Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________Sección:______________________________

Control 1

Forma D (Pauta)

1.- Sea la función:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{y-3x}{2}, \frac{4y+x}{3}\right)$$

i) Pruebe que g es biyectiva.
Sean (x_1, y_1) y $(x_2, y2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$, con esto se tiene que:

$$\left(\frac{y_1-3x_1}{2}, \frac{4y_1+x_1}{3}\right) = \left(\frac{y_2-3x_2}{2}, \frac{4y_2+x_2}{3}\right).$$

Igualando las coordenadas, se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{y_1-3x_1}{2} = \frac{y_2-3x_2}{2}$$
$$\frac{4y_1+x_1}{3} = \frac{4y_2+x_2}{3}$$

obteniendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1 - 3x_1 = y_2 - 3x_2 \\ 4y_1 + x_1 = 4y_2 + x_2 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 3 y luego sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$13y_1 = 13y_2,$$

obteniendo así que $y_1 = y_2$.
Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 2 se obtiene directamente que:

$$x_1 = x_2,$$

concluyendo así que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ y por lo tanto queda demostrado que g es inyectiva.

Por otro lado, para probar la sobreyectividad, tomemos un $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y) = (a,b)$.
Con lo anterior se tiene se puede obtener el sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-3x}{2} = a \\ \frac{4y+x}{3} = b \end{cases}$$

Despejando y de la primera ecuación se obtiene $y = 3x+2a$, y luego podemos reemplazarlo en la ecuación 2 obteniendo:

$$4(3x+2a) + x = 3b,$$

la cual tiene como resultado para x :

$$x = \frac{3b-8a}{13}.$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación $y = 3x + 2a$ queda:

$$y = 3 \cdot \frac{3b-8a}{13} + 2a = \frac{2a+9b}{13}.$$

Como $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = Rec(g) = Codom(g),$$

por lo tanto, se concluye que g es sobreyectiva.

Como f es sobreyectiva e inyectiva, se tiene que f es biyectiva.

ii) Determine g^{-1}.

Como la función g es biyectiva, existe su función inversa g^{-1}, la cual está descrita según la regla de asignación obtenida anteriormente, así:

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \left(\frac{3y-8x}{13}, \frac{2x+9y}{13} \right) \end{aligned}$$

2.- Sean las funciones:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{x^2+3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x^2+1}{3} \end{aligned}$$

i) Determine los conjuntos:
- $h(\{-4,0,4\}) = \{h(-4), h(0), h(4)\} = \{\frac{17}{3}, \frac{1}{3}\}$.
- $f(\{-4,0,4\}) = \{f(-4), f(0), f(4)\} = \{\sqrt{19}, \sqrt{3}\}$.
- $h^{-1}(\{-3,0,6\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = -3 \vee h(x) = 0 \vee h(x) = 6\} = \{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$.
- $f^{-1}(\{-3,0,6\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -3 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 6\} = \{-\sqrt{33}, \sqrt{33}\}$.

ii) Determine $(h \circ f)(x)$ y $(f \circ h)(x)$ y calcule $(h \circ f)(3)$ y $(f \circ h)(1)$.

Primero se debe encontrar una regla de asignación para las composiciones:

- $$\begin{aligned} (h \circ f)(x) &= h(f(x)) \\ &= h\left(\sqrt{x^2+3}\right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2+1}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (f \circ h)(x) &= f(h(x)) \\ &= f\left(\frac{x^2+1}{3}\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^2+3} \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(h \circ f)(3) = \frac{\left(\sqrt{3^2+3}\right)^2+1}{3} = \frac{13}{3},$$

y

$$(f \circ h)(1) = \sqrt{\left(\frac{1^2+1}{3}\right)^2+3} = \frac{\sqrt{31}}{3}$$