Tutoría 6 - 2/2021:

Cachorr@404

Álgebra 2: Ejercicios

CACHORR@ 404

Tutores para esta sesión

Constanza Palomo

constanza.palomo@usach.cl

Bastián Onetto

bastian.onetto@usach.cl

Bastian Loyola

bastian.loyola@usach.cl

Temario

Speedrun

1

Ejercicios

2

Más Ejercicios

3

Ejercicios

Ejercicio 1

Ejercicio (5) Matrices y Determinantes

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 5 & 1 \\ a-2 & 2-2a & -5a & -1 \\ 2-a & a-1 & 1+4a & 2 \\ a-2 & 1-a & -5 & a-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ determine los conjuntos.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 1\} \\ \mathbb{S}_2 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 2\} \\ \mathbb{S}_3 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 3\} \\ \mathbb{S}_4 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 4\} \end{aligned}$$

Ejercicio (5) Matrices y Determinantes

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 5 & 1 \\ a-2 & 2-2a & -5a & -1 \\ 2-a & a-1 & 1+4a & 2 \\ a-2 & 1-a & -5 & a-1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{\mathbb{R}}(4)$ determine los conjuntos.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_1 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 1\} \\ \mathrm{S}_2 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 2\} \\ \mathrm{S}_3 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 3\} \\ \mathrm{S}_4 &= \{a \in \mathbb{R} \mid \rho(A) = 4\} \end{aligned}$$

$F_2 = F_2 + F_1$

$F_3 = F_3 - F_1$

$F_4 = F_4 + F_1$

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 5 & 1 \\ 0 & 2-2a+a-1 & -5a+5 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1+4a-5 & 2-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 5 & 1 \\ 0 & 1-a & 5(1-a) & 0 \\ 0 & 0 & 4(a-1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$S_4 : \rho(A) = 4$

$\left.\begin{array}{l} a \neq 2 \\ a \neq 1 \\ a \neq 0 \end{array}\right\} a \in \mathbb{R} - \{0,1,2\}$

$S_3 : \rho(A) = 3$

$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{array}\right\} a = 0$

$S_3 = 0$

$S_2 : \rho(A) = 2$

$\left.\begin{array}{l} a \neq 2 \\ a \neq 0 \end{array}\right\} a = 1$

$S_3 = 1$

$S_1 : \rho(A) = 2$

$a \notin \emptyset$

$S_1 = \emptyset$

CACHORR@ 404

Ejercicio 2

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(4)$ y $\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin U(M_{\mathbb{R}}(4))\}$ entonces

[a] Demuestre que $\mathbb{S} \neq \emptyset$

[b] Determine explícitamente $\mathbb{S}$

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(4)$ y $S = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin U(M_{\mathbb{R}}(4))\}$ entonces

[a] Demuestre que $S \neq \emptyset$

[b] Determine explícitamente S

$U(M_{\mathbb{R}}(4)) \Rightarrow \det \neq 0$

$A \notin U(M_{\mathbb{R}}(4)) \Rightarrow \det(A) = 0$

a) $S \neq \emptyset$

* Existe propiedad que dice: $F_a = F_b \Rightarrow \det = 0$

$C_a = C_b \Rightarrow \det = 0$

$$\Rightarrow a \in S \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \wedge A \notin U(M_{\mathbb{R}}(4)) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0$$

$$a \in S \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \det(A) = 0$$

$$\Rightarrow S \neq \emptyset$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 3

(1) Dadas las matrices $A \in M_{\mathbb{R}}(3)$ y $B \in M_{\mathbb{R}}(3)$ tal que satisfacen las propiedades:

(a) $A = B + C$
(b) $C^2 = (0)$,(donde (0) es la matriz nula)
(c) $BC = CB$, (es decir ambas matrices conmutan)

entonces demuestre que

$$A^4 = B^3(B + 4C)$$

Sol:

$$A = B + C$$

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A \to \text{producto}$$

$$= (B+C)\cdot(B+C)\cdot(B+C)\cdot(B+C) \to (A = B+C)$$

$$= (B+C)^2 \cdot (B+C)^2 \to \text{producto}$$

$$= (B^2+2BC+C^2)\cdot(B^2+2BC+C^2) \to \text{binomio}$$

$$= (B^2+2BC+0)\cdot(B^2+2BC+0) \to C^2 = (0)$$

$$= (B^2+2BC)\cdot(B^2+2BC) \quad 0 \to \text{producto}$$

$$= B^4 + 2B^3C + 2B^3\cdot C + \cancel{4B^2}\boxed{C^2} \to C^2 = (0)$$

$$= B^4 + 4B^3C \longrightarrow \text{reducir (sumar)}$$

$$= B^3(B+4C) \to \text{factorizar}$$

$$A^4 = B^3(B+4C)$$

CACHORR@ 404

Ejercicio 4

- Si consideramos la matriz A definida por

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 & 32 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 & 32 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & x+32 \end{pmatrix}$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5))\}$$

Determine el conjunto

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid A \in U(M_{\mathbb{R}}(5))\}$

$$\boxed{\det \neq 0}$$

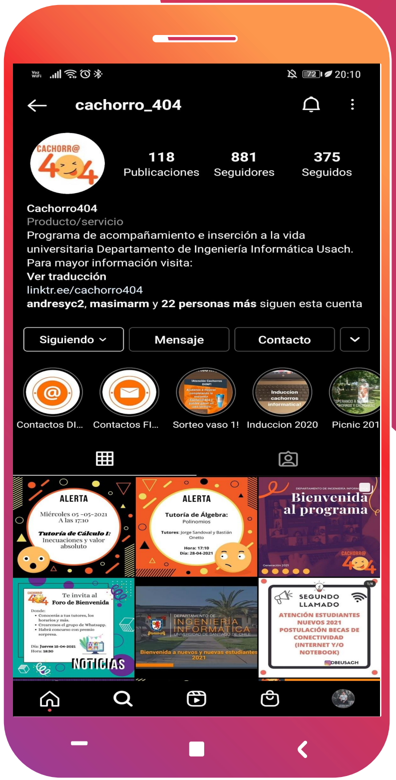
$$|A| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 & 32 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 & 32 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & x+32 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} f_1 \to f_1 - f_5 \\ f_2 \to f_2 - f_5 \\ f_3 \to f_3 - f_5 \\ f_4 \to f_4 - f_5 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & x & -x \\ 2 & 4 & 8 & 16 & x+32 \end{vmatrix}$$

$$= x^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & x+32 \end{vmatrix} \quad f_5 \to f_5 - 2f_1 \quad = x^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 16 & x+34 \end{vmatrix} \quad f_5 \to f_5 - 4f_2 \quad = x^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & x+34 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} f_5 \to f_5 - 8f_3 \\ f_5 \to f_5 - 16f_4 \end{matrix} \quad = x^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+62 \end{vmatrix} = x^4 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (x+62))$$

$$= \boxed{x^4 (x+62)}$$

$$x^4 (x+62) \neq 0$$



Síguenos en instagram!

@cachorro404

CACHORR@ 404

¡Gracias por asistir!