Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Módulo Básico Facultad de Ingeniería

Guía de Ejercicios N°1 : Matrices y Determinantes
Coordinación de Álgebra II
Profesor Ricardo Santander Baeza
Agosto del 2017

La honestidad es la carta de presentación
de nuestras Estudiantes "Usachinas"y
de nuestros Estudiantes "Usachinos"

1. Objetivos

El primer objetivo de la presente guía es generar en cada Una y cada Uno de ustedes habilidades, que les permitan enfrentar con éxito situaciones como las siguientes:

(1) Aplicación de la definición y propiedades relativas del concepto de matriz, con el fin de resolver problemas que involucren operatoria básica de las mismas.

(2) Aplicación de la definición y propiedades relativas al concepto de determinante con el fin de resolver problemas de operatoria básica de los mismos.

(3) Utilización del concepto de determinante para clasificar a las "Unidades"o matrices invertibles.

(4) Determinación de conjuntos de "Unidades de matrices"

(5) Dada una Unidad o matriz invertible: Construir la correspondiente matriz inversa.

El segundo objetivo es que se siembre en cada Una y cada Uno de ustedes, la semilla de la responsabilidad ética que representa el trabajo bien hecho o debidamente certificado. Para ello será necesario que cada problema planteado y resuelto sea comprobado, usando su definición o alguna de sus propiedades obtenidas de la misma.

2. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema.

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta.

(3) Trate de entender en la forma más clara para usted, lo que se le pide, en particular si puede usar "sinónimos", que le permitan facilitar su respuesta, cuanto mejor !. Este acto nunca esta de más.

(4) Analice sus datos extrayendo la información que corresponde, orientado por su entendimiento de lo que debe probar.

3. Ejercicios Resueltos de Matrices y Determinantes

(1) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$, $D \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ y $Q \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ tal que $A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$ entonces demuestre que

(a) $A^3 = Q^{-1} \cdot D^3 \cdot Q$

Una Solución. Como $Q \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ y $A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$ entonces sustituyendo directamente obtenemos que

$$\begin{aligned} A^3 &= (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot D \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot D \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D^3 \cdot Q \end{aligned}$$

(b) $\det(A)=\det(D)$

Una Solución. Como $Q\in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ y $A=Q^{-1}\cdot D\cdot Q$ entonces

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(Q^{-1}\cdot D\cdot Q)\\ &= \det(Q^{-1})\cdot\det(D)\cdot\det(Q)\\ &= (\det(Q))^{-1}\cdot\det(D)\cdot\det(Q)\\ &= \det(D)\cdot(\det(Q))^{-1}\cdot\det(Q)\\ &= \det(D)\cdot\frac{1}{\det(Q)}\cdot\det(Q)\\ &= \det(D)\end{aligned}$$

(2) Si $A=\begin{pmatrix}1+a & a^2 & a^3 & a^4\\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4\\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4\\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $a\neq 1$ entonces demuestre que

$$\det(A) = \frac{a^5-1}{a-1}$$

Una Solución. Aplicando propiedades de los determinantes obtenemos que:

$$\begin{aligned}\det(A) &= det\begin{pmatrix}1+a & a^2 & a^3 & a^4\\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4\\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4\\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4\end{pmatrix} \begin{matrix}(l_1\to l_1-al_4)\\ =\\ (l_2\to l_2-l_4)\\ (l_3\to l_3-l_4)\end{matrix} \; det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4\end{pmatrix}\;(l_4\to l_4-al_1)\\ &= \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & a^2 & a^3 & 1+a+a^4\end{pmatrix} \overset{\text{Def. por } c_1}{=} \det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ a^2 & a^3 & 1+a+a^4\end{pmatrix}\;(l_4\to l_4-a^2l_1)\\ &= \det\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & a^3 & 1+a+a^2+a^4\end{pmatrix} \overset{\text{Def. por } c_1}{=} \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ a^3 & 1+a+a^2+a^4\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Def.}}{=} 1+a+a^2+a^3+a^4\\ &= \frac{a^5-1}{a-1}\end{aligned}$$

(3) Si $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $\mathbb{S}=\{a\in\mathbb{R}\mid A\notin\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{S}\neq\emptyset$

Una Solución. Por definición del conjunto $\mathbb{S}$ tenemos que

$$a\in\mathbb{S} \iff a\in\mathbb{R}\wedge A\notin\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\iff a\in\mathbb{R}\wedge\det(A)=0:$$

Por tanto, de acuerdo a nuestras propiedades,

$$a=1 \implies \det A=\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=0\implies 1\in\mathbb{S}\wedge\mathbb{S}\neq\emptyset$$

(b) Determine explícitamente $\mathbb{S}$

Una Solución. Como ya sabemos

$$a \in \mathbb{S} \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) = 0$$

Así que, debemos calcular $\det(A)$ y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} (l_1 \to l_1 - al_4) \\ = \\ (l_2 \to l_2 - l_4) \\ (l_3 \to l_3 - l_4) \end{matrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{Def. } l_4 \\
&= -\det\begin{pmatrix} 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1-a & 1-a & (1-a)(1+a) \\ -(1-a) & 0 & 1-a \\ 0 & -(1-a) & 1-a \end{pmatrix} \text{Prop. determ.} \\
&= -(1-a)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & (1+a) \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (l_2 \to l_2 + l_1) \\ = \end{matrix} -(1-a)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & 2+a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{Def. } c_1 \\
&= -(1-a)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 2+a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{Def. determ.} \\
&= -(1-a)^3(3+a)
\end{aligned}$$

Recapitulando, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{S} \quad &\Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ -(1-a)^3(3+a) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in \mathbb{R} \ \wedge \ (a-1)^3 = 0 \vee (3+a) = 0
\end{aligned}$$

Y

$$\mathbb{S} = \{-3, 1\}$$

(4) Si $A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Una Solución. Por definición del conjunto $\mathbb{S}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{S} \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \det(A) \neq 0 \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Conforme a lo observado en $(\star)$ debemos calcular $\det(A)$, y lo haremos usando nuestras definiciones y propiedades:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} x & x & x & x\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ x & y & z & t\end{pmatrix} \stackrel{\text{Prop. det.}}{=} x\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x & y & y & y\\ x & y & z & z\\ x & y & z & t\end{pmatrix} \begin{matrix}(l_2\to l_2 - xl_1)\\ (l_3\to l_3 - xl_1)\\ (l_4\to l_4 - xl_1)\end{matrix}\\
&= x\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & y-x & y-x & y-x\\ 0 & y-x & z-x & z-x\\ 0 & y-x & z-x & t-x\end{pmatrix} \stackrel{\text{Def. } c_1}{=} x\det\begin{pmatrix} y-x & y-x & y-x\\ y-x & z-x & z-x\\ y-x & z-x & t-x\end{pmatrix} \text{Prop. det.}\\
&= x(y-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ y-x & z-x & z-x\\ y-x & z-x & t-x\end{pmatrix} \begin{matrix}(l_2\to l_2 - (y-x)l_1)\\ (l_3\to l_3 - (y-x)l_1)\end{matrix}\\
&= x(y-x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & z-y & z-y\\ 0 & z-y & t-y\end{pmatrix} \stackrel{\text{Def. } c_1}{=} x(y-x)\det\begin{pmatrix} z-y & z-y\\ z-y & t-y\end{pmatrix} \text{Prop. det.}\\
&= x(y-x)(z-y)\det\begin{pmatrix} 1 & 1\\ z-y & t-y\end{pmatrix} \quad (l_2\to l_2 - (z-y)l_1)\\
&= x(y-x)(z-y)\det\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & t-z\end{pmatrix}\\
&= x(y-x)(z-y)(t-z)
\end{aligned}
$$

Luego, de $(\star)$ sigue que,

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x(y-x)(z-y)(t-z)\neq 0\}$$

(5) Sea $A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A=-A^t$, es decir A es antisimétrica. Demuestre que

$$n \text{ impar } \Longrightarrow A\notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

Una Solución. Usando la información de antisimetría y las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A=-A^t &\Longrightarrow \det(A)=\det(-A^t)\\
&\stackrel{\text{Prop. det.}}{\Longrightarrow} \det(A)=(-1)^n\det(A^t) \quad ((-1) \text{ multiplica las } n \text{ filas de } A)\\
&\stackrel{\text{n impar}}{\Longrightarrow} \det(A)=-\det(A)\\
&\Longrightarrow 2\det(A)=0\\
&\Longrightarrow \det(A)=0\\
&\Longrightarrow A\notin\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))
\end{aligned}
$$

(6) Si $A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ tal que $A^2=A$ entonces determine $\det(A)$

Una Solución. Usando la información que $A^2=A$ y las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A^2=A &\Longrightarrow \det(A^2)=\det(A)\\
&\Longrightarrow (\det(A))^2=\det(A)\\
&\Longrightarrow (\det(A))^2-\det(A)=0\\
&\Longrightarrow \det(A)(\det(A)-1)=0
\end{aligned}
$$

Como, $A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces $\det(A)\neq 0$ y luego, $\det(A)=1$

4. Ejercicios Propuestos de Matrices y Determinantes

(1) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Demuestre que

$$A \text{ matriz diagonal } \wedge B \text{ matriz diagonal} \quad \Longrightarrow \quad AB = BA$$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Determine A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

(3) Si llamamos traza de una matriz a la función Tr definida por

$$\begin{array}{rcccl} Tr & : & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & (a_{ij}) & \longmapsto & Tr(a_{ij}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

entonces demuestre que

(a) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

(b) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$; $(\lambda \in \mathbb{R})$

(c) $Tr(AB) = Tr(BA)$

(4) Demuestre si es posible que

$$S \quad = \quad \{(A,B) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \times \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid AB - BA = I_2\} = \emptyset$$

(5) Demuestre si es posible que

$$A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \text{ tal que } A^2 = A \quad \Longrightarrow \quad (I_3 - 2A) = (I_3 - 2A)^{-1}$$

(6) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ entonces muestre que

(a) $A^2 - 2A + 5I_2 = 0$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I_2 - A))$

(7) Demuestre usando Inducción matemática que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

(8) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces muestre que

$$A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_n = (0) \quad \Longrightarrow \quad A^n = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de orden n y (0) es la matriz nula o cero de orden n.

(9) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Ciertamente debe justificar sus respuestas:

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

(b) $\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & x^2 & x^3 \\ z & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = 0$

(c) $\det\begin{pmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

(10) Muestre, si es posible, usando exclusivamente propiedades provenientes de la definición de determinante que:

(a) $\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = 0$

(b) $\det\begin{pmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+4 \end{pmatrix} = (a+4)(a^2-4)$

(c) $\det\begin{pmatrix} ax^2 & \frac{1}{a} & x \\ ay^2 & \frac{1}{a} & y \\ az^2 & \frac{1}{a} & z \end{pmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x), \quad a \neq 0$

(d) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$

(e) $\det\begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix} = (c-a)^2(d-b)^2$

(f) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6-7x & 2x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5+x \\ 0 & 0 & 1 & -3+x & 2+3x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1+x \end{pmatrix} = 1$

(11) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que para cada $(i = 1, 2, \dots n)$ y $(j = 1, 2, \dots n)$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & : \text{si } i \neq j \\ \frac{i+j}{ij} & : \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces calcule $\det(A)$

(12) Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces calcule usando propiedades:

- $\det(Adj(A))$
- $\det(A^{-1})$
- $\det(A \cdot A^{-1})$

(13) Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{I} \quad = \quad \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)\}$$

(b) Para $u \in \mathbb{I}$, (si $\mathbb{I} \neq \emptyset$), determine A^{-1}

(14) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tales que $\det(A) = 5$ y $\det(B) = 3$ entonces determine

(a) $\det(AB)$

(b) $\det(A^3)$

(c) $\det(3B)$

(d) $det(AB)^t$

(e) $\det(A^{-1})$

(15) Si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} = -1$ entonces calcule $\det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix}$

(16) Demuestre usando propiedades que

$$\det \begin{pmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} z & x & y \\ c & a & b \\ r & p & q \end{pmatrix}$$

(17) Demuestre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \tan\gamma \\ -\tan\gamma & \tan\beta & 1 \\ \tan\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

(18) Demuestre que

$$\det \begin{pmatrix} x+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & x+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & x+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & x+a^4 \end{pmatrix} = \frac{x^3(a(x+a^4) - (x+a))}{a-1}$$

(19) Si $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$ entonces

- Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

- Grafique el conjunto $\mathbb{S}$

(20) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(21) Si $A = \begin{pmatrix} (a-1) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (a-1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (a-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (a-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(22) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x-1 & -x-1 \\ 0 & 0 & x^2-4 & x+2 \\ 1 & -1 & x^2-x-3 & 2x+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_R(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

(23) Si $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ a-1 & a & a+1 & a+2 & a+3 \\ a-2 & a-1 & a & a+1 & a+2 \\ a-3 & a-2 & a-1 & a & a+1 \\ a-4 & a-3 & a-2 & a-1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5))\}$$

(24) Si $A = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & x & x \\ x & 1+x & x & x & x \\ x & x & 1+x & x & x \\ x & x & x & 1+x & x \\ x & x & x & x & 1+x \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5))\}$$

(25) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $X \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces demuestre que

$$\left.\begin{array}{c} A \cdot X = X \cdot A \\ \wedge \\ B \cdot X = X \cdot B \end{array}\right\} \Longrightarrow (A \cdot B) \cdot X = X \cdot (A \cdot B)$$

(26) Demuestre que

$$A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \text{ tal que } A^t = -A \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = (-1)^n \det(A)$$

(27) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces demuestre que

$$A = A^t \quad \Longrightarrow \quad Adj(A) = (Adj(A))^t$$

BUEN TRABAJO !!!