Ejercicios sobre continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad, derivada direccional.

Ejercicio 1.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{cases}$$

1. Determine (si es posible) $\nabla f(0,0)$.
2. Determine $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$
3. Muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Ejercicio 2.

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y \sin\left(xy^2\right)}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Determine si existen $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ y la derivada direccional $f'\left((0,0),\hat{v}\right)$,donde $||\hat{v}|| = ||(v_1,v_2)|| = 1$.
2. Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 3.

Considerando la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Determine si f es continua en $(0,0)$.
2. Determinar $\nabla f(0,0)$.
3. Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicios de regla de la cadena

Ejercicio 1.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f_x + f_y = 0$, $f(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = \dfrac{x}{f(x,y)}$. Demuestre que
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{F(x,y)}{x}$$

2. Sea $u(x,t) = \phi(x-at) + \psi(x+at)$, donde ϕ y ψ son dos funciones reales de variable real, dos veces derivables. Pruebe que
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

Ejercicio 2.

1. Sea $u(x,y) = xyf\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, con f diferenciable. Obtenga la función $g(x,y)$ de modo que
$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y) \cdot u$$
para todo x, y con $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2. La función $f(x,y)$ posee por lo menos hasta derivadas parciales de segundo orden continuas en una vecindad de (x,y), si consideramos la función $g(u,v) = f\left(e^v \cos u, e^v \sin u\right)$, demostrar que
$$e^{-2v}\left(g_{uu} + g_{vv}\right) = f_{xx} + f_{yy}$$

Ejercicio 3.

1. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real diferenciable que verifica
$$\phi'\left(a^{\frac{p}{p-1}} + b^{\frac{p}{p-1}}\right) = \frac{p}{ab}$$
para $p \in \mathbb{R} - \{1\}$ y $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Considere la función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x^p + y^p$. Determine $\nabla(\phi \circ g)(x_0, y_0)$, donde $(x_0, y_0) = \left(a^{\frac{p}{p-1}}, b^{\frac{p}{p-1}}\right)$.

2. Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por
$$g(x,y) = \left(xy, 5x, y^3\right)$$
$$f(x,y,z) = \left(3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz\right)$$
Determine $J(f \circ g)(x,y,z)$.

Ejercicio 4.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, g diferenciable y f definida por

$$f(x, y) = (ax + by, cx - dy)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + c \neq 0$ y $b \neq 0$. Sabiendo que

$$D\,(f \circ g) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

Determine el valor de g.

2. Sean $G(x, y, z) = \|(x, y, z)\|$ y $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$. Calcule, usando la regla de la cadena, la matriz derivada $(G \circ F)$ en $P_0 = (1, 0)$.

Ejercicios sobre teorema de la función implícita, inversa.

Ejercicio 1.

1. Considere la ecuación no lineal

$$\sin(z) + xy + e^z = 0$$

   Demuestre que en una vecindad de $(0,0)$, la variable z se puede despejar como una función de clase $\mathcal{C}^1$ de (x,y) tal que $z(0,0)=0$. Deduzca que $\nabla z(0,0)=(0,0)$.

2. Sea f una función diferenciable tal que $f(cx-az, cy-bz)=0$, donde z se define implícitamente como una función diferenciable de las variables x e y. Demuestre que

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

Ejercicio 2.

1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = g\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)$, con $xy \neq 0$ y $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in U$. Suponga que la función $f(x,y,z)=0$ define implícitamente a z como una función de clase C^1 de x e y. Verifique si se cumple la igualdad siguiente

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

2. Muestre que en una vecindad del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,1,1,1)$ se puede resolver el sistema

$$\begin{cases} u\sin(x) + yv^2u &= 1 \\ u^2v + xyv^4 &= 1 \end{cases}$$

   de manera única para u, v como funciones clase C^1 de x, y. Determine $u_x(0,1)$ y $v_x(0,1)$.

Ejercicio 3.

1. Sea el sistema

$$\begin{cases} 3xy + x^2z^2 + z^3 + 2uv - 4v - 3u & = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 2v^2 - u & = 0 \end{cases} \quad (*)$$

   Demuestre que el sistema $(*)$ determina expresiones implícitas $u = u(x, y, z)$, $v = (x, y, z)$ en una vecindad de $P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Determine las derivadas parciales de estas funciones en $(1, 1, 1)$.

2. Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f_1(1) = f_2(1) = g_1(1) = g_2(1) = 1$. Considere las expresiones

$$\begin{cases} \int_u^{v^2} f_1(t)dt & = \int_x^y g_1(t)dt \\ \int_{u^3}^{v^4} f_2(t)dt & = \int_{x^2}^{y^2} g_2(t)dt \end{cases}$$

   Demuestre que este sistema determina funciones implícitas $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ en una vecindad del punto $P_0(1, 1, 1, 1)$. Determine $\nabla u(1, 1)$ y $\nabla v(1, 1)$.

Ejercicio 4.

1. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$. Demuestre que es posible definir u y v como funciones de clase C^1 de x e y , donde $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$. Determine $JF^{-1}(u, v)$.

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = \left(\int_x^y g(t)dt, \int_y^{x^2} g(t)dt \right)$$

   Demuestre que esta función tiene una inversa F^{-1} definida en una bola B del origen coordenadas. Determine $JF^{-1}(0, 0)$.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Considere la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (x + f(y) + g(z), y + g(z), z)$. Demuestre que F tiene inversa $F^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y determine $JF^{-1}(u, v, w)$, donde $(u, v, w) = F(x, y, z)$.

Ejercicios sobre planos tangentes, recta normal, gradiente y geometría.

Ejercicio 1.

1. Considere la superficie definida por la ecuación

$$z = 2x^2 + 6xy + y^2 - 5y$$

Encuentre la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(1, 1, 4)$.

2. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x\sin(x + y)$ en el punto $(-1, 1, 0)$

Ejercicio 2.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en 5 , con $f(5) = 7$ y $f'(5) = 10$. Considere la superficie de revolución dado por el conjunto

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\}.$$

Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto $(3, 4, 7)$.

2. Determine las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ en los puntos de intersección de éste con la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

3. Determine las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = x^2 + 3y^2$ en los puntos de intersección de ésta con la recta que resulta de la intersección de los planos $2x - y - z = 0$, $x + 3y - 4z = 0$.

Ejercicio 3.

1. Demuestre que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ cortan los ejes coordenados en puntos cuya suma de distancias al origen es constante.

2. Demuestre que las rectas normales a la superficie $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + y$, en los puntos (x_0, y_0, z_0) con $x_0 \neq 0$, no cortan el eje z.

Ejercicio 4.

1. Determine los puntos sobre el elipsoide $x^2+2y^2+3z^2 = 1$, donde el plano tangente es paralelo al plano $3x-y+3z = 1$.

2. Muestre que todos los planos tangentes al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pasan por el origen.

3. Considere la elipsoide dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Muestre que la ecuación del plano tangente en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ del elipsoide está dado por

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Ejercicios sobre derivadas direccionales de funciones diferenciables.

Ejercicio 1.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de la cual se conoce la siguiente información en el punto $P_0(0, 4, -1)$

$f(P_0)$	$f_x(P_0)$	$f_y(P_0)$	$f_z(P_0)$
25	1	2	-1

   a) Calcule la derivada direccional de f en P_0 en la dirección del vector $(1, -3, 4)$

   b) Encuentre la dirección para la cual la derivada direccional es máxima y calcule dicha derivada dreccional

2. Sea $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2)$, donde v es la dirección que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el semieje positivo de las abscisas.

Ejercicio 2.

1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $p \in U$. Suponga que $f_x(p) = 3$ y $f_y(p) = 4$.

   a) ¿En qué dirección se tiene que $D_v f(p) = 2$?

   b) ¿En qué dirección se tiene que $D_v f(p) = 0$?

2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $p \in U$. Suponga que $D_u f(p) = 3$ y $D_v f(p) = 2$, donde $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Calcule las derivadas parciales de f en p.

Ejercicio 3.

1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $p \in U$. Suponga que $D_u f(p) = a$ y $D_v f(p) = b$, donde $u = (x_1, -y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$. Demuestre que las derivadas parciales de f en p son

$$f_x(p) = \frac{ay_2 - by_1}{x_1y_2 - x_2y_1}$$
$$f_y(p) = \frac{bx_1 - ax_2}{x_1y_2 - x_2y_1}$$

2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in U$. Si v es un fector unitario de $\mathbb{R}^n$, entonces demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial (-v)}(p) = -\frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Ejercicios sobre valores extremos

Ejercicio 1.

1. Para $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 3x^3+y^2-9x-6y+1$. Obtenga sus puntos críticos y clasifíquelos.(máximos, mínimos o puntos silla).

2. Para $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$. Obtenga sus puntos críticos y clasifíquelos.(máximos, mínimos o puntos silla).

Ejercicio 2.

1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto U, dada por $f(x,y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$, donde p es una constante entera. Calcular los valores extremos de la función.

2. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \ln(1+e^x+e^y) - ax - by$, donde $a, b > 0$.

   a) Demuestre que si $a+b \geq 1$, entonces la función no tiene puntos críticos. Calcule explícitamente el único punto crítico cuando $a+b<1$.

   b) Clasifique el punto crítico encontrado en el item anterior usando las condiciones de segundo orden.

Ejercicio 3.

1. Usando multiplicadores de Lagrange, determine los valores máximo y mínimo de las funciones siguientes, sujetas a la restricción propuesta

   a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $xy = 1$.

   b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $x+y+z = 12$.

2. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f en el conjunto D.

   a) $f(x,y) = x^2+y^2+x^2y+4$, si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1 \ , \ |y| \leq 1\right\}$

   b) $f(x,y) = xy^2$, si $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :, \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x^2+y^2 \leq 3\right\}$

Ejercicio 4.

1. Determine los puntos más cercanos y más alejados del origen de la curva cerrada $x^2+y^2+xy = 4$.

2. Determine los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 4x^2+10y^2$ en la región $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\right\}$

3. Encuentre el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ en el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = R^2\right\}$$

   donde $R > 0$. Deducir que para todo $a, b, c \geq 0$, se tiene la desigualdad

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{(a+b+c)^3}{3}$$