Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Universidad de Santiago de Chile.
Álgebra I para MBI.

Nombre:______________________________Sección:______________________________

Control 2

Forma C

1.- Sea $z \in \mathbb{C}$.Encuentre las soluciones de la ecuación:

$$z^2 + 7z = 7i - 1.$$

2.- Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con :

$$\begin{aligned} z &= \frac{4+i}{2-5i} \\ w &= \frac{3-5i}{8+3i} \end{aligned}$$

i) Determine $Re(z-w)$.

ii) Determine $Im(z \cdot w)$.

iii) Determine $Im(\overline{z}) - Re(\overline{w})$.

3.- Determine, si es que existe, solución para la ecuación:

$$|z|^2 - z = 5i.$$

Recuerde que, si $z = a + bi$, entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pauta:

1)

$$\begin{aligned} z^2 + 7z = 7i - 1 &\Rightarrow \left(z + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 7i - 1 \\ &\Rightarrow \left(z + \frac{7}{2}\right)^2 = 7i - 1 + \frac{49}{4} \\ &\Rightarrow \left(z + \frac{7}{2}\right)^2 = 7i + \frac{45}{4} \end{aligned}$$

Sea
$$w = z + \frac{7}{2},$$
$$\text{Entonces,} \qquad w^2 = 7i + \frac{45}{4}$$
Haciendo $W = a + bi$, nos queda:
$$a^2 + 2abi - b^2 = 7i + \frac{45}{4}$$
obteniendo el sistema:
$$a^2 - b^2 = \frac{45}{4}$$
$$2ab = 7$$
Despejando en la segunda ecuación:
$$a = \frac{7}{2b}$$
Luego:
$$\frac{49}{4b^2} - b^2 = \frac{45}{4}$$
Multiplicando por $4b^2$, queda:
$$49 - 4b^4 = 45b^2$$
Así $\quad 4b^4 + 45b^2 - 49 = 0$ con esto, se obtiene que:
$$b^2 = -\frac{49}{4} \quad \vee \quad b^2 = 1$$
Como $b \in \mathbb{R}$ entonces $b^2 = -49$ no tiene soluciones reales, por ende solo queda $b^2 = 1$ y así $b = \pm 1$.

Si $b = 1$, entonces $a = \frac{7}{2}$.
Si $b = -1$, entonces $a = -\frac{7}{2}$ por lo tanto:
$$w_1 = \frac{7}{2} + i \quad \text{y} \quad w_2 = -\frac{7}{2} - i$$
Volvemos a la variable z
$$z_1 = w_1 - \frac{7}{2} = i$$
$$z_2 = w_2 - \frac{7}{2} = -7 - i$$

2) como $z = \frac{4+i}{2-5i}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{4+i}{2+5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} (0,2pt) \\ &= \frac{(4+i)(2+5i)}{4+25} \\ &= \frac{(4+i)(2+5i)}{29} \\ &= -\frac{(8+20i+2i-5)}{29} \\ &= \frac{3+22i}{29} (0,2pt) \end{aligned}$$

De la misma manera:

$$\omega = \frac{9-49i}{73} (0,4pt \text{ Separar según el desarrollo de antes.})$$

Así
i) Re$(z-w) = \frac{3}{29} - \frac{9}{73}$.(0,4pt)
ii) Como

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \left(\frac{3}{29} + \frac{22i}{29}\right) \cdot \left(\frac{9}{73} - \frac{49i}{73}\right) \\ &= \frac{3 \cdot 9}{29 \cdot 73} - \frac{3 \cdot 49i}{29 \cdot 73} + \frac{22 \cdot 9}{29 \cdot 73} i + \frac{22 \cdot 49}{29 \cdot 73} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$Im(z \cdot w) = \frac{-3 \cdot 49}{29 \cdot 73} + \frac{22 \cdot 9}{29 \cdot 73} (0,4pt)$$

iii) $Im(\bar{z}) = Im\left(\frac{3}{29} - \frac{22i}{29}\right) = \frac{-22}{29}$

$$\text{Re}(\bar{\omega}) = \text{Re}\left(\frac{9}{73} + \frac{49}{73} i\right) = \frac{9}{73}$$

Así

$$Im(\overline{z}) - \text{Re}(\overline{w}) = -\frac{22}{29} - \frac{9}{73} (0,4pt)$$

3) Sea $z = a + bi$(0,1pt), entonces:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - (a+bi) &= 5i \\ a^2 + b^2 - a - bi &= 5i (0,3pt) \end{aligned}$$

Asi

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - a &= 0 \\ -b &= 5 \qquad (0,4pt) \end{aligned}$$

como $b = -5$(0,1pt)

$$a^2 + (-5)^2 - a = 0$$
$$a^2 + 25 - a = 0 (0, 2pt)$$

de donde el discriminate es:

$$1 - 4 \cdot 25 = -49 < 0 (0, 3pt)$$

por lo tanto $a \notin \mathbb{R}$(0,2pt). Así, no existe solución para la ecuación dada.(0,4pt)