冗繁削尽留清瘦
——浅谈信息的充分利用

长沙市雅礼中学 张一飞

【摘要】

在算法设计中，人们往往不自觉地进行了大量多余的运算，这些累赘将大大降低算法的效率。作者认为，充分利用已知信息，是解决这一问题的一个有效方法。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能充分地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。本文对充分利用信息，在优化回溯法、动态规划和数值计算中的应用作了初步的探讨。

【关键字】

信息，算法优化

"冗繁削尽留清瘦"[1]虽然讲的是画竹，却包含着深刻的哲理。算法设计同画竹一样，也需要削尽冗繁。但在解题实践中，人们往往不自觉地做了一些多余的运算，而忽视了对已知信息的充分利用。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能**充分**地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。限于篇幅，本文仅对这种方法提高回溯法、动态规划和数值计算的效率进行探讨。

一、 提高回溯法的效率

我们知道，回溯法实质上是从树根出发，遍历一棵解答树的过程。如果解答树中存在一些性质相同的子树，那么，只要我们知道了其中一棵子树的性质，就可以根据这个信息，导出其它子树的性质。这就是自顶向下记忆化搜索[2]的基本思想。

记忆化搜索避免了一些多余的运算，因而比非记忆化搜索效率要高。但在有些记忆化搜索中，对信息的利用仍不够充分，还有进一步优化的余地。

下面，我们看一个例子：

【序关系计数问题】

用关系'<'和'='将 3 个数 A、B 和 C 依次排列有 13 种不同的关系：

A<B<C, A<B=C, A<C<B, A=B<C, A=B=C, A=C<B,
B<A<C, B<A=C, B<C<A, B=C<A,
C<A<B, C<A=B, C<B<A。

编程求出 N 个数依序排列时有多少种关系。

〈1〉. 枚举出所有的序关系表达式

我们可以采用回溯法枚举出所有的序关系表达式。N 个数的序关系表达式，是通过 N 个大写字母和连接各字母的 N-1 个关系符号构成。依次枚举每个位置上的大写字母和关系符号，直到确定一个序关系表达式为止。

由于类似于‘A=B’和‘B=A’的序关系表达式是等价的，为此，规定等号前面的大写字母在 ASCII 表中的序号，必须比等号后面的字母序号小。基于这个思想，我们很容易写出解这道题目的回溯算法。

算法 1-1，计算 N 个数的序关系数。

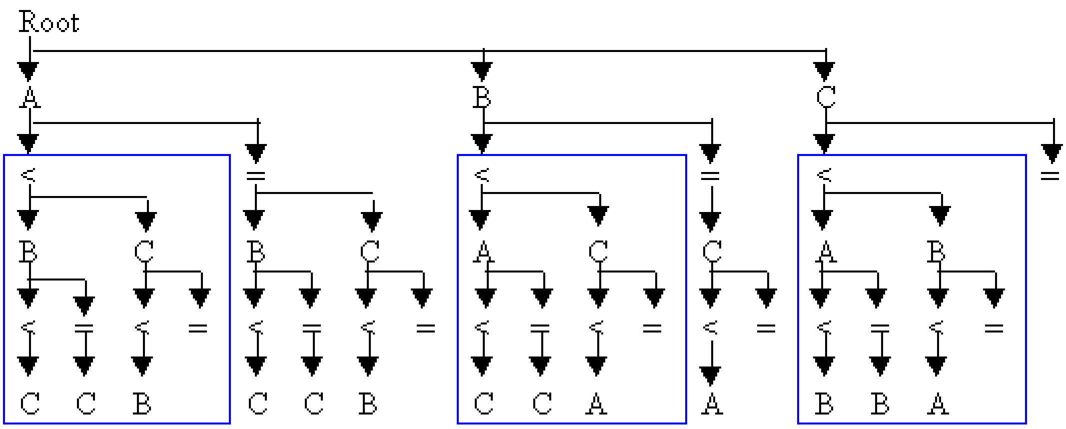
```
procedure Count(Step,First,Can);
{Step 表示当前确定第 Step 个大写字母；
 First 表示当前大写字母可能取到的最小值；
 Can 是一个集合，集合中的元素是还可以使用的大写字母}
  begin
    if Step=N then begin{确定最后一个字母}
      for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}
      Exit
    end;
    for i:=First to N do{枚举当前的大写字母}
      if i in Can then begin{i 可以使用}
        Count(Step+1,i+1,Can-[i]);{添等于号}
        Count(Step+1,1,Can-[i]){添小于号}
      end
  end;
```

调用 Count(1,1,[1..N])后，Total 的值就是结果。该算法的时间复杂度是 O(N!)

〈2〉. 粗略利用信息，优化算法 1−1

算法 1-1 中存在大量冗余运算。如图 1，三个方框内子树的形态完全一样。一旦我们知道了其中某一个方框内所产生的序关系数，就可以利用这个信息，直接得到另两个方框内将要产生的序关系数。

图 1 N=3 时的解答树



显然，在枚举的过程中，若已经确定了前 k 个数，并且下一个关系符号是小于号，这时所能产生的序关系数就是剩下的 N-k 个数所能产生的序关系数。

设 i 个数共有 F[i]种不同的序关系，那么，由上面的讨论可知，在算法 1-1 中，调用一次 Count(Step+1,1,Can-[i])之后，Total 的增量应该是 F[N-Step]。这个

值可以在第一次调用 Count(Step+1,1,Can-[i])时求出。而一旦知道了 F[N-Step]的值，就可以用 Total:=Total+F[N-Step] 代替调用 Count(Step+1,1,Can-[i])。这样，我们可以得到改进后的算法 1-2。

算法 1-2，计算 N 个数的序关系数。

```
procedure Count(Step,First,Can);
{Step,First,Can 的含义同算法 1-1}
  begin
    if Step=N then begin {确定最后一个字母}
      for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}
      Exit
    end;
    for i:=First to N do {枚举当前的大写字母}
      if i in Can then begin {i 可以使用}
        Count(Step+1,i+1,Can-[i]); {添等于号}
        if F[N-Step]=-1 then begin {第一次调用}
          F[N-Step]:=Total;
          Count(Step+1,1,Can-[i]); {添小于号}
          F[N-Step]:=Total-F[N-Step] {F[N-Step]=Total 的增量}
        end else Total:=Total+F[N-Step] {F[N-Step]已经求出}
      end
  end;
```

开始，将 F[0],F[1],…,F[N-1]初始化为-1

调用 Count(1,1,[1..N])之后，Total 的值就是结果

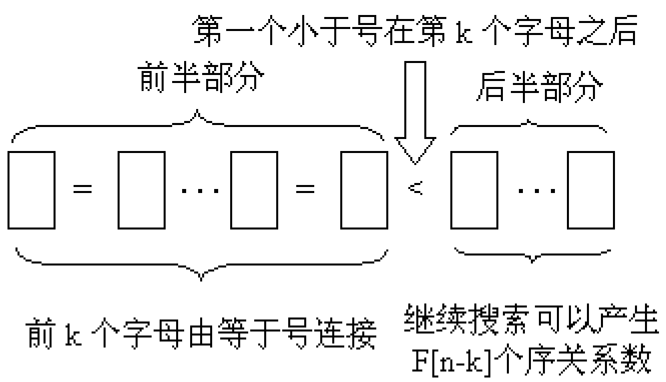
算法 1-2 与算法 1-1 的差别仅限于程序中的粗体部分。

算法 1-2 就是利用了 F[0],F[1],…,F[N-1]的值，使得在确定添小于号以后，能够避免多余的搜索，尽快地求出所需要的方案数。该算法实质上就是自顶向下记忆化方式的搜索，它的时间复杂度为 $O(2^N)$[3]。同算法 1-1 相比，效率虽然有所提高，但仍不够理想。

<3>. 充分利用信息，进一步优化算法 1-2

在搜索的过程中，如果确定在第 k 个大写字母之后添加第一个小于号，则可得到下面两条信息：

图 2 充分利用信息，进一步优化算法 1-2



第一条信息：前 k 个大写字母都是用等号连接的。

第二条信息：在此基础上继续搜索，将产生 F[N-k]个序关系表达式。

如图 2 所示，序关系表达式中第一个小于号将整个表达式分成了两个部分。由乘法原理易知，图 2 所示的序关系表达式的总数，就是图中前半部分所能产生的序关系数，乘以后半部分所能产生的序关系数。算法 1-2 实质上利用了第二条信息，直接得到图中后半部分将产生 F[n-k]个序关系数，并通过搜索得到前半部分将产生的序关系数。但如果我们利用第一条信息，就可以推知图中前半部分将产生的序关系数，就是 N 个物体中取 k 个的组合数，即 C_n^k。这样，我们可以得到 F[n] 的递推关系式：

$$公式1：F[n]=\sum_{k=1}^{n}C_n^kF[n-k]，其中F[0]=1$$

采用公式 1 计算 F[n]的算法记为算法 1-3[4]，它的时间复杂度是 $O(N^2)$。

⟨4⟩. 小结

下面是三个算法的性能分析表[5]：

分析项目		算法 1-1	算法 1-2	算法 1-3
理论分析	时间复杂度	O(N!)	$O(2^N)$	$O(N^2)$
	空间复杂度	O(1)	O(N)	O(N)
实际运行情况	N=7	1s	<0.05s	<0.05s
	N=8	10s	<0.05s	<0.05s
	N=15	>10s	0.5s	<0.05s
	N=17	>10s	2s	<0.05s

在优化算法 1-1 的过程中，我们通过利用 F[0],F[1]…,F[N-1]的信息，得到算法 1-2，时间复杂度也从 O(N!)降到 $O(2^N)$。在算法 1-2 中，进一步消除冗余运算，就得到了 $O(N^2)$的算法 1-3。

算法 1-3 计算 F[n]，体现了动态规划的思想。也就是说，我们通过充分利用信息，提高回溯法的效率，实质上是将搜索转化成了动态规划。

二、 提高动态规划的效率

从上一节中可以看到，动态规划之所以高效，就在于它比较充分的利用了已知信息。但是，在有些动态规划中，仍存在冗余运算。这一节我们将进一步探讨如何充分利用信息，提高动态规划的效率。

下面我们看一个例子：

【理想收入问题】

理想收入是指在股票交易中，以 1 元为本金可能获得的最高收入，并且在理想收入中允许有非整数股票买卖。

已知股票在第 i 天每股价格是 V[i]元，1≤i≤M，求 M 天后的理想收入。

⟨1⟩. 一种动态规划的解法

解这道题目，很容易想到用动态规划。设 F[i]表示在第 i 天收盘时能达到的最高收入，则有 F[i]的递推关系式：

$$公式2：F[i]=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]*V[i]\}，其中F[0]=1，V[0]=1$$

公式 2 的含义是：在第 i 天收盘时能达到的最高的收入，是将第 j 天收盘后

的收入，全部用于买入第 k 天的股票，再在第 i 天将所持的股票全部卖出所得的收入。采用公式 2，可以得到算法 2-1，其时间复杂度是 $O(M^3)$，空间复杂度是 O(M)。

算法 2-1

```
F[0]:=1;V[0]:=1;F[1..M]:=0;
for i:=1 to M do
   for j:=0 to i-1 do
      for k:=j to i-1 do
         F[i]:=Max{F[i],F[j]/V[k]*V[i]}
```

<2>. 改变状态表示的含义，优化算法 2-1

改变动态规划中状态表示的含义，是优化动态规划的常用方法。例如此题，我们可以采用两种不同的状态表示方法优化算法 2-1。

方法 1：设 P[i]表示前 i 天能获得的最多股票数，可列出如下状态转移方程：

$$公式3:\ P[i]=\max_{(0\le j<i)}\{P[i-1],P[j]*V[j]/V[i]\}$$

这是因为前 i 天所能获得的最多股票数，或者是前 i-1 天获得的最多股票数，或者是在第 j 天将前 j 天所能获得的最多的股票全部卖出，再买入第 i 天的股票。显然，前 i-1 天能获得的最多股票数乘以第 i 天的股价，就是第 i 天能达到的最大收入。

方法 2：设 Q[i]表示前 i 天能达到的最大收入，可列出如下状态转移方程：

$$公式4:\ Q[i]=\max_{(0\le j<i)}\{Q[i-1],Q[j]/V[j]*V[i]\}$$

就是说前 i 天所能达到的最大收入，或者是前 i-1 天所能达到的的最大收入，或者是在第 j 天买入股票，再在第 i 天卖出，所能获得的最大收入。

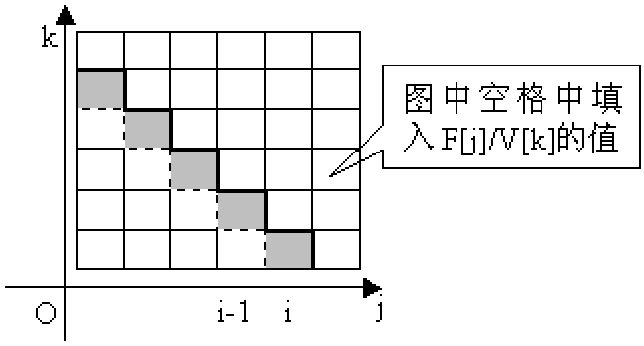
上述两种方法的时间复杂度都是 $O(M^2)$。这表明，改变状态表示的含义，在一定程度上提高了算法的效率。但对于这道题目，仅仅改变状态表示的含义，很难进一步优化算法。

<3>. 粗略利用信息，优化算法 2-1

算法 2-1 粗体部分的功能是确定 F[i]所能达到的最大值。由于 V[i]不变，因此 F[i]达到最大值，当且仅当 F[j]/V[k]达到最大值，其中 0≤j≤k<i。

算法 2-1 中，采用了二重循环来确定 F[j]/V[k]的最大值。但在确定 F[i-1]所能达到最大值的时候，我们实际上已经求出当 0≤j≤k<i-1 时，F[j]/V[k]所能达到的最大值。如果能充分利用这一信息，就可以更快地确定 F[i] 所能达到的最大值。如图 3 所示，要确定粗线下部的最大值，只需比较虚线下部的最大值和灰色部分的最大值即可。

图 3 初步利用信息，优化算法 2-1



为了表示出图 3 的思想，

设$MaxFV[i]=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\}$，则

$$\begin{aligned}MaxFV[i]&=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\}\\&=\max\{\max_{(0\le j\le k<i-1)}\{F[j]/V[k]\},\max_{(0\le j\le k,k=i-1)}\{F[j]/V[k]\}\}\\&=\max\{MaxFV[i-1],\max_{(0\le j\le i-1)}\{F[j]/V[i-1]\}\}\\&=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1],F[j]/V[i-1]\}\end{aligned}$$

由公式2，$F[i]=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]*V[i]\}$

$$\begin{aligned}&=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\}*V[i]\\&=MaxFV[i]*V[i]\end{aligned}$$

这样，我们得到如下递推关系式：

公式5:

$$F[i]=MaxFV[i]*V[i]$$

$$MaxFV[i]=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1],F[j]/V[i-1]\}$$

从公式 5 中可以看出，在确定 MaxFV[i]时，较充分的利用了确定 MaxFV[i-1]时产生的结果。采用公式 5 可得算法 2-2，它的时间复杂度为 $O(M^2)$，空间复杂度是 O(M)。

算法 2-2

```
F[0]:=1;MaxFV[0]:=0;V[0]:=1;
for i:=1 to M do begin
   MaxFV[i]:=MaxFV[i-1];
   for j:=0 to i-1 do
      MaxFV[i]:=Max{MaxFV[i],F[j]/V[i-1]}
   F[i]:=MaxFV[i]*V[i]
end;
```

将公式 5 化简，有

$$\begin{aligned}MaxFV[i]&=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1],F[j]/V[i-1]\}\\&=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1],MaxFV[j]*V[j]/V[i-1]\}\end{aligned}$$

在这个公式中，MaxFV[i]可以看作是前 i-1 天所能获得的最多股票数。这种状态表示方法和公式 3 中 P[i]的含义本质上是相同的。这样，我们通过对已知信息的利用，达到了改变动态规划中状态表示含义的效果。

〈4〉. 充分利用信息，进一步优化算法 2-2

在算法 2-2 中，进一步利用信息，很容易得到时间复杂度为 O(M)的算法。

算法 2-2 的粗体部分的功能是确定 MaxFV[i]所能达到的最大值。由于 V[i-1]不变，因此 F[j]/V[i-1]达到最大值，当且仅当 F[j]达到最大值，其中 $0\leqslant j<i$。

算法 2-2 中内层循环实质上是在确定 MaxFV[i]时，找到 F[0],F[1],…F[i-1]中的最大值。而在确定 MaxFV[i-1]时，我们已经找到了 F[0],F[1],…,F[i-2]中的最大值。如果把这个信息利用起来，就可以更快的确定 F[0],F[1],…F[i-1]中的最大值。

设$MaxF[i]=\max_{(0\le j<i)}\{F[j]\}$，则

$$\begin{aligned}MaxF[i]&=\max_{(0\le j<i)}\{F[j]\}\\&=\max\{\max_{(0\le j<i-1)}\{F[j]\},F[i-1]\}\\&=\max\{MaxF[i-1],F[i-1]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MaxFV[i]&=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1],F[j]/V[i-1]\}\\&=\max\{MaxFV[i-1],MaxF[i]/V[i-1]\}\end{aligned}$$

这样，我们得到如下递推关系式：

公式6:

$$F[i]=MaxFV[i]*V[i]$$

$$MaxFV[i]=\max\{MaxFV[i-1],MaxF[i]/V[i-1]\}$$

$$MaxF[i]=\max\{MaxF[i-1],F[i-1]\}$$

从公式 6 中可以看出，在确定 MaxF[i]时，充分利用了确定 MaxF[i-1]时所产生的信息。采用公式 6 可得算法 2-3，它的时间复杂度是 O(M)。从公式 6 中的三个递推关系式可以看出，当前状态都只与前一个状态有关，因此，空间复杂度可以进一步降到 O(1)[6]。

算法 2-3

```
F:=1;MaxF:=0;MaxFV:=0;V[0]:=1;
for i:=1 to M do begin
   if F>MaxF then MaxF:=F;
   if MaxF/V[i-1]>MaxFV then MaxFV:=MaxF/V[i-1];
   F:=MaxFV*V[i]
end;
```

公式 6 中 MaxF[i]可以看作是前 i-1 天能达到的最大收入[7]。虽然这种状态表示方法和公式 4 中 Q[i]是类似的，但算法的时间复杂度却从 $O(M^2)$降到了 O(M)，空间复杂度也从 O(M)降到了 O(1)。这样，我们通过充分利用已知信息，达到了改变状态表示难以达到的优化效果。

〈5〉. 小结

下面是三个算法的性能分析表：

分析项目		算法 2-1	算法 2-2	算法 2-3
理论分析	时间复杂度	$O(M^3)$	$O(M^2)$	O(M)
	空间复杂度	O(M)	O(M)	O(1)
实际运行情况	M=200 的随机数据	4s	0.05s	<0.05s
	M=1000 的随机数据	>60s	1s	<0.05s
	M=2000 的随机数据	>60s	5s	<0.05s

在这道题中，我们通过避免冗余运算，将时间复杂度由 $O(M^3)$先降到 $O(M^2)$，再进一步降到 O(M)。空间复杂度也从 O(M)降到了 O(1)。

由此可见，充分利用信息，提高动态规划的效率，是非常有效的。此外，充分利用信息并不一定要以牺牲空间为代价，同样可以优化算法的空间复杂度。

三、 提高数值计算的效率

从前面的分析中，我们深深地体会到了动态规划的核心思想——充分利用已知信息。但这个思想并不仅限于动态规划。下面我们将看到，充分利用已知信息，对提高数值计算的效率，也十分有效。

我们看一道数值计算题：

【高精度计算问题】(湖南 1998 省赛试题)

输入 n,m,k，计算 $S_m(n)$的后 k 位数。其中 $S_m(n)=1^m+2^m+…+n^m$，$1\leqslant k\leqslant 99$，$1\leqslant n,m\leqslant 9999$。

<1>. 分析

由于 k 可以达到 99，因此必须采用高精度计算。本题只要求出 $S_m(n)$的后 k 位数，所以，每次计算只取结果的后 k 位数即可。显然，计算 $S_m(n)$将耗费大量的时间用于乘幂运算。下面，我们分析乘幂运算的算法。

<2>. 朴素的乘幂算法

根据乘幂的定义，我们将 i 自乘 m 次即可。

算法 3-1，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
  begin
    SetValue(x,1); {x 是高精度数}
    for k:=1 to m do
      x:=Mul(x,i); {Mul 是高精度乘法，返回 x*y 的值}
    Power:=x
  end;
```

采用算法 3-1 计算 i^m，需要进行 M 次高精度乘法。

<3>. 粗略利用信息，优化算法 3−1

算法 3-1 对信息的利用很不充分。例如，要计算 i^5，现在已经求出了 i^3 的值，算法 3-1 会利用 i^3 和 i 的值，求出 i^4，进而求出 i^5。而实际上，在计算 i^3 之前，我们已经求出了 i^2 的值，将 i^3 乘上 i^2，就可以求出 i^5。

我们用数组 p[k]保存已经计算出的 i^k 的结果，在计算过程中，尽可能的使用已经计算过的信息。例如，我们可以这样计算 i^{15}：

p[1]=i
p[2]=p[1]*p[1]
p[3]=p[2]*p[1]
p[6]=p[3]*p[3]
p[7]=p[6]*p[1]
p[14]=p[7]*p[7]
p[15]=p[14]*p[1]

这样，我们只用了 6 次高精度乘法，就求出了 i^{15}。

从上面的例子可以看出，将一个已知结果平方，就可以只用一次乘法，求出一个比较大的指数幂，根据这个思想就可得到算法 3-2：

$$i^m=\begin{cases}(i^{\frac{m}{2}})^2 & \text{m为偶数}\\ i(i^{\frac{m-1}{2}})^2 & \text{m为奇数}\end{cases}$$

算法 3-2，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
   begin
      if m=1 then Power:=i
               else begin
                  Temp:=Power(i,m div 2);
                  Temp:=Mul(Temp,Temp);
                  if Odd(m) then Power:=Mul(Temp,i)
                              else Power:=Temp
               end
   end;
```

算法 3-2 计算 i^m 需要 $O(\log_2 m)$次高精度乘法。这样，我们通过对信息的粗略利用[8]，将时间复杂度从 O(m)降到了 $O(\log_2 m)$。

算法 3-2 实质上就是二分法。采用二分法求乘幂，之所以比累乘的方法高效，就在于它更加充分的利用了已知信息。

<4>. 充分利用信息，进一步优化算法 3-2

注意到在计算 i^m 时，我们已经知道了 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 的值，而这些值在算法 3-2 计算 i^m 时没有起任何作用。如果能够建立 i^m 与 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 的关系，就可更快计算 i^m。

例如，求 120^m。这时，我们已经计算了 5^m 和 24^m 的值。显然，5^m 和 24^m 相乘，就可以得到 120^m。

当 i 是合数时，设 i=pq，其中 1<p,q<i。显然，$i^m=(pq)^m=p^mq^m$。由于 p,q<i，因此在计算 i^m 时，p^m 和 q^m 都是可以直接利用的信息。这样，对于合数 i，我们只需要一次高精度乘法，就可以求出 i^m。

采用这种方法得到算法记为算法 3-3。设 1..n 中，有 x 个合数，则算法 3-3 只做了$(n-x)\log_2 m+x$ 次高精度乘法。自然数中素数的分布十分稀疏，实践证明，当 n=m=9999,k=99 时，算法 3-3 的效率是算法 3-2 的 5 倍。

<5>. 小结

下面是三个算法的性能分析表：

分析项目		算法 3-1	算法 3-2	算法 3-3
理论分析	时间复杂度	O(nm)	$O(n\log_2 m)$	$O(n\log_2 m)$
	空间复杂度	O(k)	O(k)	O(nk)
实际运行情况	N=M=100,K=99	0.1	<0.05	<0.05
	N=100,M=9999,K=99	20s	0.5s	0.1s
	N=M=1000,K=99	15s	3s	1s
	N=M=9999,K=99	>60s	55s	10s

在这个例子中，我们首先通过对信息的粗略利用，优化朴素的乘幂算法 3-1，

得到采用二分法的算法 3-2。进一步分析发现，二分法在计算 i^m 时，没有利用已经求出的 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 等信息，充分利用这些信息，得到了更快的算法 3-3。由于算法 3-3 需要保存一些已经求过的值[9]，所以，该算法实质上是以空间为代价换取了时间。

四、 结束语

在搜索中加入记忆化信息提高回溯法的效率，改变动态规划中状态表示的含义提高动态规划的效率，采用二分法提高数值计算的效率，都不同程度的体现了对已知信息的充分利用。但仅使用这些常用技巧优化算法，仍可能存在多余的运算。如果能够更加充分的利用已知信息，就可以收到更好的效果。

在算法中削去冗繁，关键在于找到可利用的已知信息，一旦把它们**充分**利用起来，就可以大大提高算法效率。

【参考文献】

1. 《信息学奥林匹克》. 1999(3)
2. 吴文虎，王健德 .《实用算法与程序设计》. 电子工业出版社 . 1998.01
3. 刘福生，王建德 .《青少年国际信息学（计算机）奥林匹克竞赛指导——人工智能搜索与程序设计》. 电子工业出版社 . 1993. 04
4. 《郑板桥集》

【附录】

[1]. 摘自《郑板桥集》第 206 页，全诗如下：

题画竹

四十年来画竹枝
日间挥写夜间思
冗繁削尽留清瘦
画到生时是熟时

[2]. 见参考文献[2]。

[3]. 在后面的分析中可以看到，调用粗体部分程序段的总次数是

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}C_i^j = \sum_{i=0}^{n}2^i = 2^{n+1}$$

故算法的时间复杂度为 $O(2^{n+1})=O(2^n)$。

[4]. 也可以直接采用数学方法推导公式 1。但我认为，这比本文中使用的方法更难掌握。在参考文献[1]中，给出了一个形式上更简单的计算公式，但这个公式的设计也颇有难度。参考文献[1]中给出的公式是：

$$F(m,t)=[F(m-1,t-1)+F(m-1,t)]\times t$$

$$\text{边界条件：}F(1,1)=1, F(1,t)=0(t>0)$$

$$n\text{个数的序关系数是：}\sum_{i=1}^{n}F(n,i)$$

[5]. 本文中所有程序的运行环境均为 Pentium 100MHz，BP7.0 编译。

[6]. 如果我们边读数据边规划，就只要保存 V[i-1]和 V[i]，而没有必要定义长度为 M 的数组 V。这样，算法的空间复杂度降到了 O(1)。

[7]. 公式 6 可进一步化简：

$$\begin{aligned}
MaxF[i] &= \max\{MaxF[i-1], F[i-1]\}\\
&= \max\{MaxF[i-1], MaxFV[i-1]*V[i-1]\}\\
MaxF[i]/V[i-1] &= \max\{MaxF[i-1], MaxFV[i-1]*V[i-1]\}/V[i-1]\\
&= \max\{MaxF[i-1]/V[i-1], MaxFV[i-1]*V[i-1]/V[i-1]\}\\
&= \max\{MaxF[i-1]/V[i-1], MaxFV[i-1]\}\\
&\geq MaxFV[i-1]\\
MaxFV[i] &= \max\{MaxFV[i-1], MaxF[i]/V[i-1]\}\\
&= MaxF[i]/V[i-1]\\
MaxF[i] &= \max\{MaxF[i-1], MaxFV[i-1]*V[i-1]\}\\
&= \max\{MaxF[i-1], MaxF[i-1]/V[i-2]*V[i-1]\}
\end{aligned}$$

这样可以得到如下递推关系式：

$$MaxF[i]=\max\{MaxF[i-1],MaxF[i-1]/V[i-2]*V[i-1]\}$$

在源程序 Pro_2.pas 中，给出了这个公式的算法 2-4。算法 2-4 的时空复杂度同算法 2-3，只是形式上更加简单。

[8]. 值得说明的是，采用二分法求乘幂，并不是最充分利用已知信息的方法。例如，采用二分法计算 i^{15} 需要 6 次乘法，而实际上，我们只需 5 次乘法即可。

```
p[1]=i;
p[2]=p[1]*p[1]
p[3]=p[2]*p[1]
p[6]=p[3]*p[3]
p[9]=p[6]*p[3]
p[15]=p[9]*p[6]
```

要得到求乘幂的最优方案，需要耗费大量的时间 (见参考文献[3])。由于二分法的计算次数，与最优的次数非常接近，因此，本文选择了二分法。

[9]. 我们只需保存已算出的 $1^m,2^m,\ldots 4999^m$ 的值即可。当然，还可以进一步优化空间复杂度，详见程序 Pro_3.pas。