GUÍA : **SUCESIÓN DE NUMEROS REALES**

1. Escriba los cinco primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

a)
$$a_n = \frac{3n!}{(n-1)!}$$

b)
$$a_n = \frac{\cos(nx)}{n^2+n}$$

c)
$$a_1 = 1;\ a_n = \sqrt{2a_{n-a}}$$

d)
$$a_1 = 1;\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$$

e)
$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

f)
$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

g)
$$a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}a_n}{2}$$

h)
$$a_1 = 2;\ a_2 = -1;\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2. Los siguientes conjuntos, contienen los primeros elementos de la imagen de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Determine a_n.

a)
$$\{-1, 1, -1, 1, -1, ...\}$$

b)
$$\{1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ...\}$$

c)
$$\{1, 5, 9, 13, 17, ...\}$$

d)
$$\{\frac{1}{25}, \frac{8}{125}, \frac{27}{625}, \frac{64}{3125}, ...\}$$

3. Proporcione suficientes términos de la sucesión y, con base en ellos determine si las siguientes sucesiones podrían ser convergentes.

a)
$$a_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$$

c)
$$a_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$$

d)
$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$$

4. Determine si las siguientes suceciones son monótonas

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ b) $a_n = \frac{n}{2^n}$ c) $a_n = \frac{2^n \cdot 3^n}{n!}$ d) $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

5. Determine el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n-1}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}$

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+7}{4n+4}\right)^n$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+4)(3n^2+1)^2}{(4n+7)(1-2n^2)^2}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n^4+3n}-\sqrt{n^3+3}}$

i) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} (\ln(n)-\ln(n+1))$

l) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+9+\cdots+3n}{5+10+15+\cdots+5n}$

n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$

6. Una sucesión de números racionales se describe como sigue

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots$$

Los numeradores forman una sucesión, los denominadores una segunda sucesión y sus cocientes una tercera. Sean x_n y y_n, respectivamente el numerador y denominador de la n-ésima fracción $r_n = \frac{x_n}{y_n}$.

a) Verifique que $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ y, con mayor generalidad, que si $a^2 - 2b^2 = -1$ o $+1$, entonces $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = +1$ o -1, respectivamente.

b) Las fracciones $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ tienden a un límite cuando n se hace grande. ¿ Cúal es ese límte? (Ayuda: Utilice el item [a)] para demostrar que $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$.)

7. Se define la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por recurrencia: $a_1 = \sqrt{3}$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$ para todo $n \geq 1$.

a) Demuestre que esta sucesión es monótona creciente.

b) Demuestres que esta sucesión está acotada superiormente por 8.

c) Analice la existencia del límite de la sucesión.

d) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

8. Se define la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por recurrencia: $x_1 = 1$, $\quad x_n = \sqrt[4]{x_{n-1}^2+1}$ para todo $n \geq 2$.

a) Demuestre que esta sucesión es monótona creciente.

b) Demuestres que esta sucesión está acotada superiormente por 3.

c) Analice la existencia del límite de la sucesión.

d) Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$.