一类称球问题的解法

长沙雅礼中学 何林

关键字

判定树 三分 均匀

摘要

本文对一类天平称球问题提出了完整、严谨的解法，在此基础上总结了研究过程中的一些心得和方法。

引言

有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，你有一架天平。现在要称出哪个次品来。

问题 1 已知次品的重量比其他的要重一些。

问题 2 不知道次品的重量。

问题 3 不知道次品的重量。不仅要求出次品，还要求次品的轻重。

问题 4 不知道次品的重量，要求次品和次品的轻重。另外你手里还得到了一个标准球。

面对这一系列类似的问题，我们该从何入手？

简单问题的分析

先来考虑最简单的问题 1。为了方便叙述，把 n 个球按 1,2,…,n 顺次编号。

若 n=3，把一号球放在天平左边、二号球放在天平右边。如果天平：

1、左偏，一号重，是次品。

2、右偏，二号重，是次品。

3、保持平衡，那么一、二都是正常的球，因此就只有可能三号球是次品了。

因此 n=3，至多一次就能称出哪个是次品。记作 f(3)=1。

下面考虑 n=9。把所有的球分成三组：A{1,2,3},B{4,5,6},C{7,8,9}。A 组的球放在左边、B 组放在右边。如果天平：

1、左偏，则次品在 A 组里面。

2、右偏，则次品在 B 组里面。

3、保持平衡，次品在 C 组里面。

无论在哪个组里面，我们已经把次品的范围从“9”缩小到了“3”，也就是减少到原来的 1/3。之前我们已经研究过，3 个球 1 次就能称出来，故而 f(9)=2。

不难推广到一般的情况：

定理 1.1 $f(3^n)=n$。

证明：n=1,2 时，已证。设 n=k 成立，则 $f(3^k)=k$；下面考虑 n=k+1 的情况。

将 3^{k+1} 个球分成三堆 A, B, C，使得 $|A|=|B|=|C|=3^k$。把 A 放在天平左边、B 放在右边，天平：

1、左偏，次品在 A

2、右偏，次品在 B

3、平衡，次品在 C

无论哪种结果，我们都把次品的范围缩小到了 3^k 个球里面。而 $f(3^k)=k$，故而 $f(3^{k+1})=k+1$。

综上，定理 1.1 成立。

稍经分析不难得到：

定理 1.2 $f(n)=\lceil \log_3 n \rceil$

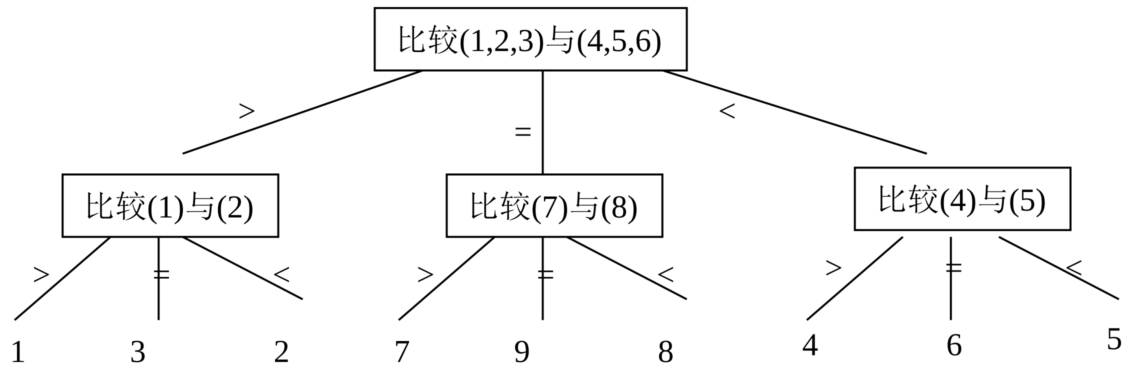
这个的证明和定理 1.1 完全类似，分 n mod 3 = 0, 1, 2 适当讨论即可。

我们必须注意到 $\lceil \log_3 n \rceil$ 是可行的，因为我们能够构造出这样一个方案。问题是它是否最优？

我们采取的方案是每次将球尽量均匀的三分，这样做的根据就是天平只有三种结果：左偏、右偏、平衡。于是就能保证无论次品在哪一份都能将结果的范围缩小到原来的 1/3。从感性上认识，$\lceil \log_3 n \rceil$ 应该就是最优解了。

为了更加严格的证明 $\lceil \log_3 n \rceil$ 的最优性，我们引进判定树的概念。

下图就是 n=9 时的一种判定树：



此题的判定树是这样一棵树：

1、叶子节点代表一种可能的结果。

2、非叶子节点代表一次称量。

3、非叶子节点至多有三个儿子，分别代表天平的左偏、右偏、平衡三种情

况。

任意一种称量方案都能唯一的表示成一棵判定树；反过来一棵判定树也唯一对应一种称量方案。

容易看出判定树的深度就是称量次数。这就是我们之所以引进它的原因。

做出判断之前，谁也无法预知哪个球是次品，每个都有可能是我们的目标；因此一个有意义的判定树应该具有至少 n 个叶子节点。

n 个叶子节点的树的深度 h ≥ $\lceil \log_3 n \rceil$，故而可以证明，f(n)= $\lceil \log_3 n \rceil$是最优的。

至此完整的解决了问题 1。

我们的结论是：有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量比其他的要重一些。给一架天平，至少称$\lceil \log_3 n \rceil$次，就能找出那个次品。

具体的方案是将球每次都尽量均匀的三分。（详见上文）

让我们总结一下。

“三分”是整个算法的核心。我们选择三分，而不是二分或者四分是有原因的，它的本质是由判定树的特殊结构——三叉树——所决定的。

同时还必须注意一点，我们在三分的时候有两个字很讲究：“均匀”。实际上 h ≥ $\lceil \log_3 n \rceil$中的“=”当且仅当球被均匀的分配时才能达到。

这里说的“均匀”是指“在最坏情况下获得最好的效果”。因为一棵树的深度是由它根节点儿子中深度最大的儿子决定的，为了使得整个树深度最小，我们就要务必使得深度最大的儿子深度最小，这就是“均匀”分配的理论根据。

或许你觉得这些总结是显然的、多余的废话。面对一个简单的问题，你当然能够游刃有余，也不需要提炼出什么经验、方法；可是当问题被复杂化、隐蔽化，你还能如此得心应手吗？

称球问题的拓展

一、 问题的提出与初步分析

问题 4 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，已知：

1、次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。

2、你有一架天平和**一个标准球**

问至少要称多少次，才能找出那个次品，并且知道次品是轻还是重？

我们很自然的联想到问题 1，试着应用三分。

把 n 个球分成三堆，第一堆放在天平左边、第二堆放在天平右边。

天平平衡，毫无疑问，次品在第三堆中；但问题是如果天平发生了偏移，既可能第一堆中混入了一个重球、也可能第二堆中混入了一个轻球。我们根本无法

准确地判断次品具体在哪堆中。

问题 4 较之问题 1 最大的困难就在于不知道次品的轻重，因此一次称量之后根本无法马上将次品缩小到理想的范围。

因此经过一次称量，如果天平不平衡，问题就被转化为一个新的结构，我们将其归纳、强化成如下引理：

引理 有两堆球，第一堆有 n 个、第二堆有 m 个，其中有一个是次品。并且次品如果在第一堆中只可能是重球、在第二堆中只可能是轻球。只要称 $\lceil \log_3(n+m) \rceil$ 次就可以找到次品。

（这是一条重要结论，之后会反复引用，请注意）

为了解决问题 4，我们先探讨这个引理的证明。

二、 引理的证明

总共 n+m 个球，每个球都可能是次品，所以判定树有 n+m 个叶子节点。于是判定树的深度 h >= $\lceil \log_3(n+m) \rceil$，由此可知 $\lceil \log_3(n+m) \rceil$ 是一个最优的界。

下面我们通过归纳构造，证明这个界是可以达到的。

达到最优界必需且仅需满足一条原则：均匀分配叶子节点。

为了方便叙述，约定：

1、S 表示标准球。

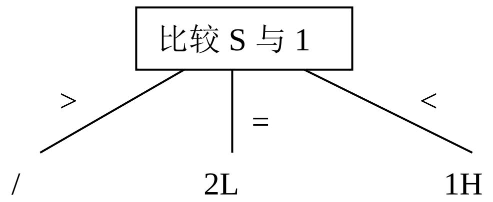
2、nH 表示第 n 个球是重球

3、nL 表示第 n 个球是轻球

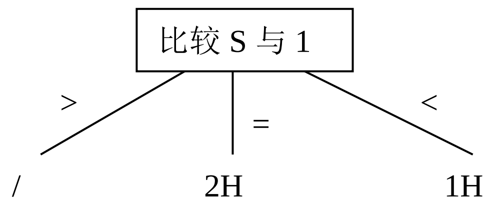
4、<A,B>表示将集合 A 中的球放在天平左边，集合 B 中的球放在天平右边的称量结果。<A,B>=Left、Right 或者 Middle，分别表示左偏、右偏和平衡。

用归纳法证明，归纳 n+m。

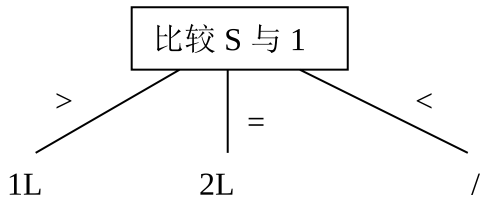
n+m=2。如果 n=m=1，根据题设只有可能是 1H, 2L。判定树如下：



如果 n=2, m=0，只有可能是 1H、2H，判定树如下：



若 n=0, m=2，只有可能是 1L、2L，判定树如下



无论 n, m 如何取值，均只需要 1 次称量即可。而$\lceil \log_3(n+m) \rceil$=1，因此 n+m=2 时引理成立。

假设 n+m<k（k≥3）时引理成立，下证 n+m=k 时也成立。

k=n+m，按照 n, m 除以 3 的余数来讨论。

情况一：n=3p, m=3q

将第一堆 n 个球均分成三堆：A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p。（这里前 a 个球地位完全相等，因此只要知道每一堆的球数即可，至于具体每堆球的编号则不是我们所关心的）

第二堆 b 个球也均分成三堆：A’, B’, C’，使得|A’|=|B’|=|C’|=q。

根据题设次品在 A, B, C 中只有可能是重球；在 A’, B’, C’中只有可能是轻球。

称<A+A’, B+B’>，若：

1、<A+A’, B+B’>=Middle。次品在 C 或者 C’中，问题归结到 p+q 时的引理。

2、<A+A’, B+B’>=Left。由于次品在 A’中只有可能是轻球、在 B 中只有可能是重球，所以次品必不在这两者中。可以把范围缩小到 A 和 B’中，问题又归结到 p+q 时的引理。

3、<A+A’, B+B’>=Right。类似于 2，可以把次品的范围缩小到 A’和 B 中，问题也归结到 p+q 时的引理。

无论如何，一次称量后都可以把问题归结到 p+q 时的引理。根据归纳假设还要称$\lceil \log_3(p+q) \rceil$次。所以原问题总共称$\lceil \log_3(p+q) \rceil$+1=$\lceil \log_3(n+m) \rceil$次即可。

于是情况一引理成立。

情况二：n=3p+1, m=3q+2。

将第一堆 n 球分成三堆 A, B, C，使得 |A|=p, |B|=p, |C|=p+1。

第二堆 m 个球也分成三堆 A’, B’, C’，使得|A’|=q+1, |B’|=q+1, |C’|=q。

称<A+A’, B+B’>，根据天平偏移的情况做出适当的判断即可。此不赘述。

我们之所以把 A+A’, B+B’, C+C’分别作为一组，就是因为：

1.天平左偏，次品只有可能在 A, B’中，有 p+q+1 种可能的结果。

2.天平右偏，次品只有可能在 A’, B 中，有 p+q+1 种可能的结果。

3.天平平衡，次品只有可能在 C, C’中，有 p+q+1 种可能的结果。

也就是说无论天平怎么偏，我们总可以把原来的 n+m=3(p+q)+3 种可能的结果，缩减到 p+q+1 种；换一个角度看，也就是把 3(p+q)+3 个叶子节点分摊到三棵子树上，每棵分摊到的节点个数都是 p+q+1！这是是准确意义上的均匀，保证了在最坏的情况下也能得到最好的结果。

总之无论你怎么分，只要保证了“均匀”，就是一种可行的方案。所谓的均匀就是“最坏的情况下的结果达到最优”。

另外还有四种情况（见下表）都可以按照以上的方法类似证明，结构完全相同，关键是抓着“均匀”的原则不放。下表是这几种情况的具体划分方法：

	a 的划分，三个数依次代表|A|, |B|,|C|	b 的划分，三个数依次代表|A’|, |B’|,|C’|
n=3p, m=3q+1	p, p, p	q, q, q+1
n=3p, m=3q-1	p, p, p	q, q, q-1
n=3p+1, m=3q+1	p, p+1, p	q+1, q, q
n=3p+1, m=3q+2	p, p, p+1	q+1, q+1, q

需要特别说明的是，这里的均分的是“可能的结果”（即判定树的叶子节点），而不是单纯的均分球。

综上，对于任意的自然数 n, m(n+m>=2)，引理成立！

三、 问题 4 的解决

回顾一下问题 4。

问题 4 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，已知：

1、次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。

2、你有一架天平和**一个标准球**

问至少要称多少次，才能找出那个次品，并且知道次品是轻还是重？

问题 1 中每个球都有可能是次品，所以有 n 个叶子节点；我们必须注意到问题 4 不仅每个球都有可能是次品，而且次品还有两种情况：轻或者重！所以本题实际上有 2n 种不同的可能结果，而不是 n 种。

所以此问题的判定树至少要有 2n 个叶子节点，它的深度 h ≥ $\lceil \log_3 2n \rceil$。

比如 n=3，有如下 6 种结果：

1、1 号是次品，且比标准求重。记作 1H（H 是 heavy 的缩写）

2、2H

3、3H

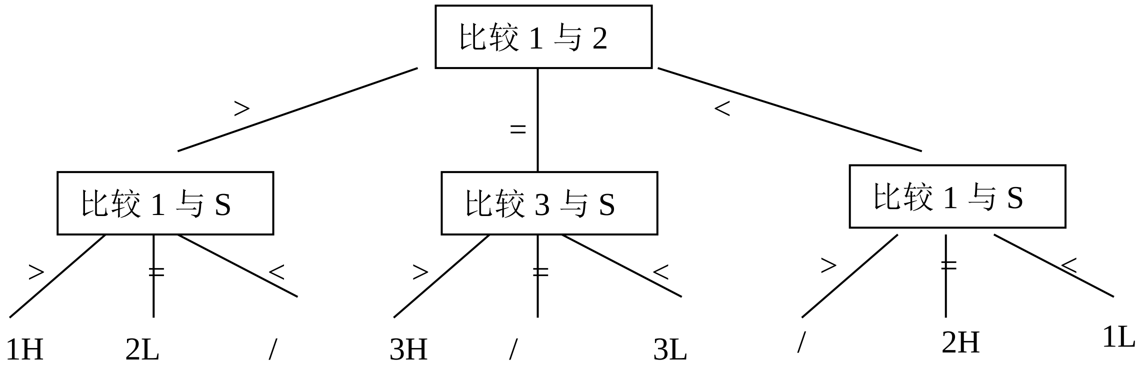
4、1 号是次品，且比标准球轻。记作 1L（L 是 light 的缩写）

5、2L

6、3L

拥有 6 个叶子的判定树的深度 h ≥ $\lceil \log_3 6 \rceil$=2，所以 3 个球至少要称 2 次才能找到次品并知道轻重，而不是我们想象的 1 次。

实际上 n=3 时 2 次也就足够了，判定树如下：



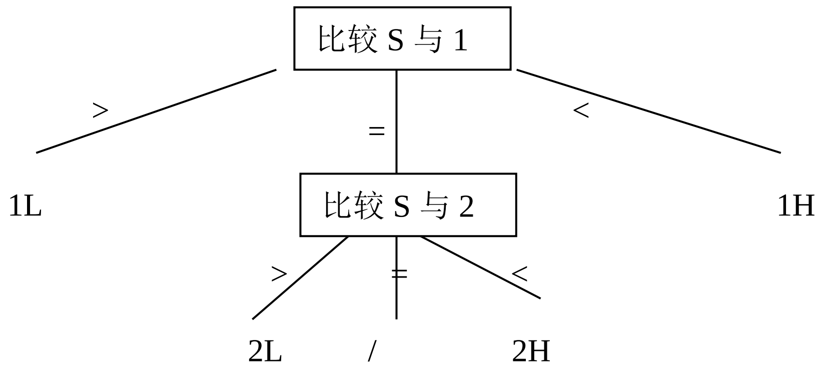
我们很自然的联想：是不是$\lceil \log_3 2n \rceil$就是问题的解？$\lceil \log_3 2n \rceil$的最优性是毋庸置疑的，可是可行性呢？我们是不是总能构造出这样的一棵判定树呢？

将这个想法归纳一下就是

猜想 给定一个标准球，一架天平。有 n 个球，其中一个是次品。每个球既有可能轻、也有可能重。只需要$\lceil \log_3 2n \rceil$次就能称出次品，并且知道它是轻还是重。

仿照之前解决的问题，采用归纳构造。

n=2 时判定树如下，2 次即出解。$\lceil \log_3 2n \rceil$=2，因此 n=2 时成立。



假设 n<k（k≥3）时猜想成立，下证 n=k 时也成立。

情况一：k mod 3 = 0。可以设 k=3p。

将球分成三堆：A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p。称<A, B>。若：

I. <A, B>=Left。结果可能是 AH 或者 BL，问题归结到 p+p 时的引理，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。总共要称$\lceil \log_3 2p \rceil$+1=$\lceil \log_3 6p \rceil$=$\lceil \log_3 2k \rceil$次。

II. <A,B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的猜想，根据归纳假设还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3 2p \rceil$+1=$\lceil \log_3 6p \rceil$=$\lceil \log_3 2k \rceil$次即可。

III. <A, B>=Right。类似 I，总共称$\lceil \log_3 2k \rceil$次。

无论如何称$\lceil \log_3 2k \rceil$次即可。综上 k mod 3 = 0 时猜想成立。

情况二：k mod 3 = 2。可以设 k=3p+2。

分成三堆 A, B, C，使得|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。将 6p+4 个叶子节点分摊为 2p+2,2p+2,2p，是均匀的。

然后称<A, B>，和情况一完全类似，此不赘述。

情况三：k mod 3 = 1。可以设 k=3p+1。

先看一种错误的想法。

分成三堆 A, B, C，使|A|=p, |B|=p, |C|=p+1，这样看起来是“均匀”的。接着称<A, B>：

1、<A,B>=Middle。次品在 C 中，可能是 CH 或者 CL 这 2p+2 种结果。

2、<A,B>=Left。可能是 AH 或者 BH 这 2p 种结果。

3、<A,B>=Right。可能是 AL 或者 BH 这 2p 种结果。

不难发现原问题的 6p+2 个叶子节点被分摊成 2p+2, 2p, 2p。这是均匀的吗？显然不是！

比如 p=1，n=4，共有 8 种可能的结果，根据猜想只需要 2 次即可得出解答。可是如果把球划成 1,1,2 三堆，2 个球需要 2 次才能称出，整个问题就至少需要称 3 次！

我们往往容易被表面的假象所迷惑，把 3p+1 个球分成 p、p、(p+1)这三堆看似是均匀的，然而我们必须时时谨记：均分的不是球，而是判定树的叶子节点——那才是保证结果最优的充要条件。

既然有 6p+2 个叶子节点，我们就应该按照 2p+1, 2p+1, 2p 的方式均分。

可以如此划分：A{**S**,1,2,…,p}，B{p+1,p+2,…,2p,2p+1}，C{2p+2, 2p+3, …, 3p+1}。即|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。特别注意的是在 A 中加入了一个标准球。

然后称<A, B>，若：

1、<A,B>=Middle。 次品在 C 中，问题归结到 n=p 的猜想，根据归纳假设，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。既总共称$\lceil \log_3 2p \rceil+1 = \lceil \log_3 6p \rceil = \lceil \log_3 6p+2 \rceil = \lceil \log_3 2k \rceil$次。

2、<A,B>=Left。有可能是 1H, 2H, …, pH, (p+1)L, (p+1)L, …, (2p+1)L 这 2p+1 种结果（由于 S 是标准球，所以不在我们的筛选范围之内。因此参加称量的虽然有 2p+2 个球，但是实际有可能是次品的却只有 2p+1 个。这也是此方案和之前错误想法的根本区别），可以归结到 p+(p+1)时的引理，还要称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil$次。

总共称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil+1 = \lceil \log_3 6p+3 \rceil = \lceil \log_3 6p+2 \rceil = \lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

3、<A,B>=Right。类似于 2，不赘述。

综上，k mod 3 = 1，猜想成立。

综上，对于任意的自然数 n（n>=2），猜想成立！

于是问题 4 解决了，我们的结论是：

给定一架天平，一个标准球。称出 n 个球中的次品并且知道轻重，需要且仅

需要$\lceil \log_3 2n \rceil$次。

四、 小结

在已经研究过问题 1 的基础上，我们很自然的把解决问题 1 的一系列方法和主观经验搬到此题来；这对启迪思路起了很重要的作用。

然而由于问题的相异性，表面的规律和经验却在进一步的应用中失败了。我们以“判定树”为桥，深入的研究了问题 1 中间方案的本质规律，得到了两条重要原则：

1、均匀三分。

2、均分的是叶子节点，而不是球。

正是这两条原则引导我们迅速的构造出完整的称量方案，得以正确的解决问题。

称球问题的其他变化形式，也完全遵循上述两个原则。所谓万变不离其宗，只要我们牢牢抓住上述两条原则，以判定树为研究的桥梁，无论问题形式怎么变，都能手到擒来。

称球问题的一些其他变化形式

问题 3 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品。已知：

1、次品的重量与其他的球不同，不知道轻重。

2、你只有一架天平。

问至少要称多少次，才能找出那个次品、**并且知道次品到底是轻还是重**？

问题 3 和 问题 4 相比，唯一的不同就是没有标准球。

实际上一次称量之后，无论天平怎么偏，我们至少可以得到一个标准球。具体地说，第一次称量：

1、天平平衡。放在天平上的都是标准球。

2、天平不平衡。没放在天平上的球都是标准球。

因此，从第二次称量开始，问题 3 就完全等价与问题 4。只要考虑第一次称量。

解决问题 4 时，n mod 3=0, 2 我们没用标准球即达到最优解；唯有 n mod 3 =1 时需要借助标准球实现叶子节点的均摊。

稍加试验就会发现，n mod 3 = 1 无论如何也无法在没有标准球的前提下均分叶子节点，只能舍而求次，采用一种次优的划分方案。

设 n=3k+1，划分成 A, B, C，使得|A|=|B|=k, |C|=k+1，然后称<A, B>。具体的判断和计算并不复杂，留给读者完成。

我们的结论是：

给定一架天平，有 n 个球，其中一个是次品。称$\lceil \log_3 2n+2 \rceil$次就可以找到次品，并且知道次品的轻重。

容易发现 n 个球只有 2n 种可能的结果，因此从理论上说，判定树的最优下界是$\lceil \log_3 2n \rceil$。此处的结论为什么要$\lceil \log_3 2n+2 \rceil$次呢？原因就在于缺少一个标准球，使得 n mod 3 = 1 时，第一次我们无论如何也不可能实现完美意义上的均分，只能采取了一种次优的方案，因此最优界也是不可能达到的。

以上的问题都要求次品的轻重，可有时候我们关心的是哪个球是次品。至于具体是轻还是重，倒是无关紧要的。

因此我们提出一个新问题：

问题 5 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品。已知：

1、次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。

2、给你一架天平、**一个标准球。**

问至少要称多少次，才能找出那个次品？

这个问题又复杂一点。

首先是下界不好估计。客观上说每个球都有可能是次品，且能轻能重，似乎有 2n 个叶子节点；可是我们关心的是哪个是次品，具体的轻重无关紧要，因此 n 个不同的叶子节点足矣。

到底算 n 个还是 2n 个呢？之前的研究方法行不通了，要另辟蹊径。

设 f(n)表示 n 个球时的最少称量次数。

先假设有无穷多个标准球，第一次取 a 个球在天平左边，b 个球在天平右边（a≤b）。由于天平两边的球数必须相等，所以在左边还补进 b-a 个标准球。

如果天平：

1、 左偏。有可能是左边 a 个球中有重球、或者右边 b 个球里有轻球，根据上节引理，还要称$\lceil \log_3(a+b) \rceil$次，因此总共称$\lceil \log_3(a+b) \rceil$+1 次。

2、 右偏。类似 1，也是称$\lceil \log_3(a+b) \rceil$+1 次。

3、 平衡。次品必然在剩下的 n-a-b 个球中，要称 f(n-a-b)次。

综上，此时称量次数是：max{$\lceil \log_3 a+b \rceil$, f(n-a-b)}+1 次。

注意到最后的称量次数只和 a+b 有关，因此可以对 a, b 适量调整，使得|a-b|≤1，于是补充的标准球顶多 1 个，完全满足题目要求。

设 a+b=p，则：

f(n) = min{max{$\lceil \log_3 p \rceil$, f(n-p)}+1}　　（1≤p≤n）

f(0)=0, f(1)=0, f(2)=1

这就是此问题的一个递推式，若对时间复杂度要求不高，如此既可求解。但是当 n 较大时，时空效率都是不能令人满意的，因此我们求出部分 f(n)的值：

N	f(n)
1	0
2	1
3—5	2
6—14	3

15—41	4
42—122	5

很容易发现：f(n)= $\lceil \log_3(2n-1) \rceil$。

考虑从递推式入手来证明这个猜想。同样采用归纳法。

n=1,2 时候容易验证猜想成立。

设 n<k 时猜想成立，下证 n=k 也成立。

先证最优性。

f(k) = min{max{$\lceil \log_3 p \rceil$, f(k-p)}+1}　（1≤p≤k）

假设存在这样的 p 使得 f(k) < $\lceil \log_3(2k-1) \rceil$，那么：

$\lceil \log_3 p \rceil + 1 = \lceil \log_3 3p \rceil < \lceil \log_3(2k-1) \rceil$

f(k-p)+1=$\lceil \log_3 2(k-p)-1 \rceil$+1=$\lceil \log_3(6k-6p-3) \rceil$<$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$

也就是：

3p < 2k-1　　(1)

6k-6p-3 < 2k-1　　(2)

(1)*2 + (2)得到：

6k-3 < 6k-3

矛盾。 因此对于 f(k)必然有 f(k)≥$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$。

再证可行性。

根据 k mod 3 的余数分类。

情况一：k mod 3 = 0。设 k = 3p。

分成三堆 A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p，称<A, B>:

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的问题 5，还要称$\lceil \log_3(2p-1) \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3(2p-1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(6p-3) \rceil$=$\lceil \log_3(2k-3) \rceil$次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 p+p 时的引理，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。所以总共要称$\lceil \log_3 2p \rceil$+1=$\lceil \log_3 2k \rceil$次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称$\lceil \log_3 2k \rceil$次。

综上，k=3p 要称$\lceil \log_3 2k \rceil$=$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

情况二：k mod 3 = 1。设 k=3p+1。

分成三堆 A{**S**, 1, 2, …, p}, B{p+1,p+3,…,2p+1}, C{2p+2,2p+4,…,3p+1}，此时|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。特别注意在 A 中加入了一个标准球。称<A, B>:

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的问题 5，还要称$\lceil \log_3(2p-1) \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3(2p-1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(6p-3) \rceil$=$\lceil \log_3(2k-3) \rceil$次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 p+(p+1)时的引理（因为标准球不要考虑，所以是 2p+1 而不是 2p+2），还要称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$次。所以总共要称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(2k+1) \rceil$次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称$\lceil \log_3(2k+1) \rceil$次。

综上，k=3p+1 要称$\lceil \log_3(2k+1) \rceil$=$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

情况三：k mod 3 = 2。设 k=3p+2。

分成三堆 A{**S**, 1, 2, …, p}, B{p+1,p+3,…,2p+1}, C{2p+2,2p+4,…,3p+2}，此时|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p+1。特别注意在 A 中加入了一个标准球。称<A, B>：

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p+1 时的问题 5，根据归纳假设还要称$\lceil \log_3[2(p+1)-1] \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(6p+3) \rceil$=$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 p+(p+1)时的猜想 II（因为标准球不要考虑，所以是 2p+1 而不是 2p+2），还要称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$次。所以总共要称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

综上，k=3p+2 要称$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

综合三种情况，f(n) ≤$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$。

最优性和可行性均证，故而 f(n)= $\lceil \log_3(2k-1) \rceil$。

我们的结论是：

给定一架天平和一个标准球，从 n 个球中找出不知道轻重的次品至少要称$\lceil \log_3(2n-1) \rceil$次。

我们还可以把问题 5 中的标准球去掉（也就是变成本文一开始提出的问题 2），有兴趣的读者可以自己推导一下看看。

研究方法总结

本文的有关结论如下：（n≥3）

给定一架天平，有 n 个球，其中一个是次品。

结论 1 次品的重量比其他的重，称$\lceil \log_3 n \rceil$次就能找出那个次品。

结论 2 轻重不详。有一个标准球。称$\lceil \log_3 2n \rceil$次就可以找到次品，并且知道轻重。

结论 3 轻重不详。称$\lceil \log_3 (2n+2) \rceil$次就可以找到次品，并且次品的轻重。

结论 4 轻重不详。有一个标准球，称$\lceil \log_3 (2n-1) \rceil$次就可以找出次品。

当然，还可以变化出一些其他的形式，但是万变不离其宗，只要牢牢抓住以一个原则："均匀"，任何此类问题都能迎刃而解。

本文全面而严格的提出了"天平称物"这一类问题的统一解法；在给出解法和有关结论的同时，特别重视对思路的产生过程作重点地阐述。

在研究此类问题的过程中我们得到了不少有益的经验：

1、从简单入手。这是本文的构篇基础。从简单的问题 1 步步深入，一直到较复杂的问题 5；从有标准球开始研究，进而推广到无标准球的情况；从要求次品的轻重情况，到只要求次品……这些无不包含着"从简单入手"这一重要研究手段。

2、总结经验，合理外推。通过将研究问题 1 而获得的部分经验进行合理的推广，我们在解决其后的难题时都能够很快的产生初步思路、迅速踏上正轨。

3、求同存异。世界上没有两片相同的叶子。哪怕是一个条件发生了细微的改动，题目的结构也许就发生了本质的变化。因此在推广的同时必须谨慎的考虑问题的相异性，做出积极的调整。

4、大胆猜想，严格证明。思路不甚明朗的时候，猜想就是一个很好的突破口。本文最重要的几个结论以及最后的问题 5，都是通过猜想取得进一步进展的。

附录

1、本文作者针对问题 3，编写了一个简单的模拟程序。Game.pas

2、判定树还可以用来证明：任何一个借助"比较"进行排序的算法，在最坏情况下所需要的比较次数至少为$\lceil \log_2 n! \rceil$；根据斯特林公式，有$\lceil \log_2 n! \rceil$=O(nlogn)。因此 O(nlogn)是借助比较法排序的理论时间复杂度下界（快速排序、堆排序均是这个数量级的）。本文借助了这一思想，用来证明某些天平称物问题的最优性。具体的判定树内容可以在参考书籍的 P292 找到。

参考书籍

数据结构（第二版），清华大学出版社，严蔚敏 吴伟民 编著