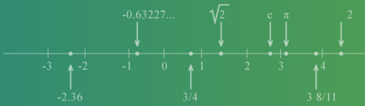
Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Inecuaciones y valor absoluto



Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

LOS NÚMEROS REALES:
Inecuaciones y valor absoluto

Coordinación de Cálculo I

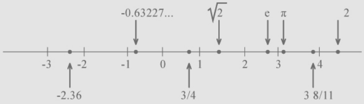
Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola



FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Definición de valor absoluto

Llamaremos valor absoluto del número $a \in \mathbb{R}$, denotado por $|a|$, al número:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Es importante mencionar que también podemos definir el valor absoluto como $|a| = \sqrt{a^2}$ o $|a| = \max\{a, -a\}$.

Definición geométrica

El valor absoluto de a es la distancia de a hasta 0 sobre la recta real. Es decir $|a| = d(0, a)$.

Propiedades del valor absoluto

Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

1) $|a| = c \Leftrightarrow a = \pm c$
2) $a \leq |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$
3) $|-a| = |a|$
4) $|x| > 0$, si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
5) Si $b \geq 0$, $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
6) Si $b \geq 0$, $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \quad \vee \quad a \leq -b$
7) $|ab| = |a||b|$
8) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

Demostración de algunas propiedades:

7)

$$\begin{aligned}|ab| =&\sqrt{(ab)^2}\\ =&\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}\\ =&|a||b|\end{aligned}$$

8) Notemos que, por definición

$$\begin{aligned}|a+b| =&\sqrt{(a+b)^2}\\ =&\sqrt{a^2+2ab+b^2}\end{aligned}$$

Por descripción del máximo

$$\begin{aligned}\leq&\sqrt{|a|^2+2|a||b|+|b|^2}\\ =&\sqrt{(|a|+|b|)^2}\end{aligned}$$

Así hemos probado que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

A continuación algunos ejemplos, dónde se aplicarán algunas propiedades descritas anteriormente.

Ejemplo 1

Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$|x^2 - x| - |x^2 + x - 8| = 0 \tag{1}$$

Solución: Para resolver la ecuación anterior, notamos que

$$|x^2 - x| = |x^2 + x - 8|.$$

donde tenemos los siguientes casos posibles.
Caso 1: $x^2 - x$ y $x^2 + x - 8$ tienen el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos). Entonces la ecuación es equivalente a $x^2 - x = x^2 + x - 8 \implies 2x - 8 = 0$, de donde $x = 4$.

Caso 2: $x^2 - x$ y $x^2 + x - 8$ tienen signos distintos. Entonces la ecuación es equivalente a $x^2 - x = -(x^2 + x - 8) \implies 2x^2 - 8 = 0$, de donde $x = -2$ y $x = 2$.

Así, finalmente el conjunto solución de la ecuación es $\{-2, 2, 4\}$.

Ejemplo 2

Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\left|\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right| \geq 2. \tag{2}$$

Solución:

Notar que $\left|\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right| = \left|\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-1)}\right| = \left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ siempre que $x \neq -2$ y $x \neq 1$.

Así, basta resolver $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 2$ para $x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, donde notamos que $|x+2| = 0 \iff x = -2$. Por otro lado $|x-1| = 0 \iff x = 1$.

Considerando el análisis anterior, estudiamos la inecuación en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Caso 1: Si $x \in (-\infty, -2)$, entonces $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \frac{x+2}{x-1}$.
Luego $\frac{x+2}{x-1} \geq 2 \implies \frac{-x+4}{x-1} \geq 0$ donde obtenemos que la desigualdad anterior es verdad solo si $x \in (1, 4]$.

Lo cual es absurdo por hipótesis del caso 1. Así tenemos que cuando $x \in (-\infty, -2)$, la inecuación no tiene solución.

Continuación del ejemplo 2

Caso 2: Si $x \in (-2, 1)$, entonces $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = -\frac{x+2}{x-1}$.

Luego $-\frac{x+2}{x-1} \geq 2 \implies \frac{-3x}{x-1} \geq 0$ donde obtenemos que la desigualdad anterior es verdad solo si $x \in [0, 1)$ y observe que $[0, 1) \subset (-2, 1)$.

Caso 3: Si $x \in (1, +\infty)$, entonces $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \frac{x+2}{x-1}$.

Luego $\frac{x+2}{x-1} \geq 2 \implies \frac{-x+4}{x-1} \geq 0$ donde obtenemos que $x \in (1, 4]$ y observe que $(1, 4] \subset (1, +\infty)$.

Finalmente, de los casos anteriores tenemos que $\left|\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}\right| \geq 2$ si y solo si $x \in [0, 1) \cup (1, 4]$.