Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:____________________ Sección:____________________

PEP 2

1.- Para $n \in \mathbb{N}$ considere

$$(2x-1)\left(\frac{x^2}{2}-2\right)^n .$$

(a) Calcule el término constante (el coeficiente de x^0) en el desarrollo de esa expresión para $n=6$. (1 pt)

(b) Calcule el coeficiente del término x^3 en el desarrollo de esa expresión para $n=5$. (1 pt)

2.- (a) Encuentre $A, B \in \mathbb{R}$ tal que (1 pt)

$$\frac{3}{(3x+1)(3x-2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+1}$$

(b) Determinar el valor de $n \in \mathbb{N}$ para que se cumple la siguiente igualdad: (1 pt)

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{3}{(3k+1)(3k-2)} = 0,09$$

3.- Simplifique términos y resuelva ecuaciones en los complejos.
Sea $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, definimos el módulo de z como:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

i) Calcule el módulo y el conjugado del inverso multiplicativo de (0,6 pts)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

ii) Determine la parte real y la parte imaginaria de (0,6 pts)

$$\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$$

iii) Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que (0,8 pts)

$$2 \cdot \overline{z} = i \cdot (z-1).$$

PAUTA

1.
$$(2x-1)\left(\frac{x^2}{2}-2\right)^n = (2x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k}}{2^k}2^{n-k} = (2x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k}}{4^k}2^n$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k+1}}{4^k}2^{n+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k}}{4^k}2^n\right).$$

En esa expresión las potencias impares y pares de x están separados.

(a) El termino constante es (0,6 pts si el desarrollo del polinomio está correcto; de esos ya 0,3 puntos si por lo menos el desarrollo de la n-ecima potencia (antes de multiplicar con el factor lineal) está correcta - da lo mismo si para n general o para $n=6$)

$$-\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}(-1)^n 2^n.$$

(0,2 puntos al identificar el termino correcto en el desarrollo (possiblemente erroneo), sea para n general o para $n=6$).

Para $n=6$ eso es igual a $-(2^6)=-64$. (0,2 pts si el resultado numerico es consistente con el termino identificado. El puro resultado numerico correcto sin traza de calculo consistente no recibe puntaje.)

(El mismo resultado se puede obtener por ejemplo al directamente evaluar simplemente el polinomio en $x=0$: $(2\cdot 0-1)(\frac{0^2}{2}-2)^6 = -(-2)^6 = -64$..) (En el caso que el alumno utiliza otro camino de calculo, como lo del ejemplo, queda al criterio de cada corrector como distribuir puntaje parcial)

(b) El coeficiente de x^3 en el desarrollo general es (0,6 pts si el desarrollo del polinomio está correcto y se identifica el termino; de esos ya 0,4 puntos si por lo menos el desarrollo de la n-ecima potencia en el termino general está correcta- da lo mismo si para n general o $n=5$)

$$\binom{n}{1}(-1)^{n-1}2^{n-1} = n(-2)^{n-1}.$$

(0,2 puntos al identificar el termino correcto en el desarrollo, sea para n general o para $n=5$). Para $n=5$, eso es

$$5\cdot(-2)^4 = 80.$$

(0,2 pts si el resultado numerico es consistente con el termino identificado. El puro resultado numerico correcto sin traza de calculo consistente no recibe puntaje. En el caso de que el alumno sigue otro camino para llegar al resultado numerico, queda al criterio de cada corrector la distribución del puntaje parcial)

2. a) Multiplicando la ecuación

$$\frac{3}{(3x+1)(3x-2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+1}$$

por $(3x+1)(3x-2)$, obtenemos la siguiente igualdad de polinomios lineales

$$3 = A\cdot(3x+1) + B\cdot(3x-2) = (3A+3B)\cdot x + A - 2B.$$

(0,4 pts para elimin denominadores)

Comparando coeficientes, esa igualdad es equivalente al sistema de ecuaciones $A = -B$ y $3 = A - 2B$. (0,3 pts para lograr identificar un sistema de ecuaciones comparando coeficientes).

Sustituyendo la primera ecuacion en la segunda, obtenemos $3 = -3B$. (0,2 pts para correctamte eleminar una variable).

Por lo tanto $B = -1$ y finalmente $A = 1$.(0,1 pts para encontrar las soluciones)

(Alternativamente uno podría aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar la representación por fracciones parciales, pero dada la sugerencia que los enumeradores en las fracciones parciales se pueden encontrar como constantes, eso sería como aplicar una bomba para matar a un pajaro.) (En el caso de caminos alternativos, queda al criterio de cada corrector la distribución de puntaje parcial)

b) Aprovechando del ejercicio anterior, podemos reescribir la sumatoria en un "forma telescopica"

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n} \frac{3}{(3k+1)(3k-2)} &= \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3(k+1)-2} \right) \quad \text{(0,4 pts)} \\ &= \left(\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{3k-2} \right) - \left(\sum_{k=5}^{n+1} \frac{1}{3k-2} \right) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{3n+1} \qquad \text{(0,4 pts)} \\ &= \frac{3n-9}{10 \cdot (3n+1)}\end{aligned}$$

Buscamos $n \in \mathbb{N}$ (si existe) tal que

$$\frac{3n-9}{10 \cdot (3n+1)} = 0,09 = \frac{9}{100},$$

o sea tal que

$$30n - 90 = 9 \cdot (3n+1),$$

o equivalentemente tal que

$$3n = 99. \qquad \text{(0,2 pts. De esos 0,1 pts si el error era solamente algo trivial como error de signo)}$$

Efectivamente 99 es divisible por 3 sin resto con $n = 33$.

(Si resultado consistentemente erroneo, se puede reganar 0,1 pts a traves de una autodenuncia por la imposibilidad de un resultado no natural.)

3. i) Ojo: Lamentablemente la formulación de la pregunta permitió dos distintas interpretaciones semanticas:

1) *Calcule el* ***MODULO Y EL CONJUGADO*** *del* ***INVERSO MULTIPLICATIVO DE***

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

2) *Calcule el* ***MODULO*** *y el* ***CONJUGADO DEL INVERSO MULTIPLICATIVO*** *de*

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$$

en forma cartesiana.

Tenemos

$$|\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}| = \sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{4} \overset{(0{,}1pts)}{=} 2.$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}} \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{\overline{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}}}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i})\left(\overline{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}}\right)} \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}}{4},$$

tenemos que

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}}} \overset{(0{,}1pts)}{=} \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot \mathrm{i} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot \mathrm{i}}\right| \overset{(0{,}1pts)}{=} \sqrt{\frac{2+2}{16}} = \frac{1}{2}$$

ii)

$$\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 = \left(\frac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\right)^4 \overset{(0{,}2pts)}{=} \left(\frac{5-\mathrm{i}}{2}\right)^4 = \left(\left(\frac{5-\mathrm{i}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{12-5\mathrm{i}}{2}\right)^2 \overset{(0{,}2pts)}{=} \frac{119-120\mathrm{i}}{4} = \frac{119}{4} - 30\mathrm{i}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 \overset{(0{,}1pts)}{=} \frac{119}{4} \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 \overset{(0{,}1pts)}{=} -30.$$

(iii) Con $z = a + b\cdot \mathrm{i}$, podemos reescribir la ecuación $2\cdot\overline{z} = i\cdot(z-1)$ como

$$2a - 2b\cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}\cdot(z-1) = (a-1)\cdot \mathrm{i} + b\cdot \mathrm{i}^2 = -b + (a-1)\cdot \mathrm{i}.$$

(0,2 pts para sustitución correcta)

Separando esa ecuación en parte real y parte imaginaria, obtenemos un sistema de dos ecuaciones reales de forma

$$2a = -b \quad \text{y} \quad -2b = (a-1).$$

(0,2 pts para separar correctamente por parte real y parte imaginaria, todavia 0,1 pts si el error solamente es un error de signo)

Multiplicando la primera igualdad por dos y sustituyendo en la segunda igualdad, obtenemos

$$4a = a - 1,$$

(0,2 pts para eliminar una variable)

por lo que $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.

(0,2 pts para dedución de valores)

Efectivamente

$$2\cdot\left(\frac{-1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{i}\right) = \mathrm{i}\cdot\left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}\right).$$

(En caso de haber perdido puntaje antes, se puede recuperar 0,1 pt al chequear la supuesta solución y concluir correctamente si o no hubo un error en el calculo)