Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________ Sección:______________________________

Pep 1 (versión A) - con Pauta

1.- Considere la función

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to x + \sqrt{2}y$$

i) Determine el conjunto $h^{-1}(\{0, \frac{1}{3}\})$.

Solución: $h^{-1}(\{0, \frac{1}{3}\})$ consiste de elementos $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x+\sqrt{2}y = 0$ o $x+\sqrt{2}y = \frac{1}{3}$. (0,2 pts)

Sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $x + \sqrt{2}y = 0$. Entonces $\sqrt{2}y = -x$.

Si $y = 0$, entonces $x = 0$, y efectivamente $0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0$. (0,1 pts por considerar este caso por seperado)

Si $y \neq 0$, entonces $\sqrt{2} = \frac{-x}{y} \in \mathbb{Q}$, lo que no es posible, ya que $\sqrt{2}$ no es racional. (0,2 pts)

Sea ahora $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $x + \sqrt{2}y = \frac{1}{3}$. Entonces $\sqrt{2}y = -x + \frac{1}{3}$.

Si $y = 0$, entonces $x = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, lo que no es posible. (0,1 pts)

Si $y \neq 0$, entonces $\sqrt{2} = \frac{1-3x}{3y} \in \mathbb{Q}$, lo que tampoco es posible. (0,2 pts)

Por ende $h^{-1}(\{0, \frac{1}{3}\}) = \{(0, 0)\}$. (0,2 pts)

ii) ¿Es h inyectiva? Justifique.

Solución: Si, h es inyectiva: (0,1 pts para adivinanza correcta)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$, es decir $x_1 + \sqrt{2}y_1 = x_2 + \sqrt{2}y_2$. De eso queremos conlcuir que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. (0,2 pts si se nota que el alumno sabe como debería justificar su adivinanza - sea correcta o falsa)

$x_1 + \sqrt{2}y_1 = x_2 + \sqrt{2}y_2$ implica que $0 = (x_1 - x_2) + \sqrt{2}(y_1 - y_2)$.(0,1 puntos)

Usando los mismos argumentos de antes, sabemos que eso es solamente posible si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. (0,1 puntos).

iii) ¿Es h sobreyectiva? Justifique.

Solución: No, la función no es sobreyectiva (0,1 pts para adivinanza correcta).

Para justificar eso, basta identificar algún número real que no puede ser escrito como $x + \sqrt{2}y$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. (0,2 pts si se nota que el alumno sabe como debería justificar su adivinanza - sea correcta o falsa)

Consideremos $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{R}$ (0,1 pts para identificar un buen candidato).

En la solución de parte (i) ya mostramos que $h^{-1}(\{\frac{1}{3}\}) = \emptyset$ (0,1 pts para justificar el candidato).

2.- Considere las funciones

$$g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \qquad\qquad f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

$$x \to x+2 \qquad\qquad x \to \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ x-3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

i) ¿Es f inyectiva? ¿Es g inyectiva? Justifique.

Solución: f no es inyectiva. (0,1pt), ya que $f(0) = 0 = f(1)$ (0,2pt).

Pero g es inyectiva (0,1 pt), ya que $x_1 + 2 = x_2 + 2$ implica $x_1 = x_2$ para cualesquier $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$.(0,1 pt)

ii) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es g sobreyectiva? Justifique.

Solución: f es sobreyectiva (0,1 pt). Para cualquier $y \in \mathbb{N}_0$ pongamos $x = y+3$. Si $y = 0$, entonces $x = 3$ y $f(3) = 0 = y$. Si $y > 0$, entonces $x > 3$ y $f(x) = x-3 = y+3-3 = y$.(0,2 pt).

Pero g no es sobreyectiva 0,1 pts), ya que $g^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x+2 = 0\} = \emptyset$. (0,1 pts)

iii) De la regla de asignación de $f \circ f \circ g \circ g \circ g$ y de $g \circ g \circ g \circ f \circ f$. ¿Cuál de las dos funciones biyectiva ?
Solución:

$$f \circ f \circ g \circ g \circ g(x) = f \circ f \circ g \circ g(x+2) = f \circ f \circ g(x+4) = f \circ f(x+6) = f(x+3) = x$$

.

(0,4 pts total - 0,1 pts por cada una de las últimas 4 igualdades correctas)

$$g \circ g \circ g \circ f \circ f(x) = g \circ g \circ g \left(\begin{cases} f(0) & \text{si } x \leq 3 \\ f(x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases} \right) = g \circ g \circ g \left(\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6 \\ x-6 & \text{si } x > 6 \end{cases} \right)$$

$$= g \circ g \left(\begin{Bmatrix} 0 & \text{si } x \leq 6 \\ x-6 & \text{si } x > 6 \end{Bmatrix} + 2 \right) = g \left(\begin{Bmatrix} 2 & \text{si } x \leq 6 \\ x-4 & \text{si } x > 6 \end{Bmatrix} + 2 \right) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 6 \\ x & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

(0,5 pts total - 0,1 pts por igualdad correcta)

Obviamente $f \circ f \circ g \circ g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$ y por tanto es biyectiva. (0,1 pts)

($g \circ g \circ g \circ f \circ f$ ni es inyectiva ni sobreyectiva.)

3.- Considere los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -70 \leq x \leq 70 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : \, x = 2k + 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 35 \wedge \exists p \in \mathbb{Z} : \, x = 3p + 6\}$$

i) Simplifique las descripciones comprensivas de A y B y determine los números $n(A), n(B)$ y $n(A \cap B)$.

Solución:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -70 \leq x \leq 70 \wedge x \text{ es par}\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 35 \, \wedge \, \text{ es divisible by } 3\}.$$

ya que cualquier entero par puede ser escrito de forma $2k+6 = 2(k+3)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y cualquier numero divisible por 3 puede ser escrito por $3p + 6 = 3(p+2)$ para algún $p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $A \cap B$ consiste por los numeros enteros entre 0 y 35 divisible por 6.

Por tanto $n(A) = 71$, $n(B) = 12$ y $n(A \cap B) = 6$

(0,2 pts por valor correcto; todavía 0,1 pts por valor cási correcto donde se olvidó contar el cero. ! Pero ! Una simplificación sencilla incluso protege de este castigo; 0 pts por otros valores numericos.)

ii) De fórmulas que calculen $n(A \cup B)$, $n(A - B)$ y $n(A \times B)$ a partir de las cantidades en i). Si no se le ocurre una fórmula, describa extensivamente el conjunto correspondiente y cuente su cardinalidad.

Solución:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 77.$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 65.$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 852.$$

0,3 puntos por cada formula correcta (da lo mismo si valor correcto). En el caso de el valor por conteo es correcto sin formula, todavía 0,2 pts)

iii) Defina una función inyectiva $f : B \to A$. (Justifique la buena definición y la inyectividad)

Solución: Podemos por ejemplo definir

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow A \\ x &\to 2x \end{aligned}$$

Esa funcón es bien definida, ya que $B \subseteq \mathbb{Z}$, por lo que $2x$ es un entero par para $x \in B$ (0,2 pts) y $0 \leq 2x \leq 70$ como $0 \leq x \leq 35$. (0,1 pts) Además es inyectiva, ya que $2x_1 = 2x_2$ implica $x_1 = x_2$. (0,2 pts)

Observación: dependiendo de la naturaleza de la función, cuando la buena definición es más obvia, se puede dar los 0,3 pts tambien sin la necesidad de justificarla.