

GUIA N° 1: EJERCICIOS DE POLINOMIOS

- 1) Usando el Teorema del Resto demuestre el enunciado dado, si $n \in \mathbb{Z}^+$
 - a) $x^n - a^n$ es divisible exactamente por $x + a$ si n es par
 - b) $x^n + a^n$ es divisible exactamente por $x + a$ si n es impar
 - c) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x + a$ si n es par
 - d) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x - a$ si n es par
- 2) En los siguientes ejercicios obtenga el cuociente y el resto usando la división sintética
 - a) $(x^3 + 4x^2 + 7x - 2) \div (x + 2)$ Resp. $x^2 + 2x + 3$, -8
 - b) $(x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 7) \div (x - 3)$
 - c) $(x^6 - x^4 + x^2 - 2) \div (x - 1)$ Resp. $x^5 + x^4 + x + 1$, -1
 - d) $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div (x + \frac{1}{2})$ Resp. $4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$, 5
- 3) Demostrar que $x - 1$ y $x + 2$ son factores de $p(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ y determinar los factores restantes Resp. $x - 2$, $x + 3$
- 4) Usar la división sintética para hallar el cuociente y el resto al dividir el polinomio $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 3$ por $2x + 1$. *Sugerencia.* Efectuar la división sintética dividiendo por $x + \frac{1}{2}$ y luego dividir el cuociente por 2
Resp. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, resto 5
- 5) Determinar a, b, c de modo que $(x - 3)(x + 1)(x - 1)$ sea factor de $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$ Resp. $a = 8$, $b = 5$, $c = -6$
- 6) Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Al dividir $p(x)$ tanto por $x + 2$ como por $x + 3$ el resto que se produce es cero; pero al dividir por $x - 1$ el resto es -12 . Calcular el valor de $A = 14a - 4b + 3c$ Resp. $a = 3$, $b = -4$, $c = -12$
- 7) Al dividir un polinomio $p(x)$ separadamente por $x - 1$ y $x - 2$ se obtiene como resto a 5 y 3 respectivamente. Calcular el resto que se produce al dividir $p(x)$ por el producto $(x - 1)(x - 2)$ Resp. $-2x + 7$
- 8) Comprobar que la ecuación $x^4 - 11x^2 - 12x + 4 = 0$ tiene la raíz doble -2 y hallar las restantes raíces Resp. $2 \pm \sqrt{3}$
- 9) Determine la ecuación mónica de grado mínimo con coeficientes reales que tenga las raíces indicadas $-2, -1, 1, 2$ Resp. $x^4 - 5x^2 + 4$

Ecuación de segundo grado

A) Determine el conjunto solución de las ecuaciones:

1) $(x-3)^2 = 2(17-3x)$ Resp $x_1=-5, x_2=5$

2) $9-(x-5)^2 = 10(x-2)$ Resp. $x_1 = -2, x_2 = 2$

3) $(x+2)^2 - 2(x+3)(x-2) = (x+4)^2$ Resp. $x_1 = 0, x_2 = -5$

B) Resuelva las siguientes ecuaciones irracionales

1) $\sqrt{x^2+9}-5=0$

2) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-3}=1$

3) $\sqrt{x+1}+\frac{9}{\sqrt{x+1}}=6$

4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$

5) $\sqrt{2+\sqrt{x}}+\sqrt{2-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

6) $a+\sqrt{x-a^2}=\sqrt{2x-a^2}$

Resp. 1) -4;4 2) 4;3 3) 8 4) 4 5) 4 6) $5a^2; a^2$

C) Determine el conjunto solución de las ecuaciones:

1) $\frac{24}{x+10}+1=\frac{24}{10-x}$

2) $\frac{x-2}{x+3}-\frac{x^2}{x^2-9}=1-\frac{x-1}{3-x}$

3) $\frac{11}{x^2-4}+\frac{x+3}{2-x}=\frac{2x-3}{x+2}$

4) $\frac{5}{3x-2}-\frac{7x+2}{9x-6}=1$

D) Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado

1) $abx^2+(a^2-2b^2)x=2ab$ Resp. $x_1=-\frac{a}{b}, x_2=\frac{2b}{a}; a, b \neq 0$

2) $x^2-2ax+8x=16a$ Resp. $x_1=2a, x_2=-8$

3) $2x^2-5cx+2c^2=0$ Resp. $x_1=2c, x_2=\frac{c}{2}$

4) $x^2-2ax=m^2-a^2$ Resp. $x_1=a+m, x_2=a-m$

5) $x^2=a^2-10ab+25b^2$ Resp. $x_1=a-5b, x_2=5b-a$

6) $x^2-(5a+7b)x+35ab=0$ Resp. $x_1=5a, x_2=x_2=7b$

7) $4abx^2-a^2b^2=2ab^2x-2a^2bx$ Resp. $x_1=\frac{b}{2}, x_2=-\frac{a}{2}$

8) $(x+a)^2=5ax-(x-a)^2$ Resp. $x_1=2a, x_2=\frac{a}{2}$

$$9) 2ax^2 - bx = 2a + b \text{ Resp. } x_1 = -1, x_2 = \frac{2a+b}{2a} ; a \neq 0$$

$$10) \frac{3ax}{ax+2} + \frac{2ax}{ax+1} = \frac{6}{ax+2} \text{ Resp. } x_1 = -\frac{6}{5a}, x_2 = \frac{1}{a}; a \neq 0$$

$$11) (2a+3b)x^2 - (a-2b)x = a+5b \text{ Resp. } x_1 = 1, x_2 = -\frac{a+5b}{2a+3b}$$

Algunas ecuaciones de segundo grado, clásicas

1. El apretón de manos

Problema

Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurren a la reunión?

Solución

La cuestión se resuelve con facilidad si recurrimos al álgebra. Cada una de las x personas dio la mano a las otras $x-1$. Por tanto, el total de apretones de manos debe ser $x(x-1)$. Además hay que tener en cuenta que cuando A da la mano a B, B estrecha la mano de A; estos dos apretones de manos deben ser considerados como uno solo. Por eso, el número de apretones de manos contados es dos veces menor que $x(x-1)$.

En consecuencia surge la ecuación $\frac{x(x-1)}{2} = 66$ que, después de las correspondientes

transformaciones se tendrá $x^2 - x - 132 = 0$ de donde $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+528}}{2}$, así,

$$x_1 = 12; x_2 = -11$$

Como la raíz negativa (-11 personas) carece de todo sentido, la rechazamos, conservando únicamente la primera: en la reunión estuvieron 12 personas.

2. El enjambre de abejas

Problema

En la antigüedad estaba muy extendida en la India una diversión singular: la solución de rompecabezas en competencias públicas. Los manuales de matemáticas de ese país contribuían a la celebración de tales campeonatos de cálculo mental. "Aplicando las reglas aquí expuestas -escribía el autor de uno de dichos libros -, un hombre inteligente puede idear miles de problemas semejantes. Así como el Sol hace palidecer las estrellas con sus destellos, un hombre discreto eclipsa la gloria de otro hombre en los concursos populares, proponiendo y resolviendo problemas algebraicos". En el original, estas palabras presentan un aspecto más poético, por cuanto el libro está escrito en verso. Los problemas también aparecen versificados. Enunciemos en prosa uno de estos rompecabezas.

Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla, de dulce fragancia.

¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

Solución

Si expresamos el número buscado de abejas del enjambre con la letra x , tendremos la

ecuación $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$

Podemos simplificar la ecuación introduciendo una incógnita auxiliar: $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

Entonces $x = 2y^2$, por lo que resultará la ecuación $y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2$, o la ecuación de segundo grado $2y^2 - 9y - 18 = 0$

La ecuación tiene dos raíces para y : $y_1 = 6$; $y_2 = -\frac{3}{2}$ y las soluciones para x son $x_1 = 72$; $x_2 = 4,5$

Como el número de abejas debe ser entero y positivo, es válida sólo la primera raíz: el enjambre constaba, pues, de 72 abejas.

Comprobémoslo: $\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9}(72) + 2 = 6 + 64 + 2 = 72$

3. La manada de monos

Problema

Otro de los problemas indios puede ser presentado en verso tal y como fue traducido por Lébedev, autor del excelente libro ¿Quién inventó el álgebra?

Regocíjense los monos divididos en dos bandos: el cuadrado de su octava parte en el bosque se solaza, con alegres gritos, doce atronando el campo están ¿Sabes cuantos monos hay en la manada, en total?

Solución

Si el número total de la manada es x , entonces: $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$ de donde $x_1 = 48$; $x_2 = 16$

El problema tiene dos soluciones positivas: en la manada puede haber 48 y 16 monos. Las dos soluciones satisfacen por las condiciones del problema.

- 1) El numero total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de n lados esta dado por la formula $d = \frac{n^2 - 3n}{2}$. ¿De cuantos lados es el polígono en el que se pueden trazar 54 diagonales en total? Resp. 12 lados
- 2) Un abuelo tiene 67 años y sus dos nietos tienen 3 y 4 años. ¿En cuantos años más, la edad del abuelo será igual al producto de las edades de ambos nietos? Resp. en 5 años más
- 3) La suma de los cuadrados de los tres enteros pares consecutivos es 596. Determinar el mayor entero del trío. Resp. 16
- 4) La arista de un cubo es 4 cm más corta que la arista de un segundo cubo. Determinar la superficie de cada cubo, si la diferencia de sus volúmenes es 1.216 cm^3 . Resp. 384 cm^2 y 864 cm^2

- 5) Encontrar los tres lados de un triángulo rectángulo si se sabe que sus medidas corresponden a tres múltiplos consecutivos de 10. Resp. 30, 40 y 50
- 6) El ancho de un rectángulo mide 5cm menos que el largo. Si el área del rectángulo es 104 cm^2 , determine sus medidas. Resp. 8cm y 13cm
- 7) Encontrar tres enteros consecutivos tales que al dividir el triple del mayor por el menor se obtiene un número que es igual a $\frac{5}{12}$ del número intermedio.
Resp. 8,9 y 10
- 8) ¿Qué número debe sumarse al numerador y restarse del denominador de la fracción $\frac{23}{40}$ y simultáneamente debe sumarse tanto al numerador como al denominador de la fracción $\frac{31}{40}$ para que las fracciones resultantes sean equivalentes? Resp. 5 o -32
- 9) La ecuación $\frac{7}{v-12} + \frac{7}{v+12} = 2$ permite resolver el siguiente problema. “Un hombre viaja en un bote a remos 7 kilómetros río arriba y, luego, da la vuelta y navega 7 kilómetros río abajo. Si en este recorrido se demoró 2 horas y el río corre 12 kilómetros por hora ¿A qué velocidad remaría el hombre si estuviera en un lago con aguas quietas?”
a. Explicar como se deduce la ecuación para resolver el problema.
b. Resolver la ecuación y dar respuesta al problema.
Resp. Remaría a 16 kilómetros por hora
- 10) Determinar la velocidad de un río si se sabe que una persona rema 15 km/h en aguas quietas y se demoró 6 h en navegar 40 km río arriba y 40 km. río abajo.
Respuesta 50 km/h
- 11) Un paisajista quiere rodear un jardín rectangular con un sendero de ancho uniforme. Para esto usará una tonelada de gravilla que es capaz de cubrir 114 m^2 . Si el jardín tiene 20 m de largo y 15 m de ancho, ¿de qué ancho debe ser el sendero para que se use toda la gravilla disponible? Resp. 1,5 metros
- 12) Determinar los valores que deben tomar p y q para que las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ sean p y q. Resp. $p = 1, q = -1$ (en general basta que se cumpla la relación $q = -2p$)
- 13) La suma de dos números es 131 y al dividir el número mayor por el menor, el cociente es un sexto del número menor y el resto es 11. Determine ambos números Resp. 107 y 2

- 14) El producto de dos números es 131 y al dividir el mayor por el menor el cociente es un sexto del número menor y el resto es 11. determinar ambos números Resp. 107 y 24
- 15) El producto de dos números positivos es 216 y al dividir el número mayor por el menor el cociente es 3 y el resto es 3 ¿Cuáles son los números? Resp. 8 y 27
- 16) Encontrar todos los pares de números cuya suma es 12 y la suma de sus recíprocos es $\frac{3}{8}$ Resp. 4 y 8
- 17) La diferencia de dos enteros positivos es 4 y la suma de sus cuadrados es 730 Determine tales números Resp. 17 y 21
- 18) Un número de dos cifras es tal que el dígito de las decenas es 5 unidades mayor que el dígito de las unidades además, al dividir el número por el doble del dígito de las unidades se obtiene el doble de la suma de ambas cifras del número ¿Cuál es el número? Resp. 72
- 19) La suma de las dos cifras de un número es 12. Si al producto de ellas se le suma 66 se obtiene el primer número con su cifras invertidas ¿Cuál es el número? Resp. 39

Transforme en producto

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $3x - 3y + 3z$ | 13) $x^3 + y^3$ |
| 2) $3x^2 + 3x$ | 14) $27a^3 - 8b^3$ |
| 3) $3x + 12a - 3$ | 15) $x^3 + 1$ |
| 4) $3x^2 + 15x$ | 16) $x^2 + 8x + 15$ |
| 5) $ax^2 + abx$ | 17) $x^2 - 2x - 15$ |
| 6) $(x^2 - y^2) - (x + y)$ | 18) $a^2 + a - 10$ |
| 7) $(x + y)(3a - 2b) + (2a + 3b)(x + y)$ | 19) $16x^2 - 40x + 25$ |
| 8) $(a^2 - b^2) - 3a + 3b$ | 20) $x^2 + 2xy + y^2$ |
| 9) $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$ | 21) $6ax + 4ay - 9bx - 6by$ |
| 10) $9a^2 - 25b^2 - 3a - 5b$ | 22) $6ax - 4ay + 9bx - 6a^2$ |
| 11) $x^4 - y^4$ | 23) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ |
| 12) $16x^4 - 81y^4$ | |

Respuestas

- | | |
|--------------------------|------------------------------------|
| 1) $3(x - y + z)$ | 13) $(3a + 5b)(3a - 3b - 1)$ |
| 3) $3(x + 4a - 1)$ | 15) $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$ |
| 5) $a(x + 1)$ | 17) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ |
| 7) $ax(x + b)$ | 18) $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$ |
| 9) $(x + y)(5a + b)$ | 21) $(x + 5)(x - 3)$ |
| 11) $(a - b)(a + b - 3)$ | |