Druhá domáca úloha

Skupina 9

Dominik Eliaš
Jaromír Hradil
Martin Chládek
Jakub Konetzny
Peter Krutý

1. **(1 bod)** Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \cap B \cap C) \cup (A \setminus B).$$

V případě kladné odpovědi proveďte důkaz, v případě záporné odpovědi najděte kontrapříklad.

1.) $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{1, 4, 5\}$

$A - (B - C) = \{1\}$ $\quad$ $(\overset{\emptyset}{A \cap B \cap C}) \cup (\overset{1}{A - B}) = \{1\}$

$L = P$ ✓

2.) (1.) Dôkaz prvej inklúzie

$x \in A - (B - C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B - C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge ((x \notin B \vee x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee (x \in C \wedge x \in B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap B \cap C) \cup (A - B)$

(2.) Dôkaz druhej inklúzie

$x \in (A \cap B \cap C) \cup (A - B) \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$

$\Rightarrow x \in A \wedge ((x \in B \wedge x \in C) \vee (x \notin B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge ((x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in C)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (B - C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A - (B - C)$

2. **(1 bod)** Na množine $M = \{0, a, b, c, d, 1\}$ je dána operace $\circ$ následovně:

$\circ$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	b	c	0	1
a	0	0	b	c	a	1
b	b	b	b	c	b	1
c	c	c	c	1	c	1
d	0	a	b	c	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Je $(M, \circ)$ pologrupa? Svoje tvrzení zduvodněte.

3. **(1 bod)** Na množině $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ je dán rozklad $\mathcal{S}$ následovně:

$$\mathcal{S} = \{\{a, e, g\}, \{b, c, d\}, \{f\}\}.$$

- Určete relaci ekvivalence R, která je dána rozkladem $\mathcal{S}$.
- Na množině A určete operaci $\circ$ tak, aby R byla relací kongruence na A vzhledem k nalezené operaci $\circ$.

$R = \{(a,a); (e,e); (g,g); (b,b); (c,c); (d,d); (f,f);$
$(a,e); (a,g); (e,a); (e,g); (g,a); (g,e); (b,c); (b,d);$
$(c,b); (c,d); (d,b); (d,c)\}$

$X/_R = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{f}\}$ -> Faktorová množina

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{f}$
e	c	
g	d	

	a	b	f
a	a	a	f
b	a	b	f
f	f	f	f

∘	a	b	c	d	e	f	g
a	e	e	e	g	a	f	g
b	a	c	c	b	a	f	a
c	g	b	d	d	e	f	e
d	e	d	b	c	e	f	e
e	g	e	a	g	g	f	e
f	f	f	f	f	f	f	g
g	a	e	g	a	a	a	g

4. **(1 bod)** Pomocí metody Karnaughovy mapy minimalizujte funkci:
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$

Počet políčok Karnaughovej mapy $= 2^4 = 16$

0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	0
0	1	0	0

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2x_3$

5. **(1 bod)** Dokažte, že platí:

$$2^{n+2} > 2n + 5\,, \quad n \geq 1$$

1.) $n = 1 \quad 8 > 7$

2.) $(n+1)$

$$2^{(n+1)+2} > 2(n+1) + 5 \qquad 2^{(n+1)+2} = 2^{n+2} \cdot 2^1$$

$$2^{n+2} \cdot 2^1 > 2n + 5 \cdot 2^1$$

Ak bude platiť nasledujúca nerovnosť dôkaz je dokázaný

$$2n + 5 \cdot 2^1 > 2(n+1) + 5$$

$$\cancel{2n} + 10 > \cancel{2n} + 7$$

$$10 > 7$$

ČBTD

$$\left(\underline{2^{(n+1)+2} = 2^{n+2} \cdot 2^1} > \underline{2n + 5 \cdot 2^1} > \underline{2(n+1) + 5}\right)$$