{p} \wedge \bar{q}$ por $\overline{(p \vee q)}$ (Ley de dualidad de Morgan)

$\overline{(p \vee q)} \vee (p \vee q)$ Así, como $\overline{(p \vee q)}$ es la negación de $(p \vee q)$ podemos afirmar que $\overline{(p \vee q)} \vee (p \vee q)$ es Verdadero (Ley de contradicción)

VERDADERO



Demostración mediante tablas de verdad:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$$

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \vee q)$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Confeccionamos la tabla de verdad colocando todas las posibles combinaciones de valores para p y q (la fórmula es: 2^n , donde n es el número de proposiciones presentes en la expresión, en este caso 2)

Copiamos las relaciones por separado en cada columna

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \vee q)$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V		V	
V	F	F		V	
F	V	V		V	
F	F	V		F	

Completamos la columna 3 y 5 Utilizando las tablas de verdad del condicional y de la conjunción respectivamente.

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \vee q)$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	$(V \Rightarrow V) \quad V$	V	
V	F	F	$(F \Rightarrow F) \quad V$	V	
F	V	V	$(V \Rightarrow V) \quad V$	V	
F	F	V	$(V \Rightarrow F) \quad F$	F	

Completamos la columna 4 Utilizando la tabla de verdad del condicional, mirando primero los valores de la columna 3 y luego de la columna 2.

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(p \vee q)$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	$(V \Rightarrow V) \quad V$	V	V
V	F	F	$(F \Rightarrow F) \quad V$	V	V
F	V	V	$(V \Rightarrow V) \quad V$	V	V
F	F	V	$(V \Rightarrow F) \quad F$	F	V

Finalmente, completamos la columna 6 utilizando la tabla de verdad del condicional y mirando primero los valores de la columna 4 y luego de la columna 5.

Como todos los valores de la tabla son verdaderos, podemos afirmar que la expresión es VERDADERA



Ejercicio 2

Considere el conjunto $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ y la proposición.

$$p: (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x < y \Rightarrow xy > 0)$$

- a) Determine si p es verdadera o falsa.
- b) Escriba la negación de p .

Solución

- a) Como $x, y \in A$, para el caso particular $x = -2$ e $y = 2$, se tiene que:

$$-2 < 2 \Rightarrow (-2)(2) > 0$$

$$-2 < 2 \Rightarrow -4 > 0$$

FALSO

Reemplazamos $x = -2$ e $y = 2$

Multiplicamos

Como -4 no es mayor que cero, la proposición es falsa

- b)

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\overline{\overline{(x < y \Rightarrow xy > 0)}})$$

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\overline{\overline{(x < y \vee xy > 0)}})$$

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\overline{\overline{(x < y \wedge \overline{xy > 0})}})$$

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x < y \wedge \overline{xy > 0})$$

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x < y \wedge xy \leq 0)$$

Negamos la proposición

Reemplazamos $x < y \Rightarrow xy > 0$ por $\overline{x < y} \vee xy > 0$ (Ley de implicancia en función de la disyunción)

Reemplazamos $\overline{\overline{(x < y \vee xy > 0)}}$ por $\overline{\overline{(x < y \wedge \overline{xy > 0})}}$ (Ley de dualidad de Morgan)

Reemplazamos $\overline{\overline{x < y}}$ por $x < y$ (Ley de doble negación)

Como la negación de $xy > 0$ es $xy \leq 0$ reemplazamos $\overline{xy > 0}$ por $xy \leq 0$



Ejercicio 3

Sean A, B, C tres conjuntos no – vacíos. Utilice propiedades de operatoria de conjuntos para probar que:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^C \cup B^C \cup C^C) = U$$

Solución

$$\begin{aligned}(A \cap B \cap C) \cup (A^C \cup B^C \cup C^C) &= (A \cap B \cap C) \cup ((A^C \cup B^C) \cup C^C) && \text{Reemplazamos } (A^C \cup B^C \cup C^C) \\ &&& \text{por } (A^C \cup B^C) \cup C^C \text{ (Asociatividad)} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup ((A \cap B)^C \cup C^C) && \text{Reemplazamos } (A^C \cup B^C) \cup C^C \text{ por} \\ &&& (A \cap B)^C \cup C^C \text{ (Ley de De Morgan)} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)^C && \text{Reemplazamos } (A \cap B)^C \cup C^C \text{ por} \\ &&& (A \cap B \cap C)^C \text{ (Ley de Morgan)} \\ &= U && \text{Finalmente, reemplazamos} \\ &&& (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)^C \text{ por } U \\ &&& \text{(Propiedad del complemento)}\end{aligned}$$

Ejercicio 4

En una encuesta a 100 personas acerca de sus preferencias de bebidas marca A, B , y C . Se obtuvieron los siguientes resultados:

- 24 beben C
- 9 sólo beben B
- 7 beben sólo C y B
- 43 no beben estas marcas
- 8 sólo beben C y A
- 6 beben las tres marcas
- 13 beben A y B

Con la información entregada construya un diagrama de Venn Euler y luego conteste las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos beben sólo A ?
- ¿Cuántos beben a lo menos dos de estas marcas?
- ¿Cuántos beben B ?

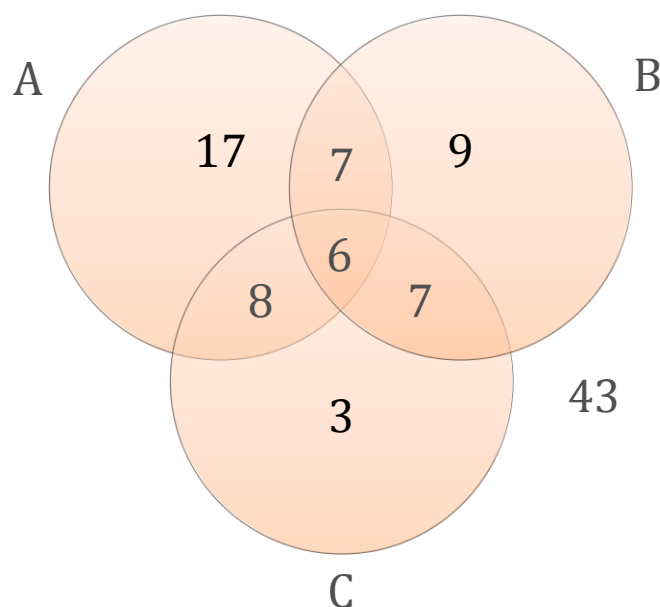


Solución

Para contestar las preguntas anteriores se requiere construir primero el diagrama de Venn Euler, considerando que:

- | | |
|----------------------------|--|
| - 6 beben las tres marcas | → El 6 se ubica en la intersección de los tres conjuntos. |
| - 9 sólo beben B | → El 9 se ubica sólo para B (sin intersección en A y B). |
| - 8 beben sólo C y A | → El 8 se ubica en la intersección de los conjuntos C y A, sin considerar B. |
| - 7 beben sólo B y C | → El 7 se ubica en la intersección de los conjuntos B y C, sin considerar A. |
| - 13 beben A y B | → No es sólo para A y B, por lo que la intersección entre A y B debe sumar 13. Como ya tenemos 6, se completa con los 7 que faltan. |
| - 24 beben C | → Para completar 24 en C, se escribe los 3 que faltan. |
| - 43 no beben estas marcas | → Como son 100 personas en total, y 43 no beben estas marcas (el 43 queda fuera del diagrama), entonces hay 57 personas que sí beben. Por otro lado, como ya hay 18 personas consideradas en el diagrama, entonces faltan 17 para completar las 57 personas. El 17 corresponde sólo a A. |

Por lo que el diagrama queda de la siguiente forma:





Según lo construido, las respuestas a las preguntas planteadas son:

- a) 17 personas beben sólo A
- b) 28 personas beben a lo menos dos de estas marcas (sumando todos los valores de las intersecciones).
- c) 29 personas bebe B (sumando todos los valores que están en B).