Guía de Ejercicios: Funciones

Área Matemática

Resultados de aprendizaje

Determinar dominio y recorrido de una función. Analizar funciones: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Determinar la función inversa. Componer funciones.

Contenidos

1. Dominio y Recorrido de una función.
2. Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.
3. Función inversa.
4. Composición de funciones.

Debo saber

Antes de empezar a realizar estos ejercicios es importante que recordemos algunos conceptos:

Función: Una función $f: A \to B$ es una relación en donde a cada elemento x perteneciente al conjunto A le corresponde un único elemento y del conjunto B.

Dominio: El dominio de una función f en $\mathbb{R}$ está formado por aquellos valores reales de x para los que se puede calcular la imagen $f(x)$. Se denota como $Dom\ f$.

Recorrido (o Rango): El recorrido de una función f en $\mathbb{R}$ es el conjunto de los valores reales que toma la variable y ó $f(x)$. Se denota como $Rec\ f$.

Función inyectiva (o uno a uno): La función $f: A \to B$ es inyectiva si y sólo si:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \ , \ \forall\ a, b \in A$$

Función sobreyectiva (o epiyectiva): La función $f: A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si:

$$\forall\ y \in B,\ \exists\ x \in A\ \ tal\ que\ f(x) = y$$

- La función $f: A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si *"todos los elementos del conjunto B son imagen de algún elemento de A"*.
- La función $f: A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $Rec(f) = B$

Función biyectiva: Una función f es biyectiva si es al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva.

Función inversa: Se llama función inversa de f a otra función f^{-1} que cumple que si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$

Solo es posible determinar la función inversa $f^{-1}: B \to A$, si y solo si $f: A \to B$ es biyectiva.

Composición de funciones: Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, donde la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la función composición $(g \circ f): A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todos los elementos x de A.

Logaritmo: El logaritmo de un número a en base b se define como el número x al que hay que elevar b para obtener el número a.

$$log_b\, a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Ejercicio 1

Dada la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{7}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}$, donde $\boldsymbol{f(x)} = \frac{2x-7}{7x+3}$ determine:

a) Si la función es biyectiva.
b) La inversa de ser posible.

Solución

a) Si $\boldsymbol{f}$ es biyectiva

Recordamos que una función es biyectiva si es al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva.

La función f es inyectiva si y sólo si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{7}\right\}$

$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \frac{2a-7}{7a+3} = \frac{2b-7}{7b+3}$	Por definición
$\Rightarrow (2a-7)(7b+3) = (2b-7)(7a+3)$	Multiplicando por inversos
$\Rightarrow \cancel{14ab} + 6a - 49b \cancel{-21} = \cancel{14ab} + 6b - 49a \cancel{-21}$	Por distributividad y reduciendo términos semejantes.
$\Rightarrow 6a + 49a = 6b + 49b$	Ordenando la ecuación
$\Rightarrow 55a = 55b$	Reduciendo términos semejantes
$\Rightarrow a = b$	Multiplicando por (1/55)

$$\therefore f \text{ es inyectiva}$$

La función f es sobreyectiva si y sólo si $\forall\, y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}$, $\exists\, x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{7}\right\}$ $tal\ que\ f(x) = y$

$f(x) = y \quad \Rightarrow \frac{2x-7}{7x+3} = y$	Por definición
$\Rightarrow\; 2x - 7 = y(7x+3)$	Multiplicando por (7x + 3)
$\Rightarrow\; 2x - 7 = 7xy + 3y$	Multiplicando distributivamente
$\Rightarrow\; 2x - 7xy = 3y + 7$	Ordenando la ecuación: $(-7xy)$; $(+7)$
$\Rightarrow\; x(2-7y) = 3y + 7$	Factorzando por término común "x"
$\Rightarrow\; x = \frac{3y+7}{2-7y} \quad (i)$	Despejando "x"

En donde, $2-7y \neq 0 \;\; \rightarrow \;\; y \neq \frac{2}{7}$.

Luego: $Rec\ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{7}\right\}$

$$\therefore f \text{ es sobreyectiva}$$

Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

c) La inversa de ser posible.

Como f es biyectiva, entonces es posible determinar f^{-1}

$x = \frac{3y+7}{2-7y}$	Considerando (i)
$\Rightarrow y = \frac{3x+7}{2-7x}$	Intercambiando variables, "x" por "y", e "y" por "x"
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{2-7x}$	Reemplazando y por $f^{-1}(x)$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{2-7x}$$

Ejercicio 2

Sea $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2} - \boldsymbol{log_2}(\mathbf{4} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})$

a) Determinar el dominio de la función
b) Determinar si $\boldsymbol{f}$ es inyectiva y si $\boldsymbol{f}$ es sobreyectiva
c) Encontrar la inversa de la función
d) Verificar que $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$
e) Calcular $\boldsymbol{f}(-\mathbf{6})$
f) Determinar el valor de $\boldsymbol{x}$ cuando $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{3}$

<u>Solución</u>

a) Dominio de la función

Como el argumento del logaritmo debe ser positivo, entonces $4-2x > 0$

$4-2x > 0$	Organizando la inecuación: $(+\,2x)$
$\Rightarrow 4 > 2x$	Multiplicando por (1/2)
$\Rightarrow x < 2$	

$$\therefore Dom\ f = \ ]-\infty, 2[$$

b) Si f es inyectiva

Sean $a, b \epsilon\ ]-\infty, 2[$, entonces:

$$
\begin{array}{lll}
f(a) = f(b) & \Rightarrow\ 2 - log_2(4-2a) = 2 - log_2(4-2b) & \text{Por definición} \\
& \Rightarrow\ \cancel{2} - log_2(4-2a) = \cancel{2} - log_2(4-2b) & \text{Ordenando la ecuación: } (-2) \\
& \Rightarrow\ - log_2(4-2a) = - log_2(4-2b) & \text{Multiplicando por (-1)} \\
& \Rightarrow\ log_2(4-2a) = log_2(4-2b) & \text{Igualando los argumentos} \\
& \Rightarrow\ \cancel{4} - 2a = \cancel{4} - 2b & \text{Ordenando la ecuación: } (-4) \\
& \Rightarrow\ 2a = 2b & \text{Multiplicando por (1/2)} \\
& \Rightarrow\ a = b &
\end{array}
$$

$\therefore f$ es inyectiva

Si f es sobreyectiva

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = y & \Rightarrow 2 - log_2(4-2x) = y & \text{Por definición} \\
& \Rightarrow log_2(4-2x) = 2 - y & \text{Ordenando la ecuación: } (-2) \\
& \Rightarrow 2^{2-y} = 4 - 2x & \text{Por definición de logaritmo} \\
& \Rightarrow x = \frac{4-2^{2-y}}{2} \quad (ii) & \text{Despejando "}x\text{"}
\end{array}
$$

En donde, $y \in \mathbb{R}$

$\therefore f$ es sobreyectiva

c) Inversa de la función

$x = \frac{4-2^{2-y}}{2}$ Considerando (ii)

$\Rightarrow\ y = \frac{4-2^{2-x}}{2}$ Intercambiando variables, "x" por "y", e "y" por "x".

(esto es un acomodo de la notación formal)

$\Rightarrow\ f^{-1}(x) = \frac{4-2^{2-x}}{2}$ Reemplazando y por $f^{-1}(x)$

$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{4-2^{2-x}}{2}$$

d) Verificar que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$$
\begin{array}{lll}
(f \circ f^{-1})(x) & = f(f^{-1}(x)) & \\
& = f\left(\frac{4-2^{2-x}}{2}\right) & \text{Por definición} \\
& = 2 - log_2\left(4 - 2 \cdot \frac{4-2^{2-x}}{2}\right) & \text{Evaluando } \left(\frac{4-2^{2-x}}{2}\right) \text{ en la función } f
\end{array}
$$

$$= 2 - log_2\left(4 - \cancel{2} \cdot \frac{4-2^{2-x}}{\cancel{2}}\right)$$ Simplificando

$$= 2 - log_2(4 - (4 - 2^{2-x}))$$ Eliminando paréntesis en el argumento

$$= 2 - log_2(\cancel{4} - \cancel{4} + 2^{2-x})$$ Reduciendo términos en el argumento

$$= 2 - log_2(2^{2-x})$$ Por definición y propiedad de logaritmo

$$= 2 - (2 - x)$$ Eliminando paréntesis

$$= \cancel{2} - \cancel{2} + x$$ Reduciendo términos semejantes

$$= x$$

$$\therefore f \circ f^{-1} = x$$

e) Calcular $\boldsymbol{f(-6)}$

$$f(-6) = 2 - log_2(4 - 2 \cdot (-6))$$ Reemplazando x por -6

$$= 2 - log_2(4 + 12)$$ Ordenando en el argumento

$$= 2 - log_2(16)$$ Calculando $log_2(16)$ resulta 4 porque $2^4 = 16$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

$$\therefore f(-6) = -2$$

f) El valor de x cuando $\boldsymbol{f(x) = -3}$

$$f(x) = 2 - log_2(4 - 2x)$$ Reemplazando $f(x)$ por -3

$$-3 = 2 - log_2(4 - 2x)$$ Ordenando la ecuación de tal forma que el logaritmo quede en un lado de la igualdad y positivo: $(+log_2(4 - 2x))$

$$log_2(4 - 2x) = 2 + 3$$

$$log_2(4 - 2x) = 5$$ Por definición de logaritmo

$$2^5 = 4 - 2x$$ Resolviendo la potencia $2^5 = 32$

$$32 = 4 - 2x$$

$$2x = 4 - 32$$ Despejando la incógnita "x"

$$x = -14$$

Ejercicio 3

Sea $\boldsymbol{f: A \to \mathbb{R}; f \circ g: B \to \mathbb{R}}$, donde $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+1}}$ y $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = \sqrt{x(x-3)}}$. Determine $\boldsymbol{g(x)}$ y su dominio.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= \sqrt{g(x) + 1} \quad (iii)$$

Como $(f \circ g)(x) = \sqrt{x(x-3)}$ (iv)

Luego, igualando (iii) y (iv) se tiene:

$\sqrt{g(x)+1} = \sqrt{x(x-3)}$	Elevando al cuadrado en ambos lados de la igualdad.
$g(x)+1 = x(x-3)$	Multiplicando distributivamente para eliminar paréntesis.
$g(x)+1 = x^2-3x$	Despejando $g(x)$
$g(x) = x^2-3x-1$	

Como la función $g(x)$ no tiene restricciones para x, entonces el $Dom\ g = \mathbb{R}$

Ejercicio 4

Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x-1}{x+3}$. Determine su dominio, si es biyectiva y su inversa si es que existe.

Solución

a) Dominio de la función

Para que la función racional $f(x) = \frac{3x-1}{x+3}$ no se indetermine debe cumplir que:

$$x+3 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -3$$

$$\therefore Dom\ f = \mathbb{R} - \{-\mathbf{3}\} \quad (v)$$

b) Si f es biyectiva

Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{-3\}$, entonces:

$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \frac{3a-1}{a+3} = \frac{3b-1}{b+3}$

$\Rightarrow\ (3a-1)(b+3) = (3b-1)(a+3)$	Multiplicando por inversos
$\Rightarrow\ \cancel{3ab} + 9a - b \cancel{-3} = \cancel{3ab} + 9b - a \cancel{-3}$	Ordenando: $(-3ab)$; $(+3)$
$\Rightarrow\ 9a + a = 9b + b$	Reduciendo términos semejantes
$\Rightarrow\ 10a = 10b$	Multiplicando por $\frac{1}{10}$
$\Rightarrow\ a = b$	

$$\therefore f \text{ es inyectiva}$$

Por otro lado,

$f(x) = y \quad \Rightarrow\ y = \frac{3x-1}{x+3}$	Por definición, y multiplicando por $(x+3)$
$\Rightarrow\ y(x+3) = 3x-1$	Multiplicando distributivamente
$\Rightarrow\ yx + 3y = 3x - 1$	Ordenando la ecuación: $(-3y)$; $(-3x)$
$\Rightarrow\ yx - 3x = -3y - 1$	Factorizando por el término común "x"
$\Rightarrow\ x(y-3) = -3y - 1$	Despejando "x": multiplicando por $\frac{1}{y-3}$

$$\Rightarrow \; x = \frac{-3y-1}{y-3}$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{3y+1}{3-y} \; (vi), \quad \text{donde } 3-y \neq 0, \text{ entonces } y \neq 3$$

Por lo tanto, $y \in \mathbb{R} - \{\mathbf{3}\}$. (vii)
Y como la función está definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\therefore f$ no es epiyectiva.

Luego, f no es biyectiva.

c) Función inversa, si es que existe

Como f no es biyectiva, luego en estricto rigor f^{-1} no existe.

Si de igual forma queremos construir f^{-1} , debemos hacer algunas aclaraciones:

- Considerando (v) y (vii) podemos redefinir la función para que ahora sea biyectiva.

  Luego: $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

- Como ahora f es biyectiva, entonces existe la función inversa f^{-1}.

$x = \frac{3y+1}{3-y}$	Considerando (vi)
$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{3-x}$	Intercambiando variables, "x" por "y", e "y" por "x"
	(esto es un acomodo de la notación formal)
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{3-x}$	Reemplazando y por $f^{-1}(x)$

$$\therefore \; f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{3-x}$$

Ejercicio 5

Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$. Determine su dominio y recorrido.

<u>Solución</u>

a) Dominio de la función

El racional $\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ se indetermina cuando el denominador es cero, por lo tanto: $\sqrt{9-4x^2} \neq 0$

Pero, como es raíz cuadrada, $9-4x^2 \geq 0$

Entonces, considerando ambas restricciones, se tiene que:

$$9 - 4x^2 > 0$$
$$\Rightarrow (3-2x)(3+2x) > 0 \qquad \text{Factorizando por diferencia de cuadrados (suma por diferencia)}$$

Identificando puntos críticos, al despejar x en ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3-2x &= 0 \\ 3 &= 2x \\ x &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3+2x &= 0 \\ 3 &= -2x \\ x &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

	$-\infty$ a $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ a $+\infty$
$(3-2x)$	$+$	$+$	$-$
$(3+2x)$	$-$	$+$	$+$
$(3-2x)(3+2x)$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore Dom\ f = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$$

b) **Recorrido de la función**

$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad & \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} && \text{Multiplicando por } \sqrt{9-4x^2} \\
& \Rightarrow \quad y\sqrt{9-4x^2} = 1 && \text{Elevando al cuadrado} \\
& \Rightarrow \quad \left(y\sqrt{9-4x^2}\right)^2 = 1^2 && \\
& \Rightarrow \quad y^2(9-4x^2) = 1 && \text{Multiplicando distributivamente} \\
& \Rightarrow \quad 9y^2 - 4x^2y^2 = 1 && \text{Ordenando: } (+4x^2y^2) \\
& \Rightarrow \quad 9y^2 - 1 = 4x^2y^2 && \text{Multiplicando por } \tfrac{1}{4y^2} \\
& \Rightarrow \quad \frac{9y^2-1}{4y^2} = x^2 && \\
& \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9y^2-1}{4y^2}} && \text{Despejando “}x\text{”} \\
& \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{9y^2-1}}{\sqrt{4y^2}} && \text{Calculando la raíz cuadrada del denominador} \\
& \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{9y^2-1}}{2y} \quad (viii) && \text{En donde } y \neq 0
\end{aligned}$$

Como $9y^2 - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (3y-1)(3y+1) \geq 0$

Identificando puntos críticos, al despejar y en ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3y-1 &= 0 \\ 3y &= 1 \\ y &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3y+1 &= 0 \\ 3y &= -1 \\ y &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

	$-\infty$ | $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ | $+\infty$
$(3y-1)$	$-$	$-$	$+$
$(3y+1)$	$-$	$+$	$+$
$(3y-1)(3y+1)$	$+$	$-$	$+$

Según lo anterior, podríamos suponer que el $Rec\ f = \left]-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3},+\infty\right[$, pero:

Si reemplazamos en $(viii)$ valores pertenecientes al $Dom\ f = \left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[$, como por ejemplo $x=-1$ y $x=1$, resulta:

- Para $x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{9-4(-1)^2}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{9-4\cdot 1}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y \approx 0{,}447$
- Para $x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{9-4(1)^2}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{9-4\cdot 1}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y \approx 0{,}447$

Por lo que los valores de y obtenidos solo pertenecen al intervalo $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

$$\therefore\ Rec\ f = \left[\frac{1}{3},+\infty\right[$$