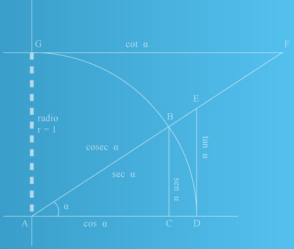
Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN



TRIGONOMETRÍA

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

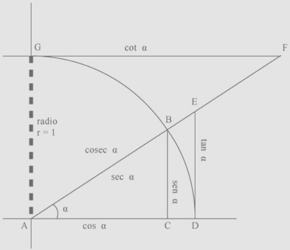
FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Departamento de
MATEMÁTICA
y CIENCIA de la
COMPUTACIÓN

TRIGONOMETRÍA

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020



Colaboradores:

Mery Choque Valdez
Rodolfo Viera
Julio Rincón
Solange Aranzubia
Aldo Zambrano
Carolina Martínez
Pablo García
Manuel Galaz
Karina Matamala
Daniel Saa

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA
VIRTUAL
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Introducción

La trigonometría se inicia estudiando la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo. Así surgen las razones trigonométricas de un ángulo, y a partir de éstas, las funciones trigonométricas.

Introducción

La trigonometría se inicia estudiando la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo. Así surgen las razones trigonométricas de un ángulo, y a partir de éstas, las funciones trigonométricas.

Medidas angulares

En la medición de ángulos existen tres sistemas de medición, estos son:

1. Sistema sexagesimal
2. Sistema circular
3. Sistema centesimal (no empleado usualmente en matemáticas)

La trigonometría se inicia estudiando la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo. Así surgen las razones trigonométricas de un ángulo, y a partir de éstas, las funciones trigonométricas.

Medidas angulares

En la medición de ángulos existen tres sistemas de medición, estos son:

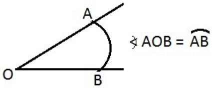
1. Sistema sexagesimal
2. Sistema circular
3. Sistema centesimal (no empleado usualmente en matemáticas)

Medición de un ángulo recto

Cuando dos rectas perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos iguales, a cada uno de estos ángulos se le llama ángulo recto.

Un grado sexagesimal corresponde a la noventava parte de un ángulo recto, esto se denota por 1°. Esto significa que un ángulo recto tiene 90° y que el ángulo completo cuyo arco es toda la circunferencia tiene 360°.

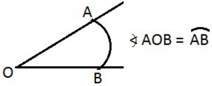
En el sistema circular la unidad de medición es el radián que corresponde a la medida de un ángulo del centro cuyo arco mide lo mismo que el radio



La equivalencia entre el sistema sexagesimal y el sistema circular viene dada por la relación:

$$\frac{\measuredangle(grados)}{180} = \frac{\measuredangle(radianes)}{\pi}$$

En el sistema circular la unidad de medición es el radián que corresponde a la medida de un ángulo del centro cuyo arco mide lo mismo que el radio



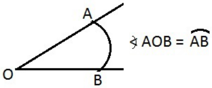
La equivalencia entre el sistema sexagesimal y el sistema circular viene dada por la relación:

$$\frac{\measuredangle(grados)}{180} = \frac{\measuredangle(radianes)}{\pi}$$

Ejemplo: Expresar 45° en radianes
Solución:

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

En el sistema circular la unidad de medición es el radián que corresponde a la medida de un ángulo del centro cuyo arco mide lo mismo que el radio



La equivalencia entre el sistema sexagesimal y el sistema circular viene dada por la relación:

$$\frac{\measuredangle(grados)}{180} = \frac{\measuredangle(radianes)}{\pi}$$

Ejemplo: Expresar 45° en radianes
Solución:

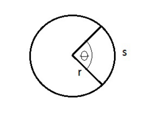
$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{\pi} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio Completar la siguiente tabla:

Grados	30		60	90		180	
Radianes		$\pi/4$			$2\pi/3$		$3\pi/2$

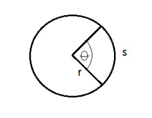
Si un arco de longitud s de un círculo de radio r subtiende un ángulo central de θ radianes, entonces

$$s = r\theta$$



Si un arco de longitud s de un círculo de radio r subtiende un ángulo central de θ radianes, entonces

$$s = r\theta$$



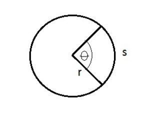
Ejemplo: Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 10 cm de largo en un círculo de 4 cm de radio. Hallar la medida del ángulo θ.

Solución:

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ \theta &= \frac{s}{r} = \frac{10}{4} \\ \theta &= 2.5 \text{ radianes} \end{aligned}$$

Si un arco de longitud s de un círculo de radio r subtiende un ángulo central de θ radianes, entonces

$$s = r\theta$$



Ejemplo: Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 10 cm de largo en un círculo de 4 cm de radio. Hallar la medida del ángulo θ.

Solución:

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ \theta &= \frac{s}{r} = \frac{10}{4} \\ \theta &= 2.5 \text{ radianes} \end{aligned}$$

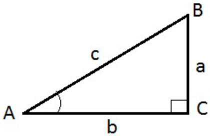
Ejercicios

La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de un círculo cuyo centro es C, situado en el centro del globo, y radio igual a la distancia de C en la superficie. Si el diámetro del planeta es aproximadamente 8000 millas, calcular la distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida indicada a continuación:

a) 60° b) 45° c) 10° d) 1°

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Consideremos un triángulo ABC rectángulo en C, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.



Se definen

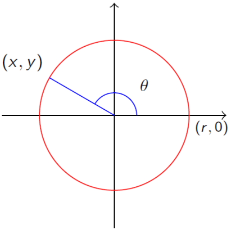
$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} \qquad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} \qquad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}}$$

Relaciones trigonométricas en el plano cartesiano

Consideremos en el plano cartesiano un círculo de radio $r > 0$ con centro en el origen, y un radio de dicho círculo que forma con el eje positivo horizontal un ángulo de θ radianes:



Para ángulos dispuestos de esta forma, las relaciones trigonométricas, cuando existen, se definen como

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \text{ si } y \neq 0$$

Identidades Trigonométricas

Definición

Una identidad es una proposición de igualdad, que es válida para todos los valores permisibles de las variables que aparecen en ella.

Identidades Fundamentales

- Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- Identidades tangente y cotangente

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Ejercicios

- Usando las identidades fundamentales verificar si:

1. $$\frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 1$$
2. $$\frac{\sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$
3. $$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

- Verificar las siguientes identidades:

1. $\sec\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha\tan\alpha$
2. $\sec\alpha = \sin\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha)$
3. $$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
4. $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\csc\alpha$$

Existen dos resultados principales que relacionan los lados y ángulos de un triángulo arbitrario $\triangle ABC$, no necesariamente rectángulo:

Teorema del Coseno

En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido, esto es:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Existen dos resultados principales que relacionan los lados y ángulos de un triángulo arbitrario $\triangle ABC$, no necesariamente rectángulo:

Teorema del Coseno

En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido, esto es:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Teorema del Seno

En todo triángulo ABC los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, esto es:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

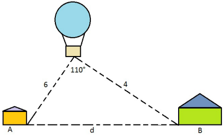
Ejemplo

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° y otro B situado al otro lado y en línea recta con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 kilómetros del pueblo B, calcular la distancia entre ambos pueblos.

Ejemplo

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° y otro B situado al otro lado y en línea recta con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 kilómetros del pueblo B, calcular la distancia entre ambos pueblos.

Solución: Esquemáticamente la situación sería:



El ángulo debajo del globo mide 110°, ya que si se traza la perpendicular desde el globo al suelo, a la izquierda tenemos 50° y a la derecha 60°. Usamos el teorema del coseno ya que conocemos el ángulo entre los dos lados que lo originan, esto es:

$$d^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 110^\circ$$
$$d^2 = 52 - 48 \cdot (-0.34)$$
$$d = 8,27\,\text{km}$$

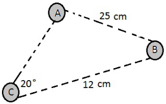
Ejemplo

Tres amigos A, B, C se sitúan en un campo de fútbol; entre A y B hay 25 metros, y entre B y C hay 12 metros. El ángulo formado en la esquina de C es de 20°. Calcular la distancia entre A y C.

Ejemplo

Tres amigos A, B, C se sitúan en un campo de fútbol; entre A y B hay 25 metros, y entre B y C hay 12 metros. El ángulo formado en la esquina de C es de 20°. Calcular la distancia entre A y C.

Solución: El esquema de la situación es:



Aplicando el teorema del seno se obtiene la medida del ángulo A, esto es:

$$\frac{25}{\sin 20} = \frac{12}{\sin A}$$
$$73.10 = \frac{12}{\sin A}$$
$$\sin A = 0.16 \Rightarrow A = 9.45^\circ$$

Como los tres ángulos deben sumar 180° se tiene que $B = 150.5^\circ$
ahora volvemos a usar el teorema del seno para hallar la distancia AC, esto es:

$$\frac{25}{\sin 20} = \frac{AC}{\sin 150.5}$$
$$73.10 = \frac{AC}{0.49}$$
$$AC = 35.9.$$

Ejercicios

1. Resuelva el triángulo ABC dados $\alpha = 67^\circ$; $a = 100$; $c = 125$
2. Resuelva el triángulo ABC dados: $\measuredangle A = 60^\circ$; $b = 8$; $c = 1$
3. Un hombre camina 90 metros desde la orilla de un río sobre una pendiente de 20 metros, se detiene y observa una roca en la orilla opuesta y determina que el ángulo de depresión de la piedra es de 9°. Determinar la medida del ancho del río.
4. Un guardacosta desde un faro observa un barco y determina que se encuentra a 50°NE a una distancia de 8 km. Luego observa otro barco que se encuentra a 60°NO a una distancia de 6,2 km. El alcance del radio que tienen los barcos es de 10 km; determinar si los dos barcos pueden comunicarse entre sí.
5. Cuando el ángulo de elevación del sol es de 64°, un poste de teléfonos inclinado a un ángulo de 9° en dirección opuesta al sol arroja una sombra de 21 pies de largo a nivel del suelo. Determinar de ser posible la longitud del poste.

Fórmulas para la Suma y Diferencia de ángulos

Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Fórmulas para la Suma y Diferencia de ángulos

Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Ejemplo: Use la fórmula de la suma para encontrar el valor exacto de $\sin \dfrac{7\pi}{12}$.

Solución:

$$\begin{gathered}
\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) \\
= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} \\
= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6}\right)
\end{gathered}$$

Ejemplo: Use la fórmula de la diferencia para encontrar el valor exacto de $\sin 165^{\circ}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sin 165^{\circ} &= \sin(225 - 60)\\ &= \sin 225 \cdot \cos 60 - \cos 225 \cdot \sin 60\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Ejemplo: Use la fórmula de la diferencia para encontrar el valor exacto de $\sin 165^\circ$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sin 165^\circ &= \sin(225 - 60)\\ &= \sin 225 \cdot \cos 60 - \cos 225 \cdot \sin 60\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Use la fórmula de la diferencia para encontrar el valor exacto de
$$\cos 80 \cdot \cos 20 + \sin 80 \cdot \sin 20$$
2. Use la fórmula de la suma para encontrar el valor exacto de
$$\sin \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{18} + \cos \frac{\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{18}$$

Fórmulas para $\tan(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmulas para $\tan(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha-\beta)$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Ejemplo: Demostrar que

$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$$

$$\tan(\theta+\pi) = \frac{\tan\theta + \tan\pi}{1 - \tan\theta\tan\pi} = \frac{\tan\theta + 0}{1 - \tan\theta\cdot 0} = \tan\theta$$

Ejercicios

- Encuentre el valor exacto de cada expresión:

  1. $\dfrac{\tan 20 + \tan 25}{1 - \tan 20 \tan 25}$

  2. $\sin \dfrac{\pi}{12} \cos \dfrac{7\pi}{12} - \cos \dfrac{\pi}{12} \sin \dfrac{7\pi}{12}$

  3. $\sin \dfrac{\pi}{18} \cos \dfrac{5\pi}{18} + \cos \dfrac{\pi}{18} \sin \dfrac{5\pi}{18}$

- Demuestre cada identidad

  1. $\sin \left(\dfrac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta$

  2. $\cos \left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta \right) = \sin \theta$

Si en la suma de $\sin(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$, hacemos $\alpha=\beta$ se obtienen las fórmulas para el ángulo doble

Fórmulas para el ángulo Doble

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta,\\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\
&= 1 - 2\sin^2\theta\\
&= 2\cos^2\theta - 1.
\end{aligned}$$

Si en la suma de $\sin(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$, hacemos $\alpha=\beta$ se obtienen las fórmulas para el ángulo doble

Fórmulas para el ángulo Doble

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta, \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1. \end{aligned}$$

Ejemplo:

Si $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ y α es un ángulo agudo, hallar los valores exactos de $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

Solución:

Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtiene que $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$
usando las fórmulas del ángulo doble se tiene:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

Ejercicios

1. Usando las fórmulas vistas exprese $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$.
2. Un objeto es impulsado hacia arriba con un ángulo θ respecto a la horizontal y velocidad inicial de $v_0 pies/seg$. Si se pasa por alto la resistencia del aire, la distancia horizontal R que recorre el objeto (alcance) está dada por

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \sin\theta \cos\theta$$

   a) Demostrar que que $R = \dfrac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$.

   b) Encontrar el ángulo θ para el cual R es máximo.

Identidades del ángulo medio

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta),$$
$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta).$$

Con frecuecia se suelen encontrar estas identidades escritas como

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)),$$
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)).$$

Identidades del ángulo medio

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta),$$
$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta).$$

Con frecuecia se suelen encontrar estas identidades escritas como

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)),$$
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)).$$

Identidades de Prostaféresis

Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumplen

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

TRIGONOMETRÍA

Departamento de MATEMÁTICA y CIENCIA de la COMPUTACIÓN

Coordinación de Cálculo I

Primera versión - Agosto 2020

Profesor:

Patricio Cerda Loyola

FACULTAD DE CIENCIA VIRTUAL

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE