

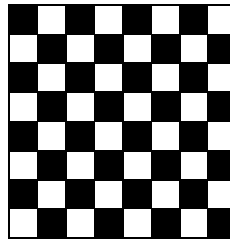
染色法和构造法在棋盘上的应用

广东北江中学 方奇

- 1 基本概念
- 2 棋盘的覆盖
 - (1) 同行覆盖
 - (2) 异性覆盖
 - (3) 小结
- 3 马的遍历
 - (1) 马的哈密尔顿链
 - (2) 马的哈密尔顿圈
- 4 其它问题
 - (1) Warm world
 - (2) 删除数字
- 5 结语

棋盘：

所谓 $m \times n$ 棋盘，指由 m 行 n 列方格构成的 $m \times n$ 矩形。每个方格成为棋盘的格，位于第 i 行 j 列的格记为 $a(i, j)$ 。当 $i+j$ 为奇（偶）数时，称 a_{ij} 为奇（偶）格。



染色法：

用不同颜色将棋盘格子进行染色，起到分类的效果。特别地，类似国际象棋盘上的黑白二染色，我们称之为“自然染色”。

构造法：

直接列举出某种满足条件的数学对象或反例导致结论的肯定与否定，或间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法，称之为构造法。

棋盘的覆盖

指用若干图形去覆盖 $m \times n$ 的棋盘。覆盖的每个图形也由若干格子组成，称为覆盖形。

约定任两个覆盖形互不重叠，任一覆盖形中任一格总与棋盘上某格重合。

按覆盖效果，可分为完全覆盖、饱和覆盖、无缝覆盖和互异覆盖。（只讨论）

完全覆盖：各个覆盖形的总格子数等于棋盘的总格子数

按覆盖形分，可分为同行覆盖和异型覆盖。

同形覆盖：只有一种覆盖形；

异型覆盖：有多种覆盖形

同行覆盖

例1 给出 m, n, k ，试用若干 $1 \times k$ 的矩形覆盖 $m \times n$ 的棋盘。

分析：

定理 1 $m \times n$ 棋盘存在 $1 \times k$ 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 $k|m$ 或 $k|n$ 。

证明:

充分性是显然的。用构造法。当 $k|n$ 时, 每一行用 n/k 个 $1*k$ 的矩形恰好完全覆盖。 $K|m$ 情况类似。

必要性:

设 $m=m_1*k+r, 0<r<k$

设 $n=n_1*k+s, 0<s<k$

1	2	3	...	K	1	2	3	...	k	1	2	3	...	S
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	2	3	4	...	S+1
3	4	2	3	4	2	3	4	:
:	:			:	:	:			:	:	:			:
K	1	k-1	K	1	k-1	k	1	S+k-1
1	2	3	...	K	1	2	3	...	K	1	2	3	...	S
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	2	3	4	...	S+1
3	4	2	3	4	2	3	4	:
:	:			:	:	:			:		:	:			:
K	1	k-1	K	1	k-1	k	1	S+k-1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:		:	:	:	:	:
1	2	3	...	K	1	2	3	...	K	1	2	3	...	S
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	2	3	4	...	S+1
3	4	2	3	4	2	3	4	:
:	:			:	:	:			:	:	:			:
R	r+1	R+k-1	r	r+k-1	R	r+1	r+s-1

约定 $r>s$

由上面的定理 1, 可彻底解决 $m*n$ 棋盘的 $p*q$ 矩形完全覆盖问题

定理 2 $m*n$ 棋盘存在 $p*q$ 矩形的完全覆盖充分必要条件是 m, n 满足下列条件之一:

- (i) $p|x$ 且 $q|y$
- (ii) $p|x, q|x$, 且存在自然数 a, b , 使 $y=ap+bq$

其中 $\{x, y\}=\{m, n\}$

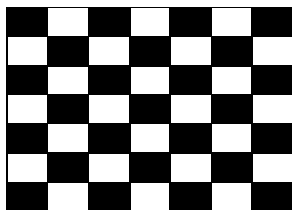
异型覆盖

例 2 设有 $m*n$ 的棋盘, 当 $m*n$ 为奇数时, 尝试删去一个格子, 剩下部分用若干 $1*2$ 的矩形覆盖; 当 $m*n$ 为偶数时, 尝试删去两个格子, 剩下部分用若干 $1*2$ 的矩形覆盖。

分析:

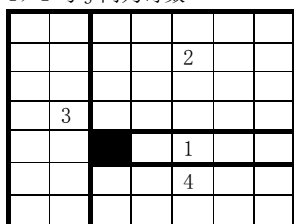
(1) 先来考虑 $m*n$ 为奇数的情况

一方面, 将棋盘自然染色。无论怎么放, 一个 $1*2$ 的矩形必盖住一个黑格和一个白格, 而棋盘上的黑格比白格多 1, 于是只能去掉一个黑格(即偶格)

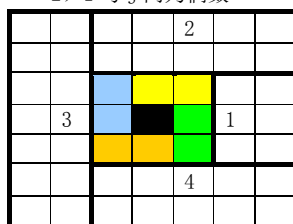


另一方面，设去掉偶格为 $a(i, j)$ ，用构造法必能得到可行解

1) i 与 j 同为奇数



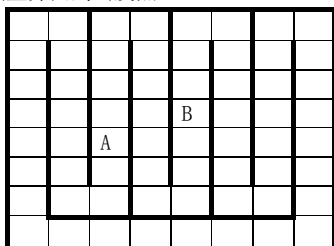
2) i 与 j 同为偶数



(2) 再考虑 $m \times n$ 为偶数的情况

类似地，由自然染色法得知，去掉的两格必定异色，即一个奇格，一个偶格（不然两种格子总数不等）

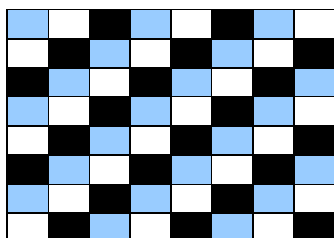
另一方面，用构造法，将用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线，使从任一格出发可以不重复地走遍棋盘并回到出发点。



针对染色法，上面的例子都是利用“各类颜色格子总数必须相等”这一条件推出矛盾，但有些时候，只考虑这个条件是不够充分的。

例3 8*8 棋盘剪去哪个方格才能用 21 个 1*3 的矩形覆盖？

分析：



蓝色：21 个 白色：22 个 黑色：21 个

考虑到对称性，只有剪去 $a(3, 3)$ 、 $a(3, 6)$ 、 $a(6, 3)$ 、 $a(6, 7)$ 中的某一个才能满足题意。

Commented [clever1]: 假设去掉 (i, j) 存在一种方案，则与 (i, j) 对称的点 $(i, 9-j)$ 、 $(9-i, j)$ 、 $(9-i, 9-j)$ 也存在一种方案，即这四个点必须都是白点。

小结

覆盖类问题其实是一个难度较大的课题，这里只讨论了一些简单的情况，以说明染色法与构造法的应用

需要补充的是，染色法的种类形形色色、五花八门。考虑到可推广性和易操作性，本文只着重研究了“间隔染色法”（即自然染色法的推广）

马的遍历

马行走规则：从 2×3 的矩形一个角按对角线跳到另一个角上

棋盘上马的遍历问题分两类

- (1) 马的哈密顿链
- (2) 马的哈密顿圈

马的哈氏链

通常有四种方法

- 1 贪心法——每一步跳向度最小的点
- 2 分治法——将棋盘分成几个小棋盘，分别找哈氏链，再连接起来
- 3 镶边法——先在一个小棋盘中找到哈氏链，然后在棋盘四周镶边，已产生大棋盘的哈氏链。

按上述方法不难得到下面结论

$n \times n$ 棋盘存在哈氏链的充要条件是 $n > 3$ 。

马的哈氏圈

例4 求 $n \times n$ 棋盘的哈氏圈

分析

将棋盘自然染色，考察无解情况。

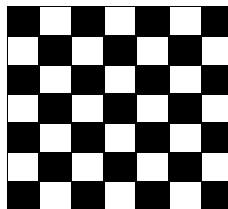
马无论怎么走，都必须按黑格—白格—黑格—白格……如此循环。由于要回到起点（起点与终点同色），途经两种颜色的格子数必相等，可知 n 为奇数时无解。

因为大小限制， $n < 6$ 时也无解

当 $n \geq 6$ 且为偶数时，用镶边法构造

假设 $(n-4) \times (n-4)$ 的棋盘已找到哈氏圈

- 1) n 除以 4 余 2 时，
在内矩形四个角（A、E、I、M）上分别开口。



	C						O	
			D		P			
		A				M		
				B	N			
				F	J			
		E				I		
			H			L		
	G							K

1	16	19	26	7	4
20	25	2	5	18	27
15	26	17	8	3	6
24	21	32	11	28	9
35	14	23	30	33	12
22	31	34	13	10	29

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A、B 上对接，变成 A-C-... -D-B。
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E、F 上对接，变成 E-G-... -H-F。
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I、J 上对接，变成 I-K-... -L-J。
- 4 将 O 与 P 所在的外回路与“内矩形”的回路在 M、N 上对接，变成 M-O-... -P-N。

{ 在这里，要注意一个问题，就是作为基础矩形的“内矩形”的回路，首先要满足：A 的下一步到 B，E 的下一步到 F，I 的下一步到 J，M 的下一步到 N。只有这样，构造成的新矩形才能继续作为“内矩形”按上述规则向外扩展。现给出满足要求的基础矩形的一组解(N=6)}

2) n 除以 4 余 0 时

在内矩形四个角 (A、E、I、M) 上分别开口。

			C				O		
				D	P				
		A					M		
				B		N			
				F		J			
		E					I		
			H				L		
	G								K

1	54	47	38	49	52	31	26
46	39	2	53	32	27	22	51
55	64	37	48	3	50	25	30
40	45	56	33	28	23	4	21
63	36	61	44	57	20	29	24
60	41	34	15	12	5	8	19
35	62	43	58	17	10	13	6
42	59	16	11	14	7	18	9

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A、B 上对接，变成 A-C-... -D-B。
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E、F 上对接，变成 E-G-... -H-F。
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I、J 上对接，变成 I-K-... -L-J。
- 4 将 O 与 P 所在的外回路与“内矩形”的回路在 M、N 上对接，变成 M-O-... -P-N。

一个猜想：

$m \times n$ ($m < n$) 棋盘不存在哈氏圈的充要条件是：

m, n 满足下列条件之一

- (1) m, n 都是奇数
- (2) $m=1, 2$ 或 4
- (3) $m=3$ 且 $n=4, 6, 8$

其它应用

例 5 蠕虫世界 (Uva)

蠕虫在一张 $N \times N$ 的网上爬行。每个网格上有一个数字，蠕虫不能经过相同的数字两次。开始的时候，蠕虫任意选择一个格子作为起始点。它爬行只能沿水平或竖直方向，且不能超出网外。蠕虫如何移动才能到达尽可能多的网格呢？下面是一个样例。

6	8	18	15	24	20	2	20
6	2	15	2	17	15	3	7
0	11	18	16	20	15	1	11
6	2	6	13	4	17	20	16
5	12	7	2	3	5	18	23
7	13	3	2	2	11	4	23
16	23	10	2	4	12	5	20
17	12	10	1	13	12	6	20

分析：

采用“染色法”贪心出一个上界。

- 1 自然染色
- 2 设 T_{free} , T_{black} , T_{white} 分别记录三类格子数量
对每一种数字 (1, 2, 3, ...) 分析
 - 1) 只存在标有该数字的白色格子, $T_{\text{white}} \leftarrow T_{\text{white}} + 1$
 - 2) 只存在标有该数字的黑色格子, $T_{\text{black}} \leftarrow T_{\text{black}} + 1$
 - 3) 存在标有该数字的黑白两色格子, $T_{\text{free}} \leftarrow T_{\text{free}} + 1$
- 3 估价上界

$$L_{\max} = \begin{cases} (T_{\text{white}} + T_{\text{free}}) * 2 + 1 & (T_{\text{white}} + T_{\text{free}} < T_{\text{black}}) \\ T_{\text{black}} + T_{\text{white}} + T_{\text{free}} & (T_{\text{white}} + T_{\text{free}} \geq T_{\text{black}}) \end{cases}$$

(假设 $T_{\text{white}} \leq T_{\text{black}}$, 否则交换即可)

结语

存在性问题——> 染色法

可行性问题——> 构造法

在以棋盘为模型的问题中，综合运用这两种方法，双管齐下，往往能收到事半功倍的效果！

谢谢