

# 试题讲评

ditoly

# 送分

- 定义一个集合的权值为  $F(S, x) = \sum_{T \subseteq S} G(T) \cdot x^{|T|}$ ,  $G(T)$  为  $T$  中元素的异或和, 给定一个序列, 每次给出  $l, r, x$ , 求序列中  $[l, r]$  对应集合的  $F(S, x)$ , 答案对 998244353 取模
- $n, m \leq 10^5$ ,  $a_i, x < 998244353$

# 送分

- 首先，二进制下每一位对答案的影响是独立的，我们可以分开考虑
- 显然，我们只要考虑区间中这一位出现了几个0，几个1
- 记出现了 $s_0$ 个0， $s_1$ 个1
- 0对异或值没有影响，那么每个0可以选了让答案多乘一个 $x$ 或者不选，0对答案贡献的倍数是 $(x + 1)^{s_0}$
- 只有选了奇数个1才会对答案有贡献，所以1的部分贡献为 $\sum_{i \text{ 为奇数}} C_{s_1}^i x^i$

# 送分

- 根据二项式定理构造一下
- $(x + 1)^n = \sum C_n^i x^i$
- $(-x + 1)^n = \sum C_n^i \cdot (-1)^i x^i$
- $(x + 1)^n - (-x + 1)^n = 2 \sum_{i \text{ 为奇数}} C_n^i x^i$
- 所以答案为  $(x + 1)^{s_0} \cdot \frac{(x+1)^{s_1} - (1-x)^{s_1}}{2}$
- 用前缀和来算  $s_0, s_1$
- 时间复杂度  $O(n \log a_i + m \log a_i \log n)$



# 工作

- 有 $n$ 个工人，第 $i$ 个工人的初始效率值为 $a_i$ 。有 $m$ 个工作，第 $i$ 个工作需要恰好 $k_i$ 个工人来完成。你可以分配工人去完成工作，一个工人可以参加多个工作，但不能重复参加一个工作。当一个工人参加一个工作时，你会获得等同于这个工人当前效率值的收益，然后这个工人效率值减1。求完成任务的最大收益。
- $n, m \leq 5 \times 10^5$

# 工作

- 我们贪心地依次对每个工作分配工人，每次选择当前效率最大的  $k_i$  个工人，不难证明这个贪心的正确性
- 考虑维护工人的效率顺序，令当前效率第  $k_i$  大的效率为  $x$ ，那么每次把所有大于  $x$  的全部减1，等于  $x$  的把排在最前面的几个减1，这样不会影响顺序
- 用线段树维护，在线段树上二分出操作区间后区间减和区间求和就好了
- 时间复杂度  $O((n + m) \log n)$

# 串

- 有一个长度为 $n$ 的字符串 $S$ 。如果 $T$ 是 $S$ 某个回文子串的前缀，我们称 $T$ 为 $S$ 的好子串。定义 $F(S)$ 表示 $S$ 有多少种本质不同的好子串，令 $S$ 前 $i$ 个字符组成的前缀为 $S_i$ ，你需要对每个 $i$ 求出 $F(S_i)$
- $n \leq 3 \times 10^5$

# 串

- 首先我们考虑如何计算 $F(S)$ ，显然我们只需要考虑 $S$ 每个前缀的最长回文后缀
- 假设把这些最长回文后缀排个序，每个串的长度之和减去相邻串之间的 $LCP$ 就是答案
- 那么如果要对 $S$ 的每个前缀都计算答案，我们只要维护这些最长回文后缀的顺序，然后依次把每个前缀的最长回文后缀加进来，同时根据与大小相邻的串的 $LCP$ 计算对答案的影响即可
- 求最长回文后缀可以用回文树， $LCP$ 用二分+哈希等方式随便搞搞就行了，问题是如何维护顺序



# 串

- 我们可以用一个平衡树来维护这些最长回文后缀之间的顺序
- 插入的时候比较用二分+哈希就 $O(n \log^2 n)$ 了
- 用SA优化一下求LCP来比较就 $O(n \log n)$ 了
- 还有一种更巧妙的比较方法：先比较两个串的第一个字符，一样的话把串去掉头尾两个字符还是回文串并且一定已经在平衡树里了，那么比较两个已经在平衡树内的元素可以用重量平衡树（例如替罪羊树或treap）标号（给每个节点分配一个实数区间来作为rank值）的方式 $O(1)$ 解决，时间复杂度 $O(n \log n)$

- 谢谢大家