Nombre:______________________________ Sección:______________________________

Pep 2 (PAUTA)

Forma B

1. Determine el valor de $p \in \mathbb{N}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=p}^{10} \frac{4}{(2k-5)(2k-1)} = -\frac{36}{323}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{10} \frac{4}{(2k-5)(2k-1)} &= -\frac{36}{323} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-5} - \frac{1}{2k-1} \right) &= \frac{-36}{323} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-5} - \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-11} \right) &= \frac{-36}{323} \\
\sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-5} - \frac{1}{2k-3} \right) + \sum_{k=a}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} \right) &= \frac{-36}{323} \\
\frac{1}{2a-5} - \frac{1}{17} + \frac{1}{2a-3} - \frac{1}{19} &= \frac{-36}{323} \\
\frac{1}{2a-5} + \frac{1}{2a-3} &= 0 \\
2a-3+2a-5 &= 0 \\
4a &= 8 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

2. Sabiendo que los coeficientes que acompañan a x^8 y x^{12} son iguales en el desarrollo de:

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}x^2}{3}\right)^n,$$

Encuentre el valor de n.

Solución:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\sqrt{3}x^2}{3}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 1^{n-k}\left(\frac{\sqrt{3}x^2}{3}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}^k}{3^k}x^{2k}\end{aligned}$$

El coeficiente de x^8 es:

$$\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}^4}{3^4}$$

El coeficiente de x^{12} es

$$\begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}^6}{3^6}$$

como los coeficientes son iguales:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}^4}{3^4} &= \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}^6}{3^6} \\ \frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!} \cdot \frac{3^2}{\sqrt{3}^2} &= \frac{n!}{(n-6)!\cdot 6!} \\ 5\cdot 6\cdot \frac{3^2}{3} &= (n-4)\cdot(n-5)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}&90 = n^2-9n+20 \\ &n^2-9n-70=0 \\ &(n+5)(n-14)=0 \\ &n=-5 \vee n=14\end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, entonces $n=14$.

3. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $3^{4n} + 2^{4n+2}$ es divisible por 5.

Solución:
Definamos el predicado:

$$P(n) : \left(\exists k \in \mathbb{Z} : 3^{4n} + 2^{4n+2} = 5k\right)$$

Por inducción:

i) $P(1) : (\exists k \in \mathbb{Z} : 3^4 + 2^6 = 5k)$ lo cual se cumple para $k = 29$

ii) Supongamos $P(n)$ es verdad, es decir

$$\exists k \in \mathbb{Z} : 3^{4n} + 2^{4n+2} = 5k$$

por demostrar que:

$$P(n+1) : \exists r \in \mathbb{Z} : 3^{4(n+1)} + 2^{4(n+1)+2} = 5r$$

es válido.
Trabajando el lado izquierdo de la igualdad se tiene:

$$\begin{aligned}
3^{4(n+1)} + 2^{4(n+1)+2} &= 3^{4n+4} + 2^{4n+6} \\
&= 3^4 \cdot 3^{4n} + 2^{4n+6} \\
&= 3^4 \cdot \left(5k - 2^{4n+2}\right) + 2^{4n+6} \\
&= 81 \cdot 5k - 81 \cdot 2^{4n+2} + 16 \cdot 2^{4n+2} \\
&= 81 \cdot 5k - 65 \cdot 2^{4n+2} \\
&= 5\left(81k - 13 \cdot 2^{4n+2}\right)
\end{aligned}$$

como $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(81k - 13 \cdot 2^{4n+2}\right) \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto podemos decir que:

$$r = \left(81k - 13 \cdot 2^{4n+2}\right) \qquad ,$$

así p(n+1) es válido, y por el Principio de inducción.

$$(\forall n \in \mathbb{N} : P(n))$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$:

(a) Pruebe, sin usar inducción, que:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1 \cdot 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

(b) Encuentre el valor de $r \in \mathbb{N}$ para que se cumpla la ecuación:

$$\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\right]^2 + \sum_{k=1}^{r+3} \binom{r+2}{k-1} = 32.$$

Solución:
Por el ejercicios anterior, se tiene que

$$\left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\right]^2 = 2^{2r},$$

por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r+3} \binom{r+2}{k-1} &= \sum_{k=1-1}^{r+3-1} \binom{r+2}{k+1-1} \\
&= \sum_{k=0}^{r+2} \binom{r+2}{k} \\
&= 2^{r+2}
\end{aligned}$$

Reemplazando, se obtiene la ecuación:

$$2^{2r} + 4 \cdot 2^r = 32.$$

Esta ecuación se resuelve como una ecuación cuadrática:

$$(2^r)^2 + 4(2^r) - 32 = 0,$$

que queda factorizada como

$$(2^r + 8)(2^r - 4) = 0,$$

teniendo así que $2^r = -8$ o $2^r = 4$, de donde el lado izquierdo no puede suceder, por lo tanto basta resolver la ecuación de la derecha. Como $4 = 2^2$ se tiene que $2^r = 2^2$ y por lo tanto $r = 2$.