AYUDANTÍA N°3

Ejercicio 1.

Considere la función $f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{|x|-1}}$. Determine:

a) Dominio de f
b) Ceros
c) Paridad
d) Los valores de x que satisfacen la condición $f(x) > 0$

Solución:

a) Primero, para que $f(x)$ exista, se debe cumplir que:

$$|x| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

Por otra parte, se debe cumplir que el argumento de la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero, es decir:

$$\frac{|x|}{|x|-1} \geq 0$$

- $Si\ x \geq 0,\ se\ tiene\ que\ \frac{|x|}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0$

Realizo análisis de signos con los valores críticos:

$$x = 0\ ;\ x = 1$$

	$-\infty$	0	1 $+\infty$
x	-	+	+
$x-1$	-	-	+
	+	-	+

Entonces, $\frac{x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x\ \in]-\infty, 0]\ \cup]1, +\infty[= \mathbb{R} -]0,1[$

- $Si\ x < 0, se\ tiene\ que\ \frac{|x|}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{-x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0$

Realizo análisis de signos con los valores críticos:

$$x = 0\ ;\ \ x = -1$$

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 0 $\quad +\infty$

x	-	-	+
$x+1$	-	+	+
	+	-	+

Entonces, $\frac{x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x\ \in]-\infty, -1]\ \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}-]-1,0[$

Luego, tomando en cuenta todo lo anterior, el dominio de la función es:

$$Dom(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\cup \{0\} = \mathbb{R} - ( ]-1,0[\cup]0,1[ )$$

b) Se tiene que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Por tanto, $x = 0\ es\ el\ único\ cero\ de\ f$

c) Para analizar la paridad , se debe calcular $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{|-x|-1}$$

$$= \frac{|x|}{|x|-1}, pues\ la\ función\ |x|\ es\ par$$

$$= f(x)$$

∴ La función es Par.

d) Utilizando lo calculado en a) , tenemos que $f(x) > 0$ cuando $x\ \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Ejercicio 2.

Sea $g(x) = \frac{2}{x^2-16}$. Determine:

a) Dominio
b) Ceros
c) Paridad
d) Signos

Solución:

a) Primero, para que $g(x)$ exista, se debe cumplir que:

$$x^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 16$$
$$\Leftrightarrow x \neq \pm 4$$

∴ El dominio de la función es: $Dom(g) = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$

b) Para determinar ceros, se tiene que:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2 - 16} = 0 \ \Leftrightarrow 2 = 0\ (Falso)$$

∴ La función dada no posee ceros.

c) Para analizar la paridad , se debe calcular $g(-x)$

$$g(-x) = \frac{2}{(-x)^2 - 16}$$
$$= \frac{2}{x^2 - 16}, pues\ la\ función\ x^2\ es\ par$$
$$= g(x)$$

∴ La función es Par.

d) Para analizar los signos de la función, se tiene que:

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 16} = \frac{2}{(x+4)(x-4)}$$

Luego, los valores críticos son:

$$x = -4\ ;\ x = 4$$

Realizando análisis de signos, sigue que:

$$-\infty \qquad -4 \qquad 4 \qquad +\infty$$

$x+4$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
	+	-	+

∴ Se concluye que:

$$g(x)\ es\ negativa \Leftrightarrow x\ \in]-4,4[$$

$$g(x) es\ positiva \Leftrightarrow x\ \in]-\infty,-4[\ \cup\ ]4,+\infty[$$

Ejercicio 3.

Se define la función $h(x) = |x^2 - x^3|$. Determine:

a) Dominio
b) Ceros
c) Paridad
d) Esboce la gráfica de $h(x)$

a) Podemos observar que la función dada no tiene problemas de indeterminación, por lo que su dominio es:

$$Dom(h) = \mathbb{R}$$

b) Se tiene que:

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow |x^2 - x^3| = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(1 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,; x = 1 \end{aligned}$$

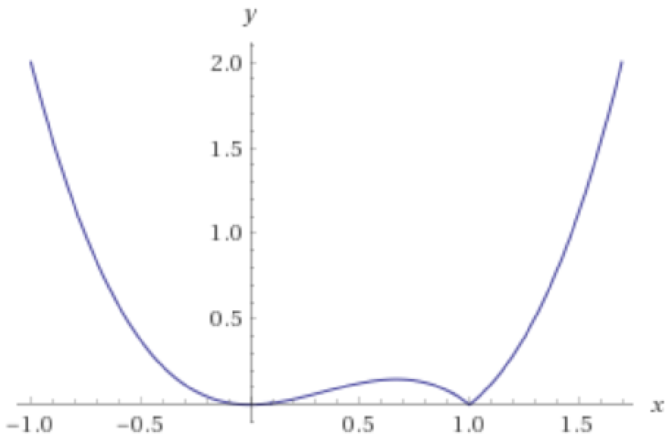
∴ Los ceros de la función h(x) son $x = 0\ y\ x = 1$

c) Para analizar la paridad , se debe calcular $h(-x)$

$$\begin{aligned} h(-x) &= |(-x)^2 - (-x)^3| \\ &= |x^2 + x^3|, pues\ la\ función\ x^2\ es\ par\ y\ x^3\ es\ impar \end{aligned}$$

Como $h(-x) \neq h(x) \neq -h(x)$, entonces la función h no tiene paridad.

d) La gráfica de $h(x)$ es:



Calculo I – Sección B-2

Ayudante: Víctor Guerra

Profesor: Cristian Burgos

29 Octubre 2018

Ejercicio 4.

Considere la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Determine:

a) Dominio
b) Ceros
c) Signos
d) Intersección con el eje de las ordenadas
e) Esboce gráfica de f

Solución:

a) Podemos observar que la función dada no tiene problemas de indeterminación, por lo que su dominio es:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b) Se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow\ x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-3)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,; x = 3\,; x = -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Los ceros de la función $f(x)$ son $x = 0\,; x = 3\,; x = -1$

c) Utilizando los valores críticos encontrados, sigue que:

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 0 $\quad 3 \quad$ $+\infty$

x	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
	-	+	-	+

$\therefore$ Se concluye que:

$$g(x)\ es\ negativa \Leftrightarrow x\ \in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ [0,3]$$

$$g(x) es\ positiva \Leftrightarrow x\ \in [-1,0] \cup [3, +\infty[$$

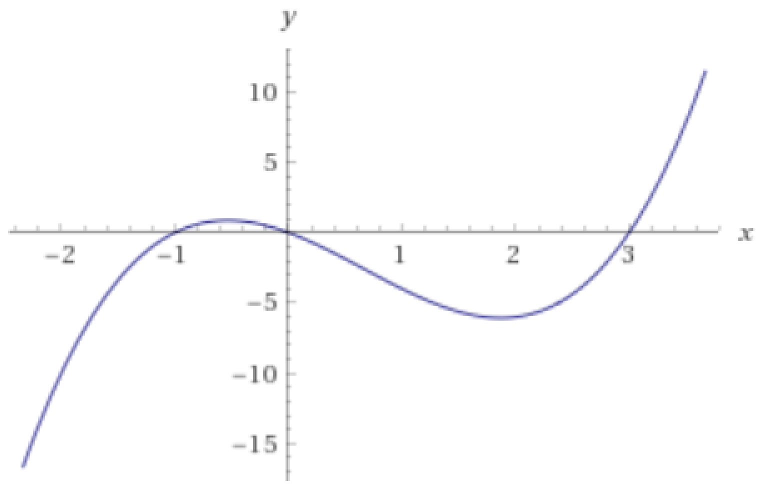
d) La intersección con el eje de las ordenadas (eje y) ocurre cuando $x = 0$

En efecto,

$$y = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

Por tanto, la única intersección es en el punto (0,0).

e) La gráfica de la función $f(x)$ es:



Ejercicio 5.

Sea la función $f(x) = \sqrt{\frac{-3x}{|3x|+1}}$. Determine:

a) Ceros y paridad de f.
b) Dominio y recorrido de f.

Solución:

a) Primero, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 \; &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{-3x}{|3x|+1}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-3x}{|3x|+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow -3x = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El único cero de la función es $x = 0$

Para analizar la paridad , se debe calcular $f(-x)$

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \sqrt{\frac{3x}{|-3x|+1}} \\
&= \sqrt{\frac{3x}{|3x|+1}}
\end{aligned}
$$

Luego, como $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$, la función no tiene paridad.

b) Para que la función dad exista, se debe cumplir que:

$$\frac{-3x}{|3x|+1} \geq 0$$

Como $|3x| + 1 \geq 1 \Rightarrow |3x| + 1 > 0$, entonces $-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$\therefore$ El dominio de la función es:

$$Dom(f) =]-\infty, 0]$$

Ahora: como $x \leq 0$, $\frac{-3x}{|3x|+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{-3x}{|3x|+1}} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

Además:

$$si\ x \leq 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{-3x}{-3x+1}}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{-3x}{-3x+1}$$

$$\Rightarrow y^2(-3x+1) = -3x$$

$$\Rightarrow -3xy^2 + y^2 = -3x$$

$$\Rightarrow -3xy^2 + 3x = -y^2$$

$$\Rightarrow -3x(y^2-1) = -y^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2}{3(y^2-1)}$$

Como $y^2 \geq 0$, entonces $y^2 - 1 < 0 \Rightarrow y \in]-1,1[$, pero, $y \geq 0$

$\therefore$ El recorrido de la función dada es: $Rec(f) = [0,1[$

Ejercicio 6.

Dada la función $f(x) = \frac{x^3-3x^2-10x}{\sqrt{x^6+1}}$

a) Determine dominio
b) Calcule las Intersecciones con los ejes coordenados
c) Estudie el signo de la función

Solución:

a) como el denominador $\sqrt{x^6+1} > 0 \; para \; todo \; x \; \in \mathbb{R}$ y el numerador es un polinomio, tenemos que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b) Se sabe que:

$$f \; intersecta \; al \; eje \; x \Leftrightarrow y = f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 - 10x}{\sqrt{x^6+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \, ; x = 5 \, ; x = -2$$

$\therefore$ Los puntos de intersección con el eje x son: $\{(0,0), (5,0), (-2,0)\}$

Luego:

$$f \; intersecta \; al \; eje \; y \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$\therefore$ El único punto de intersección con el eje y es: $(0,0)$

c) Como se sabe que el denominador es siempre positivo, se reduce a analizar el numerador, cuyos valores críticos son:

$$x = 0 \, ; x = 5 \, ; x = -2$$

$-\infty$ -2 0 5 $+\infty$

x	-	-	+	+
$x-5$	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+
	-	+	-	+

Finalmente:

$$f \text{ es positiva } \Leftrightarrow x \in]-2,0[\, \cup\,]5,+\infty[$$

$$f \text{ es negativa } \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2[\, \cup\,]0,5[$$

Ejercicio 7.

Considere la función definida por $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$

a) Determine el dominio de la función
b) Determine el recorrido de la función, para $x \in [0, +\infty[$
c) Paridad
d) Estudie el signo de la función

Solución:

a) Como $x^2 + 9 > 0$, se tiene que:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

b) Como $x \ \in [0, +\infty[$, entonces $y \geq 0$

Luego:

$$y = \frac{60x}{x^2 + 9} \Leftrightarrow y(x^2 + 9) = 60x$$

$$\Leftrightarrow yx^2 - 60x + 9y = 0$$

Calculando x a partir de la fórmula cuadrática, sigue que:

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 36y^2}}{2y}$$

Para que lo anterior exista en el conjunto de los reales, se debe cumplir que:

$$3600 - 36y^2 \geq 0 \ \ ; \ \ y > 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ 100 - y^2 \geq 0 \ ; \ \ y > 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 100 \ ; \ \ y > 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq 10$$

∴ El recorrido de la función es:

$$Rec(f) =]-\infty, 10]$$

c) Para analizar la paridad de la función se calcula $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{-60x}{(-x)^2 + 9} = -\frac{60x}{x^2 + 9} = -f(x), [(-x)^2 \ pues \ la \ función \ x^2 \ es \ par]$$

∴ La función f es impar

d) El signo de la función depende únicamente del numerador, es decir:

$$f\ es\ positiva \iff 60x > 0 \iff x > 0 \iff x \in \ ]0, +\infty[$$

$$f\ es\ negativa \iff 60x < 0 \iff x < 0 \iff x \in]-\infty, 0[$$

Ejercicio 8.

Para la función $f(x) = \frac{x}{x^2-5}$. Determine:

a) Dominio y Recorrido de f
b) Signos y ceros de la función
c) Paridad
d) Gráfico de $f(x)$

Solución:

a) Observemos que:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5} = \frac{x}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}; x \neq \pm\sqrt{5}$$

Luego:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$$

Ahora: Para el recorrido, tenemos que:

$$y = \frac{x}{x^2-5} \Leftrightarrow yx^2 - x - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+20y^2}}{2y}$$

$$\Leftrightarrow y \neq 0$$

Pero, como $f(0) = 0 = y$, entonces se descarta la restricción anterior, por tanto, el recorrido de la función es:

$$Rec(f) = \mathbb{R}$$

b) Ceros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-5} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\therefore$ El único cero es $x = 0$

Luego: se analiza el signo de la función, tomando en cuenta los valores críticos siguientes:

$$x = 0\,; x = \sqrt{5}; x = -\sqrt{5}$$

Realizando análisis de signos, se tiene que:

$-\infty \qquad --\sqrt{5} \qquad 0 \qquad \sqrt{5} \qquad +\infty$

x	-	-	$+$	$+$
$x-\sqrt{5}$	-	-	-	$+$
$x+\sqrt{5}$	-	$+$	$+$	$+$
	-	$+$	-	$+$

Entonces, se obtiene

$$f\ es\ positiva \ \Leftrightarrow x\ \in]-\sqrt{5},0[\ \cup\ ]\sqrt{5},+\infty[$$

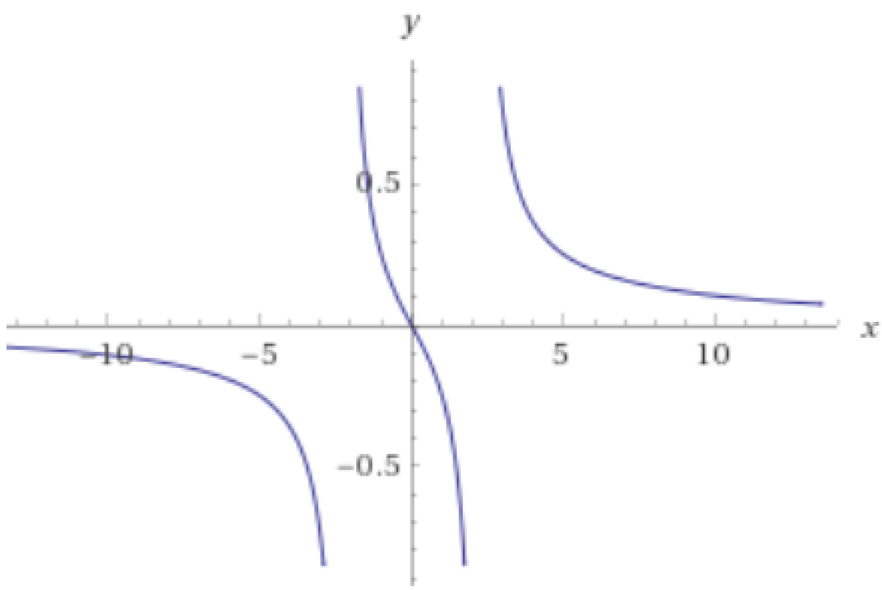
$$f\ es\ negativa \ \Leftrightarrow x\ \in]-\infty,-\sqrt{5}[\ \cup\ ]0,\sqrt{5}[$$

c) Para analizar la paridad de la función se calcula $f(-x)$

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-5}=-\frac{x}{x^2-5}=f(x)\ [(-x)^2\ pues\ la\ función\ x^2\ es\ par]$$

∴ La función dada es una función impar

d)



Ejercicio 9.

Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

a) Determine el dominio y ceros de f
b) Determine el signo de f
c) Determine el recorrido de f

Solución:

a) Ceros:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff (1-x)(1+x) = 0 \iff x = 1\,; x = -1$$

Para que la función dada exista en el conjunto de los reales, se debe cumplir que:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \iff 1 - x^2 \geq 0$$

$$\iff (1-x)(1+x) \geq 0$$

Analizando signos, se tiene que:

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$1-x$	+	+	-
$1+x$	-	+	+
	-	+	-

∴ El dominio de la función es:

$$Dom(f) = [-1,1]$$

b) Debido al análisis anterior, se puede concluir que:

$$f \; es \; positiva \; para \; todo \; x \in Dom\,(f)$$

c)Para calcular el recorrido de la función, se tiene que:

$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow y + yx^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow yx^2 + x^2 = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1-y}{1+y}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$$

Lo anterior existe en el conjunto de los números reales, si se cumple que:

$$\frac{1-y}{1+y} \geq 0$$

Analizando, signos con los valores críticos siguientes:

$$y = 1\,;\, y = -1$$

	$-\infty$ — -1	-1 — 1	1 — $+\infty$
$1-y$	$+$	$+$	-
$1+y$	-	$+$	$+$
	-	$+$	-

Por lo que $y \in]-1,1]$, pero como $f(x) = y \geq 0$, finalmente el recorrido de la función será:

$$Rec(f) = [0,1]$$