Ejercicios 1.1: Funciones

En los siguientes ejercicios determine el dominio y el conjunto imagen de la función.

1. $f(x) = 1 + x^2$

Dominio.

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 + 1 \in \mathbb{R}$ entonces $D_f = \mathbb{R}$.

Imagen.

Sea $y \in I_f$ entonces existe $x \in D_f$ tal que $y = x^2 + 1$ entonces $x^2 = y - 1$ entonces $y - 1 \geq 0$ entonces $y \geq 1$ entonces $y \in [1, +\infty[$ entonces $I_f = [1, +\infty[$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

Dominio

Es claro que $\sqrt{x}$ es un número real sólo si $x \geq 0$ y por lo tanto, $D_f = [0, +\infty[$

Imagen

Sea $y \in I_f$ entonces existe $x \in D_f$ tal que $y = 1 - \sqrt{x}$ entonces $\sqrt{x} = 1 - y$ entonces $1 - y \geq 0$ entonces $y \leq 1$ entonces $I_f =]-\infty, 1]$.

3. $f(x) = \sqrt{5x + 10}$

Dominio

$$5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq -10 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$D_f = [-2, +\infty[$$

Imagen

Sea $y \in I_f$ entonces existe $x \in [-2, +\infty[$ tal que $y = \sqrt{5x + 10}$. De esta expresión nace una primera restricción para y, a saber, $y \geq 0$.

También se cumple que.

$$y^2 = 5x + 10$$

$$x = \frac{y^2 - 10}{5}$$

De esta última expresión surge otra restricción sobre y, a saber:

$$\frac{y^2 - 10}{5} \geq -2$$

Esto es cierto para todo $y \in \mathbb{R}$. La única restricción entonces es que $y \geq 0$. Por lo tanto:

$$I_f = [0, +\infty[$$

4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

Solución

Dominio

$$x^2 - 3x \geq 0$$

$$x(x-3) \geq 0$$

$$x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$$

$$D_g =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$$

Imagen

Sea $y \in I_g$. Entonces existe $x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$ tal que $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

La primera restricción es que $y \geq 0$. También se ha de cumplir que $y^2 = x^2 - 3x$, o equivalentemente $x^2 - 3x - y^2 = 0$. Esta ecuación tiene solución cualquiera sea el valor de la variable y. En efecto $\Delta = 9 + 4y^2 > 0$ para todo valor de y. Por lo tanto

$$I_g = [0, +\infty[$$

5. $f(t) = 4/(3-t)$

Solución

Dominio

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

Imagen

Sea $y \in I_g$. Entonces existe $x \neq 3$ tal que $y = 4/(3-x)$. De esta expresión obtenemos que $y \neq 0$. Si $y \neq 0$ entonces $3 - x = 4/y$, por lo tanto $x = 3 - 4/y$.

O sea, dado $y \neq 0$ existe un número real distinto de 3 tal cuya imagen es y.

$$I_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

6. $g(t) = \frac{2}{t^2-16}$

Dominio.

$$g(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow (t \neq -4 \wedge t \neq 4)$$

Por lo tanto, $D_g = \mathbb{R} - \{-4,4\}$

Imagen.

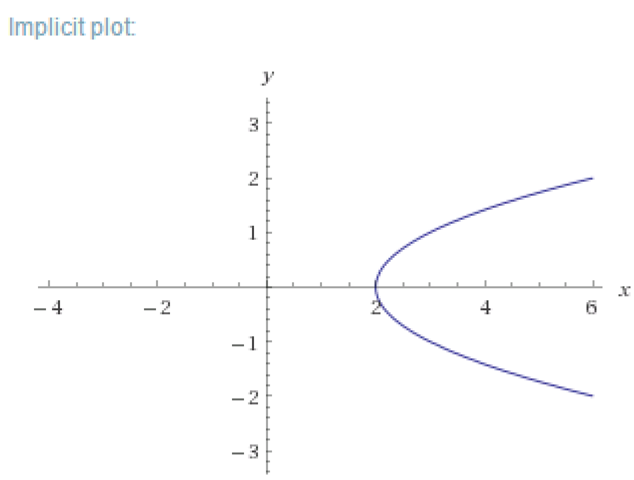
Sea $y \in I_g$ entonces existe $t \in D_g$ tal que $y = \frac{2}{t^2-16}$ entonces $y \cdot (t^2 - 16) = 2$ entonces $y \neq 0$ por lo cual $t^2 = \frac{2}{y} + 16$ entonces $\frac{2}{y} + 16 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y} \geq -16$.

Supongamos que $y \geq 0$ entonces $2 \geq -16 \cdot y$; Por lo tanto, $y \geq \frac{-1}{8}$ pero esto bajo el supuesto que $y \geq 0$ por lo cual $y \geq 0$.

Supongamos ahora que $y \leq 0$ entonces $2 \leq -16 \cdot y$; lo que es equivalente a decir que $y \leq \frac{-1}{8}$. Como estamos bajo el supuesto que $y \leq 0$ entonces podemos afirmar que $y \leq \frac{-1}{8}$.

Luego $I_g = \left]-\infty, \frac{-1}{8}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$

7. ¿La gráfica representa una función de x?
a)



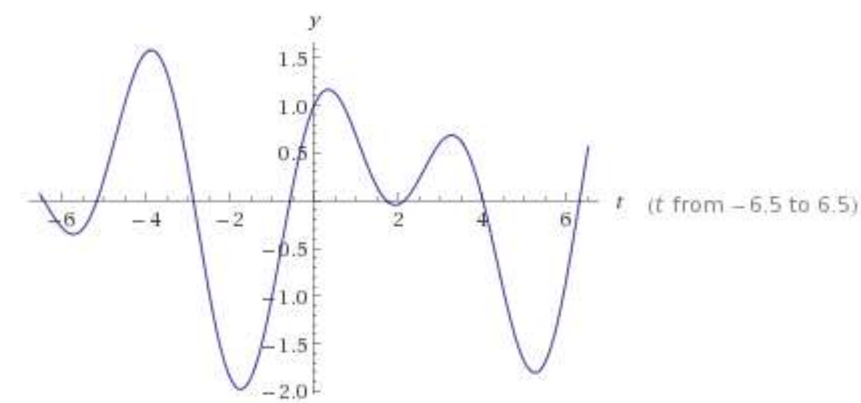
Solución

No representa una función de x pues existe una recta paralela al eje $\overrightarrow{0Y}$ que corta a la gráfica en más de un punto del plano. Ejemplo, la recta cuya ecuación es $x = 4$ corta la gráfica en los puntos $(4, \sqrt{2})$ y $(4, -\sqrt{2})$.

b)

plot	$\sin(t)+\cos(\sqrt{3}\ t)$

Plots:



<u>Solución</u>

Sí es una función pues cada recta paralela al eje $\overrightarrow{0Y}$ corta la gráfica sólo en un punto del plano.

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

<u>Solución</u>

En primer lugar, las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos. Entonces el dominio será $D_f =]0, +\infty[$.

Si denotamos $p(x)$ al perímetro y $a(x)$ al área de un triángulo equilátero de lado x entonces $p(x) = 3x$ y $a(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

<u>Solución</u>

Sea $l = f(d)$ la función que asocia a la longitud de la diagonal $d > 0$ de un cuadrado la longitud de su lado. Entonces usando el teorema de Pitágoras $l^2 + l^2 = d^2$ con lo cual:

$$\begin{cases} f(d) = d\sqrt{2}/2 \\ d \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

Si $a = g(d)$ es la función que relaciona la diagonal $d > 0$ con el área a del cuadrado, entonces:

$$\begin{cases} g(d) = d^2/2 \\ d \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

11. Exprese la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal D del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

Solución

Supongamos que el lado del cubo es x y que la diagonal de una cara del cubo es d entonces por Pitágoras sabemos que $x^2 + x^2 = d^2$ lo que implica que $2 \cdot x^2 = d^2$ entonces $d = \sqrt{2} \cdot x$ y en consecuencia $D^2 = \left(\sqrt{2} \cdot x\right)^2 + x^2$ entonces $D^2 = 3 \cdot x^2$ Por lo tanto, se sigue que $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot D$.

|Sea A el área de la superficie del cubo. Entonces $A = 6 \cdot x^2 = 2 \cdot (3 \cdot x^2) = 2 \cdot D^2$

Sea V el volumen del cubo. Entonces $V = x^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot D^3$.

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente correspondiente a la recta que une a P con el origen.

Solución

Como el punto P es un punto de G_f tiene coordenadas $\left(x, \sqrt{x}\right)$ en que $x > 0$. No consideramos el caso $x = 0$ pues en ese caso no queda definida una recta.

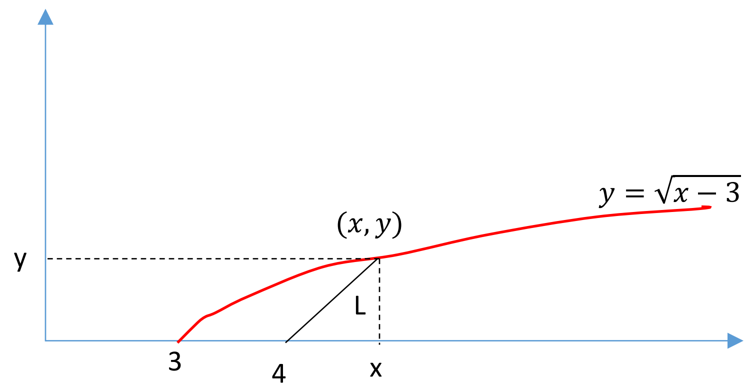
Si m representa la pendiente de la recta $\overleftrightarrow{0P}$ entonces $m = \frac{\sqrt{x}}{x}$ Por lo tanto, se cumple que $m^2 \cdot x^2 = x$ o equivalentemente $x = \frac{1}{m^2}$. Entonces las coordenadas de P son $\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right)$.

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4,0)$. Escriba L como función de y.

Solución

Es claro que $x \geq 3$ y que además $y \geq 0$.

A continuación, un esquema gráfico de la situación:



Entonces $L = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

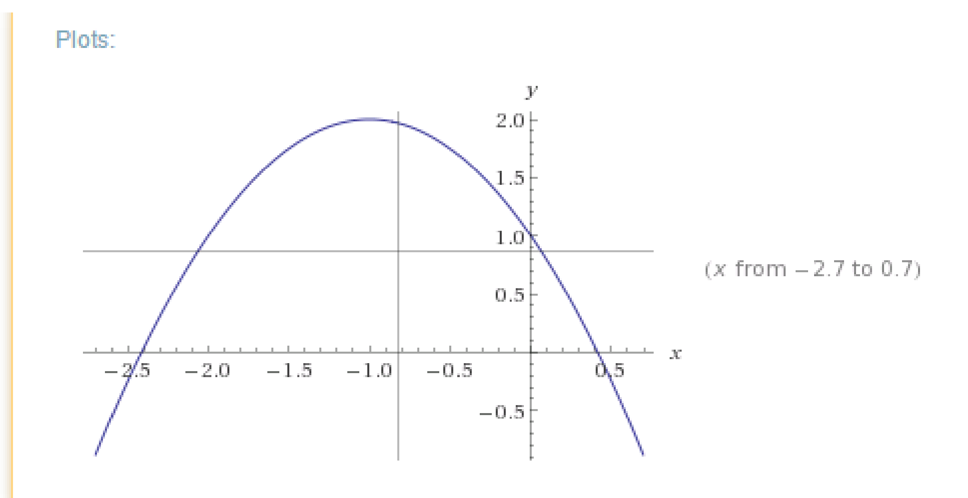
Pero $x = y^2 + 3$ por lo cual $L = \sqrt{(y^2-1)^2 + y^2}$. Finalmente, $L = \sqrt{y^4 - y^2 + 1}$ en que $y \geq 0$.

16. Determine el dominio y gráfico de $f(x) = 1 - 2x - x^2$.

<u>Solución</u>

$f(x)$ es un número real, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $D_f = \mathbb{R}$

También es claro que $f(x) = 2 - (x+1)^2$ por lo cual $I_f =]-\infty, 2]$



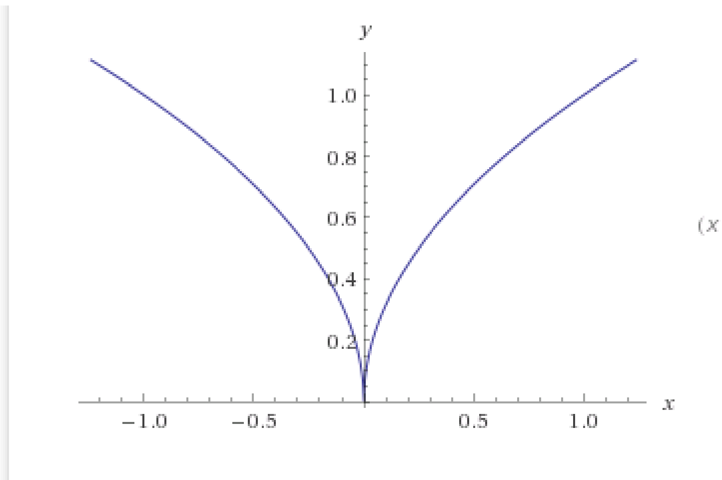
17. Determine el dominio y gráfico de $g(x) = \sqrt{|x|}$.

Solución

Como $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $D_g = \mathbb{R}$

También es claro que $g(x) \geq 0$ por lo cual $I_g = [0, +\infty[$

El gráfico de g es el siguiente.



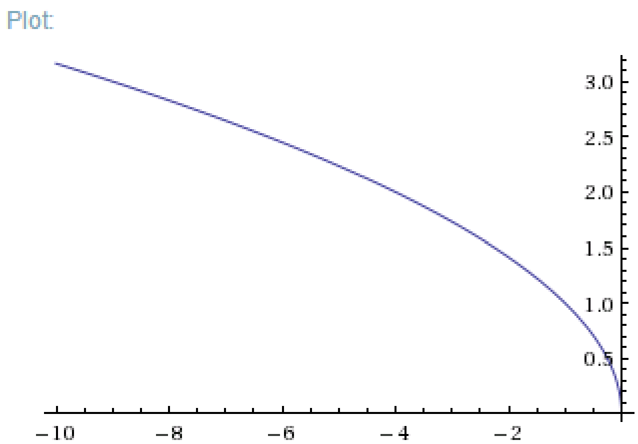
18. Determine el dominio y gráfico de $g(x) = \sqrt{-x}$

Solución

Debe cumplirse que $-x \geq 0$ lo que es equivalente a $x \leq 0$ por lo cual $D_f =]-\infty, 0]$.

Como $g(x) \geq 0$ también podemos afirmar que $I_g = [0, +\infty[$

También es claro que si $x \leq 0$ entonces $|x| = -x$ por lo cual esta función es una restricción de la función del ejercicio 17 anterior y en consecuencia su gráfico será el restringido al dominio $]-\infty, 0]$



21. Determine el dominio de $y = \frac{x+3}{4-\sqrt{x^2-9}}$.

Solución

Se debe cumplir que $x^2 - 9 \geq 0$ es decir $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3, +\infty\right[$.

Por otra parte, se debe cumplir que $\sqrt{x^2-9} \neq 4$, lo cual es equivalente a afirmar que $x^2 \neq 25$, es decir, se debe cumplir que $x \neq -5 \wedge x \neq 5$ por lo cual el dominio es el conjunto $\left]-\infty, -5\right[\cup \left]-5, -3\right] \cup \left[3,5\right[\cup \left]5, +\infty\right[$.

22. Determine el rango de $y = 2 + \frac{x^2}{x^2+4}$

Solución

$$y - 2 = \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

Sabemos que $x^2 \geq 0 \wedge x^2 + 4 > 0$ por lo cual $y - 2 \geq 0$ lo que es equivalente a que $y \geq 2$

$$(y-2) \cdot (x^2 + 4) = x^2$$

$$(y-2) \cdot x^2 + 4 \cdot (y-2) = x^2$$

$$(y-3) \cdot x^2 = 4 \cdot (2-y)$$

Entonces $y \neq 3$

$$x^2 = \frac{4 \cdot (2-y)}{y-3}$$

Como $x^2 \geq 0$ se debe cumplir que:

$$(2-y\geq 0 \wedge y-3>0)\vee(2-y\leq 0\wedge y-3<0)$$
$$(y\leq 2\wedge y>3)\vee(y\geq 2\wedge y<3)$$
$$y\in\emptyset\cup[2,3[$$
$$y\in[2,3[$$

Luego el recorrido es el conjunto $[2,3[$.

Otra manera sería la siguiente:

$$0\leq x^2<x^2+4$$
$$0<\frac{1}{x^2+4}$$
$$0\leq\frac{x^2}{x^2+4}<1$$
$$2\leq 2+\frac{x^2}{x^2+4}<3$$

Por lo tanto, el recorrido de la función es el conjunto $[2,3[$.

47. Determine la paridad de $f(x)=3$.

<u>Solución</u>

El dominio de la función constante, a menos que se indique otra cosa, es $\mathbb{R}$.

$$f(-x)=f(x)=3$$

Por lo tanto, la función es par.

48. Determine la paridad de $f(x)=x^{-5}$

<u>Solución</u>

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$
$$f(-x)=(-x)^{-5}=\frac{1}{(-x)^5}=\frac{1}{-x^5}=\frac{-1}{x^5}=-\left(\frac{1}{x^5}\right)=-x^{-5}=-f(x)$$

La función es impar.

50. Determine la paridad de $f(x)=x^2+x$

<u>Solución</u>

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) \neq f(-1)$$

$$f(-1) \neq -f(1)$$

Concluimos que f no es par ni impar.