Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C

Cálculo I
Pauta - Pep 1.A
Martes 27 de septiembre de 2022

1. Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{2-|2-x|}{1-x^2} \leq 0$$

(2 Puntos)

Solución:
Primero, establecemos las restricciones que presenta esta inecuación, estas son:

$$x \neq -1,\ x \neq 1.$$

Ahora, analizaremos 3 casos: $x < -1,\ -1 < x < 1$, y $1 < x$.

- **Caso 1:** $x < -1$
  Es claro que si $x < -1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{2-|2-x|}{1-x^2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2-|2-x| \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -|2-x| \geq -2 \quad \big/ \cdot -1 \\ \Leftrightarrow \quad & |2-x| \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \leq 2-x \leq 2 \quad \big/ -2 \\ \Leftrightarrow \quad & -4 \leq -x \leq 0 \quad \big/ \cdot -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \geq x \geq 0 \end{aligned}$$

  Intersectando esta solución con los x considerados en el caso 1, tenemos que la solución $S_1 = \phi$.

- **Caso 2:** $-1 < x < 1$
  Es claro que si $-1 < x < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{2-|2-x|}{1-x^2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2-|2-x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -|2-x| \leq -2 \quad \big/ \cdot -1 \\ \Leftrightarrow \quad & |2-x| \geq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2-x \leq -2 \ \vee \ 2 \leq 2-x \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \leq x \ \vee x \leq 0 \end{aligned}$$

Intersectando esta solución con los x considerados en el caso 2, tenemos que la solución $S_2 =]-1, 0]$.

- **Caso 3:** $1 < x$
Es claro que si $1 < x \Rightarrow 1 - x^2 < 0$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} & \dfrac{2-|2-x|}{1-x^2} \leq 0 & \\ \Leftrightarrow & 2-|2-x| \geq 0 & \\ \Leftrightarrow & -|2-x| \geq -2 & \big/ \cdot -1 \\ \Leftrightarrow & |2-x| \leq 2 & \\ \Leftrightarrow & -2 \leq 2-x \leq 2 & \big/ -2 \\ \Leftrightarrow & -4 \leq -x \leq 0 & \big/ \cdot -1 \\ \Leftrightarrow & 4 \geq x \geq 0 & \end{array}$$

Intersectando esta solución con los x considerados en el caso 3, tenemos que la solución $S_3 =]1, 4]$.
Finalmente, tenemos que la solución final (S_f) de esta inecuación es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-1, 0] \cup]1, 4]$$

2. Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que la parábola de ecuación $y = kx^2 + 6x + 3$ y la recta de ecuación $y = 2kx - 1$ **se intersecten en dos puntos**. **(2 Puntos)**

Solución:

Para hallar los valores de x en que se intersectan la parábola con la recta, primero igualamos sus expresiones

$$kx^2 + 6x + 3 = 2kx - 1$$

Despejando, vemos que esta igualdad es equivalente a la siguiente ecuación cuadrática

$$kx^2 + (6 - 2k)x + 4 = 0.$$

Ahora, que la intersección entre la parábola y la recta se produzca en dos puntos es equivalente a que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones y esto se tendrá cuando su discriminante

$$\triangle > 0.$$

Para esta ecuación

$$\begin{aligned} \triangle = (6-2k)^2 - 4k(4) &> 0 \\ 36 - 24k + 4k^2 - 16k &> 0 \\ 4k^2 - 40k + 36 &> 0 \\ 4(k^2 - 10k + 9) &> 0 \\ 4(k-1)(k-9) &> 0 \end{aligned}$$

La solución de esta última inecuación es $k \in]-\infty, 1[\cup]9, \infty[$. Por otra parte, es evidente que $k \neq 0$, por lo tanto, la parábola se intersectará con la recta en dos puntos cuando $k \in] - \infty, 0[\cup]0, 1[\cup]9, \infty[$.

3. Considere la función $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -\sqrt{2-\sqrt{-1-2x}}.$$

a) Encontrar el conjunto $A = \mathrm{Dom}(f)$. **(0.7 Puntos)**

b) Determine si f es creciente o decreciente. **(0.7 Puntos)**

c) Determine $\mathrm{Rec}(f)$ **(0.6 Puntos)**

Solución:

a) Claramente el dominio de esta función está dado por el conjunto

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/ -1-2x \geq 0 \ \wedge \ 2-\sqrt{-1-2x} \geq 0\}$$

es decir

$$\begin{aligned}
-1-2x \geq 0 \quad &\wedge \quad 2-\sqrt{-1-2x} \geq 0 \\
-1 \geq 2x \quad &\wedge \quad 2 \geq \sqrt{-1-2x} \ /()^2 \\
-\frac{1}{2} \geq x \quad &\wedge \quad 4 \geq -1-2x \\
-\frac{1}{2} \geq x \quad &\wedge \quad 2x \geq -5 \\
-\frac{1}{2} \geq x \quad &\wedge \quad x \geq -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(f) = \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

b) Sean $a,\ b\ \in \mathrm{Dom}(f)$ con $a < b$, es decir $-\frac{5}{2} \leq a < b \leq \frac{1}{2}$. Se tiene lo siguiente

$$\begin{array}{rcll}
a & < & b & / \cdot (-2) \\
-2a & > & -2b & / -1 \\
-1-2a & > & -1-2b & /\sqrt{\ } \\
\sqrt{-1-2a} & > & \sqrt{-1-2b} & / \cdot (-1) \\
-\sqrt{-1-2a} & < & -\sqrt{-1-2b} & /(+2) \\
2-\sqrt{-1-2a} & < & 2-\sqrt{-1-2b} & /\sqrt{\ } \\
\sqrt{2-\sqrt{-1-2a}} & < & \sqrt{2-\sqrt{-1-2b}} & / \cdot (-1) \\
-\sqrt{2-\sqrt{-1-2a}} & > & -\sqrt{2-\sqrt{-1-2b}} & \\
f(a) & > & f(b) &
\end{array}$$

Por lo tanto, la función f es decreciente.

c) Del hecho que la función f es decreciente podemos deducir que

$$Rec(f) = [f(-1/2), f(-5/2)] = [-\sqrt{2}, 0]$$