Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Coordinación Cálculo I

Guía de Ejercicios

Funciones 3

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Resolver las ecuaciones:

   a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$
   b) $3^{2x+3} = 3^{x^2}$
   c) $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$
   d) $4^{x-3} = 8^{4-x}$
   e) $4^x(1/2)^{3-2x} = 8(2^x)^2$

2. Sea $f(x) = 2^x - 1$

   a) Calcular $f(0), f(2)$ y $f(1/2)$
   b) Determinar x tal que $f(x) = 0$
   c) Pruebe que f es inyectiva.

3. Para las siguientes funciones determine todos los $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$.

   a) $f(x) = 3e^{-x} - x^2e^{-x}$
   b) $f(x) = \log_8(x+5) - \log_8(x-2) - 1$
   c) $f(x) = 2^{1-x} - 8^{2x+5}$
   d) $f(x) = \ln(2x-3) - 14$

4. Encuentre dominio de las siguientes funciones

   a) $f(x) = 10^x + \log(1-2x)$
   b) $g(x) = \ln(x^2-4)$
   c) $h(x) = \sqrt{x-2} + \log(10-x)$
   d) $f(x) = \ln(x) - \ln(x-2)$

5. Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^x$ que intersecta el eje Y en el punto 8 y pasa por el punto (3,1).

6. Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones. Indique dominio y recorrido.

   a) $f(x) = e^{-x^2}$
   b) $f(x) = 2^{-x+1}$
   c) $f(x) = e^x - 1$
   d) $f(x) = 2 - \log_2 x$

7. Encuentre una función exponencial de la forma $f(x) = ba^{-x} + c$ que tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 32$, intersecta al eje Y en el punto 212 y pasa por el punto (2,112).

8. Verifique que las siguientes funciones son inyectivas, determine su inversa.

   a) $f(x) = e^{2x}$
   b) $f(x) = \ln(x^3)$
   c) $f(x) = 5^{3x-1} + 4$
   d) $f(x) = 2 + \ln(5x - 3)$

9. **Población de renos**. Cien renos, cada uno de ellos de 1 año de edad, se introducen en una reserva de caza. El número $N(t)$ vivos después de t años se pronostica que es $N(t) = 100(0.9)^t$. Estime el número de animales vivos después de

   a) 1 año
   b) 5 años
   c) 10 años
   d) ¿Después de cuánto tiempo, la cantidad de renos habrá disminuido a menos de un 25 % de la cantidad inicial?

10. La población de cierta especie de ave está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$n(t) = \frac{5600}{0,5 + 27,5e^{-0,0455t}}$$

   a) Encuentre la población inicial de aves.
   b) Qué tamaño tiene la población cuando el tiempo avanza (piense en valores grandes para t)

11. **Crecimiento de bacterias**. El número de bacterias en cierto cultivo aumentó de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 a.m. está dado por $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

   a) Estime el número de bacterias del cultivo a las 8:00 a.m., 10:00 a.m. y 11:00 a.m.
   b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

12. **Desintegración radiactiva**. El isótopo de bismuto radiactivo ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si hay 100 miligramos de ^{210}Bi presentes en el tiempo $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ restante después de t días está dada por $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

   a) ¿Cuánto ^{210}Bi permanece después de 5 días? ¿10 días? ¿12.5 días?
   b) Trace la gráfica de f para $0 \leq t \leq 30$.

13. **Desintegración del radio**. La vida media del radio es de 1600 años. Si la cantidad inicial es q_0 miligramos, entonces la cantidad $q(t)$ restante después de t años está dada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Encuentre k.

14. Resolver la ecuación $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$

15. Encontrar los ceros de la función f para

    a) $f(x) = xe^x + e^x$

    b) $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

16. Simplificar la expresión

$$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

17. **Crecimiento de cosecha**. Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0e^{kt}$ para $k > 0$ describe el primer mes de crecimiento para cosechas como el maíz, algodón y frijoles de soya. El valor de función $W(t)$ es el peso total en miligramos, W_0 es el peso en el día que emergen y t es el tiempo en días. Si, para una especie de frijol de soya $k = 0.2$, y $W_0 = 68$ mg., prediga el peso al término de 30 días.

18. **Longevidad del lenguado**. En ciencias acuícolas, un cardumen es un conjunto de peces que resulta de una reproducción anual. Suele suponerse que el número de peces $N(t)$ todavía vivo después de t años está dado por una función exponencial. Para el lenguado del Pacífico, $N(t) = N_0e^{-0.2t}$, donde N_0 es el tamaño inicial del cardumen. Aproxime el porcentaje del número original todavía vivo después de 10 años.

19. **Crecimiento de la población de ballenas azules**. En 1980, la población de ballenas azules en el hemisferio sur se pensaba que era de 4500. La población $N(t)$ ha estado decreciendo de acuerdo con la fórmula $N(t) = 4500e^{-0.1345t}$, donde t es en años y $t = 0$ corresponde a 1980. Prediga la población en el año 2015 si esta tendencia continúa.

20. **Presión atmosférica**. Bajo ciertas condiciones, la presión atmosférica p (en pulgadas) a una altitud de h pies está dada por $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altitud de 40,000 pies?

21. **Crecimiento de niños**. El modelo Jenss es generalmente considerado como la fórmula más precisa para predecir la estatura de niños de preescolar. Si y es la estatura (en centímetros) y x es la edad (en años), entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261-0.993x}$$

para $1/4 \leq x \leq 6$. De cálculo, la rapidez de crecimiento R (en cm/año) está dada por $R = 6.39 + 0.993e^{3.261-0.993x}$. Encuentre la estatura y rapidez de crecimiento de un niño típico de 1 año de edad.

22. Cambie a forma logaritmica

    a) $4^3 = 64$

    b) $4^{-3} = 1/64$

    c) $t^r = s$

    d) $3^x = 4 - t$

    e) $5^{7t} = (a + b)/a$

    f) $(0.7)^t = 5.3$

23. Cambie a forma exponencial

a) $\log_2 32 = 5$
b) $\log_3 \dfrac{1}{243} = -5$
c) $\log_t r = p$
d) $\log_3(x+2) = 5$
e) $\log_2 m = 3x + 4$
f) $\log_b 512 = 3/2$

24. Despeje t usando logaritmos con base a

a) $2a^{t/3} = 5$
b) $K = H - Ca^t$
c) $A = Ba^{Ct} + D$

25. Cambie a forma logaritmica

a) $10^5 = 100.000$
b) $10^{-3} = 0,001$
c) $10^x = y + 1$
d) $e^7 = p$
e) $e^{2t} = 3 - x$

26. Cambie a forma exponencial

a) $\log x = 50$
b) $\log x = 20t$
c) $\log x = 0,1$
d) $\log w = 4 + 3x$
e) $\log(z-2) = 1/6$

27. Encontrar el número, si es posible

a) $\log_5 1$
b) $\log_3 3$
c) $\log_4(-2)$
d) $\log_7 7^2$
e) $3\log_3 8$
f) $\log_5 125$
g) $\log_4 1/16$

28. Encontrar el número

a) $10^{\log 3}$
b) $\log 10^5$
c) $\log 100$
d) $\log 0,0001$
e) $e^{\ln 2}$
f) $\ln e^{-3}$
g) $e^{2+\ln 3}$

29. Resolver la ecuación

a) $\log_4 x = \log_4(8-x)$
b) $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$
c) $\log x^2 = \log(-3x-2)$
d) $\log_3(x-4) = 2$
e) $\log_9 x = 3/2$
f) $\log x^2 = -2$

g) $e^{2\ln x} = 9$

h) $e^{x\ln 3} = 27$

30. **Desintegración del radio**. Si empezamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q restante después de t años está dada por la fórmula $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Exprese t en términos de q y de q_0.

31. **Escala de Richter**. Use la fórmula para la magnitud R de un sismo en la escala de Richter $R = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ para hallar la magnitud de un terremoto que tiene una intensidad

    a) 100 veces la de I_0

    b) 10,000 veces la de I_0

    c) 100,000 veces la de I_0

32. **Intensidad del sonido**. La intensidad acústica de un sonido, como la experimenta el oído humano, está basada en su nivel de intensidad. Una fórmula empleada para hallar el nivel de intensidad $\alpha = 10\log(I/I_0)$, donde I_0 es un valor especial de I acordado como el sonido más débil que puede ser detectado por el oído bajo ciertas condiciones. Encuentre α si

    a) I es 10 veces mayor que I_0

    b) I es 1000 veces mayor que I_0

    c) I es 10,000 veces mayor que I_0 . (Este es el nivel de intensidad de la voz promedio.)

33. **Crecimiento de la población en Estados Unidos**. La población $N(t)$ (en millones) de Estados Unidos t años después de 1980 se puede aproximar con la fórmula $N(t) = 231e^{0.0103t}$. ¿Cuándo es que la población será el doble de la de 1980?

34. **Peso de niños**: La relación de Ehrenberg es una fórmula empírica que relaciona la estatura h (en metros) con el peso promedio W (en kilogramos) para niños de 5 a 13 años de edad.

    a) Exprese W como función de h que no contenga ln.

    b) Estime el peso promedio de un niño de 8 años de edad que mide 1.5 metros de estatura.

35. El de una solución química está dado por la fórmula

$$= -\log[H^+]$$

donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores del van de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

    a) ¿Cuál es el de una solución para la que $[H^+]$ es 0,1?

    b) ¿Cuál es el de una solución para la que $[H^+]$ es 0,01?

    c) ¿Cuál es el de una solución para la que $[H^+]$ es 0,001?

    d) ¿Qué ocurre con el cuando disminuye la concentración de iones de hidrógeno?

    e) Determine la concentración de iones de hidrógeno en una naranja (=3,5)

    f) Determine la concentración de iones de hidrógeno en la sangre humana (= 7,4)

36. **Presión de aire**. La presión de aire $p(h)$ (en lb/in^2), a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, se puede aproximar con la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$. ¿Aproximadamente a qué altitud h la presión del aire es:

    a) 10 lb/in^2

    b) la mitad de su valor al nivel del mar?

37. Entre las 12:00 PM y la 1:00 PM, los autos llegan al autobanco de Citibank con una tasa de 6 autos por hora (0,1 autos por minuto). La siguiente fórmula estadística se utiliza para determinar la probabilidad de que un auto llegue en los siguientes t minutos después de las 12:00 PM.

$$F(t) = 1 - e^{-0,1t}$$

    a) Determine cuántos minutos se necesitan para que la probabilidad llegue a 50 %.

    b) Determine cuántos minutos se requieren para que la probabilidad llegue a 80 %.

    c) ¿Es posible que la probabilidad sea igual a 100 %? Explique.

38. **Crecimiento de elefantes**. El peso W (en kilogramos) de una elefanta africana de t años se puede aproximar con

$$W = 2600(1 - 0,51e^{-0,075t})^3$$

    a) Aproxime el peso al nacimiento. 305.9 kg

    b) Estime la edad de una elefanta africana que pesa 1800 kgs mediante el uso de la fórmula para W.

39. La temperatura u de un objeto calentado en un tiempo dado t se modela por la siguiente función

$$u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}, \qquad k < 0$$

    Donde T es la temperatura constante del medio que lo rodea, u_0 es la temperatura inicial del objeto calentado y k es una constante negativa. Se calienta un objeto a $100°C$ y después se deja enfriar en una habitación cuya temperatura es de $30°C$.

    a) Si la temperatura del objeto es de $80°C$ después de 5 minutos, ¿cuándo será de $50°C$ su temperatura.

    b) Determine el tiempo transcurrido antes de que la temperatura del objeto sea de $35°C$.

40. La fórmula $D = 5e^{-0,4h}$ se emplea para encontrar el número de miligramos de cierta droga que está en el torrente sanguíneo de un paciente h horas después de administrarla. Cuando el número de miligramos llega a 2, la droga debe administrarse de nuevo. ¿Cuánto tiempo debe pasar entre inyecciones?

41. La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperes) después del tiempo t (en segundos) en un circuito simple que consiste de una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrys) y una fuerza electromotriz E (en volts), es

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

Si $E = 12$ volts, $R = 10$ omhs, $L = 5$ henrys, ¿cuánto tiempo se necesita para obtener una corriente de 0,5 y de 1 ampere?

42. **Densidad de población urbana**. Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad de población D (en miles/mi^2) con la distancia x (en millas) del centro de la ciudad. La fórmula $D = ae^{-bx}$ para la densidad central a y coeficiente de decaimiento b se ha encontrado apropiada para muchas grandes ciudades de Estados Unidos. Para la ciudad de Atlanta en 1970, $a = 5.5$ y $b = 0.10$. ¿Aproximadamente a qué distancia era la densidad de población de 2000 por milla cuadrada?

Soluciones

1. *a*) 5

   b) -1, 3

   c) $-\dfrac{4}{99}$

   d) $\dfrac{18}{5}$

   e) 3

2. *a*) 0; 3; 0.414

   b) $x = 0$

   c) Supongamos que $f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ 2^a - 1 & = & 2^b - 1 & \\ 2^a & = & 2^b & /\log_2 \\ a & = & b & \end{array}$$

   Por lo tanto f es inyectiva

3. *a*) $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

   b) $x = 3$

   c) $x = -2$

   d) $x = \dfrac{e^{14}+3}{2}$

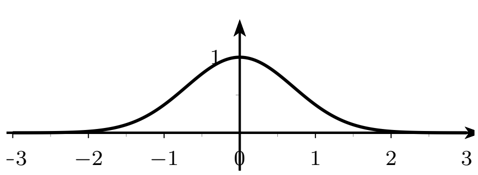
4. *a*) $]1/2, +\infty[$

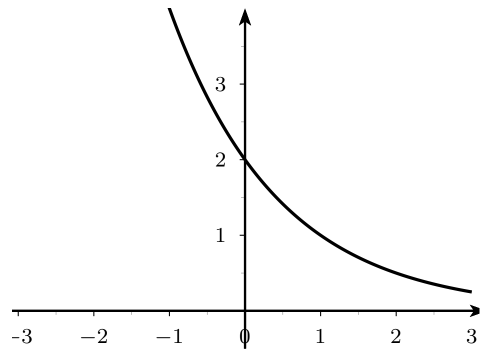
   b) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

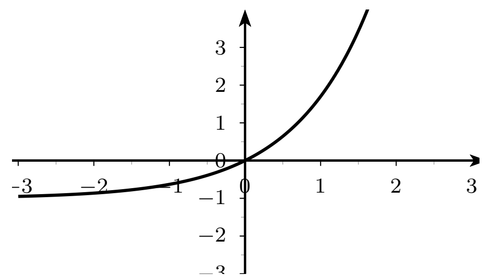
   c) $[2, 10[$

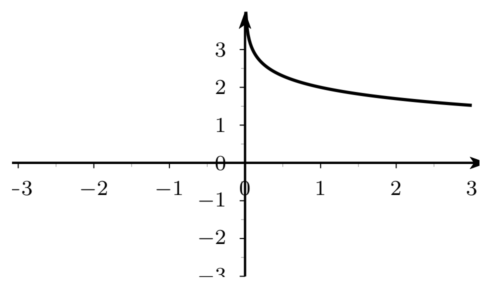
   d) $]2, +\infty[$

5. $f(x) = 8(1/2)^x$

6. *a*) 

   b) 

   c) 

   d) 

7. $180(1.5)^{-x} + 32$

8. *a*) $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln(y)$

   b) $f^{-1}(y) = e^{y/3}$

   c) $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{3}(\log_5(y-4)+1)$

   d) $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{5}(e^{y-2}+3)$

9. *a*) 90

   b) 59

   c) 35

   d) Después de las 13,16 años

10. *a*) 200

    b) 11200

11. *a*) 1039, 3118, 5400

12. 50 mg.; 25 mg.; $\frac{25}{2}\sqrt{2} \approx 17.7mg.$
13. $-\frac{1}{1600}$
14. 3,4
15.
    a) -1
    b) $-3/4, 0$
16. $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$
17. 27.43 g
18. 13.5 %
19. 41
20. 7.44 pulg
21. 75.77; 15.98 cm/año
22.
    a) $\log_4 64 = 3$
    b) $\log_3(1/64) = -3$
    c) $\log_t s = r$
    d) $\log_3(4 - t) = x$
    e) $\log_5 \frac{a+b}{a} = 7t$
    f) $\log_{0.7}(5.3) = t$
23.
    a) $2^5 = 32$
    b) $3^{-5} = 1/243$
    c) $t^p = r$
    d) $3^5 = (x + 2)$
    e) $2^{3x+4} = m$
    f) $b^{3/2} = 512$
24.
    a) $t = 3\log_a 5/2$
    b) $t = 3\log_a(\frac{H-K}{C})$
    c) $t = \frac{1}{C}\log_a(\frac{A-D}{B})$
25.
    a) $\log 100.000 = 5$
    b) $\log 0,001 = -3$
    c) $\log(y + 1) = x$
    d) $\log p = 7$
    e) $\log(3 - x) = 2t$
26.
    a) $10^{50} = x$
    b) $10^{20t} = x$
    c) $e^{0,1} = x$
    d) $e^{4+3x} = w$
    e) $e^{1/6} = z - 2$
27.
    a) 0
    b) 1
    c) No es posible
    d) 2
    e) 8
    f) 3
    g) -2
28.
    a) 3
    b) 5
    c) 2
    d) -4
    e) 2
    f) -3
    g) $3e^2$
29.
    a) 4
    b) No hay solución
    c) -1, -2
    d) 13
    e) 27
    f) $\pm\frac{1}{e}$
    g) 3
    h) 3
30. $t = -1600\log_2(q/q_0)$
31.
    a) 2
    b) 4
    c) 5

32.
    a) 10
    b) 30
    c) 40

33. En el año 2047

34.
    a) $W = 2.4e^{1.84h}$
    b) 37.92Kg.

35.

36.
    a) 10.007 pies
    b) 18.004 pies

37.

38.
    a) 305.9 Kg.
    b) 19.8 años

39.

40.

41.

42. 10.1 mi