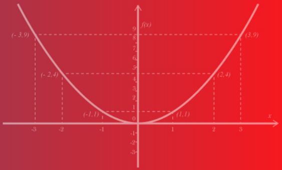
Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN



FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Exponencial y Logaritmo

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Exponencial y Logaritmo

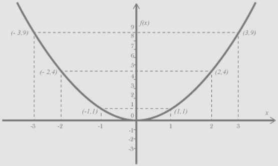
Coordinación de Cálculo I
Primera versión - Agosto 2020

Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola



FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Función Exponencial de base a

Definición

Sea a cualquier número real positivo distinto de uno. Entonces la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

definida por

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

la llamaremos **función exponencial de base a**.

Función Exponencial de base a

Definición

Sea a cualquier número real positivo distinto de uno. Entonces la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

definida por

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

la llamaremos **función exponencial de base a**.

Ejemplo :

1. Función exponencial de base 3, definida por $f(x) = 3^x$.
2. Función exponencial de base $\frac{1}{2}$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Función Exponencial de base a

Definición

Sea a cualquier número real positivo distinto de uno. Entonces la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

definida por

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

la llamaremos **función exponencial de base a**.

Ejemplo :

1. Función exponencial de base 3, definida por $f(x) = 3^x$.
2. Función exponencial de base $\dfrac{1}{2}$, definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Propiedades de la función exponencial

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces:

- $a^0 = 1$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.
- $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$.
- Si $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Observación

Para la función exponencial en base a, donde $a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$, *se tiene*

$$\{x \in \mathbb{R} : a^{x} = 0\} = \phi.$$

Es decir, la función exponencial en base a no tiene ceros, la función no intersecta del eje X.

Observación

Para la función exponencial en base a, donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, se tiene

$$\{x \in \mathbb{R} : a^x = 0\} = \phi.$$

Es decir, la función exponencial en base a no tiene ceros, la función no intersecta del eje X.

La gráfica de la función exponencial:

Figure: Si $a > 1$

Figure: Si $0 < a < 1$

Propiedades

Notemos que la función exponencial de base a, para $0 < a < 1$, satisface:

i) El valor de a^x tiende a cero cuando x se hace más grande recorriendo los valores positivos. Se concluye que el eje X (recta $y = 0$) es una asíntota horizontal de la función.

ii) La función es decreciente, es decir, si $x_1 < x_2 \ \rightarrow \ a^{x_1} > a^{x_2}$

Notemos que la función exponencial de base a, para $a > 1$, satisface:

i) El valor de a^x tiende a cero cuando x decrece recorriendo los valores negativos. Se concluye que el eje X (recta $y = 0$) es una asíntota horizontal de la función.

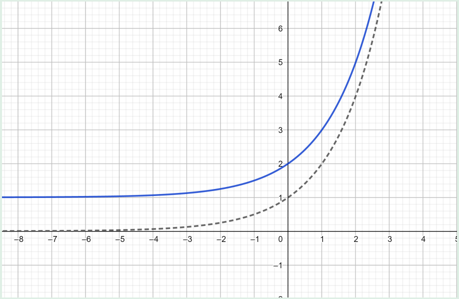
ii) La función es creciente, es decir, si $x_1 < x_2 \ \rightarrow \ a^{x_1} < a^{x_2}$.

Ejemplo 1

Graficar la función $f(x) = 2^x + 1$.

Ejemplo 1

Graficar la función $f(x) = 2^x + 1$.
Para graficar la función f, notar que la función $y = 2^x$ se traslada una unidad hacia arriba, como se muestra:



A partir de la gráfica se deduce que $Rec(f) = (1, +\infty)$ y que $y = 1$ es su asíntota horizontal. Además que es una función creciente.

Definición:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se define la función **exponencial natural**, como $e^x = exp(x)$. Donde la base corresponde al número irracional $e \approx 2.718$.

Definición:

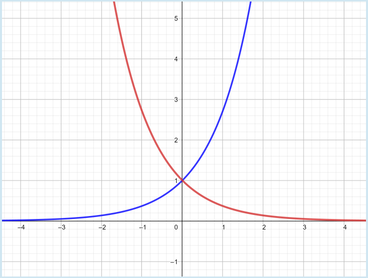
Para todo $x \in \mathbb{R}$, se define la función **exponencial natural**, como $e^x = exp(x)$. Donde la base corresponde al número irracional $e \approx 2.718$.

Observación

Notar que

i) *La gráfica de la función exponencial natural es creciente, al ser $e > 1$.*

ii) *La función $y = e^{-x}$ es decreciente. Su gráfico corresponde a la reflexión de la gráfica $y = e^x$ respecto al eje Y.*



Ejemplo 2

Para la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3$. Determine:

a) El dominio y recorrido de la función.

b) El conjunto $H = \{x \in Dom(f) : f(x) = 0\}$.

c) El gráfico de la función.

Ejemplo 2

Para la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3$. Determine:

a) El dominio y recorrido de la función.

b) El conjunto $H = \{x \in Dom(f) : f(x) = 0\}$.

c) El gráfico de la función.

Solución.-

a) Al ser f, una función exponencial, esta bien definida en todo el conjunto de los numeros reales.
Notar ademas que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3 > -3$$

Por lo que $Rec(f) = (-3, \infty)$.

b) $f(x) = 0$ si y solo si

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 3 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -2$$

continucación del ejemplo 2

c) La función corresponde a la traslación vertical de tres unidades hacia abajo y una unidad hacia la izquierda de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

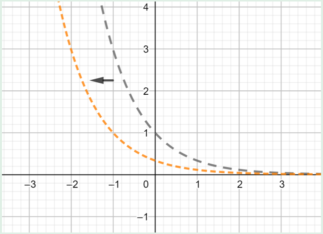


Figure: Traslación horizontal

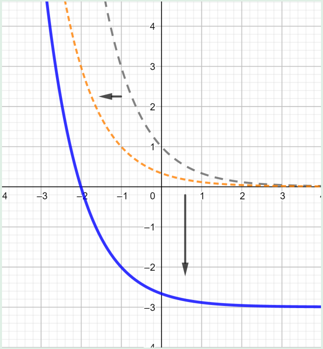


Figure: Traslación vertical

Función Logaritmo

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biyectiva, en consecuencia podemos definir su inversa, a la cual denominaremos función logaritmo de base a.

Función Logaritmo

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=a^x$, con $a>0$ y $a\neq 1$, es una función biyectiva, en consecuencia podemos definir su inversa, a la cual denominaremos función logaritmo de base a.

Definición

Sea $a>0$, $a\neq 1$. La función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\log_a(x)$ la llamaremos **función logaritmo** de base a. De modo que,

$$y=\log_a(x) \;\Leftrightarrow\; a^y=x.$$

Función Logaritmo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biyectiva, en consecuencia podemos definir su inversa, a la cual denominaremos función logaritmo de base a.

Definición

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a(x)$ la llamaremos **función logaritmo** de base a. De modo que,

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x.$$

Definición

Llamaremos **logaritmo natural o neperiano** a la función inversa de e^x y la denotaremos por $\ln(x)$.

Graficamente

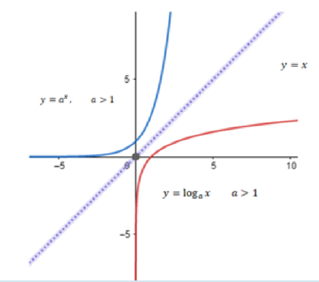


Figure: $a > 1$

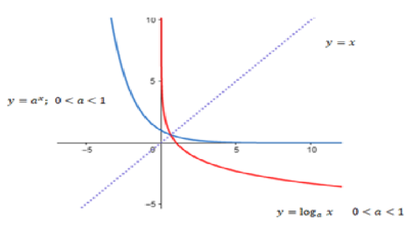


Figure: $0 < a < 1$

Graficamente

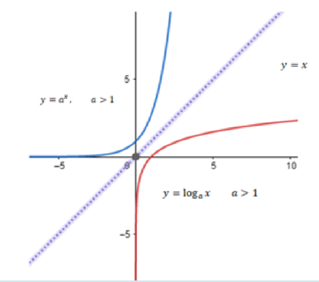


Figure: $a > 1$

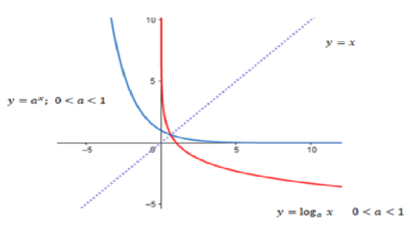


Figure: $0 < a < 1$

Ejemplos

1. Sea $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, definida por $f(x) = 3^x$. Su inversa es la función $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \to (9, \infty)$, definida por $f(x) = 3^{x+4} + 9$. La función inversa es $f^{-1} : (9, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f^{-1}(x) = \log_3(x - 9) - 4$.

Propiedades de la función logaritmo

1. $\log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$.
2. $\log_a(a) = 1$ pues $a^1 = a$.
3. Por la gráfica se se tiene que si $a > 1$ la función es creciente y para $0 < a < 1$ la función es decreciente.
4. El eje Y (recta $x = 0$) corresponde a una asíntota horizontal.

Propiedades de la función logaritmo

1. $\log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$.
2. $\log_a(a) = 1$ pues $a^1 = a$.
3. Por la gráfica se se tiene que si $a > 1$ la función es creciente y para $0 < a < 1$ la función es decreciente.
4. El eje Y (recta $x = 0$) corresponde a una asíntota horizontal.

Ejemplo

Para $g(x) = \log_2(x - 4)$, responder:

1. Determine el dominio de g.
2. Determine los ceros de la función g.
3. Realizar la gráfica de g.

Propiedades de la función logaritmo

1. $\log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$.
2. $\log_a(a) = 1$ pues $a^1 = a$.
3. Por la gráfica se se tiene que si $a > 1$ la función es creciente y para $0 < a < 1$ la función es decreciente.
4. El eje Y (recta $x = 0$) corresponde a una asíntota horizontal.

Ejemplo

Para $g(x) = \log_2(x - 4)$, responder:

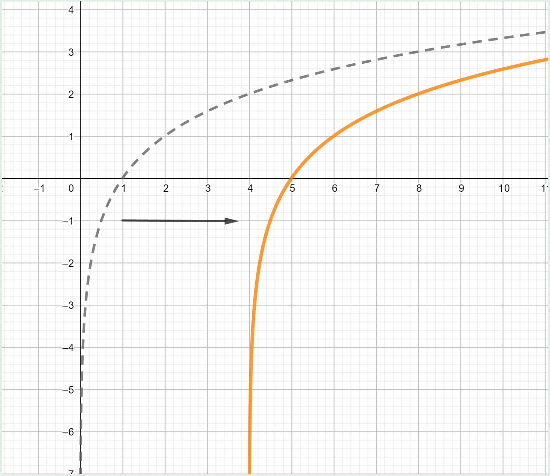
1. Determine el dominio de g.
2. Determine los ceros de la función g.
3. Realizar la gráfica de g.

Solución

1. $Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 > 0\} = (4, \infty)$.
2. $\log_2(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5$

gráfica

1. La gráfica de la función g, corresponde al desplazar 4 unidades hacia la derecha a la función $y = \log_2(x)$.



Más propiedades de la función logaritmo

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$
2. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$
3. $\log_a(x_1^r) = r\log_a(x_1)$, donde $r \in \mathbb{R}$.
4. $\log_a x_1 = \dfrac{\log_b(x_1)}{\log_b(a)}$ donde $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq b \neq 1$.

Más propiedades de la función logaritmo

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

2. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$

3. $\log_a(x_1^r) = r\log_a(x_1)$, donde $r \in \mathbb{R}$.

4. $\log_a x_1 = \dfrac{\log_b(x_1)}{\log_b(a)}$ donde $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq b \neq 1$.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = 3^{x-3}$ y $g(x) = \log_2(x+1)$. Para $x \in (-1, \infty)$, resolver la ecuación $(f \circ g)(x) = 9$.

Más propiedades de la función logaritmo

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces

1. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$
2. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$
3. $\log_a(x_1^r) = r\log_a(x_1)$, donde $r \in \mathbb{R}$.
4. $\log_a x_1 = \dfrac{\log_b(x_1)}{\log_b(a)}$ donde $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq b \neq 1$.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = 3^{x-3}$ y $g(x) = \log_2(x+1)$. Para $x \in (-1, \infty)$, resolver la ecuación $(f \circ g)(x) = 9$.
Solución Realizando la composición de las funciones

$$(f \circ g)(x) = f(\log_2(x+1)) = 3^{\log_2(x+1)-3}.$$

luego

$$3^{\log_2(x+1)-3} = 9 = 3^2 \;\Rightarrow\; \log_2(x+1) - 3 = 2 \;\Rightarrow\; \log_2(x+1) = 5$$

De la última igualdad se tiene que $x + 1 = 2^5$, así $x = 31$. Por tanto la solución de la ecuación es $x = 31 \in (-1, \infty)$.

Ejemplo 2

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^{x} = 36.$$

Ejemplo 2

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^{x} = 36.$$

Solución Usando propiedades de la función exponencial, se tiene

$$36 = 6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^{x} = 5^{x}(6 \cdot 5^{-1} + 5 + 1) = 5^{x}\left(\frac{36}{5}\right)$$

De esta última igualda se tiene $5^{x} = 5$, así $x = 1$.

Ejemplo 2

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 36.$$

Solución Usando propiedades de la función exponencial, se tiene

$$36 = 6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 5^x(6 \cdot 5^{-1} + 5 + 1) = 5^x \left(\frac{36}{5} \right)$$

De esta última igualda se tiene $5^x = 5$, así $x = 1$.

Ejemplo 3

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$3^x + 3^{1-x} = 4.$$

Ejemplo 2

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 36.$$

Solución Usando propiedades de la función exponencial, se tiene

$$36 = 6 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} + 5^x = 5^x(6 \cdot 5^{-1} + 5 + 1) = 5^x \left(\frac{36}{5}\right)$$

De esta última igualda se tiene $5^x = 5$, así $x = 1$.

Ejemplo 3

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$3^x + 3^{1-x} = 4.$$

Solución Usando propiedades de la función exponencial, se tiene

$$4 = 3^x + 3^{1-x} = 3^x + 3 \cdot \frac{1}{3^x} \Rightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Haciendo $u = 3^x$ en la ultima ecuación se tiene $u^2 - 4u + 3 = 0$, esto es $(u-3)(u-1) = 0$. De donde se obtiene que $3^x = 3$ y $3^x = 1$, y sus soluciones son $x = 1$ y $x = 0$.
Por tanto la solución de la ecuación dada, es $x = 1$ y $x = 0$.

Ejemplo 4

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20.$$

Ejemplo 4

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20.$$

Solución Usando propiedades de la función logaritmo se tiene:

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20 \;\Rightarrow\; \ln(6^x \cdot 9^x) = \ln(18) \;\Rightarrow\; x\ln(6) + x\ln(9) = \ln(18)$$

Así $x = \dfrac{\ln(18)}{\ln(6) + \ln(9)}$, es la solución de la ecuación dada.

Ejemplo 4

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20.$$

Solución Usando propiedades de la función logaritmo se tiene:

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20 \;\Rightarrow\; \ln(6^x \cdot 9^x) = \ln(18) \;\Rightarrow\; x\ln(6) + x\ln(9) = \ln(18)$$

Así $x = \dfrac{\ln(18)}{\ln(6) + \ln(9)}$, es la solución de la ecuación dada.

Ejemplo 5

Para $x \in \mathbb{R}^+$, resolver la siguiente ecuación

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(4x + 12).$$

Ejemplo 4

Para $x \in \mathbb{R}$, resolver la siguiente ecuación

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20.$$

Solución Usando propiedades de la función logaritmo se tiene:

$$6^x \cdot 3^{2x} + 2 = 20 \;\Rightarrow\; \ln(6^x \cdot 9^x) = \ln(18) \;\Rightarrow\; x\ln(6) + x\ln(9) = \ln(18)$$

Así $x = \dfrac{\ln(18)}{\ln(6) + \ln(9)}$, es la solución de la ecuación dada.

Ejemplo 5

Para $x \in \mathbb{R}^+$, resolver la siguiente ecuación

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(4x + 12).$$

Solución Usando propiedades de logaritmo se tiene

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(4x + 12) \;\Rightarrow\; \log_{10}(x^2) = \log_{10}(4x + 12) \;\Rightarrow\; x^2 = 4x + 12$$

La soluciones de la ecuación cuadrática son $x = 6$ y $x = -2$, sin embargo la solución de la ecuación con logaritmo es $x = 6$. Pues $x = -2$, no pertenece a su dominio.

Ejemplo 6

Un aislante de cerámica se saca de un horno y luego se enfría a una temperatura ambiente de $25^\circ C$. Si la temperatura después de t minutos está dada por

$$T(t) = 25 + 375e^{-0.2t}.$$

Cuánto tiempo debe transcurrir aproximadamente, para que la temperatura sea de $107^\circ C$.

Ejemplo 6

Un aislante de cerámica se saca de un horno y luego se enfría a una temperatura ambiente de $25^\circ C$. Si la temperatura después de t minutos está dada por

$$T(t) = 25 + 375e^{-0.2t}.$$

Cuánto tiempo debe transcurrir aproximadamente, para que la temperatura sea de $107^\circ C$.
Solución El problema se resuelve, simplemente resolviendo la siguiente ecuación para $t_1 > 0$,

$$107 = 25 + 375e^{-0.2t_1} \;\Rightarrow\; \frac{82}{375} = e^{-0.2t_1}$$

Aplicando la función inversa de la función exponencial natural, se tiene $\ln\left(\frac{82}{375}\right) = -0.2t_1$, así $t_1 = -5 \cdot \ln\left(\frac{82}{375}\right)$. Por tanto, debe transcurrir un tiempo de $t_1 = -5 \cdot \ln\left(\frac{82}{375}\right) \approx 7.6$ minutos, para que la temperatura sea de $107^\circ C$.

FUNCTIONES DE VARIABLE REAL

Exponencial y Logaritmo

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE