Hidrostática

Área Física

Resultados de aprendizaje

Al final de esta guía, el alumno deberá ser capaz de familiarizarse con todo lo relacionado a Hidrostática, teniendo claro cada concepto y de cómo aplicar cada fórmula o relación a cada caso dado.

Debo saber

Se repasarán conceptos de suma importancia que serán de gran ayuda para realizar los ejercicios relacionados al tema de Hidrostática tales como ejercicios de Aleaciones, Empuje, Tubos en "U" y Compuertas.

Luego de definir algún concepto se introducirán ejemplos para aprender a utilizar las formulas o relaciones, para luego ver ejercicios acordes con la forma de evaluación del curso estudiado.

Dado a que el sistema de unidades más utilizado es el S.I. (Sistema Internacional de Unidades), la teoría y los ejercicios estarán en este sistema de unidades, ya que además, es el sistema que generalmente más se evalúa. Teniendo claro también que hay fórmulas para hacer la conversión a otro sistema de unidades.

Densidad

La densidad de una sustancia (liquido, solido o gas), se define como la masa por unidad de volumen. Además, en el S.I. se considera como kilogramo sobre metro cubico. Matemáticamente queda expresado de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{m}{V}\left[\frac{kg}{m^3}\right] \qquad (\boldsymbol{Ec.1})$$

Esto se debe entender como una forma de cuantificar que tan juntas están las partículas o moléculas de una determinada sustancia. Se puede ver en la *Figura 1* que si las partículas de la sustancia están más juntas la sustancia será más densa y a medida que las partículas estén más separadas la sustancia será menos densa.

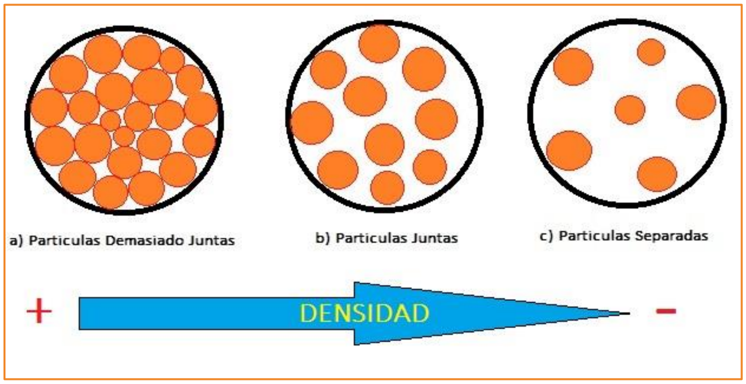


Figura 1: Concepto de Densidad

Algunos valores de densidad conocidos son:

Sustancia	$\rho[{Kg}/{m^3}]$	Sustancia	$\rho[{Kg}/{m^3}]$
Aire	1,29	Hielo	917
Aluminio	2700	Hierro	7860
Benceno	879	Plomo	11300
Cobre	8920	Mercurio	13600
Alcohol Etílico	806	Roble	710
Agua	1000	Oxígeno (Gas)	1,43
Glicerina	1260	Pino	373
Oro	19300	Platino	21400
Gas Helio	0,179	Agua de Mar	1030
Gas Hidrógeno	0,0899	Plata	10500

Tabla 1: Valores de algunas de densidad de algunas sustancias en el S.I.

Por sobre todas las sustancias, el agua es la que más se valora ya que es de suma importancia para entender otros conceptos relacionados a fluidos los cuales se verán en cursos superiores. Aun así, para este curso, el valor de la densidad del agua en el S.I. es obligatorio saberlo ya que es la sustancia que más se utiliza a la hora de realizar ejercicios.

Ejemplo 1

¿Cuál es la masa de una esfera de demolición de hierro de 18 $[cm]$ de radio?

Respuesta:

El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0{,}18\ [m])^3 = 0{,}024\ [m^3]$. Se sabe que la densidad del hierro es $\rho = 7860\ \left[\frac{kg}{m^3}\right]$, con lo que se obtiene finalmente:

$$\rho V = \left(7860\ \left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)(0{,}024\ [m^3]) = \boxed{m = 188{,}64\ [kg]}$$

Presión

Si F es la magnitud de la fuerza normal sobre una determinada superficie y A es el área de la superficie, entonces la presión P en esa determinada superficie se define como la razón de la fuerza sobre el área:

$$P = \frac{F}{A}$$

Se sabe que en el S.I. la fuerza esta medida en Newton (N) y el área en metros cuadrados (m^2). Siguiendo la fórmula de presión, queda una razón entre Newton y metros cuadrados, esta razón se reduce a la unidad de presión en el S.I., denominada Pascal (Pa). De esta forma, la relación queda:

$$P = \frac{F\,[N]}{A\,[m^2]} = \frac{F}{A}\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

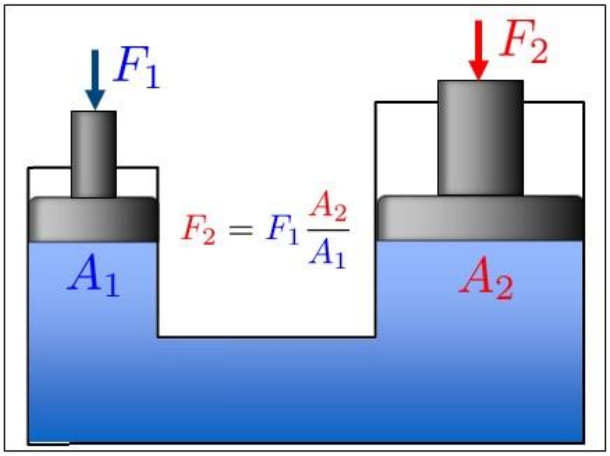
$$\rightarrow \boldsymbol{P = \frac{F}{A}[Pa]} \quad \boldsymbol{(Ec. 2)}$$

Existe un valor de presión que se debe conocer de memoria, tal cual como para el caso de la densidad, en que se debe conocer el valor de la densidad del agua. Este valor de presión es el de la presión atmosférica, el cual es:

$$P_{atm} = 1\,[atm] = 101325\,[Pa]$$

Ejemplo 2

En una rampa para subir automóviles, el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pistón de radio 5 $[cm]$. La presión se transmite a un segundo pistón de radio 15 $[cm]$.



a) ¿Qué fuerza deberá ejercer el aire comprimido para levantar un automóvil con un peso de 13300 $[N]$?
b) ¿Qué presión de aire producirá esa fuerza?

Respuesta:

(a) Debido a que la presión ejercida por el aire comprimido se transmite íntegramente a través de todo el fluido, se obtiene:

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right) F_2 = \frac{\pi(5 \cdot 10^{-2}\,[m])^2}{\pi(15 \cdot 10^{-2}\,[m])^2}(13300\,[N]) = \boxed{F_1 = 1{,}48 \cdot 10^3\,[N]}$$

(b) La presión de aire que produce esta fuerza está dada por:

$$\frac{F}{A_1} = \frac{1{,}48 \cdot 10^3\ [N]}{\pi(5 \cdot 10^{-2}\ [m])^2} = \boxed{P = 1{,}89 \cdot 10^5\ [Pa]}$$

Presión Hidrostática

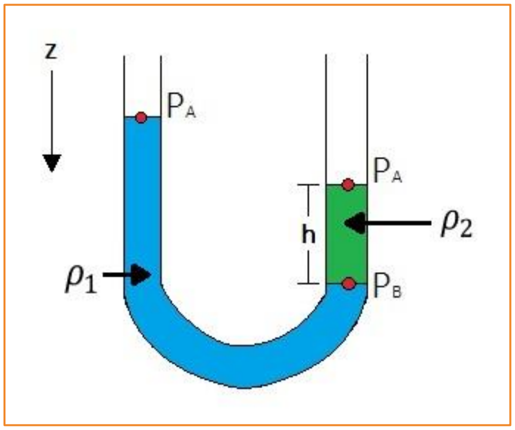


Figura 2: Tubo en "U"

Considerando la *Figura 2*, si se conoce la presión hidrostática en un punto "A" y se quiere averiguar el valor de la presión en un punto "B", esta última será igual a la presión en el punto "A" más $\rho_2 g h$, donde ρ_2 es la densidad del fluido que está entre los dos puntos tratados y h la altura que existe desde "A" hasta "B", es decir:

$$P_B = P_A + \rho_2 \cdot g \cdot h$$

Ahora bien, si la presión que se conoce es la del punto "B" y se quiere averiguar la presión en el punto "A", esta última será igual a la presión en el punto "B" menos $\rho_2 g h$, donde ρ_2 es la densidad del fluido que está entre los dos puntos tratados y h la altura que existe desde "B" hasta "A", es decir:

$$P_A = P_B - \rho_2 \cdot g \cdot h$$

Es claro que se podía obtener la última ecuación a partir de la anterior, pero es importante hacer la aclaración para el signo de $\rho g h$, ya que este depende de la altura.

Se puede ver en la *Figura 2* que el "eje z", donde se encuentra ubicada la altura, está definido positivo hacia abajo, por lo tanto, cuando se baja desde un punto "A" hacia uno "B", la **altura queda positiva** y la **altura queda negativa** cuando se sube desde el punto "B" hacia el "A".

Generalmente, la presión en el punto "A" de la *Figura 2*, se asume como la **presión atmosférica**, dado a que en este caso, el tubo está abierto hacia el exterior

Resumiendo y generalizando al mismo tiempo, para dos puntos cualesquiera y considerando el signo de la altura, la presión hidrostática será:

$$P_B = P_A \pm \rho \cdot g \cdot h \qquad (\boldsymbol{Ec.3})$$

Ejemplo 3

Calcule la presión a 1000 $[m]$ de profundidad en el océano. Suponga que la densidad del agua es 1000 $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ y tome $P_a = 1{,}01 \cdot 10^5\ [Pa]$. ¿Cuál sería entonces la fuerza total ejercida sobre la parte externa de una ventana circular de 30 $[cm]$ de diámetro de un submarino a esa profundidad?

Respuesta:

$$P = P_a + \rho g h = 1{,}01 \cdot 10^5\ [Pa] + 1000 \left[\frac{kg}{m^3}\right] \cdot \left(9{,}8 \left[\frac{m}{s^2}\right]\right) \cdot (1000\ [m]) = 9{,}9 \cdot 10^6\ [Pa]$$

Se ha calculado la presión, falta determinar el área donde se ejerce esa presión, el área de la ventana:

$$A = \pi r^2 = \pi (0{,}15)^2 = 0{,}07\ [m^2]$$

Finalmente, la fuerza será:

$$\boxed{F = 7 \cdot 10^5\ [N]}$$

Principio de Arquímedes o Empuje

Definición: *"Cualquier cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza que es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo"*.

La magnitud de la fuerza de empuje siempre es igual al peso del fluido desalojado por el objeto y en el S.I. se mide en Newton (N)

En otras palabras, se tiene que el empuje será igual al volumen de fluido desplazado por el cuerpo sumergido (V_f), multiplicado por la densidad del fluido (ρ_f) en que está sumergido el cuerpo y multiplicado por la aceleración de gravedad. Matemáticamente:

$$E = V_f \cdot \rho_f \cdot g \quad (\boldsymbol{Ec.4})$$

Además, se define con la letra W el peso del cuerpo para no entrar en confusión con la presión (P).

$$W = m \cdot g \quad (\boldsymbol{Ec.5})$$

Si se utiliza la $(\boldsymbol{Ec.1})$ para despejar la masa y luego reemplazarla en la $(\boldsymbol{Ec.5})$, se obtiene una ecuación alternativa para el peso de un cuerpo:

$$W = V_c \cdot \rho_c \cdot g \quad (\boldsymbol{Ec.6})$$

Donde V_c es el volumen del cuerpo y ρ_c es la densidad del cuerpo.

Dado a que se está estudiando hidrostática, en condiciones de equilibrio, la fuerza de empuje E sobre un cuerpo es exactamente igual en magnitud al peso del cuerpo. Es decir:

$$E = W \quad (\boldsymbol{Ec.7}).$$

Existe otra fuerza relacionada al empuje, la cual es el Peso Aparente, que es simplemente la resta entre el peso del cuerpo y el empuje que sufre el cuerpo. Esta es la razón por la cual al bañarse en una piscina el cuerpo se torna más liviano. Matemáticamente:

$$W_{ap} = W - E \quad (\boldsymbol{Ec.8})$$

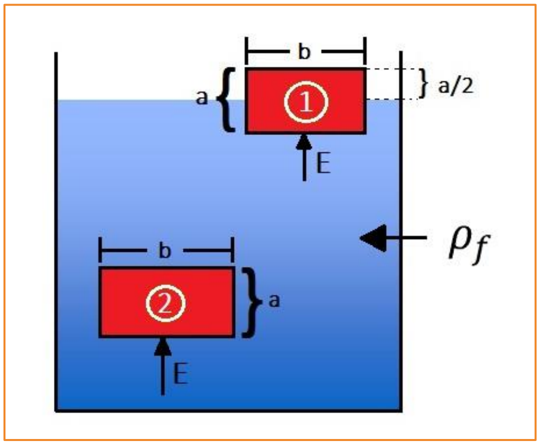


Figura 3: Cuerpos afectados por la fuerza empuje.

Se tendrán dos principales casos para el empuje:

Caso 1: Objeto flotante (Cuerpo 1)

Se considera la *Figura 3*, se observa que el cuerpo 1 cumple con este caso, es decir, el cuerpo se encuentra parcialmente sumergido. En este caso, la fuerza de empuje se equilibra con el peso hacia abajo del objeto. Haciendo el análisis del cuerpo 1 y considerando que ambos cuerpos tienen una profundidad "c", se deduce que el volumen del cuerpo sumergido será igual al volumen de fluido desplazado (V_f), esto es:

$$V_f = \frac{a}{2} \cdot b \cdot c$$

Por lo tanto, utilizando la ($\boldsymbol{Ec.4}$) el empuje será:

$$E = \frac{a}{2} \cdot b \cdot c \cdot \rho_f \cdot g$$

Caso 2: Objeto totalmente sumergido (Cuerpo 2)

Mirando siempre la *Figura 3*, cuando un objeto se sumerge totalmente en un fluido de densidad ρ_f, el volumen de fluido desplazado pasa a ser igual al volumen del cuerpo, es decir:

$$V_f = V_c = a \cdot b \cdot c$$

Por lo tanto el empuje será ($\boldsymbol{Ec.4}$):

$$E = a \cdot b \cdot c \cdot \rho_f \cdot g,$$

Si el objeto tiene una densidad ρ_c, su peso es igual a $W = m \cdot g = \rho_c \cdot V_c \cdot g$, y la fuerza neta sobre éste es $E - W = (\rho_f - \rho_c) \cdot V_c \cdot g$. Por lo que, si la densidad del objeto es menor que la densidad del fluido, el objeto sin apoyo se acelera hacia arriba. Si la densidad del objeto es mayor que la densidad del fluido, el objeto sin apoyo se hundirá.

Ejemplo 4

Una estatua ancestral de masa 70 $[kg]$ se encuentra en el fondo del mar. Su volumen es $3 \cdot 10^4\ [cm^3]$. ¿Cuánta fuerza es necesario aplicar para levantarla?

Respuesta:

La fuerza de empuje que ejerce el agua de mar $\left(\rho = 1{,}025 \cdot 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)$ sobre la estatua está dada por:

$$E = m_{agua} g = \rho_{agua} V g$$

Donde el volumen V corresponde al volumen desplazado, es decir el volumen de la estatua:

$$V = 3 \cdot 10^4 [cm^3] = 3 \cdot 10^{-2} [m^3]$$

Luego el empuje está dado por:

$$E = \left(1{,}025 \cdot 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\left(9{,}8 \left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(3 \cdot 10^{-2}\ [m^3]) = 301\ [N]$$

El peso de la estatua es $686\ [N]$. Finalmente, la fuerza necesaria para levantar la estatua será:

$$W_{ap} = W - E = 385\ [N]$$

En el aire, esto correspondería a la fuerza necesaria para levantar una estatua de solo $\mathbf{39}\ [\boldsymbol{kg}]$.

Aleaciones

En este tema se trabaja con objetos arbitrarios compuestos de dos o más materiales, pudiéndose conocer porcentajes o valores de masa, volumen o densidades del objeto, para así determinar alguna variable pedida. Esto se basa en que la densidad, masa y volumen de un objeto son magnitudes escalares y por lo tanto son aditivas entre sí.

Por ejemplo, si un objeto está constituido por dos materiales distintos (Ej.: Bronce y Cobre), las masas de ambos se sumaran para dar la masa total del sistema.

Existen diversas formas de abordar este tema, el cual además incluye temas anteriores vistos en esta guía, centrándose en trabajar con densidades, empuje, presión, etc.

Ejemplo 5

Un cubo constituido por 3 Kg de Hierro $\left(\rho_H = 7860 \ {}^{Kg}/_{m^3}\right)$ y 1 Kg de Cobre $\left(\rho_C = 8920 \ {}^{Kg}/_{m^3}\right)$, se ha caído al fondo de un estanque que está lleno de agua y ha caído apoyado sobre una de sus caras. Sabiendo esto, ¿Cuál es el valor de la presión ejercida por el cubo en el fondo del estanque medida en pascales? Tome $g = 10 \ \left[{}^{m}/_{s^2}\right]$.

Respuesta:

Por datos del problema se sabe que:

$$m_T = m_H + m_C = 4 \ [Kg]$$

$$V_f = V_T$$

$* \boldsymbol{V_f : Volumen \ de \ fluído \ desplazado}$

Lo primero es obtener los volúmenes que ocupa cada material con el cual está constituido el cubo. Para esto se utiliza la $\boldsymbol{Ec. 1}$, quedando:

$$V_H = \frac{m_H}{\rho_H} = \frac{3 \ [Kg]}{7860 \ \left[{}^{Kg}/_{m^3}\right]} = 3{,}817 \times 10^{-4} \ [m^3]$$

$$V_C = \frac{m_C}{\rho_C} = \frac{1 \ [Kg]}{8920 \ \left[{}^{Kg}/_{m^3}\right]} = 1{,}121 \times 10^{-4} \ [m^3]$$

Por lo tanto, el volumen total del cubo será:

$$V_T = V_H + V_C = 4{,}938 \times 10^{-4} \ [m^3]$$

Obtenido esto, se analiza que el cubo está totalmente sumergido en agua, por lo tanto, la fuerza que está ejerciendo en el fondo del estanque no será el peso propio del objeto, sino el peso aparente. Esto se obtiene de la $\boldsymbol{Ec. 8}$, quedando:

$$W_{ap} = W - E = m_T \cdot g - \rho_{H2O} \cdot V_f \cdot g$$

$$\rightarrow \quad W_{ap} = 4[Kg] \cdot 10 \ \left[{}^{m}/_{s^2}\right] - 1000 \left[{}^{Kg}/_{m^3}\right] \cdot 4{,}938 \times 10^{-4} \ [m^3] \cdot 10 \ \left[{}^{m}/_{s^2}\right]$$

$$\rightarrow \quad W_{ap} = 35{,}062 \ [N]$$

Ahora bien, se tiene que si se nombra “x” al lado de un cubo, se puede obtener su volumen y así obtener el valor del lado del cubo:

$$x = Lado\ del\ cubo \ \rightarrow V_T = x^3 \ \rightarrow x = \sqrt[3]{V_T} \ \rightarrow x = 0{,}079[m]$$

Por lo tanto el área de las caras del cubo será:

$$Área = x^2 = 6{,}241 \times 10^{-3}\ [m^2]$$

Finalmente, ocupando la $\boldsymbol{Ec.2}$, se obtiene la presión que el cubo está ejerciendo en el fondo del estanque:

$$P = \frac{W_{ap}}{Área} = \frac{35{,}062\ [N]}{6{,}241 \times 10^{-3}\ [m^2]} = 5618{,}01 \approx 5618\ [Pa]$$

Compuertas

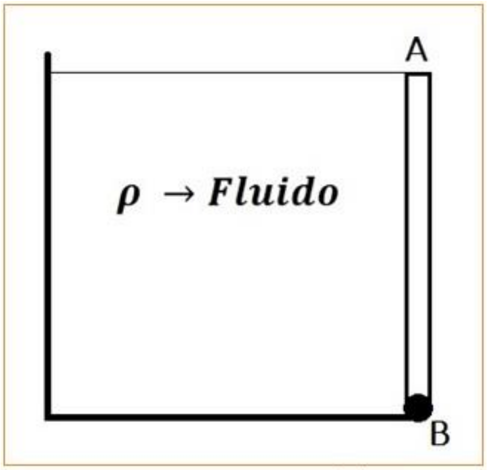


Figura 4: Compuerta AB articulada en B.

Una compuerta puede entenderse como una pared o muralla articulada en cierto punto y que forma parte .de algún recipiente o estanque que acumula algún tipo de fluido, tal cual como se ve en la *Figura 4*.

Como se vio en el apartado “Presión Hidrostática”, la presión va aumentando a medida que se esté más alejado de la superficie. Esto implica que se tendrán distintas fuerzas de presión actuando sobre la compuerta a medida que se esté más profundo, por lo tanto se tendrá una fuerza distribuida en toda la compuerta, como se muestra en la *Figura 5*. El tema de fuerzas distribuidas se asume ya conocido, por lo tanto, no se ahondará demasiado en él.

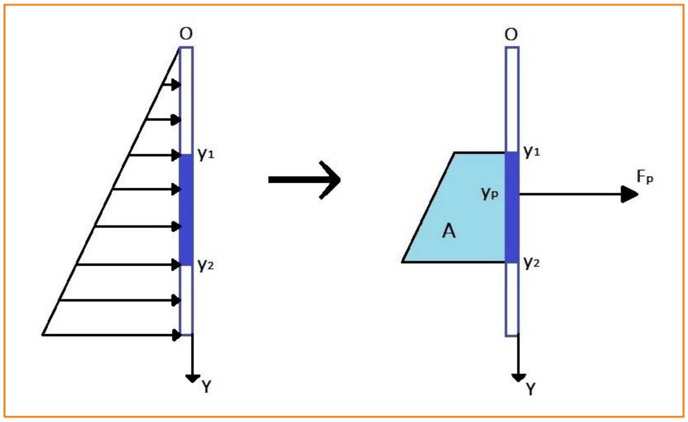


Figura 5: Fuerza Distribuida y su resultante en un área (A) determinada.

Siguiendo la *Figura 5*, se define el origen del sistema en donde esté la superficie del fluido contenido, para luego seleccionar un área en particular y así poder las formulas necesarias para hacer los cálculos pedidos para compuertas.

En compuertas se tienen dos casos posibles, los cuales se exponen a continuación:

Caso 1: Compuertas Verticales

Este es el caso de la Figura 5, en el cual la compuerta tiene una inclinación de 0° respecto a la vertical. En este caso, las ecuaciones para la fuerza resultante (F_p) y para el punto de aplicación (y_p) son las siguientes:

$$F_p = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot \omega \cdot g \cdot (y_2^2 - y_1^2) \qquad (\boldsymbol{Ec.9})$$

$$y_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2} \qquad (\boldsymbol{Ec.10})$$

Donde ρ_f es la densidad del fluido contenido, ω es la profundidad de la compuerta, g aceleración de gravedad.

Finalmente y_1 e y_2 son las posiciones de donde comienza y donde termina la compuerta respectivamente (generalmente), medido desde el origen. Sin embargo, pueden existir ocasiones en las que no necesariamente y_1 e y_2 sean las posiciones de donde comienza y donde termina la compuerta respectivamente. Esto se tendrá que analizar según el ejercicio con el que se esté trabajando.

Caso 2: Compuertas Inclinadas

Un ejemplo visual de este caso se muestra en la *Figura 6*, en la cual se ve que la compuerta esta inclinada en un ángulo θ respecto a la vertical.
Su principal diferencia con el Caso 1, es que la fuerza resultante de la presión se ve afectada por esta inclinación, quedando las fórmulas para este caso:

$$F_p = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot \omega \cdot g \cdot (y_2^2 - y_1^2) \cdot \cos\theta \qquad (\boldsymbol{Ec.11})$$

$$y_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{y_1 + y_2} \qquad (\boldsymbol{Ec.10})$$

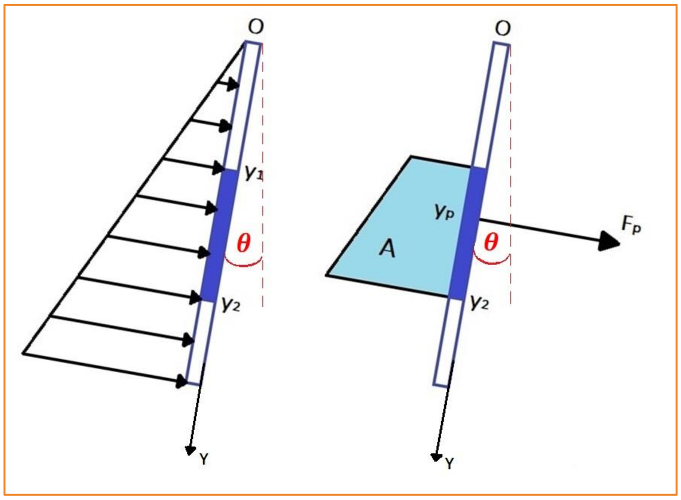


Figura 6: Compuerta Inclinada

Se puede observar que la única diferencia con el Caso 1, es en la fuerza resultante, quedando todo lo demás igual al Caso 1.

Torque

Debido a que la compuerta tiene una articulación, en ocasiones se suele pedir el torque para cualquier punto de la compuerta. Es por esta razón que se recuerda la formula general del torque en un punto O.

$$\vec{\Gamma_O} = \sum \vec{r_i} \times \vec{F_i} \qquad (\boldsymbol{Ec.12})$$

Ejemplo 6

La compuerta AB de la *Figura 7*, está articulada en A y tiene una profundidad de 4 metros (hacia adentro de la figura). Además una fuerza externa F_1 de 125 [KN] está actuando sobre la compuerta. Existe agua encerrada y además la compuerta se mantiene en equilibrio efectuando un torque en A.

Sin considerar el peso de la compuerta y tomando $g = 10\left[{}^{m}/_{s^2}\right]$, se pide:

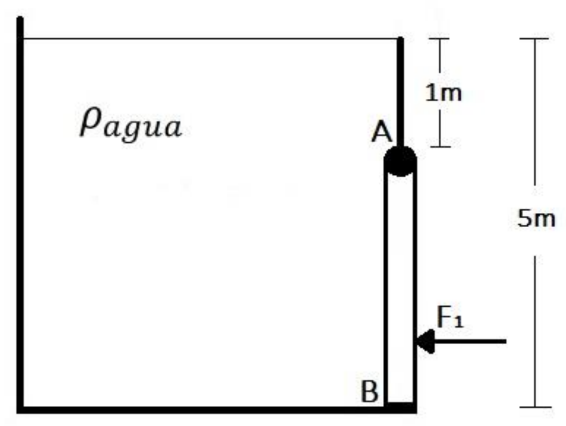


Figura 7

a) La fuerza total resultante a la que está sometida la compuerta.
b) El punto en el cual está actuando la fuerza de presión resultante.

Respuesta:

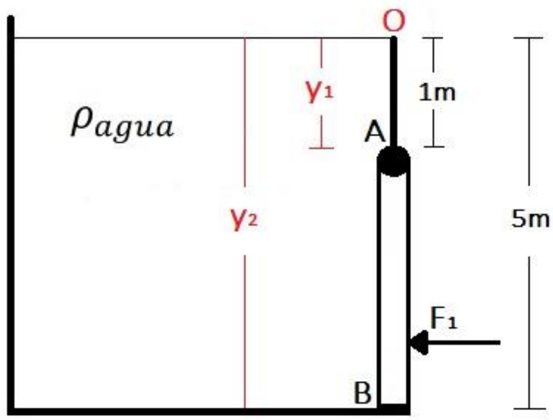
a) Datos entregados:

$$\rho = 1000 \left[{}^{Kg}/_{m^3}\right]$$

$$\omega = 4\ [m]$$

$$F_1 = 125000\ [N]$$

Se ve que la compuerta de la Figura 7 es del tipo vertical, por lo tanto, se ocupará la $\boldsymbol{Ec.9}$ y la $\boldsymbol{Ec.10}$. Luego, considerando el origen del sistema en la superficie del agua, se definen las posiciones de la compuerta y_1 e y_2:



Ahora, conocidos los valores de y_1 e y_2 ($y_1 = 1m \quad ; \quad y_2 = 5m$), se procede a ocupar la $\boldsymbol{Ec.9}$ para obtener la fuerza de presión resultante:

$$F_p = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 4 \cdot 10 \cdot (5^2 - 1^2) = 480000\ [N]$$

Luego, para obtener la fuerza total resultante pedida, se procede a hacer la sumatoria de fuerzas:

$$\sum \overrightarrow{F_T} = \overrightarrow{F_P} + \overrightarrow{F_1} = 480000 - 125000 = 355000\ [N]$$

b) Lo que se pide aquí es simplemente ocupar la $\boldsymbol{Ec.10}$, por lo tanto:

$$y_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1^2 + 1 \cdot 5 + 5^2}{1+5} = \frac{31}{9} \approx 3{,}444\ [m]$$

Responsables académicos

Corregida Editorial PAIEP. Si encuentra algún error favor comunicarse a ciencias.paiep@usach.cl

Referencias y fuentes utilizadas

Serway, R. "Física para ciencias e ingeniería" Volumen 1. (7ª. ed.)