Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Coordinación Cálculo I

Guía de Ejercicios

Funciones 2

1. Considere la función definida como $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-2}{x+2}}$

   a) Determine $\text{Dom}(f)$ y $\text{Rec}(f)$

   b) Determine la preimagen de 3

2. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x > 2 \\ x^2 & x \leq 2, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x > 0 \\ x+3 & x \leq 0. \end{cases}$$

   Determine explícitamente $(f \circ g)$

3. Sabiendo que $f(x) = 3x + 2$, determine la función g tal que

$$(f \circ g \circ f)(x) = 6x + 7$$

4. Pruebe que $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{12}{x^2+3}$ es creciente

5. Pruebe que $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \dfrac{12}{x^2+3}$ es decreciente

6. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 2x + a & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

   Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea inyectiva y el recorrido sea un intervalo de números reales positivos. ¿Cuál es ese intervalo?

7. Considerar la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2x+1}}$.

   a) Encontrar $A = \text{Dom}(f)$.

   b) Mediante la definición de función estrictamente decreciente, demostrar que f es estrictamente decreciente.

   c) Encontrar $\text{Rec}(f)$.

8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & \text{si } x \geq 0 \\ x + \beta, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Demostrar que f es inyectiva si y sólo si $\alpha \geq \beta$.

b) Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si $\alpha \leq \beta$.

c) Determinar el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es biyectiva}\}$.

Sugerencia: Puede serle útil graficar la función.

9. Sean $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{9-x^2}$. Determine $\mathrm{Dom}(g \circ f)$

10. Un agricultor, está vendiendo cebollas esta temporada. Cada domingo, en la feria local, vende 80 mallas a un precio de U$ 10 cada malla. Un estudio de mercado estima que por cada U$1 de aumento en el precio de venta, se venderán 2 mallas menos. El costo de producir cada malla es de U$4. Determine el precio de venta de cada malla para obtener la máxima utilidad.

11. Determine el valor de a de modo que $f \circ g = g \circ f$, donde $f(x) = \dfrac{3x+5}{2}$ y $g(x) = \dfrac{x-a}{3}$

12. Una compañía de transportes está dispuesta a alquilar autobuses sólo a grupos de 30 o más personas. Si un grupo consta exactamente de 30 personas, cada pasajero paga \$6000. En grupos mayores, el precio que paga cada persona se reduce en \$120 por cada persona que exceda de los 30 pasajeros. Determine la cantidad de pasajeros que optimizará los ingresos de la compañía.

13. Sean A, B, C, $D \subset \mathbb{R}$ Considere la función $f : A \to B$ y $g : C \to D$, dadas por

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|+3}$$

Determine los conjuntos A y B máximos, de manera que $f : A \to B$ sea biyectiva y encuentre su inversa.

Soluciones

1. *a*) $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -2[\cup [1/2, \ +\infty[$ y $\mathrm{Rec}(f) = [0, 2[\cup]2, +\infty]$

   b) $f^{-1}(3) = -4$, o equivalentemente $f(-4) = 3$

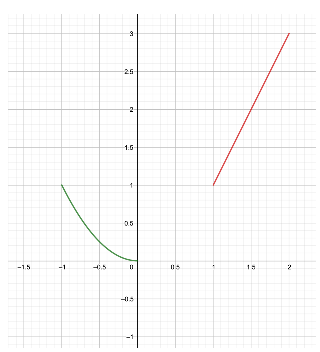
2. - Si $0 < x \leq 1$
     $f(g(x)) = f(x^2 + x) = (x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$
   - Si $x > 1$
     $f(g(x)) = f(x^2 + x) = 2(x^2 + x) + 5 = 2x^2 + 2x + 5$
   - Si $-1 < x \leq 0$
     $f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) + 5 = 2x + 11$
   - Si $x \leq -1$
     $f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

   Por lo tanto

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9, & x \leq -1 \\ 2x + 11, & -1 < x \leq 0 \\ (x^2 + x)^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 + 2x + 5, & 1 < x \end{cases}$$

3. $g(x) = \dfrac{1}{3}(2x + 1)$

6. $2 + a = 1 \ \Rightarrow \ a = -1$ Con esto, el recorrido de la función es $]0, 3[$



7. *a*) El dominio de la función viene dado por la intersección del conjunto solución de las inecuaciones:

$$2x + 1 \geq 0 \wedge 2 - \sqrt{2x + 1} \geq 0$$

   de donde se sigue que $\mathrm{Dom}(f) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

b) Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tal que $x_1 < x_2$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{2 - \sqrt{2x_1 + 1}} - \sqrt{2 - \sqrt{2x_2 + 1}} \\
&= \frac{\sqrt{2x_2 + 1} - \sqrt{2x_1 + 1}}{\sqrt{2 - \sqrt{2x_1 + 1}} + \sqrt{2 - \sqrt{2x_2 + 1}}} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1)}{(\sqrt{2 - \sqrt{2x_1 + 1}} + \sqrt{2 - \sqrt{2x_2 + 1}})(\sqrt{2x_2 + 1} + \sqrt{2x_1 + 1})} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Por lo anterior, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, por lo que f es estrictamente decreciente.

c) Como f es estrictamente decreciente, y f no tiene saltos (es continua), se concluye que $\text{Rec}(f) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = [0, \sqrt{2}]$.

8. *a*) Decir que f es inyectiva es equivalente a decir que $\forall u, v \in \text{Dom}(f)$, $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$. Supongamos que f no es inyectiva. En tal caso, se tiene que $\exists v < 0 \leq u$ tal que se tiene la ecuación $v + \beta = u^2 + \alpha$. En consecuencia, se tendrá que:

$$\beta > v + \beta = u^2 + \alpha \geq \alpha$$

teniéndose que f no es inyectiva si $\beta > \alpha$. Por otra parte, si $\alpha \geq \beta$ entonces f es estrictamente creciente, y en consecuencia inyectiva.

b) Decir que f es sobreyectiva es equivalente a decir que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$. En este caso, se tiene que $\text{Rec}(f) =]-\infty, \beta[\cup [\alpha, \infty[$, de donde se deduce inmediatamente que se necesita $\alpha \leq \beta$.

c) Si f es biyectiva, entonces se tiene que tener que f es inyectiva y sobreyectiva. Esto es equivalente a las condiciones $\alpha \geq \beta$ y $\alpha \leq \beta$, es decir, $\alpha = \beta$, y con ello:

$$B = \{(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

9. $[1, 10]$

10. U\$27 cada malla

11. $a = 10$

12. 40 personas

13. El $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{Rec}(f) =]-1, 1[$

Por lo tanto $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ es epiyectiva

Estudiando la inyectividad:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\frac{x_1 + 2}{|x_1| + 3} &= \frac{x_2 + 2}{|x_2| + 3} \\
(x_1 + 2)(|x_2| + 3) &= (|x_1| + 3)(x_2 + 2)
\end{aligned}$$

a) Caso 1: $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} (x_1+2)(x_2+3) &= (x_1+3)(x_2+2) \\ (x_1-x_2) &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

b) Caso 2: $x_1, x_2 < 0$

$$\begin{aligned} (x_1+2)(-x_2+3) &= (-x_1+3)(x_2+2) \\ 5x_1 &= 5x_2 \end{aligned}$$

c) Caso 3: $x_1 > 0 \wedge x_2 < 0$

$$\begin{aligned} (x_1+2)(-x_2+3) &= (x_1+3)(x_2+2) \\ x_1(1-2x_2) &= 5x_2 \\ x_1 &= \frac{5x_2}{1-2x_2} \end{aligned}$$

Como $x_1 > 0 \wedge x_2 < 0$ la expresión anterior no puede cumplirse
Por lo tanto $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ es biyectiva y su inversa es:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-2}{1-x} & x \leq \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{2-3x}{x-1} & x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$