9. 原式 $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+2\cdot\frac{n}{n}}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx=\left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1$

$=\sqrt{3}-1$。

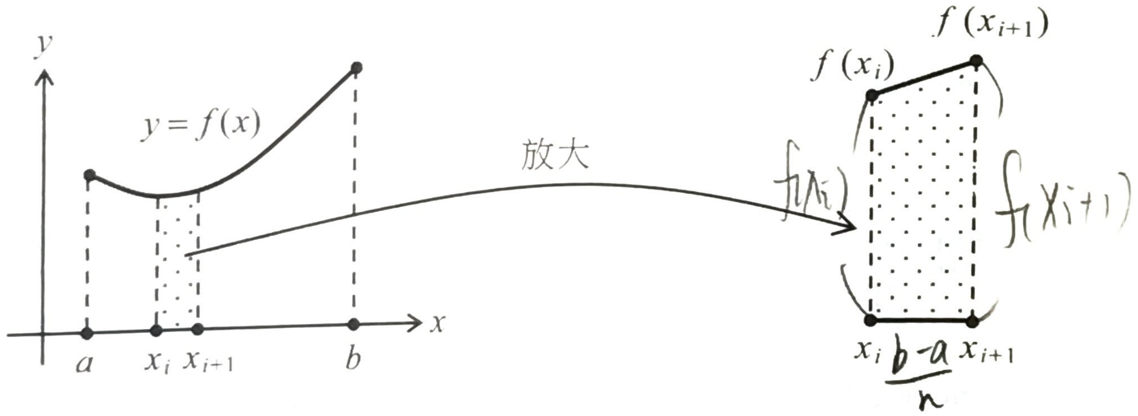
10. 原式 $=\int_0^1\tan x dx=\left[-\ln|\cos x|\right]_0^1=-\ln(\cos 1)$。

§5-5 近似積分法

雖然明明知道連續函數之定積分必定存在，但許多函數之不定積分卻不易求，只好退而求其次，以其近似值來表示，因此有必要發展“近似積分法”。本節共說明二種方法如下：

第一法：梯形法則(Trapezoidal rule)

如下圖所示，欲計算 $\int_a^b f(x)dx$ 之值，將區間 $[a,b]$ 平分為 n 等



分，則等分之寬度為 $h=\frac{b-a}{n}$，梯形法則之原理是：將 $f(x)$ 之每一小段皆以“直線”來近似！形狀為梯形，因此第 i 個梯形之面積為

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n}=\frac{(b-a)\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]}{2n}$$

令 $a \equiv x_0$，$b \equiv x_n$，則

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\}$$

$$=\frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

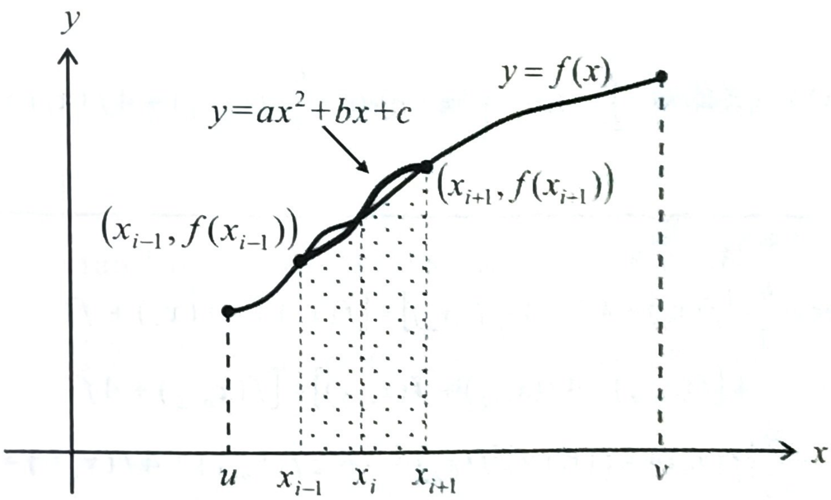
其中 $h=\dfrac{b-a}{n}$：等分間距

記法：$\dfrac{h}{2}\left\{\begin{array}{llllll} 1+1 & & & & & \\ & 1+1 & & & & \\ & & 1+1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1+1 & \\ & & & & & 1+1 \end{array}\right\}$

$$=\frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

左邊界 → 右邊界 1, 2, 2, 2, 2, 2, ⋯ 2, 2, 1

第二法：辛普生法則(Simpson rule)



辛普生法則之原理乃是：將每一小段皆以“二次曲線”來近似！現取

區間 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$，設想有一個二次曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 正好通過 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$，$(x_i, f(x_i))$，$(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ 此三點，因此有：

$$ax_{i-1}^2 + bx_{i-1} + c = f(x_{i-1}) \qquad \cdots(1)$$
$$ax_i^2 + bx_i + c = f(x_i) \qquad \cdots(2)$$
$$ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c = f(x_{i+1}) \qquad \cdots(3)$$

則此一區域之面積為

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3}(x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3) + \frac{b}{2}(x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2) + c(x_{i+1} - x_{i-1})$$
$$= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}\left[2a(x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_{i-1} + x_{i-1}^2) + 3b(x_{i+1} + x_{i-1}) + 6c\right]$$

令 $x_{i+1} - x_{i-1} = 2h$，其中 $h = \dfrac{v-u}{n}$：等分間距

即 $x_{i+1} = x_i + h$，$x_{i-1} = x_i - h$，將上式全部以 h 與 x_i 取代得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}\left[a(6x_i^2 + 2h^2) + 6bx_i + 6c\right] \qquad \cdots(4)$$

而 $(1) + 4 \times (2) + (3)$ 得

$$f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}) = a(6x_i^2 + 2h^2) + 6bx_i + 6c \qquad \cdots(5)$$

比較(4)、(5)二式即知 $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$

令 $u \equiv x_0$，$v \equiv x_n$，則

$$\int_u^v f(x)dx = \frac{h}{3}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots$$
$$+ [f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$
$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

且 n 必須為偶數(因為一次算二個面積)。

記法：$\dfrac{h}{3}\left\{\begin{array}{l} 1+4+1 \\ \quad 1+4+1 \\ \qquad 1+4+1 \\ \qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad 1+4+1 \\ \qquad\qquad\quad 1+4+1 \\ \qquad\qquad\qquad 1+4+1 \end{array}\right\}$

$h=\dfrac{v-u}{n}$

$=\dfrac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$

左邊界 → 右邊界 1, 4, 2, 4 2 4 2 4 2 . 4 2 4 1

觀念說明

1. 梯形法則屬於一次(直線)近似，辛普生法則屬於二次(拋物線)近似，故對一函數而言，取相同的等分，則辛普生法則較梯形法則準確。
2. 梯形法則之等分數 n 為奇數或偶數均可，但辛普生法則之 n 必須為偶數。
3. 無論梯形法則或辛普生法則，都屬於"等間距"積分，即間隔取的愈細所得之面積愈精確！另有"不等間距"積分，在數值分析會提到。

說例 1 基本題	(1)以梯形法則，取等分數 $n=4$、$n=8$ 分別求 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 之近似值到小數點以下第四位。 (2)以辛普生法則取 $n=4$ 求 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 之近似值到小數點以下第四位。

[真解]原式 $=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}\approx 0.785398$，此值可以拿來比較！

(1)[梯形法則]四等分，則 $x=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1$，間距為 $\dfrac{1-0}{4}=\dfrac{1}{4}$

$$\text{原式}\approx\frac{\frac{1}{4}}{2}\left[1\cdot\frac{1}{1+0}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{16}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{16}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{16}}+1\cdot\frac{1}{1+1}\right]=0.7828。$$

[梯形法則]八等分，則 $x=0,\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{4}{8},\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8},1$，間距為 $\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$

$$原式\approx\frac{\frac{1}{8}}{2}\left[1\cdot\frac{1}{1+0}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{64}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{64}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{64}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{16}{64}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{25}{64}}\right.$$

$$\left.+2\cdot\frac{1}{1+\frac{36}{64}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{49}{64}}+1\cdot\frac{1}{1+\frac{64}{64}}\right]=0.7847$$

(2)[辛普生法則]四等分，則 $x=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1$，間距為 $\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$

$$原式\approx\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[1\cdot\frac{1}{1+0}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{16}}+2\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{16}}+4\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{16}}+1\cdot\frac{1}{1+1}\right]=0.7854。$$

吾人發現：辛普生法則較梯形法則準確！

*　　　*　　　*

類　利用梯形法則與辛普生法則分別求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 之近似值($n=4$)到小數以下第四位。

答：[梯形法則]四等分，則 $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1$，間距為 $\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$

$$原式\approx\frac{\frac{1}{4}}{2}\left[1\cdot e^{-0^2}+2\cdot e^{-(0.25)^2}+2\cdot e^{-(0.5)^2}+2\cdot e^{-(0.75)^2}+1\cdot e^{-1}\right]=0.7430。$$

[辛普生法則]四等分，則 $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1$，間距為 $\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$

$$原式\approx\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[1\cdot e^{-0^2}+4\cdot e^{-(0.25)^2}+2\cdot e^{-(0.5)^2}+4\cdot e^{-(0.75)^2}+1\cdot e^{-1}\right]=0.7468。$$

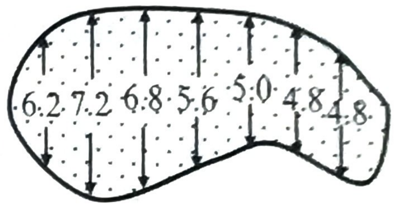
※精選習作※

1. 利用梯形法則，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,dx$ 之近似值。($n=4$)

2. 將 $[2,8]$ 六等分，以梯形法則求 $\int_2^8 \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}dx$ 之值到小數以下第四位。

3. 利用辛普生法則求 $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ 之近似值(n=4)到小數以下第四位。

4. 以辛普生法則求右圖之水池面積？間距為 2 米。(政大轉)



※解答※

1. 四等分，則 $x=0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{2\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{4\pi}{8}$，間距為 $\frac{\frac{\pi}{2}-0}{4}=\frac{\pi}{8}$

原式

$$\approx \frac{\frac{\pi}{8}}{2}\left[1\cdot 0+2\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{8}}+2\cdot\sqrt{\sin\frac{2\pi}{8}}+2\cdot\sqrt{\sin\frac{3\pi}{8}}+1\cdot\sqrt{\sin\frac{4\pi}{8}}\right]=1.1470$$。

2. 將 $[2,8]$ 六等分，故 $x=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$，間距為 $\frac{8-2}{6}=1$

$$\text{原式}\approx\frac{1}{2}\left[1\cdot\frac{1}{\sqrt{3+4}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+9}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+16}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+25}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+36}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3+49}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3+64}}\right]=1.2558$$。

3. 四等分，故 $x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1$，間距為 $\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$

$$\text{原式}\approx\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[1\cdot 1+4\cdot\sqrt{1+(0.25)^2}+2\cdot\sqrt{1+(0.5)^2}+4\cdot\sqrt{1+(0.75)^2}+1\cdot\sqrt{2}\right]$$

$$\approx\frac{1}{12}[1+4\cdot 1.0308+2\cdot 1.1180+4\cdot 1.25+1\cdot 1.414]=1.1478$$。

4. 由圖形看出分成八等分，間距為 2，故

$$\text{面積}\approx\frac{2}{3}[1\cdot 0+4(6.2)+2(7.2)+4(6.8)+2(5.6)+4(5.0)+2(4.8)+4(4.8)+1\cdot 0]$$

$$=84.2\ m^2$$。