半平面交的算法及其应用

基本概念

半平面：平面上的直线及其一侧的部分，在直角坐标系中可由不等式 $ax+by+c>=0$ 确定。

在一个有界区域里（在实际计算时不妨设一个足够大的边界），半平面或半平面的交是一个凸多边形区域。

n 个半平面的交 $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ 是一个至多 n 条边的凸多边形。

算法

半平面交的联机算法

procedure intersection of half-planes
输入：n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$ 对应的不等式组 $a_ix+b_iy+c_i>=0$，$i=1,2,3\ldots n$
输出：$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

初始化区域 A 为整个平面

依次用直线 $a_ix+b_iy+c_i=0$，$i=1,2,\ldots n$ 切割 A，保留使不等式 $a_ix+b_iy+c_i>=0$ 成立的部分

输出 A

本算法的时间复杂度为 $O(n*n)$，并具有联机的优点。

半平面交的分治算法

假设可以在 $O(m+n)$的时间内将 m 个半平面的交和 n 个半平面的交合并，则可以有一种 $O(n*log(n))$的分治算法求半平面的交。

Procedure intersection of half-plane (D&C)
输入：n 个半平面 $H_1,H_2,\ldots H_n$ 对应的不等式组 $a_ix+b_iy+c_i>=0$，$i=1,2,3\ldots n$
输出：$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

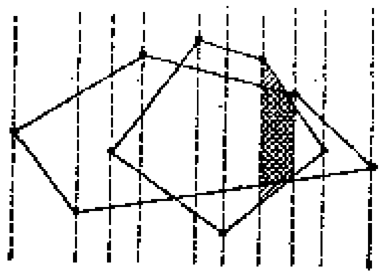
将 $H_1\ldots H_n$ 分成两个大小近似相等的集合

在每个子问题中递归地计算半平面的交

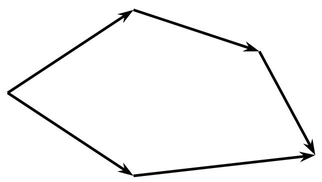
合并两个凸多边形区域形成 $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$

北京四中 李澎煦
2002 年 1 月

所以问题的关键就是怎样在 $O(m+n)$的时间里求两个凸多边形的交。



如左图所示，在 $O(m+n)$的时间内将两个凸多边形沿平行于 y 轴方向切割成至多 $O(m+n)$个梯形区域，每两个梯形区域的交可以在 $O(1)$时间内解决。



为了便于操作，确定凸多边形采用了一种特殊的方法。可以看出凸多边形上方和下方的顶点分别构成了一个 x 坐标递增序列。将这两个序列中的顶点分别作为一个链表存储,得到确定凸多边形区域的上界和下界。

算法：

procedure intersection of convex polygon

输入：两个凸多边形区域 A、B

输出：$C=A\cap B$

1.将两个凸多边形的顶点 x 坐标分类，得到序列 $x_i,i=1\ldots p$

2.初始化区域 C 为空。

3.处理$\{x_1\}$

4.依次处理区域$(x_i,x_i+1]$,$i=1\ldots p-1$。

4.1 计算两个多边形在此区域里截得的梯形（可能退化），设为 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$。

4.2 求交点 $AB\cap A'B'$、$AB\cap C'D'$、$CD\cap A'B'$，将存在的点按 x 坐标排序，删除重复，添加到 C 的上界中。用类似的方法求 C 的下界

4.3 计算此区域的右侧边界：$EF=BC\cap B'C'$。将 E、F 分别加入 C 的上界和下界。

5.输出 C

步 1：由于 A、B 的上下界 x 坐标分别有序，可采用归并排序。复杂度 $O(m+n)$

步 4：由于是按照 x 递增的顺序扫描这些区域，每条边界上的指针在整个过程中始终向右移动。两个多边形的每个顶点至多扫描一次。复杂度为 $O(m+n)$。

因此整个算法的时间复杂度为 $O(m+n)$。

应用

问题 1：Hotter and Colder (Waterloo local contest)

题目简述：

A 和 *B* 在 *10*10* 的棋盘上进行一个游戏。*A* 确定一个点 *P*，*B* 每回合移动一次。每次 *A* 都会告诉 *B*，他当前所处的位置是离 *P* 更近了*(Hot)*还是更远了*(Cold)*。（原题还要考虑距离不变的情况。）

请在 *A* 每次回答后，确定 *P* 点可能存在的区域的面积。

分析：

假设 *B* 从 *C*（x_1,y_1）移动到了 $D(x_2,y_2)$，A 回答 *Hot*。则对应这一回合，点 $P(x,y)$所处的位置满足 $|CP|>|DP|$，即：

$(2*x_2-2*x_1)*x+(2*y_2-2*y_1)*y+x_1*x_1+y_1*y_1-x_2*x_2-y_2*y_2>0$。

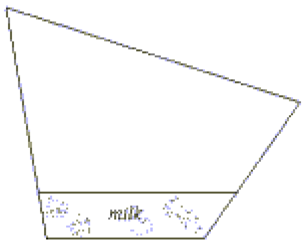
类似地，回答 *Cold* 对应于另一个不等式。

初始时可能的区域是*[0,10]*[0,10]*。每回合后都用相应的不等式对应的半平面与当前区域求交。并输出交的面积。

问题 2：Milk (OOPC1)

题目简述：

SRbGa 有一块凸 *n* 边形面包，和一盆面积足够大但深度仅为 *h* 的牛奶。他想仅蘸 *k* 次（每次都保证面包垂直于盆底），使得面包蘸上牛奶的部分面积最大。



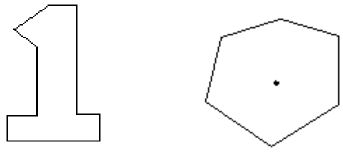
分析：

由于本题规模不大，考虑使用深度优先搜索。

蘸每条边都对应剩下的一个半平面，某种蘸 *k* 条边 $E_1…E_k$ 的方法，剩下的部分就对应于这 *k* 个半平面和原多边形的交。考察 *C(n,k)*种蘸法，选其中剩下的面积最小的那种。

问题 1 是用几个半平面顺次求交，并且每次都要输出面积。显然采用联机算法合适。
问题 2 如果用联机算法，复杂度为 *O(C(n,k)*n)*，且便于在搜索的过程中剪枝。如果用脱机的分治算法，复杂度为 *O(C(n,k)*(n+k*log(k)))*。

问题 3：Video (CTSC98)



题目简述：

已知一个多边形 P（不一定是凸的）

问在 P 中是否存在点 Q，在 Q 点能观察到整个多边形区域。

分析：

假设多边形的边界点按逆时针方向给出 $V_0V_1V_2…V_n$，$V_0=V_n$。则能够观察到边 V_iV_{i+1} 的点 Q_i 一定满足

$$\overrightarrow{Q_iV_i} * \overrightarrow{Q_iV_{i+1}} \ge 0, i = 0 \ldots n-1$$

而且能观察到所有边的点一定能够观察到整个多边形区域。

如果用坐标进行叉积运算，则每个约束条件都对应一个二元一次不等式（也对应于一个半平面）。本题就转化为求这 n 个半平面的交是否不为空。

问题 4：Triathlon (NEERC2000)

题目简述：

n 名选手参加铁人三项赛，比赛按照选手在三个赛段中所用的总时间排定名次。已知每名选手在三个项目中的速度 U_i、V_i、W_i。

问对于选手 i，能否通过适当的安排三个赛段的长度（但每个赛段的长度都不能为 0），来保证他获胜。

分析：

假设三个赛段的长度分别为 x、y、z，则选手 i 获胜的充要条件就是：

$$\frac{x}{u_i}+\frac{y}{v_i}+\frac{z}{w_i}<\frac{x}{u_j}+\frac{y}{v_j}+\frac{z}{w_j}, i \neq j$$

这是一个三元齐次不等式组，由于 $z>0$，所以不妨将每个不等式两侧都除以 z,并令 $X=x/z$，$Y=y/z$，就得到：

$$\left(\frac{1}{u_j}-\frac{1}{u_i}\right)*X+\left(\frac{1}{v_j}-\frac{1}{v_i}\right)*Y+\left(\frac{1}{w_j}-\frac{1}{w_i}\right)>0$$

本题就转化为求这 $n-1$ 个不等式对应的半平面的交，并判断其面积是否大于 0（即排除空集、点、线段的情况）。

问题 3 和问题 4，最终都转化为二元不等式组解的存在性问题。可以用分治算法较有效地解决。

问题 5：Run away（CERC99）

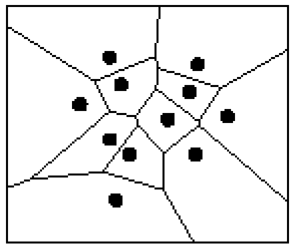
题目简述：

在一个矩形 R 中有 n 个点 $P_1…P_n$，请找出一个点 $Q\in R$ 使得 $min(|QP_i|)$最大。

分析：

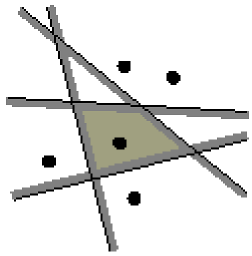
将 R 分成 n 个区域，$Q_1…Q_n$，Q_i 是离 P_i 点的距离比离其它点都小的点的集合：

$$Q_i=\{Q\,\|\,|QP_j|\geq|QP_i|, j\neq i\}\cap R$$



Q_i 可通过在 P_iP_j 的中垂线 P_i 一侧的半平面的交求得。Q_i 为一个凸多边形。

在 Q_i 里，离 P_i 最远的点只能出现在 Q_i 的顶点上。求其中最远的点即可。



求半平面的交采用分治算法，复杂度为 $O(n*log(n))$，对应于 P_i 的多边形最多有 $O(n)$个顶点，因此求 Q_i 中的最远点复杂度为 $O(n)$。

总的复杂度为 $O(n*n*log(n))$。

实际上，由以上方法定义的 n 个多边形区域 $Q_1…Q_n$ 就组成了一个 ***Voronoi* 图**。*Voronoi* 图是计算几何中仅次于凸包的几何对象，有着非常广泛的应用。利用半平面的交求 *Voronoi* 图的方法并不是最优的，分治法、平面扫描法等许多算法都能达到 $O(n*log(n))$的复杂度，并且是最优的。但这些算法都过于复杂，不属于本文讨论的范围。

参考书目

《计算几何导论》作者：[美]F P 普霍帕拉塔 M I 沙莫斯 1990 年 11 月第 1 版

《计算几何——算法分析与设计》作者：周培德 2000 年 3 月第 1 版

北京四中 李澎煦

2002 年 1 月