

# Resumen

En este trabajo implementamos una solución al problema planteado en el tp: encontrar una manera de determinar qu sanguijuelas pegadas al parabrisas son peligrosas y eliminarlas, usando una representación matricial del sistema de ecuaciones que nos permita hallar la temperatura del parabrisas en cada punto, con una precisión determinada por la granularidad. tomando como incógnitas a, justamente, cada punto del parabrisas.

Para resolver dicho sistema de ecuaciones recurrimos a técnicas matemáticas basadas en métodos de resolución de sistemas, y dividimos en distintos módulos (structs) con funciones específicas al parabrisas y a la matriz del sistema de ecuaciones para facilitar la comprensión de la implementación hecha.

## **ndice**

Pg 3.....	Introduccin Terica
Pg 4.....	Desarrollo
Pg 8.....	Resultados
Pg 12.....	Discusin
Pg 14.....	Conclusiones
Pg 15.....	Apndice A
Pg 19.....	Referencias

# 1 Introducción Teórica

El objetivo de este trabajo es usar mtodos numricos para la resolucin de sistemas de ecuaciones, observndolos como una matriz multiplicada por un vector incgnita; de este producto obtenemos un vector resultado, utilizando el lenguaje C++.

Un sistema de ecuaciones puede representarse como un producto de matrices. Si  $x$  es el vector incgnita, resolver el sistema se reduce a encontrar un  $x$  tal que  $Ax = b$ .

Dos sistemas de ecuaciones se consideran equivalentes si y solo si tienen el mismo vector como solucin. Por lo visto en clase, la resta e intercambio de filas no afecta a la solucin del sistema, por lo tanto se pueden encontrar sistemas equivalentes mediante el uso de esta propiedad.

Para resolver nuestro sistema de ecuaciones (expresado en forma de una matriz) se us el mtodo conocido como 'Eliminacin Gaussiana', que recurre a la resta e intercambio entre filas de la misma matriz (con un multiplicador que sirva para reducir los valores por debajo de la diagonal a 0). De esta forma, el algoritmo nos permite triangular una matriz de forma relativamente eficiente (es decir llegar de una matriz comn a una triangular superior equivalente).

Una vez triangulada la matriz, puede hallarse el valor de la ltima posicin del vector incgnita, luego usarla para obtener la anteltima, y as sucesivamente hasta completar todo el vector.

Otro objetivo del trabajo es aprovechar la estructura banda de una matriz.

Una matriz banda es una matriz que, en cada fila, tiene ceros en todos los puntos salvo los que estn a una distancia determinada de la diagonal. Esto permite evitar almacenar muchos ceros.

## 2 Desarrollo

Nuestro trabajo apunta a resolver un problema que afrontamos dividiendolo en tres partes.

La **Primera parte** del problema consista en hallar una forma de representar el calor causado por unas sanguijuelas en un parabrisas rectangular en un momento determinado (este momento no est especificado, slo recibimos los datos relevantes correspondientes a dicho momento como argumento) representando dicho parabrisas como una matriz. Algunos puntos son conocidos, ya que el parabrisas tiene bordes con una temperatura constante, y fuentes de calor (sanguijuelas) con radio y temperatura a determinar por los parmetros  $r$  y  $t$ .

Como dato, se tena que cada punto del parabrisas satisfaca la ecuacin de Laplace.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Para poder modelar el parabrisas se tom una discretizacin, con granularidad variable. De esta forma, el parabrisas qued representado con una matriz de  $a/h + 1$  filas y  $l/h + 1$  columnas, siendo  $a$  el ancho en metros del parabrisas original,  $l$  su largo y  $h$  la granularidad elegida. A esta matriz la llamaremos "matriz parabrisas".

Aplicando el modelo de aproximacin por diferencias finitas se puede ver que la temperatura de cada punto desconocido puede expresarse como el promedio de cada uno de los puntos adyacentes. Es decir, la temperatura de cada punto del parabrisas se puede expresar como una ecuacin lineal: <sup>1</sup>

Considerando todos los puntos desconocidos de la matriz, se obtuvo entonces un sistema de ecuaciones lineales de  $a + l \times a + l$ , siendo  $a$  y  $l$  el ancho y el largo de la matriz parabrisas, respectivamente.

Nuestro problema entonces se reduca a plantear una resolucin: En un principio pensamos en utilizar una sola estructura para el problema, que generara la matriz a partir de los datos ledos en el archivo de entrada, suficientes para hallar la temperatura en cada punto del parabrisas. El problema que encontramos era que al crear la matriz, solo guardbamos sus celdas, perdiendo los datos originales del problema. De esta forma, no podamos generar la matriz parabrisas sin saber su ancho, para devolver los datos de la forma requerida. Guardar estos datos como parte de la estructura hubiera sido una solucin forzada, que hubiera hecho que la matriz dejara de ser una estructura genrica para volverse especifica de este problema. Por eso, optamos por una estructura parabrisas, que guardara todos los datos relevantes.

Por ejemplo, sea una matriz parabrisas de 3x3, sin sanguijuelas:

---

<sup>1</sup>Consideramos que un punto 'es sanguijuela' si la distancia al centro de una sanguijuela es menor o igual al radio de las sanguijuelas. La distancia entre el punto  $p = (p_x, p_y)$  y la sanguijuela con centro en  $s = (s_x, s_y)$  se calcula como  $\|p - s\|_2 = \sqrt{(p_x - s_x)^2 + (p_y - s_y)^2}$ . Si el punto est en el borde, no es sanguijuela, pero si el centro de la sanguijuela est en el borde, sigue modificando los puntos de alrededor.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones queda planteado de esta forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ 0 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Para almacenar la matriz se usaron dos mtodos. El primero fue un vector de filas, donde cada fila era un vector con todos sus valores. Para el segundo aprovechamos la estructura banda de la matriz para almacenar, de cada fila, solo los elementos que forman parte de la banda. Al triangular, la matriz mantiene su ancho de banda.

El vector de trminos independientes lo guardamos como parte de la estructura de la matriz, para facilitar las operaciones entre filas pero, principalmente, para poder implementar ms fcilmente una funcin que mostrara a la matriz por pantalla.

Para aprovechar la estructura banda se pens en guardar nicamente un vector de valores booleanos que permitiera saber para cada celda de la matriz parabrisas si su valor era conocido o desconocido, ya que solo con ese dato era posible saber el valor de toda la fila de la otra matriz. Sin embargo, esta estructura no puede mantenerse al triangular, ya que el valor de la fila toma valores que no dependen nicamente de la celda que representa.

Finalmente, para implementar la matriz banda, no creamos otra estructura, sino que modificamos la estructura matriz ya existente, de forma que incluyera un booleano que dijera si era una matriz banda, y un entero que indicara el ancho de banda. De esta forma, todas las operaciones de la matriz podan utilizarse para la matriz banda, con la nica excepcin de la funcin que permite definir un valor en una celda y la que busca el valor de una celda determinada, en las que hubo que separar en dos casos.

Al implementar esto, hubo que modificar el algoritmo que crea la matriz a partir de un parabrisas para que solo definiera los elementos de la banda. Tambin hubo que modificar indirectamente la eliminacin gaussiana, ya que al restar filas solo deban tenerse en cuenta las celdas que formaran parte de la banda. El ancho de banda es  $2 \times a + 1$ , donde  $a$  es el ancho de la matriz parabrisas.

Inicialmente trabajamos con tolerancia, forzando un 0 cuando el valor de una celda era menor a  $10^{-10}$  en mdulo, pero como no afectaba los resultados, consideramos como 0 solo a los 0 estrictos por razones de legibilidad.

La **Segunda parte** se trataba de experimentar con estos algoritmos

desarrollados y comparar tiempos y espacio ocupados por cada implementacin, que resolvimos probando diferentes experimentos, y comparando el rendimiento de ambas. Esperamos que la banda se desempeara de forma ms eficiente, ya que realiza menos operaciones, midiendo el orden de complejidad asinttico ( $O$ ) en peor caso de cada parte de la implementacin.

Operacin	Costo matriz comn	Costo matriz banda
Cargar los datos	$O(k)$	$O(k)$
Generar la matriz	$O(a^2 l^2 k)$	$O(a^2 l k)$
Triangular la matriz	$O(a^3 l^3)$	$O(a^3 l^2)$
Generar el vector de resultados	$O(a^2 l^2)$	$O(a^2 l^2)$
Imprimir el vector de resultados	$O(al)$	$O(al)$
Tiempo total de ejecucin	$O(a^3 l^3)$	$O(a^3 l^2)$

( $l$  es el largo de la matriz parabrisas,  $a$  es el ancho de la matriz parabrisas,  $k$  es la cantidad de sanguijuelas. El costo de generar la matriz incluye  $k$  porque es necesario chequear, para cada punto, si est en una sanguijuela. Para el costo total de ejecucin acotamos  $k$  por  $\max\{a, l\}$ )

Se tiene que lo que determina el costo total es la triangulacin de la matriz. Por eso, el algoritmo banda es temporalmente ms eficiente que el algoritmo de eliminacin gaussiana comn. Esto se debe a la operacin que resta filas, que se ejecuta hasta  $((al)^2)/2$  veces, ya que puede ser necesario ejecutarla una vez para generar un 0 en cada celda por debajo de la diagonal.

Esta operacin tiene como complejidad  $a \times l$  en el caso de la matriz comn, y  $2a + 1$  en el caso de la matriz banda, ya que solo debe restar las celdas que forman parte de la banda, cuya cantidad corresponde con el ancho de banda. La complejidad total de la triangulacin es, entonces,  $O((la)^3)$  en el caso de la matriz comn y  $O(l^2 a^3)$  en el caso de la banda.

Al reducirse la granularidad, debera aumentar el tiempo de ejecucin. Esto es porque reducir al doble la granularidad, por ejemplo, implica duplicar tanto el largo como el ancho de la matriz parabrisas. Si llamamos  $l'$  al largo del parabrisas original y  $a'$  a su ancho y consideramos  $l = l'/h + 1$  y  $a = a'/h + 1$ , podemos reescribir los rdenes de complejidad de los algoritmos. El algoritmo de triangulacin de la matriz comn cuesta  $O(\frac{l'^3 a'^3}{h^6})$  y el de la matriz banda,  $O(\frac{l'^2 a'^3}{h^5})$ .

La cantidad de sanguijuelas no debera afectar el tiempo de ejecucin, salvo que sea muy grande, superando la cota que consideramos al considerar el orden de complejidad del tiempo de ejecucin.

La **Tercera parte** del problema consista en encontrar un algoritmo que permitiera elegir qu sanguijuelas eliminar para que la temperatura del punto crtico del vidrio se mantuviera por debajo de 235, evitando eliminar ms sanguijuelas de las estrictamente necesarias. Nuestro algoritmo fue heurstico: elegimos que se eliminara siempre la sanguijuela ms cercana al centro. Elegimos hacerlo de esta manera porque la sanguijuela que ms influye en la temperatura de un punto es la ms cercana a el, siendo el borde fijo. En caso de que dos sanguijuelas sean equidistantes al centro, se elimina la ltima que se agreg.

Una opcin ms provechosa en trminos del uso de lseres sera usar un algoritmo

que antes de decidir si eliminar una sanguijuela simulara el estado del punto crtico posterior a su eliminacin, haciendo esta simulacin con todas las sanguijuelas (o con todas dentro un determinado radio); luego podra elegir una sanguijuela a eliminar observando en cul estado posterior de la simulacin el punto crtico baj ms. Un ejemplo en el que este ltimo algoritmo se desempea mejor sera si tomamos un caso en el que tenemos diez sanguijuelas muy cerca una de la otra y del punto crtico y una no tan cerca, pero en el que eliminar esta sanguijuela solitaria bastara para reducir la temperatura del punto crtico a un valor ptimo. El algoritmo que elegimos eliminara las 10 sanguijuelas ms cercanas, y recalculara todo el sistema cada vez. El algoritmo ms eficiente en uso de lers, en cambio, notara que eliminando una sola sanguijuela puede alcanzar un resultado aceptable, y al ver que eliminando una sola de las sanguijuelas ms cercanas no conseguira nada, elegira entonces a la ms lejana, matando una sola sanguijuela.

Sin embargo, nos inclinamos por el algoritmo heurstico debido a que consideramos que el costo del algoritmo ms inteligente tanto en complejidad de programacin, temporal y espacial sera mucho mayor, debido a que debera correr once veces la simulacin para decidirse por una sanguijuela, mientras que el de fuerza bruta slo una.

Adems, consideramos altamente improbable que se d un ejemplo as. Debera ser un caso particular en el que, por ejemplo, el radio de las sanguijuelas sea lo suficientemente pequeo como para que las cercanas al centro no afecten ningn punto de la grilla, mientras que la ms alejada, por hallarse ms cerca su centro de un punto de la grilla, modifique la temperatura del centro.

Decidimos implementar el algoritmo de forma que imprimiera en un archivo separado, cuyo nombre se pasa por parmetro, una lista de las coordenadas de las sanguijuelas eliminadas, en orden, junto con la temperatura en el punto crtico despues de cada eliminacin. Dado que despues de cada eliminacin era necesario recalcular todo el sistema, usamos para esto el algoritmo de matriz banda.

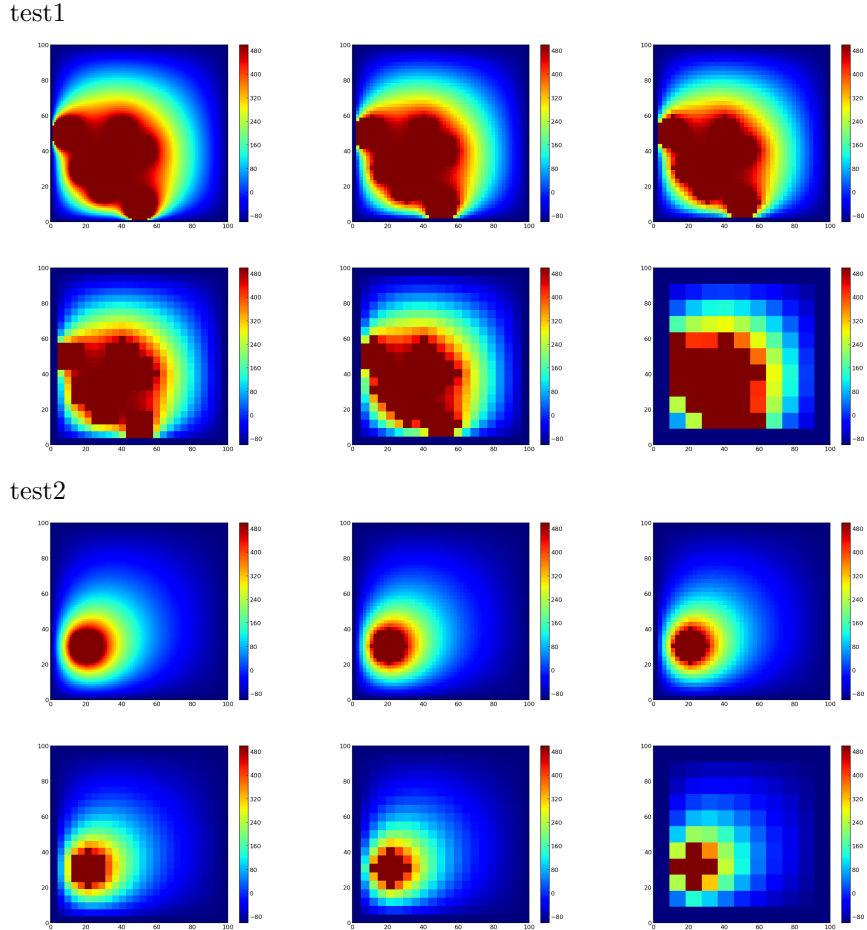
### 3 Resultados

Usamos los siguientes tests, cambiando la granularidad:

test	ancho	largo	radio	temp	#sang
test1	100	100	10	500	6
test2	100	100	10	500	1
test3	120	120	10	500	6
test4	120	120	10	500	1

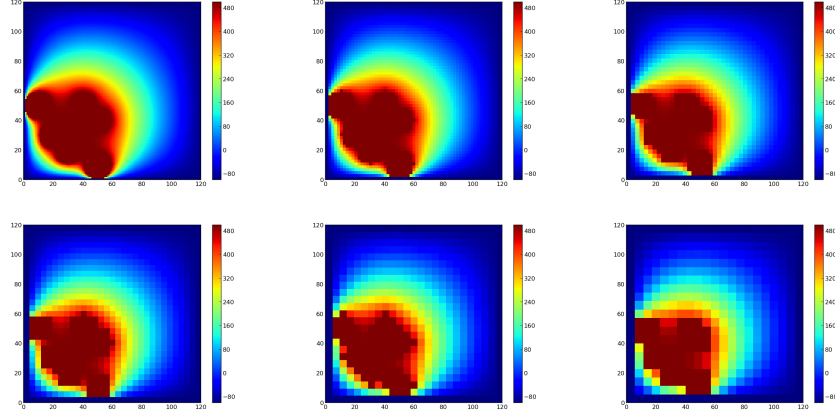
Tomamos 100 y 120 como ancho y largo para el parabrisas porque deban ser nmeros que permitieran variar la granularidad. Es necesario recordar que la granularidad debe dividir a ambos valores. Variamos la cantidad de saguijuelas para ver si afectaba el tiempo de ejecucin. No variamos su temperatura, ya que no debiera afectarlo, mientras que variar el radio debiera tener un efecto similar a varias la cantidad de saguijuelas.

Los siguientes son los mapas de temperaturas para cada test, generados con el archivo graphsol.py, provisto por la ctedra, con distintas granularidades: 1, 2, 2.5, 4, 5 y 10 para los primeros dos tests y 1, 2, 3, 4, 5, 6 para los ltimos dos.

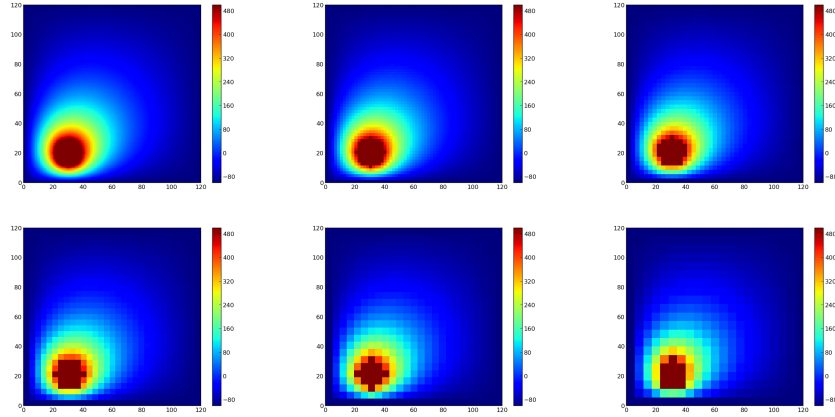




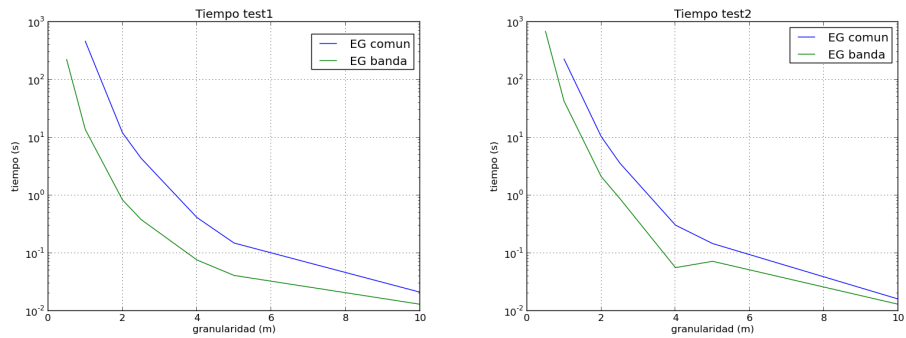
test3

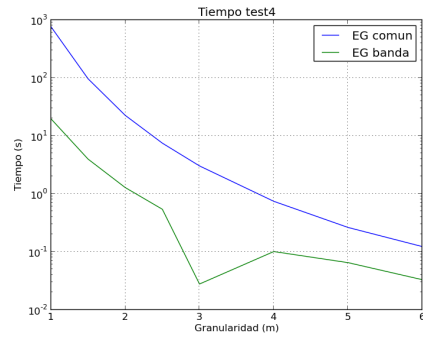
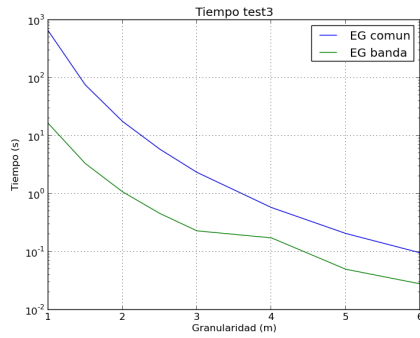


test4

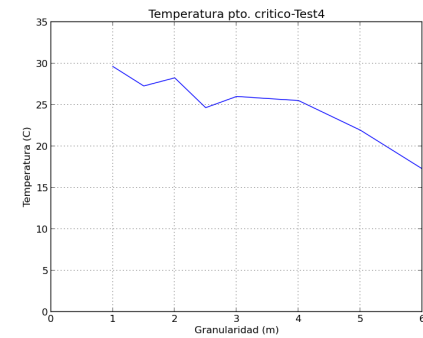
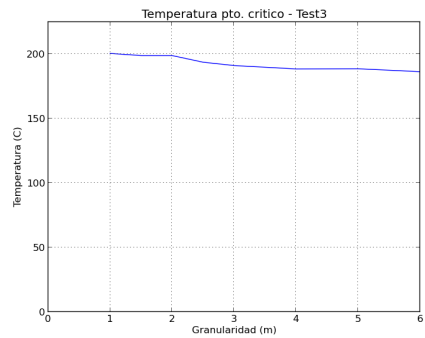
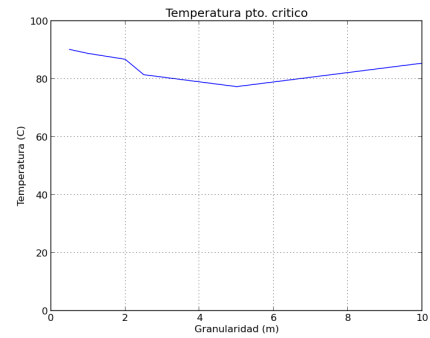
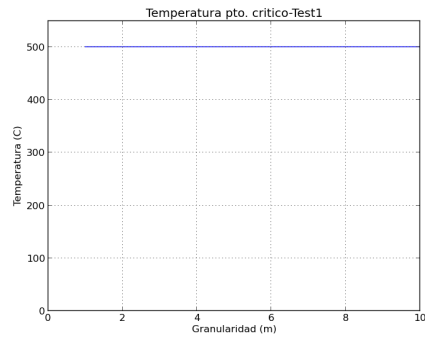


A continuacin graficamos el tiempo de ejecucin segn la granularidad. En cada test diferenciamos el mtodo de eliminacin gaussiana comn y banda. Las mediciones las efectuamos anteponiendo el comando 'time' en la ejecucin. Realizar varias mediciones produce una diferencia de hasta 0.5s, por lo tanto hicimos un promedio de varias ejecuciones; sin embargo, no se puede garantizar que los resultados para los casos de mayor granularidad sean confiables. Notar que la escala es logartmica:



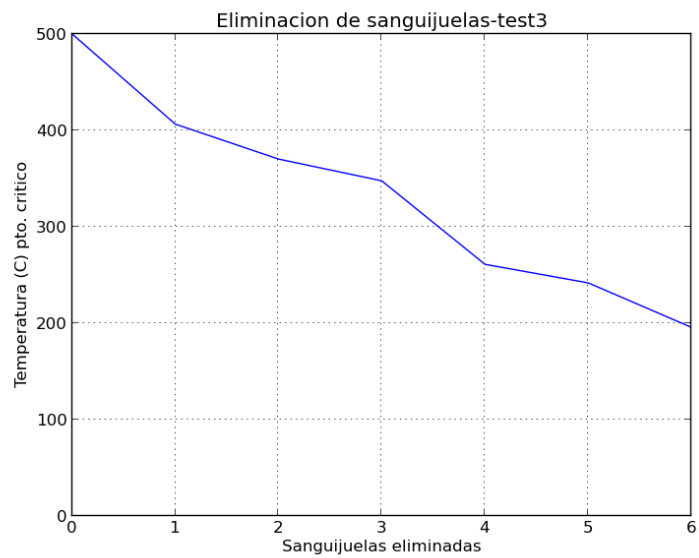
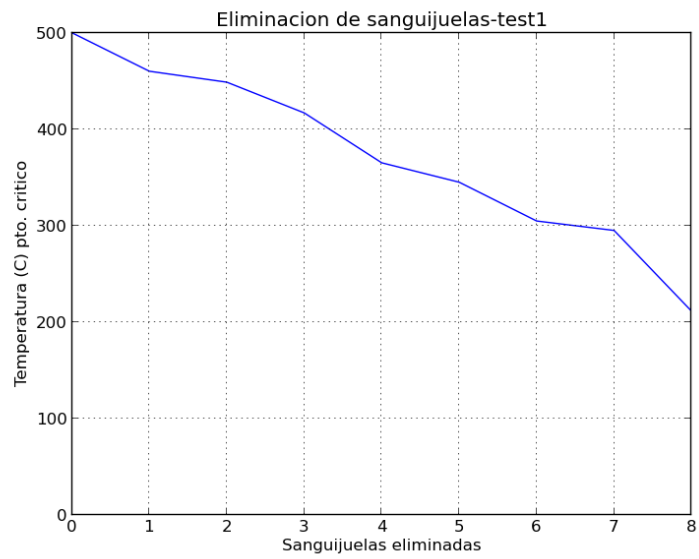


Lo que sigue es la temperatura del punto medio segun la granularidad. Si  $a/h$  o  $l/h$  no es divisible por 2, entonces no hay una celda que se corresponda con el punto critico. Una posibilidad para calcular su temperatura es, entonces, hacer un promedio de los cuatro puntos que lo rodean.



Para el algoritmo de eliminacin de sanguijuelas tomamos los tests 1 y 3, fijamos la granularidad en 2 y agregamos ms sanguijuelas, de forma que el algoritmo tuviera que repetirse un nmero mayor de veces.

test	ancho	largo	h	radio	temp	#sang
test1	100	100	2	10	500	15
test3	120	120	2	10	500	15



En cuanto al tiempo de ejecucin, obtuvimos estos resultados que presentamos junto a los del test correspondiente, sin eliminacin de sanguijuelas

test	tiempo sin elim	tiempo con elim	# elim	$\frac{\text{tiempo con elim}}{\text{tiempo sin elim}}$
test1	1,413	8,361	8	5,91
test3	3.159	13.347	6	4,22

## 4 Discusión

Llamaremos  $l$  al largo de la matriz parabrisas y  $a$  a su ancho.

Teniendo en cuenta que la matriz cuadrada es de  $(l \times a) \times (l \times a)$  y que la matriz banda solo debe conservar  $(l \times a) \times (2 \times a + 1)$  valores, la matriz banda ocupa menos memoria cuando  $l > 2$ . La diferencia escala con  $l$ . En el caso asintótico, ocupa  $O(l^2 a^2)$  la matriz cuadrada y  $O(la^2)$  la matriz banda.

Como se puede ver en los gráficos de tiempo de ejecución, el algoritmo de eliminación gaussiana banda fue más eficiente que el común. El algoritmo banda tardó alrededor de  $3l$  veces menos que el común en el test 1, algo que está en línea con lo que se esperaba. En los otros tests tardó más que eso, además de escalar la proporción más que  $l$ , por lo que podemos decir que la aproximación no fue muy buena.

La cantidad de sanguijuelas afectó al tiempo total de ejecución. En algunos casos lo aumentó y en otros lo redujo. Si bien al analizar el orden de complejidad en peor caso pareciera que solo debería aumentarlo, hay que tener en cuenta que agregar una sanguijuela implica cambiar algunos valores de la matriz de  $1/4$  a  $0$ . Esto reduce el tiempo de triangulación, que es el que domina la función.

Como esperábamos, reducir la granularidad aumentó el tiempo de ejecución. Se puede ver que una reducción de la granularidad del 50% llevó a un aumento del tiempo de ejecución del orden de  $2^4$  en la matriz banda y hasta  $2^5$  en la matriz común, aproximadamente; es decir, la mitad de lo esperado:

Matriz banda

test	$h=1$	$h=2$	$\frac{h=2}{h=1}$
test1	42,007	2,006	15,272
test2	13,073	0,856	20,94
test3	69,18	4,427	15,62
test4	27,926	1,807	15,45

Matriz común

test	$h=1$	$h=2$	$\frac{h=2}{h=1}$
test1	318,481	10,432	30,52
test2	431,00	4,380	32,40
test3	596,97	32,195	18,54
test4	711,23	27,969	25,42

Sin embargo, se dieron casos anómalos en los tests 1 y 3, donde la curva resultante no fue decreciente, pero no sabemos a qué pueden deberse.

Reducir la granularidad llevó a resultados más exactos, como se puede ver en los mapas de temperatura. Con los gráficos de temperatura del punto crítico podemos ver que el valor de ese punto parece ir tendiendo hacia un determinado límite; si pudiéramos tomar un límite con granularidad tendiente a  $0$  entonces encontraríamos el valor del punto crítico en el caso continuo, en otras palabras, cuanto más precisa la granularidad, obtendremos un resultado más confiable y cercano al real.

En cuanto al algoritmo de eliminación, se pudo ver que cada sanguijuela eliminada redujo la temperatura del punto crítico. Esto no garantiza que el algoritmo sea óptimo, ya que es evidente que si hubiera dos sanguijuelas en el mismo punto, esto no se daría. Pero dejando ese caso a un lado, podemos decir

que el algoritmo es bueno, ya que no desperdicia disparos en sanguijuelas que no afectan la temperatura del punto crítico.

En cuanto al tiempo de ejecución de este algoritmo, no coincide exactamente con el producto de la cantidad de sanguijuelas y el tiempo que se tarda en volver a calcular el sistema, si bien se aproxima. Esto se debe a que, como ya se dijo, recalcular el sistema con menos sanguijuelas no necesariamente cuesta lo mismo.

El cálculo de qué sanguijuela eliminar podrá optimizarse si guardamos un vector con la distancia al centro de cada sanguijuela, de forma que no habrá que volver a calcular la de todas cada vez que se busca una a eliminar. Esta solución, sin embargo, ocupará más espacio de memoria y no tendrá un gran impacto en el tiempo total.

## 5 Conclusiones

Podemos, al final de nuestro trabajo, sacar varias conclusiones respecto al enfoque que le dimos a este problema (y el que suponemos que era esperado que le diramos).

Primero, si se aumenta la granularidad, se pierde exactitud. Como consecuencia, el valor del punto crítico puede alejarse considerablemente del real, de forma que podrá ser mayor a 235 cuando el real no lo es. Además, si el diámetro de las sanguijuelas es menor a la granularidad, una sanguijuela podrá no cubrir ningún punto de la grilla, quedando el mapa de temperaturas como si esta no estuviera, dando como resultado una temperatura menor en el punto crítico a la real. Es decir que es conveniente elegir una granularidad menor al diámetro de las sanguijuelas. Sin embargo, esto no siempre es posible, ya que el radio podrá ser 0.

Teniendo esto en cuenta, junto al impacto de la granularidad en el tiempo de ejecución, podemos decir que obtuvimos los mejores resultados con granularidad alrededor de  $1/50$  del lado, con un parámetro cuadrado. Por supuesto, hay factores que modifican esto, como cuando precisa debe ser la medición del valor del punto crítico.

Podemos sacar otras conclusiones al ver las diferencias que surgen de implementar una matriz como una banda o como una columna.

Principalmente se puede ver la importancia que tiene el no guardar más datos de los necesarios (o de guardarlos de manera inteligente) para cubrir todas las funciones esperadas de nuestra estructura de manera satisfactoria, ya que es evidente que si bien ambas implementaciones cumplen con lo necesario para considerarse correctas, la eficiencia, tanto a nivel temporal como espacial, de la matriz banda sobrepasa por mucho a aquella de la matriz columna.

Habiendo dicho esto, uno podrá pensar que la matriz banda será deseable por sobre la columna en todos los casos, pero podemos hacernos la pregunta de si no hay algo que estemos perdiendo al obtener esta mayor eficiencia. Salta entonces a la vista que la matriz banda se diferencia de la columna en que está mucho más especializada, es decir que al aprovechar el hecho de que trabaja con una matriz con forma de banda, al asumir que los puntos alejados del centro a partir de una determinada distancia valen 0 estamos justamente reduciendo la cantidad de casos a los que la matriz banda es aplicable. La matriz banda trabaja mejor con todos los casos que puede, pero es aplicable a menos casos, mientras que la columna cambia velocidad y memoria por una versatilidad mucho mayor.

En otras palabras, si quisieramos usar la banda para alguna otra utilidad, distinta del trabajo que se nos pidió en este enunciado, tendríamos primero que comprobar si es aplicable a nuestros experimentos, mientras que con la columna ya directamente no habrá requisitos para representar en forma de matriz lo que sea que necesitemos.

Luego de haber sacado conclusiones de comparar nuestras implementaciones en términos de versatilidad, velocidad y tiempo, queda también ver qué podemos sacar de la comparación entre complejidad de implementaciones; sin embargo no encontramos mucha diferencia entre nuestra implementación de matriz banda y de columna, ya que nos limitamos a reducir el ancho de la matriz efectiva que guardamos, incluso comparten funciones (con ligeras variaciones).

## 6 Apndice A

### Laboratorio de Métodos Numéricos - Segundo Cuatrimestre 2014 Trabajo Práctico Número 1: “*No creo que a él le gustara eso*”

---

#### Introducción

El afamado Capitán Guybrush Threepwood se encuentra nuevamente en problemas. El parabrisas de su nave El Pepino Marino está siendo atacado simultáneamente por varios dispositivos hostiles vulgarmente conocidos como *sanguijuelas mutantes*. Estos artefactos se adhieren a los parabrisas de las naves y llevan a cabo su ataque aplicando altas temperaturas sobre la superficie, con el objetivo de debilitar la resistencia del mismo y permitir así un ataque más mortífero. Cada sanguijuela consta de una *sopapa de ataque* circular, que se adhiere al parabrisas y aplica una temperatura constante sobre todos los puntos del parabrisas en contacto con la sopapa.

Para contrarrestar estas acciones hostiles, el Capitán Guybrush Threepwood solamente cuenta con el sistema de refrigeración de la nave, que puede aplicar una temperatura constante de  $-100^{\circ}\text{C}$  a los bordes del parabrisas. El manual del usuario de la nave dice que si el punto central del parabrisas alcanza una temperatura de  $235^{\circ}\text{C}$ , el parabrisas no resiste la temperatura y se destruye. Llamamos a este punto el *punto crítico* del parabrisas.

En caso de que el sistema de refrigeración no sea suficiente para salvar el punto crítico, nuestro Capitán Guybrush Threepwood tiene todavía una posibilidad adicional: puede destruir algunas de las sanguijuelas, pero debe eliminar la menor cantidad posible de sanguijuelas dado que cada eliminación consume energía que puede ser vital para la concreción de la misión. La situación es desesperante, y nuestro héroe debe tomar una rápida determinación: debe decidir qué sanguijuelas eliminar de modo tal que el parabrisas resista hasta alcanzar la base más cercana.

#### El modelo

Suponemos que el parabrisas es una placa rectangular de  $a$  metros de ancho y  $b$  metros de altura. Llamemos  $T(x, y)$  a la temperatura en el punto dado por las coordenadas  $(x, y)$ . En el estado estacionario, esta temperatura satisface la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

La temperatura constante en los bordes queda definida por la siguiente ecuación:

$$T(x, y) = -100^{\circ}\text{C} \quad \text{si } x = 0, a \text{ ó } y = 0, b. \quad (2)$$

De forma análoga es posible fijar la temperatura en aquellos puntos cubiertos por una sanguijuela, considerando  $T_s$  a la temperatura ejercida por las mismas.

El problema en derivadas parciales dado por la primera ecuación con las condiciones de contorno presentadas recientemente, permite encontrar la función  $T$  de temperatura en el parabrisas, en función de los datos mencionados en esta sección.

Para estimar la temperatura computacionalmente, consideramos la siguiente discretización del parabrisas: sea  $h \in \mathbb{R}$  la granularidad de la discretización, de forma tal que  $a = m \times h$  y  $b = n \times h$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ , obteniendo así una grilla de  $(n + 1) \times (m + 1)$  puntos. Luego, para  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $j = 0, 1, \dots, m$ , llamemos  $t_{ij} = T(x_j, y_i)$  al valor (desconocido) de la función  $T$  en el punto  $(x_j, y_i) = (jh, ih)$ , donde el punto  $(0, 0)$  se corresponde con el extremo inferior izquierdo del parabrisas. La aproximación por *diferencias finitas* de la ecuación del calor afirma que:

$$t_{ij} = \frac{t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}}{4}. \quad (3)$$

Es decir, la temperatura de cada punto de la grilla debe ser igual al promedio de las temperaturas de sus puntos vecinos en la grilla. Adicionalmente, conocemos la temperatura en los bordes, y los datos del problema permiten conocer la temperatura en los puntos que están en contacto con las sanguijuelas.

### Enunciado

Se debe implementar un programa en C o C++ que tome como entrada los parámetros del problema ( $a, b, n, m, r, T_s$  y las posiciones de las sanguijuelas) que calcule la temperatura en el parabrisas utilizando el modelo propuesto en la sección anterior y que determine a qué sanguijuelas dispararle con el fin de evitar que se destruya el parabrisas. El método para determinar las sanguijuelas que serán destruidas queda a criterio del grupo, y puede ser exacto o heurístico.

Para resolver este problema, se deberá formular un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular la temperatura en todos los puntos de la grilla que discretiza el parabrisas, e implementar el método de Eliminación Gaussiana (EG) para resolver este sistema particular. Dependiendo de la granularidad utilizada en la discretización, el sistema de ecuaciones resultante para este problema puede ser muy grande. Luego, es importante plantear el sistema de ecuaciones de forma tal que posea cierta estructura (i.e., una matriz banda), con el objetivo de explotar esta característica tanto desde la *complejidad espacial* como *temporal* del algoritmo.

En función de la implementación, como mínimo se pide:

1. Representar la matriz del sistema utilizando como estructura de datos los tradicionales arreglos bi-dimensionales. Implementar el algoritmo



clásico de EG.

2. Representar la matriz del sistema aprovechando la estructura banda de la misma, haciendo hincapié en la complejidad espacial. Realizar las modificaciones necesarias al algoritmo de EG para que aproveche la estructura banda de la matriz.

En función de la experimentación, como mínimo deben realizarse los siguientes experimentos:

- Considerar al menos dos instancias de prueba, generando discretizaciones variando la granularidad para cada una de ellas y comparando el valor de la temperatura en el punto crítico. Se sugiere presentar gráficos de temperatura para los mismos, ya sea utilizando las herramientas provistas por la cátedra o implementando sus propias herramientas de graficación.
- Analizar el tiempo de cómputo requerido en función de la granularidad de la discretización, buscando un compromiso entre la calidad de la solución obtenida y el tiempo de cómputo requerido. Comparar los resultados obtenidos para las variantes propuestas en 1 y 2.
- Estudiar el comportamiento del método propuesto para la estimación de la temperatura en el punto crítico y para la eliminación de sanguijuelas.

Finalmente, se deberá presentar un informe que incluya una descripción detallada de los métodos implementados y las decisiones tomadas, incluyendo las estructuras utilizadas para representar la matriz banda y los experimentos realizados, junto con el correspondiente análisis y siguiendo las pautas definidas en el archivo `pautas.pdf`.

### Programa y formato de archivos

El programa debe tomar tres parámetros (y en ese orden): el archivo de entrada, el archivo de salida y el método a ejecutar (0: EG común, 1: EG banda). El archivo de entrada contiene los datos del problema (tamaño del parabrisas, ubicación, radio y temperatura de las sanguijuelas) desde un archivo de texto con el siguiente formato:

```
(a) (b) (h) (r) (t) (k)
(x1) (y1)
(x2) (y2)
...
(xk) (yk)
```

En esta descripción,  $a \in \mathbb{R}_+$  y  $b \in \mathbb{R}_+$  representan el ancho y largo en metros del parabrisas, respectivamente. De acuerdo con la descripción de la discretización del parabrisas,  $h$  es la longitud de cada intervalo de

discretización, obteniendo como resultado una grilla de  $n + 1 \in \mathbb{N}$  filas y  $m + 1 \in \mathbb{N}$  columnas. Por su parte,  $r \in \mathbb{R}_+$  representa el radio de las sopapas de ataque de las sanguijuelas (en metros),  $t \in \mathbb{R}$  es la temperatura de ataque de las sopapas, y  $k \in \mathbb{N}$  es la cantidad de sanguijuelas. Finalmente, para  $i = 1, \dots, k$ , el par  $(x_i, y_i)$  representa la ubicación de la  $i$ -ésima sanguijuela en el parabrisas, suponiendo que el punto  $(0, 0)$  corresponde al extremo inferior izquierdo del mismo.

El archivo de salida contendrá los valores de la temperatura en cada punto de la discretización utilizando la información original del problema (es decir, antes de aplicar el método de remoción de sanguijuelas), y será utilizado para realizar un testeo parcial de correctitud de la implementación. El formato del archivo de salida contendrá, una por línea, el indicador de cada posición de la grilla  $i, j$  junto con el correspondiente valor de temperatura. A modo de ejemplo, a continuación se muestran cómo se reportan los valores de temperatura para las posiciones  $(3, 19)$ ,  $(3, 20)$ ,  $(4, 0)$  y  $(4, 1)$ .

```
...
3  19  -92.90878
3  20  -100.00000
4   0  -100.00000
4   1   60.03427
...
```

El programa debe ser compilado, ejecutado y testeado utilizando los *scripts* de *python* que acompañan este informe. Estos permiten ejecutar los tests provistos por la cátedra, incluyendo la evaluación de los resultados obtenidos e informando si los mismos son correctos o no. Es requisito que el código entregado pase satisfactoriamente los casos de tests provistos para su posterior corrección. Junto con los archivos podrán encontrar un archivo README que explica la utilización de los mismos.

---

## Fecha de entrega

- *Formato electrónico:* Jueves 04 de Septiembre de 2014, hasta las 23:59 hs., enviando el trabajo (**informe + código**) a [metnum.lab@gmail.com](mailto:metnum.lab@gmail.com). El asunto del email debe comenzar con el texto [TP1] seguido de la lista de apellidos de los integrantes del grupo. Ejemplo: [TP1] Díaz, Bianchi, Borghi
- *Formato físico:* Viernes 05 de Septiembre de 2014, de 17:30 a 18:00 hs.

## 7 Referencias

Apuntes de clase

R. Burden y J.D.Faires, Analisis numrico, International Thomson Editors, 1998