

Contest 5 Solution

sunset

2020 年 5 月 1 日

题目名称	a	b	c
时间限制	4s	2s	4s
内存限制	1GB	1GB	1GB
题目类型	传统型	传统型	传统型

1 a

考虑多项式 $P(y) = \sum_{i=0}^k p_i y^i$. 设 $Q(y) = P^n(y)$, 则答案为

$$\sum_{i=0}^{nk} q_i \min(i, x) = \sum_{i=0}^{x-1} q_i \times i + (1 - \sum_{i=0}^{x-1} q_i) \times x.$$

因此只需求 $P^n(y)$ 的前 x 项. 用两种方法对 $P^{n+1}(y)$ 求导:

$$(P^{n+1}(y))' = (n+1)P^n(y)P'(y),$$

$$(P^{n+1}(y))' = (P^n(y))'P(y) + P^n(y)P'(y).$$

比较对应项系数即可. 总时间复杂度为 $O(kx)$.

2 b

记 A 为 0 的最后一次出现位置, B 为 1 的最后一次出现位置, 那么一个字符串出现的概率为 $2^{-\min(A, B)}$.

考虑给定位置全是 0 的概率. 考虑按照 $m = \min(A, B)$ 对所有字符串分类.

若 $m = a_k$, 这样的字符串有 $\binom{m-k}{n-k}$ 个.

若 $m < a_1$ 或 $a_i < m < a_{i+1}$ 或 $m > a_k$, 且 $m = B$, 则这样的字符串有 $\binom{m-i-1}{n-1}$ 个. 预处理 $\binom{j}{n-1} \times 2^{-j}$ 的前缀和即可.

若 $m > a_k$ 且 $m = A$, 则这样的字符串有 $\binom{m-k-1}{n-k-1}$ 个. 预处理 $\binom{j}{n-k-1} \times 2^{-j}$ 的前缀和即可.

注意到只有 $O(\sqrt{n})$ 不同的 k , 总时间复杂度为 $O(n\sqrt{n})$.

实现时注意考虑各种边界情况.

3 c

如果 k 是奇数, 答案的下界为

$$\sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k \binom{n}{i},$$

因为每个大小为 $\frac{k+1}{2}$ 的集合每组至多一个.

k 是偶数的情况类似, 答案还需要加上 $\lceil \frac{1}{2} \binom{n}{k/2} \rceil$.

注意到 $i \geq \frac{k}{2}$ 时, 一定有 $\binom{n}{i} \geq \binom{n}{k-i}$, 所以考虑将大小为 i 的集合与大小为 $k-i$ 的集合一一匹配. 由于 Hall 定理, 满匹配一定存在. 使用 Dinic 算法即可求出方案.

对于 k 是偶数的额外情况, 可以建一般图进行匹配. 对于 $n \leq 17$ 的情况, 取到答案下界的匹配经验证一定存在. 对于更大的情况如果有反例或是能构造性证明, 欢迎与出题人交流.

时间复杂度虽然理论很高, 但常数非常小, 且可以在求带花树时先贪心跑一遍匹配以优化常数. 因为可能的输入不多, 可以在本机进行测试以确保通过.