Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________ Sección:______________________________

Control 1
Forma B (Pauta)

1.- Sea la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{2x + y}{3}, \frac{x - 6y}{4}\right)$$

i) Pruebe que f es biyectiva.
Sean (x_1, y_1) y $(x_2, y2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, con esto se tiene que:

$$\left(\frac{2x_1 + y_1}{3}, \frac{x_1 - 6y_1}{4}\right) = \left(\frac{2x_2 + y_2}{3}, \frac{x_2 - 6y_2}{4}\right).$$

Igualando las coordenadas, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{2x_1 + y_1}{3} = \frac{2x_2 + y_2}{3}$$
$$\frac{x_1 - 6y_1}{4} = \frac{x_2 - 6y_2}{4}$$

obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 \\ x_1 - 6y_1 = x_2 - 6y_2 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 6 y luego sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$13x_1 = 13x_2,$$

obteniendo así que $x_1 = x_2$.
Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 1 se obtiene directamente que:

$$y_1 = y_2,$$

concluyendo así que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ y por lo tanto queda demostrado que f es inyectiva.

Por otro lado, para probar la sobreyectividad, tomemos un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (a,b)$.
Con lo anterior se tiene se puede obtener el sistema:

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} = a \\ \frac{x-6y}{4} = b \end{cases}$$

Despejando y de la primera ecuación se obtiene $y = 3a-2x$, y luego podemos reemplazarlo en la ecuación 2 obteniendo:

$$x - 6(3a - 2x) = 4b,$$

la cual tiene como resultado para x :

$$x = \frac{18a + 4b}{13}.$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación $y = 3a - 2x$ queda:

$$y = 3a - 2 \cdot \frac{18a + 4b}{13} = \frac{3a - 8b}{13}.$$

Como $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = Rec(f) = Codom(f),$$

por lo tanto, se concluye que f es sobreyectiva.

Como f es sobreyectiva e inyectiva, se tiene que f es biyectiva.

ii) Determine f^{-1}.

Como la función f es biyectiva, existe su función inversa f^{-1}, la cual está descrita según la regla de asignación obtenida anteriormente, así:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \left(\frac{18x + 4y}{13}, \frac{3x - 8y}{13} \right) \end{aligned}$$

2.- Sean las funciones:

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^2+3}{2}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \sqrt{x^2+1}$$

i) Determine los conjuntos:

- $h(\{-4,0,3\}) = \{h(-4), h(0), h(4)\} = \{\frac{19}{2}, \frac{3}{2}\}$.
- $g(\{-4,0,4\}) = \{g(-4), h(0), h(4)\} = \{\sqrt{17}, 1\}$.
- $h^{-1}(\{-3,0,6\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = -3 \vee h(x) = 0 \vee h(x) = 6\} = \{-3, 3\}$.
- $g^{-1}(\{-3,0,6\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = -3 \vee g(x) = 0 \vee g(x) = 6\} = \{-\sqrt{35}, \sqrt{35}\}$.

ii) Determine $(g \circ h)(x)$ y $(h \circ g)(x)$ y calcule $(g \circ h)(2)$ y $(h \circ g)(1)$.

Primero se debe encontrar una regla de asignación para las composiciones:

-
$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(\sqrt{x^2+3}) \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+3})^2+1}{3}\end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) &= h(g(x)) \\ &= h\left(\frac{x^2+1}{3}\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^2+3}\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(g \circ h)(2) = \frac{(\sqrt{2^2+3})^2+1}{3} = \frac{8}{3},$$

y

$$(h \circ g)(1) = \sqrt{\left(\frac{1^2+1}{3}\right)^2+3} = \frac{\sqrt{31}}{3}$$