PAUTA CONTROL N°1

Ejercicio 1. *Ana tiene dos veces la edad que María tendrá en diez años, por otro lado, la edad de Ana no supera cuatro veces la edad de María.*

Entre las siguientes opciones, ¿cual es la que mejor representa la edad de María?

a) La edad de Ana es mayor que la edad de María.

b) La edad de María es menor que la edad de Ana.

c) La edad de Ana es mayor que 10 años.

d) La edad de María es mayor que 10 años.

e) La edad de María es menor que 10 años.

Solución: Para solucionar el problema, basta extraer las informaciones del texto y escribirlas en forma de inecuaciones.

Observe que el problema coloca la edad de Ana en función de la edad de María cuando dice que la edad de Ana es igual al doble de edad de María en 10 años. Así, solo es necesario definir una incógnita para la edad de María. Luego,

$$x = \text{Edad de María.}(\mathbf{0,2ptos})$$

Observe que la edad de María debe ser sumada a 10, y el resultado debe ser multiplicado por 2 para obtener la edad de Ana. Matemáticamente, podemos escribir

$$\text{Edad de Ana} = 2(x+10).(\mathbf{0,5ptos})$$

Colocamos paréntesis porque 10 debe ser sumado antes de multiplicar por 2.

Observe ahora que la edad de Ana no supera cuatro veces la edad de María, es decir,

$$4x \geq 2(x+10)(\mathbf{0,5ptos})$$

Ahora basta resolver a inecuación encontrada para solucionar o problema.

$$\begin{aligned} 4x &\geq 2(x+10) \\ x &\geq 10.(\mathbf{0,5ptos}) \end{aligned}$$

Finalmente, la edad de María es mayor que 10 años. **(0,3 ptos)**

Ejercicio 2.

a) Resolver la siguiente ecuación,
$$(x-4)^2 - 5|x-4| + 6 = 0.$$

b) Determine el siguiente conjunto $E = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \left| \dfrac{4x+4}{x-6} \right| \leq x+1 \right\}$.

Solución:

a) Notar que la ecuación es equivalente a $x^2 - 8x + 22 = 5|x-4|$ **(0,2 ptos), donde estudiamos por casos.**

Caso 1: Si $x \in (-\infty, 4)$, entonces la ecuación a estudiar es $x^2-8x+22 = -5(x-4) \iff x^2-3x+2 = 0 \iff (x-2)(x-1) = 0$, donde obtenemos que $x = 1$ o $x = 2$, donde $\{1,2\} \subset (-\infty, 4)$.(0,3 ptos)

Caso 2: Si $x \in [4, +\infty)$, entonces la ecuación a estudiar es $x^2 - 8x + 22 = 5(x-4) \iff x^2 - 13x + 42 = 0 \iff (x-6)(x-7) = 0$, donde obtenemos que $x = 6$ o $x = 7$, donde $\{6,7\} \subset [4, +\infty)$.(0,3 ptos)

Así, el conjunto solución de la ecuación es $\{1,2,6,7\}$.(0,2 ptos)

b) **Notar que la primera restricción es que $x \in [-1, +\infty)$ (0,2 ptos), además $\left|\dfrac{4x+4}{x-6}\right| = \dfrac{|4x+4|}{|x-6|}$ siempre que $x \neq 6$, donde podemos ver que $|4x+4| = 0 \iff x = -1$, por otro lado $|x-6| = 0 \iff x = 6$. Considerando el análisis anterior, estudiamos la inecuación en los intervalos $[-1, 6)$ y $(6, +\infty)$.(0,2 ptos)**

Caso 1: Si $x \in [-1, 6)$, entonces $\left|\dfrac{4x+4}{x-6}\right| = -\dfrac{4x+4}{x-6}$, luego $-\dfrac{4x+4}{x-6} \leq x+1 \implies \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-6} \geq 0$. Como $x-6 < 0$ para $x \in [-1, 6)$, basta notar que $(x-2)(x+1) \leq 0$ para $x \in [-1, 2] \subset [-1, 6)$. Así en este caso el conjunto solución de la inecuación es $[-1, 2]$.(0,2 ptos)

Caso 2: Si $x \in (6, +\infty)$, entonces $\left|\dfrac{4x+4}{x-6}\right| = \dfrac{4x+4}{x-6}$, luego $\dfrac{4x+4}{x-6} \leq x+1 \implies \dfrac{(x-10)(x+1)}{x-6} \geq 0$. Como $x-6 > 0$ para $x \in (6, +\infty)$, basta notar que $(x-10)(x+1) \geq 0$ para $x \in [10, +\infty)$ (El intervalo $(-\infty, -1)$ esta fuera del conjunto estudiado). Así en este caso el conjunto solución de la inecuación es $[10, +\infty) \cap (6, +\infty) = [10, +\infty)$.(0,2 ptos)

Finalmente, el conjunto $E = [-1, 2] \cup [10, +\infty)$.(0,2 ptos)

Ejercicio 3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Para $x \in \mathbb{R}$, entonces $(x-1)(x+1) < 3(x-1) \iff \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x+1}$.

b) Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, entonces $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \iff x^2 + x + 1 > 3(x-2)$.

Solución:

a) **Falso:** Notar que el conjunto solución de $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{x+1}$ es $(-1, 2)$ **(0,2 ptos)**, pero $x-1$ y $x+1$ tienen signos diferentes si $x \in (-1, 1)$ **(0,2 ptos)**, entonces no se cumple que $(x-1)(x+1) < 3(x-1)$ **(0,2 ptos)** (basta tomar $x = 0$).**(0,4 ptos)**

b) **Falso:** Notar que $x^2 + x + 1 > 3(x-2)$ es equivalente a $x^2 - 2x + 7 > 0$ donde su conjunto solución es $\mathbb{R}$.**(0,4 ptos)** Pero, para $x \in (-\infty, 2)$, tenemos que $x-2 < 0$ **(0,4 ptos)**, entonces $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} < 0$.**(0,2 ptos)**